

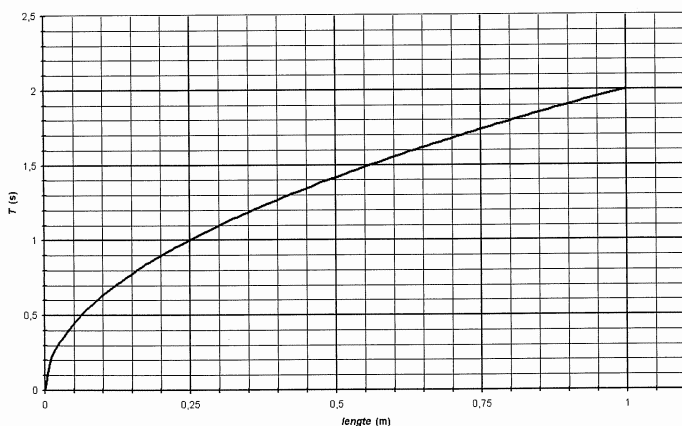
Sinds de tweede fase steken bètasecties de koppen bij elkaar, richten bètalabs in, stemmen richtlijnen voor onderzoeksverslagen op elkaar af, verzorgen profielmiddagen en stimuleren vakoverstijgende profielwerkstukken. Hoewel de organisatorische samenwerking tussen verschillende secties bloeit, blijkt inhoudelijke samenwerking en daarmee inhoudelijke samenhang en afstemming tussen de vakken maar moeilijk van de grond te komen. Binnen het SONaTeproject (nu het SaLVO-project) wordt inhoudelijke samenhang bevorderd door met docenten van verschillende secties materiaal te ontwikkelen op het gebied van verbanden.

# Evenredigheden en machtsverbanden bij wis- en natuurkunde

## Verbanden bij wiskunde en natuurkunde

Bij natuurkunde spelen verbanden tussen grootheden in de wereld om ons heen een belangrijke rol. Deze verbanden worden in de laagste klassen nog heel globaal beschreven. In de loop van hun schoolcarrière moeten leerlingen verbanden op steeds wiskundiger wijze kunnen weergeven. In klas 2 leren we bijvoorbeeld dat de slingertijd toeneemt als de slingerlengte groter wordt. Hoeveel precies, dat doet er nog niet zo toe. Als we preciezer gaan meten kunnen we specifieker worden: 'als ik de lengte van de slinger twee keer zo groot maak, wordt de trillingstijd 1,4 keer zo groot'. De meetgegevens kunnen worden verwerkt in een grafiek, waarmee het verband ook grafisch zichtbaar wordt. Uiteindelijk geven we het verband zo exact mogelijk weer in een wiskundige formule:

$$T = 2\pi \sqrt{l/g}$$



Figuur 1. Grafiek van het verband tussen slingerlengte en slingerstijd.

Wanneer we leerlingen vragen om verbanden zelfstandig te onderzoeken en verwachten dat ze uit een aantal meetpunten het verband tussen de grootheden in formulevorm kunnen afleiden, doen we een groot beroep op wiskundige vaardigheden. Leerlingen blijken echter vaak slecht in staat, dat wat bij wiskunde is geleerd toe te passen in deze natuurkundige situaties.

In het SONaTeproject (Zegers e.a., 2003) zijn knelpunten in de samenhang tussen wiskunde en natuurkunde op het gebied van (het onderzoeken van) verbanden in kaart gebracht<sup>1</sup>. Het begrip 'evenredigheid', dat bij natuurkunde vanaf klas twee

frequent wordt gebruikt, komt bij wiskunde niet of nauwelijks aan bod. Aan verbanden met meer dan twee variabelen wordt weinig aandacht besteed. Bij wiskunde gaat het om 'geslachtsloze' getallen, zonder betekenis en eenheid; causaliteit speelt amper een rol. Ook worden natuurwetenschappelijke contexten vaak slordig gebruikt. Als dan bovendien de docenten van de natuurwetenschappelijke vakken nauwelijks of niet weten wat er tegenwoordig bij wiskunde aan de orde komt en hoe en wanneer iets behandeld wordt, dan is het niet vreemd dat de aansluiting tussen de verschillende curricula ver te zoeken is.

Met deze bevindingen in de hand is een project gestart voor het ontwikkelen van (voorbeeld)lesmateriaal<sup>2</sup>, waarmee de aansluiting tussen wiskunde enerzijds en de natuurwetenschappelijke vakken anderzijds wordt bevorderd. Uit praktische overwegingen is begonnen met materiaal voor 4-vwo, rondom het onderzoeken van evenredigheden of – zoals dat bij wiskunde wordt genoemd – machtsverbanden.

## Voorwaarden voor samenhang

Uit de eerdere onderzoeken naar samenhang is een aantal voorwaarden voor samenhangend onderwijs gekomen (Zegers e.a., 2003). Zo moeten de examenprogramma's beter op elkaar worden afgestemd. Dit is iets wat voor de herziening van de programma's is toegezegd (brief minister taakstelling profielcommissies d.d. 12-3-2004) en waar ook de KNAW een lans voor breekt als zij het ontwikkelen van een raamwerk voor de profielen voorstelt, waaruit dan de inhoud van de profielvakken volgt (KNAW 2003). Dit is echter werk voor samenhang op de langere termijn en vooralsnog op het niveau van de programma's.

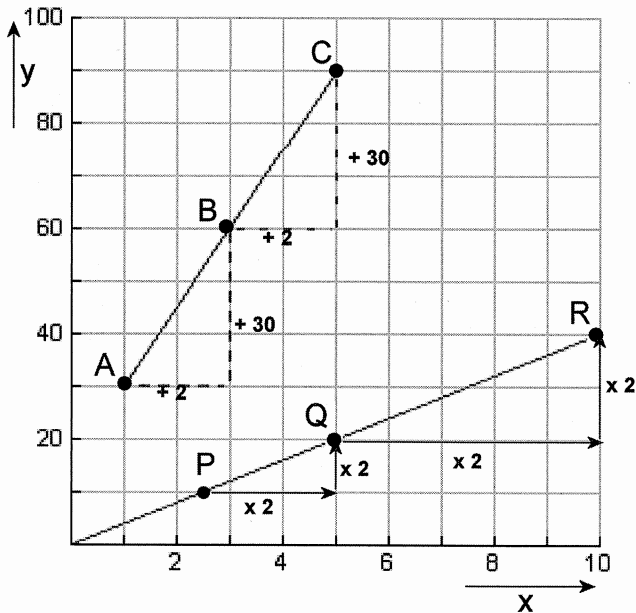
Op schoolniveau geldt als belangrijkste voorwaarde voor inhoudelijke samenhang in een leerjaar dat de docenten van verschillende vakken met elkaar om de tafel gaan zitten en uitwisselen wat zij doen in de les, bij elkaar in de boeken kijken, hun ideeën met elkaar bespreken. Samen naar elkaars vakinhouden kijken is niet alleen nodig, maar zeker ook inspirerend.

Bij het ontwerpen van lesmateriaal is die uitwisseling vanzelfsprekend voor de noodzakelijke inhoudelijke afstemming. Als een school echt aan de slag wil met samenhang, is de uitwisseling en discussie tussen docenten echt een voorwaarde en moet onderdeel uitmaken van het aanlooptraject naar samenhangende lessen.

## Het lesmateriaal

Kern van het lesmateriaal vormt het begrip evenredigheid. Hieronder wordt niet alleen rechtevenredig verstaan, maar ook omgekeerd evenredig en evenredig met een macht. Algemeen gesteld: er is sprake van evenredigheid als geldt dat  $y/x^n = constant$ , ofwel  $y = constant \cdot x^n$ . Dus als  $x^n$  a keer zo groot wordt, wordt  $y$  ook a keer zo groot. Als  $y/x^n = constant$ , is er sprake van omgekeerde evenredigheid. Dan geldt dat als  $x^n$  a keer zo groot wordt,  $y$  a keer zo klein wordt. In de wiskunde noemt men verbanden van deze vorm machtsfuncties. Later komt aan de orde dat als  $n$  negatief is in  $y = a \cdot x^n$ , er ook sprake is van omgekeerde evenredigheid.

Het lesmateriaal voor wiskunde werkt aan de hand van herkenbare problemen het begrip evenredigheid stap voor stap uit. Startend met het begrip *finesse*, het evenredige verband tussen zweefafstand en verticale daalafstand bij vogels en andere 'vliegers' leren de leerlingen hoe ze een verband uit tabelwaardes kunnen aflezen door te kijken naar de vermenigvuldigstappen (en niet naar de constante stapgrootte, zoals bij het lineair verband, zie figuur. 2).



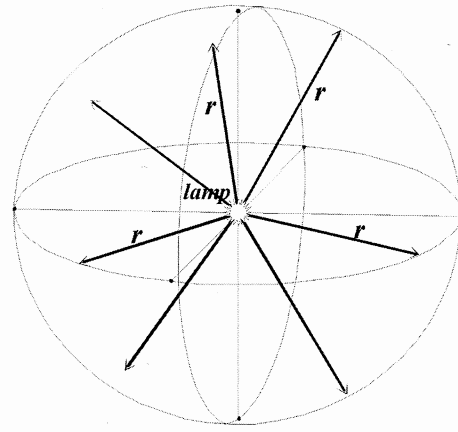
Figuur 2. Bij een evenredig verband letten we niet op gelijke stapgrootten, zoals bij ABC (een lineair verband), maar op een vaste vermenigvuldigstap als bij PQR.

De opgedane vaardigheden worden in het vervolg uitgebreid en toegepast bij ingewikkelder evenredigheden. De verlichtingssterkte op een bepaalde afstand van een (punt)lichtbron dient om omgekeerd kwadratische evenredigheid te introduceren. De leerlingen onderzoeken ook de omlooptijd van planeetbanen wordt onderzocht; voor een aantal van hen is dit een flinke breinkraker.

Een meer technisch hoofdstuk over machtsverbanden vat de verschillende evenredigheden samen; het behandelt de rekenregels voor exponenten.

Het concept van de vermenigvuldigstappen wordt hierna weer opgepakt en verder uitgewerkt in twee-, drie- en tienstaps- ofwel dubbellogaritmisch papier, waarop elke evenredigheid als een rechte lijn wordt weergegeven.

Als voorbereiding op de natuurkundeles dient de coördinatentransformatie, een aanpak waarbij de grafieken eveneens rechte lijnen worden. Ondanks de natuurwetenschappelijke en technische contexten laat het materiaal de wiskunde als zelfstandig vak tot zijn recht komen.



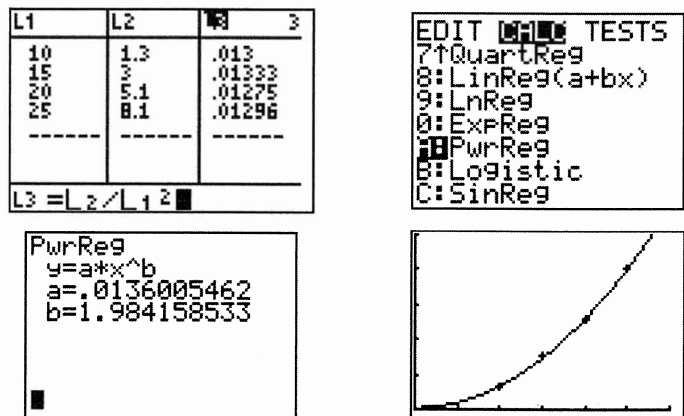
bolvormige verspreiding

Figuur 3. Leerlingen maken kennis met het omgekeerd kwadratisch verband bij het onderzoeken van de verlichtingssterkte.

Het natuurkundemateriaal – dat het best vlak na het wiskundemateriaal wordt gebruikt – herhaalt de verschillende evenredigheden kort. Daarna worden de bij wiskunde geleerde begrippen en vaardigheden direct ingezet bij het afleiden van verbanden. Het natuurkundemateriaal sluit expliciet aan op het wiskundemateriaal. Zo staan in een overzicht van standaardverbanden bij de verschillende grafieken de formule zowel in  $x$  en  $y$  als met natuurkundige grootheden.

Een belangrijk hulpmiddel bij het onderzoeken van een verband is de grafische rekenmachine. De mogelijkheid van bijvoorbeeld een functiefit via de regressievoorzieningen maken van de GR een zeer bruikbaar onderzoeksinstrument.

De GR wordt in beide vakken dan ook uitdrukkelijk ingezet, waarbij het gebruik zorgvuldig op elkaar is afgestemd. De GR slaat op deze manier een brug tussen beide vakken en bevordert de herkenbaarheid van de vaardigheden. Verder is de GR efficiënt, mits zinvol ingezet, en ontlent (zwakkere) leerlingen er steun aan. In het natuurkundemateriaal is tevens het gebruik van de omgeving Coach5 opgenomen. Bij wiskunde is dat programma nog onbekend en zijn de gebruiksmogelijkheden nog beperkt. De nieuwe Coach6 zal meer te bieden hebben voor wiskunde. Waarschijnlijk kan dit programma dan wel samenhangend gebruik worden.



Figuur 4. Powerregressie op de grafische rekenmachine.

Naast de uitgebreide aandacht voor evenredigheid zijn er enkele meer algemene uitgangspunten. Er is gekozen voor een probleemgerichte aanpak; de verschillende paragrafen starten met een herkenbaar instapprobleem. De leerling gaat daarna de nieuwe begrippen onderzoeken om ze later in steeds complexere probleemsituaties toe te passen. Bij het onderzoeken van de verbanden wordt met een stappenplan expliciet een

strategie aangeleerd. Deze aanpak biedt zeker aan zwakkere leerlingen in het begin veel houvast. Later volgen leerlingen de strategie vooral onbewust.

Het materiaal is zoals gezegd ontwikkeld voor 4-vwo. Daar kan het wiskundemateriaal in plaats komen van het hoofdstuk over machtsverbanden in de gebruikte methode. Bij het ontwikkelen van het natuurkundemateriaal is uitgegaan van H1 van de methode Newton. Het materiaal vervangt paragraaf 1.4 daarin. Het vinden van verbanden komt overigens ook bij andere methodes aan de orde en het materiaal is ook daar te gebruiken.

### Ervaringen in de klas

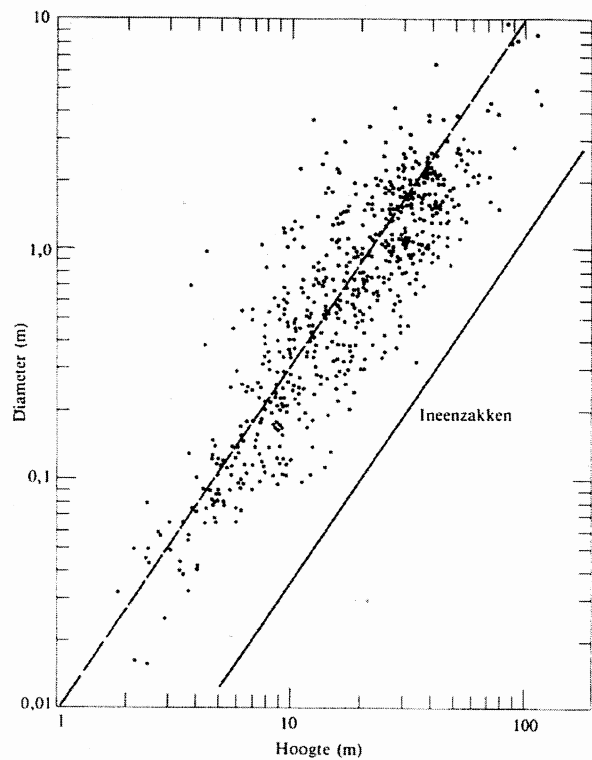
Het materiaal is dit jaar op twee scholen in zeven klassen uitgetoetst. In het begin van het schooljaar is gestart met het wiskundemateriaal. Direct daaropvolgend is het natuurkundemateriaal behandeld. Lesobservaties, interviews met leerlingen en leraren, de toetsen en ingevulde lesboekjes geven de nodige feedback over het materiaal.

De natuurkundeleraars geven aan direct positieve verschillen op te merken bij het doorlopen van de lessen. De eerste lessen gingen sneller dan normaal, voorheen onneembare hobbels werden nu door een aantal leerlingen zonder problemen genomen, leerlingen leken beter te weten waar ze mee bezig waren en leken zekerder van hun handelingen. Bovendien werd een grotere begripsontwikkeling bereikt, wat naar voren kwam bij het behandelen van de coördinatentransformatie (een onderwerp dat op één van beide scholen tot nu toe verschoven werd naar de vijfde klas, omdat het in de vierde niet goed opgepikt werd).

De positieve effecten mogen overigens niet alleen aan de samenhang toegeschreven worden. Leerlingen zijn effectief meer lessen bezig geweest met het begrip evenredigheid, wat ook tot een verdere begripsontwikkeling kan leiden.

Hoewel hiermee de belangrijkste doelstelling is bereikt – het realiseren van samenhang leidend tot een beter begrip –, blijkt dat met name het wiskundemateriaal nog een stevige bijstelling moet ondergaan. Sommige scholen differentiëren in vwo-4 nog niet naar profiel bij wiskunde, waardoor de wiskundegroepen zeer gemêleerd van samenstelling zijn. Voor een aantal leerlingen – zeker degenen met een maatschappijprofiel – bleek de stof moeilijk leerbaar. Opbouw en verwoording boden aan deze leerlingen te weinig houvast, waarbij de lay-out van het materiaal en de manier waarop tekst en opdrachten waren verweven niet bevorderlijk waren. Het is nu nog niet helder hoe in de wiskundestof de leerlingen uit beide profielen tegelijk geboid kunnen worden en voorbereid op gebruik van verbanden in de zeer diverse profielvakken.

Waar door de natuurkundesectie de benodigde lestijd werd overschat, werd door een aantal wiskundeleraars de tijd die nodig was om het materiaal voor wiskunde door te werken schromelijk onderschat. Daarvoor blijken toch wel twaalf lessen uitgetrokken te moeten worden. De opzet was om het hoofdstuk over machtsverbanden uit de reguliere methodes te vervangen, maar dat blijkt in de praktijk niet gelukt te zijn. De aansluiting bij de onderbouw blijkt ook nog niet optimaal. Een opvallende waarneming bij de lessen die door de auteurs zijn bijgewoond, is de rol van het klassengesprek. In de natuurkundelessen werd over het algemeen veel meer tijd ingeruimd voor klassikale discussie dan in de wiskundelessen. Het is onze overtuiging dat zeker ook in klassendiscussies de relatie met andere vakken voor het voetlicht kan worden gebracht.



Figuur 5. Onderzoeken van het verband tussen hoogte en de diameter van een boom met behulp van dubbellogarithmisch papier.

### Vervolg

Om praktische redenen is gestart met ontwikkelen in de vierde klas. Het is de bedoeling uiteindelijk een leerlijn neer te zetten die door alle leerjaren heengaait. In de volgende periode gaan we dan ook voorbeeldmateriaal ontwikkelen voor de onderbouw. Een van de aandachtspunten daarbij zal zijn de aansluiting tussen onderbouw naar bovenbouw, omdat deze nu nog niet soepel en consistent verloopt.

Een ander plan is het uitbreiden van het materiaal naar bijvoorbeeld veranderingsprocessen waarbij differentiaalrekening komt kijken. Ook denken we over het uitbreiden van de verbanden naar exponentiele functies en/of periodieke functies. Bovendien streven we ernaar op een natuurlijke manier de vakken scheikunde en biologie bij de samenhang te betrekken. X

### Noten

<sup>1</sup> In dit artikel rapporteren wij over samenhang op het gebied van verbanden. Binnen het SONaTeproject zijn echter ook knelpunten op andere vlakken in kaart gebracht. Onderwerpen waren *transport in levende systemen* en *energie*.

<sup>2</sup> Het actuele lesmateriaal is te vinden op <http://www.cdbeta.uu.nl/salvo>. Hier vindt u meer informatie over het SaLVO-project en hoe u contact kunt opnemen met de auteurs.

### Verwijzingen

Zegers, G.E. e.a. (2003). *Een basis voor SONaTe, voorbeelden van inhoudelijke samenhang tussen de natuurwetenschappen en wiskunde in de tweede fase havo/vwo*. Delft: Stichting Axis.

KNAW (2003). *Ontwikkeling van talent in de tweede fase. Advies van de KNAW-klankgroep voorgezet onderwijs*. Amsterdam: KNAW (33-34).