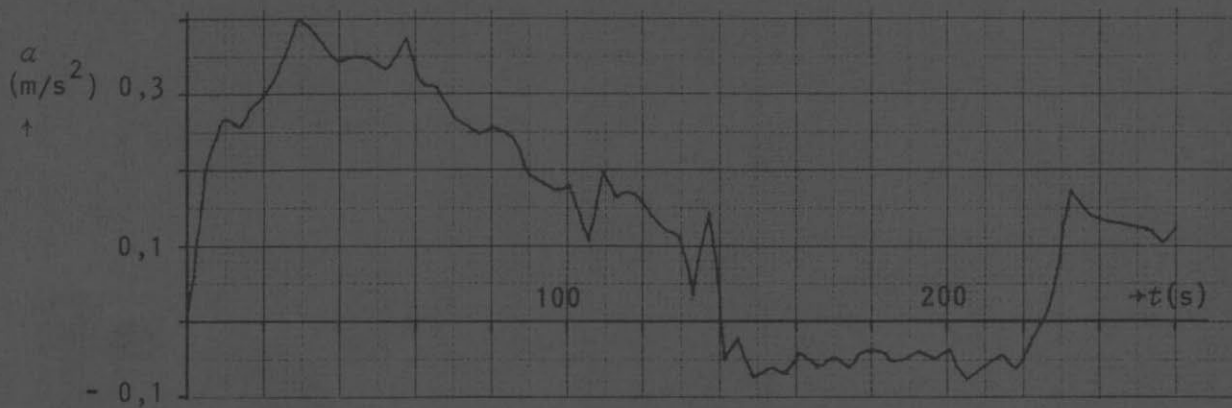
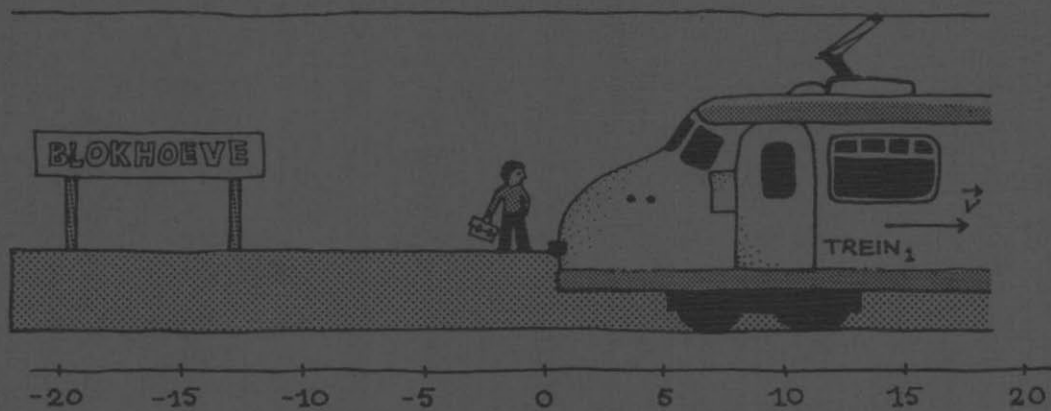


BLOK

BEWEGINGEN



VWO-BOVENBOUW NATUURKUNDE PROJECT

Het VWO-bovenbouw natuurkunde project streeft een inhoudelijke en didactische vernieuwing van het natuurkunde onderwijs in de bovenbouw VWO na. Daartoe zijn thema's en blokken geschreven. In een thema staat een vraag uit de dagelijkse omgeving, de techniek, de samenleving of een wetenschapsgebied centraal en worden natuurkunde inhouden vanuit die vraagstelling gekozen. In een blok staan enkele kernbegrippen uit de natuurkunde in de systematische samenhang van het vak centraal. Aan de hand van reële probleemstellingen worden de begrippen (verder) opgebouwd en uitgediept en wordt aandacht besteed aan het oplossen van problemen met behulp van de betreffende begrippen.

Overzicht van geschreven materiaal

a. *Materiaal voor experimentele keuzegroepen VWO*

1. Muziek (havo/vwo thema + aanvullend VWO-hoofdstuk)
(experimenteel keuzeonderwerp De natuurkunde van Muziek)
2. Automatisering
(experimenteel keuzeonderwerp Microelektronica)
3. Rond 1900
(experimenteel keuzeonderwerp Golf-deeltjesdiscussies rond 1900)
4. Ioniserende Straling (havo/vwo thema + vwo hoofdstuk 'Stralingsfysica in het ziekenhuis')
(experimenteel keuzeonderwerp Ioniserende Straling in de Gezondheidszorg)

b. *Materiaal dat (grotendeels) binnen de reguliere VWO-leerstof valt:*

1. Verkeer (havo/vwo thema, 4e klas)
2. Bewegingen (blok, 4e klas)
3. Energie (thema, 4e/5e klas)
4. Sport (thema, 4e/5e klas)
5. Arbeid en energie (blok, 5e klas)
6. Elektromotoren (thema, 5e klas)
7. Deeltjes in velden (blok, 5e/6e klas)

c. *Materiaal dat (grotendeels) buiten de reguliere VWO-leerstof valt:*

1. Lijfwerk (thema, 4e klas)
2. Het Weer (thema, 4e klas)
3. Satellieten (thema, 6e klas, verschijnt begin '86)

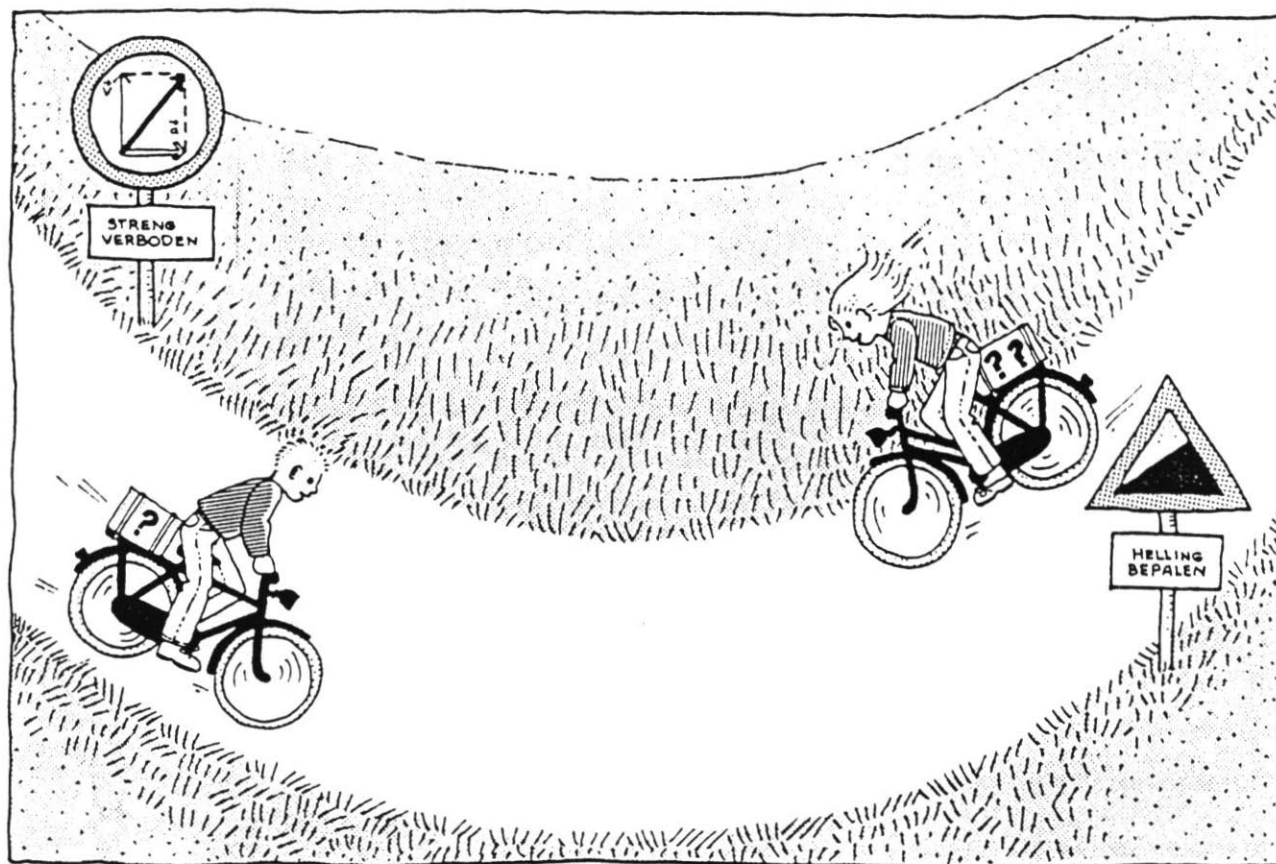
Experimenteel natuurkunde blok voor de 4e klas VWO. Samengesteld door medewerkers van het VWO-bovenbouwproject en projektleraren.

© 1985 Rijksuniversiteit Utrecht, Universiteit van Amsterdam,
 Rijksuniversiteit Groningen.

PLON, Lab. voor Vaste Stof, Postbus 80.008, 3508 TA Utrecht,
Didaktiek Natuurkunde UvA, Nieuwe Achtergracht 170, 1018 WV Amsterdam,
Didaktiek Natuurkunde RUG, Landleven 12, 9747 AD Groningen.

BLOK

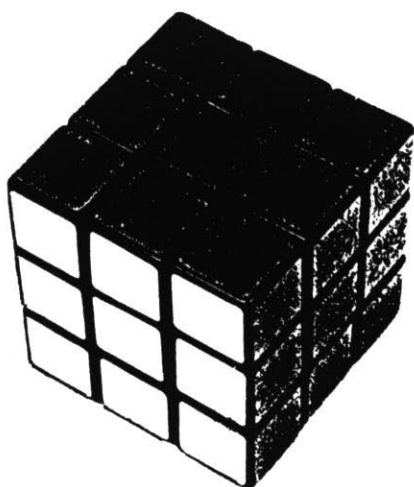
BEWEGINGEN



Hoofdstuk 1	ORIENTATIE	5
Hoofdstuk 2	PLAATS, TIJD, SNELHEID	9
Hoofdstuk 3	VERSNELLING	33
Hoofdstuk 4	RICHTINGEN BESCHRIJVEN	53
ANTWOORDEN BIJ DE OPDRACHTEN		81
HINTS BIJ DE PROBLEMEN		84

INHOUD

- 1.1 NA EEN THEMA EEN BLOK
- 1.2 WAT GA JIJ IN DIT BLOK DOEN ?



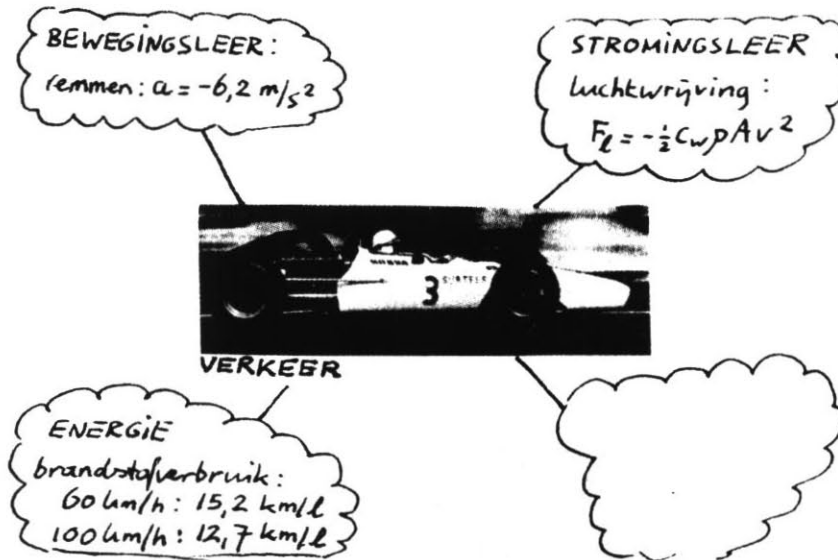
Vooruitblik

Het blok Bewegingen is anders opgezet dan het thema Verkeer. In dit blok ga je dan ook andere dingen doen. Je bent bijvoorbeeld veel meer bezig met *theorie*, met de *samenhang* tussen begrippen zoals plaats, tijd, snelheid, versnelling. Daaraan komt nogal wat *wiskunde* te pas. Ook ga je met elkaar '*problemen*' oplossen die ontleend zijn aan verschillende situaties (verkeer, sport, ruimtevaart, ...).

Lees dit hoofdstukje door om een idee te krijgen wat je van het blok kunt verwachten en wat er van jou verwacht wordt.

ORIENTATIE

1.1 NA EEN THEMA EEN BLOK



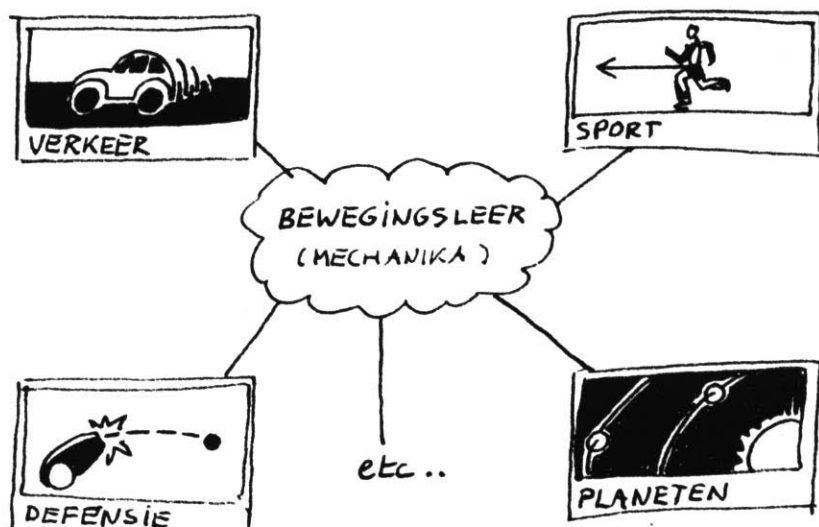
In het thema Verkeer kwamen allerlei deelgebieden van de natuurkunde aan de orde omdat je die nodig had voor het beantwoorden van de themavraagstellingen over *veiligheid* en *zuinigheid*. Een deelgebied was bijvoorbeeld de *bewegingsleer*, die antwoord moest geven op de vraag: welke krachten beheersen de bewegingen in het verkeer? Deze krachten en bewegingen werden zodanig beschreven dat hiermee aan de themavragen gewerkt kon worden: tegenwerkende en voortstuwende krachten; eenparige, vertraagde en versnelde bewegingen.

In het blok Bewegingen ga je deze beschrijving wat algemener maken door te werken vanuit een vraag die niet, zoals in Verkeer, van buiten de natuurkunde komt maar vanuit de natuurkunde zelf: hoe kun je bewegingen beschrijven? Dit heeft tot gevolg:

- . dat je de bewegingen wat *preciezer* gaat bekijken; hiervoor zal je meer wiskunde nodig hebben.
- . dat je *meer soorten* bewegingen gaat bekijken, met name ook kromlijnige bewegingen.
- . dat je ook bewegingen gaat bekijken die niet alleen in het verkeer, maar ook in *andere situaties* optreden.

Zo werk je in Bewegingen aan een samenhangend stukje natuurkunde: de bewegingsleer. De bedoeling van dit blok is dus niet om na verkeer meteen weer een ander thema aan te snijden, maar om eerst wat '*natuurkundig gereedschap*' te verstevigen en uit te breiden, dat in Verkeer te voorschijn gekomen is. Ditzelfde gereedschap kun je dan later gebruiken bij vraagstellingen over bewegingen van bijvoorbeeld mensen in de sport, dieren in de natuur of planeten in ons zonnestelsel. Bovendien moet je natuurlijk tegen die tijd uit kunnen maken welke stukken van dit gereedschap bij welke bewegingsproblemen belangrijk zijn.

Omdat dit *systematisch* werken vanuit een stukje natuurkunde vaak zoveel succes heeft, zul je dat in de 5e klas meer tegenkomen. Het gaat hierbij dan steeds om



- . het nauwkeuriger omschrijven van natuurkundige begrippen die je al eerder bent tegengekomen;
- . het werken met deze begrippen in nieuwe situaties;
- . het maken van juiste keuzes en benaderingen afhankelijk van de probleemstelling waarbij je de begrippen wilt gebruiken.

Tussen haakjes: je kunt het blok bewegingen dus ook gebruiken als één van de middelen om voor jezelf uit te maken of je in de 5e klas met natuurkunde verder wilt gaan.

1.2 WAT GA JIJ IN DIT BLOK DOEN ?

Je gaat bewegingen beschrijven met behulp van de natuurkundige begrippen *tijd, plaats, snelheid, versnelling, kracht* en *massa*.

Hierbij gebruik je de wiskundige hulpmiddelen *grafieken, funkties, differentiëren* en *vektoren*.

In elk van de volgende hoofdstukken krijg je aan de hand van voorbeelden meer inzicht in de mogelijkheden van dit gereedschap. Theorie en opdrachten wisselen elkaar hierbij voortdurend af. Je kunt het boek samen met anderen doorwerken.

Aan het eind van elk hoofdstuk vind je '*problemen*'. Voor het oplossen hiervan moet je zelf (of met elkaar) een strategie bedenken, het nodige gereedschap selecteren en eventueel toelaatbare vereenvoudigingen doorvoeren. Bij het bespreken van de problemen zul je vaak zien dat er meer goede oplossingsmethoden zijn. Ook zul je merken dat verschillende benaderingen tot verschillende resultaten kunnen leiden.

ORIENTATIE

Het hangt een beetje van onder andere jouw klas en leraar af hoeveel les-tijd je nodig hebt om dit blok te doen. We maken de volgende schatting: in totaal zijn minstens 15 lessen nodig, waarvan ongeveer 6 voor het 'probleemoplossen' (we zijn er dan wel van uitgegaan dat je ook tijd be-steedt aan huiswerk). Je bent dus zo'n 4 tot 6 schoolweken met Bewegingen bezig.

Opdrachten 1 en 2 geven, als voorbeeld, een indruk welk soort uitbreidin-gen van het gereedschap rond het begrip *snelheid* aan de orde zullen komen.

1



Een hardloper loopt 100 m in 10,0 s.
Dat komt neer op 10 m/s ofwel 36 km/h.
Maar als je preciezer kijkt, moet je er
rekening mee houden dat de snelheid bij
de start lager ligt en bij het passeren
van de finish hoger.

*Er is een verschil tussen gemiddelde snel-
heid en snelheid op één tijdstip: een re-
den om snelheid op één tijdstip nader te
omschrijven.*

Hoe hoog schat je de snelheid van de hardloper bij het passe-
ren van de finish?

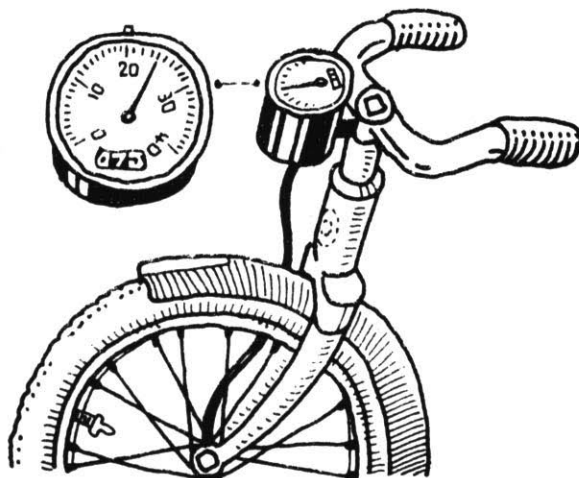
- 2 De aarde legt 1 miljard km (om de zon) af in 365 dagen. Dat
betekent zo'n 100000 km/h. Maar na een jaar is de aarde prak-
tisch weer op dezelfde plaats terug: in zekere zin is de ge-
middelde snelheid dus 0.

*We moeten hier onderscheid maken tussen de grootte van de
snelheid en de snelheid als vektor, $\vec{v}$. Hier is de gemiddelde
 $\vec{v}$ over één jaar gemeten gelijk aan $\vec{0}$, doordat de richting
steeds verandert.*

Teken de baan van de aarde om de zon en geef op enkele punten
de richting van de snelheid aan.

INHOUD

- 2.1 GEMIDDELDE EN 'ECHTE' SNELHEID
- 2.2 EENPARIGE RECHTLIJNIGE BEWEGINGEN WISKUNDIG BESCHREVEN
- 2.3 SNELHEID OP EEN TIJDSTIP: RAAKLIJN AAN x, t - GRAFIEK
- 2.4 VERPLAATSING: OPPERVLAK ONDER v, t -GRAFIEK
- 2.5 SAMENVATTING
- 2.6 PROBLEMEN OM OP TE LOSSEN



Vooruitblik

In dit hoofdstuk ga je letten op plaats, tijd en snelheid.

Je gaat steeds preciezer kijken naar de beweging van treinen; eerst niet, later wel rekening houdend met optrekken en afremmen. Om te kunnen werken met de 'snelheid op een tijdstip' (ook al is de snelheid niet constant) zal je 'gereedschap' uit de wiskunde zoals het functiebegrip, differentiëren, grafieken en de oppervlakte onder een grafiek gebruiken.

Al naar gelang de vraag die je moet oplossen kan je vereenvoudigingen toepassen, zoals: doen alsof een trein met *constante* snelheid beweegt langs een rechte lijn, of doen alsof hij *regelmatig* optrekt en afremt.

In de problemen aan het eind van dit hoofdstuk zal je in nieuwe situaties het gereedschap uit dit hoofdstuk op een goede manier moeten zien te hanteren.

PLAATS, TIJD, SNELHEID

2.1 GEMIDDELTE EN 'ECHTE' SNELHEID

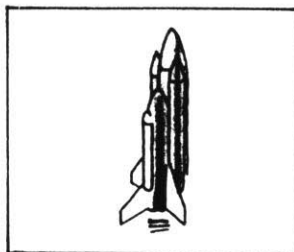
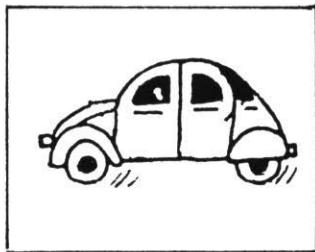
Tot nu toe heb je de gemiddelde snelheid uitgerekend met de formule

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Daarin is $\bar{v}$ de gemiddelde snelheid (in m/s of in km/h), Δs de afgelegde weg (in m of in km) en Δt de tijd (in s of in h) waarin die weg is afgelegd. Echter $\bar{v}$ is een 'denkbeeldige' snelheid, zodat deze formule maar beperkt bruikbaar is: hij zegt niets over het *verloop* van de 'echte' snelheid v . Als je bij het fietsen van huis naar school eerst treuzelt en later heel hard gaat, kun je op dezelfde $\bar{v}$ uitkomen als bij heel regelmatig normaal fietsen. Maar: in het laatste geval zal de 'echte' snelheid v voortdurend heel dicht bij $\bar{v}$ in de buurt liggen. Dan is het dus niet zo gek om op te schrijven

$$v \approx \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

- 1 Bedenk zelf nog drie situaties, bijvoorbeeld in het verkeer, in de ruimtevaart en in de sport, waarin je met laatstgenoemde formule de snelheid tamelijk goed kunt uitrekenen. Bedenk ook drie situaties waarin die formule echt foute waarden voor de snelheid geeft.



De formule voor $\bar{v}$ zegt ook niets over de *richtingen* die de 'echte' snelheid kan aannemen. De afgelegde weg Δs rekenen we namelijk altijd langs de werkelijke baan s van de beweging, hoe bochtig ook, en de formule zegt alleen maar hoe hard dat (gemiddeld) gegaan is. Maar in hoofdstuk 4, waar we gereedschap ontwikkelen om de richtingen van bewegingen te kunnen beschrijven, zullen we ook kijken naar de 'verplaatsing': de rechte verbindingslijn tussen begin- en eindpunt. Dat is dus de kortste weg, hemelsbreed gemeten. Het verschil met de 'echte' afgelegde weg wordt duidelijk gemaakt in fig. 2.1.

- 2 Stel je bent in een bepaalde tijd naar school gefietst. Wat zou er met $\bar{v}$ gebeuren als je die in fig. 2.1 zou uitrekenen met de verplaatsing in plaats van met de afgelegde weg?

Een beweging met constante snelheid langs een rechte lijn wordt wel een *eenparige rechtlijnige beweging* genoemd. Voor zo'n beweging geldt altijd:

$$v = \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

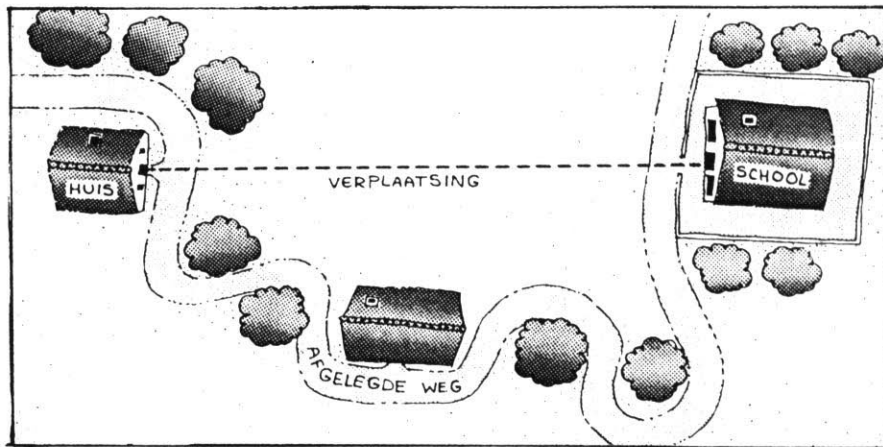


fig. 2.1 Twee manieren om de weg van huis naar school te meten: met de *verplaatsing* (hemelsbreed) of langs de 'echte' weg.

In een heleboel gevallen waarbij je niet geïnteresseerd bent in richtingsveranderingen en kleine snelheidsverschillen, kun je de in feite ingewikkelde bewegingen vereenvoudigen tot 'eenparige rechte' bewegingen. Daarom gaan we eerst op zoek naar bruikbare wiskundige beschrijvingen van deze eenvoudige bewegingen.

- 3 Ga bij elk van de volgende vragen na of het zinvol is de beweging te vereenvoudigen tot een eenparige rechte beweging.
 - a) Kan ik in 80 dagen de wereld rondreizen?
 - b) Wie in de klas kan de 100 m lopen binnen 15 s?
 - c) Hoe hard kruipt een slak?

2.2 EENPARIGE RECHTLIJNIGE BEWEGINGEN WISKUNDIG BESCHREVEN

We nemen als voorbeeld de situatie op een klein station aan een recht spoor, waar sneltrein 2 twee minuten na sneltrein 1 komt langsrazen. Gegeven is dat trein 1 langzamer gaat (72 km/h) dan trein 2 (108 km/h). Je kan je dan afvragen waar de twee treinen op elkaar botsen, als ze met constante snelheid zouden blijven rijden.

De botsing gebeurt op de plaats waar de voorkant van trein 2 de achterkant van trein 1 inhaalt. Als je kunt beschrijven hoe van deze voor- en achterkant de *plaatsen* veranderen in de *tijd*, kun je de plaats van de botsing bepalen. Omdat er op elk tijdstip een plaats voor de achterkant van trein 1 te vinden is, kunnen we deze plaats op het spoor beschrijven als een wiskundige functie: de *plaatsfunctie* $x_1(t)$. Evenzo kunnen we een plaatsfunctie $x_2(t)$ opstellen voor de voorkant van trein 2.

We moeten daarbij eerst een nulpunt voor de plaats kiezen, én een tijdstip van waar af we de tijd gaan tellen. Het ligt voor de hand het station als nulpunt voor de plaats te kiezen. Het moment dat de achterkant van trein 1 daar voorbij komt (daarop kan de achterop komende trein immers botsen) kiezen we als moment $t = 0$ (zie fig. 2.2).

PLAATS, TIJD, SNELHEID

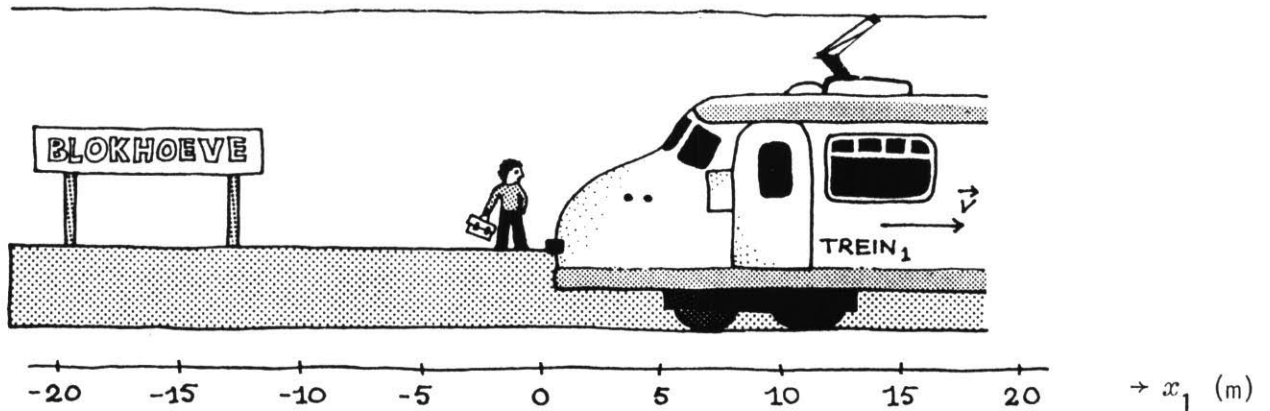


fig. 2.2 Langs het spoor is een schaalverdeling getekend.

De positieve en negatieve waarden voor x_1 dienen alleen om, vanuit het station gezien, de rijrichting aan te geven.

We veronderstellen dat de snelheid van trein 1 constant blijft ($72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$). Je mag dus opschrijven:

$$v_1 = \bar{v}_1 = 20 \text{ m/s}$$

Hieruit kun je de plaatsfunctie $x_1(t)$ halen (zie de tabel):

t in s	$x_1(t)$ in m
0	0
1	$1 \cdot 20 = 20$
2	$2 \cdot 20 = 40$
3	$3 \cdot 20 = 60$
$\vdots$	$\vdots$

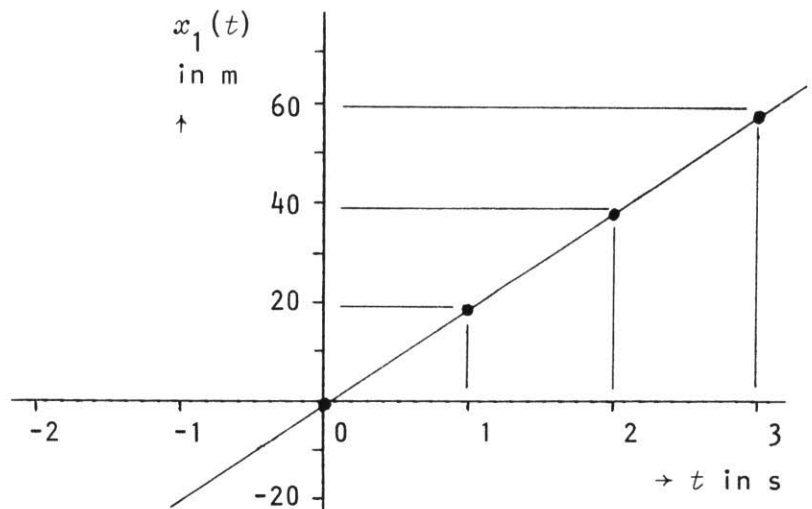


fig. 2.3 Grafiek van de plaatsfunctie $x_1(t) = 20 \cdot t$

$$x_1(t) = 20 \cdot t$$

Van deze plaatsfunctie kunnen we een *grafiek* tekenen in een x, t - diagram (fig. 2.3). Let op: de 'onafhankelijke grootheid' (in dit geval t) wordt altijd horizontaal uitgezet, de 'afhankelijke grootheid' (hier x_1) vertikaal. Het resultaat is een rechte lijn door de oorsprong.

4 Welk stuk van fig. 2.3 hoort bij het stuk perron dat zichtbaar is in fig. 2.2?

5 Wat is de betekenis van de negatieve waarden van x_1 en van t ?

Klopt de gevonden plaatsfunctie met de formule voor de snelheid v ?
Gerekend vanaf de situatie in fig. 2.2 is voor trein 1 steeds $\Delta s = x_1(t)$, en ook steeds $\Delta t = t$. Uitgaande van

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

krijg je dus

$$v_1 = \frac{x_1(t)}{t} \quad \text{dus } x_1(t) = v_1 \cdot t \text{ ofwel } x_1(t) = 20 \cdot t$$

dus dat klopt.

De neus van trein 2 komt na twee minuten langsrijden. Van deze neus moeten we, om iets over de botsing te kunnen zeggen, de plaatsfunctie $x_2(t)$ opschrijven. We weten de snelheid: $v_2 = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$, en we weten de plaats op $t = 2 \text{ minuten} = 120 \text{ s}$, namelijk $x_2(120) = 0$.

6 Neem de tabel over en vul hem verder in.

t in s	$x_1(t)$ in m	$x_2(t)$ in m
0	0	____.30 = ____
120	2400	_____ 0
240	_____	120.30 = 3600
360	_____	____.30 = ____

7

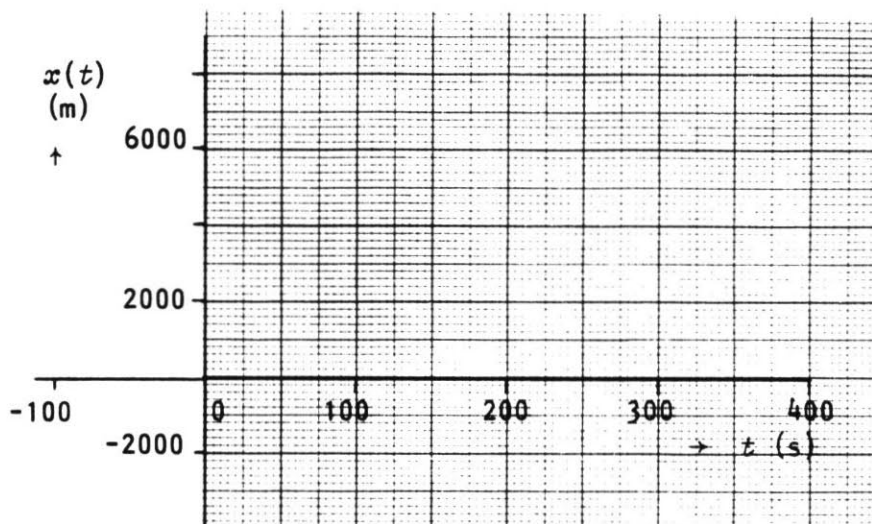


fig. 2.4 Diagram voor grafieken van $x_1(t)$ en $x_2(t)$

Fig. 2.4 is een x, t - diagram zoals fig. 2.3, maar met een veel minder fijne schaalverdeling. Teken op een kopie van fig. 2.4 $x_1(t)$ en $x_2(t)$.

8 Laat zien dat $x_2(t) = 30 \cdot (t - 120) = 30 \cdot t - 3600$
Wat is de betekenis van '30'? En van '-3600'?

Waar en wanneer zou de botsing nu plaatsvinden? Achterkant 1 en neus 2 moeten dan op dezelfde plaats zijn. Dus moet gelden:

$$x_1(t) = x_2(t)$$

Dit zou je kunnen noemen: de vertaling van de vraag "waar botsen ze?" naar de wiskundig/natuurkundige relatie " $x_1(t) = x_2(t)$ ". Dit vertalen is één van de

PLAATS, TIJD, SNELHEID

moeilijkste stappen bij het oplossen van een probleem: het lijkt wel logisch, maar om het zelf te bedenken!

- 9 Ga na dat daaruit volgt dat de botsing plaats zou vinden op 7200 m van het station.
- 10 Hoe wordt de vraag "waar botsen ze?" vertaald in het diagram uit opdracht 7?

In feite mag de botsing natuurlijk niet plaats vinden. Door een onveilig sein zal trein 2 gewaarschuwd worden langzamer te gaan rijden of zelfs te stoppen. De plaatsfunctie $x_2(t)$ heeft maar een beperkt *geldigheidsgebied*.

- 11 Trein 2 moet op $t = 180$ s voor een onveilig sein afremmen en rijdt korte tijd daarna nog maar 72 km/h, zodat trein 1 niet meer wordt ingehaald.
Schets deze toedracht in het diagram uit opdracht 7.
- 12 De neus van een sneltrein 3 die van de andere kant komt (op het andere spoor!) zou als plaatsfunctie kunnen hebben:

$$x_3(t) = -25 \cdot t + 9000$$
 - a) Bereken wanneer de neus van sneltrein 3 langs het station komt.
 - b) Bereken waar de neus van trein 3 de achterkant van trein 1 tegenkomt.
 - c) Teken de plaatsfunctie $x_3(t)$ in het x, t - diagram uit opdracht 7.

Als je de plaatsfuncties $x_1(t)$, $x_2(t)$ en $x_3(t)$ van de treinen nog eens goed bekijkt, zie je dat ze allemaal de gedaante hebben:

$$x(t) = v \cdot t + x(0)$$

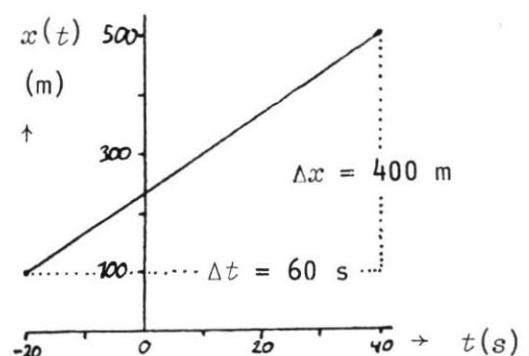
Aan de plaatsfuncties kun je zien in welke van de twee mogelijke richtingen de treinen rijden, omdat de snelheden een (positief of negatief) *teken* hebben. Dit teken is positief, als de plaatscoördinaat van de trein steeds groter wordt.

- 13 Wat is de snelheid van trein 3? En de plaats op $t = 0$ s?

Uit het diagram dat je uit opdracht 7 hebt gekregen kan je zien dat bewegingen met constante snelheden steeds *rechte* grafieken geven. Ook kan je zien dat de *helling* van de grafieken iets zegt over de snelheid. Stijgende grafieken (met een positieve helling) horen bij bewegingen met een snelheid in de positieve richting. Bewegingen met een snelheid in de negatieve richting geven een dalende grafiek te zien.

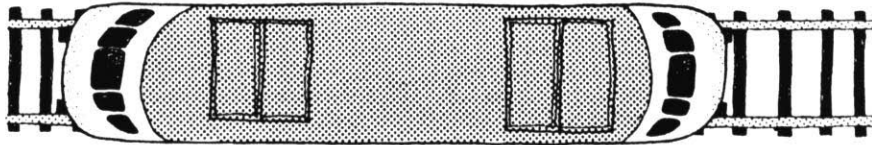
Uit de helling van een grafiek in een x, t - diagram kan je direkt de snelheid aflezen: zie fig. 2.5. De helling van de grafiek is :

fig. 2.5 Snelheid kan je uit een x, t - diagram bepalen: de helling van de grafiek



$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{400 \text{ m}}{60 \text{ s}} = 6,7 \text{ m/s}$$

Kortom, de helling in het x, t - diagram is de snelheid (aan de eenheid m/s zie je dat ook).



2.3 SNELHEID OP EEN TIJDSTIP: RAAKLIJN AAN x, t - GRAFIEK

De grafiek in een x, t - diagram van een rechtlijnig bewegend voorwerp zal in het algemeen geen rechte lijn zijn. In fig. 2.6 is bijvoorbeeld de beweging getekend van iemand die op de fiets een brief naar de brievenbus verder op in de straat brengt.

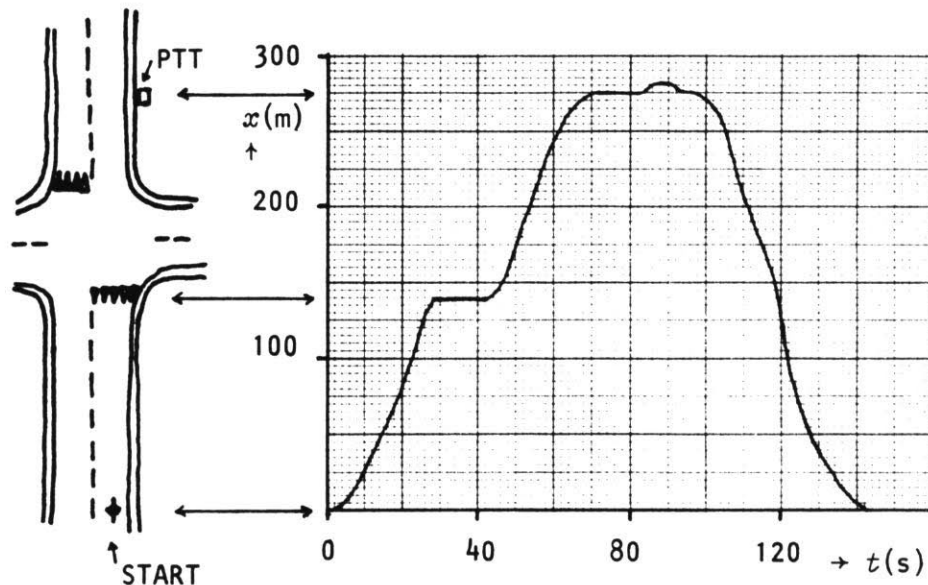


fig. 2.6 De x, t - grafiek van een fietser die van huis naar de brievenbus rijdt en terug.

- 14 a) Bereken waarom de *kromme grafiek* van fig. 2.6 toch een *rechtlijnige* beweging voorstelt.
- b) Lees uit fig. 2.6 af hoe de beweging van de fietser verloopt. Gebruik je fantasie daarbij.
- c) Hoe zijn de nulpunten van plaats en tijd gekozen?
- d) Vind je de fietser erg hard of erg langzaam rijden?

Bij het beschrijven van rechtlijnige bewegingen zijn grafieken heel nuttig om meetgegevens, bijvoorbeeld over het verband tussen de plaats en de tijd, weer

PLAATS, TIJD, SNELHEID

te geven en zo mogelijk daarbij een algebraïsche funktie te vinden die de plaatsfunctie (bij benadering) voorstelt.

- 15 Bij de grafiek van fig. 2.6 kan je een aantal redelijk eenvoudige algebraïsche funkties zoeken, die elk voor een bepaald interval gelden.

a) Vind je dat $0 < t < 27$ s een geldigheidsgebied is voor de benadering

$$x(t) = \frac{1}{5} t^2?$$

b) Stel zelf funkties op die de plaatsfunctie benaderen in de intervallen $30 < t < 40$ s en $50 < t < 60$ s.

In 2.2 reden de treinen met constante snelheden langs een recht spoor in twee richtingen, die je aanduidde met positieve en negatieve x -richting. In het thema Verkeer heb je ook de gemiddelde snelheid van een bestaande treinreis bepaald uit een tabel uit het spoorboekje (fig.2.7).

fig. 2.7 Deel uit het spoorboekje, ook afgedrukt in Verkeer

km	treinnummer	06.25.00
0	Den Haag CS	8 45
0	Den Haag HS	8 48
0	Den Haag HS	8 50
4	Rijswijk	8 57
9	Delft	9 00
23	Rotterdam CS	9 06
23	Rotterdam CS	9 09
30	Rotterdam Lombardijen	9 11
43	Dordrecht	9 23
43	Dordrecht	9 24
43	Dordrecht Zuid	9 24
58	Lage Zwaluwe	9 44
73	Breda	9 45
73	Breda	9 59
94	Tilburg	10 22
131	Eindhoven	10 27
131	Eindhoven	10 37
144	Helmond	10 37
153	Deurne	10 37
171	Horst-Sevenum	10 37
181	Blerick	10 37
183	Venlo	11 00

Bij zo'n treinreis zijn er natuurlijk bochten en is de snelheid verre van constant.

We willen nu de *snelheidsvariatië*s gaan bestuderen zonder met de bochten rekening te houden. We doen dus alsof de werkelijke baan s langs een recht spoor in de x -richting valt. De gemiddelde snelheid over de afstand Δx (een willekeurig stukje spoorweg, bv. het traject Breda-Tilburg) is dan

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Het traject Den Haag-Venlo en in het bijzonder het laatste stuk daarvan zullen we gaan gebruiken als voorbeeld om van gemiddelde snelheid naar snelheid op één tijdstip te komen.

- 16 Als je de gemiddelde snelheid tussen Den Haag HS en Venlo uit de gegevens van het spoorboekje uitrekent, krijg je $84 \text{ km/h} = 23 \text{ m/s}$. Stel een plaatsfunctie op voor deze trein, uitgaande van deze gemiddelde snelheid (kies zelf een nulpunt voor plaats en tijd). Controleer of het mogelijk is met die plaatsfunctie de vertrektijden van de trein vanaf de stations Dordrecht en Eindhoven te voorspellen met een nauwkeurigheid van 3 minuten.

Deze manier van voorspellen met een gemiddelde snelheid is natuurlijk vrij grof. Als je de gemiddelde snelheid over een kleiner traject, bijvoorbeeld van Helmond naar Venlo, gebruikt om een plaatsfunctie op te stellen kun je daarmee de plaats *tussen* de intercity-stations (iets minder grof) voorspellen.

- 17 Stel zo'n plaatsfunctie op. Bereken daarmee wanneer de trein ongeveer de stations van Deurne, Horst-Sevenum en Blerick passeert. Welke van die voorspellingen zal het dichtste de werkelijkheid benaderen? Waarom?

Je moet eigenlijk ook rekening houden met het optrekken en afremmen van de trein. Bij Blerick zal de trein bijvoorbeeld al lang afgeremd hebben vanwege de brug over de Maas, die met beperkte snelheid gepasseerd moet worden. Het traject Helmond-Venlo wordt door het CTO (het Centrum voor Technisch Onderzoek van de Nederlandse Spoorwegen) gebruikt voor onderzoek naar het optrekken en afremmen van treinen. Dat traject is geschikt, omdat er weinig bochten en heuvels in zitten en omdat er een maximum snelheid van 160 km/h is toegestaan, de hoogst toegestane snelheid van het Nederlandse Spoorweganet.

Een meetwagen van het CTO heeft voor een personentrein, aangedreven door de elektrische lokomotief (Elok) 1603, de grafiek van fig. 2.8 opgenomen.

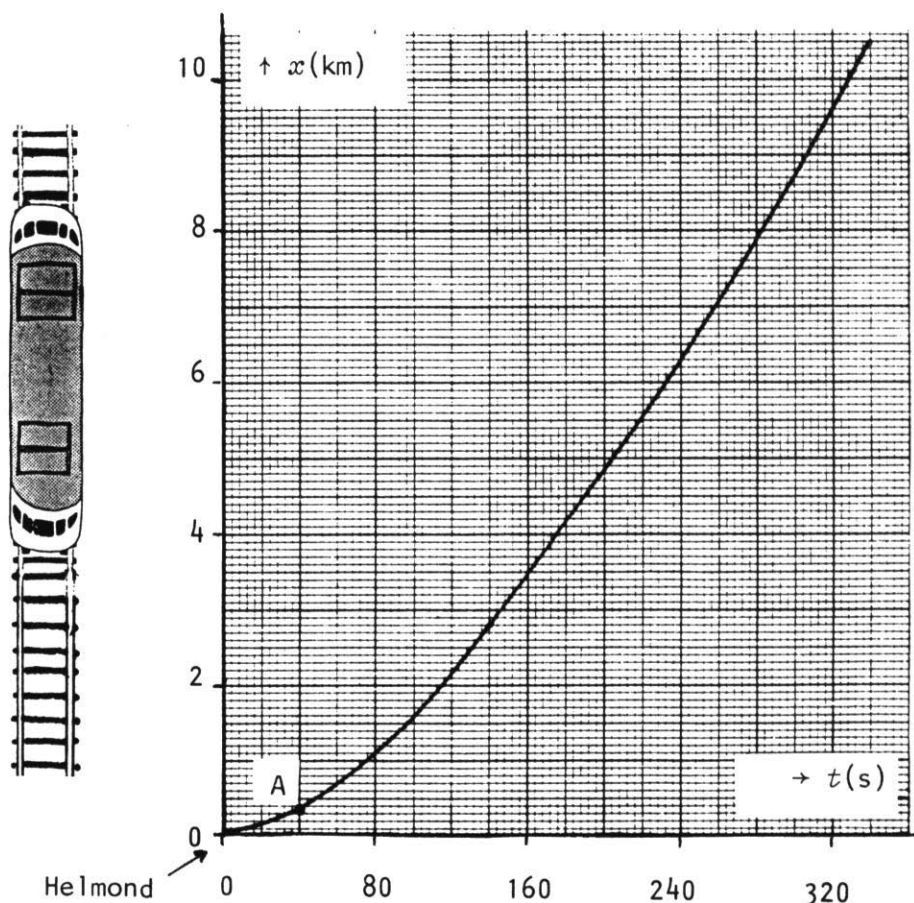


fig. 2.8 Een meting van het CTO: de plaatsfunctie van een trein, getrokken door de Elok 1603.

PLAATS, TIJD, SNELHEID

Uit de grafiek van fig. 2.8 is duidelijk te zien dat de snelheid niet constant is: de grafiek loopt krom. Alleen tussen 120 en 200 s zit een vrijwel recht stuk.

- 18 Bepaal uit de grafiek van fig. 2.8 de snelheid tussen 120 en 200 s.
- 19 Bepaal uit de grafiek van fig. 2.8 de gemiddelde snelheid van 0 tot 120 s en van 200 tot 340 s.
- 20 a) Teken op een kopie van fig. 2.8 de verbindingslijnen tussen de punten op de grafiek die in opdracht 19 gebruikt zijn.
b) Laat zien dat de helling van zo'n lijn de gemiddelde snelheid tussen de daar genoemde tijdstippen geeft.
c) Teken in dezelfde figuur ook de 'gemiddelde' plaatsfunctie die je in opdracht 17 hebt opgesteld. Wat kun je over de helling daarvan zeggen?

Als je nu heel precies de snelheid op één tijdstip, bijvoorbeeld op $t = 40$ s (punt A uit de grafiek van fig. 2.8) wilt weten, wat moet je dan doen? Te verwachten valt dat die snelheid wat kleiner is dan de gemiddelde snelheid van 0 tot 120 s.

De gemiddelde snelheid tussen 40 en 60 s komt in dit geval wat dichterbij de buurt. Tussen 40 en 50 s is nog beter, tussen 40 en 41 s nog beter.

In fig. 2.9 zie je steeds het punt A van de grafiek, dat hoort bij de vaste tijd van 40 s en het punt B, dat eerst hoort bij 50, dan bij 41 en tenslotte net als A bij 40 s. De hellingen

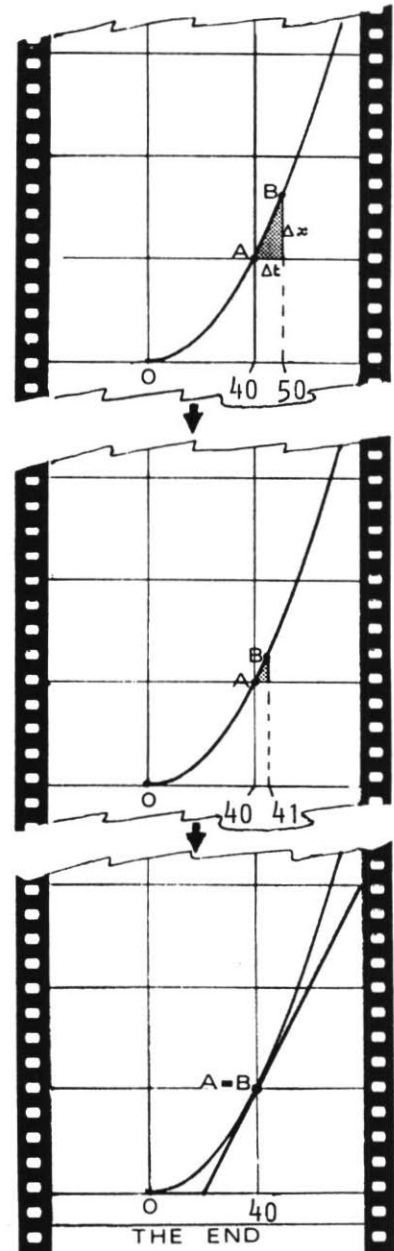
$$\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

van de lijnstukken AB zijn de gemiddelde snelheden over de (steeds kleiner gekozen) tijdsintervallen. Hoe kleiner je het tijdsinterval neemt, des te meer gaat zo'n helling lijken op de helling van de *raaklijn* aan de grafiek in $t = 40$ s (laatste plaatje).

We spreken af dat de snelheid van de Elok 1603 op het tijdstip $t = 40$ s wordt vastgelegd door de helling van de raaklijn in punt A aan de grafiek van fig. 2.8.



fig.2.9 De gemiddelde snelheid over steeds kleinere tijdsintervallen bepaald uit de helling in het x, t - diagram.



- 21 Bepaal op de kopie van fig. 2.8 de snelheid van de Elok 1603 op het tijdstip $t = 40$ s.
Bepaal ook de snelheid op $t = 0$ en op $t = 320$ s.

Bij elk tijdstip hoort een waarde voor de helling van de raaklijn, dus voor de snelheid. De helling van de raaklijn - en dus de snelheid - is zelf ook een functie. We noemen die de *helling-functie*. Je kunt dus ook praten over de snelheidsfunctie. Daarom kunnen we de algemene regel vastleggen:

De snelheid(-sfunctie) $v(t)$ is de helling(-functie) van de plaats(-functie) $x(t)$.

Bij het x, t - diagram van fig. 2.8 (10,5 km van het traject Helmond-Venlo) kan ook een v, t - diagram getekend worden.
De door het CTO rechtstreeks gemeten grafiek staat afgebeeld in fig. 2.10.

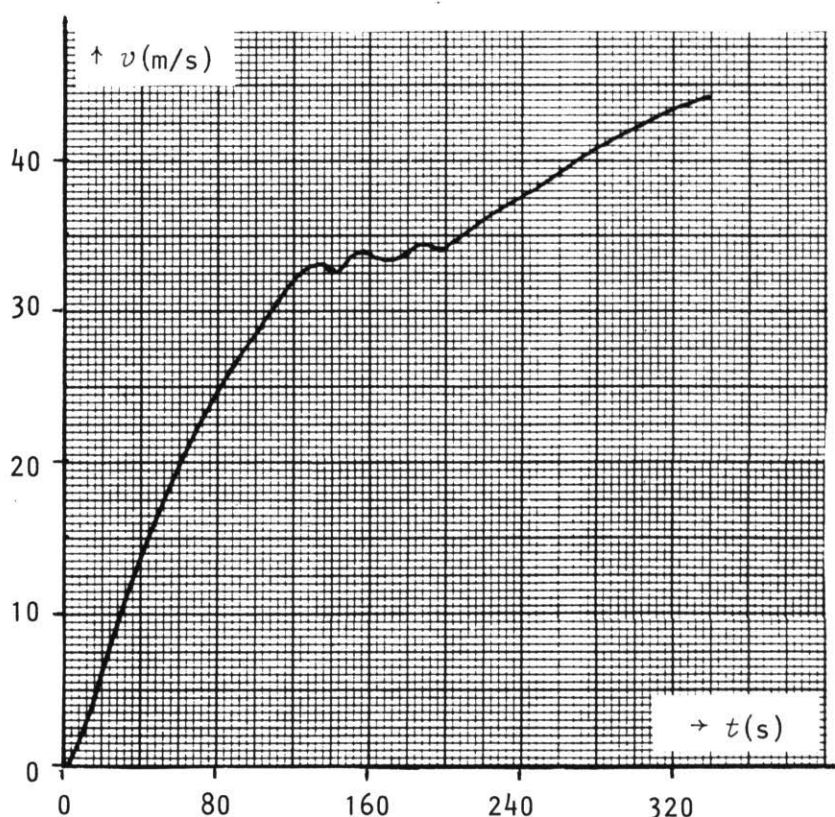


fig. 2.10 Het verloop van de snelheid van de Elok 1603.

- 22 Zet de waarden die je in de opdrachten 18 en 21 hebt gevonden uit in een kopie van fig. 2.10.

Je merkt dat je de snelheidsfunctie langs grafische weg redelijk goed uit de plaatsfunctie kunt halen; hiervoor hoeven de algebraïsche gedaanten van deze functies uiteraard niet bekend te zijn.

PLAATS, TIJD, SNELHEID

In de wiskunde heb je gehad:

De afgeleide functie $y'(x)$ van een functie $y(x)$ is de helling-functie, in 'differentiaalnotatie' genoteerd als $\frac{dy}{dx}$.

Hier hebben we daarvan een voorbeeld met natuurkundige betekenis. Dat zit zo in elkaar:

- 1e) De onafhankelijke grootte x is bij ons de tijd t .
De afhankelijke grootte y is bij ons de plaats x .
Dat levert op:
De afgeleide functie $x'(t)$ van de plaatsfunctie $x(t)$ is de helling-functie $\frac{dx}{dt}$.

- 2e) De differentiaalnotatie is een herinnering aan het quotient $\frac{\Delta x}{\Delta t}$.
We hebben dit quotient

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

bepaald voor steeds kleinere Δt . Tenslotte kregen we de helling-functie of afgeleide functie:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t)$$

Het vinden van de afgeleide functie van een functie heet *differentiëren*.

Regels uit de wiskunde voor het langs algebraïsche weg differentiëren van enkele eenvoudige functies zijn:

$$\left. \begin{array}{l} y(x) = p \cdot x + q \rightarrow y'(x) = p \\ y(x) = r \cdot x^2 + s \cdot x \rightarrow y'(x) = (2r) \cdot x + s \end{array} \right\} \begin{array}{l} (p, q, r \text{ en } s \text{ zijn onaf-} \\ \text{hankelijk van } x) \end{array}$$

- 23 a) Laat zien dat de plaatsfuncties van de drie treinen uit 2.2 allemaal voorgesteld kunnen worden door

$$x(t) = p \cdot t + q$$

- b) Controleer dat je uit deze plaatsfuncties door differentiëren de snelheidsfuncties kunt halen.
c) Wat is het bijzondere aan deze snelheidsfuncties?

2.4 VERPLAATSING: OPPERVLAK ONDER v, t - GRAFIEK

In het voorgaande heb je uit een x, t - grafiek gegevens over de snelheidsfunctie afgelezen. Je kunt dit ook omdraaien: uit een v, t - grafiek kun je iets halen over de plaatsfunctie.

Om dit te laten zien gaan we terug naar opdracht 17, waar je uitgaande van een gemiddelde snelheid een plaatsfunctie moest opstellen. Deze gemiddelde snelheid haalde je uit fig. 2.7 en was de grofste benadering voor $v(t)$ van de treinrit tussen Helmond en Venlo:

$$v(t) = 28,3$$

Als we in Helmond $t = 0$ stellen, ziet de grafiek van deze $v(t)$ er uit zoals in fig. 2.11.

Als je in Helmond ook $x = 0$ nam, werd de plaatsfunctie:

$$x(t) = 28,3 \cdot t$$

Nam je $x = 0$ in Den Haag, dan kreeg je

$$x(t) = 28,3 \cdot t + 144 \cdot 10^3$$

Beide plaatsfuncties hebben gemeen dat zij bij differentiëren $v(t) = 28,3$ opleveren. Voor beide plaatsfuncties is de *verandering* (= de toename) in iedere seconde gelijk aan 28,3 m. De verandering van bijvoorbeeld $t = 0$ tot 700 s vind je door $700 \times 28,3$ te nemen.

Wat kun je nu over $x(t)$ aflezen uit fig. 2.11?

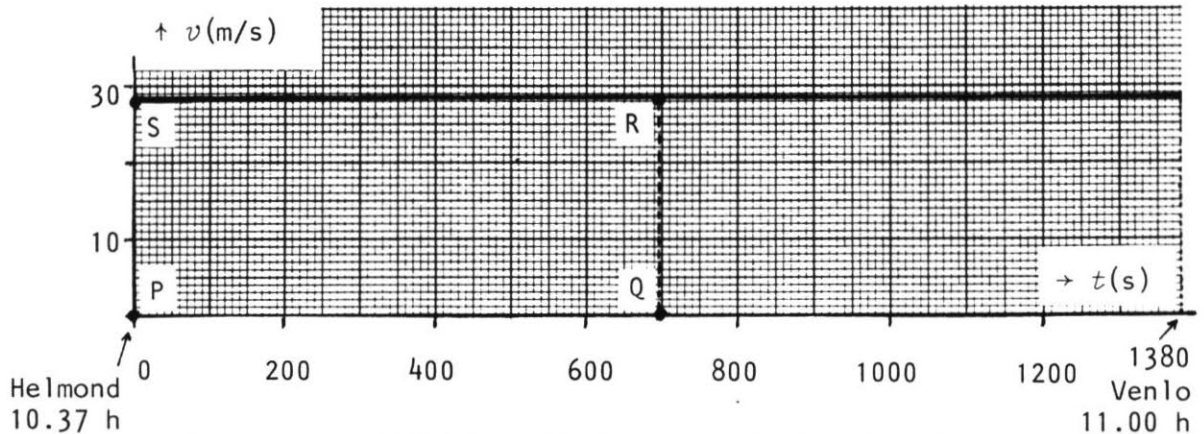
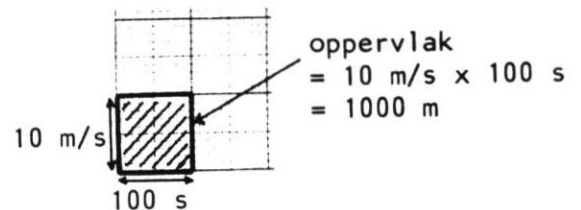


fig. 2.11 De gemiddelde snelheid tussen Helmond en Venlo

Het produkt $700 \times 28,3$ is hierin gelijk aan het oppervlak van de rechthoek PQRS. Deze rechthoek wordt begrensd door de grafiek van $v(t)$, door de t -as en door de twee vertikalen door $t = 0$ en $t = 700$.

De *verandering* van de plaatsfunctie van $t = 0$ tot 700 s (= de verplaatsing Δx van $t = 0$ tot 700 s) wordt in fig. 2.11 dus voorgesteld door het 'oppervlak onder de grafiek' tussen $t = 0$ en $t = 700$.

fig. 2.12 1 hokje uit fig. 2.11 stelt 1 km voor.



Uit fig. 2.12 kan je zien dat het oppervlak van 1 hokje uit fig. 2.11 1000 m voorstelt. De verplaatsing Δx kun je dus ook vinden door het aantal hokjes ($2,83 \times 7$) in PQRS te tellen en dit te vermenigvuldigen met 1000.

Als je in plaats van 700 s een later tijdstip neemt, schuift QR naar rechts en wordt het oppervlak van PQRS groter: $x(t)$ neemt meer toe. Uit het *totale* oppervlak onder de grafiek van fig. 2.11 moet je de toename van de plaatsfunctie tussen $t = 0$ en $t = 1380$ s terugkrijgen.

- 24 Bepaal het oppervlak onder de grafiek van fig. 2.11. Met welke afstand uit het spoorboekje komt je uitkomst overeen?

De v, t -grafiek zal er natuurlijk anders uitzien als je rekening houdt met het optrekken en afremmen: in Helmond begint de snelheid bij 0 en gaat toenemen. In Venlo zal de snelheid weer bij 0 moeten eindigen. Daardoor legt de trein in het begin en op het eind dus minder afstand af dan je op grond van de gemiddelde snelheid zou verwachten. De maximale snelheid zal dus groter moeten zijn dan de gemiddelde snelheid om de 'verloren' afstand weer in te halen.

We maken nu voor dezelfde treinrit een nieuwe benadering voor $v(t)$, waaraan we de volgende eisen stellen:

PLAATS, TIJD, SNELHEID

- 1e) Tijdens de eerste en de laatste 340 s neemt de snelheid regelmatig toe, resp. af (dit komt neer op een vereenvoudiging van fig. 2.10).
 - 2e) Het totale oppervlak onder de v, t - grafiek moet de afstand Helmond-Venlo (39 km) blijven voorstellen.
- Zie fig. 2.13, waarin ook de oude grafiek weer is getekend.

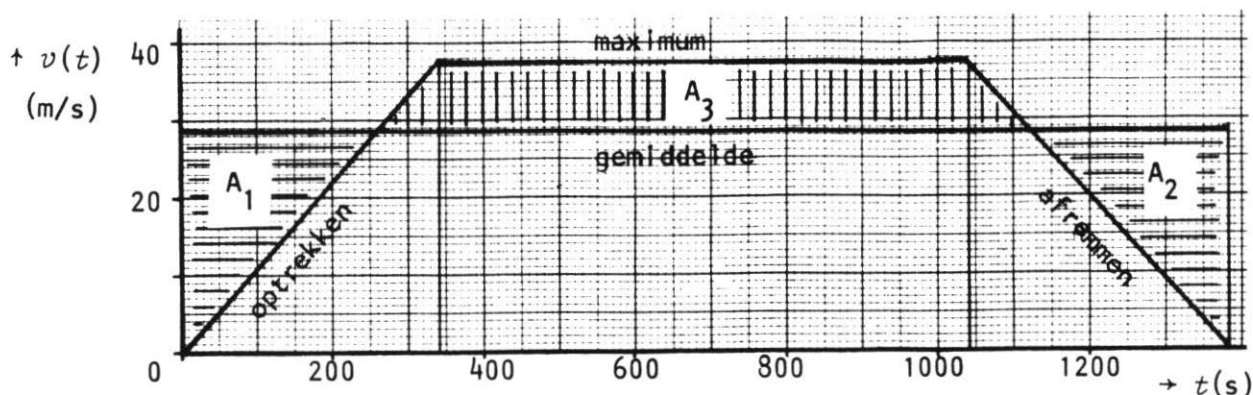
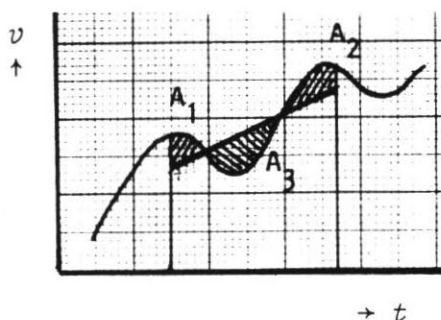


fig. 2.13 Twee benaderingen voor $v(t)$: de grofste (gemiddelde snelheid) en een meer reële (met optrekken en afremmen)

- 25 Controleer of in fig. 2.13 aan de genoemde eisen is voldaan. Laat zien dat moet gelden: $A_1 + A_2 = A_3$. Wat betekenen A_1 , A_2 en A_3 ?

Bij een uit *rechte lijnstukken* bestaande v, t - grafiek kun je dus de verplaatsing tussen twee tijdstippen (= de verandering van de plaatsfunctie) vinden door het oppervlak onder de grafiek tussen die tijdstippen te *berekenen*.

In werkelijkheid zal de grafiek er nog anders uitzien, zoals al uit het diagram van fig. 2.10 te zien is. De verschillen hangen samen met niet constant optrekken, hoogteverschillen, beperking van de snelheid op bruggen en het passeren van tussengelegen stations. Als de de grafiek niet uit rechte lijnen bestaat, moet je hokjes tellen (aantal aan de randen *schatten*).



$$A_1 + A_2 = A_3$$

fig. 2.14 Methode om aantal hokjes te schatten.

Je kunt dit bijvoorbeeld doen door langs een doorzichtige lineaal toch weer een rechte te trekken, waar het kromme stuk grafiek zo goed mogelijk 'omheen slingert' op de manier van fig. 2.14 (er zijn ook andere manieren).

- 26 a) Bepaal uit fig. 2.10 de afstand die de Elok 1603 tussen 0 en 120 s aflegt. Vergelijk die met de afstand die je uit fig. 2.8 kunt aflezen.
b) Neem ook de afstand tussen 120 en 200 s.

2.5 SAMENVATTING

In dit hoofdstuk hebben we ons beperkt tot bewegingen langs een rechte lijn. Uitgaande van de formule voor de gemiddelde snelheid

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

hebben we gevonden:

- . De plaats op verschillende tijdstippen kan beschreven worden door de plaatsfunctie $x(t)$, de snelheid door de snelheidsfunctie $v(t)$.
- . Het verband tussen $x(t)$ en $v(t)$ is: $v(t) = \frac{dx}{dt}$ = hellingfunctie van $x(t)$.
- . De snelheid op één tijdstip vind je
 - uit de helling van de raaklijn aan de x, t - grafiek op dat tijdstip
 - uit de afgeleide funktie (of helling-funktie) $\frac{dx}{dt}$ op dat tijdstip, mits de algebraïsche vorm van $x(t)$ bekend is.
 De regels voor het differentiëren ken je uit de wiskunde.
- . Uit de grafiek van de snelheid in een v, t - diagram kan je de afgelegde weg bepalen door het oppervlak onder de grafiek te bepalen. Uit de schalen voor de tijd en de snelheid haal je hoeveel meter door 1 hokje uit de grafiek wordt voorgesteld.
- . Bij een eenparige rechtlijnige beweging hoort een plaatsfunctie van de gedaante

$$x(t) = v \cdot t + x(0)$$
 met een constante helling-funktie v .

- 27 a) Stel de plaatsfuncties van de voorkanten van de drie auto's uit fig. 2.15 op. Meet daartoe lengtes en afstanden van de auto's op.

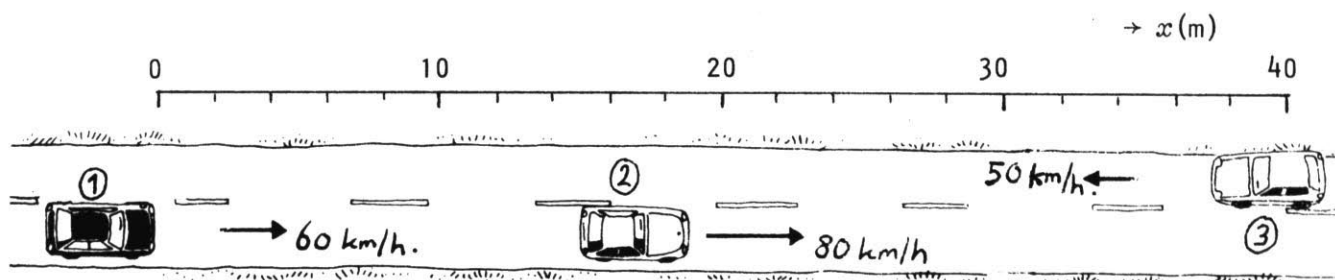


fig. 2.15 Een verkeerssituatie

PLAATS, TIJD, SNELHEID

Kies het nulpunt voor de tijd op het moment van de figuur. Kies het nulpunt voor de plaats bij de voorkant van auto 1 in de figuur.

- b) Op welke tijd passeerde auto 2 auto 1?
- c) Op welke plaatsen komt auto 3 de auto's 1 en 2 tegen?
- d) Beantwoord de vragen ook grafisch.

- 28 Een wegrijdende auto heeft in opvolgende tijdsintervallen 1, 2 en 3 bij benadering de volgende plaatsfuncties.

$$\Delta_1 t \quad (t \leq 0 \text{ s}): \quad x_1(t) = -500$$

$$\Delta_2 t \quad (0 \leq t \leq 20 \text{ s}): \quad x_2(t) = \frac{1}{2} \cdot t^2 - 500$$

$$\Delta_3 t \quad (20 \leq t \leq 100 \text{ s}): \quad x_3(t) = 20 \cdot t - 700$$

- a) Controleer of de auto deze plaatsfuncties achter elkaar kan hebben door na te gaan of de plaatsfuncties op elkaar aansluiten, dat wil zeggen: $x_1(0) = x_2(0)$; $x_2(20) = x_3(20)$.
- b) Bepaal de bijbehorende snelheidsfuncties.
- c) Controleer of de snelheidsfuncties op elkaar aansluiten. Waarom moet dat het geval zijn?
- d) Schets het plaats - tijddiagram van de auto voor $-20 \leq t \leq 100 \text{ s}$.
- e) Maak het snelheid - tijddiagram van de auto in hetzelfde tijdvak. Bepaal uit dat diagram de afgelegde weg. Klopt die met de beginwaarde van de plaatsfunctie x_1 en de eindwaarde van de plaatsfunctie x_3 ?

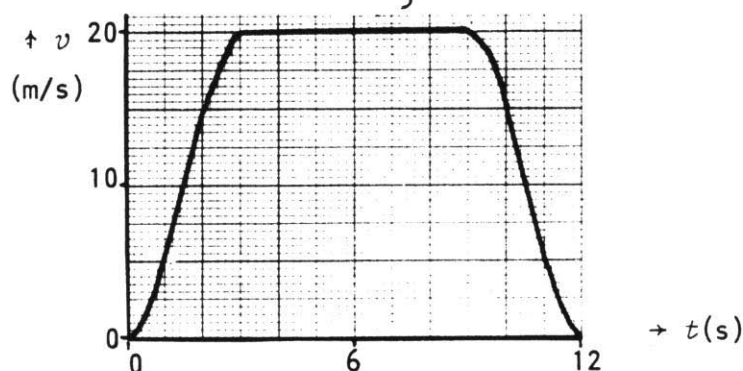


fig. 2.16 De snelheid van een motorrijder tussen twee stoplichten

- 29 Een motorrijder legt de afstand tussen twee stoplichten af (zie fig. 2.16).

- a) Bepaal de afstand tussen de stoplichten.
- b) Bepaal de gemiddelde snelheid tussen de stoplichten en teken deze in een kopie van fig. 2.16.

2.6 PROBLEMEN OM OP TE LOSSEN

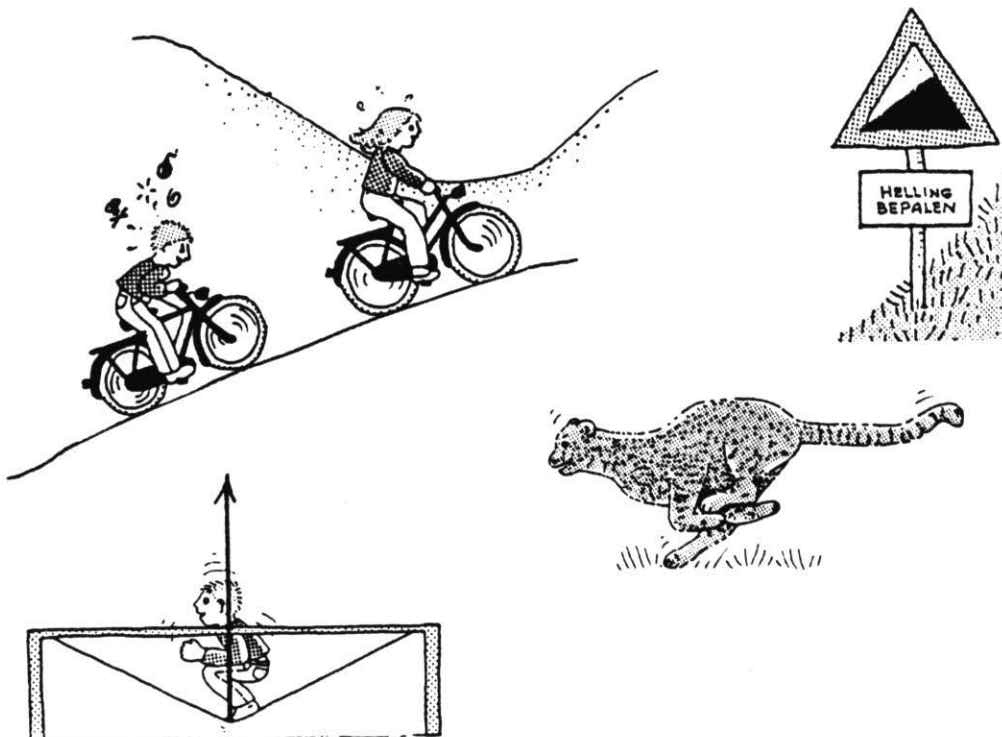
Dit hoofdstuk wordt, net als straks de hoofdstukken 3 en 4, afgesloten met een paragraaf vol *problemen*. Al deze problemen kun je in principe oplossen door gebruik te maken van het nieuwe 'gereedschap' waarmee je in dit blok leert werken.

Je zult echter wel merken dat voor het oplossen van de meeste problemen het snappen van de theorie alléén niet voldoende is. *Probleem-oplossen* is een vaardigheid waarbij het er vooral om gaat dat je zelf een methode zoekt om er uit te komen, en die ook nog goed uitvoert (vaak moet je hierbij bepaalde vereenvoudigingen proberen aan te brengen).

Elk probleem dat je in dit blok vindt heeft een inleiding met de nodige informatie en een probleemstelling. Meestal zijn er verschillende oplossingsmethodes die allemaal goed zijn.

Probeer altijd eerst een *eigen methode* te vinden. Ook al loopt die fout, je kunt er veel van leren. Kom je er echt niet uit, dan kun je achterin het boek bij elk probleem een hint vinden om je een beetje op weg te helpen.

Veel succes ermee!



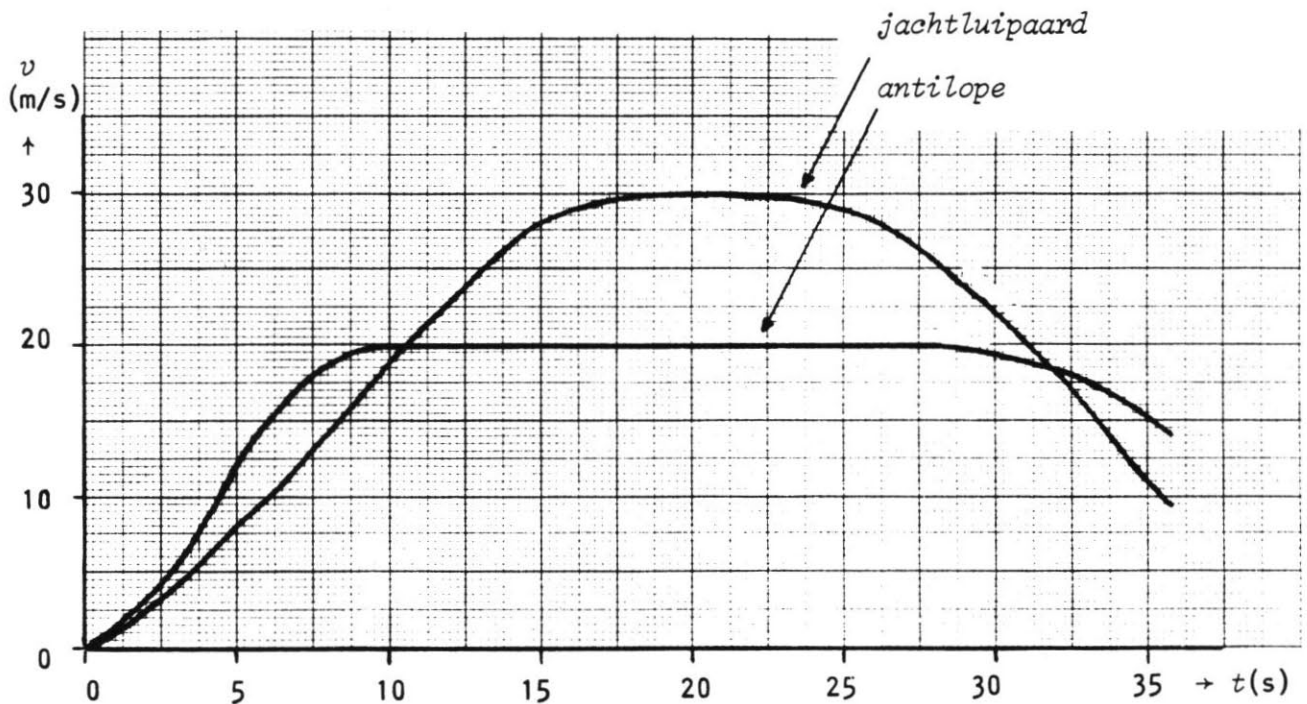
PLAATS, TIJD, SNELHEID

Probleem 2.1 HET JACHTLUIPAARD EN DE KUDDE ANTILOPEN



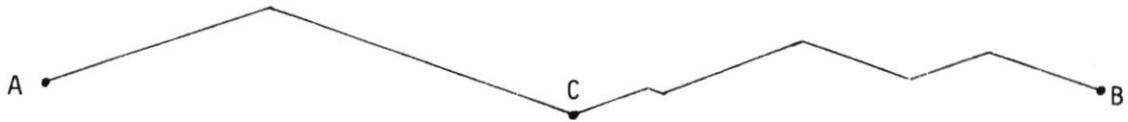
Een jachtluipaard besluipt een kudde antilopen. Plotseling merkt één van de antilopen het roofdier op en de kudde gaat er zo hard mogelijk vandoor. Tegelijk zet het jachtluipaard de achtervolging in, maar hij kan geen enkele antilope te pakken krijgen.

In boeken kan je gegevens vinden over de maximum snelheden van dieren, hoe snel ze die bereiken en hoe lang ze die volhouden. Voor het jachtluipaard en de antilope zijn deze gegevens hieronder weergegeven in een v, t -diagram.



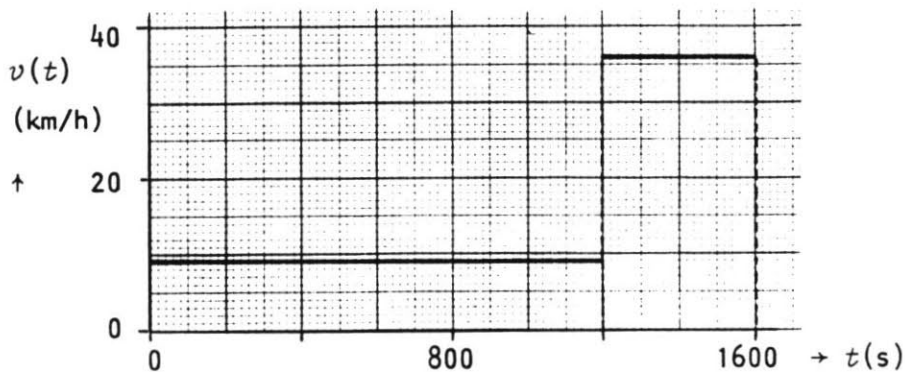
- Hoe groot moet bij het begin van de achtervolging de afstand tussen de achterhoede van de kudde en het jachtluipaard minstens geweest zijn?

Probleem 2.2 FIETSEN OVER DE HEUVELS

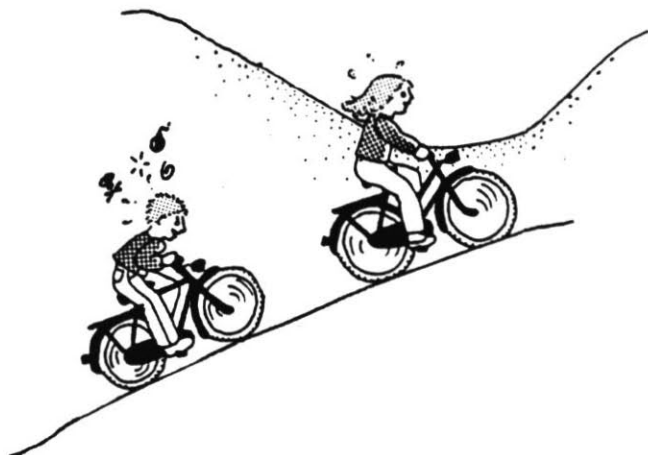


Hans en Mieke fietsen samen door de heuvels van A naar B. A en B liggen even hoog, terwijl alle hellingen overall als even steil mogen worden beschouwd (er zijn geen vlakke stukken).

In onderstaand v, t -diagram is voor het eerste deel van de tocht (tot het diepste punt C) een benadering van de snelheidsfunctie van Hans en Mieke weergegeven.



- Welke gemiddelde snelheid halen Hans en Mieke op het totale traject AB?



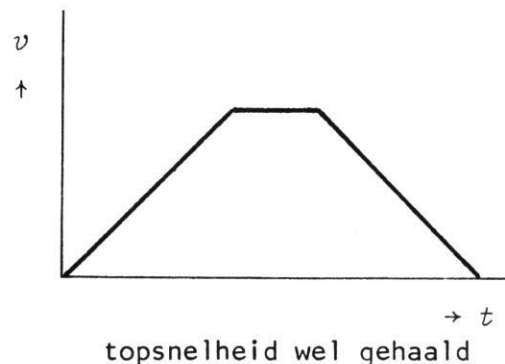
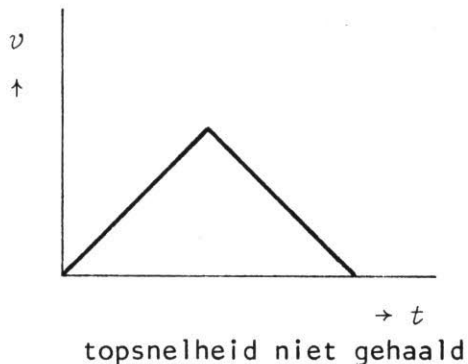
PLAATS, TIJD, SNELHEID

Probleem 2.3 WELKE LIFT ?

Voor een gebouw met 5 lagen (K,B,1,2,3) moet een lift uitgekozen worden. De hoogte van alle verdiepingen is 3,5 m. Er zijn twee types lift beschikbaar, die beide even snel optrekken en afremmen, maar verschillende topsnelheden hebben:

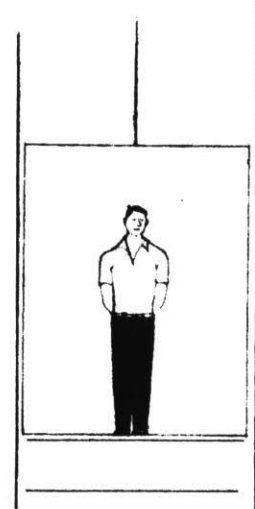
	versnelling	topsnelheid
lift I	$1,0 \text{ m/s}^2$	2 m/s
lift II	$1,0 \text{ m/s}^2$	3 m/s

De topsnelheden worden soms niet gehaald omdat de verplaatsingen daarvoor te kort zijn. De globale vorm van de v, t -grafieken van de liftverplaatsingen wordt dus:

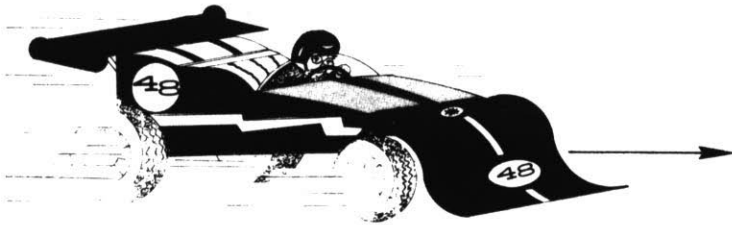


Als een lift te langzaam is, kost dat tijd. Een snelle lift is duurder in aanschaf en gebruik. Daarom streeft de bouwer naar een lift die in ca 50% van de af te leggen verplaatsingen zijn topsnelheid zal halen. Hij neemt daarbij aan dat alle mogelijke verplaatsingen, bv. B→3, 1→K enz. even vaak zullen voorkomen.

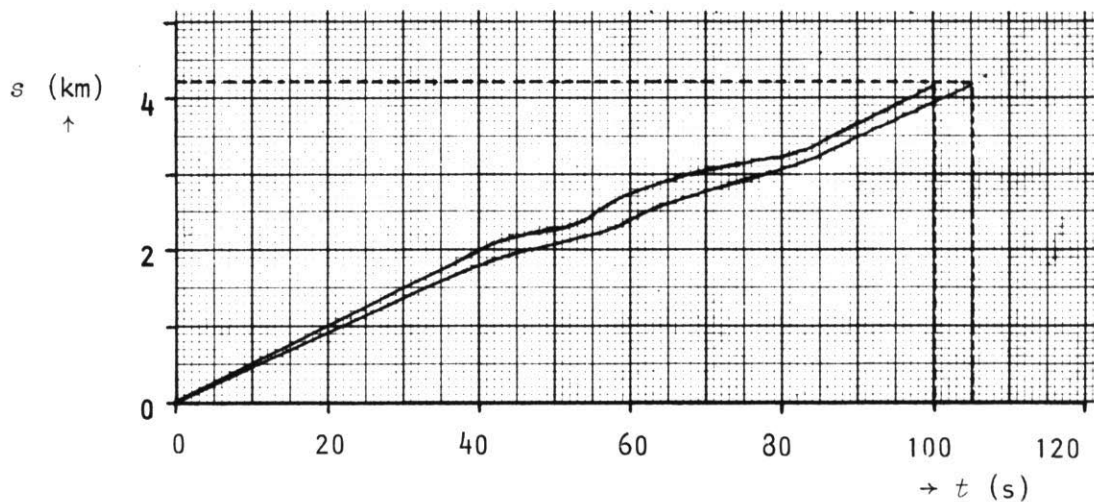
►► Welke lift kan hij het beste nemen?



Probleem 2.4 OP EEN CIRCUIT



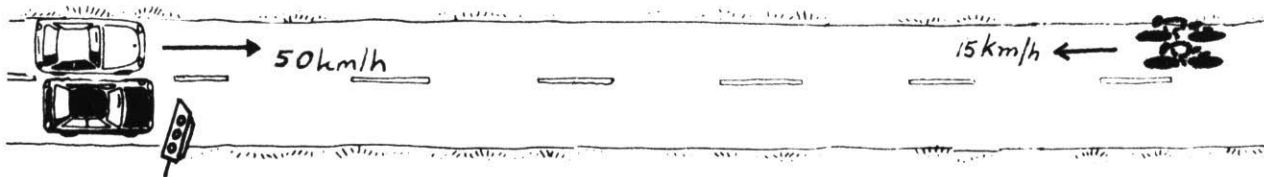
Op een circuit met een totale lengte van 4,2 km wordt een autorace gehouden. Onderstaand diagram geeft in benadering weer hoe twee van de coureurs een zekere ronde afleggen waar ze toevallig tegelijk aan beginnen. In het verdere verloop van de race maken beiden ongeveer dezelfde rondetijden als in de ronde waar het diagram betrekking op heeft.



►► Hoe lang duurt het voordat de snelle coureur de langzame weer passeert?

PLAATS, TIJD, SNELHEID

Probleem 2.5 EEN INHAALMANOEUVRE

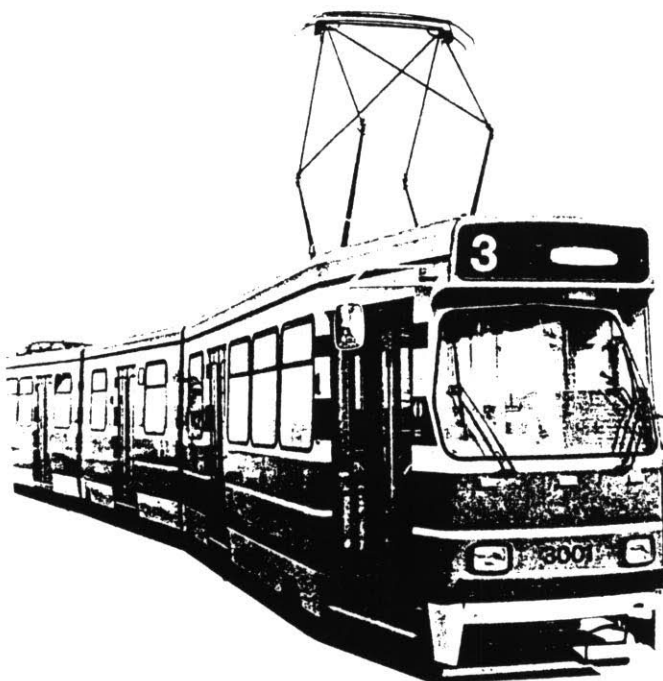


Bij een stoplicht op een smalle weg wordt een stilstaande auto A gepasseerd door een 50 km/h rijdende auto B die door het op groen springende licht gaat.

Tegelijkertijd naderen op een afstand van 500 m twee wielrijders met een snelheid van 15 km/h vanuit de tegengestelde richting.

Auto A probeert de andere in te halen; hij bereikt in 10 s een snelheid van 70 km/h en legt daarbij 100 m af.

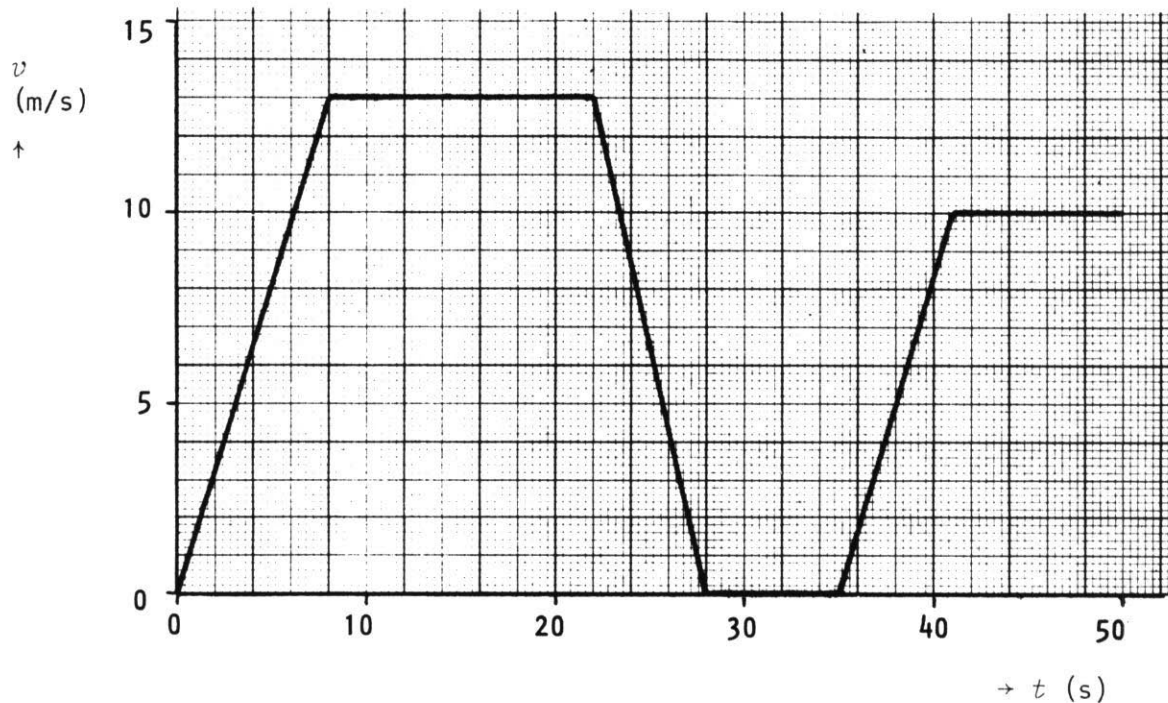
►► Is deze inhaalmanoeuvre verantwoord?



Probleem 2.6 TWEE RITJES VAN TRAMLIJN 3

Tussen de haltes Roelof Hartplein en Museumplein van de Amsterdamse tramlijn 3 bevindt zich een met stoplichten beveiligde voetgangersoversteekplaats.

Hieronder is een vereenvoudigde schets gegeven van hoe een deel van het traject tussen deze twee haltes in 50 seconden werd afgelegd door een nogal bruusk rijdende trambestuurder.



Een collega trambestuurder zegt dat hij ditzelfde traject onder deze omstandigheden veel 'passagiervriendelijker' zou hebben afgelegd. Hij zou in 10 seconden langzaam (en regelmatig) opgetrokken zijn naar een lagere constante snelheid, waarna stoppen voor het voetgangerslicht niet meer nodig zou zijn geweest. Toch zou hij dan na 50 seconden dezelfde afstand hebben afgelegd.

►► Is een dergelijke wijze van rijden, mede gelet op het stoplicht, mogelijk?

INHOUD

- 3.1 GEMIDDELDE EN 'ECHTE' VERSNELLING
- 3.2 CONSTATE VERSNELLING
- 3.3 VERSNELLING OP EEN TIJDSTIP: RAAKLIJN AAN v, t - GRAFIEK
- 3.4 SNELHEIDSVERANDERING: OPPERVLAK ONDER a, t - GRAFIEK
- 3.5 BEWEGINGEN EN KRACHTEN
- 3.6 SAMENVATTING
- 3.7 PROBLEMEN OM OP TE LOSSEN

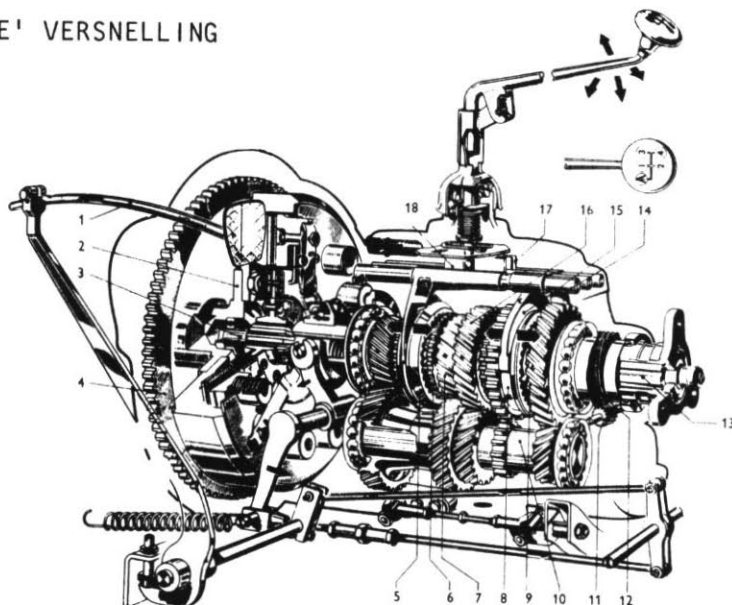


Vooruitblik

In dit hoofdstuk ga je het wiskundig gereedschap dat je in hoofdstuk 2 gebruikt hebt voor snelheid, opnieuw gebruiken voor versnelling. Je bent daardoor in staat te werken met 'versnelling op een tijdstip'. Veel reële gevallen worden redelijk goed benaderd door te veronderstellen dat de versnelling constant is. Dan nemen de formules voor de verplaatsing en de snelheid wiskundig eenvoudige vormen aan. Dankzij de relatie $F_{\text{netto}} = m \cdot a$ kun je een verband leggen tussen krachten en bewegingen.

VERSNELLING

3.1 GEMIDDELDE EN 'ECHTE' VERSNELLING



(in ieder geval niet deze!)

In het thema Verkeer heb je kennis gemaakt met *gemiddelde versnelling*:

$$\text{gemiddelde versnelling} = \frac{\text{snelheidsverandering}}{\text{benodigde tijd}}$$

In formulevorm werd dit geschreven als:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Misschien ben je geneigd onder 'versnelling' een 'tempoverhoging' ofwel een 'vergroting van de snelheid' te verstaan. Merk op dat het hier ingevoerde begrip 'gemiddelde versnelling' in twee opzichten hiervan afwijkt.

- . Het gaat niet over een vergroting, maar algemener over een *verandering* van de snelheid: dit kan in principe ook een verkleining zijn (richtingsverandering laten we ook in dit hoofdstuk buiten beschouwing). Een 'vertraging' wordt dus ook als een versnelling beschouwd.
- . De voor de snelheidsverandering *benodigde tijd* speelt een rol: een vlugge snelheidsverandering betekent een grote versnelling of vertraging.

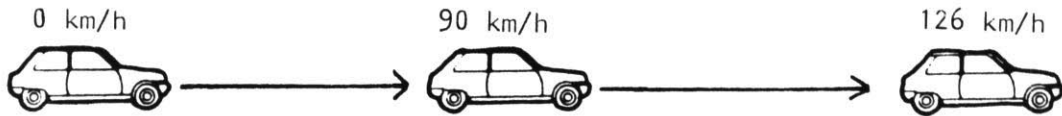
1 Wat is de eenheid waarin je versnelling uitdrukt?

Er is een grote (wiskundige) gelijkenis met de definitie van gemiddelde *snelheid*:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Zoals de 'echte' snelheid v meestal afwijkt van $\bar{v}$, zo zal de 'echte' versnelling a meestal afwijken van $\bar{a}$: de snelheid zal in het algemeen niet steeds even vlug veranderen.

- 2 Een weggrijdende auto trekt in 10 s op tot 90 km/h en in de volgende 10 s tot 126 km/h. Bereken de gemiddelde versnelling: van 0-10 s; van 10-20 s; van 0-20 s.



3.2 CONSTATE VERSNELLING

In hoofdstuk 2 hebben we de *eenparige rechtlijnige beweging* als vereenvoudiging gebruikt door alleen op de gemiddelde snelheid van bewegingen te letten. Soms is zo'n vereenvoudiging wel toelaatbaar, soms niet. Zo zag je dat je uitgaande van de gemiddelde snelheid een ruwe plaatsfunctie voor een trein kunt opstellen. Hieraan kun je bijvoorbeeld wel zien waar de trein zich op een gegeven moment ongeveer zal bevinden, maar bijvoorbeeld niet hoe lang hij bij een station stilstaat.

Een andere vereenvoudiging is de *eenparig versnelde* rechtlijnige beweging. Bij zo'n beweging wordt de 'echte' versnelling a constant gedacht. De snelheidsverandering verloopt dan regelmatig en er geldt

$$a = \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$



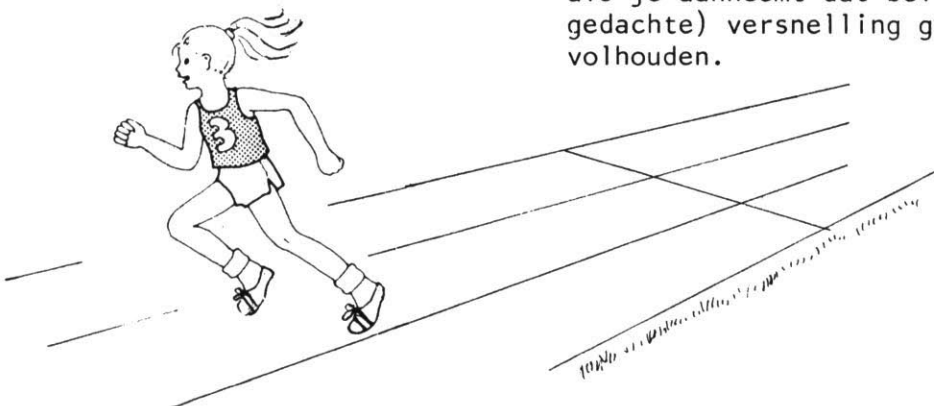
In reële situaties waarbij de snelheid verandert wordt maar zelden een constante versnelling gemeten. Optrekkende auto's, vallende regendruppels, stenen die een helling afrollen of elektronen die versneld worden hebben zelden een constante versnelling.

Het hangt van je probleemstelling af of je de 'echte' versnelling door de gemiddelde versnelling mag vervangen.

We nemen een voorbeeld waarin twee sprintsters aan de start verschijnen voor de 100 m. Anneke reageert traag en gaat 0,2 s later weg dan Wilma.

Ze ontwikkelt dan wel een versnelling van $3,6 \text{ m/s}^2$ tegenover Wilma $3,0 \text{ m/s}^2$.

Je kunt je dan afvragen of er een moment komt dat Anneke Wilma begint in te halen, als je aanneemt dat beiden hun (constant gedachte) versnelling gedurende 2,5 s volhouden.



- 3 Wat vind je van de hier gebruikte vereenvoudiging voor de bewegingen van de sprintsters?

VERSNELLING

Het moment dat Anneke vertrekt (in de positieve x -richting) kiezen we als $t = 0$. Daarom wordt de snelheidsfunctie van Anneke:

$$v_A(t) = 3,6 \cdot t$$

Van Wilma weten we, dat ze op $t = 0$ al een snelheid ontwikkeld heeft van $0,2 \times 3,0 = 0,6$ m/s. Hieruit volgt de snelheidsfunctie van Wilma:

$$v_W(t) = 3,0 \cdot t + 0,6$$

- 4 a) Teken deze snelheidsfuncties in één v, t - diagram voor de geldigheidsgebieden $0 < t < 2,5$ s (Anneke) en $-0,2 < t < 2,3$ s (Wilma).
- b) Wat is de betekenis van de hellingen?
- c) En van het snijpunt?

De snelheidsfunctie van een eenparig versnelde rechtlijnige beweging ziet er uit als $v(t) = a \cdot t + v(0)$.

- 5 Wat is de wiskundige overeenkomst met de plaatsfunctie van een eenparige rechtlijnige beweging?

Een ander voorbeeld van een beweging met een als constant te beschouwen versnelling is de verticale valbeweging van een voorwerp waarbij de luchtweerstand verwaarloosd mag worden. Op niet te grote hoogte boven het aardoppervlak meet je dan altijd: $a = 9,8 \text{ m/s}^2$. Deze *valversnelling* wordt meestal speciaal aangeduid met de letter g , dus:

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$



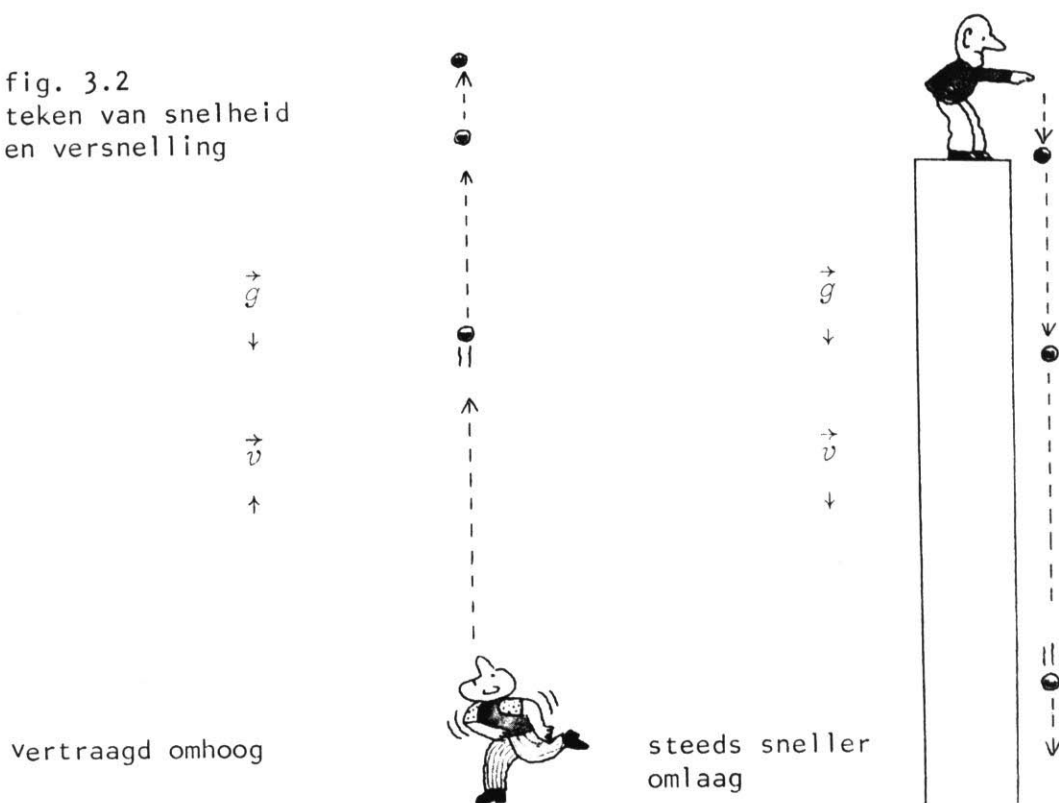
fig. 3.1 de valversnelling is er aldoor

Een bal die vertikaal omhoog gaat komt dus even later weer naar beneden met een versnelling g (zie fig 3.1; omdat de x -richting omlaag is gekozen is g positief). Maar: *diezelfde versnelling had de bal ook al bij het naar boven gaan*: de zwaartekracht werkte toen ook al.

In het hoogste punt wisselt de snelheid van teken: hij wordt (wegens de keuze van de x -richting) positief. De versnelling is aldoor positief, dwz. hij "wijst naar beneden".

Zolang de versnelling en de snelheid tegengesteld teken hebben (tegen elkaar in wijzen) is de versnelde beweging *vertraagd*. Hierdoor zal de snelheid nul kunnen worden en van teken wisselen (De beweging keert om van richting). Daarna wordt de beweging *steeds sneller*, omdat versnelling en snelheid hetzelfde teken hebben (dezelfde kant op wijzen). Zie fig. 3.2.

fig. 3.2
teken van snelheid
en versnelling



- 6 Verklaar onderstaand diagram (fig. 3.3) van een stuitende bal. Welke punten in het diagram horen bij het hoogste punt van de bal?
(NB positieve x -richting naar beneden gekozen).

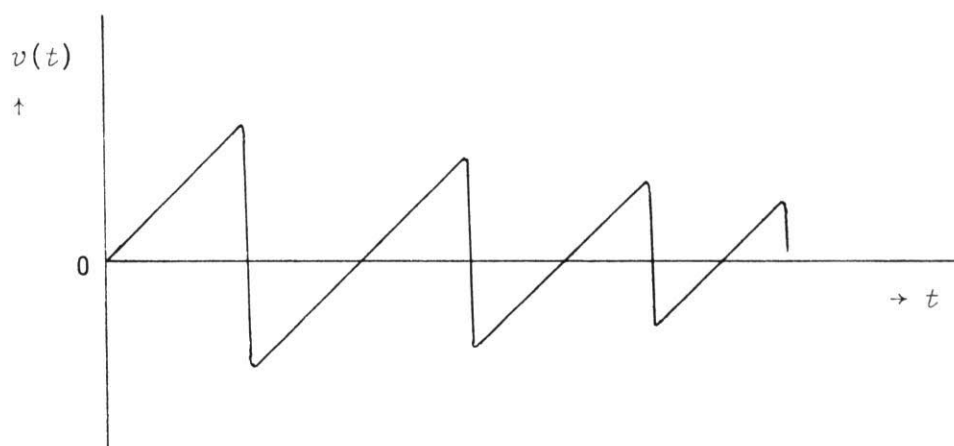


fig. 3.3 v, t -diagram van stuitende bal

- 7 Bepaal het teken van de versnelling van de volgende rechtlijnige bewegingen.
- Een auto rijdt in de positieve richting en remt af.
 - Een trein rijdt 20 m/s in de negatieve richting en gaat stoppen.
 - Een fietser gaat in de negatieve richting rijden.

VERSNELLING

3.3 VERSNELLING OP EEN TIJDSTIP: RAAKLIJN AAN v, t - GRAFIEK

We kunnen voor de *versnelling op één tijdstip* hetzelfde wiskundig gereedschap gebruiken als voor snelheid op één tijdstip.

Als voorbeeld zullen we weer gebruik maken van metingen van het CTO (Centrum voor Technisch Onderzoek van de N.S.). We nemen eens wat andere metingen (met de Elok 1600), met een grotere variatie in de versnelling, zodat we aan de hand daarvan het 'gereedschap' voor versnellingen kunnen oefenen.

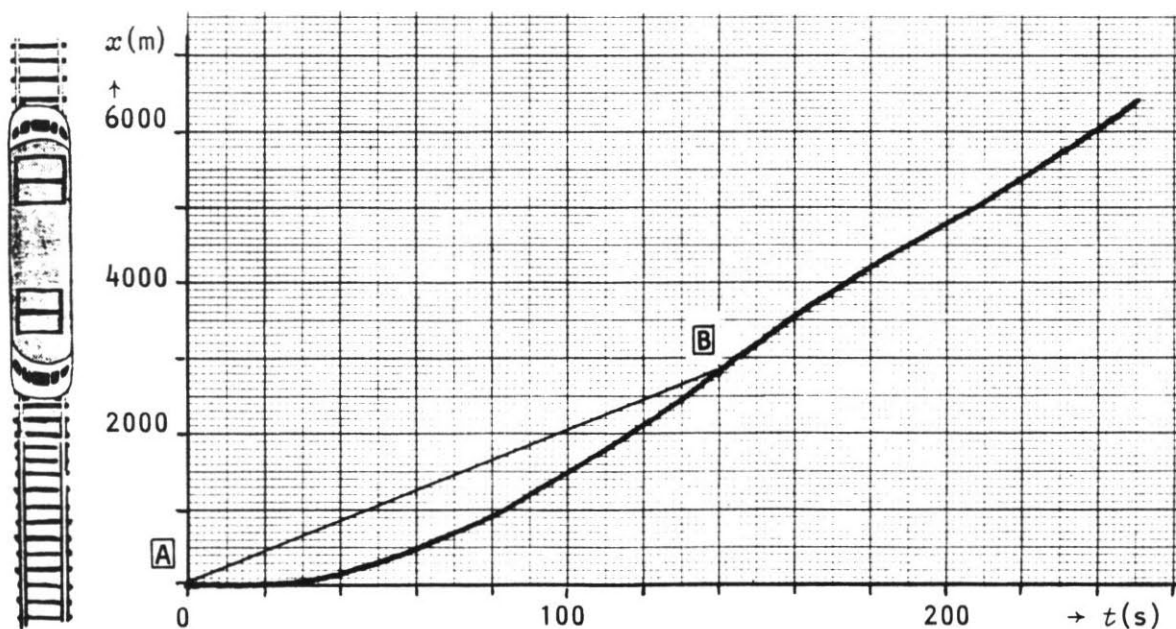


fig. 3.4 x, t - diagram van de Elok 1600

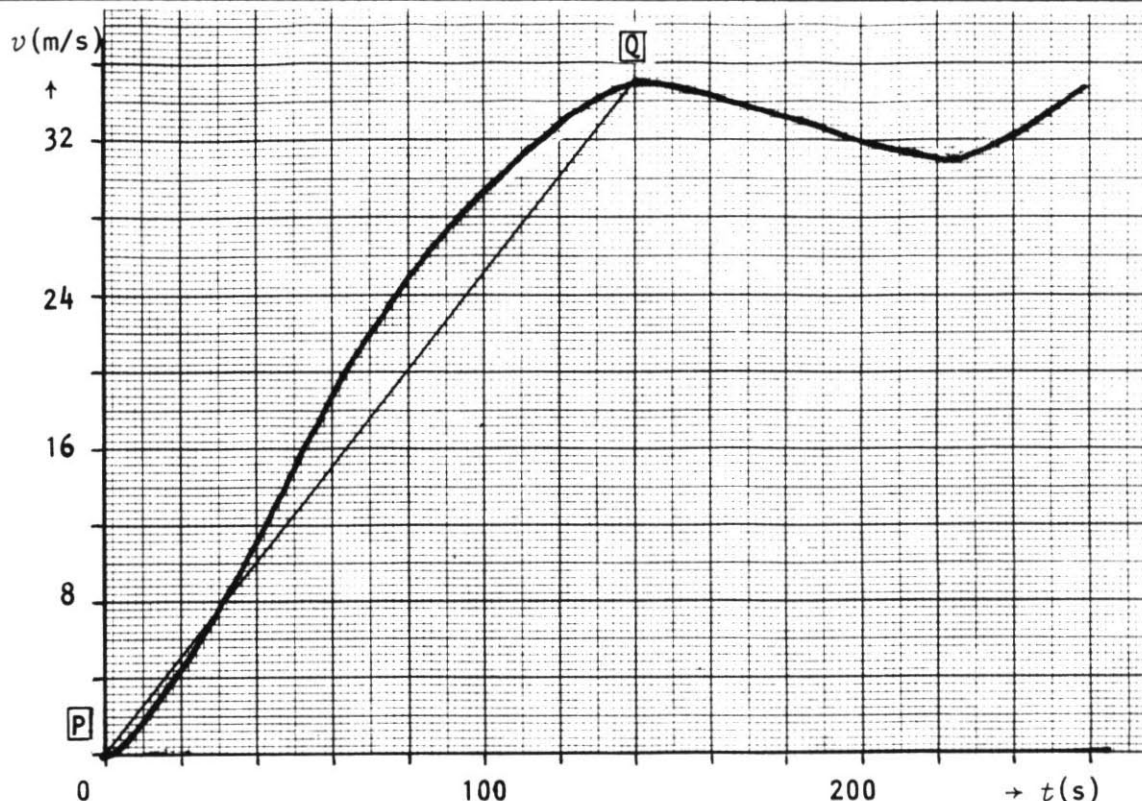


fig. 3.5 v, t - diagram van de Elok 1600

Zoals je in hoofdstuk 2 hebt geleerd, kun je uit het x, t - diagram van fig. 3.4 de gemiddelde snelheid tussen 0 en 140 s bepalen door de helling van de lijn AB op te meten. Evenzo kun je de gemiddelde versnelling bepalen uit het v, t - diagram van fig. 3.5 door de helling van de lijn PQ op te meten.

8 Voer de hier genoemde bepalingen met behulp van AB en PQ uit.

In hoofdstuk 2 heb je ook geleerd dat je uit de helling van de raaklijn aan de x, t - grafiek de snelheid op één tijdstip kunt bepalen. Algebratisch gezien bepaal je dan eigenlijk de gemiddelde snelheid over een heel klein tijdje Δt . De gemiddelde snelheid

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

gaat daardoor over in de snelheid

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

Op dezelfde wijze kun je uit de helling van de raaklijn aan de v, t - grafiek de versnelling op één tijdstip bepalen. De gemiddelde versnelling

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

gaat, als we Δt heel klein nemen, over in

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

VERSNELLING

Net zoals de Elok 1600 op elke tijd een plaats en een snelheid heeft, heeft hij op elke tijd ook een versnelling. Net als over de plaats-functie en de snelheidsfunctie kun je dus ook praten over de versnellings-functie.

De versnelling(-sfunktie) $a(t)$ is de helling(-functie) van de snelheid(-sfunktie) $v(t)$.



- 9 Kies drie tijdstippen van fig. 3.5 uit die jou interessant lijken voor de bepaling van de versnelling, bijvoorbeeld waar jij de grootste of kleinste versnelling vermoedt. Bepaal voor die tijdstippen de versnelling en zet de gevonden waarden uit in fig. 3.6, waar de rechtstreeks gemeten versnellingsfunctie is afgebeeld.

- 10 Uit fig. 3.6 kun je aflezen dat $a(140) = 0$. Hoe weerspiegelt zich dit in fig. 3.5?

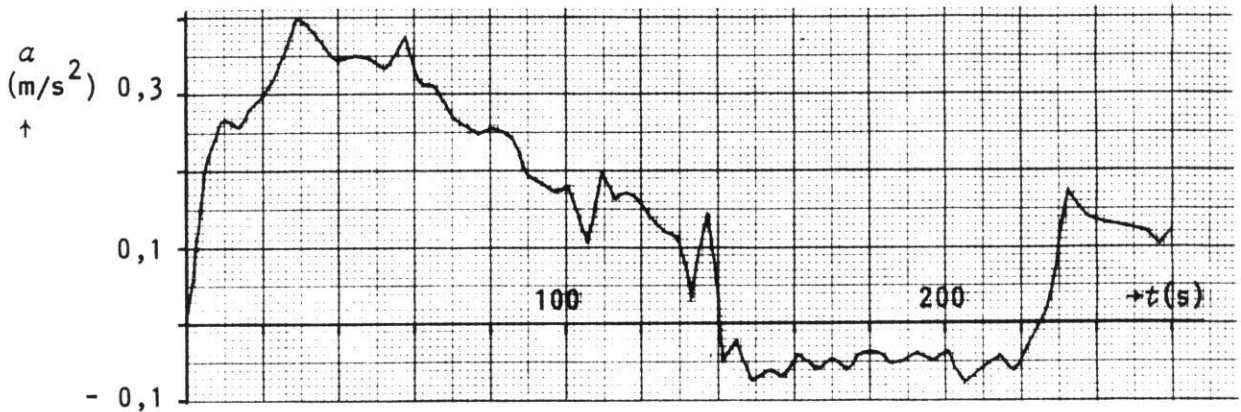


fig. 3.6 a, t - diagram van de Elok 1600

De grafiek van fig. 3.6 is niet vloeiend. De pieken ontstaan vooral door pieken in de voedingsstroom vanuit de bovenleiding. Daarnaast ook door oneffenheden op de rails en door het doorslippen van de wielen van de lokomotief.

3.4 SNELHEIDSVERANDERING: OPPERVLAK ONDER a, t - GRAFIEK

Uit het oppervlak tussen twee tijdstippen onder een v, t - grafiek kan volgens hoofdstuk 2 de afgelegde weg bepaald worden. Daarbij moet je rekening houden met de schalen op de assen. In ons voorbeeld fig. 3.5 stelt één hokje $20 \text{ s} \times 4 \text{ m/s} = 80 \text{ m}$ verplaatsing voor: uit het totaal aantal hokjes onder de grafiek volgt de totale verandering van de plaatsfunctie $x(t)$ tussen de twee tijdstippen.

Uit de snelheidsgrafiek alléén weet je niet waar de trein is begonnen met rijden. De beginplaats (op het eerste tijdstip) moet dus afzonderlijk opgegeven worden, als je met deze verandering de eindplaats (op het tweede tijdstip) wilt bepalen.

- 11 Bepaal de verplaatsing van 0 tot 140 s uit fig. 3.5.
Vergelijk je uitkomst met de waarde die je uit fig. 3.4 kunt aflezen. Welke waarde heb je het nauwkeurigst kunnen bepalen?
Kun je zo de positie op ieder gewenst tijdstip bepalen?

Uit het oppervlak tussen twee tijdstippen onder een a, t - grafiek kun je misschien ook zoiets berekenen. Maar wat? Ga dat eens bekijken aan de hand van de vraag wat één hokje van het diagram van fig. 3.6 voorstelt. Dat oppervlak is $20 \text{ s} \times 0,10 \text{ m/s}^2 = 2,0 \text{ m/s}$ (zie fig. 3.7, bovenste gearceerde hokje).

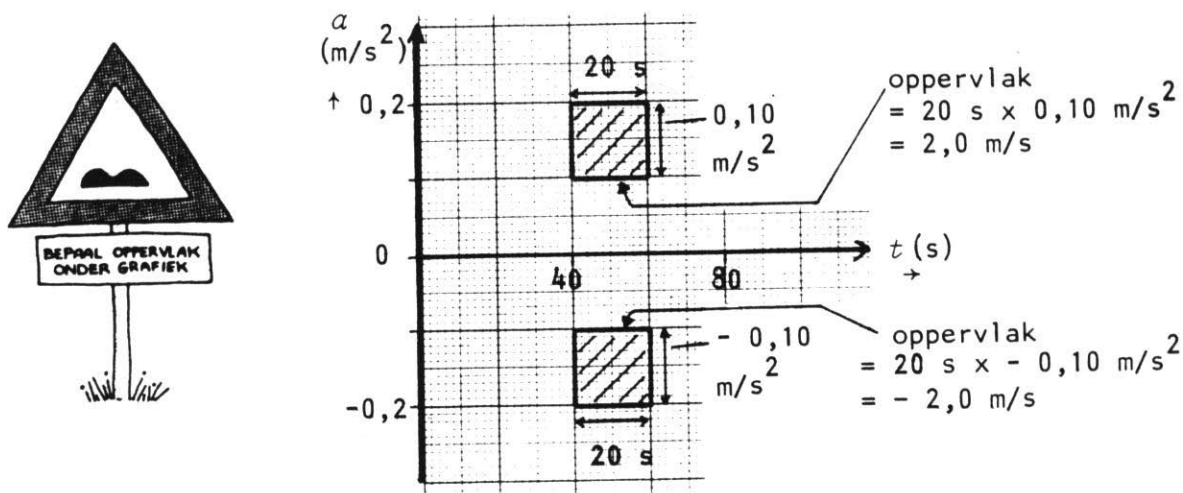


fig. 3.7 de hokjes uit fig. 3.6

Uit de overeenkomst met hoofdstuk 2 kun je raden dat dit een *snelheidsverandering* voorstelt: uit het totaal aantal hokjes volgt de totale *verandering van de snelheidsfunctie $v(t)$* tussen de twee tijdstippen. Uit de versnellingsgrafiek alléén weet je niet welke snelheid de trein op het eerste tijdstip had. Die snelheid moet je dus ook weten om uit de snelheidsverandering de eindsnelheid te bepalen. Bij het voorbeeld van fig. 3.6 doet zich nog een moeilijkheid voor: tussen 140 en 225 s 'ligt het oppervlak *boven* de grafiek' (en dus *onder* de t -as)! Omdat de snelheidsverandering in dit tijdvak *negatief* is (zie ook fig. 3.5) moeten we dit oppervlak negatief rekenen. Dus: als een hokje *onder* de t -as ligt, stelt het $-2,0 \text{ m/s}$ voor (zie fig. 3.7, onderste gearceerde hokje).

- 12 a) Bepaal de verandering van de snelheid van 0 tot 140 s en van 140 tot 225 s uit fig. 3.6.
b) Vergelijk je uitkomst met de waarden die je uit fig. 3.5 kunt aflezen. Welke waarden heb je het nauwkeurigst kunnen aflezen?
c) Kun je zo de snelheid op ieder gewenst tijdstip bepalen?

VERSNELLING

Het bepalen van het oppervlak onder de a, t - grafiek wordt heel simpel als de beweging *eenparig versneld* is (meestal is dit, zoals je gezien hebt, het gevolg van een benadering).

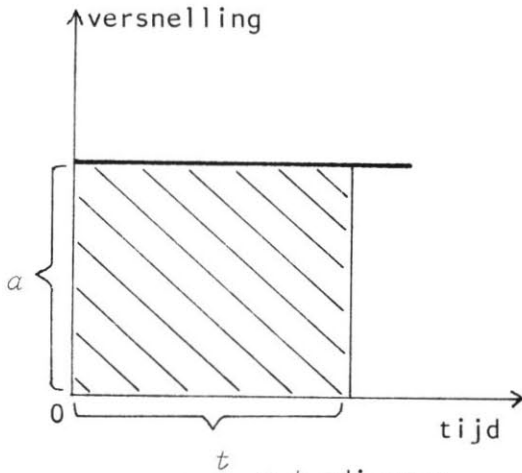


fig. 3.8 a, t - diagram
eenparig versnelde bew.

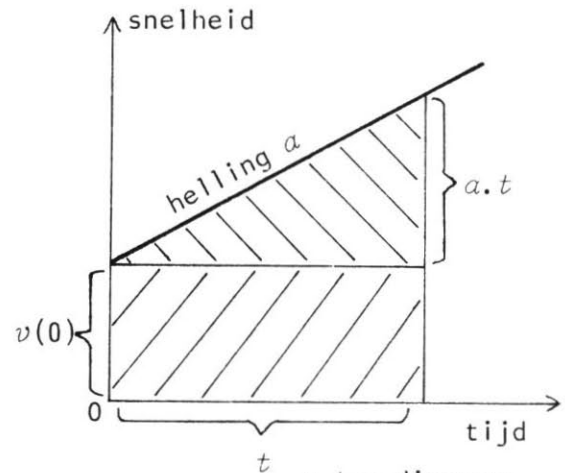


fig. 3.9 v, t - diagram
eenparig versn. bew.

- 13 a) Bepaal uit fig. 3.8 de snelheidsverandering tussen de tijdstippen 0 en t .
b) Bepaal daarna de snelheidsfunctie $v(t)$.
- 14 De grafiek van de snelheidsfunctie uit opdracht 13 is getekend in fig. 3.9.
Laat met behulp van dit diagram zien dat voor een eenparig versnelde beweging geldt

$$x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v(0) \cdot t + x(0)$$

- 15 Differentieer de functie $x(t)$ uit opdracht 14 en verklaar het resultaat.

3.5 BEWEGINGEN EN KRACHTEN

Uit de grafiek van de plaatsfunctie kunnen we de snelheid halen door 'grafisch te differentiëren' (helling bepalen). Herhalen we dit proces, dan krijgen we uit de snelheidsfunctie de versnelling. Uit Verkeer weet je dat de netto kracht met de versnelling samenhangt volgens

$$F_{\text{netto}} = m \cdot a$$

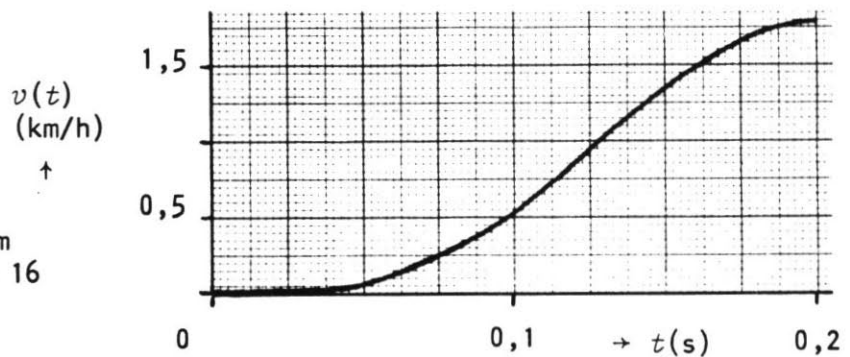
Voor bewegende voorwerpen waarvan de versnellingsfunctie $a(t)$ bepaald kan worden en waarvan de massa bekend is, ligt dus op elk tijdstip vast welke *netto* kracht $F_{\text{netto}}(t)$ er op werkzaam is. In de praktijk is deze kracht opgebouwd uit verschillende soorten krachten.

Bij *rechtlijnige* bewegingen zijn deze in te delen in voorwaartse en tegenwerkende krachten (in dat geval vallen krachten dwars op de bewegingsrichting op elk tijdstip tegen elkaar weg).

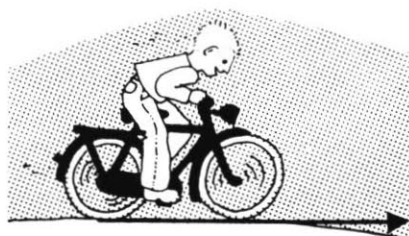


- 16 Een auto van 700 kg en met een (rol)wrijving van 200 N wordt via een sleepkabel in 0,2 s op een snelheid van 1,8 km/h gebracht.
- Hoe groot is de kracht in de kabel gemiddeld geweest?
 - Hoe groot is hij maximaal geweest? (zie fig. 3.10)

fig. 3.10
 v, t - diagram
bij opdracht 16



- 17
- Welke veronderstelling maak je in feite over de netto kracht op een voorwerp als je de beweging benadert door een eenparige beweging?
 - En als je de beweging benadert door een eenparig versnelde beweging?
 - Is de netto kracht bij de valbeweging constant?



VERSNELLING

3.6 SAMENVATTING

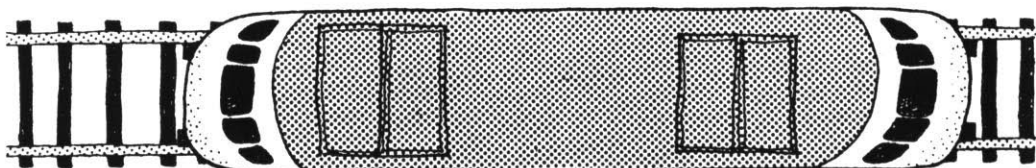
De resultaten van dit hoofdstuk vertonen een zeer sterke wiskundige gelijkenis met die van hoofdstuk 2. Opnieuw hebben we ons beperkt tot rechte lijnige bewegingen. Uitgaande van de gemiddelde versnelling

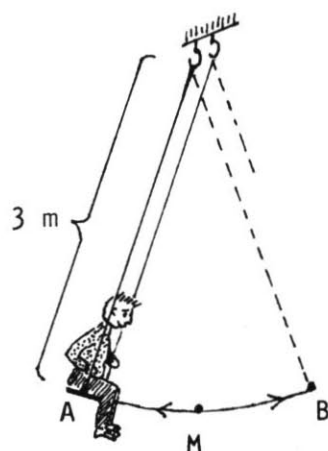
$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

hebben we gevonden:

- Er bestaat een versnellingsfunctie $a(t) = \frac{dv}{dt}$ = hellingfunctie van $v(t)$.
Vertraging is een vorm van versnelling die optreedt zolang versnelling en snelheid verschillende tekens hebben.
- De versnelling op één tijdstip vinden we
 - uit de helling van de raaklijn aan de v, t - grafiek op dat tijdstip
 - uit de afgeleide functie (of helling-functie) $\frac{dv}{dt}$ van de snelheid op dat tijdstip, mits de algebraïsche vorm van $v(t)$ bekend is.
- Uit de grafiek van de versnelling in een a, t - diagram kun je de verandering van de snelheid bepalen door het oppervlak onder de grafiek te bepalen. Uit de schalen voor de tijd en de versnelling haal je hoeveel m/s door 1 hokje uit de grafiek wordt voorgesteld.
- Bij een eenparig versnelde rechte lijnige beweging hoort een plaatsfunctie $x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v(0) \cdot t + x(0)$ met een helling-functie $v(t) = a \cdot t + v(0)$, die op zijn beurt een constante hellingfunctie a heeft.
- De relatie $F_{\text{netto}} = m \cdot a$ geldt altijd, ook voor niet constante versnellingen. Dus algemeen: $F_{\text{netto}}(t) = m \cdot a(t)$

- 18 Je kunt het beginstuk van de aanzet van de Elok 1600 ook benaderen als eenparig versnelde beweging.
- a) Bepaal de beginsnelheid en de gemiddelde versnelling tussen 0 en 80 s uit fig. 3.5.
 - b) Stel daarmee de plaatsfunctie op ($0 \leq t \leq 80$ s). Neem $x(0) = 0$.
 - c) Differentieer de plaatsfunctie en de snelheidsfunctie. Schets de x, t en v, t - grafieken en vergelijk die met de bijbehorende *gemeten* grafieken.
- 19 a) Bereken met de plaatsfunctie die je in opdracht 18 hebt gevonden de plaats van de Elok 1600 op $t = 80$ s.
- b) Vergelijk je uitkomst met de gegevens uit fig. 3.4. Verklaar het resultaat.





20 Piet (massa: 50 kg) zit op een schommel (fig. 3.11) die aan ca 3 m lange touwen hangt. Hij maakt één volledige slingering van A via M naar B en terug. Van deze beweging is in fig. 3.12 de v, t - grafiek getekend (de richtingsverandering van de snelheid is verwaarloosd!).

fig. 3.11 Piet op de schommel

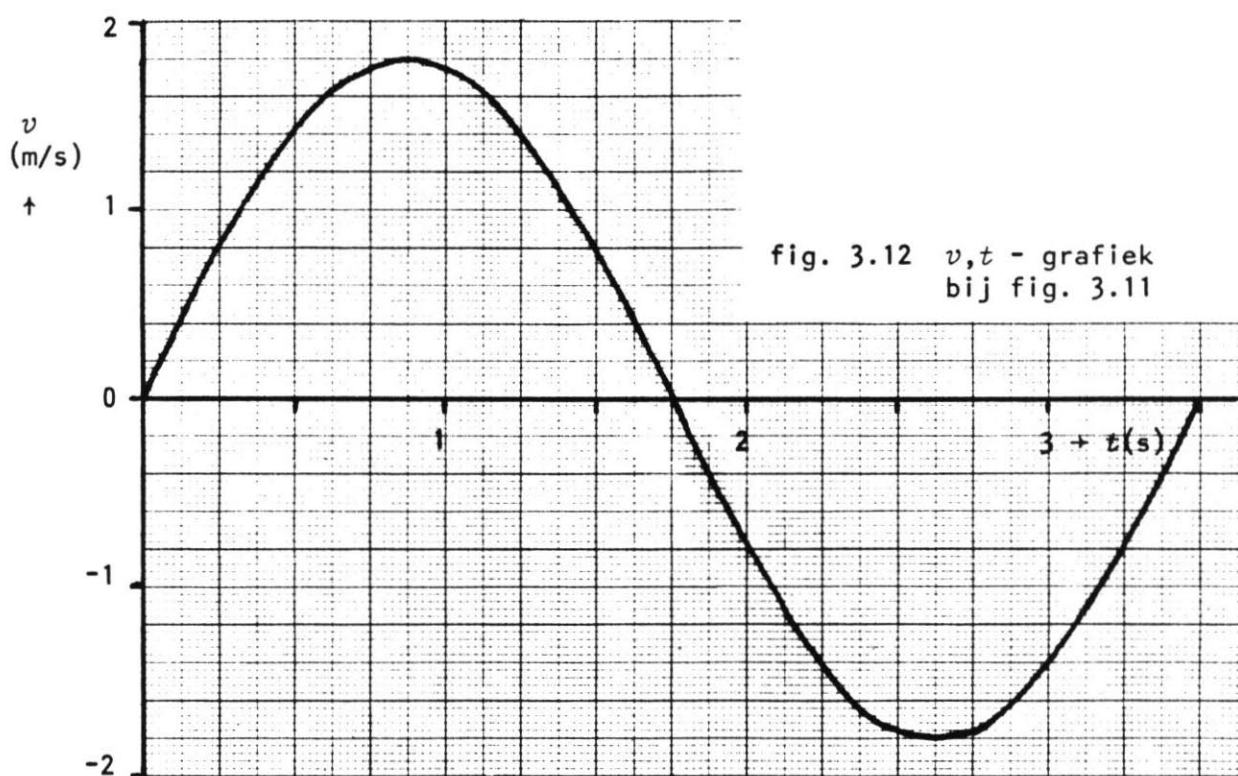


fig. 3.12 v, t - grafiek bij fig. 3.11

- Hoe groot is de snelheid van Piet in resp. de punten A, M, B en weer M?
- Hoe groot is de gemiddelde versnelling van Piet tussen A en M (eerste passage door M)?
- Welke gedeelten van de beweging zijn vertraagd?
Hoe lees je dat af uit de grafiek?
- Hoe groot is de versnelling in punt B? Welke netto kracht werkt dan op Piet?
- In welk punt is de netto kracht nul?
- Bepaal uit de grafiek de afstand AB.
- Wat vind je van de verwaarlozing van de richtingsverandering van de snelheid?
(Vergelijk de afstand AB met de lengte van de touwen).

VERSNELLING

3.7 PROBLEMEN OM OP TE LOSSEN

Probleem 3.1 DE SPRINTER CARL LEWIS



De meeste sprinters slagen er niet in om aan het einde van een race nog hun snelheid te verhogen. Meestal wordt de snelheid iets minder of blijft in het beste geval constant.

De loopstijl van Carl Lewis is daarentegen zeer opmerkelijk: tijdens zowel de 100 m als de 200 m heeft hij zowel aan het begin als aan het eind een beweging met een vrijwel constante versnelling met daartussen een constant gelopen gedeelte.

Het verschil tussen zijn 100 m en zijn 200 m zit vrijwel alleen in de duur van dit middengedeelte. De versnelde stukken bij start en finish zien er voor de 100 m en de 200 m praktisch hetzelfde uit en duren respectievelijk 2 s en 3 s.

Als toptijden heeft hij laten noteren 100 m in 10,32 s, 200 m in 19,78 s.

- Hoe groot was zijn snelheid in de middengedeelten van zijn races, en hoe groot was zijn versnelling aan het eind?

Probleem 3.2 NOODSTOP VAN EEN TRAM

Als een tram een noodstop maakt, worden behalve de normale bedrijfsrem (remming op de motor) ook nog trommelremmen op de assen en railremmen (grote magneten) ingeschakeld.

Een groot gevaar bij de noodstop is dat de tram in een slip raakt (vooral bij nat weer en door bladeren op de rails) en daardoor uit de rails schiet.

Op twee manieren wordt dat gevaar bestreden:

- door zand op de rails te strooien (zie fig.1)
- door een elektrisch systeem dat de remstroom in de motor even onderbreekt, zodra een slip geconstateerd wordt. De remstroom gaat weer lopen, zodra de tram weer uit de slip komt. Dat kan 3 à 4 maal gebeuren tijdens één noodstop (zie fig.2).

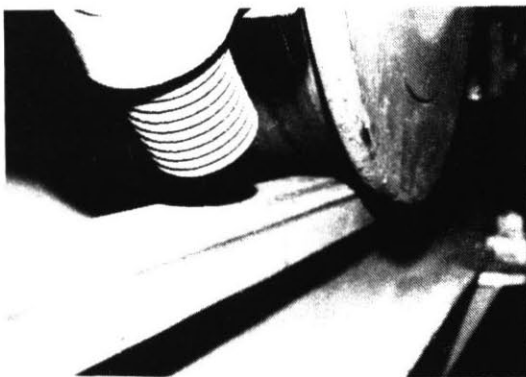


fig. 1 zandstrooier voor het wiel

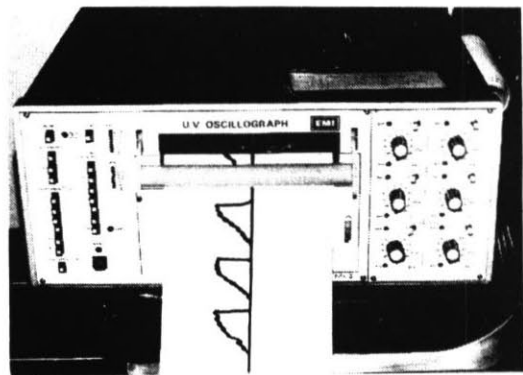


fig. 2 het verloop van de remstroom wordt vastgelegd

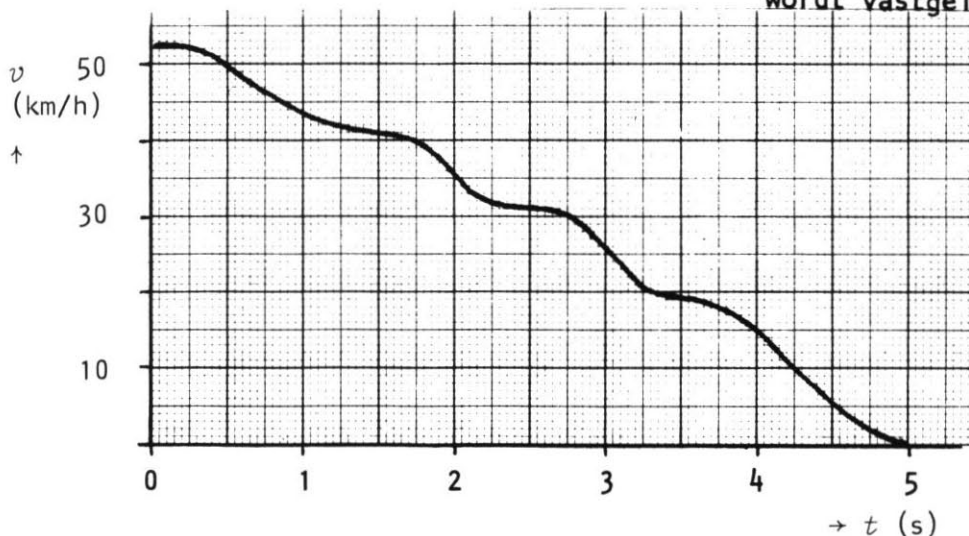


fig. 3 noodstop

Het gevolg van het slippen - en daardoor het onderbreken van de remstroom - is dat de remweg wordt verlengd, omdat de *gemiddelde* vertraging afneemt (zie fig.3).

►► Schat hoeveel de remweg door het slippen wordt verlengd.

VERSNELLING

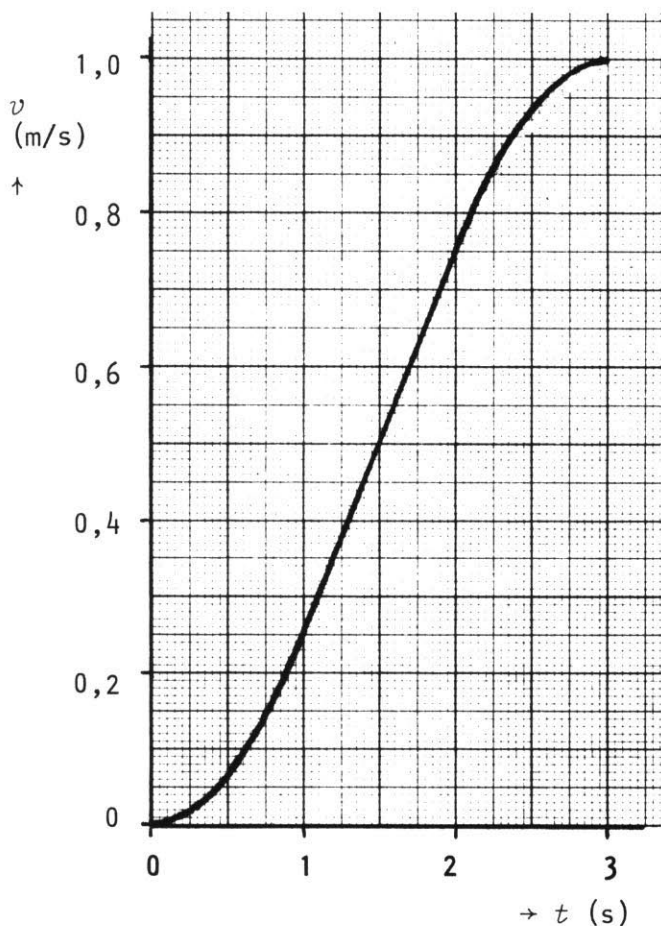
Probleem 3.3 EEN COMFORTABEL VERSNELDE LIFT

Plotseling optredende versnellingsveranderingen zijn erg vervelend en zelfs gevaarlijk voor een liftgebruiker. Men voelt een onaangename ruk naar boven of naar beneden.

Om een lift comfortabel te maken stelt men de eis dat de versnelling per seconde niet meer dan 2 m/s^2 mag veranderen (men noemt dat een rukbegrenzing van 2 m/s^3).

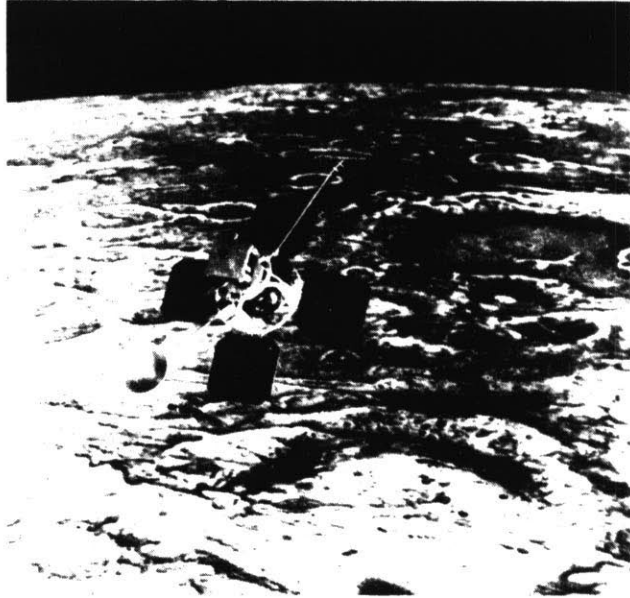
Als verdere eisen voor een veilige en comfortabele lift stelt men dat de versnelling maximaal 1 m/s^2 en de snelheid maximaal 3 m/s mag zijn.

Van een zekere lift is in onderstaand diagram weergegeven hoe hij op zijn topsnelheid komt.



- Ga na of deze lift aan de genoemde eisen voldoet en hoe lang hij minstens doet over een reisje van 4 meter. Wat vind je van deze lift?

Probleem 3.4 EEN MAANLANDING



Tijdens een reis naar de maan verliep het laatste gedeelte van de landing van de maanlander Lunar Module als volgt. Eerst ondervond de maanlander gedurende 15 seconden een verticale vertraging van $3,0 \text{ m/s}^2$; om hem vervolgens 'zacht' op de maan neer te zetten was een verticale vertraging in de laatste 8,0 seconden van $1,25 \text{ m/s}^2$ nodig.

- Op welke hoogte boven het maanoppervlak moest de eerste vertraging worden ingezet?

Probleem 3.5 TRAMPOLINESPRINGEN

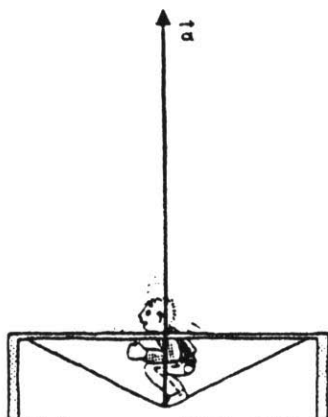


fig. 1



fig. 2

VERSNELLING

Het is niet eenvoudig om de bewegingen van een trampolinespringer met ons 'natuurkundig gereedschap' te beschrijven: denk bijvoorbeeld aan het inveren of het maken van een salto, waarbij verschillende lichaamsdelen *ten opzichte van elkaar* bewegen.

De bewegingen van het *zwaartepunt* van de springer kan je weergeven met een v, t -diagram. In fig. 3 hebben we die geschetst voor een trampolinespringer die zijn lichaam en benen *stijf houdt* en in fig. 4 voor een trampolinespringer, die een stuk door zijn knieën veert.

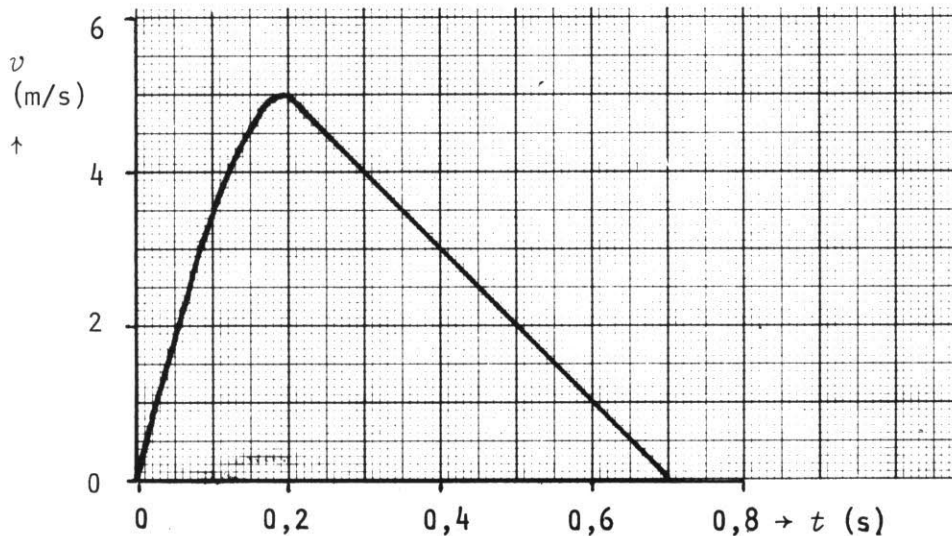


fig. 3

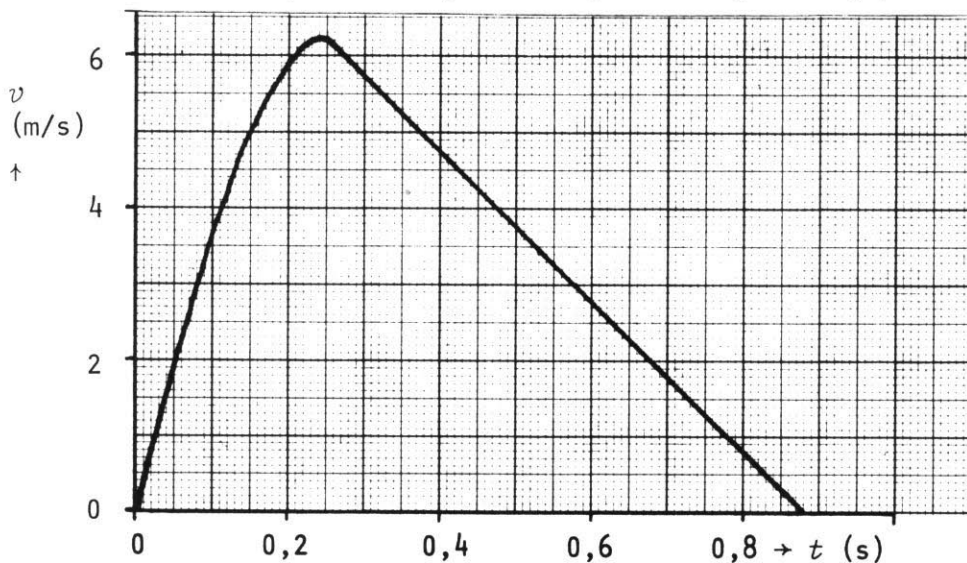


fig. 4

Beide diagrammen beginnen op het tijdstip, weergegeven in fig. 1 (laagste punt) en eindigen bij de situatie van fig. 2 (hoogste punt). Bestudeer fig. 3 goed.

In fig. 4 kan je zien, dat de springer door het inveren een langere contacttijd met het vel van de trampoline heeft, waardoor hij hoger komt. Hoeveel zijn zwaartepunt bij het inveren *méer* daalt dan zonder inveren, wordt bepaald door hoever hij door de knieën zakt.

►► Bepaal hoeveel hij hoger komt dan zonder inveren, en hoever hij door de knieën zakt.

Probleem 3.6 DE REMWEG VAN EEN AUTO

Veel ongelukken ontstaan doordat automobilisten de afstand die nodig is om tot stilstand te komen onderschatten. Er moet bij het tot stilstand komen rekening gehouden worden met verliestijden zoals reaktietijd en zweltijd. Met reaktietijd bedoelen we de tijd die verstrijkt tussen het waarnemen van het gevaar en het aanraken van het rempedaal; de zweltijd is de tijd die verloopt tussen het tijdstip waarop het rempedaal wordt aangeraakt en het tijdstip waarop de remkracht zijn maximale waarde bereikt.

Uit proefnemingen blijken de genoemde verliestijden de volgende waarden te kunnen aannemen:

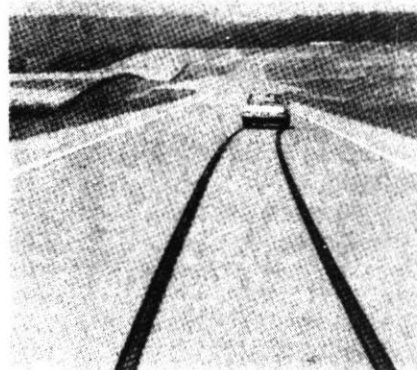
reaktietijd 0,5 tot 0,7 s;

zweltijd 0,4 tot 0,8 s.

De gemiddelde vertraging tijdens de zweltijd kan op 3 m/s^2 gesteld worden; bovendien neemt deze vertraging regelmatig toe. Na de zweltijd is de vertraging bij benadering 6 m/s^2 .

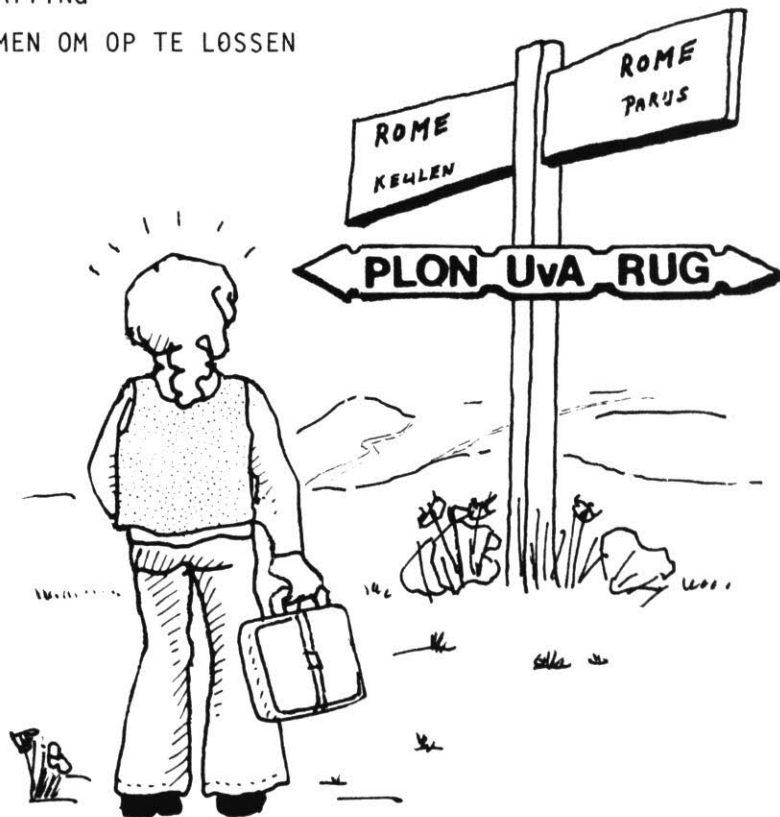
Uit een vuistregel gehanteerd door de ANWB blijkt dat bij een snelheid van 90 km/h de maximaal toelaatbare remweg ongeveer 80 m bedraagt.

- ► Ga na of dit te realiseren is als je rekening houdt met bovengenoemde verliestijden en vertragingen.



INHOUD

- 4.1 BEWEGINGEN EN VEKTOREN
- 4.2 PLAATS- EN VERPLAATSINGSVEKTOREN
- 4.3 SNELHEIDSVEKTOREN
- 4.4 VERSNELLINGSVEKTOREN
- 4.5 SAMENVATTING
- 4.6 PROBLEMEN OM OP TE LOSSEN

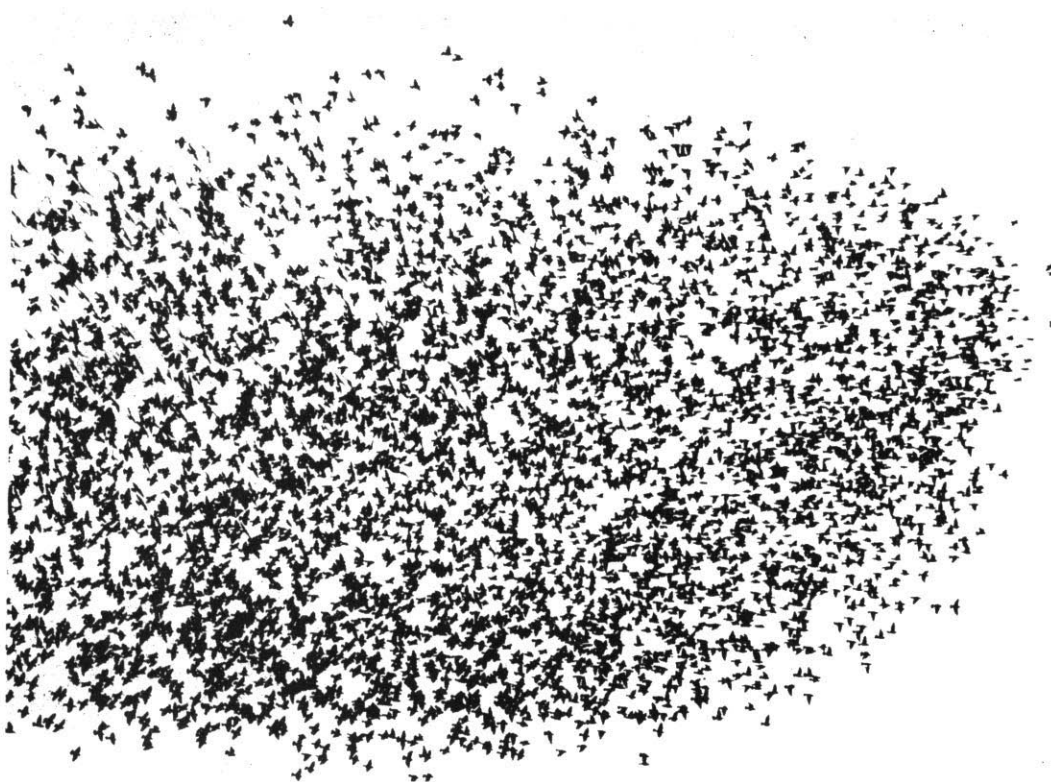


Vooruitblik

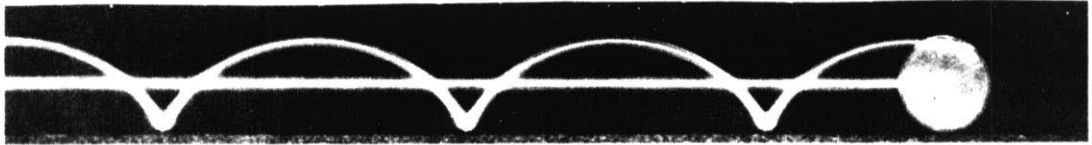
In dit hoofdstuk ga je kromlijnige bewegingen bekijken. Hierbij kun je gebruik maken van de vektorrekening uit de wiskunde. Plaats, snelheid en versnelling worden op een algemenere manier ingevoerd, zodat de rechtlijnige bewegingen uit de hoofdstukken 2 en 3 als bijzondere gevallen naar voren komen.

Speciale aandacht krijgen valbewegingen en cirkelbewegingen. De versnelling bij een eenparige cirkelbeweging kun je uitrekenen.

RICHTINGEN BESCHRIJVEN



4.1 BEWEGINGEN EN VEKTOREN



In hoofdstuk 2 zag je al dat het bij een bochtige weg s verschil maakt of je kijkt naar de 'echte' afgelegde weg Δs of naar de 'hemelsbreed' gemeten verplaatsing.

In de hoofdstukken 2 en 3 heb je verder niet op bochten hoeven letten. Je kon doen alsof de weg s steeds langs een getallenrechte (x -as) viel. Bij een beweging langs deze x -as kon je met het teken van de plaats $x(t)$ beschrijven in welke van de twee mogelijke richtingen (vanuit de oorsprong gezien) deze plaats lag. Evenzo waren voor verplaatsingen, snelheden, snelheidsveranderingen en versnellingen ook steeds deze twee tegengestelde richtingen mogelijk.

Bij het maken van een treindienstregeling zijn vooral de afstanden tussen de haltes van belang en spelen bochten een ondergeschikte rol. Anders wordt dat bijvoorbeeld als je wilt bepalen hoe schuin de rails in een bocht moeten liggen om het effect van het uit de bocht vliegen op te vangen. Dan ontkom je er niet aan om ook de vorm en afmetingen van die bocht in je beschrijving van de beweging te betrekken. Ook als je wilt weten onder welke hoek met de grond je een speer moet weggooien om hem zo ver mogelijk weg te krijgen, of als je zou willen verklaren waarom de zon 's zomers hoger aan de hemel komt dan 's winters, kun je die bewegingen onmogelijk als rechtlijnig beschouwen.

Als je bochten of knikken in een beweging wilt beschrijven, krijg je te maken met meer dan de genoemde twee richtingen, namelijk oneindig veel. Bij een beweging in een plat vlak (een boottochtje, een roltrap) kun je bv. een x -as en loodrecht daarop een y -as gebruiken om de plaats vast te leggen. Bij een beweging in de ruimte (bergbeklimming, vliegend insect) komt daar nog een z -as bij. In dit hoofdstuk zullen we ons beperken tot bewegingen in een plat vlak. De mogelijke richtingen in dit vlak behorend bij plaatsen, snelheden en versnellingen op allerlei tijdstippen kun je aangeven door *vektoren* te gebruiken.

RICHTINGEN BESCHRIJVEN

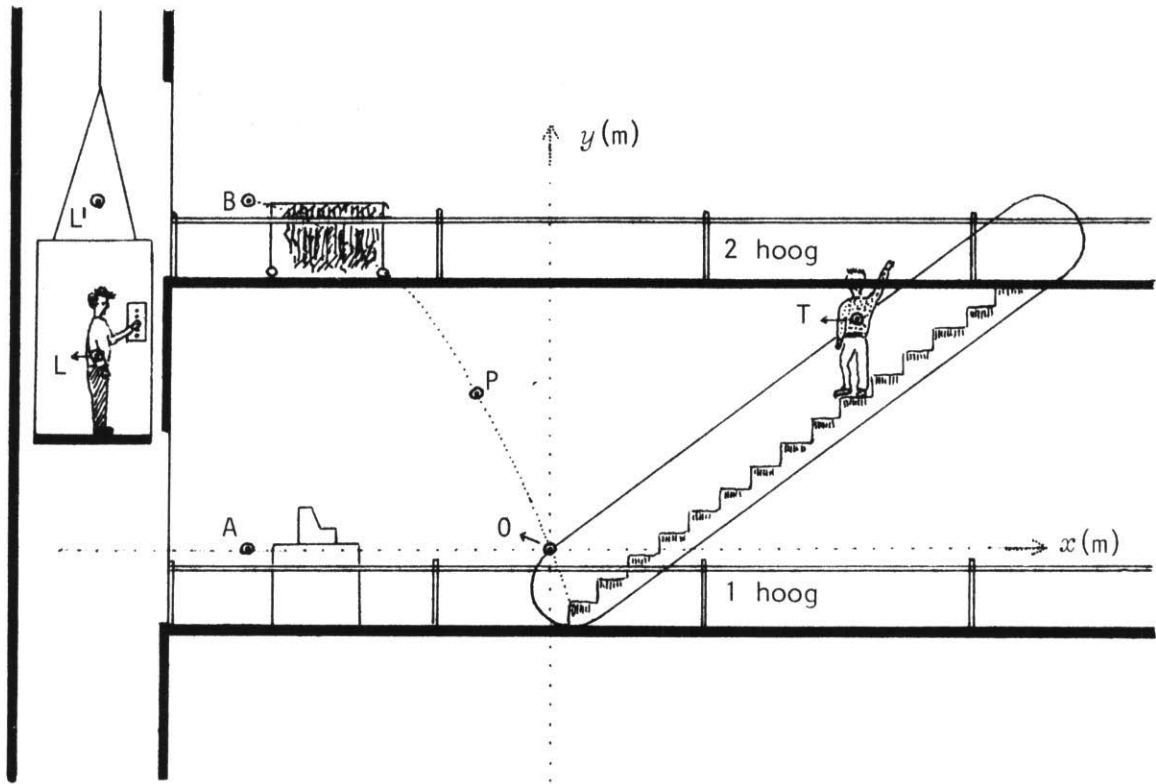


fig. 4.1a Herman en Jan in het warenhuis tussen 1 en 2 hoog

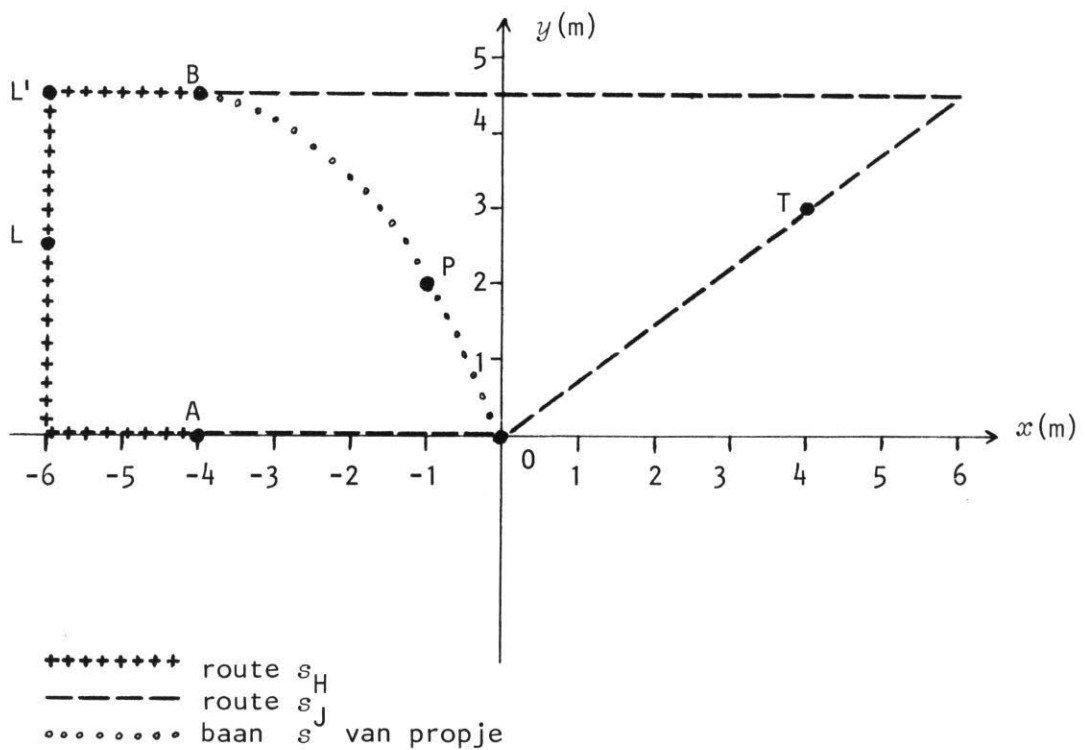


fig. 4.1b coördinatenstelsel uit fig. 4.1a

4.2 PLAATS- EN VERPLAATSINGSVEKTOREN

Als eenvoudig voorbeeld nemen we een verticale doorsnede van een warenhuis (zie fig. 4.1a), waarin zich een lift en een roltrap bevinden. We nemen aan, dat je langs elk van deze twee van de kassa van de boekenafdeling (A) op de 1e verdieping naar het spijkerbroekenrek (B) op de 2e verdieping kunt komen zonder dit verticale vlak te verlaten.

Herman en Jan gaan beiden van de boekenafdeling naar het spijkerbroekenrek. Herman gaat met de lift naar boven (route s_H), Jan via de roltrap (route s_J). Is het mogelijk om voor deze bewegingen de plaats als functie van de tijd te beschrijven?

Bij de onderkant van de roltrap is een oorsprong 0 gekozen (fig. 4.1b) waar x -as en y -as doorheen gaan. Op ieder tijdstip moet je, bijvoorbeeld voor Herman, twee coördinaten x_H en y_H weten om zijn plaats te kennen.

De combinatie $\begin{pmatrix} x_H(t) \\ y_H(t) \end{pmatrix}$

van de twee (plaats)functies $x_H(t)$ en $y_H(t)$ beschrijft dus het reisje van Herman. Als Herman bijvoorbeeld in de lift zit in het willekeurige punt L, is $x_H = -6$ en $y_H = +2\frac{1}{2}$.

Een andere manier om de plaats (bv. L) van Herman te beschrijven is het vastleggen van afstand en richting van L, gezien vanuit 0 (fig. 4.2). De vektor $\vec{r}_H$ (r = radius = afstand tot 0) heeft een *grootte* $|\vec{r}_H|$ gelijk aan de afstand OL, en een *richting* die bepaald wordt door de hoek α_H (opnieuw zijn er dus twee gegevens nodig om de plaats aan te geven).

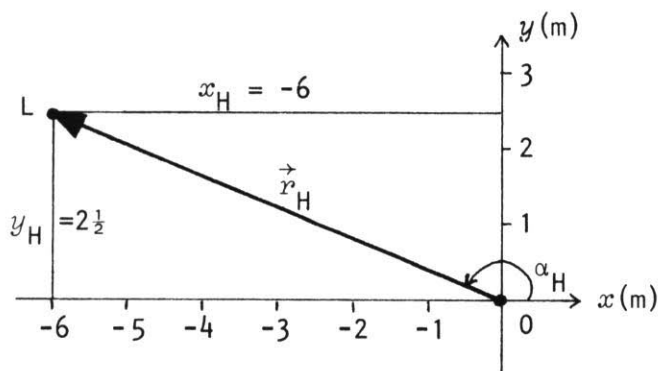


fig. 4.2 Herman in de lift: componenten, grootte en richting van de plaatsvektor

Het maakt niet uit of je de plaats van Herman vastlegt met x_H en y_H of met $|\vec{r}_H|$ en α_H , want je kunt deze twee combinaties (door meting of berekening) uit elkaar bepalen.

RICHTINGEN BESCHRIJVEN

Je mag zeggen: de vektor

$$\vec{r}_H(t) = \begin{pmatrix} x_H(t) \\ y_H(t) \end{pmatrix}$$

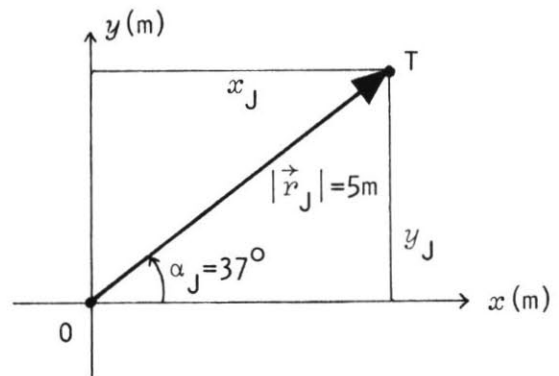
(de *plaatsvektor* van Herman) is een (vektor)functie van t .

x_H en y_H heten de *componenten* van $\vec{r}_H$ in het gekozen coördinatenstelsel.

- 1 Bereken $|\vec{r}_H|$ en α_H in punt L uit fig. 4.2. Controleer je antwoord door meting.

2

fig. 4.3 Jan op de trap
(α_J = hoek tussen
vloer en roltrap)



In punt T op de roltrap (fig. 4.3) wordt de plaats van Jan gegeven door $|\vec{r}_J| = 5 \text{ m}$ en $\alpha_J = 37^\circ$.

Meet en bereken hieruit de componenten x_J en y_J in punt T:

$$\begin{pmatrix} x_J \\ y_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{r}_J| \cos \alpha_J \\ |\vec{r}_J| \sin \alpha_J \end{pmatrix}$$

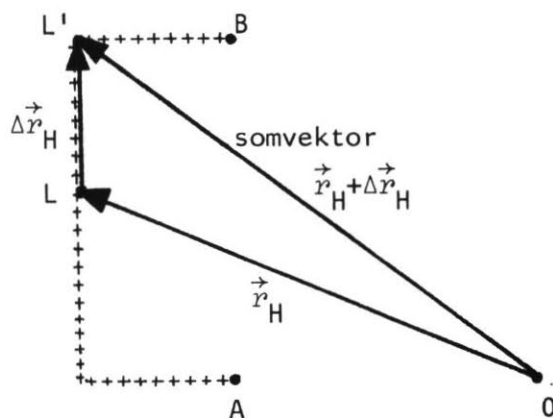


fig. 4.4 vektoroptelling:
beginplaatsvektor
+ verplaatsing =
eindplaatsvektor
+++++++ route s_H

Als Herman uit de lift stapt, heeft hij punt L' bereikt (fig. 4.4).

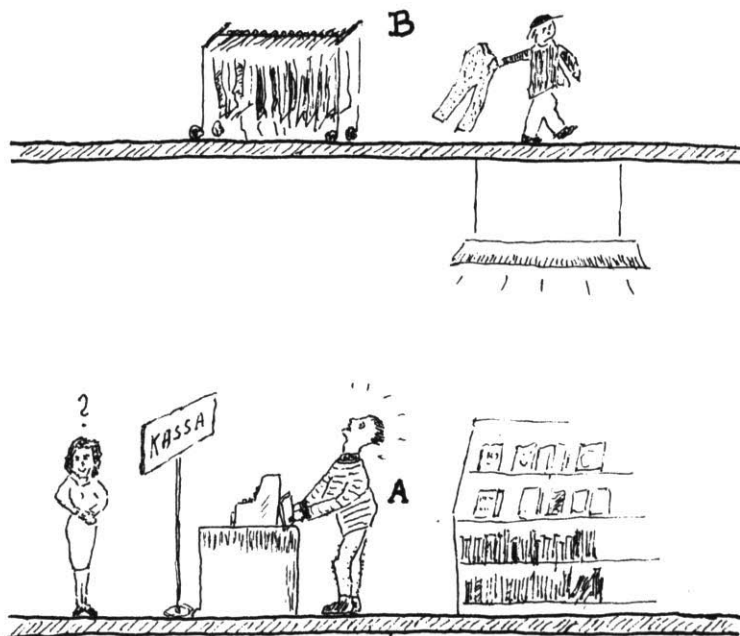
Laten we de *verplaatsing* van L naar L' aangeven met de vektor $\Delta \vec{r}_H$ (deze vektor heeft een andere richting dan $\vec{r}_H$).

De nieuwe plaatsvektor wijst van O naar L' . We kunnen deze nu aangeven met $\vec{r}_H + \Delta \vec{r}_H$ (de *somvektor* van $\vec{r}_H$ en $\Delta \vec{r}_H$). Bij de oorspronkelijke plaatsvektor moet dus volgens deze *vektoroptelling* de verplaatsing opgeteld worden om de nieuwe plaatsvektor te krijgen. Je mag ook zeggen: de verplaatsingsvektor is het *verschil* tussen de nieuwe en de oorspronkelijke plaatsvektor.

- 3 a) Teken in een kopie van fig. 4.4 ook de plaatsvectoren van de punten A en B , en de verplaatsingsvectoren van A naar L' en van L' naar B .
- b) Welke verplaatsingsvektor valt niet langs de door Herman afgelegde weg? Waarom niet?

Als verplaatsing en afgelegde weg niet samenvallen, is de verplaatsing altijd kleiner dan de afgelegde weg.

- 4 Laat in de kopie van fig. 4.4 zien dat Herman's verplaatsing van A naar B de vektorsom is van de verplaatsingen van A naar L , van L naar L' en van L' naar B .

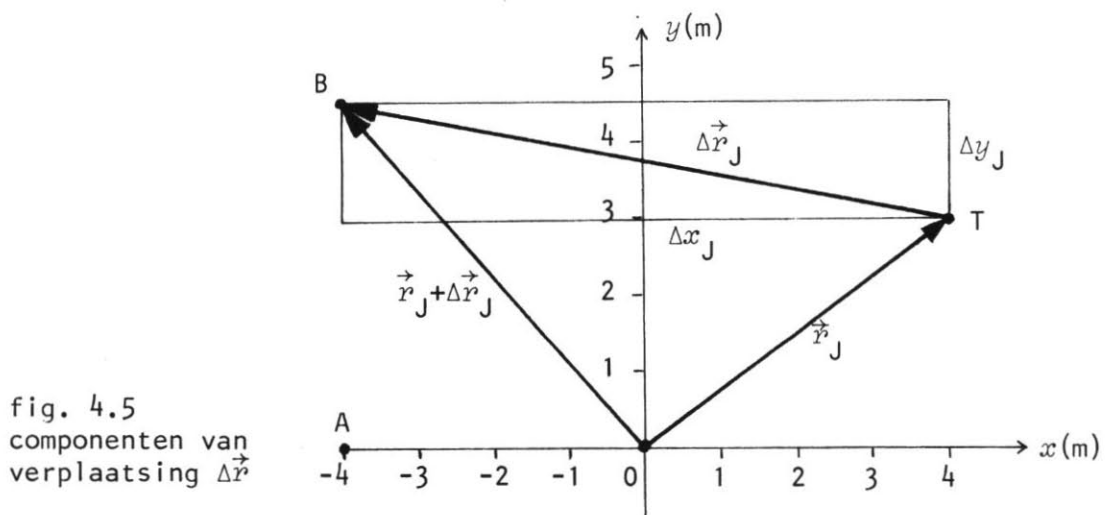


RICHTINGEN BESCHRIJVEN

- 5 a) Leg uit dat de reisjes van Herman en Jan, zij het langs verschillende wegen van verschillende lengte, uiteindelijk dezelfde verplaatsing opleveren (welke?).
- b) Hoe lang zijn de afgelegde wegen?
- c) Wat zijn grootte en richting van de verplaatsing?

Een verplaatsingsvektor $\Delta \vec{r}$ is een verandering van een plaatsvektor $\vec{r}$. Je kunt hierbij ook kijken naar de projecties van $\Delta \vec{r}$ op x -as en y -as, Δx en Δy . We noemen dit de componenten van $\Delta \vec{r}$.

- 6 Lees af hoe groot de componenten Δx_J en Δy_J zijn voor Jan's verplaatsing $\Delta \vec{r}_J$ van T naar B (fig. 4.5).



- 7 Stel de plaatsvektor van T is $\vec{r}_J$ (die van B is dan $\vec{r}_J + \Delta \vec{r}_J$). Ga voor de somvektor $\vec{r}_J + \Delta \vec{r}_J$ in fig. 4.5 na dat zijn x -component de som is van de x -componenten van $\vec{r}_J$ en $\Delta \vec{r}_J$.

Doe net zoiets voor de y -component. Noteer de getallen als

$$\begin{pmatrix} x_J \\ y_J \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x_J \\ \Delta y_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_J + \Delta x_J \\ y_J + \Delta y_J \end{pmatrix}$$

- 8 Tel bij de componenten van de plaatsvektor van B de componenten van de verplaatsingsvektor van A naar 0 op:

$$(\quad) + (\quad) = (\quad)$$

Zeg wat het resultaat betekent.

4.3 SNELHEIDSVEKTOREN

Als je een autoritje maakt, bedoel je met de gemiddelde snelheid de 'gemiddelde' stand van de snelheidsmeter, omdat je daarbij niet let op de richting van de snelheid: het gaat om de afgelegde weg gedeeld door de benodigde tijd. Evenzo kun je in het warenhuis voor Herman en Jan de gemiddelde snelheden *langs hun wegen* bepalen, als je weet hoe hard ze op ieder tijdstip gaan.

Iets anders is dat je ook kunt kijken wie nou eigenlijk het snelste de totale verplaatsing $\Delta \vec{r}$ van A naar B tot stand brengt, zonder op de feitelijk afgelegde wegen te letten. Dit kan met behulp van de *gemiddelde snelheidsvektor*:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

waarin Δt de totale reistijd van A naar B voorstelt.

De *richting* van $\vec{v}$ is, net als die van $\Delta \vec{r}$, recht omhoog. De *grootte* $|\vec{v}|$ van $\vec{v}$ wordt uitgedrukt in m/s. Voor Herman en Jan zijn de waarden van $|\vec{v}|$ verschillend, omdat hun reistijden verschillend zijn. De grootte $|\vec{v}_H|$ van $\vec{v}_H$ geeft bv. weer hoe snel Herman langs de *kortste weg* (= de verplaatsingsvektor) van A naar B zou moeten gaan om even snel in B te zijn als in werkelijkheid gebeurt.

Je kunt in het verticale x,y -vlak (bv. in fig. 4.1b) wel de richting van $\vec{v}$ aangeven, maar niet de grootte, omdat de lengte van een pijltje in dat vlak een afstand voorstelt en geen snelheid. Als je in fig. 4.1b per se toch een snelheidsvektor zou willen tekenen, moet je hierin een aparte schaal in m/s aangeven die niets met de schaal in m te maken heeft.

- 9 Maak met behulp van fig. 4.1 schattingen van de totale reistijden van Herman en Jan. Neem daarbij aan dat er geen wachttijden zijn bij lift of roltrap en dat op de trap niet gelopen wordt.

Neem als loopsnelheid 1 m/s, voor de liftsnelheid 0,5 m/s en voor de snelheid van de roltrap 0,75 m/s.

- 10 Bepaal voor Herman en voor Jan met de resultaten van de opdrachten 5 en 9:

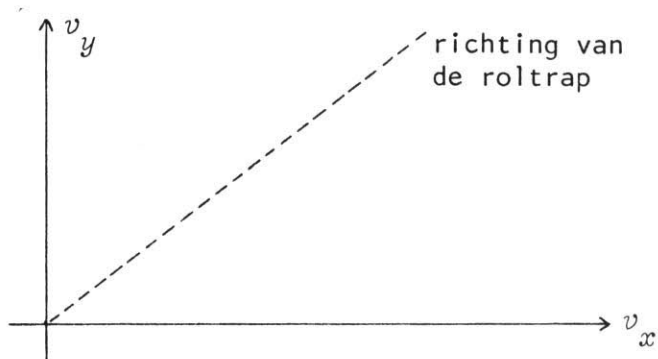
a) de gemiddelde snelheden, langs de weg gemeten;

b) de grootten van de gemiddelde snelheidsvektoren $|\vec{v}_H|$ en $|\vec{v}_J|$.

RICHTINGEN BESCHRIJVEN

- 11 a) Bepaal uit de snelheid van de roltrap de waarden van $\frac{\Delta x_J}{\Delta t}$ en $\frac{\Delta y_J}{\Delta t}$ van Jan op de roltrap.
Zeg wat deze waarden voorstellen.
- b) Geef ze aan in een kopie van fig. 4.6 (neem 1 cm voor 0,2 m/s).
Waarom kan in deze figuur de roltrap niet getekend worden?
- c) Geef in deze kopie ook de vectoren uit opdracht 10b) aan.

fig. 4.6 snelheid op de roltrap



In B aangekomen, gooit Herman (figuren 4.1a en 4.7) op het tijdstip t een propje over de balustrade dat met een boog s na 1 seconde in O arriveert.

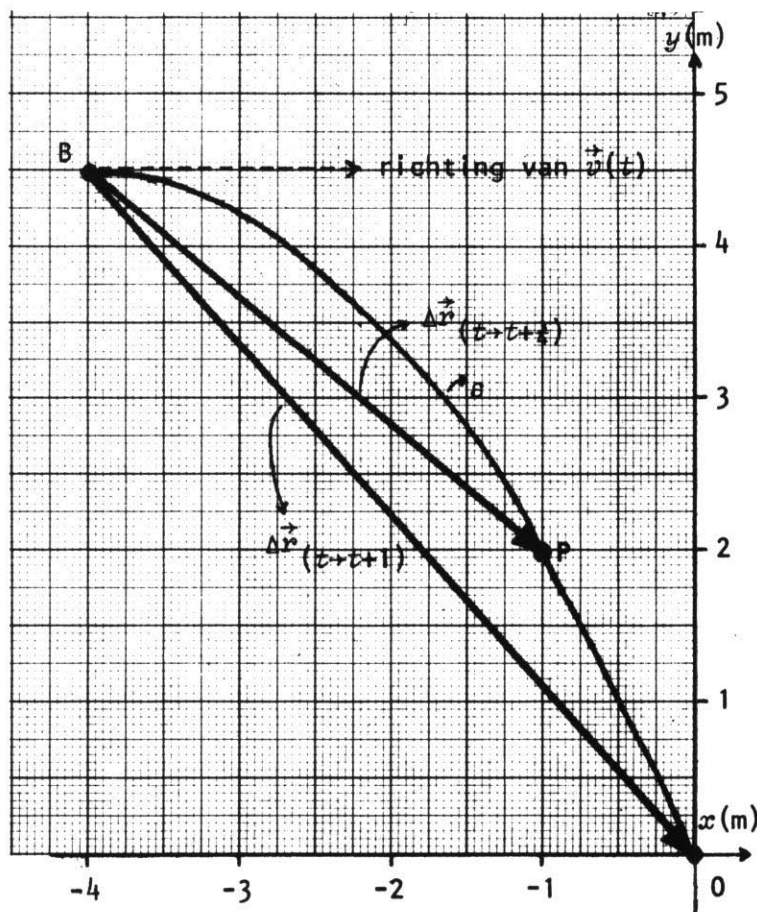


fig. 4.7 richtingen van $\Delta \vec{r}$ ten opzichte van s als Δt steeds kleiner wordt

- 12 a) Hoe groot is de verplaatsing $\Delta \vec{r}_{(t \rightarrow t+1)}$ in deze sekonde?
 b) Bereken $|\vec{v}|$ en de componenten $\bar{v}_x$ en $\bar{v}_y$ in deze sekonde.
- 13 Na $\frac{3}{4}$ s was het propje in P (fig. 4.7).
 a) Hoe groot is $\Delta \vec{r}_{(t \rightarrow t+\frac{3}{4})}$ voor het tijdvak tussen t en $t+\frac{3}{4}$?
 b) Bereken $|\vec{v}|$ en de componenten $\bar{v}_x$ en $\bar{v}_y$ ook voor dit tijdvak.

Je ziet dat $\Delta \vec{r}$ van grootte en richting verandert als we het tijdvak Δt na het tijdstip t kleiner maken. Dit zal in het algemeen dus ook gelden voor $\vec{v}$.

Om van de gemiddelde snelheidsvektor van het propje naar de *snelheidsvektor op het tijdstip t* (in B) te komen moet je $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ (en dus $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ en $\frac{\Delta y}{\Delta t}$) bepalen voor steeds kleinere Δt .

Je eindigt dan met de snelheidsvektor $\vec{v}(t)$ in B met componenten $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$. Omdat begin- en eindpunt van $\Delta \vec{r}$ dan heel dicht bij elkaar komen te liggen, wordt de richting van $\Delta \vec{r}$ (en dus van $\vec{v}$) de richting van de *raaklijn aan de weg s* (fig. 4.7; in ons voorbeeld is toevallig $\frac{dy}{dt} = 0$ in B).

We noteren dit als:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Dit betekent dus: $\vec{v}(t)$ is de vektor(-functie) waarvan de componenten de afgeleide functies zijn van de componenten van $\vec{r}(t)$ (om deze te bepalen moet je dus $x(t)$ en $y(t)$ precies kennen; zolang alleen de baan s gegeven is, weet je alleen de richting van $\vec{v}(t)$).

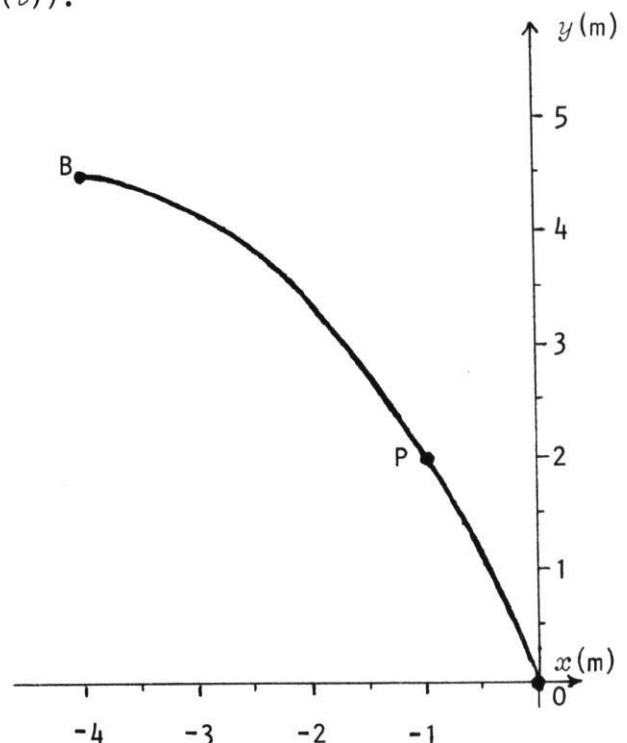


fig. 4.8
 bij opdracht 14 en 16

RICHTINGEN BESCHRIJVEN

- 14 Stel de plaatsvektor van het propje als functie van de tijd kan (als we $t=0$ in B nemen) benaderd worden door

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4t-4 \\ -4\frac{1}{2}t^2+4\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(het uiteinde van $\vec{r}(t)$ beschrijft dan een stukje van een verticale parabool).

- a) Bepaal de componenten van $\vec{r}(t)$ als $t = \frac{1}{2}$ s.

Teken $\vec{r}(\frac{1}{2})$ in een kopie van fig. 4.8 en noem het eindpunt Q. Lig Q op de baan?

- b) Bepaal $\vec{v}(t)$ uit $\vec{r}(t)$ door differentiatie: $\vec{v}(t) = (\quad)$

Bepaal de componenten van $\vec{v}(\frac{1}{2})$ en teken deze componenten, en $\vec{v}(\frac{1}{2})$ zelf, in punt Q (neem 1 cm voor 2 m/s).

Raakt $\vec{v}(\frac{1}{2})$ aan de baan?

Bepaal en teken ook $\vec{v}(0)$.



Je kunt in B ook een ander coördinatenstelsel voor $\vec{v}$ tekenen (fig. 4.9) waarvan de assen langs, resp. loodrecht op $\vec{r}$ (de plaatsvektor van B) vallen. Als je hierop een schaal in m/s aanbrengt kun je de componenten v_r en v_α van $\vec{v}$ in dit stelsel tekenen. Als het propje zich verplaatst langs s , veranderen zowel $|\vec{r}|$ als α . In B is de component v_r van $\vec{v}$ langs $\vec{r}$ verantwoordelijk voor de verandering van $|\vec{r}|$, de component v_α loodrecht op $\vec{r}$ voor die van α .

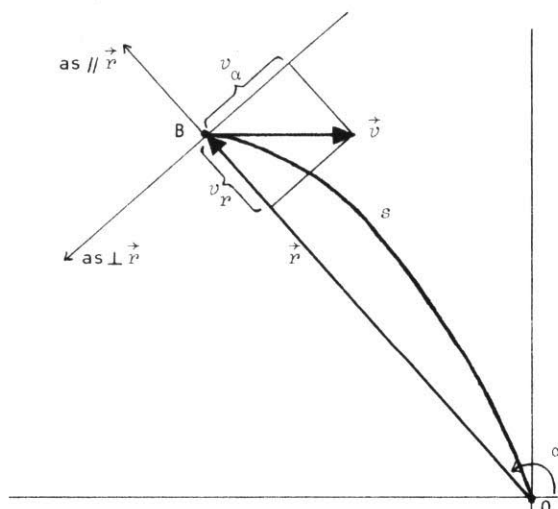


fig. 4.9 componenten van $\vec{v}$ langs en loodrecht op $\vec{r}$
 $v_r < 0 \rightarrow |\vec{r}|$ neemt af
 $v_\alpha < 0 \rightarrow \alpha$ neemt af
 (1 cm $\approx$ 2 m/s)

- 15 Wat voor beweging zou je krijgen als voortdurend $v_\alpha = 0$ zou zijn (zie fig. 4.10a)?
 Dezelfde vraag met $v_r = 0$ (fig. 4.10b).

fig. 4.10a
 $v_\alpha = 0$

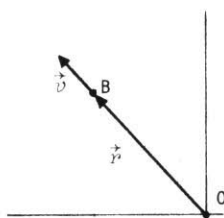
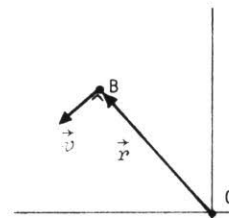


fig. 4.10b
 $v_r = 0$



- 16 Teken in de kopie van fig. 4.8 ook de componenten v_r en v_α van $\vec{v}(\frac{1}{2})$ in punt Q.

- 17 De stroboskopische foto van fig. 4.11 laat twee balletjes zien die elke $\frac{1}{30}$ s zijn gefotografeerd. De afstand tussen de lijnen is in werkelijkheid 10 cm. Bepaal richting en grootte van de snelheden in A en B.
- 18 Bekijk de beweging van de kop van de golfstick in fig. 4.12. Bepaal richting en grootte van de snelheden in A, B en C ($N = 0,03$ betekent: alles is op de foto 0,03 maal zo groot als in werkelijkheid).

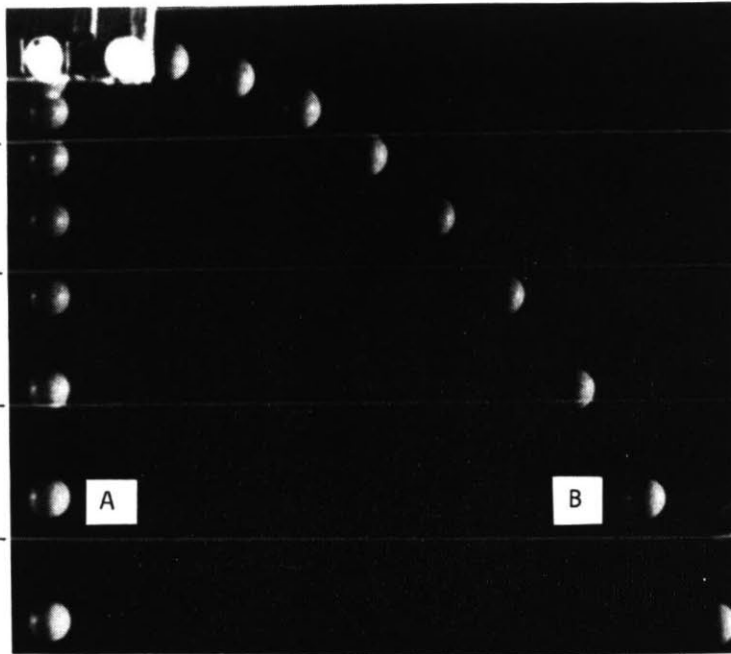


fig. 4.11 een losgelaten en een horizontaal weggeschoten balletje

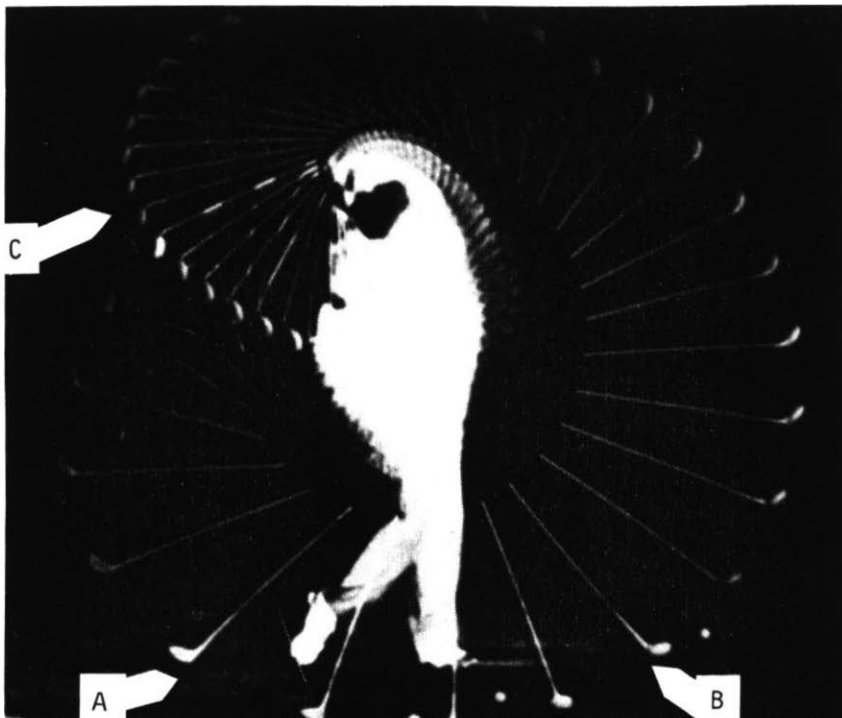


fig. 4.12 een golfspeler

De tijd tussen 2 lichtflitsen is $\frac{1}{60}$ s. De vergroting is $N = 0,03$.

RICHTINGEN BESCHRIJVEN

4.4 VERSNELLINGSVEKTOREN

In hoofdstuk 3 heb je gewerkt met de gemiddelde versnelling bij rechtlijnige bewegingen:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Hierbij viel $\Delta \vec{v}$ steeds in de richting van $\vec{v}$ (eventueel was $\Delta \vec{v}$ tegengesteld aan $\vec{v}$) en veranderde $\vec{v}$ alleen van grootte. In fig. 4.13a is een rechte baan getekend met gegeven snelheden $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ in twee punten A en B (de snelheidsschaal is willekeurig). In fig. 4.13b zijn $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ vanuit één beginpunt getekend om de snelheidsverandering $\Delta \vec{v}$ te kunnen construeren.



fig. 4.13 snelheidsverandering bij rechtlijnige beweging

Als een beweging kromlijinig is, krijg je in het algemeen de situatie van fig. 4.14a en b: $\vec{v}$ verandert niet alleen van grootte maar ook van richting volgens de *vektoroortelling*

$$\vec{v}_1 + \Delta \vec{v} = \vec{v}_2$$

Hierbij zijn $\Delta \vec{v}$ en $\vec{v}_2$ anders gericht dan $\vec{v}_1$.

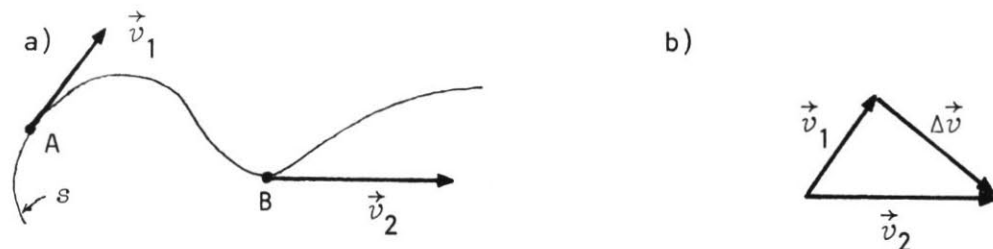


fig. 4.14 snelheidsverandering bij kromlijnige beweging

De *gemiddelde versnellingsvektor* heeft dezelfde richting als $\Delta \vec{v}$:

$$\bar{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Om zijn grootte aan te geven heb je een schaalverdeling in m/s^2 nodig. De vektor $\vec{a}$ geeft aan hoe snel een gegeven snelheidsverandering $\Delta\vec{v}$ tot stand komt.

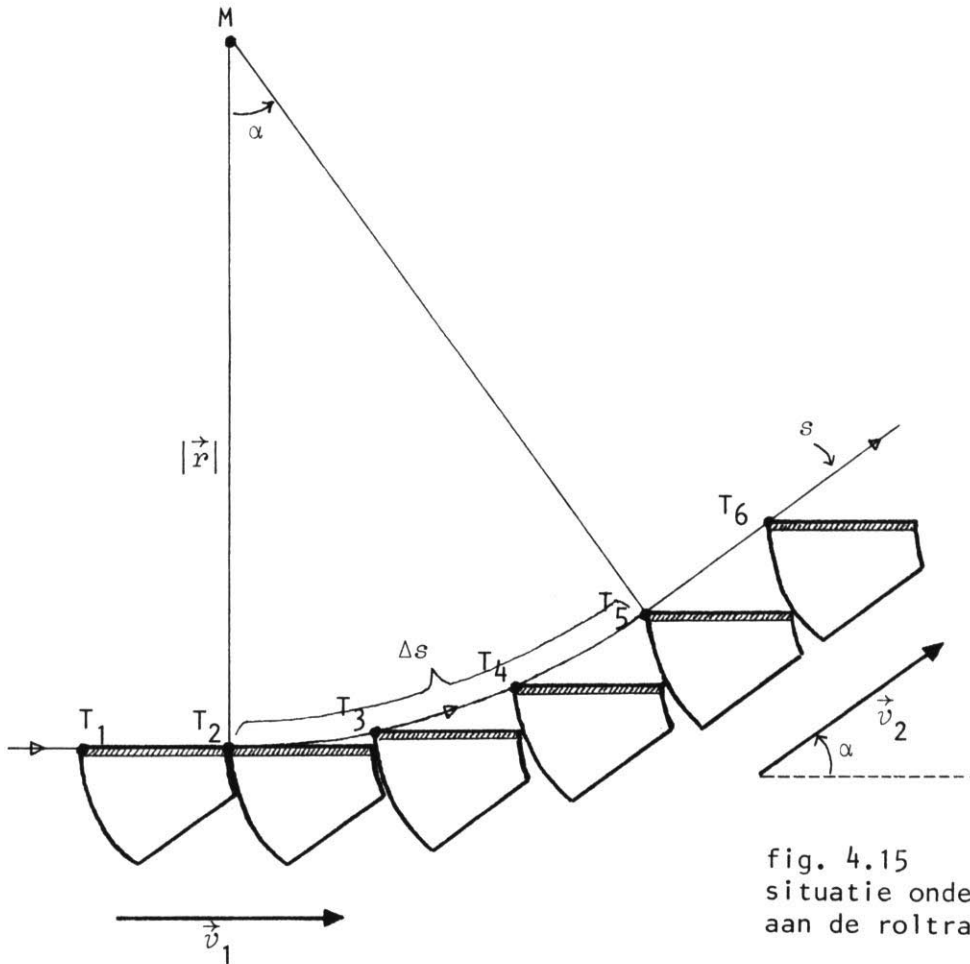


fig. 4.15
situatie onder-
aan de roltrap

We zullen nu eerst een voorbeeld nemen waarbij alleen de richting van de snelheid verandert. Daarvoor bekijken we in een wat nauwkeuriger tekening (fig. 4.15) wat er onderaan de roltrap in het warenhuis gebeurt.

Jan stapt op een trede die eerst deel uitmaakt van een vlak stukje, maar die even later schuin omhoog gaat. Omdat de trede aan een rondlopende ketting vastzit, die overal even hard gaat, liggen de overeenkomstige punten T van de treden even ver uit elkaar langs de baan s . Te zien is welke vorm voor de treden nodig is om dit mogelijk te maken. In het 'overgangsgebied' tussen T_2 en T_5 is de baan een cirkelboog Δs met straal $|\vec{r}| = 2,33 \text{ m}$ (het middelpunt M is nu als oorsprong gekozen).

De richtingsverandering van de snelheid $\vec{v}(t)$ van Jan's trede langs de transportketting is te zien in fig. 4.16, doordat daar $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ vanuit één beginpunt getekend zijn. Bij de richtingsverandering hoort een verschil-

RICHTINGEN BESCHRIJVEN

vektor $\Delta \vec{v}$ waarvan grootte en richting door meting of berekening uit de figuur bepaald kunnen worden.

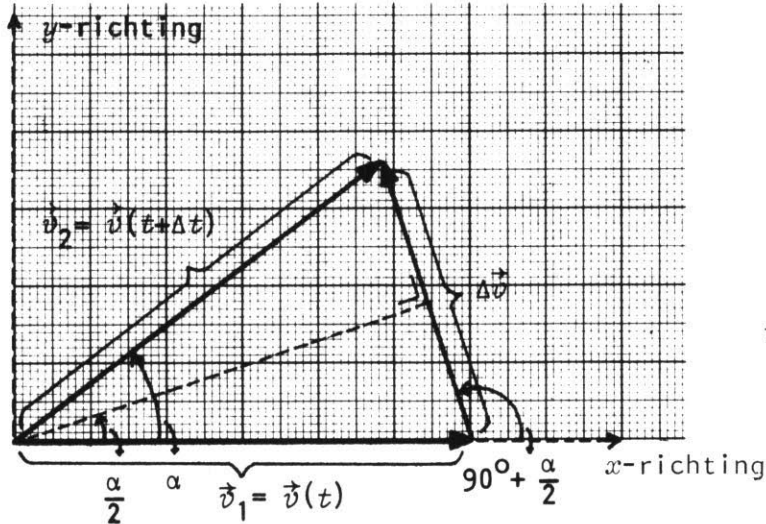


fig. 4.16 richting en grootte van $\Delta \vec{v}$ in de 'bocht' van de roltrap ($8 \text{ cm} \cong 1 \text{ m/s}$)

- 19 a) Uit fig. 4.16 volgt: $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2} |\Delta \vec{v}|}{|\vec{v}_1|}$
 Bepaal hieruit $|\Delta \vec{v}|$ met de gegevens voor α en $|\vec{v}_1|$ uit de opdrachten 2 en 9. Controleer door meting.
- b) Meet in de figuur ook de componenten Δv_x en Δv_y van $|\Delta \vec{v}|$.

Het tijdvak Δt nodig voor de 'bocht' (cirkelboog Δs) is de tijd waarin $\Delta \vec{v}$ tot stand komt. Met deze tijd en $|\Delta \vec{v}|$ kun je de grootte van de gemiddelde versnelling berekenen. De waarde van Δt haal je uit de lengte van de cirkelboog en de grootte van de kettingsnelheid.

- 20 De breedte van 1 trede is 50 cm, terwijl er volgens fig. 4.15 3 treden in de bocht passen (waarom?).

De lengte van de bocht kan ook worden uitgerekend met

$$\frac{\text{bocht } \Delta s}{\text{cirkelomtrek } 2\pi |\vec{r}|} = \frac{\alpha \text{ (in graden)}}{360}$$

(α is op twee plaatsen in fig. 4.15 aangegeven!).

Als je α in radialen uitdrukt, wordt deze formule eenvoudiger:

$$\frac{\Delta s}{2\pi |\vec{r}|} = \frac{\alpha \text{ (in rad)}}{2\pi} \quad \text{dus} \quad \Delta s = \alpha |\vec{r}|$$

- a) Geven beide methoden ($\Delta s = 3$ treden en $\Delta s = \alpha |\vec{r}|$) dezelfde waarde voor Δs ?

b) Bepaal ook de waarde van Δt .

21 a) Bepaal uit de resultaten van opdracht 19 en 20 de waarde van $|\vec{a}|$.

b) Wat is de richting van $\vec{a}$?

Stel dat Jan T_2 bereikt op het tijdstip t . Dan is $\vec{v}_1 = \vec{v}(t)$ en $\vec{v}_2 = \vec{v}(t+\Delta t)$. Kun je nu uitgaande van $\vec{a}$ komen tot $\vec{a}(t)$, de *versnellingsvektor op het tijdstip t* van Jan in het punt T_2 ?

Je moet dan $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ (en dus $\frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ en $\frac{\Delta v_y}{\Delta t}$) bepalen voor steeds kleinere Δt ; uiteindelijk krijg je

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

met componenten $\frac{dv_x}{dt}$ en $\frac{dv_y}{dt}$. Uitgaande van $\vec{v}(t)$ zou je dus $v_x(t)$ en $v_y(t)$ kunnen bepalen en deze differentiëren om de componenten van $\vec{a}(t)$ te vinden. Hoewel dit wel uitvoerbaar is, kunnen we in het voorbeeld van de roltrap grootte en richting van $\vec{a}(t)$ in T_2 op een iets handiger manier bepalen.

Uit fig. 4.16 (opdracht 19) volgt:

$$|\Delta \vec{v}| = 2|\vec{v}| \sin \frac{\alpha}{2}$$

We drukken α uit in radialen. Als Δt heel klein wordt, wordt Δs een klein stukje van de cirkelboog net voorbij T_2 . De hoek α wordt ook heel klein en je mag volgens de wiskunde $\sin \frac{\alpha}{2}$ benaderen door $\frac{\alpha}{2}$. Dus

$$|\Delta \vec{v}| \approx 2|\vec{v}| \frac{\alpha}{2} = \alpha |\vec{v}| \quad (\text{als } \Delta t \text{ heel klein wordt})$$

Uit opdracht 20 volgt:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{|\vec{v}|} = \frac{\alpha |\vec{r}|}{|\vec{v}|}$$

Deel je de laatste twee vergelijkingen op elkaar, dan krijg je

$$\frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \alpha |\vec{v}| \cdot \frac{|\vec{v}|}{\alpha |\vec{r}|} \quad (\text{als } \Delta t \text{ heel klein wordt})$$

Maar als Δt heel klein wordt, wordt $\frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}$ gelijk aan $|\vec{a}(t)|$.

Het resultaat voor $|\vec{a}(t)|$ is:

$$|\vec{a}(t)| = \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{r}|}$$

Dit is de *grootte* van de versnelling $\vec{a}(t)$ die Jan in T_2 ondervindt.

RICHTINGEN BESCHRIJVEN

Uit fig. 4.16 volgt, dat $\Delta \vec{v}$ een hoek van $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ maakt met $\vec{v}(t)$ in T_2 . Als α heel klein wordt, draait $\Delta \vec{v}$ (en dus $\vec{a}(t)$) tot hij *loodrecht op* $\vec{v}(t)$ komt te staan. De *richting* van $\vec{a}(t)$ is in T_2 dus vertikaal omhoog, wijzend naar het middelpunt M van de cirkelboog.

Als je $\vec{a}(t)$ op een ander tijdstip bepaalt, bv. als Jan in T_3 is, blijft de *grootte* $\frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{r}|}$ gelijk, want $|\vec{v}|$ en $|\vec{r}|$ blijven elk ook gelijk. De *richting* van $\vec{a}(t)$ verandert wel, want $\vec{v}(t)$ draait en $\vec{a}(t)$ blijft loodrecht op $\vec{v}(t)$ in de richting van M wijzen.

Bij een *eenparige cirkelbeweging* is dus steeds een *naar het middelpunt gerichte versnelling* met een *constante grootte* $\frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{r}|}$ aanwezig (fig. 4.17). Deze versnelling wordt de *centripetale versnelling* genoemd.

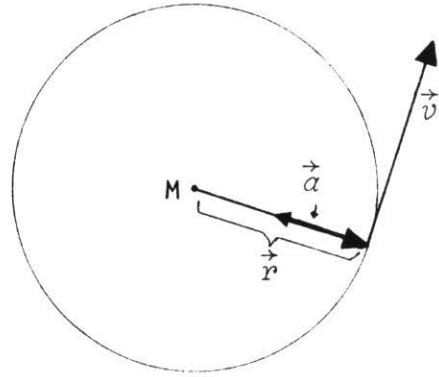


fig. 4.17 eenparige cirkelbeweging

- 22 a) Bereken $|\vec{a}(t)|$ in de bocht van de roltrap. Vergelijk het resultaat met g .
b) Is $|\vec{a}|$ (opdracht 21) hier een goede benadering voor $|\vec{a}(t)|$?
- 23 Als je een cirkel *helemaal* doorloopt is de snelheidsverandering $\Delta \vec{v}$ gelijk aan $\vec{0}$ (vergelijk dit met hoofdstuk 1, opdracht 2).
Is $|\vec{a}|$ gedurende deze omloop een goede benadering voor $|\vec{a}(t)|$?
- 24 Bereken de grootte van de centripetale versnelling van de aarde in zijn baan om de zon. Welke kracht is hiervoor nodig?
Gegevens: straal aardbaan = 150 miljoen km; massa aarde = $6,0 \cdot 10^{24}$ kg.

Over de versnellingsvektor $\vec{a}(t)$ ben je tot nu toe te weten gekomen:

- 1e) Uit hoofdstuk 3 wist je al: als $\vec{a}$ de richting van $\vec{v}$ heeft, verandert alleen de grootte van $\vec{v}$ en is de beweging rechtlijnig.
- 2e) Na het roltrap-voorbeeld is daarbij gekomen: als $\vec{a}$ steeds loodrecht op $\vec{v}$ staat en bovendien een constante grootte heeft, ontstaat een cirkelbeweging, waarbij alleen de richting van $\vec{v}$ verandert (eenparige cirkelbeweging).

We keren nu nog even terug naar een willekeurige kromlijnige beweging zoals in fig. 4.14a, opnieuw getekend in fig. 4.18. Bij zo'n grillige kromlijnige beweging maakt $\vec{a}$ in ieder punt een willekeurige hoek met $\vec{v}$, waardoor $\vec{v}$ zowel van grootte als van richting blijkt te veranderen. Hierbij wijst $\vec{a}$ altijd naar de kant van de binnenbocht.

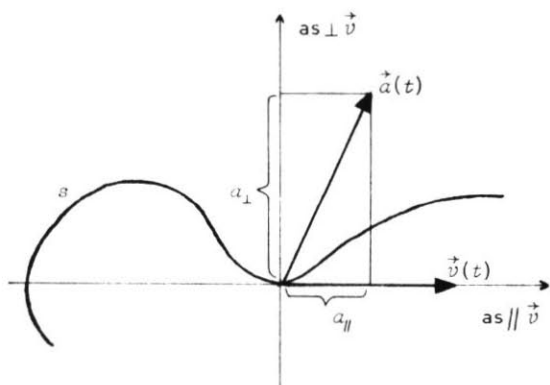


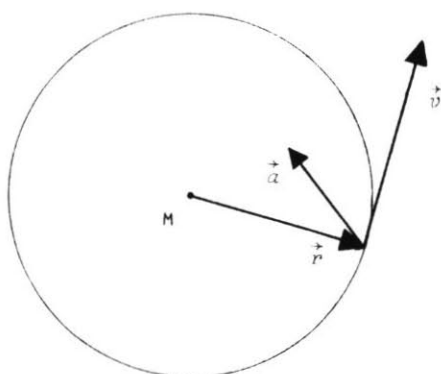
fig. 4.18 componenten van $\vec{a}$ langs en loodrecht op $\vec{v}$.

In fig. 4.18 zijn de componenten $a_{||}$ en $a_{\perp}$ van $\vec{a}$ in een coördinatenstelsel met assen langs, resp. loodrecht op $\vec{v}$ aangegeven (omdat $\vec{v}$ raakt aan de baan, raakt ook $a_{||}$ aan de baan en staat $a_{\perp}$ loodrecht op de baan). De component $a_{||}$ is verantwoordelijk voor de verandering van $|\vec{v}|$, de component $a_{\perp}$ voor de draaiing van $\vec{v}$ (vergelijk deze situatie met fig. 4.9; daar keken we naar twee componenten van $\vec{v}$ die ieder een verschillende werking hadden op $\vec{r}$, hier zien we twee componenten van $\vec{a}$ die elk hun eigen effect op $\vec{v}$ hebben).

De situaties 1e) en 2e) hierboven zijn bijzondere gevallen: zodra $a_{\perp}$ ontbreekt (nul is) is $|\vec{a}(t)| = a_{||}$; dan verandert alleen nog de grootte van $\vec{v}$ en wordt de beweging rechtlijnig.

Zodra $a_{||}$ ontbreekt, is $|\vec{a}(t)| = a_{\perp}$; dan verandert alleen nog de richting van $\vec{v}$ en wordt de kromme eenparig doorlopen. Is $\vec{a}(t)$ daarbij bovendien constant van grootte dan moet de kromme een cirkel zijn.

25



In fig. 4.19 stelt de cirkel het bovenaanzicht van een net gestarte centrifuge voor.
a) Verklaar de richting van de versnelling.
b) Zeg iets over de grootte van $a_{\perp}$.

fig. 4.19 centrifuge



- 26 a) Bepaal voor de parabool uit opdracht 14 de versnelling $\vec{a}(t)$ uit $\vec{v}(t)$ door differentiatie: $\vec{a}(t) = (\quad)$
Hoe is $\vec{a}(t)$ gericht?
b) Bepaal ook $a_{\perp}$ en $a_{||}$ in punt Q. Hoe verandert de snelheid in punt Q?
Idem voor punt B.

- 27 Beredeneer voor de punten A, B en C uit fig. 4.12 hoe de versnelling ten opzichte van de snelheid gericht is.

RICHTINGEN BESCHRIJVEN

28

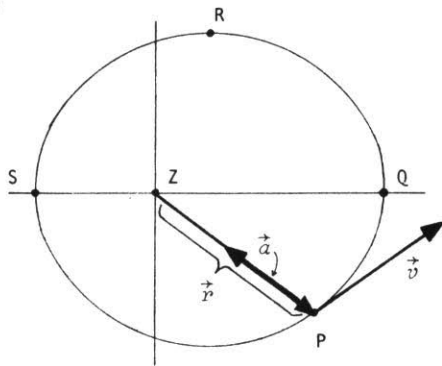


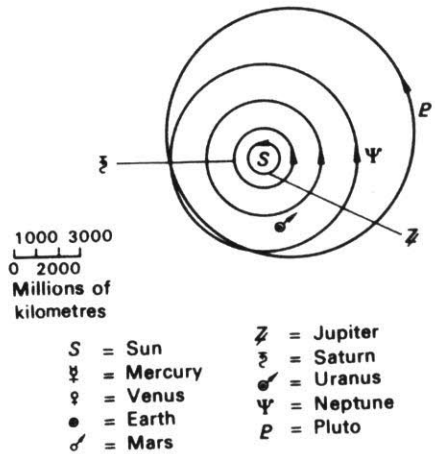
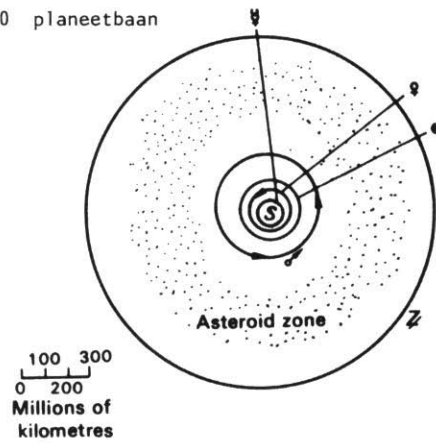
fig. 4.20 planeetbaan

In fig. 4.20 is de ellipsvormige baan van een planeet P om de zon Z getekend.

De kracht $\vec{F}_{\text{netto}}(t)$ op P, en dus de versnelling $\vec{a}(t)$, is steeds naar de zon (langs $\vec{r}$) gericht. Anders dan in fig. 4.17 verandert $|\vec{r}|$ echter voortdurend. Ook varieert de hoek tussen $\vec{v}$ en $\vec{r}$.

Geef aan wat er in de punten P, Q, R en S met $\vec{v}$ gebeurt.

Wat is de relatie tussen $\vec{F}_{\text{netto}}(t)$ en $\vec{a}(t)$?



A plan of the Solar System

29

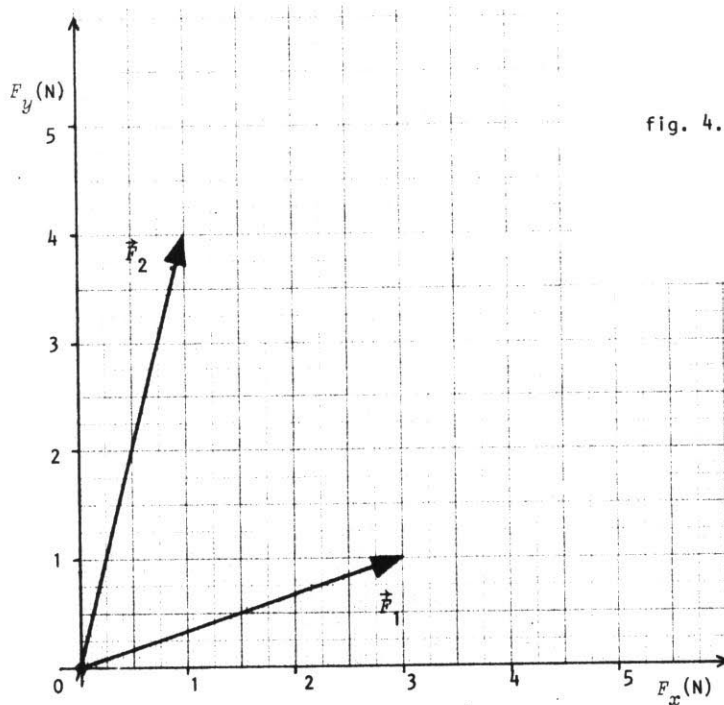


fig. 4.21 vektoroptelling van krachten

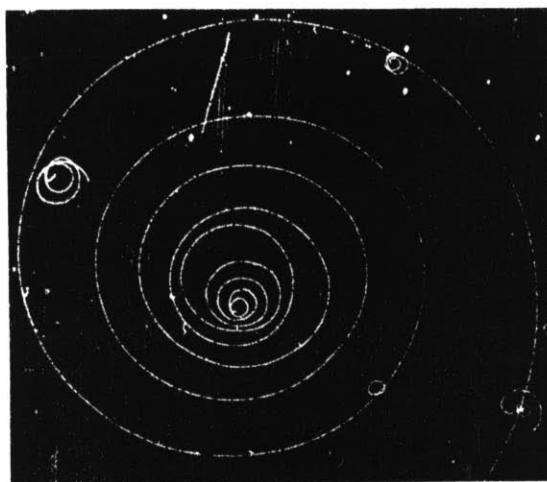
In fig. 4.21 zijn twee krachten $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ getekend, die tegelijkertijd in het punt 0 werkzaam zijn.

a) Bepaal de netto kracht die bij deze situatie hoort: $\vec{F}_{\text{netto}} = ()$

b) Teken $\vec{F}_{\text{netto}}$ in een kopie van fig. 4.21 en laat zien dat $\vec{F}_{\text{netto}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ een vektoroptelling voorstelt.

4.5 SAMENVATTING

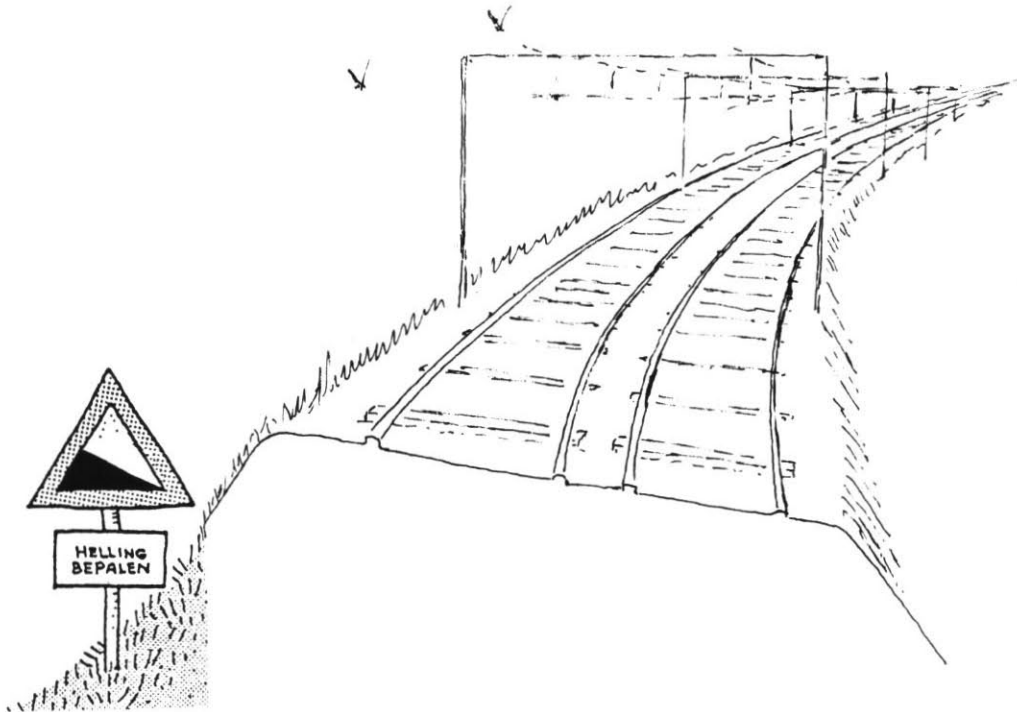
- . In dit hoofdstuk hebben we ons bezig gehouden met kromlijnige bewegingen in een plat vlak. Voor plaats, snelheid en versnelling hebben we gewerkt met de vectoren $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ en $\vec{a}(t)$ en hun componenten.
- . Een afgelegde weg is in het algemeen groter dan de hierbij horende verplaatsing.
- . Uitgaande van $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ vind je: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$
De vector $\vec{v}(t)$ raakt altijd aan de baan s .
De component evenwijdig aan $\vec{r}$ verandert de grootte, die loodrecht op $\vec{r}$ de richting van $\vec{r}$.
- . Uitgaande van $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ vind je: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$
De vector $\vec{a}(t)$ wijst naar de kant van de binnenbocht van de baan s .
De component evenwijdig aan $\vec{v}$ verandert de grootte, die loodrecht op $\vec{v}$ de richting van $\vec{v}$.
- . Bij een eenparige cirkelbeweging met snelheid $\vec{v}$ en straal $|\vec{r}|$ heeft $\vec{a}(t)$ de grootte $\frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{r}|}$ en is gericht naar het middelpunt.
- . Bij een constante vector $\vec{a}(t)$ krijg je een parabolische baan met de symmetrie-as gericht langs $\vec{a}(t)$. Voorbeeld: valbeweging waarbij wrijving wordt verwaarloosd.
- . Algemeen geldt: $\vec{F}_{\text{netto}}(t) = m \cdot \vec{a}(t)$, waarbij $\vec{F}_{\text{netto}}(t)$ de vektorsom is van de afzonderlijk werkende krachten.



RICHTINGEN BESCHRIJVEN

4.6 PROBLEMEN OM OP TE LOSSEN

Probleem 4.1 EEN BOCHT IN EEN SPOORBAAN



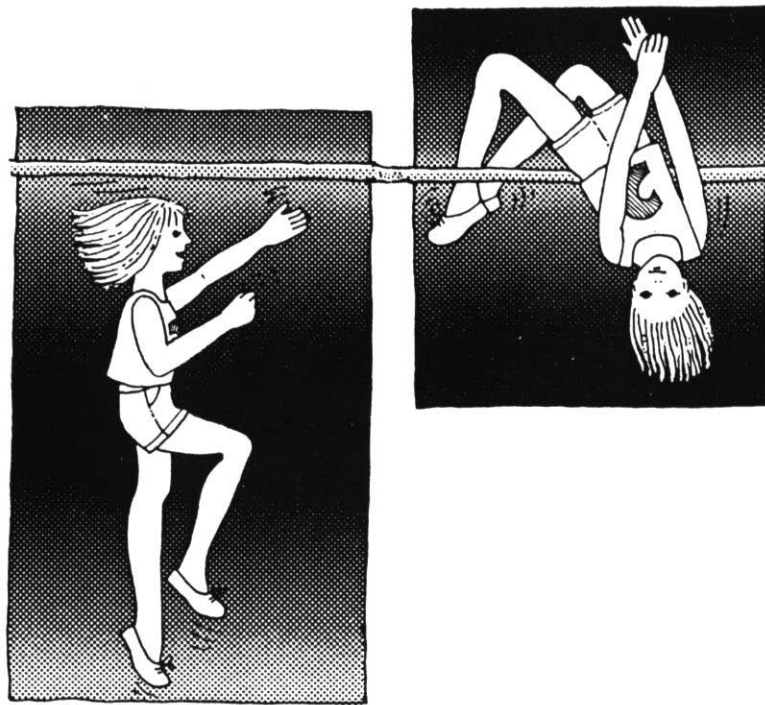
Als een trein met constante snelheid rechtdoor rijdt, wordt het gewicht van de trein gecompenseerd door een verticale kracht afkomstig van de rails.

Als de trein een bocht neemt, is er een zijwaartse kracht nodig om de snelheidsverandering te bewerkstelligen. Het is niet wenselijk dat deze kracht van de zijkanten van de rails afkomstig is. Bovendien moeten de passagiers zo weinig mogelijk van de bocht merken. Daarom worden de rails in een bocht schuin gelegd, zodat de totale door de rails uitgeoefende kracht daar loodrecht op blijft staan.

In een nieuw aan te leggen spoortraject is een bocht opgenomen met een straal van 1 km, waarvan men eist dat hij met een snelheid van 140 km/h genomen kan worden.

►► Bereken hoe schuin de rails in de bocht gelegd moeten worden.

Probleem 4.2 HOOGSPRINGEN



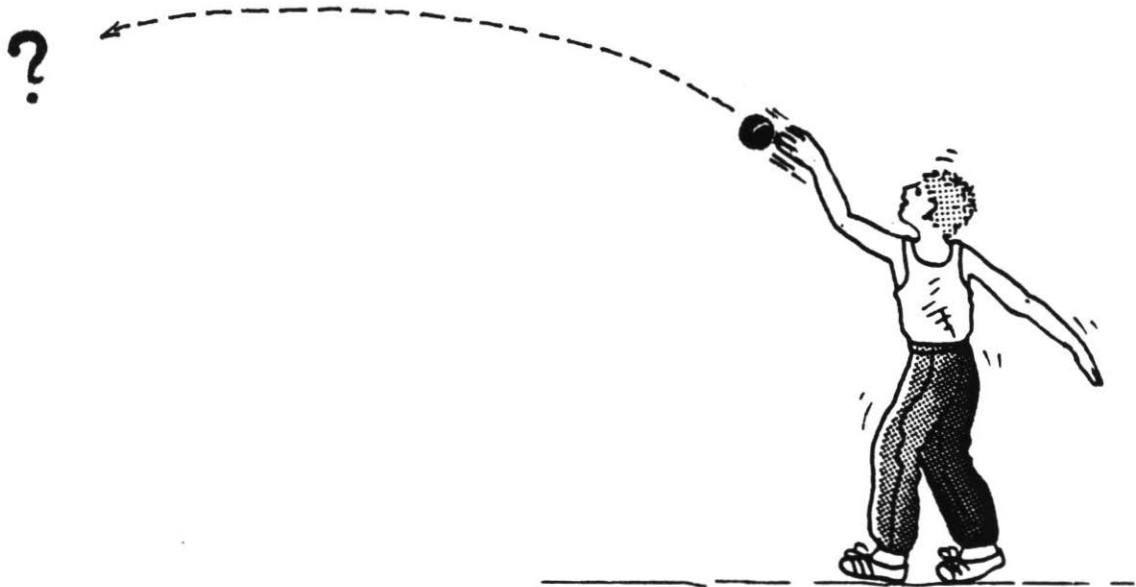
Als je gaat hoogspringen, neem je een aanloop om zo hoog mogelijk te komen. Bij het afzetten moet je je horizontale snelheid omzetten in een verticale snelheid. Dat bereik je onder meer door je met één been in een speciale stand af te zetten.

Maak voor dit probleem een schatting van je eigen massa. Neem verder aan dat je komt aanlopen met een snelheid van 5 m/s en dat je snelheid 6 m/s recht omhoog is op het moment dat je van de grond loskomt. Het afzetten duurt ongeveer $0,3 \text{ s}$.

- Bereken grootte en richting van de gemiddelde kracht die je been tijdens het afzetten moet uitoefenen.

RICHTINGEN BESCHRIJVEN

Probleem 4.3 KOGELSTOTEN

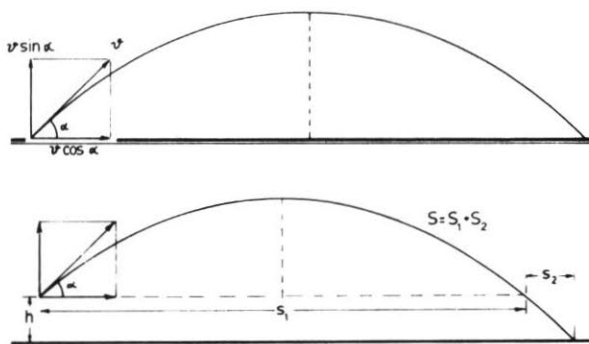


Harrie wil zijn rekord kogelstoten, dat op circa 12 m staat, verbeteren. Bovendien is hij goed in rekenen.

Hij neemt aan dat de grootte van de snelheid die hij de kogel kan meegeven niet afhangt van hoe steil hij de stoot uitvoert. Uitgaande van deze veronderstelling berekent hij hoe steil de stoot zou moeten zijn, waarbij hij er in eerste instantie geen rekening houdt dat de kogel ongeveer 1,5 m lager neerkomt dan hij hem weggooit.

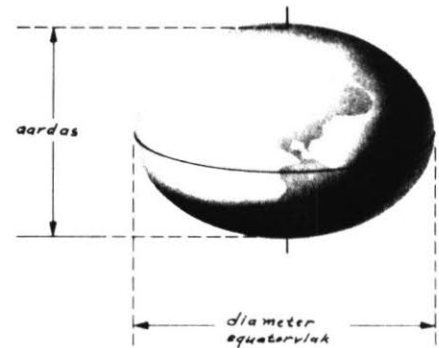
Daarna houdt hij wel rekening met dit hoogteverschil en maakt een veel ingewikkelder berekening waaruit blijkt dat zijn eerste antwoord enkele graden te steil uitgevallen is.

►► Hoe ziet zijn eerste berekening er uit, en kun je een globale verklaring geven van het resultaat van zijn tweede berekening?



Werpen vanaf de grond en vanaf een hoogte h

Probleem 4.4 WAAROM IS DE VALVERSNELLING NIET OVERAL OP AARDE EVEN GROOT ?



OVERDREVEN !

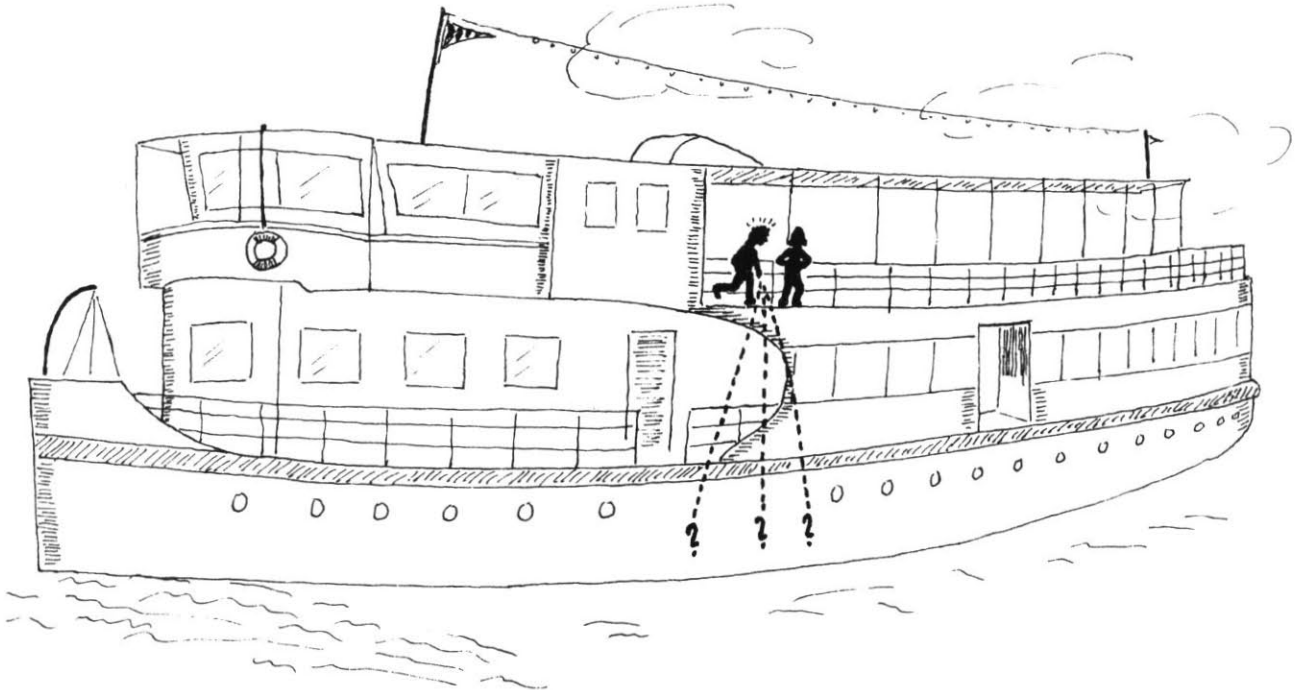
Uit metingen blijkt dat de valversnelling aan de evenaar ongeveer 0,5 % kleiner is dan op de noordpool. Circa 0,2 van deze 0,5 % is te verklaren uit de afplatting van de aarde: de evenaar is iets verder van het middelpunt van de aarde verwijderd dan de noordpool, zodat de aantrekking door de aarde aan de evenaar kleiner is.

Naast het verschijnsel van de afplatting is er het verschijnsel van de draaiing van de aarde, die de afplatting trouwens ook veroorzaakt.

- Laat door berekening zien dat door de draaiing van de aarde een verschil van ruim 0,3 % verwacht kan worden tussen de grootten van de valversnelling op de noordpool en aan de evenaar. Hoe hard zou de aarde moeten draaien om je er op de evenaar af te laten vliegen?

RICHTINGEN BESCHRIJVEN

Probleem 4.5 EEN ZONNEBRIL VALT IN HET WATER



Tanja en Marleen staan met windstil weer op het bovendek van een plezierboot. Tanja laat per ongeluk haar zonnebril vallen en ziet hem in het water verdwijnen.

Na vastgesteld te hebben dat het toch maar een goedkope bril was praten ze nog wat na over de gebeurtenis.

Tanja zegt: "Hij viel schuin naar achteren; dat zal wel komen door de luchtwrijving".

Marleen bedenkt: "Nee, hij viel eigenlijk schuin naar voren, want hij had de snelheid van de boot mee".

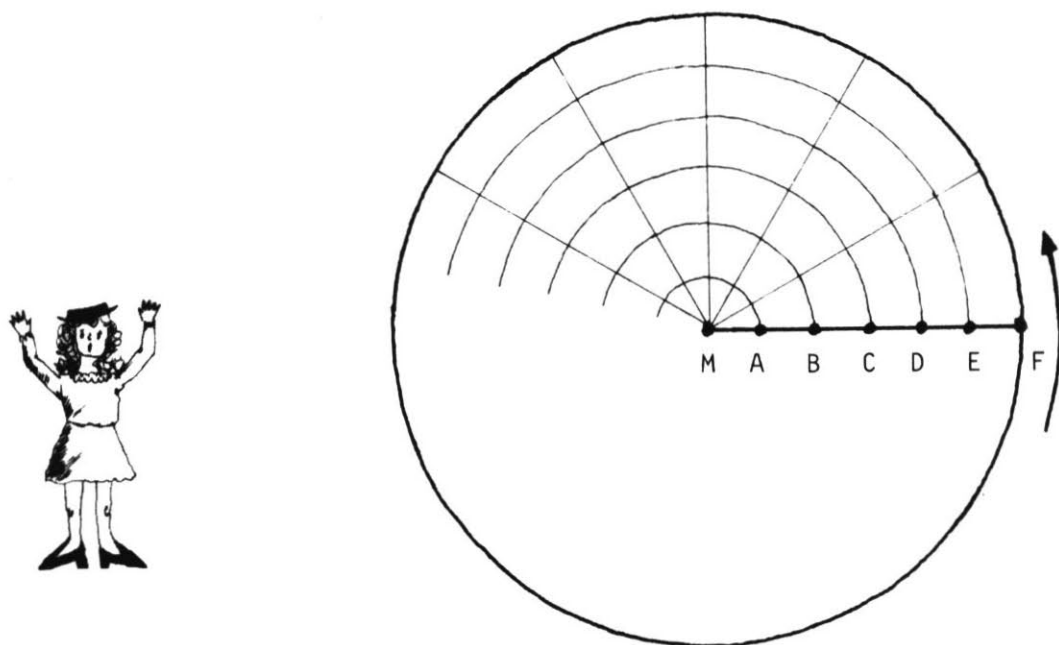
Tanja antwoordt: "Nee hoor, zonder luchtwrijving zou hij precies recht naar beneden gevallen zijn want ik heb hem zonder te gooien losgelaten".

Marleen zegt: "Dat kan nooit, want de snelheid van de boot staat loodrecht op de valversnelling en dus was het zonder luchtwrijving een halve parabool geworden".

►► Wie heeft gelijk, Tanja of Marleen, en wat zijn daarvoor de argumenten?



Probleem 4.6 DE CORIOLISVERSNELLING



De figuur stelt een momentopname voor van de vloer van een draaimolen, die in de aangegeven richting draait. Hij doet 12 s over één hele omwenteling. Op de draaiende schijf liggen de punten M t/m F langs een straal steeds 1 m uit elkaar.

Marijke loopt langs deze straal van M naar F met een snelheid van 1 m/s; zij begint te lopen op het moment dat door de figuur wordt voorgesteld. Doordat de schijf draait legt zij in werkelijkheid een spiraalvormige baan af. In elk punt van deze baan heeft zij daarbij een versnelling die in grootte en richting verschilt van de centripetale versnelling die ze zou hebben als ze in dat punt stil zou staan op de draaiende schijf. Het verschil tussen deze twee versnellingen wordt wel de Coriolisversnelling genoemd. Met een ingewikkelde berekening kun je laten zien dat de Coriolisversnelling loodrecht moet staan op de centripetale versnelling.

- Maak in een kopie van de figuur een schets van de werkelijke baan die Marijke aflegt. Bedenk een manier om richting en grootte van Marijke's versnelling te schatten op het moment dat zij zich in punt E van de draaiende schijf bevindt. Bepaal ook de centripetale versnelling van het draaiende punt E en schat daarna richting en grootte van Marijke's Coriolisversnelling.

HOOFDSTUK 2

- 2 $\bar{v}$ zou kleiner uitvallen.
- 4 het stuk tussen $t = -1$ s en $+1$ s
- 6 $x_1(240) = 4800$ m $x_2(0) = -3600$ m
 $x_1(360) = 7200$ m $x_2(360) = 7200$ m
- 12a) $t = 360$ s
b) $x = 4000$ m
- 13 $v_3 = -25$ m/s; $x_3(0) = 9000$ m
- 15b) $x = 140$; $x = 7,5 \cdot t - 200$
- 16 als $x(0) = 0$ in Den Haag HS: $x(t) = 23 \cdot t$
aankomst Dordrecht 9.21, Eindhoven 10.24
- 17 als $x(0) = 0$ in Helmond: $x(t) = 28,3 \cdot t$
Deurne 10.42, Horst-Sevenum 10.53, Blerick 10.59
- 18 34 m/s
- 19 18 m/s; 40 m/s
- 21 $v(40) = 12$ m/s; $v(0) = 0$ m/s; $v(320) = 44$ m/s
- 24 39 km
- 26a) $x(120) - x(0) = 2150$ m
b) $x(200) - x(120) = 2700$ m
- 27a) $x_1 = 17 \cdot t$; $x_2 = 22 \cdot t + 19$; $x_3 = -14 \cdot t + 37$
b) $t = -3,8$ s
c) $x = 20$ m; $x = 30$ m
- 28b) $v_1(t) = 0$; $v_2(t) = t$; $v_3(t) = 20$
e) $x(100) - x(0) = 1800$ m
- 29a) 180 m
b) 15 m/s

ANTWOORDEN BIJ DE OPDRACHTEN

HOOFDSTUK 3

- 1 m/s^2
- 2 $2,5 \text{ m/s}^2$; 1 m/s^2 ; $1,75 \text{ m/s}^2$
- 7a) negatief
- b) positief
- c) negatief
- 8 20 m/s ; $0,25 \text{ m/s}^2$
- 10 horizontale raaklijn in Q
- 11 $x(140) - x(0) = 2800 \text{ m}$
- 12 $v(140) - v(0) = 35 \text{ m/s}$; $v(225) - v(140) = -4 \text{ m/s}$
- 13 $v(t) = a \cdot t + v(0)$
- 15 zie 13
- 16a) 1950 N
- b) 3700 N
- 17a) $F_{\text{netto}} = 0$
- b) F_{netto} is constant
- 18a) 0 m/s ; $0,31 \text{ m/s}^2$
- b) $x(t) = \frac{1}{2}(0,31)t^2$
- 19a) 990 m
- 20a) 0 m/s ; $1,8 \text{ m/s}$; 0 m/s ; $-1,8 \text{ m/s}$
- b) $2,1 \text{ m/s}^2$
- d) $-3,2 \text{ m/s}^2$
- e) M
- f) $2,0 \text{ m}$

HOOFDSTUK 4

- 1 6,5 m; 157°
- 2 $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
- 5b) $s_H = 8,5 \text{ m}; s_J = 21,5 \text{ m}$
- c) 4,5 m omhoog
- 6 $\begin{pmatrix} -8 \\ 1,5 \end{pmatrix}$
- 7 $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4,5 \end{pmatrix}$
- 8 $\begin{pmatrix} -4 \\ 4,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4,5 \end{pmatrix}$
- 9 13 s; 24 s
- 10a) 0,65 m/s; 0,90 m/s
- b) 0,35 m/s; 0,19 m/s
- 11a) $\begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix}$
- 12a) 6,0 m
- b) 6 m/s; $\begin{pmatrix} 4 \\ -4,5 \end{pmatrix}$
- 13a) 3,9 m
- b) 5,2 m/s; $\begin{pmatrix} 4 \\ -3,3 \end{pmatrix}$
- 14a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3,4 \end{pmatrix}$
- b) $v(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -9t \end{pmatrix}; v(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4,5 \end{pmatrix}; v(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
- 15 rechte lijn; cirkel
- 17 A 2,7 m/s, $\alpha = -90^\circ$; B 3,1 m/s, $\alpha = -60^\circ$
- 18 A 130 km/h, -35° ; B 100 km/h, 35° ; C 35 km/h, -70°
- 19a) 0,48 m/s
- b) $\begin{pmatrix} -0,15 \\ 0,45 \end{pmatrix}$
- 20b) 2 s
- 21a) $0,24 \text{ m/s}^2$
- b) 108°
- 22a) $0,24 \text{ m/s}^2$ (2,5% van g)
- 24 $6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$; $3,6 \cdot 10^{22} \text{ N}$
- 26a) $\begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix}$; omlaag
- b) Q $6,0 \text{ m/s}^2$, $6,7 \text{ m/s}^2$; B 9 m/s^2 , 0 m/s^2
- 29a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

HINTS BIJ DE PROBLEMEN

HOOFDSTUK 2

Probleem 2.1 HET JACHTLUIPAARD EN DE KUDDE ANTILOPEN

Zodra het jachtluipaard terrein gaat verliezen is de achtervolging mislukt. Op dat tijdstip moet het verschil in afgelegde afstand dus minder zijn dan de voorsprong.

Probleem 2.2 FIETSEN OVER DE HEUVELS

In een punt zoals B (dat even hoog ligt als A) moeten de klimmend afgelegde afstanden samen gelijk zijn aan de dalend afgelegde. Geef dit in het diagram aan met twee gelijke oppervlakken.

Probleem 2.3 WELKE LIFT ?

Bepaal het aantal mogelijke liftverplaatsingen en deel ze in naar afgelegde afstand. Bepaal van beide liften welke afstand ze minstens moeten afleggen om op topsnelheid te komen.

Probleem 2.4 OP EEN CIRCUIT

Bepaal de relatieve snelheid van de snelle coureur t.o.v. de langzame.

Probleem 2.5 EEN INHAALMANOEUVRE

Bereken wanneer en waar auto A een voorsprong van bv. 20 m op auto B heeft gekregen.

Probleem 2.6 TWEE RITJES VAN TRAMLIJN 3

Bereken beide afstanden die de wild rijdende tram tijdens de weergegeven 50 s aflegt.

HOOFDSTUK 3

Probleem 3.1 DE SPRINTER CARL LEWIS

Bepaal de constante snelheid in de middengedeelten uit het verschil tussen de gegeven tijden.

Probleem 3.2 NOODSTOP VAN EEN TRAM

Bepaal de remweg zonder slip door de grootste waarde voor de vertraging af te lezen.

Probleem 3.3 EEN COMFORTABEL VERSNELDE LIFT

Schets zo goed mogelijk een grafiek van de versnelling van de lift.

Bepaal ook de door de lift afgelegde afstand tijdens het versnellen.

Probleem 3.4 EEN MAANLANDING

Maak een grafiek van het snelheidsverloop van de Lunar Module in de laatste 23 seconden van zijn landing.

Probleem 3.5 TRAMPOLINESPRINGEN

Wijs in fig. 3 aan op welk tijdstip de trampolinespringer loskomt van het vel. Bepaal de afstanden door het zwaartepunt van de springer afgelegd vóór en na dit tijdstip. Doe hetzelfde met fig. 4.

Probleem 3.6 DE REMWEG VAN EEN AUTO

Maak een grafiek van het minst gunstige snelheidsverloop van de auto na het waarnemen van het gevaar.

HINTS BIJ DE PROBLEMEN

HOOFDSTUK 4

Probleem 4.1 EEN BOCHT IN EEN SPOORBAAN

Het vektorverschil tussen de vereiste centripetale versnelling en de valversnelling is de versnelling die moet worden geleverd door de kracht afkomstig van de rails.

Probleem 4.2 HOOGSPRINGEN

Het vektorverschil tussen je verticale snelheid en je (eerdere) horizontale snelheid bepaalt de richting van de gemiddelde versnelling.

Probleem 4.3 KOGELSTOTEN

Neem waar de kogel los raakt de oorsprong. Bepaal de plaatsfunctie (vektorfunctie)

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ bij gegeven beginsnelheid $\vec{v} = \begin{pmatrix} v \cos \alpha \\ v \sin \alpha \end{pmatrix}$

en zoek het tijdstip $t_1 \neq 0$ zodat $y(t_1) = 0$.
Voor welke waarde(n) van α is de afstand $x(t_1)$ maximaal?

Probleem 4.4 WAAROM IS DE VALVERSNELLING NIET OVERAL OP AARDE EVEN GROOT ?

Aan de evenaar wordt een klein deel van de valversnelling 'gebruikt' voor het leveren van de centripetale versnelling, nodig om de draaiing van de aarde te kunnen meemaken. De snelheid van een punt op de evenaar ten gevolge van deze draaiing kun je uitrekenen.

Probleem 4.5 EEN ZONNEBRIL VALT IN HET WATER

Kies een coördinatenstelsel om de beweging van de bril te beschrijven. Beweegt de oorsprong ten opzichte van de boot of niet?

Probleem 4.6 DE CORIOLISVERSNELLING

Teken de punten D, E en F op de plaatsen waar Marijke er komt. Bedenk dat de verplaatsingen DE en EF qua grootte evenredig zijn met de bijbehorende gemiddelde snelheden, en dat zij dezelfde richtingen hebben. Neem het vektorverschil van deze snelheden als maat voor grootte en richting van de versnelling in E.