M. J. GOEDHART EN A. H. VERDONK
Vakgroep chemiedidaktiek
Centrum voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen, RUU

Significante cijfers bij rekenen en meten

Bij natuurkunde en scheikunde wordt doorgaans in de vierde klassen van HAVO en VWO aandacht besteed aan het onderwerp ,,significante cijfers".
Significante cijfers worden vooral gebruikt bij de uitwerking van vraagstukken. Aan de invoering ervan zal de opkomst van de zakrekenmachine ongetwijfeld een belangrijke bijdrage hebben geleverd. Immers, door de zakrekenmachine werd het aantrekkelijker om in opgaven in plaats van ronde getallen reëlere meetgetallen te gebruiken. Maar om de leerlingen te behoeden voor het noteren van uitkomsten in een zinloos aantal cijfers diende er wel een afrondingscriterium beschikbaar te zijn. Een dergelijk criterium wordt geleverd door regels die betrekking hebben op het aantal significante cijfers in de te bewerken getallen.
In dit artikel willen wij een aantal kanttekeningen maken bij het gebruik van deze significante cijfers.

Meetnauwkeurigheid

In alle door ons bekeken schoolboeken voor natuurkunde en scheikunde (1-6) worden significante cijfers in verband gebracht met meetnauwkeurigheid. Dit blijkt o.a. uit onderstaande fragmenten:

> ,,De nauwkeurigheid waarmee meetgegevens worden genoteerd, hangt af van de nauwkeurigheid van de gebruikte apparatuur. Deze nauwkeurigheid komt tot uitdrukking in het aantal significante cijfers waarin het meetgetal wordt opgeschreven." (Reiding & Franken, pag. 95)

> ,,Er zijn verschillende methoden om de mate van nauwkeurigheid van een meetwaarde aan te geven. (...) Wij zullen een eenvoudiger methode gebruiken: we maken gebruik van het aantal significante cijfers." (Van Dieten et al., pag. 80)

> ,,Een groter aantal significante cijfers betekent, bij juiste aflezing, een nauwkeuriger meting." (Van Keulen & Van Gastel, pag. 59)

Ook op de centrale schriftelijke eindexamens natuurkunde en scheikunde voor HAVO en VWO wordt het aantal significante cijfers gerelateerd aan nauwkeurigheid. In de scoringsvoorschriften voor het VWO-examen scheikunde 1989 lezen we:

> ,,Een antwoord mag één cijfer meer of minder bevatten dan op grond van de nauwkeurigheid van de verstrekte gegevens verantwoord is.
> Bij grotere (on)nauwkeurigheid moet één punt worden afgetrokken".

De nauwkeurigheid van de getalswaarden wordt in de examenopgaven niet expliciet vermeld maar volgt uit het aantal significante cijfers waarin de getallen zijn vermeld. Berekeningen met de getallen kunnen dan worden uitgevoerd, waarbij de nauwkeurigheid van het uiteindelijke verkregen rekenwaarde dient te worden uitgedrukt in het aantal significante cijfers. Hiervoor worden in de schoolboeken de volgende rekenregels genoemd:

1. Het aantal significante cijfers in een meetgetal is vast te stellen door het aantal cijfers te tellen, waarbij nullen vooraan niet meetellen en nullen achteraan wel. Dus:
   12,345 bestaat uit 5 significante cijfers
   0,012345 bestaat uit 5 significante cijfers
   1234,50 bestaat uit 6 significante cijfers
   12000 bestaat uit 5 significante cijfers
   $1{,}2.10^3$ bestaat uit 2 significante cijfers

2. Bij vermenigvuldigen en delen wordt het resultaat van de bewerking vermeld in het aantal significante cijfers van het meest onnauwkeurige getal (d.i. met het kleinste aantal significante cijfers).

   Dus: $\frac{12{,}345}{5{,}0000} = 2{,}4690 \quad \frac{12{,}345}{5{,}0} = 2{,}5$

3. Bij optellen en aftrekken wordt het antwoord van de bewerking vermeld in het aantal *decimalen* (cijfers achter de komma) van het getal met het kleinste aantal decimalen.
   (Bij de getallen dient wel dezelfde eenheid te horen).
   12,345 + 5,00 = 17,34[noot 10]
   12,345 + 5 = 17
4. Bij het nemen van een logaritme van een getal is het aantal *decimalen* in de logaritme gelijk aan het aantal *significante cijfers* in het oorspronkelijke getal. Dus bij een $[H^+]$ van 1,2345. 10^{-4} mol/l is de pH 3,90851.

Deze regel is minder eenvoudig te gebruiken dan de andere en wordt ook niet in alle schoolboeken genoemd.

Ook in het kader van een zogenoemde *foutenprognose* kan het gebruik van significante cijfers bepaalde diensten bewijzen. Zo kan duidelijk gemaakt worden dat het weinig zin heeft om de massa van een voorwerp waarvan we de dichtheid willen bepalen op een analytische balans op 6 significante cijfers te meten, als het volume door onderdompeling in een maatcilinder op slechts 3 significante cijfers gemeten wordt.
Deze regels gelden voor meetwaarden en niet voor telwaarden. Als een school 1025 leerlingen heeft en 42 klassen, dan zitten er gemiddeld 24,4047... leerlingen in een klas. De afronding hangt dan verder af van het doel waarvoor men dit gemiddelde wil gebruiken.

Tekortkomingen

Bij het rekenen met meetwaarden treden er echter wel een aantal tekortkomingen van bovenstaande regels aan het licht:

1. Bij gehele machten van tien treedt een sprongsgewijze toename van de door het aantal significante cijfers aangegeven nauwkeurigheid op. Stel we willen de dichtheid van een vloeistof bepalen uit de massa en het volume. De massa bepaalt men met een analytische balans op 0,0001 gram nauwkeurig en het volume met een buret op 0,01 ml nauwkeurig. Men tapt 9,99 ml vloeistof af met een massa van 9,1276 gram. De dichtheid bedraagt dan 0,914 g/cm^3 (3 significante cijfers). Nu tapt men 10,00 ml af met een massa van 9,1367 gram. De dichtheid bedraagt 0,9137 g/cm^3 (4 significante cijfers). Het is natuurlijk ongeloofwaardig dat men door 0,01 ml meer vloeistof te nemen de nauwkeurigheid met een factor 10 zou verbeteren!
2. Bij het middelen van meetwaarden treedt eenzelfde probleem op. Het gemiddelde van 1,000; 1,002 en 1,004 wordt in 4 significante cijfers vermeld. Het gemiddelde van 0,999; 1,001 en 1,002 in 3 significante cijfers. Bovendien wordt bij het middelen geen rekening gehouden met de spreiding van de meetwaarden. Het gemiddelde van 1,234; 1,233 en 1,232 opgegeven in 4 significante cijfers, daar valt wel iets voor te zeggen. Maar het gemiddelde van 1,234; 1,018 en 1,337 ook in 4 significante cijfers?

Uit deze voorbeelden blijkt dat de regels bij het uitwerken van meetwaarden niet altijd tot een goed resultaat leiden. Terecht worden ze in enkele boeken als *vuistregels* gepresenteerd (O.a. Van Dieten et al, Middelink, Van Keulen & Van Gastel, Reiding & Franken) om het globale karakter aan te geven.
,,Chemie" (Van Dieten et al.) geeft daarnaast aan dat de methode, die gebruik maakt van significante cijfers, een keuze is uit meerdere mogelijkheden. In de literatuur is vaker gewezen op tekortkomingen in de regels voor significante cijfers o.a. in Faraday door H. Biezeveld (7) en in de Journal of Chemical Education door L. M. Schwartz (8).

Foutenleer

Het bovenstaande tweede voorbeeld van het berekenen van een gemiddelde waarde is interessant, omdat het aangeeft waar de schoen wringt. Uit de schoolboeken en het scoringsvoorschrift van het examen blijkt dat onder ,,nauwkeurigheid" hetzelfde wordt verstaan als het ,,aantal significante cijfers". Wij willen niet ontkennen dat er een relatie tussen beide is, maar het is in de wetenschappelijke foutenleer niet gebruikelijk om ze als synoniem te beschouwen. Als maat voor de nauwkeurigheid wordt daar de spreidingsmaat ,,standaardafwijking" gebruikt (11).
De afronding van meetwaarden wordt door de grootte van deze standaardafwijking *s* bepaald. De standaardafwijking van *n* meetwaarden x_i met een rekenkundig gemiddelde x_{gem} kan berekend worden met: $s = \sqrt{\Sigma (x_i - x_{gem})^2/(n - 1)}$
Voor de afronding van een meetwaarde met behulp van de standaardafwijking worden regels gegeven in NEN 1047(9).
De afrondingsregels komen neer op het volgende: Men berekent eerst het afrondingsinterval *a*. Het afrondingsinterval is een macht van 10. Daartoe neemt men de helft van de standaardafwijking en bepaalt *a* als de grootste decimale eenheid, die daar niet bovenkomt. De meetwaarde en de standaardafwijking worden dan afgerond op evenveel decimalen als het afrondingsinterval. In de praktijk komt dat er bijna altijd op neer dat de standaardafwijking in één significante cijfer (een enkele maal in twee significante cijfers) wordt vermeld.
Enkele voorbeelden:
12,345 met $s = 0{,}072 \rightarrow \frac{1}{2}s = 0{,}036 \rightarrow a = 0{,}01$. Dus afgerond 12,34 met $s = 0{,}07$
12,345 met $s = 0{,}12 \rightarrow \frac{1}{2}s = 0{,}06 \rightarrow a = 0{,}01$. Dus afgerond 12,34 met $s = 0{,}12$

Voorwaarde voor het gebruik van deze methode is dat er een standaardafwijking bekend moet zijn. Bij herhaald uitgevoerde metingen is deze uit de meetwaarden te berekenen, maar niet altijd zullen de metingen herhaald worden. Hoe komt men dan aan een afrondingsinterval? We kunnen dan een verantwoorde schatting van de standaardafwijking maken. Vaak vinden we in de handleiding van het gebruikte instrument een standaardafwijking vermeld, bijv. bij een balans, een voltmeter of een spectrofotometer(12). Soms zijn er normen ten aanzien van de tolerantie van het instrument, bijv. bij maatglaswerk (in NEN 1750, 1753 en 1755).
In andere gevallen zijn geen gegevens beschikbaar en kan men de afleesfout van het gebruikte instrument als ruwe schatting voor de standaardafwijking nemen. De afleesfout bedraagt gewoonlijk $\frac{1}{10}$ van de afstand tussen twee maatstrepen, dus bij een lineaal bedraagt deze 0,1 mm, bij een buret 0,01 ml. Bij apparatuur met digitale uitlezing geldt soms dat de apparaatfout gelijk is aan de laatste decimale eenheid op de display, maar het is verstandig er de handleiding op na te slaan.
Vrijwel alle schoolboeken doen het voorkomen alsof de nauwkeurigheid volledig bepaald zou worden door de afleesfout (1-5). Dat dit beslist niet waar is blijkt bijv. bij een stopwatch, waar de reactietijd van de gebruiker een grotere foutenbron is dan de afleesfout, of bij een titratie, waar de spreiding - zeker bij een onervaren leerling - vele malen groter is dan de afleesfout van de buret. De afleesfout is slechts één van de factoren die een rol spelen in de grootte van de uiteindelijke spreiding.
We hebben hier dus een ander afrondingscriterium ontmoet, namelijk de spreiding van meetwaarden uitgedrukt in de standaardafwijking. En bovendien een andere omschrijving voor nauwkeurigheid: niet gerelateerd aan het aantal cijfers van een getal, maar aan de spreiding van herhaald uitgevoerde metingen. De nauwkeurigheid dient expliciet bij het meetresultaat te worden vermeld, dus een stroomsterkte als 10,6 mA met s = 0,2 mA.

Schoolcontext en wetenschappelijke context

Hierboven is aangegeven dat er een verschil bestaat tussen de omschrijving van nauwkeurigheid die op HAVO en VWO wordt gebruikt en de omschrijving zoals die in de foutenleer wordt gebruikt. We

zouden hier willen spreken over een verschil tussen *schoolcontext* en *wetenschappelijke context*.
Bij nadere analyse vallen meer verschillen op. Zowel in de schoolcontext als in de wetenschappelijke context worden meetwaarden als *onzeker* beschouwd, maar de invulling van het begrip „onzekerheid" verschilt. In de schoolcontext kan men met het aantal significante cijfers in een meetgetal aangeven in welk gebied de meetwaarde *zeker* ligt:

„Uit de nu volgende redenering blijkt hoe groot deze onzekerheid is.
a. Het feit dat we 26,7 mA opgeven in plaats van 26,6 mA betekent dat de stroomsterkte *minstens* 26,65 mA is (waarom?).
b. Het feit dat we 26,7 mA opgeven in plaats van 26,8 mA betekent dat de stroomsterkte *hoogstens* 26,749... mA, zeg 26,75 mA, is.
c. Uit a en b volgt dan: 26,65 mA $\leq I \leq$ 26,75 mA." (Middelink, pag. 17)

„Zo bedoelen we met 15 g een massa die in ieder geval groter is dan 14,5 g en kleiner is dan 15,5 g. Ongeveer 15 g kan dus bijvoorbeeld 15,1 g of 14,7 g zijn. Ook het getal 12,945 heeft zijn grenzen. Als deze waarde door een meting verkregen is, zal het cijfer 5 een afgerond getal zijn. In werkelijkheid zal de bedoelde massa liggen tussen 12,94$\underline{45}$ en 12,94$\underline{55}$." (Van Antwerpen et al, pag. 155)

In de wetenschappelijke context volgt men een statistische benadering: men geeft een gebied aan waarin de „gezochte" meetwaarde met *een bepaalde waarschijnlijkheid* ligt (het zogenaamde betrouwbaarheidsinterval). In de praktijk kiest men meestal voor het 95 %-betrouwbaarheidsinterval. Het gebied waarin de „gezochte" meetwaarde zeker ligt, het 100 %-betrouwbaarheidsinterval, strekt zich uit over het hele gebied waarin de betreffende grootheid gedefinieerd is en is dan ook een zinloze parameter.

Het onderscheid tussen schoolcontext en wetenschappelijke context kan ook aangeduid worden als „rekenen" en „meten". De schoolboeken spreken over significante cijfers in het kader van meetnauwkeurigheid. Maar is die context „meten" er in opgaven wel echt? In een opgave over een titratie hoeft men voor de concentratie van natronloog niet 0,1000 mol/l te nemen, maar kan men de „echte" waarde 0,1015 mol/l gebruiken. Het is daarmee nog niet duidelijk hoe deze waarde *gemeten* is. Roept het getal 0,1015 bij leerlingen de notie op van een door titratie moeizaam bepaalde meetwaarde, waarbij herhaling van de titratie nodig is en de spreiding van de verkregen waarden een maat is voor de onzekerheid in het getal 0,1015? Wij denken het niet. Veel eerder zal het getal 0,1015 bij leerlingen de notie oproepen „vier significante cijfers" en zij zullen de aangeleerde regels toepassen zonder zich te bezinnen over begrippen als „onzekerheid" en „meetnauwkeurigheid". Het rekenen in de schoolcontext is niet of nauwelijks verbonden met het meten, terwijl in het wetenschappelijk experimenteren het rekenen vooral in de context van het meten zijn functie heeft.
Bij het practicum op school ligt de situatie anders. Op het practicum komen de leerlingen wel zelf tot meetwaarden en in sommige gevallen zullen leerlingen zelf aan kunnen geven wat de nauwkeurigheid van deze meetwaarden zal zijn. Het gebruik van significante cijfers kan hier juist tot tegenstrijdige situaties leiden (zie bovenstaande voorbeelden).
Bij het rekenen in opgaven worden de benodigde gegevens geleverd, de selectie is al gemaakt, de nauwkeurigheid bekend. Bij het meten gaat het juist om het in het kader van een probleemstelling selecteren van gegevens, uit literatuur en door meting, en het bepalen van de nauwkeurigheid van die gegevens. Het rekenen in de schoolcontext leert de leerling wel omgaan met getallen, grootheden en eenheden en is in die zin een voorbereiding op het leren meten in een wetenschappelijke context, maar hanteert wel een geheel eigen nauwkeurigheidsbegrip dat los staat van het wetenschappelijke. In onze eigen onderwijspraktijk (eerstejaars scheikundestudenten) blijkt dan ook dat de schoolopvatting conflicteert met een wetenschappelijk nauwkeurigheidsbegrip. De studenten zijn dan vaak verbaasd dat de door hen op het VWO geleerde rekenregels op het WO afgewezen worden. Op dit punt is het VWO dus geen „voorbereidend wetenschappelijk onderwijs".

Conclusies

We hebben in dit artikel enkele problemen proberen aan te geven die samenhangen met het gebruik van significante cijfers. De regels blijken bij rekenwerk in vraagstukken een aardig hulpmiddel, maar voor de verwerking van meetwaarden kan een klakkeloze toepassing tot onjuiste resultaten leiden.
Er zijn docenten die, geïnspireerd of gedwongen door scoringsvoorschriften van eindexamens, een groot belang hechten aan een „correct" gebruik van significante cijfers door hun leerlingen, waarmee de significante cijfers een schijn van wetenschappelijke juistheid krijgen die ze beslist niet verdienen. Daarom is het goed ons te blijven realiseren dat significante cijfers uitsluitend gezien moeten worden als een beperkt hulpmiddel bij berekeningen in vraagstukken in een schoolcontext, en beslist ook niet meer dan dat.
Wij zouden willen pleiten voor een andere benadering van het nauwkeurigheidsprobleem, waarbij leerlingen eraan gewend raken bij kwantitatieve proeven zelf aan te geven hoe nauwkeurig hun *eigen* metingen zijn, alvorens zij met die meetwaarden berekeningen uitvoeren. Ze kunnen bij voorbeeld schatten hoe nauwkeurig je een volume kunt meten met een buret, een maatcilinder of een vloeistofspuitje. Door uitgevoerde metingen te herhalen kunnen zij „spreiding" in hun meetresultaten als verschijnsel leren kennen. Wij denken dat een dergelijke aanpak meer aansluit bij de leerlingen, immers: wat is er geestdodender dan het leren van regels? Bovendien sluit deze aanpak meer aan bij een wetenschappelijke opvatting van nauwkeurigheid.

Literatuur

1. J. Schweers & P. van Vianen; Natuurkunde op corpusculaire grondslag, deel 3V; Malmberg; Den Bosch (1981).
2. J. W. Middelink; Systematische natuurkunde, deel A; Van Walraven, Apeldoorn; tweede druk (1977).
3. H. van Dieten et al; Chemie, deel 4VWO; Wolters-Noordhoff, Groningen (1984).
4. J. Reiding & P. W. Franken; Chemie Overal, deel 4V; Educaboek, Culemborg (1985).
5. H. P. van Keulen, L. J. F. van Gastel & R. H. Smit; Chemie in theorie en praktijk, deel 2V; Nijgh & Van Ditmar, 's Gravenhage (1983).
6. A. P. van Antwerpen et. al.; Scheikunde voor voortgezet onderwijs; NIB, Zeist (1985).
7. H. Biezeveld; Over afronden en enkele andere problemen bij examens; Faraday **51**, 1982, 28-30.
8. L. M. Schwartz; Propagation of significant figures; J. Chem. Educ. **62**, 1985, 693-697.
9. NEN-bladen; Nederlands Normalisatie Instituut, Rijswijk.

10. Volgens NEN 1047 wordt een getal eindigend op een 5 afgerond naar het dichtstbijzijnde even getal.
11. Eigenlijk wordt de nauwkeurigheid bepaald door zowel de spreiding (dus toevallige fout, uitgedrukt in de standaardafwijking) als de systematische fout (NEN 3114). We gaan er in dit artikel steeds van uit dat de metingen vrij zijn van systematische fouten.
12. In handleidingen worden hiervoor de meest uiteenlopende namen gebruikt: instrumentfout, standaardijkfout, reproduceerbaarheid etc.