Bij de kinematica is een goed begrip van de onderliggende wiskundige concepten noodzakelijk. Als leerlingen dit ontberen, ontstaan al gauw verwarrende discussies over afstand, snelheid en versnelling. **Michiel Doorman** gaat na hoe het begrip verbeterd kan worden door leerlingen zelf metingen in grafieken te laten doen. ICT speelt hierbij een belangrijke rol.

# Een opbouw in grafieken

## Inleiding

Bij het vakgebied kinematica uit de natuurkunde spelen wiskundige begrippen een belangrijke rol. In het kader van mijn onderzoek naar de integratie van natuur- en wiskundeonderwijs is een aantal natuurkundelessen geobserveerd op de KSG de Breul te Zeist. De observaties illustreren problemen van leerlingen bij het onderwerp kinematica. De problemen lijken deels een wiskundige oorsprong te hebben, vanwege de toepassing van de zogenaamde raaklijn- en oppervlaktemethode. Deze toepassing verloopt niet altijd even vlekkeloos. Dit artikel is het verslag van een zoektocht naar een oplossing met behulp van ICT.

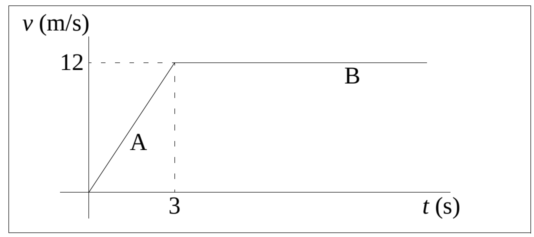
## Gemiddelde snelheid

De leerlingen van deze klas zitten in 5 VWO N&G bij natuurkunde. Ze werken met het boek *Newton* en zijn bij hoofdstuk 8: Sport en beweging. Het hoofdstuk oogt aantrekkelijk. Voor vandaag staat opgave 23 op het programma. De opgave gaat over een sprinter:

> **23 Sprinten**
> Een zeer goede sprinter is in staat om bij de start van de 100 m sprint zijn snelheid op 12 m/s te brengen in een tijdsduur van 3,0 s. Neem aan dat hij daarna met die snelheid de wedstrijd uitloopt. Bereken zijn snelheid op de 100 m sprint.

De docent neemt het woord nadat hij de leerlingen even de tijd heeft gegeven om aan de opgave te werken.

Docent: 'Eerst eventjes een schets maken van de *v*-*t*-grafiek. Hoe komt die eruit te zien? Wat voor vorm heeft die?'
Leerling: 'Eerst schuin, dan recht.'
Docent: 'Ja, eerst schuin, dan constant. Dat is natuurlijk niet helemaal realistisch hè. In werkelijkheid zou je nooit zo'n scherpe knik in een echte grafiek van een echte atleet krijgen. In de praktijk zal dit een beetje afgerond zijn, maar dat verwaarlozen we nu eventjes. Ja, en waar dat constante stuk eindigt, dat weten we nog niet. Je kunt dus duidelijk twee soorten bewegingen apart onderscheiden. Je hebt de eenparig versnelde beweging hier en de eenparige beweging daar. Dit noemen we stuk A en dat stuk B.'




Docent: 'En, als je het nu een beetje systematisch wilt aanpakken, dan gaan we dat als volgt doen. We hebben eh, er komen vier grootheden in het verhaal voor, welke vier grootheden zijn dat?'
Leerling: 'Ik snap niet waarom je een snelheid-tijd grafiek tekent en waarom niet een afstand-tijd grafiek?'
Docent: 'Omdat ik niet weet hoever hij, ..., hoever hij na 3 seconden is.'
Leerling: 'Dat weet je wel, hij gaat 12 m/s, hij gaat 3 s, dan heeft hij toch 12 · 3, is 36 meter afgelegd ...'

In de klas ontstaat nu enig rumoer. De docent onderbreekt de discussie en tekent een tabel op het bord met de vier grootheden *s* (m), *t* (s), *v* (m/s) en *a* (m/s$^2$). Vervolgens stelt hij de vraag wat de afgelegde weg is in stuk A. In de klas worden de getallen 4 en 6 geroepen.

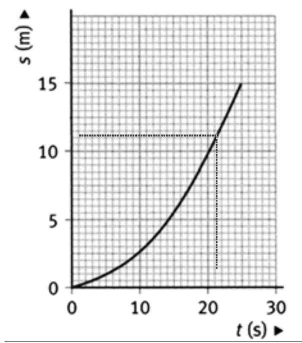
Docent: '4, 6, 8, 2? Hoeveel gaat hij gemiddeld als hij begint bij 0 en gaat steeds harder, steeds harder, en je eindigt bij 12?'
Leerling (gedecideerd): 'Nou 6'.
Docent: '6'.
Andere leerling: 'Ik snap niet hoe je ernaar kijkt. Als je de formule gebruikt komt er 4 uit.'
Docent: 'Als je welke formule gebruikt komt er 4 uit?'
Leerling: 'Voor *v*-gemiddeld.'
Docent: 'Hoe reken je de gemiddelde snelheid uit in dit geval? Wanneer komt er 4 uit?'
Leerling: '12/3.'
Docent: 'Als je 12/3 doet krijg je 4, maar wat heb je dan uitgerekend? Dan heb je niet de gemiddelde snelheid uitgerekend. Dan heb je *a* uitgerekend!'

Geroezemoes.

Docent: 'Dat is iets totaal anders dan de gemiddelde snelheid. Dit (12/3 = 4) zegt alleen dat er elke seconde 4 m/s bij de snelheid bij komt. Na 1 seconde gaat ie 4, na 2 seconde 8 en na 3 seconden gaat ie 12 m/s.'
Leerling: 'Als je *a* weet dan kan je ook ...'

Docent: 'De gemiddelde snelheid is 6 natuurlijk, hij begint bij 0 en eindigt bij 12 en hij is gemiddeld 6 m/s gegaan. Je hebt twee proefwerken gemaakt en voor de ene kreeg je een nul en voor de ander kreeg je een 12, nou dan krijg je er 6 punten voor, als ze allebei even zwaar meetellen tenminste. Dus de gemiddelde snelheid is 6. Dus de afstand is 18 meter volgens de formule ($s = v_{gemiddeld} \cdot t$.'

Een gemiddelde bereken je door de waarden op te tellen en te delen door het aantal: (0 + 12) / 2. Dat weten de leerlingen wel. Kennelijk was hun niet duidelijk dat dit hier ook kon. Eigenlijk is dit niet zo vreemd, het betreft hier namelijk niet twee, maar een oneindig aantal snelheden.
De les hiervoor was nog wiskundiger van aard en verklaart misschien ook waarom leerlingen met *s*/*t* wilden rekenen. Tijdens die les is een opgave besproken waar die deling ter discussie stond.
In de opgave is een plaats-tijd-grafiek gegeven. Gevraagd is de *v*-*t*- en de *a*-*t*-grafiek van de beweging. De docent wijst op de grootheid en de haakjes bij de verticale as:




Docent: 'Hier betekenen de haakjes dus iets heel anders dan bij *s*(*t*). Daar betekent het de verplaatsing hangt af van de tijd.'

Dan vraagt hij naar de grafieken van de leerlingen.

Michelle gebaart een lineaire *v*-*t* en een constante *a*-*t*-grafiek. De docent kijkt in haar schrift en tekent ze op het bord.
Bob: 'Ik had het zo.' Hij gebaart een parabolische *v*-*t*-grafiek.
Docent: 'Er zijn verschillen tussen Michelle en Bob. Bij Michelle staan ook getallen. Niet alleen de vorm is verschillend. Zij heeft uitgerekend welke snelheid op welk moment wordt bereikt. Hoe komen we aan die getallen?'
Bob had geen getallen bij zijn grafiek, maar reageert direct.
Bob: 'Die heb ik gewoon uit het *s*-*t*-diagram gehaald. Ik heb de afstand *s* door de tijd gedeeld. Bij 20 seconden is de afstand 10 meter dus 10/20 = 0.5 m/s ......'

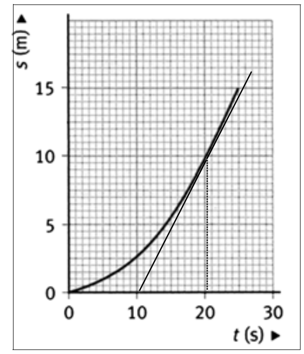
Als de docent vraagt wie het met die berekening eens is, blijkt alleen Ernst het niet met Bob eens te zijn. Michelle houdt zich gedeisd. Ernst legt uit dat Bob de gemiddelde snelheid berekent en niet de snelheid na 20 seconden. De docent vat het samen en geeft de leerlingen vervolgens de tijd om nu zelf de *v*-*t*-grafiek te tekenen.
Dan steekt Ernst zijn vinger op.

Observator: 'Wat is het probleem?'
Ernst antwoordt zichzelf nadat hij heeft gevraagd of hij met $\Delta s/\Delta t$ bij een raaklijn de snelheid kan berekenen.
Ernst: 'Maar dan klopt die formule toch wel? Waarom kan ik nu wel $\Delta s/\Delta t$ doen? Dan bereken ik toch een gemiddelde snelheid? Of zijn die dan allemaal hetzelfde?'

*Hij gebaart enkele 'driehoekjes' langs de raaklijn. De observator knikt bevestigend.*

Ernst: 'Dus het maakt dan niet uit waar je de afstand door de tijd deelt?'

*Hij lijkt de goede kant op te gaan, neemt een driehoek vanaf het punt waar de raaklijn de tijd-as snijdt en berekent 10/10.*




Maar dan zegt hij: 'Dus het verschil is dat je niet alle tijd neemt, maar vanaf dat punt (*waar de raaklijn de tijd-as snijdt*)?'

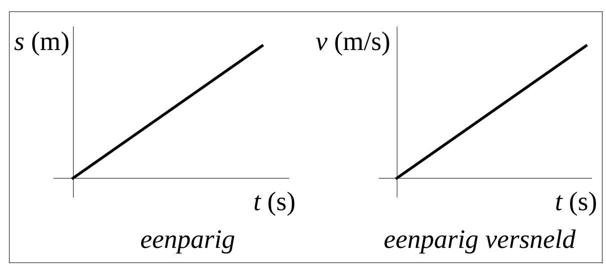
*De observator legt uit dat je voor de raaklijn $\Delta t$ overal kunt kiezen.*

Ernst: 'Oh ja. Dat (*de raaklijn*) is eigenlijk een grafiek van een constante snelheid.'

Het lastige voor de leerlingen is de verwevenheid van het interpreteren van grafieken, de bijbehorende wiskundige methoden en de natuurkundige begrippen. Ieder aspect afzonderlijk lijkt helder en duidelijk, maar juist het samenspel vormt een wezenlijk probleem voor de leerlingen. Bij de *s*-*t*-grafiek uit de opgave hierboven bereken je inderdaad de gemiddelde snelheid met $\Delta y/\Delta x$, terwijl bij een *v*-*t*-grafiek weer andere regels gelden. Alleen bij een eenparige beweging geldt $v = s/t$, bij een eenparig versnelde beweging kun je gebruik maken van

$$v_{gemiddeld} = (v_{begin} + v_{eind}) / 2$$

en voor alle bewegingen geldt
$$v_{gemiddeld} = s/t.$$




In de formules wordt ook wel eens $\Delta s$ en $\Delta t$ gebruikt. Bovendien lopen bij het gebruik van deze formules ook nog functiesymbolen, lopende variabelen en constante waarden door elkaar.

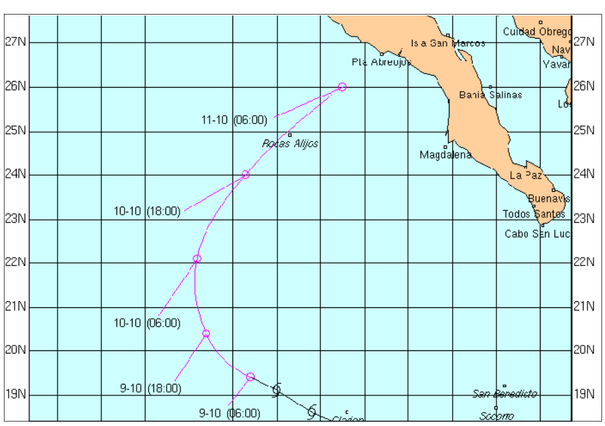
## Integratie van kinematica en differentiaalrekening

Deze observaties zijn gedaan in het kader van een onderzoek naar een samenhangend programma voor kinematica en differentiaalrekening. In een eerder artikel (Doorman, 2000) is al verslag gedaan van eerste ervaringen met experimenteel lesmateriaal waarbij de onderwerpen geïntegreerd zijn. Het materiaal is geïnspireerd door de historische ontwikkeling van het onderwerp. Een geschiedenis waarbij de natuurkunde en wiskunde in samenhang werden opgebouwd en waarbij de ontwikkeling van grafi-

sche modellen een belangrijke rol speelde. Het doel van het onderzoek is om met behulp van die samenhang ook leerlingen de gewenste kennis en inzichten te laten opbouwen.
Op grond van de eerste ervaringen is het materiaal bijgesteld en is vorig jaar een tweede experiment uitgevoerd op de Breul en op de Werkplaats te Bilthoven. De hierboven beschreven natuurkundeklas heeft met het gewone wiskundeboek gewerkt (*Moderne Wiskunde A1/B1 deel 1*, hoofdstuk A3: Veranderingen), terwijl hun parallelgroep op de Breul het experimentele materiaal heeft gebruikt.
Het bleek dat de geschetste problemen zich nauwelijks voordeden in deze parallelgroep. Hierbij moet worden aangetekend dat die groep voornamelijk uit N&T-leerlingen bestond. Het lijkt aannemelijk dat dit voor een belangrijk deel het betere presteren verklaart. Opvallend was echter hoe die leerlingen regelmatig verband legden tussen nieuwe natuurkundige begrippen en grafische kenmerken. Precies dat verband was het onderwerp van het herziene materiaal waarmee ze een jaar eerder hadden gewerkt.

### *Het herziene materiaal*

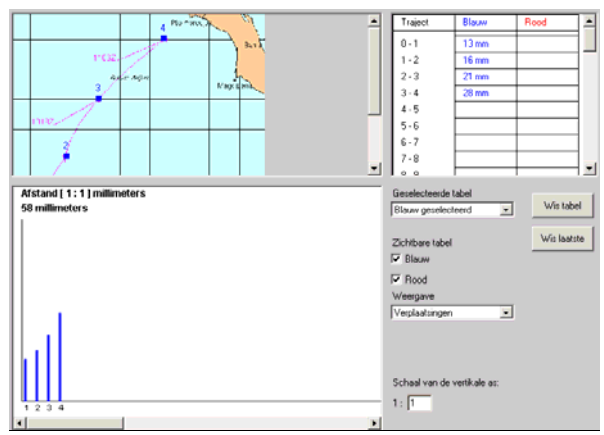
In het lesmateriaal is gekozen voor een gelijktijdige en geleidelijke ontwikkeling van wiskundige instrumenten (som en verschil, oppervlakte en helling) en natuurkundige begrippen (snelheid en afgelegde weg). Bovendien is geprobeerd om met computerprogramma's leerlingen te stimuleren tot redeneringen over de samenhang tussen helling en snelheid. Het lesmateriaal begint met een probleem over een orkaan die een kust nadert.




De vraag is hoe laat en waar deze orkaan land zal treffen? Hierbij wordt gebruik gemaakt van zogenaamde tijdseries om de orkaan te volgen (om de twaalf uur). De achtereenvolgende posities zijn vastgelegd in één plaatje. Voor het voorspellen kopiëren de meeste leerlingen de laatste verplaatsing van de storm en proberen daarmee te redeneren hoe laat de storm land treft.

### *Twee computerprogramma's*

Vervolgens werken leerlingen met stroboscopische foto's om bewegingen te analyseren. Het meten wordt echter tijdrovend als er vaak is geflitst. Leerlingen kunnen dan het computerprogramma 'Flits' gebruiken om het meten te beperken tot klikken. Met het programma klikken ze op achtereenvolgende posities in een foto. De afstanden tussen de klikpunten verschijnen in een tabel en als verticale staafjes in een grafiek. Het idee is dat klikken op een punt een natuurlijk vervolg is op het analyseren van de foto met de hand (klikken = afpassen). Doordat de foto en de staafjes in één scherm staan en voortbouwen op het spoor van de storm, zullen leerlingen de juiste betekenissen aan die grafieken geven: een staafje staat voor de verplaatsing in een tijdsinterval en de lengte wordt een maat voor snelheidsverandering.
Hieronder staat een schermafdruk met een gedeelte van het plaatje van de storm in beeld. In de grafiek staan naast elkaar de verplaatsingen van de storm. Opvallend is hoe de verplaatsingen toenemen. De storm versnelt en het is op zijn minst discutabel of je alleen de laatste verplaatsing moet kopiëren om te voorspellen wanneer de orkaan land treft.



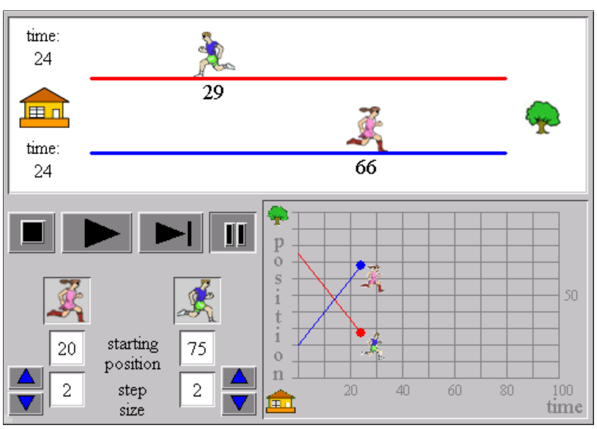

De verwachting is dat tijdens deze activiteiten met Flits geleidelijk de aandacht verschuift naar redeneringen over de grafieken van de beweging. Daarmee ontwikkelen leerlingen inzicht in het begrip snelheid en de samenhang met grafieken: een constante snelheid geeft constante verplaatsingen en een lineair toenemende grafiek van de afgelegde weg. Je kunt in Flits namelijk ook de verplaatsingen laten 'stapelen' tot een grafiek van de afgelegde weg (de som van de verplaatsingen).

Aansluitend op het inzicht dat een constante snelheid een lineaire tijd-afstand-grafiek geeft, is een tweede computerprogramma 'Helling' ontworpen. Dit vooral ten behoeve van een grafische ondersteuning voor het differentiequotiënt. Leerlingen zoeken met het programma een lineaire voortzetting vanaf een punt van de grafiek van de afgelegde weg, alsof vanaf dat moment de snelheid niet meer zou veranderen
Het idee is dat door met dit programma te werken de leerlingen een grafisch én dynamisch 'model' ontwikkelen dat ze in het vervolg kunnen gebruiken bij hun redenerin-

gen over helling, raaklijn, differentiequotiënt en hellingsgetal.
Beide programma's zijn als applets te vinden op het Wisweb: http://www.wisweb.nl/.

## Intermezzo: Een flitsend alternatief?

Bij het aanbieden van zulke computerprogramma's is een centrale vraag wat hun rol is in het leerproces. Het gevaar bestaat namelijk dat leerlingen niet herkennen wat op het scherm staat en te vlug proberen te achterhalen wat de bedoeling is. Een vorm van 'zelf uitzoeken' waar ze goed in zijn en die herkenbaar is bij computergebruik, ook bij wiskunde (zie bijvoorbeeld Van Reeuwijk, 2001). Voor wiskunde is dit zelf uitzoeken niet altijd wenselijk, omdat het begrijpen van de achterliggende begrippen beperkt kan blijven tot uiterlijke verschijnselen.
Problemen kunnen bijvoorbeeld ontstaan bij de inzet van simulaties waarbij wiskundige representaties gekoppeld zijn aan alledaagse animaties. Het idee is dat leerlingen de betekenissen van de wiskundige representaties zullen ontdekken dankzij die koppeling. Een voorbeeld van zo'n simulatie is 'Trips' (http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap5/5.2/index.htm):



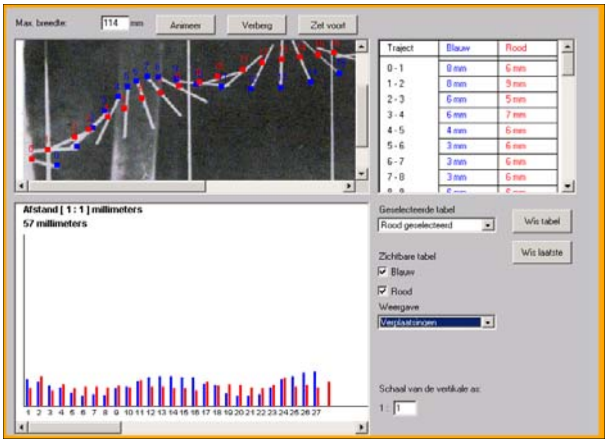

Dit programma ziet er aantrekkelijk uit en gebruikt een animatie van twee rennende poppetjes. Op het scherm zie je ze rennen en staan enkele representaties van de beweging als snelheidsmeters en grafieken. Het idee is dat de verbinding tussen al deze weergaven (rennende poppetjes, meters en grafieken) leerlingen motiveert en helpt om er de juiste betekenissen aan te geven. Het programma stelt leerlingen in staat om allerlei vermoedens te formuleren en te testen. Gedurende dergelijke activiteiten zullen ze de samenhang tussen grafieken, snelheid en afgelegde weg ontdekken en verbinden met hun alledaagse ervaringen. Men spreekt in dit verband ook wel over 'discovery learning' (de Jong, 1998). Harder en zachter lopen kan gekoppeld worden met een steilere en minder steile tijd-positie-grafiek.
Het is bij dit ontdekken echter niet nodig om te begrijpen waarom die grafiek lineair is, wat dit te maken heeft met een hellingsgetal en waarom helling een maat is voor de snelheid. Juist door te oppervlakkige koppelingen ontstaan verwarringen zoals in de beschreven natuurkundeles.
In feite sluit deze benadering aan bij een didactische traditie waarbinnen getracht werd abstracte wiskunde voor de leerlingen toegankelijk te maken door het aanbieden van concretiseringen van deze abstracte kennis. Vervolgens wordt geprobeerd de kloof tussen die abstracte wiskunde en het niveau van de leerling te overbruggen met behulp van zogenaamde structuurmaterialen. Je kunt er echter niet van uitgaan dat leerlingen daarmee de goede wiskundige inzichten opbouwen. Ervaringen in het verleden wijzen er namelijk op dat leerlingen nauwelijks de gewenste structuren zien, omdat ze simpelweg de benodigde kennis nog niet hebben om ze te herkennen.
In ons huidige wiskundeonderwijs proberen we daarom leerlingen te betrekken bij de opbouw vanuit hun voorkennis en alledaagse ervaringen. Het is bekend dat tijdsdruk en methoden dit niet altijd toelaten, maar het is wel de achterliggende filosofie. Dit onderzoek is vooral bedoeld om na te gaan hoe dat bij dit onderwerp zou kunnen en wat dan de rol van de computerprogramma's is.

## Flits in de klas

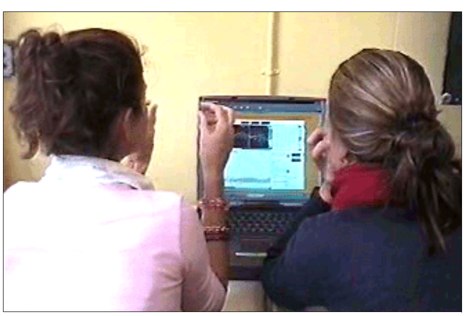
In plaats van leerlingen direct te confronteren met continue *v-t-* en *s-t*-grafieken in de hoop dat ze de samenhangen zullen ontdekken, hebben we gekozen voor een opbouw vanaf de stippengrafieken bij de storm. Een grafische vorm tussen die stippengrafieken en de continue grafieken zijn de discrete grafieken van Flits. De lengten van de staafjes representeren de afstanden tussen de stippen en tegelijkertijd anticiperen die grafieken op de samenhang tussen snelheid en afgelegde weg. De tweede lessenserie betrof een ontwerp voor tien lessen waarin het gebruik van Flits is geïntegreerd.
Het lijkt misschien omslachtig, deze leerlingen hebben immers in de onderbouw al met continue grafieken gewerkt. Maar het wezenlijke probleem zit hem in die samenhang en daarvoor lijkt ons een concreet begin essentieel.
Het idee is dat in eerste instantie leerlingen de discrete grafieken gebruiken voor het beschrijven van bewegingen en dat later die grafieken gebruikt worden voor wiskundige redeneringen over de samenhang tussen snelheid en afgelegde weg.

### *Ervaringen*

In het begin van het materiaal wordt gebruik gemaakt van stippengrafieken om orkanen te volgen. Vervolgens werken leerlingen met Flits om bewegingen die zijn vastgelegd met stroboscopische foto's te beschrijven. Twee leerlingen, Marijke en Suzanne, zijn bezig met de opgave rond een stok die weggeworpen wordt. De stok maakt daarbij een draaiende beweging door de lucht. Ze hebben inmiddels het midden en een uiteinde van de stok met klikpunten gevolgd en kunnen een tabel en grafieken van de beweging zien. In de grafiek staan naast elkaar de verplaatsingen van het midden en van een uiteinde van de stok in verschillende grijstinten.



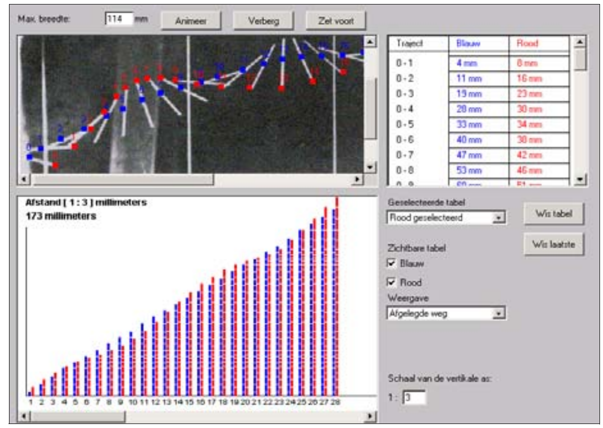

Observator: ‘En wat kun je nu in de grafiek zien? Het verschil tussen de twee?’
Marijke: ‘Ze halen elkaar steeds in.’
Suzanne: ‘Ja. Ze lopen zo, als de een zo gaat’ (*ze gebaart een sinus in de lucht*).
Marijke: ‘Het uiteinde heeft een groter’ (*gebaart in de lucht een grotere amplitude*).
Observator: ‘Ja, maar wat zegt dat over de beweging van het uiteinde?’
Suzanne: ‘Die is groter.’
Marijke: ‘Die verschilt meer ...’
Observator: ‘Verschilt meer?’
Marijke: ‘Nou dat er grotere afstanden worden afgelegd’ (*gebaart afstanden tussen vingers*). ‘Oh nee, ja, soms legt hij heel weinig afstand af en soms legt hij heel veel afstand af. Het midden blijft best wel gelijk.’



Observator: ‘Ja precies. En als je dan snelheid gebruikt, hoe zou je dan uitleggen wat er gebeurt?’
Marijke: ‘De snelheid van het uiteinde is gro ... de snelheid van het uiteinde is verschillender.’

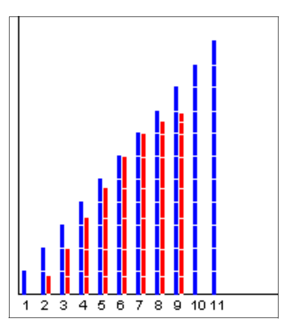
In eerste instantie interpreteren ze de grafiek met verplaatsingen als een ‘directe’ beschrijving van de beweging: het omhoog en weer omlaag gaan van het uiteinde. In de foto is immers eenzelfde golfbeweging te zien. Aad Goddijn heeft het in dit verband, al lang geleden, gehad over de kaartachtigheid van grafieken (Goddijn, 1978).
Ayla en Jeroen zijn met hetzelfde probleem bezig. De volgende discussie spitst zich toe op de vraag of je met Flits kunt beredeneren of het midden nu meer aflegt dan het uiteinde.

Observator: ‘(...) zou je hier, uit deze tabel, kunnen afleiden of het midden meer aflegt in totaal dan het uiteinde?’
Ayla: ‘Nee, het uiteinde.’
Observator: ‘Waarom denk je dat?’
Ayla: ‘Waarom denk je dat? Nou, ga eens naar beneden’ … (*J gaat naar grafiek onder foto, met de muis*) ‘Het uiteinde dat is, als je dat allemaal bij elkaar optelt, is meer dan als je die van het midden bij elkaar optelt.’

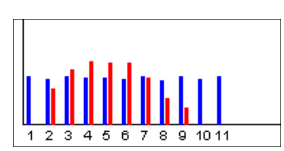



Jeroen: ‘Hij gaat niet hoger.’
Ayla: ‘Dan heeft dat uiteinde meer afgelegd. (*O en J bevestigen dat*.)
Observator: ‘Wat je daarnet zag (*bij de verplaatsingen*) was dat dat uiteinde rond dat midden golfde en dat het midden redelijk constant was. Hoe zie je hier dat het midden redelijk constant is?’
Jeroen: ‘Dat als je er een lijn zou zetten, dat ie dan recht zou zijn.’
(*Ayla gebaart een lijn door de toppen op het scherm*.)

Deze laatste constatering vormt de basis voor een relatie tussen constante verplaatsingen en een lineaire grafiek van de afgelegde weg. Deze relatie is hier concreet doordat snelheid eigenlijk wordt afgebeeld met stukjes verplaatsing in een tijdsinterval. Het inzicht in die lineariteit anticipeert op de samenhang tussen continue *v-t-* en *s-t-*grafieken.
In het volgende protocol vergelijken Ayla en Jeroen de bewegingen van een cheetah die een zebra achtervolgt. De zebra rent met een constante snelheid. De cheetah versnelt even tot zijn topsnelheid en komt dan tot stilstand. De vraag is of de cheetah de zebra nog in kan halen nadat de zebra hem passeert. In eerste instantie heeft het tweetal gekozen voor de grafiek van de afgelegde weg (de linker grafiek hieronder). De observator vraagt waarom ze die grafiek hebben gekozen.



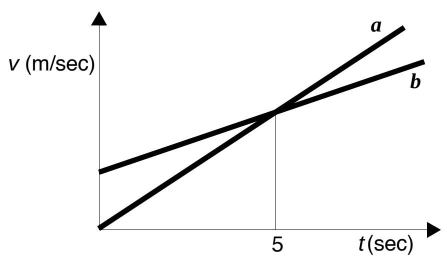
*afgelegde weg*



*verplaatsingen*

Observator: 'Ja. En welke van de twee grafieken is dat?'
Jeroen en Ayla tegelijk: 'Dat is de afgelegde weg.'
Observator: 'O ja. Want waarom heb je die van de afgelegde weg gekozen?'
Jeroen: 'Ja, omdat het de weg is die ze afleggen en dan kan je …'
Ayla: 'Dan kan je zien of ze elkaar inhalen.'
Observator: 'En bij die andere kun je dat niet zien dan? Daar kan je toch ook zien dat de cheetah de zebra inhaalt?' (*De rechtergrafiek hierboven*.)
Jeroen: 'Ja maar …'
Ayla: 'Ja maar dat is dan op één moment. Dat betekent alleen dat hij op dat moment harder gaat, maar niet dat ie ook de zebra inhaalt.'

Kennelijk verwarren ze op dit moment niet kenmerken van de probleemsituatie (het passeren) met kenmerken van de grafiek (het 'snijden'). Dit wordt namelijk in de praktijk vrijwel altijd geïnterpreteeerd als passeren.
In onderstaande grafiek wordt het snijpunt meestal geïnterpreteeerd als '***a*** *passeert* ***b*** *na 5 seconden*'. Een probleem dat te vergelijken is met de problemen van de leerlingen tijdens de natuurkundeles.




## Conclusies

Met het experimentele materiaal vindt een geleidelijke opbouw plaats van de samenhang tussen snelheid, afgelegde weg en bijbehorende grafieken van stippengrafieken, via discrete grafieken naar de continue *v-t-* en *s-t-*grafieken.
Tijdens het werken met Flits gebruiken leerlingen de discrete grafieken als model voor het beschrijven van bewegingen en het doen van voorspellingen. Hun redeneringen hebben een concretere basis dan alleen die van uiterlijke verschijnselen op het scherm.
Gedurende de activiteiten ontwikkelen leerlingen gelijktijdig inzichten in de grafieken en in de samenhang tussen snelheid en afgelegde weg. Dit wordt echter pas expliciet gemaakt dankzij de tussenkomst van de observator. Tijdens deze lessen bleek ook de rol van de docent belangrijk. Dat is vooral een essentiële rol tijdens de lessen die op dergelijke computerpractica voortbouwen. Dan worden de activiteiten van de leerlingen benut en uitgebuit door te bespreken wat er gebeurde en door ernaar te verwijzen bij het introduceren van nieuwe problemen of begrippen.
Het onderscheid tussen het ontdekken van een samenhang met een simulatie als Trips (de rennende poppetjes) en het opbouwen van inzichten is natuurlijk niet zo zwartwit als eerder gesteld. Zo kan het programma Trips wellicht heel goed worden ingezet op een ander moment in het leerproces. Fundamenteel zijn echter de keuzes die het moment bepalen. Wat betekenen de representaties op het scherm en de activiteiten met het programma voor de leerlingen? Wat zullen ze ervan leren? Hoe past dat in wat voorafging en wat volgen zal? De samenhang tussen dergelijke keuzes en de betekenis van ICT-gebruik voor de leerlingen maakt het niet eenvoudig om algemene principes voor succesvol ICT-gebruik te formuleren.
Dit schooljaar wordt het laatste experiment herhaald en zullen meer gegevens worden verzameld om te onderzoeken of het inderdaad voor alle leerlingen (ook N&G) werkt. We hopen zo een stukje verder te komen in het inzicht in de manier waarop leerlingen met ICT wiskunde kunnen opbouwen, of, zoals Freudenthal het zou zeggen: kunnen her-uitvinden. Een term die wellicht beter het gewenste leerproces karakteriseert.

*Michiel Doorman, Freudenthal Instituut, Utrecht*

## Literatuur


Doorman, L.M. (2000). Integratie van kinematica en differentiaalrekening. *Nieuwe Wiskrant, 20*(1), 14-20.
Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.
Goddijn, A.J. (1978). Lijngrafieken in de Gansstraat, *Wiskrant, 3*(11), 187-191.
Jong, T. de & R.W. van Joolingen (1998). Scientific discovery learning with computer simulations of conceptual domains. *Review of Educational Research 68*(2), 179-201.
Reeuwijk, M. van (2001). Bollen Schieten. *Nieuwe Wiskrant, 20*(3), 4-7.


De applets Flits en Helling staan op het Wisweb (www.wisweb.nl). Het lesmateriaal zal daar ook binnenkort op worden gepubliceerd. Geïnteresseerden kunnen een e-mail sturen aan de auteur: michiel@fi.uu.nl.