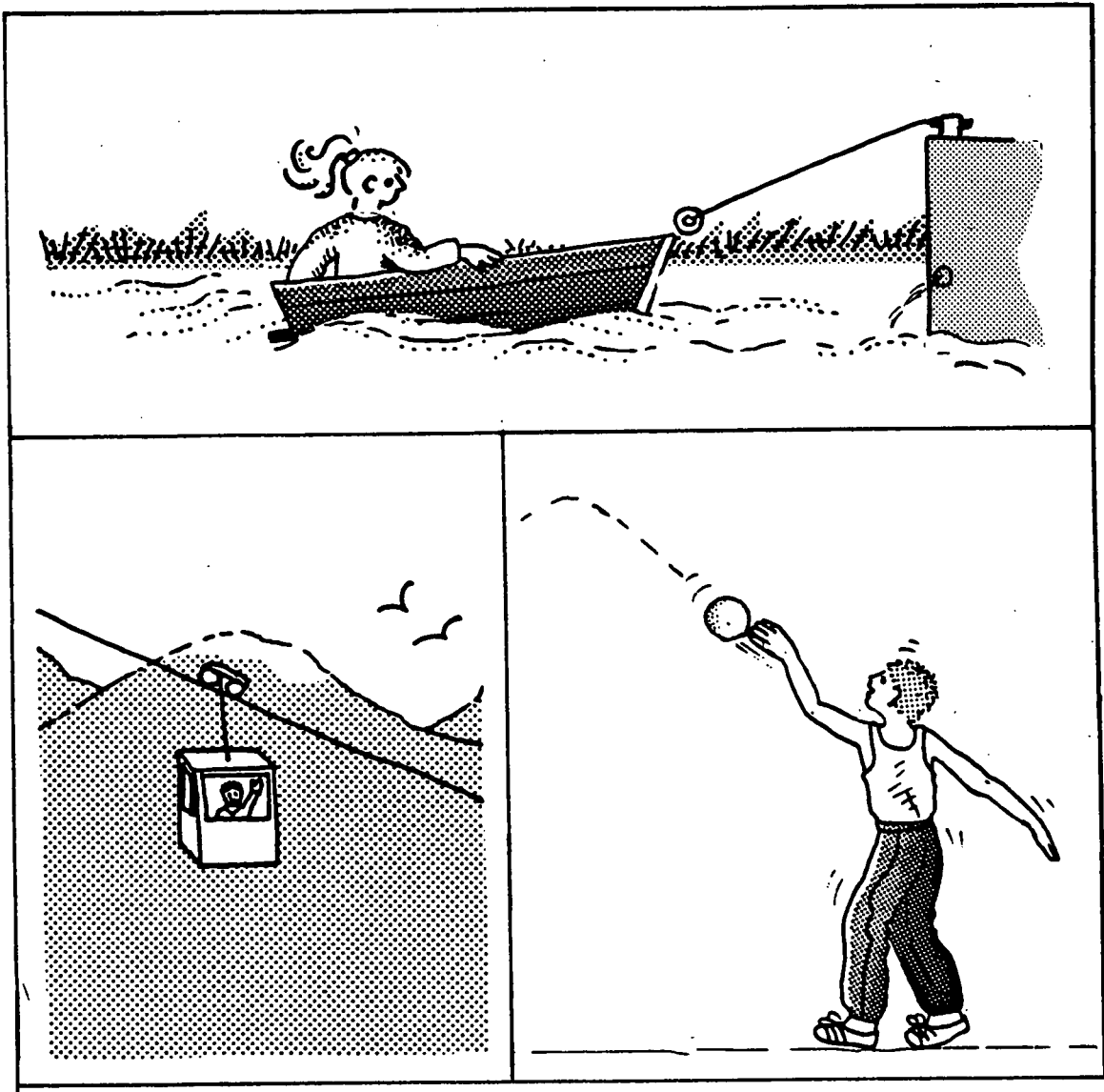


blok

ARBEID EN ENERGIE



VWO-BOVENBOUW NATUURKUNDE PROJECT

Het VWO-bovenbouw natuurkunde project streeft een inhoudelijke en didactische vernieuwing van het natuurkunde onderwijs in de bovenbouw VWO na. Daartoe zijn thema's en blokken geschreven. In een thema staat een vraag uit de dagelijkse omgeving, de techniek, de samenleving of een wetenschapsgebied centraal en worden natuurkunde inhouden vanuit die vraagstelling gekozen. In een blok staan enkele kernbegrippen uit de natuurkunde in de systematische samenhang van het vak centraal. Aan de hand van reële probleemstellingen worden de begrippen (verder) opgebouwd en uitgediept en wordt aandacht besteed aan het oplossen van problemen met behulp van de betreffende begrippen.

Overzicht van geschreven materiaal

a. *Materiaal voor experimentele keuzegroepen VWO*

1. Muziek (havo/vwo thema + aanvullend VWO-hoofdstuk)
(experimenteel keuzeonderwerp De natuurkunde van Muziek)
2. Automatisering
(experimenteel keuzeonderwerp Microelektronica)
3. Rond 1900
(experimenteel keuzeonderwerp Golf-deeltjesdiscussies rond 1900)
4. Ioniserende Straling (havo/vwo thema + vwo hoofdstuk 'Stralingsfysica in het ziekenhuis')
(experimenteel keuzeonderwerp Ioniserende Straling in de Gezondheidszorg)

b. *Materiaal dat (grotendeels) binnen de reguliere VWO-leerstof valt:*

1. Verkeer (havo/vwo thema, 4e klas)
2. Bewegingen (blok, 4e klas)
3. Energie (thema, 4e/5e klas)
4. Sport (thema, 4e/5e klas)
5. Arbeid en energie (blok, 5e klas)
6. Elektromotoren (thema, 5e klas)
7. Deeltjes in velden (blok, 5e/6e klas)

c. *Materiaal dat (grotendeels) buiten de reguliere VWO-leerstof valt:*

1. Lijfwerk (thema, 4e klas)
2. Het Weer (thema, 4e klas)
3. Satellieten (thema, 6e klas, verschijnt begin '86)

Experimenteel natuurkunde blok voor de 5e klas VWO. Samengesteld door medewerkers van het VWO-bovenbouwproject en projektleraren.

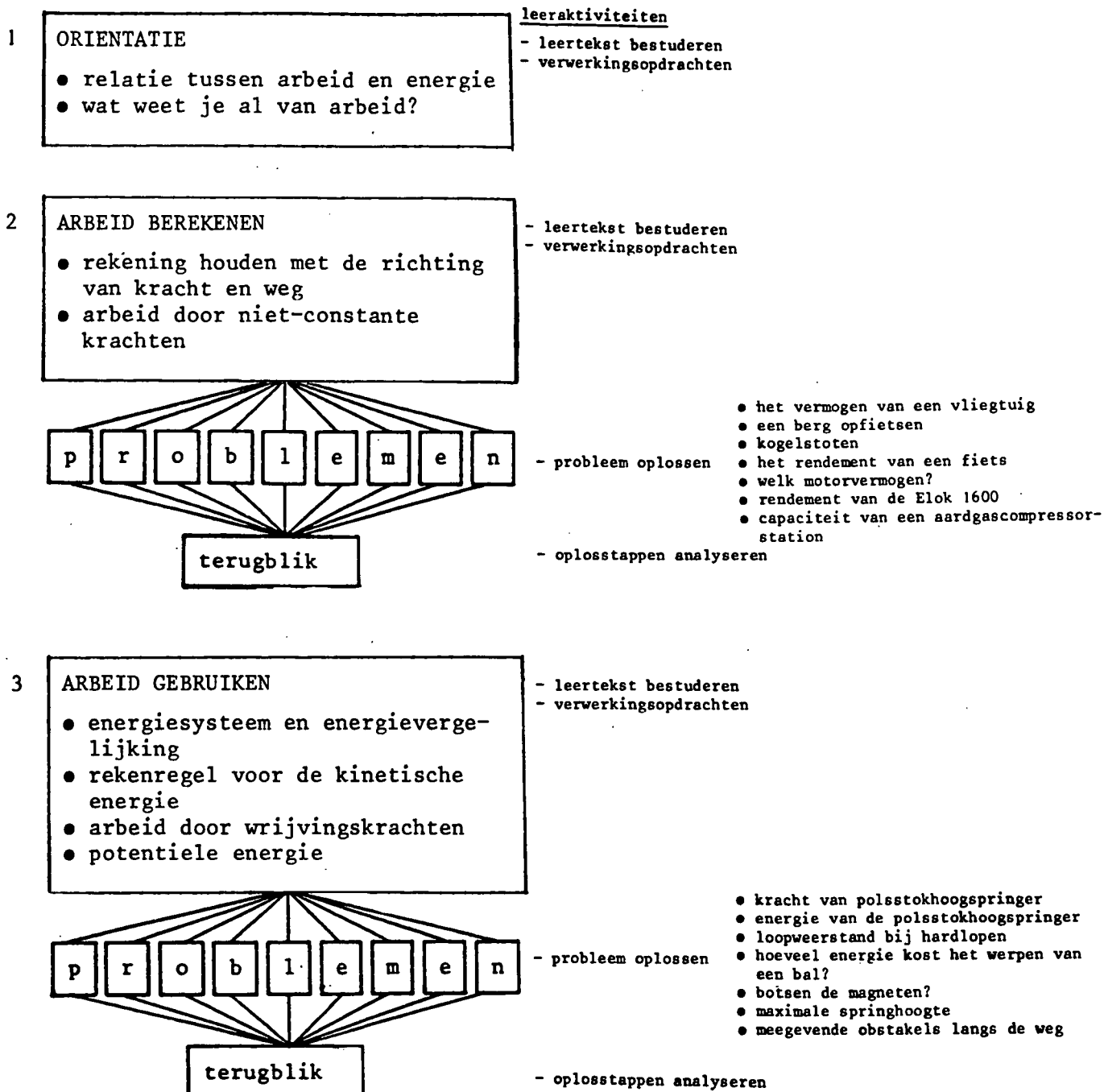
© 1985 Rijksuniversiteit Utrecht, Universiteit van Amsterdam,
Rijksuniversiteit Groningen.

PLON, Lab. voor Vaste Stof, Postbus 80.008, 3508 TA Utrecht,
Didaktiek Natuurkunde UvA, Nieuwe Achtergracht 170, 1018 WV Amsterdam,
Didaktiek Natuurkunde RUG, Landleven 12, 9747 AD Groningen.

Inhoud

Hoofdstuk 1 Orientatie	5
Hoofdstuk 2 Arbeid berekenen	17
Hoofdstuk 3 Arbeid gebruiken	41

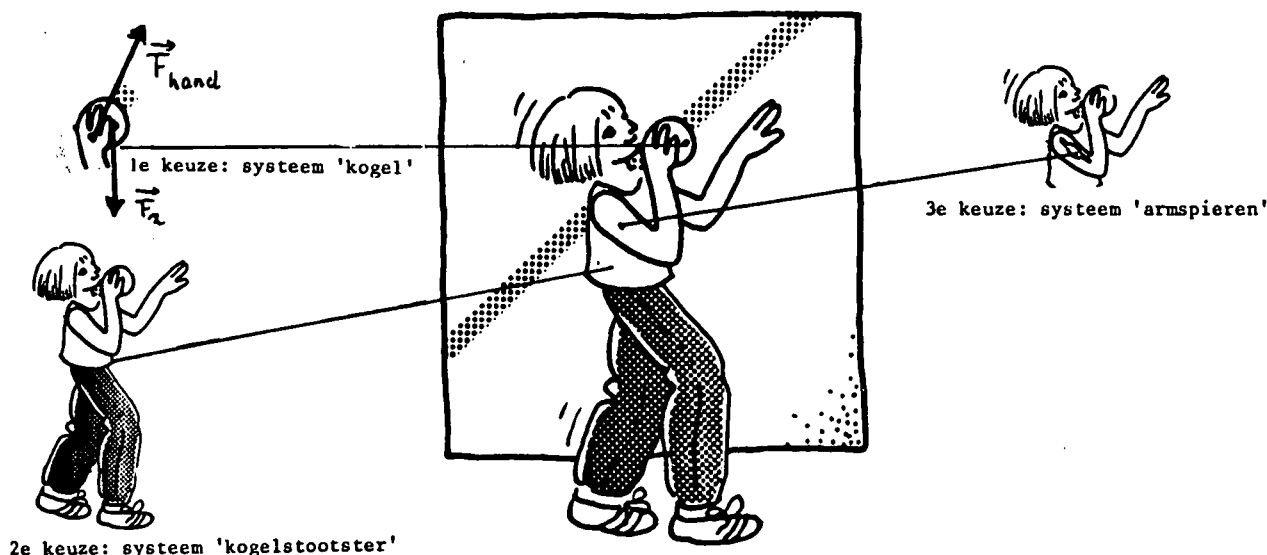
voornitblik



1.ORIENTATIE

Inhoud:

1.1 Het begrip systeem	6
1.2 Energiesoorten en energieverdracht	7
1.3 Wat is arbeid?	10
1.4 De energievergelijking van een systeem	13
1.5 Een formule voor arbeid	13
1.6 Samenvatting	15



vooruitblik

Arbeid is een woord dat zowel in het dagelijks leven als in de natuurkunde veel gebruikt wordt. In het dagelijks leven heeft *arbeid verrichten* altijd wel iets te maken met 'je inspannen', 'moeite doen', energie leveren. De betekenis die arbeid verrichten in de natuurkunde heeft ligt meestal wel dicht daarbij in de buurt, maar is toch net wat anders. In dit hoofdstuk wordt duidelijk gemaakt wat energie en arbeid met elkaar te maken hebben. Daarbij zullen de begrippen systeem, uitwendige krachten op een systeem en de energievergelijking van een systeem geïntroduceerd worden, wat de kernbegrippen van dit blok zijn. Verder herhaalt dit hoofdstuk kort wat je al moet weten over het uitrekenen van arbeid. Daarbij wordt er zorgvuldig opgelet alles 'natuurkundig' te zeggen en het 'alledaags' gebruik van het woord arbeid te vermijden.

ORIENTATIE

1.1 HET BEGRIP SYSTEEM

Arbeid zegt iets over de overdracht van energie van een voorwerp naar een ander voorwerp of van het ene onderdeel naar het andere onderdeel van een machine. Daarom is het nodig dat je goed omschrijft op welk voorwerp of onderdeel ervan je de arbeid gaat bepalen. In dit blok zullen we dat noemen: je moet je *systeem* goed omschrijven. Dat begrip systeem is een kernbegrip van dit blok. In de loop van de volgende paragrafen zal steeds duidelijker worden hoe je een zo handig mogelijk systeem kiest en welke voordelen je dat oplevert.

Om je alvast enig idee te geven wordt hier één voorbeeld een beetje uitgewerkt: die van een fietser.

- je kunt gaan kijken hoeveel energie uit het *systeem* 'fietser + fiets' (fig. 1.1) afgevoerd wordt door arbeid van de luchtwrijving en de rolwrijving.
- Je kunt gaan kijken hoe de energie van de fietser door de trapkracht aan de fiets wordt overgedragen. Je neemt als systeem 'de fietser' (fig. 1.2).
- Je kunt ook gaan kijken hoeveel energie de fiets van de fietser ontvangt en hoe de fiets die kwijtraakt door allerlei wrijvingskrachten: het systeem 'fiets' (fig. 1.3).

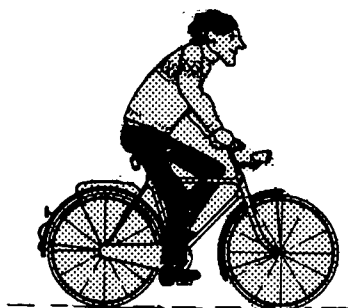


fig. 1.1 systeem 'fietser + fiets'



fig. 1.2 systeem 'fietser'



fig. 1.3 systeem 'fiets'

Het verschil tussen de drie genoemde systeemkeuzen zit 'm in zowel de *energieën* als de *krachten* die je gaat bekijken. In het systeem 'fietser' moet je rekening houden met de chemische energie die de fietser in zijn spieren bezit. In het systeem 'fiets' hoeft dat niet: in dat systeem speelt chemische energie geen rol.

Binnen een systeem werken allerlei krachten, bijv. de krachten in de spieren, de krachten in de fietsketting enz. Een systeem kies je echter zó dat de krachten waarin je geïnteresseerd bent (bijv. omdat ze arbeid verrichten) *uitwendige krachten op* het systeem zijn. Ben je dus geïnteresseerd in de luchtwrijving die bij fietsen een rol speelt, dan moet je het systeem 'fietser + fiets' kiezen. Wil je echter iets weten over de arbeid die op de trappers wordt verricht, dan moet je als systeem de 'fiets' nemen, of zelfs alleen de trappers. Want in dit blok wordt alleen de arbeid van van *externe* (of uitwendige) krachten *op* een systeem bekeken. Het gevolg is dat, als je de wrijvingskrachten op de fietsketting wilt bekijken, je de fietsketting als (sub-)systeem moet kiezen.

ORIENTATIE

1 WELK SYSTEEM?

Welke systeemkeuze(n) kun je maken bij de volgende probleemstellingen?

- a. hoe raakt een auto bij remmen zijn energie kwijt?
- b. wat is de invloed van een aerodynamisch pak op de prestaties van een wielrenner?
- c. hoe groot is het rendement van een hijskraan?



fig. 1.4 Francesco Moser tijdens zijn aanval op het werelduurrecord in 1984. Let op zijn aerodynamisch gestroomlijnde helm.

1.2 ENERGIESOORTEN EN ENERGIEOVERDRACHT

De energie die in de samenleving gebruikt wordt voor verwarming, om machines te laten draaien, voor communicatie e.d. worden voornamelijk betrokken uit de *energiedragers* aardgas, steenkool, olie en uranium. Die zijn afkomstig uit *energiebronnen* zoals het aardgasveld in Slochteren, olievelden in het Midden Oosten en kolenmijnen in Polen en uraniummijnen in Australië. De energie zit in die energiedragers opgeslagen als chemische energie of kernenergie.

Slechts een klein deel van de energievoorziening is gebaseerd op energiestromen die (helaas) met een wisselend *vermogen* naar ons toekomen. Bijvoorbeeld de straling van de zon, de stroming van lucht (wind) of de energie uit de golven op zee. Het voordeel van dergelijke energiestromen is dat ze niet kunnen opraken.

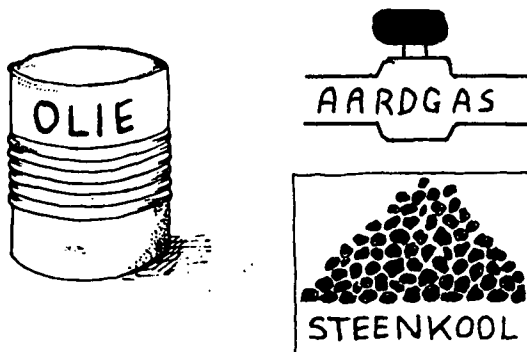


fig. 1.5 energiedragers

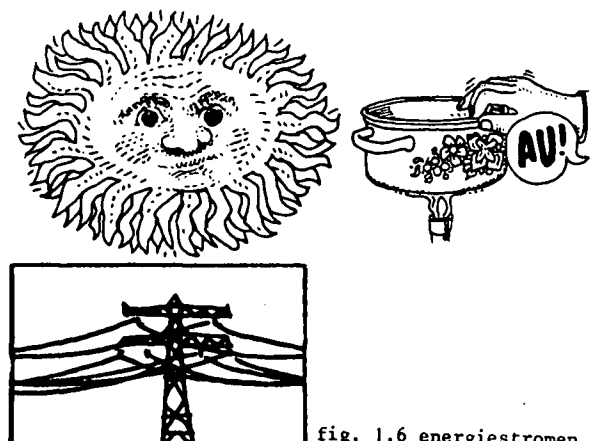


fig. 1.6 energiestromen

ORIENTATIE

systeemenergieën

Een systeem (een rijdende auto, een fietser, een machine), dat je voor een bepaald probleem kiest, bevat een zekere hoeveelheid energie. Die kan opgeslagen liggen in een energiedrager zoals olie of uranium. Het systeem bevat dan chemische energie of kernenergie. Een systeem kan nog meer soorten energie bevatten. De belangrijkste zijn:

- kinetische energie door de beweging van het systeem;
 - zwaarteenergie door de plaats in het zwaartekrachtsveld;
 - veerenergie ten gevolge van vervorming van het systeem;
 - elektrostatische energie ten gevolge van de plaats van het (elektrisch geladen) systeem in een elektrisch veld;
 - thermische energie (ook wel inwendige energie of moleculaire energie genoemd): de kinetische energie ten gevolge van de beweging van de molekulen en de van-der-waalsenergie ten gevolge van de plaats van de atomen ten opzichte van elkaar (bijv. in een kristalrooster dicht bij elkaar of in een gas ver van elkaar). De thermische energie hangt dus af van de *temperatuur* van de stof en de *fase* waarin het zich bevindt.
- Al deze energiesoorten worden samengevat in de term *systeemenergieën*. Ze hebben als gemeenschappelijk kenmerk dat ze in een systeem opgeslagen kunnen liggen.

2 WELKE SYSTEEMENERGIEËN?

Welke zijn de systeemenergieën van de volgende systemen:

- rijdende auto op een berg;
- kerncentrale;
- kern met elektronen er omheen;
- wekker op een nachtkastje;
- stoom in een stoommachine.

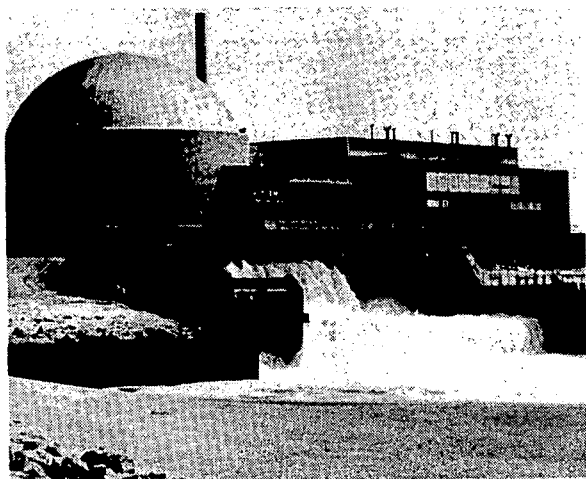


fig. 1.7 De kerncentrale te Borssele

energiestromen

De totale energie die een systeem bevat kan toenemen of afnemen omdat er energieoverdracht plaatsvindt tussen het systeem en zijn omgeving: er kan warmte of straling uitgewisseld worden, er kunnen golven (geluid, watergolven) uitgezonden worden of de energieoverdracht kan plaatsvinden via elektrische (gelijk- of wissel-)stromen.

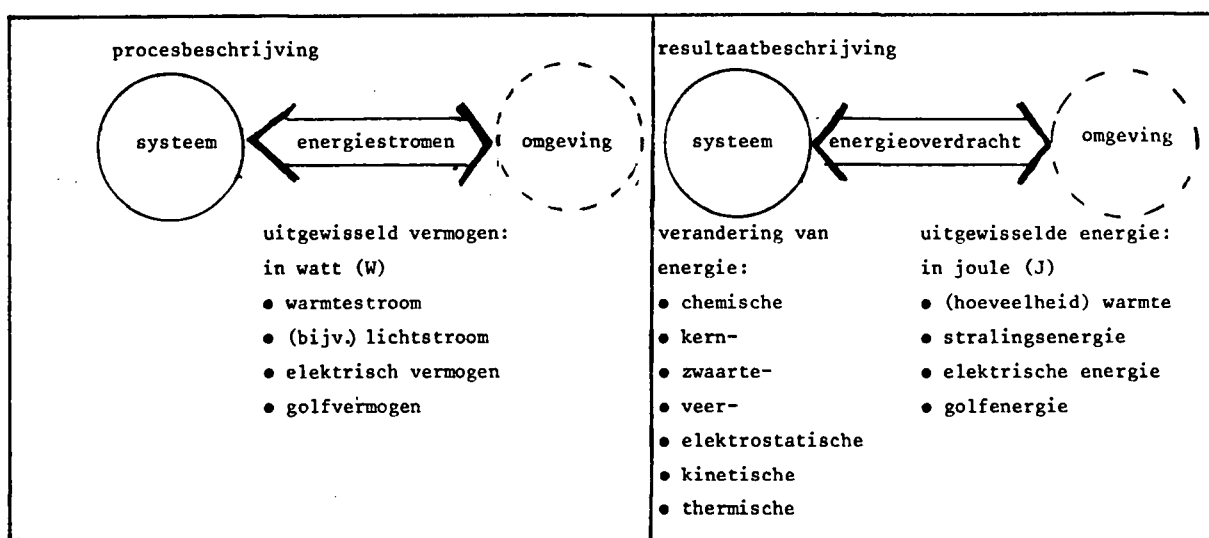
Je kunt die uitwisseling beschrijven als een stroom, een proces dat in de tijd plaatsvindt. Daarbij hoort de grootheid vermogen, uitgedrukt in watt (W). Je kunt dan spreken over een warmtestroom, een lichtstroom, een

ORIENTATIE

elektrische energie-stroom of elektrisch vermogen, een golf- of geluids-vermogen.

Je kunt ook kijken naar het resultaat: de *energie* die in een bepaalde tijd uitgewisseld is in joule (J). Dan kun je spreken over de uitgewisselde *warmte*, stralingsenergie, elektrische energie of golfenergie.

Deze twee manieren van kijken naar de uitwisseling van energie van een systeem met de omgeving kun je als volgt in schema zetten:



3 WELK ENERGIEUITWISSELINGSPROCES?

Ga na op welke wijze energie in de volgende systemen ligt opgeslagen en via welk proces dat voornamelijk met de omgeving uitgewisseld wordt:

- transistor radio
- zon
- zonnecollector

arbeid en mechanische energie

Er is nog een proces waarmee een systeem energie met zijn omgeving kan uitwisselen: arbeid. Bij dat energieuitwisselingsproces spelen krachten van de omgeving op het systeem een belangrijke rol. Als zulke *krachten verplaatst* worden, wordt de *hoeveelheid energie* van het systeem veranderd. Eén van de betrokken energiesoorten moet dan een *mechanische* energiesoort zijn. Dat is een energiesoort die met plaats of beweging te maken heeft. Er moet immers bij arbeid sprake zijn van een *verplaatsing*.

Een voorbeeld van een mechanische energiesoort is veerenergie. Aan een veer die (verder) wordt uitgerekt of ingedrukt (verandering van plaats dus) wordt veerenergie toegevoegd. Ook kinetische energie en zwaarteenergie zijn mechanische energiesoorten. Op makroskopische schaal geldt thermische energie als een niet- mechanische energie. Op moleculair niveau (dus als je een molecuul als systeem kiest) is er wel degelijk sprake van beweging en van energie ten gevolge van de plaats van het ene molecuul bij het andere. Evenzo kun je in bepaalde systemen chemische en kernenergie ook beschrijven in termen van plaats in een krachtenveld.

ORIENTATIE

Meestal worden met de term mechanische energie kinetische, veer- en zwaarteenergie aangeduid. In speciale (submicroscopische) systemen kunnen dus ook andere energiesoorten daaronder vallen.

4 NOGMAALS: WELK ENERGIEUITWISSELINGSPROCES?

Doe opdracht 3 ook voor de volgende systemen:

- a. automobilist bij een botsing;
- b. constant fietsende fietser;
- c. versnellende lift.

1.3 WAT IS ARBEID?

Het begrip arbeid neemt een belangrijke plaats in de natuurkunde in omdat je daarmee mechanische processen kunt beschrijven in termen van energieomzettingen. Arbeid vormt de brug tussen de mechanica en de energieleer. Je weet natuurlijk al ongeveer hoe je met arbeid rekent in eenvoudige gevallen. In dit blok ga je leren wat arbeid, of wat beter gezegd, wat je er mee kunt doen en hoe je de arbeid in ingewikkelde gevallen kunt uitrekenen.

De vraag "wat is arbeid" wordt in deze paragraaf niet beantwoord. Wellicht mag je blij zijn als je daarop aan het eind van dit blok een enigszins bevredigend antwoord kunt geven. Maar er wordt wel een begin gemaakt met de beantwoording door een antwoord te geven op de vragen:

- wie of wat kan arbeid verrichten?
- waarop kan arbeid verricht worden?

wie of wat kan arbeid verrichten?

In het dagelijks spraakgebruik is het duidelijk: een mens, dier of machine kan arbeid verrichten, bijv. door te zagen, door een wagen te trekken of door te hijsen. In de natuurkundeles ben je de uitdrukking tegengekomen dat een *kracht* arbeid verricht, bijv. de luchtwrijving bij een auto of de zwaartekracht bij vallend water.

In het dagelijks leven spreek je over arbeid verrichten als iets moeite kost, als je er boterhammen voor moet eten of als iets benzine kost. Met andere woorden: als er chemische energie in een andere energiesoort wordt omgezet. In de natuurkunde wordt het woord arbeid algemener gebruikt: voor die processen waarbij het *aangrijpingspunt van een kracht over een weg wordt verplaatst*. Het gevolg daarvan is een energieomzetting waarbij een vorm van mechanische energie betrokken is. Dan is het ook logischer om te spreken over een kracht die arbeid verricht. De mens, het dier, de machine, zet daarbij energie om en kan daarom met een algemene term de 'energieomzetter' genoemd worden.

In de natuurkunde spreken we alleen over krachten die arbeid verrichten.

ORIENTATIE

5 GEEN ARBEID, MAAR WEL ENERGIEOMZETTING?

In de systemen die hier onder getekend staan wordt geen arbeid (in de natuurkundige betekenis) verricht.

- Leg uit waarom.
- In welke systemen is er wel sprake van energieomzettingen?
- In welke systemen wordt volgens het dagelijks spraakgebruik wel arbeid verricht?

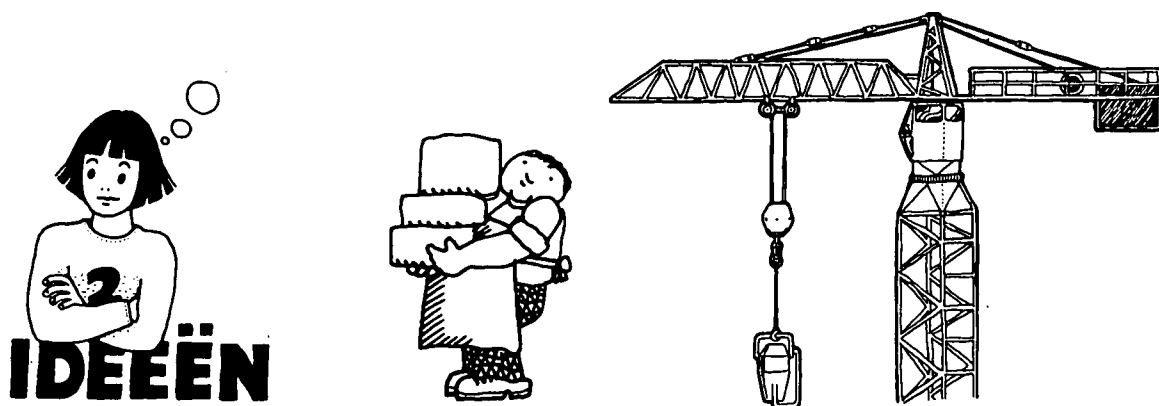


fig. 1.8 denken, dragen hangen

waarop kan arbeid verricht worden?

In dit blok werk je met het begrip *systeem*. Op een systeem kunnen (uitwendige) krachten werken. Als het *aangrijpingspunt* van zo'n uitwendige kracht verplaatst wordt, hetzij omdat het hele systeem verplaatst wordt, hetzij omdat het systeem vervormd wordt, dan verricht de kracht arbeid.

Arbeid wordt verricht door een uitwendige kracht op een systeem.

Het gevolg van arbeid is dat de som van de systeemenergieën verandert. Die som neemt toe als de kracht en de weg *gelijk* gericht zijn: dan wordt de arbeid *positief* genomen. Die som neemt af als de kracht en de weg *tegengesteld* gericht zijn. Dan wordt de arbeid *negatief* genomen.

Als voorbeeld kun je kijken naar een kogelstootster. Er zijn verschillende keuzen mogelijk voor het systeem waarop je de arbeid gaat bekijken. Enkele daarvan vind je hieronder.

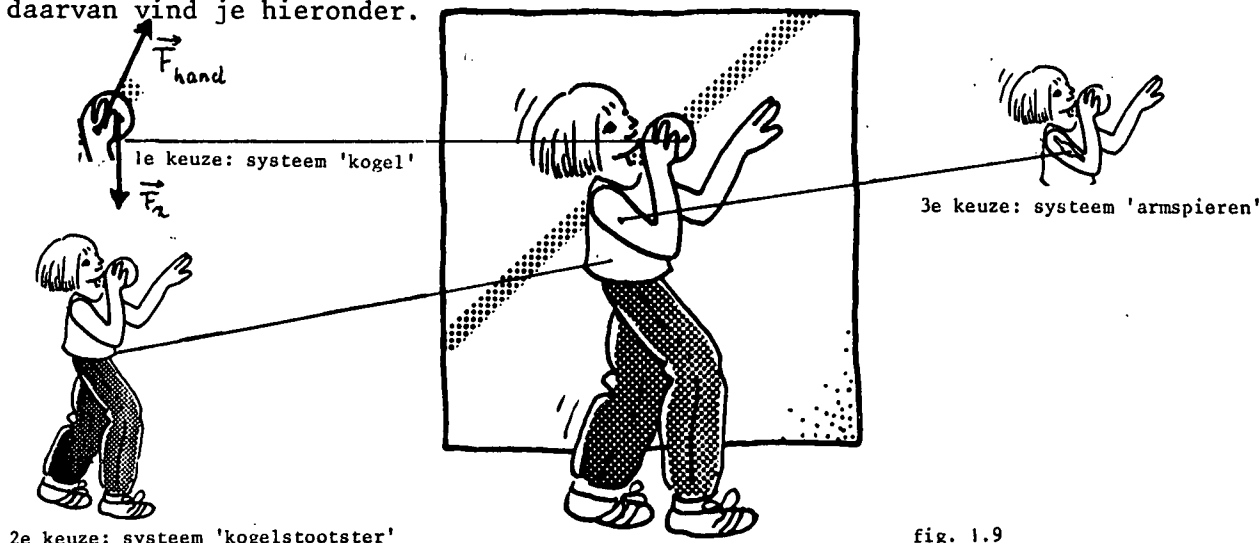


fig. 1.9

ORIENTATIE

1e keuze van systeem: de kogel tijdens het wegstoten.

- systeemenergie: kinetische energie
 - uitwendige krachten: zwaartekracht en de kracht van de hand op de kogel. Beide krachten verrichten arbeid. De zwaartekracht negatieve arbeid (de kogel gaat omhoog). Deze arbeid zou de kinetische energie doen afnemen. De kracht van de hand verricht positieve arbeid. Deze doet de kinetische energie toenemen.
- Let op: de krachten en de verplaatsing zijn niet precies gelijk of tegengesteld gericht. Hoe de arbeid dan berekend moet worden komt in hoofdstuk 2 aan de orde.

2e keuze van systeem: de kogelstootster tijdens het wegstoten.

- systeemenergieën: kinetische energie
chemische energie
thermische energie
- uitwendige krachten: kracht van de kogel op de hand (de reactiekracht van de kracht op het systeem 'kogel')
zwaartekracht

(Er zijn nog andere uitwendige krachten, maar die worden niet verplaatst en verrichten dus geen arbeid).

De kinetische energie neemt toe tijdens het stoten. De chemische energie neemt af. De thermische energie neemt toe, want de kogelstootster zal het warm krijgen.

Behalve voor het laten toenemen van de kinetische energie en de thermische energie van dit systeem is de chemische energie ook nodig vanwege de negatieve arbeid door de twee genoemde krachten: door negatieve arbeid door uitwendige krachten neemt de energie van een systeem immers af.

3e systeemkeuze: de armspieren van de kogelstootster.

Ook voor dit systeem zijn de uitwendige krachten en verplaatsingen na te gaan en de systeemenergieën op te schrijven. Het is wel een veel ingewikkelder systeem dan de eerste twee. Daarom is die hier niet uitgewerkt. Zoals aan dit voorbeeld te zien is let je alleen op de uitwendige krachten op een systeem en niet op inwendige krachten. Ben je wel in inwendige krachten geïnteresseerd, dan moet je een ander (sub)systeem kiezen, zoals bijv. de armspieren hierboven.

6 WELKE ARBEID EN ENERGIEOMZETTINGEN

Ga voor de volgende situaties na of er arbeid verricht wordt en, zo ja, welke energieomzettingen er plaats vinden. Wijs bovendien aan welke krachten over welke afstanden worden verplaatst.

- a. Een kist wordt opgehesen.
- b. Een jojo rolt langs zijn draadje naar beneden.
- c. Een klok wordt opgewonden.
- d. Iemand zet zich op rolschaatsen af tegen de muur.

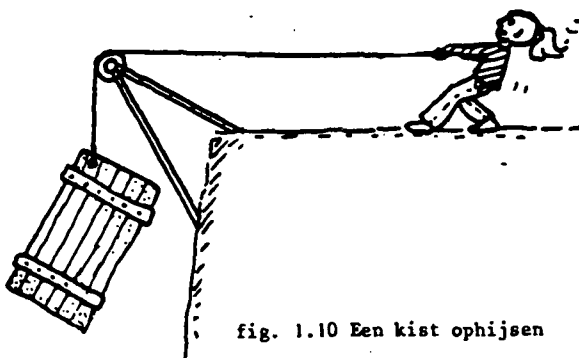


fig. 1.10 Een kist ophijzen

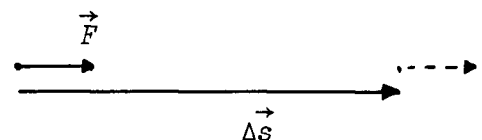


fig. 1.11 De trekkraft $\vec{F}$ van het meisje wordt langs de weg $\vec{\Delta s}$ verplaatst.

ORIENTATIE

1.4 DE ENERGIEVERGELIJKING VAN EEN SYSTEEM

Zoals je weet zegt de algemene wet van behoud van energie dat er geen energie kan ontstaan of verloren gaan. Voor een systeem betekent dat, dat de hoeveelheid energie die via arbeid, straling, warmtetransport elektrisch transport of golving aan het systeem is toegevoerd of is afgevoerd gelijk is aan de verandering van de systeemenergieën. Daarom zal je in dit blok de wet van behoud van energie voor een systeem tegenkomen in de vorm:

Energie uitgewisseld met de omgeving = verandering van systeemenergieën.

Energieuitwisseling met de omgeving kan plaatsvinden via arbeid door uitwendige krachten, via warmteuitwisseling door stroming en geleiding, via straling en via transport van elektrische of golfenergie. De energie uitgewisseld via energiestromen wordt samengevat in een term Q . De energie uitgewisseld via arbeid wordt aangeduid met W . W en Q zijn positief als zij de interne energieën vergroten; ze zijn negatief als ze de interne energieën verkleinen.

7 TEKENAFSPRAAK

Ga na dat deze tekenafpraak overeenkomt met die welke eerder gemaakt is voor arbeid.

In formulevorm luidt de wet van behoud van energie dan:

$$W + Q = \Delta E_k + \Delta E_{\text{therm}} + \Delta E_{\text{chem}} + \dots$$

Voor elk systeem kun je zo'n vergelijking opstellen. Die wordt de *energievergelijking* genoemd.

8 WATERVAL

- Stel de energievergelijking voor het water van een waterval op.
- Laat met behulp daarvan zien dat het water onderaan de Niagara-falls een iets hogere temperatuur moet hebben dan bovenaan. Neem aan dat er geen sprake is van energieuitwisseling van het water met de omgeving via warmtetransport of straling.

In dit blok zal het vaak voorkomen dat er geen energiestromen naar buiten van belang zijn. Je kunt Q dan nul nemen. Ook zal het vaak voorkomen, bijv. bij het omzetten van chemische energie in het menselijk lichaam, dat de warmteontwikkeling, dus ΔE_{therm} meteen meegenomen wordt door, in plaats van ΔE_{chem} , $\eta \cdot \Delta E_{\text{chem}}$ te nemen. Met de 'warmteverliezen' is dan al in het rendement η rekening gehouden.

1.5 EEN FORMULE VOOR ARBEID

Zoals je weet kun je arbeid (van een constante kracht gericht langs de weg) uitrekenen met de formule

$$W = F \cdot \Delta s$$

eenheid: 1 J = 1 N.m (J = joule)

met W de arbeid, F de kracht die over de weg Δs wordt verplaatst.

ORIENTATIE

Met behulp van deze formule kun je ook het *vermogen* P dat een mens of machine aan 'de buitenwereld' levert, of dat een systeem van buitenaf opneemt, uitrekenen: dat is gelijk aan de arbeid van de kracht die door de mens of machine of op het systeem wordt uitgeoefend gedeeld door de tijd Δt waarin die arbeid wordt verricht:

$$P = \frac{W}{\Delta t}$$

9 VERMOGEN

Laat zien dat een kracht F die met een snelheid v verplaatst wordt voor een omgezet vermogen zorgt van:

$$P = F \cdot v$$

teken van de arbeid

Door de arbeid van een kracht op een systeem kan de energie van het systeem toenemen of afnemen. Dat moet blijken uit het teken dat de arbeid krijgt.

Daarom geldt de afspraak:

Constante kracht met de bewegingsrichting mee: $W = F \cdot \Delta s$

Constante kracht tegen de bewegingsrichting in: $W = -F \cdot \Delta s$

Vaak zal de kracht een hoek maken met de weg. Voor die gevallen moet de formule voor de arbeid aangepast worden. Dat wordt in hoofdstuk 2 behandeld waarbij van vektorrekening gebruik gemaakt zal worden. Hier wordt alvast opgemerkt dat een kracht die loodrecht op de weg staat, geen arbeid verricht.

Constante kracht loodrecht op de bewegingsrichting: $W = 0$.

Om het rekenen met de formule in de vingers te krijgen volgen hier enkele oefenopgaven.

10 TEGEN EEN HELLING OP FIETSEN

- Bereken de arbeid die de zwaartekracht verricht als een fietser (massa met fiets 85 kg) 4 km over een bergweg fietst die daarbij 150 m omhoog gaat.
- Bereken het vermogen van de fietser als hij ook nog een wrijvingskracht van 12 N ondervindt. Hij fietst 4 m/s.

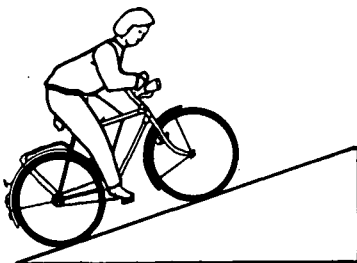


fig. 1.12 Bergopwaarts fietsen

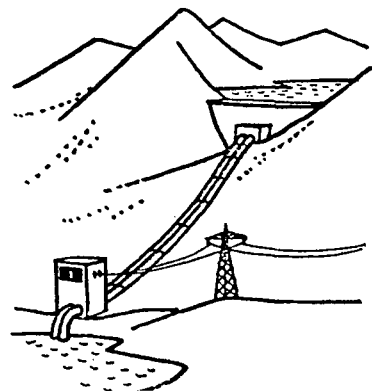


fig. 1.13 Waterkrachtcentrale

ORIENTATIE

11 WATERKRACHTCENTRALE

In de bergen bevindt zich een stuwmeer waaruit per dag 1 miljoen m³ water naar een 75 m onder het waterniveau van het stuwmeer gelegen waterkrachtcentrale stroomt.

- Bereken de arbeid die de zwaartekracht per dag verricht.
- Bereken het vermogen van de centrale als het rendement van de centrale 95% is.

12 EXPERIMENTEERFIETS

Piet wil met de hieronder getekende experimenteefiets zijn vermogen bepalen. Hij krijgt de volgende gegevens:

Bij één pedaalslag draait het achterwiel 2,4 maal rond (wieldiameter: 70 cm). In één minuut draait hij de pedalen 57 maal rond. De krachtmeters wijzen daarbij (gemiddeld) aan: 64 N resp. 19 N.

- Bereken de arbeid van de slipkracht op sleepkabel rond het achterwiel tijdens één pedaalslag.
- Bereken zijn vermogen als het rendement van de fietsoverbrenging 98% is.

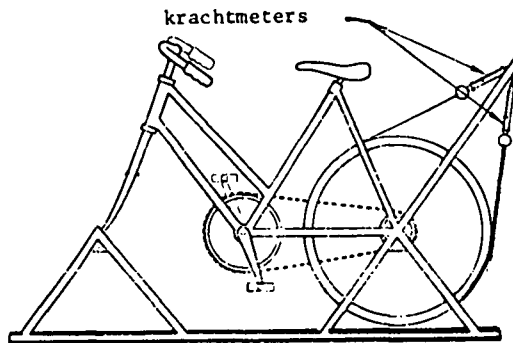


fig. 1.14 Experimenteefiets. Het verschil in kracht dat de twee krachtmeters aangeven geeft de wrijvingskracht op het achterwiel.

1.6 SAMENVATTING

Er wordt arbeid op een systeem verricht als het aangrijpingspunt van (één van) de uitwendige krachten op het systeem wordt verplaatst. In eenvoudige gevallen (rechtlijnige beweging, constante kracht in de richting van de beweging) kun je arbeid uitrekenen door:

$$W = F \cdot \Delta s$$

Als de kracht F en de weg Δs gelijkgericht zijn is de arbeid positief en als ze tegengesteld zijn is de arbeid negatief.

Wanneer er arbeid op een systeem verricht wordt neemt de totale energie van het systeem toe (positieve arbeid) of af (negatieve arbeid).

In het systeem ligt energie opgeslagen in de vorm van één van de systeem-energieën: kinetische energie, zwaarte-energie, veerenergie, chemische energie, kernenergie, elektrostatische energie, thermische energie.

Behalve door arbeid kan de energie van een systeem ook veranderen door energiestromen zoals warmte, straling, elektrische stromen en golven. De aldus toegevoerde of afgevoerde energie kan met het symbool Q aangegeven worden die positief is bij energietoevoer aan het systeem en negatief bij energieafvoer.

ORIENTATIE

De wet van behoud van energie neemt voor een systeem de vorm aan

energie uitgewisseld met de omgeving = verandering van systeemenergieën.

of in formulevorm

$$W + Q = \Delta E_k + \Delta E_z + \Delta E_{\text{chem}} + \Delta E_{\text{therm}} + \dots$$

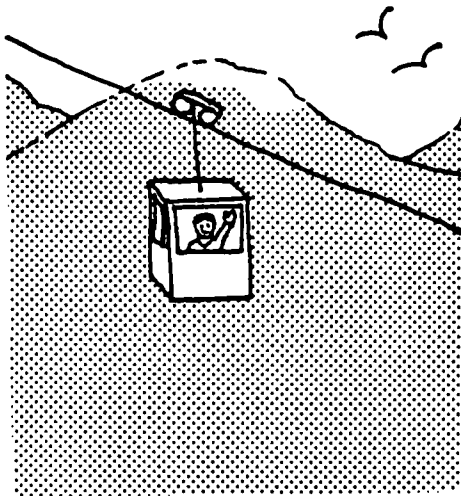
Dit wordt de energievergelijking van een systeem genoemd. Bij het oplossen van een probleemstelling kies je het systeem zò dat de relevante krachten uitwendige krachten zijn en de energieveranderingen met bovenstaande energievergelijking beschreven kunnen worden.

Let op: Er wordt arbeid verricht als het *aangrijpingspunt* van een kracht verplaatst wordt. Vaak wordt dit verkort gezegd, ook in dit blok: "Er wordt arbeid verricht als een kracht verplaatst wordt". Daar wordt hetzelfde mee bedoeld. Verwar dit niet met het (in gedachten!) verplaatsen van een kracht langs zijn werklijn, bijv. naar het zwaartepunt. Dan wordt er geen arbeid verricht!

2.ARBEID UITREKENEN

Inhoud:

2.1 Rekening houden met richtingen	18
2.2 Kracht als vektor	19
2.3 Arbeid en vektorrekening	24
2.4 Arbeid door een veranderlijke kracht	26
2.5 Arbeid langs een kromme weg	30
2.6 Samenvatting	32
2.7 Problemen	33



voornitblik

Om de arbeid op een systeem te kunnen uitrekenen moet je de relevante krachten kunnen opsporen en de weg, waarover hun aangrijpingspunt wordt verplaatst, kunnen aangeven. Maar de kracht en de weg zijn niet altijd gelijk gericht. Daarmee zul je bij het berekenen van arbeid rekening moeten houden. Daarom is het nodig dat je goed met *kracht en weg als vektoren* kunt rekenen.

Uit dit hoofdstuk zal blijken dat je dië componenten van kracht en weg moet nemen die gelijk gericht zijn. Wiskundig kun je daarvoor mooi het inproduct gebruiken.

Arbeid door een *kracht die van grootte verandert* kun je aanpakken via grafieken. Het oppervlak onder een kracht, weg-grafiek blijkt de verrichte arbeid voor te stellen.

ARBEID UITREKENEN

2.1 REKENING HOUDEN MET RICHTINGEN

Arbeid kun je uitrekenen met de hiervoor al genoemde formule

$$W = F \cdot \Delta s$$

MAAR.... het is heel eenvoudig een voorbeeld te verzinnen van een situatie waarin een kracht verplaatst wordt over een weg maar de energie van het voorwerp niet wordt vergroot of verkleind. Een voorbeeld daarvan is de beweging van een slee over een luchtkussenbaan.

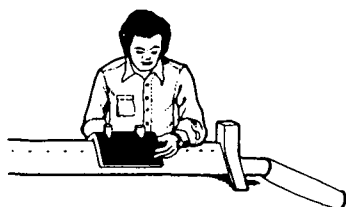


fig. 2.1: Slee op een luchtkussenbaan.

De zwaartekracht op de slee wordt over een horizontale weg verplaatst, maar de slee blijft eenparig bewegen. De reden ervan is duidelijk: de zwaartekracht staat loodrecht op de weg: Een kracht verricht geen arbeid als die wordt verplaatst in een richting loodrecht op zijn eigen richting. De formule voor de arbeid geldt dus *onder voorwaarde dat de kracht en de weg gelijk of tegengesteld gericht zijn*. De waarde van de arbeid is dan resp. positief of negatief. Er zijn veel situaties waarin kracht en weg een hoek met elkaar maken die niet precies 0° , 90° of 180° is. De volgende opdracht geeft daarvan een voorbeeld.

1 BEPALING VAN DE ROLWRIJVING

Een groep leerlingen gebruiken de volgende meetmethode om de rolwrijving van een fiets te bepalen.

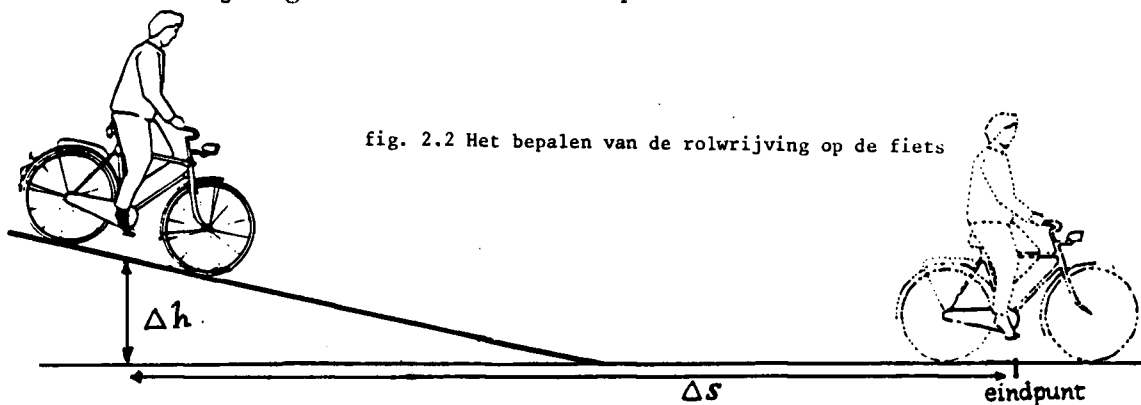


fig. 2.2 Het bepalen van de rolwrijving op de fiets

- Voor Δh nemen ze 10 cm. De massa van fiets en berijder is 80 kg.
- Geef de richting van de zwaartekracht en de afgelegde weg van de fietser op de helling aan.
 - Bereken de arbeid door de zwaartekracht.
- Vanwege de rolwrijving komt de fietser na enige tijd stil te staan. De leerlingen meten voor die afstand (helling en horizontaal stuk) 10 m.
- Bereken daaruit de rolwrijving.

ARBEID UITREKENEN

De kunstgreep die je bij het maken van deze opdracht moet toepassen ligt vrij voor de hand: het aangrijpingspunt van de zwaartekracht daalt immers over 10 cm, dus als afgelegde weg voor de zwaartekracht moet je 10 cm nemen.

Er zijn echter ingewikkelder situaties mogelijk, zoals in fig. 2.3 en 2.4 staan getekend.

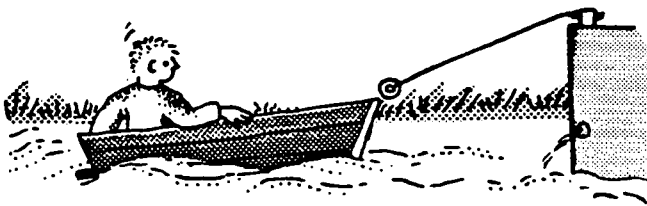


fig. 2.3 Kracht staat schuin op de weg

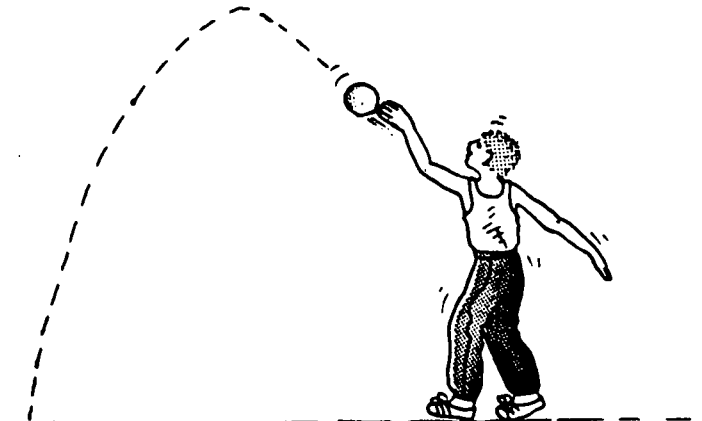


fig. 2.4 Kromme weg

De boot van fig. 2.3 ondervindt steeds een trekkracht schuin omhoog. Moet die hele kracht meegerekend worden voor de arbeid?

De bal van fig. 2.4 gaat omhoog en omlaag. Welke is nu de weg die de zwaartekracht tot de grond aflegt? Moeilijker ligt het nog met de luchtweerstandskracht: die verandert voortdurend van richting (en ook van grootte omdat de snelheid van grootte verandert, maar zie daarvoor par. 2.5). Hoe groot is de arbeid van deze twee krachten op de bal?

Om de arbeid in dit soort situaties uit te kunnen rekenen heb je het ontbinden van één van de twee vectoren kracht en weg in zijn componenten nodig. De volgende twee paragrafen gaan daarover.

2 ARBEID EEN VEKTOR?

Kracht en weg zijn beide vectoren. Is arbeid een vektor?
Leg je antwoord uit.

2.2 KRACHT ALS VEKTOR

ontbinden

In de wiskundeles heb je geleerd dat elke vektor in componenten ontbonden kan worden. In het platte vlak kies je daarvoor een assenstelsel en je projekteert de vektor op de twee assen.

De grootte van de componenten kun je door meting bepalen en je kunt ze uitrekenen.

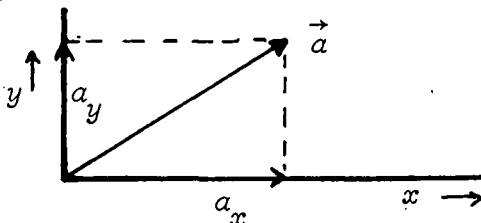


fig. 2.5: Een vektor in componenten ontbinden.

ARBEID UITREKENEN

3 COMPONENTEN BEPALEN

Ga na dat voor de componenten van fig. 2.5 geldt:

$$a_x = a \cos \alpha$$

$$a_y = a \sin \alpha$$

Ook een kracht kun je ontbinden in componenten. Maar hoe kies je het assenstelsel dat je daarbij nodig hebt? Je mag dat kiezen zoals je wilt. Bij rechtlijnige bewegingen komt het meestal het beste uit om de x -as in de richting van de (eventueel) optredende snelheid te kiezen en de y -as er loodrecht op. Het voordeel daarvan is dat de x -component van de kracht wel en de y -component *geen* arbeid verricht (of zal gaan verrichten). Maar een andere keuze is ook goed.

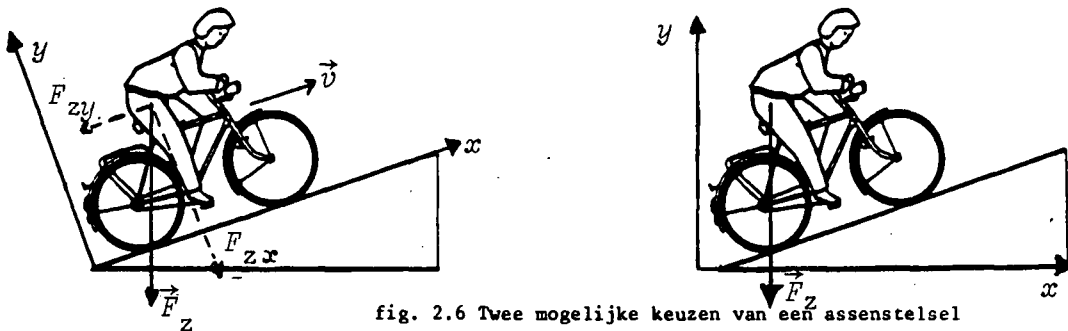


fig. 2.6 Twee mogelijke keuzen van een assenstelsel

4 ASSENSTELSELS KIEZEN

Kies een volgens jou geschikt assenstelsel in de volgende situaties. Teken de belangrijkste optredende krachten.

- aan een touw voortslepen van een slee;
- een helling afrijden;
- weggooien van een bal.

optellen

Krachten kun je bij elkaar optellen. Je moet dan wel de regels van de vektorrekening volgen. Hier komen die regels aan de orde, toegepast op een cabine van een kabelbaan. Daarbij worden ook begrippen als het verplaatsen van een kracht langs zijn werklijn, moment, evenwichtsvoorwaarden kort herhaald.

1e situatie: stilhangende cabine.

Een cabine hangt stil aan een kabelbaan in de lucht. Als systeem wordt genomen: de cabine met inhoud en de loopkat op de kabel. Erop werken:

- de zwaartekracht op de cabine met inhoud; deze grijpt aan in het zwaartepunt;
- de trekkrecht van de kabel op de cabine; deze grijpt aan waar de kabel aan de ophangconstructie trekt.

De cabine hangt stil, dus er moet voldaan zijn aan de evenwichtsvoorwaarden. Voor de cabine moet gelden:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= 0 \\ \sum M &= 0 \end{aligned}$$

Waarbij M staat voor moment (kracht maal arm van de kracht). Omdat de som

ARBEID UITREKENEN

van de momenten nul moet zijn, bevindt het zwaartepunt zich onder het ophangpunt van de cabine.

Uit fig. 2.7 is duidelijk dat de vektorsom van de zwaartekracht en de trekkracht niet nul is. Dat de cabine niet naar beneden stort komt omdat die aan de kabel hangt: de kabel oefent nog een kracht uit. Die kracht is loodrecht op de kabel omhoog gericht en wordt de normaalkracht F_N genoemd. Normaal heeft hier de betekenis die je in de wiskunde al bent tegengekomen: loodrecht. De normaalkracht maakt de som van de krachten nul.

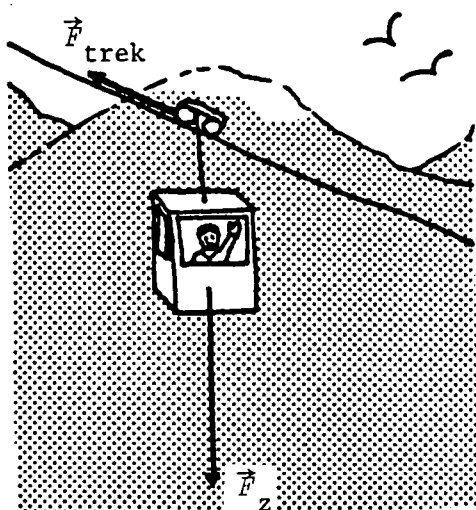


fig. 2.7: De trekkracht en de zwaartekracht werken op de cabine van de kabelbaan. Maar de som van deze twee krachten is niet nul!

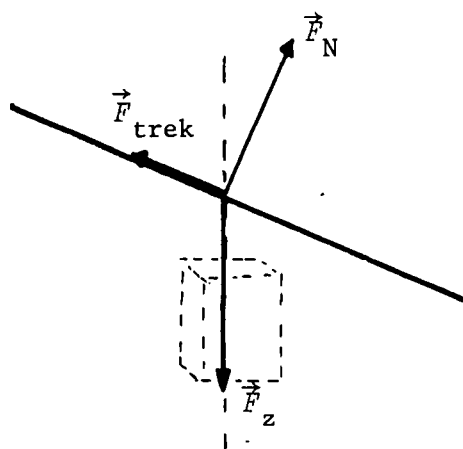


fig. 2.8: De kabel oefent een normaalkracht loodrecht op de kabel omhoog uit, die de som van de krachten nul maakt.

Hoe groot is deze normaalkracht nu? Er moet gelden:

$$\vec{F}_z + \vec{F}_{\text{trek}} + \vec{F}_N = 0$$

Om deze krachten te mogen optellen moeten ze eigenlijk in één punt aangrijpen. Dat is niet het geval. Voor dit doel mag de zwaartekracht langs zijn werklijn verplaatst worden naar het punt A, zoals in fig. 2.8 is getekend. Er zijn twee manieren om vectoren op te tellen: door constructie (kopstaart-methode of parallellogrammethode) of door het optellen van de componenten in de x - en y -richting en daaruit de somvektor samen te stellen.

5 NORMAALKRACHT CONSTRUEREN

De massa van de cabine (met inhoud) is 600 kg.

- Teken de zwaartekracht (3 cm) en de kabel (30°) en bepaal de grootte van de normaalkracht en de trekkracht door middel van constructie.
- Bepaal de grootte van de krachten door meting.
- Bereken de componenten van de zwaartekracht ook met behulp van de hellingshoek ($\alpha = 30^\circ$) en vergelijk die met de uitkomst van a.

Om de normaalkracht te bepalen uit de som van de componenten moet er eerst een assenstelsel gekozen worden, zie fig. 2.9

ARBEID UITREKENEN

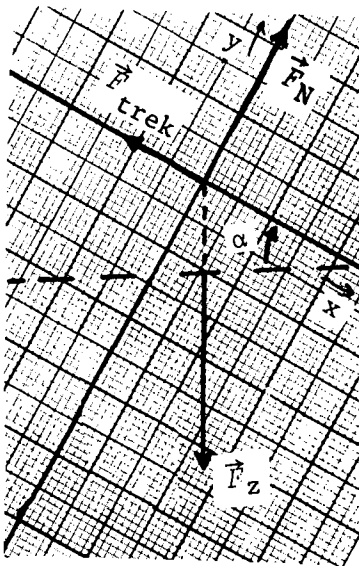


fig. 2.9:
De krachten in een assenstelsel.

De normaalkracht wordt geleverd door een kleine vervorming van het oppervlak of de kabel. Bij een brug bijvoorbeeld: zie fig. 2.10.
In een kabel werken de spankrachten alleen langs de kabel. Om de normaalkracht te leveren moet de kabel daarom een knik vertonen bij het ophangpunt van de cabine. In eerdere tekeningen hebben we die verwaarloosd. Precieser getekend krijg je de situatie zoals in fig. 2.11: de som van krachten die de kabel op de cabine uitoefent is in het geval van stilstaan gelijk aan de zwaartekracht.

fig. 2.10: Door het vervormen van een brug kan het brugdek een normaalkracht gaan uitoefenen op een auto op de brug.

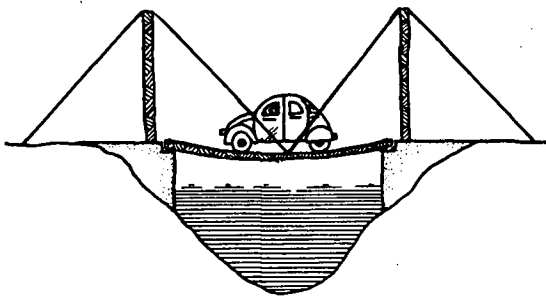
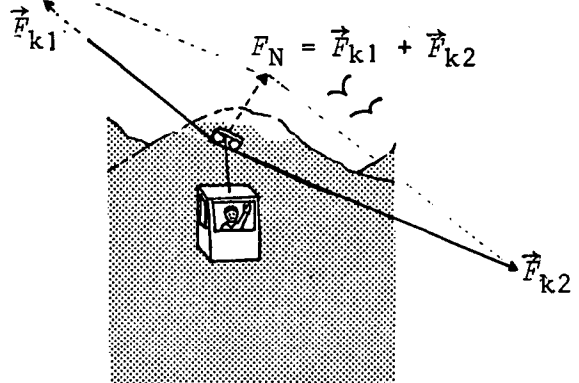


fig. 2.11: De krachten van de kabel hebben de richting van de kabel, maar maken tezamen de som van de krachten nul. Voor de duidelijkheid is de knik in de kabel hier overdreven.



2e situatie: bewegende cabine.

Als de cabine gaat bewegen gaat er bovendien nog, afhankelijk van de bewegingsrichting, een wrijvingskracht in het ophangpunt langs de kabel naar boven of naar beneden werken. Daarnaast is er dan ook de lucht-wrijvingskracht op de cabine, die bij windstil weer vrijwel te verwaarlozen is.

De som van de krachten op het ophangpunt is nul als de cabine eenparig beweegt. Bij optrekken of remmen is dat natuurlijk niet het geval.

ARBEID UITREKENEN

6 BEWEGENDE CABINE

Teken en bereken alle krachten in het ophangpunt van de cabine.

Neem de wrijvingskracht 500 N:

- als de cabine met een constante snelheid naar boven beweegt;
- als de cabine met een constante snelheid naar beneden beweegt;
- als de cabine met 1 m/s^2 naar boven versneld wordt.

Samengevat geldt voor een voorwerp in rust of in eenparige beweging:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 \end{cases}$$

Als de beweging eenparig versneld is geldt:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a} \begin{cases} \Sigma F_x = m \cdot a \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 \end{cases}$$

7 KRACHTEN BEPALEN VIA COMPONENTEN

Aan de kabel van een kraan hangt een grote, lege kist van 40 kg. Door de wind wordt deze kist opzij geblazen zodat de kabel een hoek van 20° met de vertikaal maakt (zie fig. 2.12). Met deze gegevens kun je nu alle krachten op de doos uitrekenen.

- Maak een schets van de krachten op de kist en stel de evenwichtsvoorwaarden op.
- Kies een assenstelsel, teken daarin de krachten en de componenten van de krachten.
- Reken vervolgens de componenten van de krachten en tenslotte de krachten zelf uit.

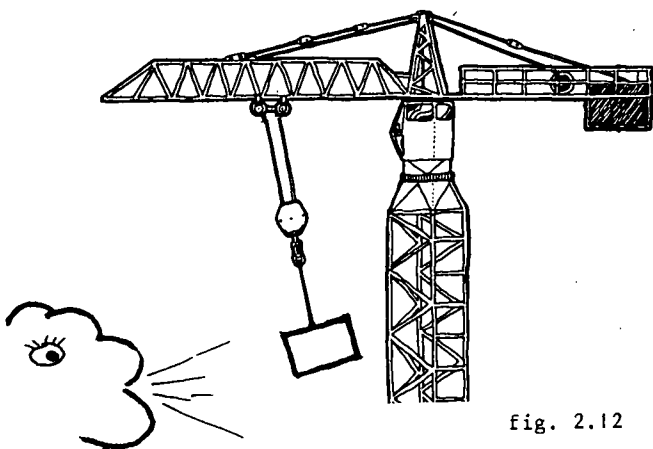


fig. 2.12

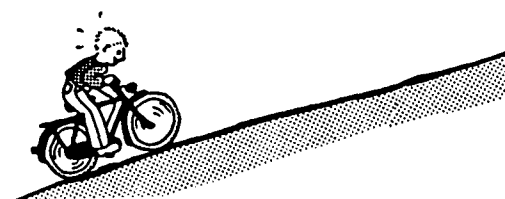


fig. 2.13

8 KRACHTEN OP EEN KLIMMENDE FIETSER

- Teken en bereken de krachten op een fietser die met 3 m/s tegen een helling van 10% opfietst. Neem als totale massa 80 kg en als wrijvingskracht 8 N.
- Hoeveel vermogen levert de fietser?
- Wat verandert aan de krachten op het moment dat de fietser 1 m/s^2 vertraagd wordt?

ARBEID UITREKENEN

2.3 ARBEID EN VEKTORREKENING

In opdracht 1 over het bepalen van de rolwrijving heb je een situatie waarin kracht en weg een hoek met elkaar maken al op een vanzelfsprekende wijze opgelost. Uit die oplossing kan je een algemener geldende oplossing halen. Daarom ga je die situatie nogmaals bekijken.

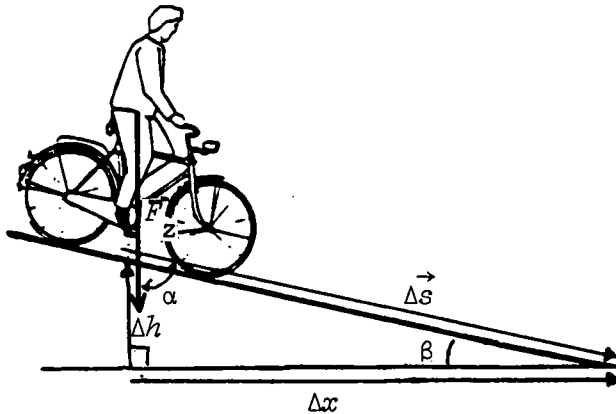


fig. 2.14 De krachten en de weg als vectoren

De beweging van de helling af is rechtlijnig. De weg kan dus voorgesteld worden als een vektor Δs . Δh is de component van deze vektor in de richting van de zwaartekracht. De andere component Δx is de horizontale component (loodrecht op de zwaartekracht).

Voor hoek α tussen de zwaartekracht en de verplaatsing geldt:

$\alpha = 90^\circ - \beta$. Dan kun je het hoogteverlies Δh schrijven als

$$\Delta h = \Delta s \cos \alpha$$

Voor de arbeid door de zwaartekracht krijg je dan:

$$W_z = F_z \Delta s \cos \alpha$$

9 ANDER COÖRDINATENSTELSEL

Je kunt ook een coördinatenstelsel kiezen waarbij de x -as de richting van de weg Δs heeft.

a. Schrijf de formules voor de x - en y -componenten van de zwaartekracht op.

b. Leid daaruit de formule voor de arbeid door de zwaartekracht af en vergelijk die met bovenstaande formule. Wat is je conclusie?

De horizontale component Δx van Δs draagt niet bij tot de arbeid, want die staat loodrecht op de zwaartekracht.

algemeen

Welk coördinatenstelsel je ook kiest, de arbeid (door een constante kracht langs een rechte weg) wordt gegeven door de kracht maal de projectie van de weg in de richting van de kracht (zie fig. 2.15a)

$$W = F \cdot (\Delta s \cos \alpha)$$

Of de projectie van de kracht in de richting van de weg maal de weg (zie fig. 2.15b).

$$W = (F \cdot \cos \alpha) \cdot \Delta s$$

In beide gevallen is α de hoek tussen de kracht en de weg.

ARBEID UITREKENEN

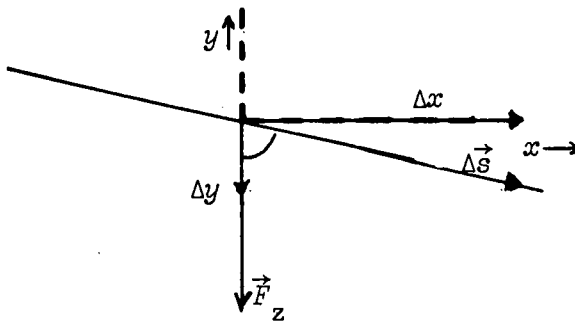


fig. 2.15a De weg geprojecteerd op de richting van de kracht

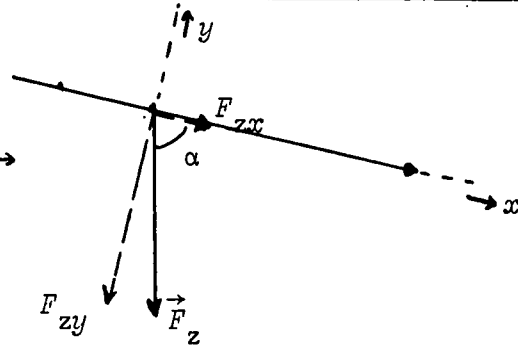


fig. 2.15b De kracht geprojecteerd op de richting van de weg

10 SCHUITJE VAREN

Het bootje van Valentijn hangt achter het plezierjacht van zijn ouders. Valentijn wil een schatting maken van het extra vermogen dat het slepen van zijn bootje kost.

Hij weet dat hij 55 kg weegt en dat zijn bootje 145 kg is. Hij meet de kracht in het sleeptouw (250 N) en de hoek die het touw met de horizon maakt (20°). De boot vaart 7,2 km/h.

- Teken en bereken alle krachten op het bootje. Houd ook rekening met de (geschatte) plaats van de aangrijpingspunten.
- Verklaar de stand van het bootje in het water.
- Bereken het vermogen dat het plezierjacht levert om Valentijn's bootje voort te trekken.

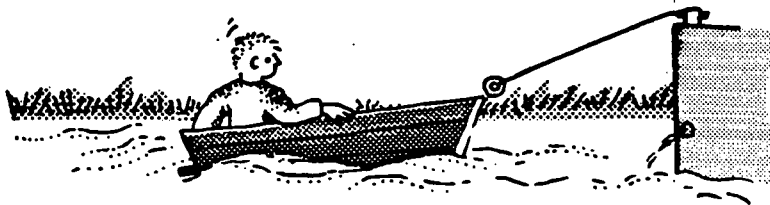


fig. 2.16 Valentijn in zijn bootje

Een andere manier om dit op te schrijven is met behulp van het *inwendig produkt* dat je wellicht uit de wiskunde kent. Het inwendig produkt van de vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2)$ en $\vec{b} = (b_1, b_2)$ is:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Het inwendig produkt van $\vec{F}$ en $\vec{\Delta s}$ is dus:

$$\vec{F} \cdot \vec{\Delta s} = F_x \cdot \Delta x + F_y \cdot \Delta y$$

In een coördinatenstelsel met de x -as in de richting van Δs en bij een hoek α tussen $\vec{F}$ en $\vec{\Delta s}$ geldt:

$$\begin{aligned} \Delta y &= 0; \quad \Delta x = \Delta s \\ F_x &= F \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

zodat geldt:

$$\vec{F} \cdot \vec{\Delta s} = F \cdot \Delta s \cos \alpha$$

Algemeen geldt dat arbeid door een constante kracht het inwendig produkt van kracht en weg is:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta s}$$

ARBEID UITREKENEN

11 HET VERMOGEN VAN EEN ZEILBOOT

De horizontale krachten op een zeilboot staan in fig. 2.17 op schaal en met de juiste richting getekend.

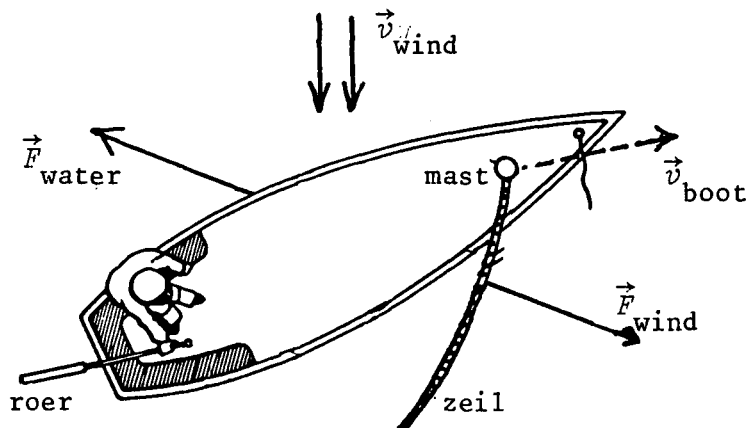


fig. 2.17 De horizontale krachten op een zeilboot. Ook de richtingen van de windsnelheid en de snelheid van de boot staan getekend. Waarom de getekende vektoren zo gericht zijn is een ingewikkelde zaak die hier niet zo van belang is.

Aangenomen is dat de water- en windkracht constant zijn, zodat de snelheid van de boot constant is, 5 knopen (2,6 m/s). De waterkracht is dan 3600 N.

a. Bepaal het vermogen die dat zeil uit de wind opneemt. Let op: de richting van de bootsnelheid valt niet samen met de richting van de lengteas van de boot, omdat de boot ook een beetje moet 'afdrijven' om de dwarscomponent van de windkracht door een aldus opgewekte waterkracht te kunnen compenseren.

b. Wat zal het resultaat zijn van een betere stroomlijning van de boot?

12 HET STIJGEN VAN EEN VLIEGTUIG

Een vliegtuig vliegt met constante snelheid (100 m/s) onder een hoek van 15° omhoog. De massa van het vliegtuig is 20 ton. De vliegtuigmotoren leveren 6 MW. Welk gedeelte van dit vermogen raakt het vliegtuig kwijt door de (negatieve) arbeid die de zwaartekracht verricht?

2.4 ARBEID DOOR EEN VAN GROOTTE VERANDERLIJKE KRACHT

In alle voorafgaande paragrafen heb je alleen naar de arbeid van (min of meer) constante krachten gekeken. In veel interessante problemen gaat het juist om *veranderlijke* krachten. Denk maar aan de botsing: de 'kreukkracht' is veranderlijk. Of aan de luchtweerstand. Die is afhankelijk van de snelheid. Of zelfs aan de zwaartekracht. Naarmate je verder van de aarde afkomt wordt de aantrekkingskracht van de aarde kleiner. Voor de ruimtevaart is dat een belangrijk gegeven.

ARBEID UITREKENEN

Voor zo'n veranderlijke kracht kun je niet zonder meer de formule $W = F \cdot \Delta s$, die je in de vorige paragrafen gebruikt hebt, gebruiken. Welke waarde moet je voor de kracht invullen? Die waarde kan immers voortdurend veranderen.

gemiddelde kracht?

Als benadering van een veranderlijke kracht zou je de gemiddelde waarde van die kracht kunnen nemen. Je gaat dat eens proberen met een wat theoretische situatie, waaruit je belangrijke conclusies kunt trekken, die we in veel echtere situaties kunnen gebruiken.

Stel je voor dat een meisje, Ineke, met een fietskar achter haar fiets weg rijdt. Daarbij wordt 10 s een trekkracht van 50 N op de fietskar uitgeoefend en gaat ze 25 m vooruit. Daarna fietst ze nog 10 s met een constante snelheid van 5 m/s, waar een trekkracht van 10 N op de fietskar voor nodig is.

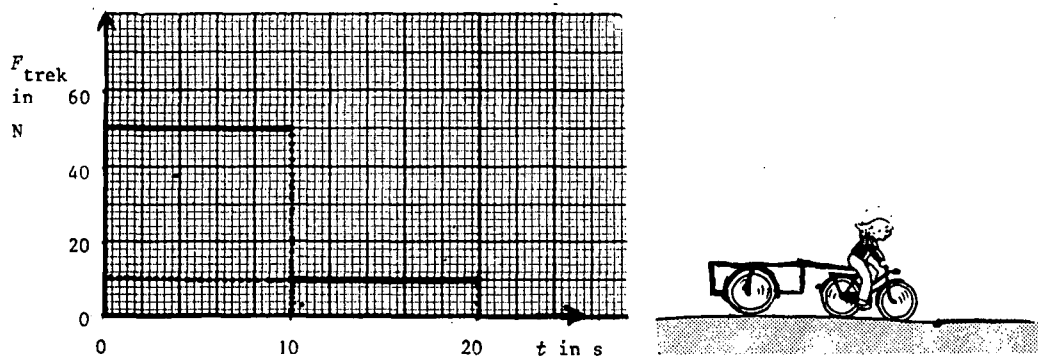


fig. 2.18 De F_{trek} , t -grafiek van Ineke: van 0 tot 20 s is haar gemiddelde kracht 30 N.

De arbeid door de trekkracht (en dus de energie die Ineke moet leveren om de fietskar voort te trekken) kun je nu op twee manieren proberen uit te rekenen:

- door twee maal $F \cdot \Delta s$ uit te rekenen: voor elk interval apart;
- door de gemiddelde kracht uit te rekenen en in één keer $F \cdot \Delta s$ bepalen.

13 TEGENSPRAAK!

- a. Bereken de arbeid van de trekkracht (van 0 tot 20 s) via beide methoden.
- b. Eén van de twee methoden is fout. Waarom?

Kijk nog eens goed naar de berekening van de gemiddelde kracht. Ineke heeft de helft van de som genomen omdat beide krachten gedurende een gelijke tijd werken. Maar voor de arbeid is niet de tijd, maar de afgelegde weg van belang! Met andere woorden: ze moet geen gemiddelde naar de tijd maar een *gemiddelde naar de afgelegde weg* gebruiken om tot een goede uitkomst voor de arbeid te komen. Fig. 2.18 bracht haar op het verkeerde spoor: ze moet die grafiek vervangen door een grafiek van de kracht en de weg: F , s -grafiek. Zie fig. 2.19.

ARBEID UITREKENEN

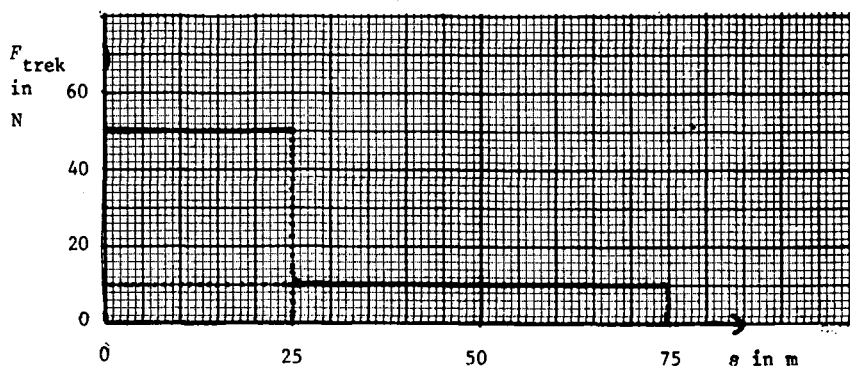


fig. 2.19 De F, s -grafiek van Ineke. Als je over de weg middelt, is de kracht helemaal geen 30 N.

Als de kracht verandert in de tijd, verandert die ook als functie van de weg. Vergelijk de figuren 2.18 en 2.19 maar.

Om het *gemiddelde naar de weg* te nemen moet je ook rekening houden met het oppervlak onder de grafiek: zie fig. 2.20. A_1 moet gelijk zijn aan A_2 om een juist gemiddelde te krijgen.

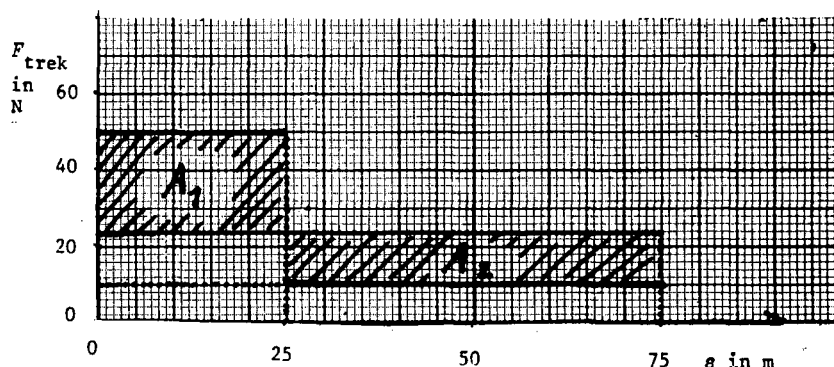


fig. 2.20 Als de oppervlakken A_1 en A_2 heb je de gemiddelde kracht, gemiddeld over de weg, gevonden.

14 ARBEID VIA GEMIDDELDE KRACHT

Bereken nu de arbeid via de gemiddelde kracht op de juiste manier. Vind je dat een handige methode?

oppervlak onder de F, s -grafiek

Zoals je in fig. 2.20 al merkte, is de oppervlakte onder de F, s -grafiek van belang voor arbeid. Net zoals je uit een $v, \Delta t$ -grafiek de afgelegde weg kunt bepalen door de oppervlakte eronder te nemen, zo kun je uit de F, s -diagram de arbeid berekenen. De kracht beschouw je daarbij dus als een functie, nu echter niet van de tijd $F(t)$ maar van de afgelegde weg $F(s)$.

15

- Bepaal uit het oppervlak onder grafiek van fig. 2.20 de arbeid van de trekkracht.
- Een grafiek die de werkelijke trekkracht beter weergeeft staat in fig. 2.21.

ARBEID UITREKENEN

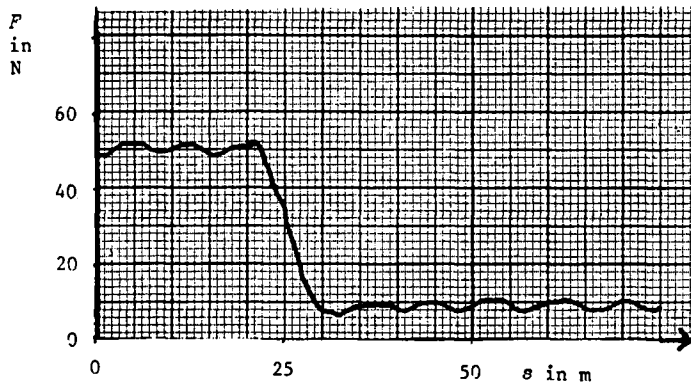


fig. 2.21 De kracht bij het fietsen is meestal niet constant.

Bereken daaruit de arbeid die de trekkracht verricht.

16 ARBEID DOOR DE BOTSKRACHT

Een auto ($m = 900 \text{ kg}$) botst met een beginsnelheid van 50 km/h tegen een betonnen wand.

Bij de botsing treedt in korte tijd een sterk wisselende kracht op (zie fig. 2.22). Dat wordt veroorzaakt door de verschillende delen van de voorkant van de auto die achtereenvolgens in elkaar gedrukt worden tot de wagen tot stilstand is gekomen.

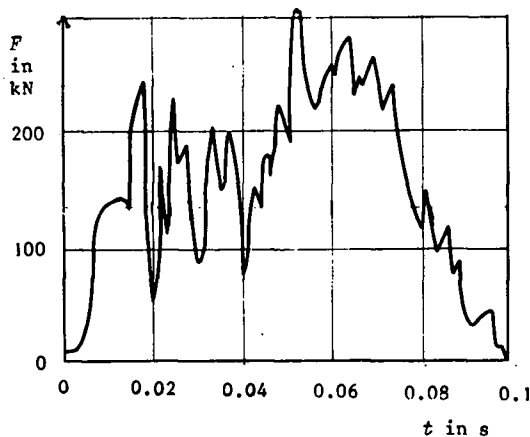


fig. 2.22 Kracht op een auto bij een frontale botsing

- Waarom is de arbeid door de botskracht *niet* de oppervlakte onder de grafiek van fig. 2.22? (Wat stelt het wèl voor?)
- Hoe zou je uit deze grafiek de arbeid door de botskracht wèl kunnen uitrekenen? Welke tussenstappen zou je daarvoor moeten doen?

17 ARBEID OP EEN PEES

Een menselijke pees (veerkrachtige band uit het lichaam, bijv. de achillespees aan je hiel) wordt uitgerekt op een proefbank in een laboratorium. De kracht bij het uitrekken staat in fig. 2.23 uitgezet tegen de uitrekking u . De kracht bij het ontspannen is tegen de uitrekking u uitgezet in fig. 2.24.

ARBEID UITREKENEN

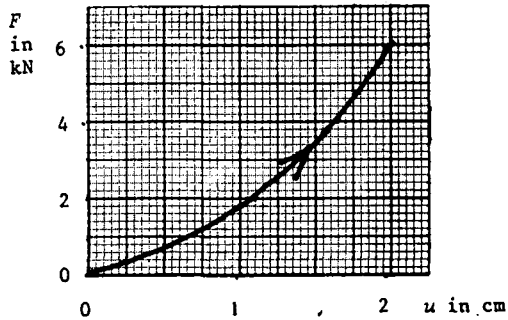


fig. 2.23 De kracht nodig voor het uitrekken van de pees

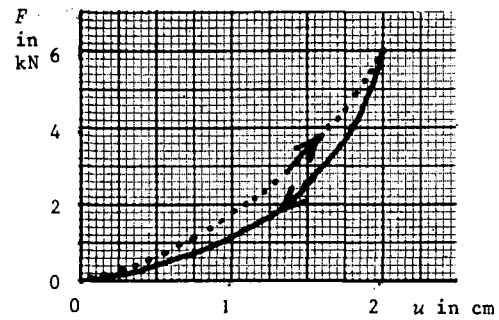


fig. 2.24 De kracht op de pees bij het laten ontspannen van de pees

- Bereken de arbeid die nodig is om de pees 2,0 cm uit te rekken.
- Bereken de arbeid van het laten ontspannen.

2.5 ARBEID LANGS EEN KROMME WEG

Tot nu toe heb je de arbeid steeds berekend voor rechtlijnige bewegingen. Daarbij kun je gebruik maken van de afgelegde weg als vektor $\vec{\Delta s}$. Bij kromlijnige bewegingen kan je de afgelegde weg niet meer als één vektor zien, want de richting verandert steeds. De grootte van de weg, gemeten langs de baan, kan heel wat verschillen van de *verplaatsing*, gedefinieerd als het verschil van twee plaatsvectoren.

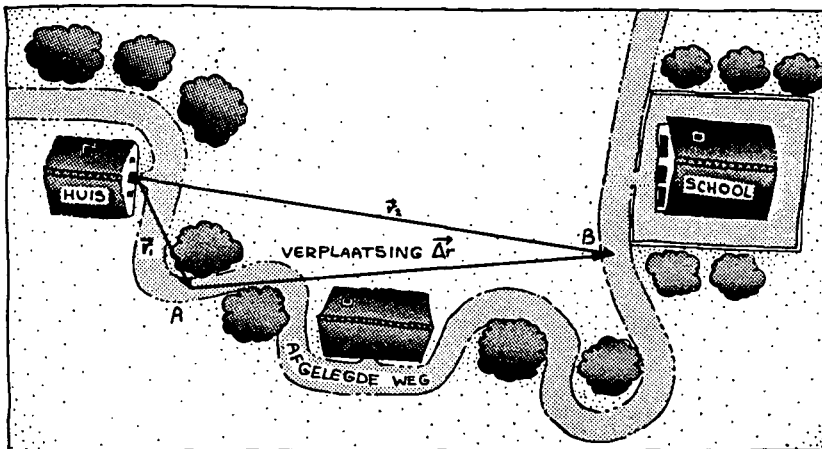


fig. 2.25: Er is een groot verschil tussen de verplaatsing $\vec{\Delta r}$ en de afgelegde weg Δs tussen de punten A en B.

In de formule voor arbeid zal de vektor $\vec{\Delta s}$ dan vervangen moeten worden door de vektor $\vec{\Delta r} = \vec{r} - \vec{r}_{\text{begin}}$, waarbij de plaats vektor $\vec{r}$ de hele weg van begin tot eind doorloopt. Dat leidt tot een heel ingewikkelde mathematische vorm voor arbeid. Maar in twee gevallen is het eindresultaat eenvoudig. Daarom worden die hier eerst uitgelegd.

arbeid door de zwaartekracht

Een bal die weggeworpen wordt volgt een kogelbaan, een kromlijnige beweging. De plaats vektor van de bal wordt verplaatst van A naar D. Voor

ARBEID UITREKENEN

A en D en de tussenliggende punten B en C zijn de plaatsvectoren in fig. 2.26 getekend, bij een bepaalde keuze van nulpunt. Ook de zwaartekracht die de bal in die punten ondervindt staat getekend.

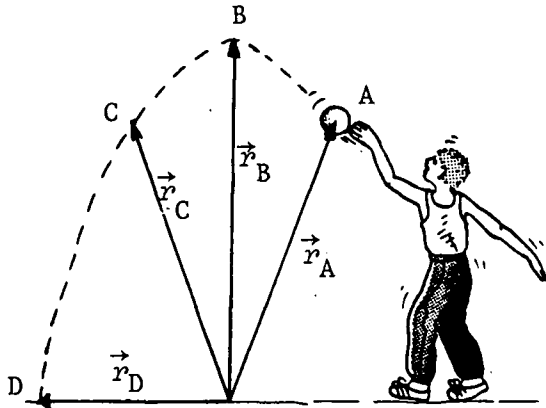


fig. 2.26 De plaatsvectoren van de bal op verschillende tijdstippen.

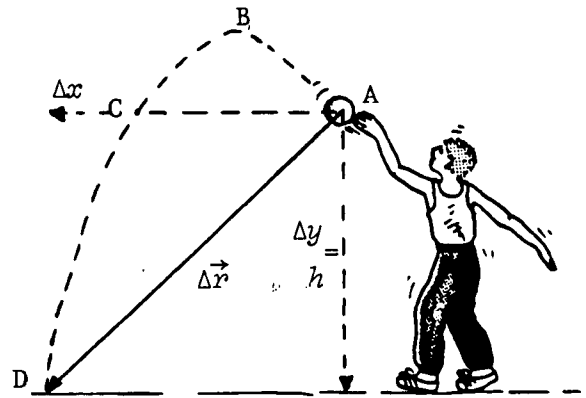


fig. 2.27 De verplaatsingsvector

De arbeid door de zwaartekracht op de bal kan echter eenvoudig berekend worden:

$$W = F_z \cdot h$$

De reden daarvan is dat de zwaartekracht in elk punt even groot is en gelijk gericht is. Daarom verricht de zwaartekracht evenveel arbeid bij het omhoog gaan als bij het (over dezelfde hoogte) vallen. Het is de uiteindelijke *verplaatsing* Δr die telt. Daarvan behoeft dan slechts de projectie op de richting van de zwaartekracht genomen te worden, zie fig. 2.27.

arbeid door de wrijvingskracht

Als je van huis naar school fietst verricht de wrijvingskracht arbeid op jou en je fiets. De wrijvingskracht is op elk punt tegengesteld gericht aan je snelheid. De hele weg van huis naar school zou je kunnen opdelen in kleine stukjes verplaatsing Δr (zie fig. 2.28), waarover je de arbeid kunt uitrekenen met

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} \\ &= -F_w \cdot \Delta r \end{aligned}$$

omdat wrijvingskracht en weg steeds tegengesteld gericht zijn.

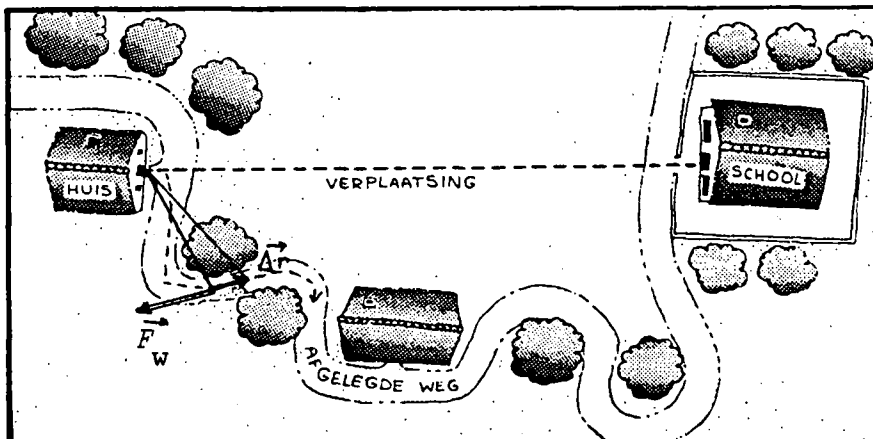


fig. 2.28 De wrijvingskracht op het kleine stukje verplaatsing

ARBEID UITREKENEN

De totale arbeid die je verricht is dan de som van de arbeid over al die kleine stukjes en daarbij is dan toch precies de arbeid langs de werkelijk afgelegde weg berekend. Voor de wrijvingskracht kun je dus opschrijven:

$$W = -F_w \cdot \Delta s$$

waarbij Δs langs de werkelijk afgelegde weg wordt gemeten.

18 VAN HUIS NAAR SCHOOL

Bepaal de arbeid die de wrijvingskracht verricht als een leerling van het huis in fig. 2.28 naar school fietst en de schaal van die tekening 1 cm = 10 m is. De leerling ondervindt een wrijvingskracht van 12 N.

algemeen

De methode die hierboven bij de wrijvingskracht gevolgd is, het opdelen van de weg in heel veel kleine stukjes verplaatsing Δr , over al die stukjes afzonderlijk de arbeid berekenen en dan sommeren, dat is de algemene methode om de arbeid langs een kromme weg uit te rekenen. Je kunt dat via computerprogramma's doen, maar in een aantal bijzondere gevallen kun je dat ook met wiskundige methoden, waarbij je de integraalrekening nodig hebt. De boven geschetste procedure geef je in wiskundige termen weer door:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B F \cdot \cos \alpha \cdot dr$$

2.6 SAMENVATTING

De arbeid die een kracht F verricht kun je uitrekenen:

- met de formule

$$W = F \cdot \Delta s$$

als de van grootte constante kracht F steeds gelijkgericht is met, of tegengesteld gericht is aan de richting van de afgelegde weg (bijv. wrijvingskracht). Δs is dan de afgelegde weg die langs de baan wordt gerekend.

- met de formule

$$\begin{aligned} W &= F \cdot \Delta s \cos \alpha \\ &= \vec{F} \cdot \vec{\Delta s} \end{aligned}$$

als de constante kracht $\vec{F}$ (constant van grootte en richting) een hoek maakt met de rechtlijnige weg Δs

- uit de oppervlakte onder de $F, \Delta s$ -grafiek als de kracht F niet constant van grootte is maar wel een constante hoek maakt met (de raaklijn aan) de weg.

- met de formule

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r}$$

voor kromlijnige bewegingen waarvoor de kracht constant van grootte en richting is (bijv. zwaartekracht).

ARBEID UITREKENEN

2.7 PROBLEMEN

Als afsluiting van dit hoofdstuk volgen een aantal problemen die je kunt oplossen met behulp van de theorie van dit hoofdstuk. Voor de oplossing van zo'n probleem moet je een aantal tussenstappen maken. Welke nodig zijn moet je zelf verzinnen. Dat hangt ook af van de oplosmethode die je volgt. Meestal zijn er meer oplosmethoden mogelijk. Als je de tussenstappen niet zelf kunt verzinnen, kun je gebruik maken van de tussenvragen die voor elk probleem gemaakt zijn. Je kunt ze aan je leraar vragen.

probleemoplossen

Probleemoplossen is een vaardigheid die belangrijk is in het vak natuurkunde. De hier gegeven problemen dienen om je te oefenen in deze vaardigheid. Als een ervaren iemand een probleem oplost verloopt het oplossingsproces meestal in een aantal *fasen*. Onervaren mensen hebben soms de neiging om achteraan te beginnen, bijvoorbeeld meteen een formule op te schrijven en te gaan uitrekenen zonder dat ze precies weten of ze de uitkomst nodig hebben of de juiste waarden invullen. Daarom kun je het beste proberen de volgende *fasen* achtereenvolgens af te werken. De overgang van de ene naar de andere fase verloopt overigens vloeiend zodat ze niet altijd goed te scheiden zijn.

1. *oriëntatiefase*

In deze fase probeer je duidelijk te krijgen wat het probleem precies is, welke gegevens je precies hebt en welke je wellicht mist. Je maakt ook een tekening en schrijft de gegevens overzichtelijk op. Je zoekt relevante theorie of formules op in je geheugen of in je boek en noteert die. Je beslist welke informatie belangrijk is voor het probleem en wat onbelangrijk is; welke vereenvoudigingen voor de probleemstelling verantwoord en/of nodig zijn. Ook het maken van een schatting van de grootte van een uitkomst is een goede oriënterende activiteit. Ervaren probleemoplossers besteden de meeste tijd aan deze fase, onervaren mensen hebben de neiging aan deze fase de minste tijd te besteden.

Voor dit blok is het bijvoorbeeld van belang na te gaan welk *systeem* het beste gekozen kan worden en welke de uitwendige krachten op het systeem zijn, van welke van die krachten het aangrijpingspunt verplaatst wordt. Je kunt ook vaststellen welke systeemenergieën veranderen en welke energiestromen optreden.

Als een kracht arbeid verricht moet je nagaan welk teken de arbeid heeft, of de kracht constant is en of die een hoek maakt met de afgelegde weg. Op grond daarvan kun je beslissen via welke methode je de arbeid moet bepalen en welke de eventuele ontbrekende gegevens zijn.

2. *vertaling*

In deze fase wordt het gestelde probleem vertaald in 'fysische termen': formules, aflezing van grafieken, preciese vektorconstructie, en dergelijke. In principe stel je dan vast welke dingen je allemaal moet doen om tot een oplossing van het probleem te komen.

ARBEID UITREKENEN

Voor dit blok is bijvoorbeeld van belang de energievergelijking van een systeem op te schrijven en formules voor arbeid, kinetische energie enz. daarin in te vullen. Ook kan het nodig zijn naar de som van de krachten te kijken en te beslissen of die al dan niet gelijk is aan nul of aan $m \cdot a$.

Het resultaat van deze fase is dat je precies weet wat je moet doen, invullen en/of uitrekenen om tot een oplossing te komen.

3. berekening

Je bepaalt dan de waarden die je nodig hebt en vult die in in vergelijkingen en dergelijke. Of je voert een constructie uit of je werkt een vergelijking uit tot het gewenste eindresultaat. Aan het eind van deze fase kun je een (of de) oplossing van het probleem geven.

4. controle en waardering

Het is een wijdverbreid misverstand dat het probleemoplosproces afgelopen is als een oplossing gevonden is. Een controle van de ingevulde waarden en berekeningen is altijd op zijn plaats.

Maar minstens zo belangrijk is het beantwoorden van de vraag: wat heb ik aan mijn uitkomst? Is die zo groot als verwacht? Is het probleem nu echt opgelost? Klopt de uitkomst wel met de gegevens? Wat is de *waarde* van de uitkomst in de praktijk van de aangeboden probleemcontext? De beantwoording van dergelijke vragen kan er toe leiden dat er fouten in de berekening of in de 'vertaling' opgespoord kunnen worden of dat je van de juistheid van de oplossing overtuigd raakt.

specifieke aanwijzingen voor de problemen van dit hoofdstuk.

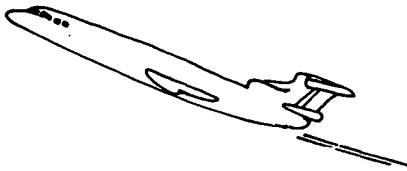
- | | |
|-------------------------|--|
| oriëntatie: | <ul style="list-style-type: none">- welk systeem kies je? Gedurende welke tijd?- welke krachten werken daarop?- welke krachten worden verplaatst?- geef in een tekening de krachten en de verplaatsingen aan.- wat is de aard van krachten (constant? hoek met de weg?) en de weg (rechlijnig of niet?)- welke zijn de relevante systeemenergieën?- welke energiestromen zijn er in of uit het systeem?- welke gegevens ontbreken? Geef die zonnodig een naam (bijv x) |
| vertaling: | <ul style="list-style-type: none">- kijk naar de som van de krachten- stel de energievergelijking op. Welke termen zijn positief, welke negatief?- stel de formule voor arbeid, kinetische energie e.d. op.- zoek methoden of vergelijkingen om de ontbrekende gegevens te berekenen/bepalen |
| berekening: | <ul style="list-style-type: none">- kies een assenstelsel en bereken de componenten van de relevante krachten.- construeer krachten op een bepaalde schaal en meet je tekening op.- meet en/of bereken hoeken- bepaal het oppervlak onder grafieken- enz. |
| controle en waardering: | <ul style="list-style-type: none">- goede eenheden vermeld?- kan het systeem wel zulke grote (kleine) krachten verdragen /zoveel vermogen leveren/zoveel arbeid verrichten?- enz. |

ARBEID UITREKENEN

Praten met anderen over het probleem waar je mee bezig bent helpt meestal veel, met name in de oriëntatie en de waarderingsfase. Daarom is het aan te raden om samen met anderen aan de volgende problemen te werken. Om de vaardigheid probleemoplossen beter in de vingers te krijgen is het goed na één of een aantal problemen met de leraar en klasgenoten terug te blikken op de vraag hoe je tot een oplossing bent gekomen. Wellicht helpt de bovenstaande verdeling in fasen daarbij.

Probleem 2.1: HET VERMOGEN VAN EEN VLIEGTUIG

Een straalverkeersvliegtuig ($m = 150$ ton) vliegt op een bepaald moment met 140 m/s en wil met die snelheid naar een grotere hoogte. Daartoe gaat het vliegtuig stijgen onder een hoek van 12° .



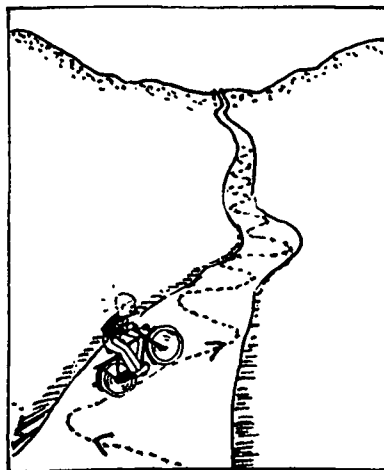
Op het vliegtuig wordt door de lucht een kracht uitgeoefend die je opgebouwd kunt denken uit een kracht loodrecht op de vliegrichting (de 'lift') en een wrijvingskracht tegen de vliegrichting in gericht (de 'drag'). Deze laatste is bij 140 m/s $2,5 \cdot 10^5$ N.

- Bereken het netto voortstuwingsvermogen dat het vliegtuig voor deze stijging nodig heeft.

Probleem 2.2 EEN BERG OPFIETSEN

Als je in de bergen fietst kom je soms hellingen van 15% of nog meer tegen. Het valt niet mee om daar tegenop te komen. Als er weinig verkeer is en de weg breed genoeg is kan je gaan zigzaggen waardoor je makkelijker tegen de helling op komt.

- Maak een schatting hoeveel je je weg moet verlengen door te zigzaggen om tegen een helling van 15% op te komen.

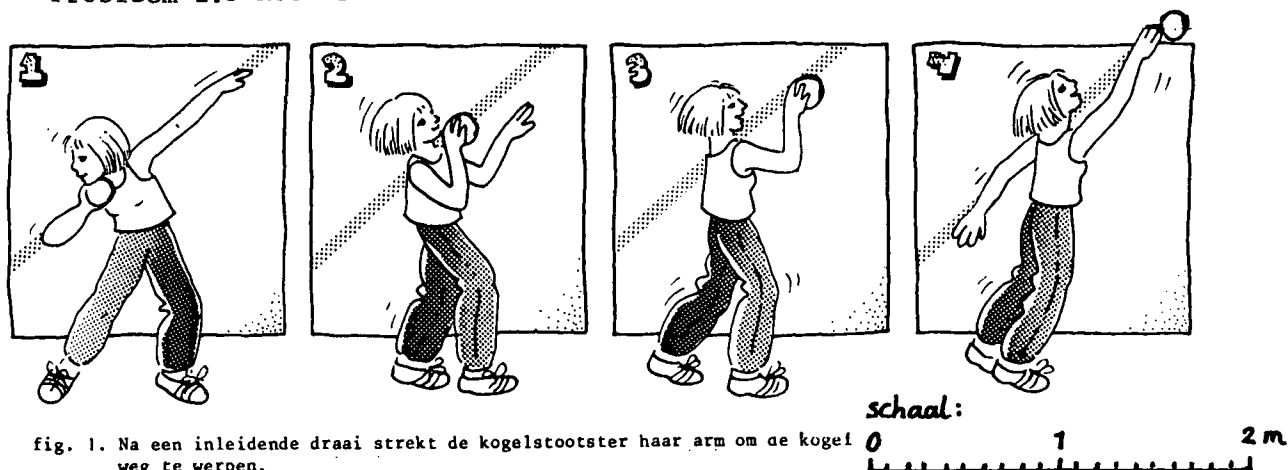


Maak daarvoor gebruik van:

- massa van fietser met fiets 80 kg
- snelheid 2 m/s (als je langzamer fietst val je snel om)
- de luchtweerstand is dus klein (1 N); de rolweerstand is 5 N
- je kunt gedurende langere tijd 140 W leveren voor arbeid door uitwendige krachten.

ARBEID UITREKENEN

Probleem 2.3 KOGELSTOTEN



Het meisje in de serie tekeningen van fig. 1 stoot een 3-kg kogel weg. De inleidende *draai* is niet getekend; daarbij heeft ze haar arm met kogel al een snelheid van 2 m/s gegeven, die bij het stoten toeneemt tot 6 m/s in plaatje 4:

Het tijdsinterval tussen twee opeenvolgende plaatjes is 0,07 s. Bij de tekening is de bijbehorende schaal gegeven.

►► Bereken de arbeid die de stootkracht van het meisje van plaatje 1 t/m 4 verricht.

Probleem 2.4 HET RENDEMENT VAN EEN FIETS

Er wordt wel eens gezegd dat een fiets een uitermate effectieve machine is door het grote rendement waarmee die de 'erin gestopte' energie gebruikt.

Janny wil dat onderzoeken. Zij meet daarvoor de rolwrijving en de luchtweerstand als ze 20 km/h gaat:

De rolwrijving is dan 4,8 N en voor de luchtweerstand meet ze 10,2 N.

Bovendien meet ze de kracht die ze op haar trappers uitoefent als functie van de hoek die de crank met de horizon maakt (zie fig. 1).

In fig. 2 staat het resultaat. De lengte l van de crank is 17,0 cm.

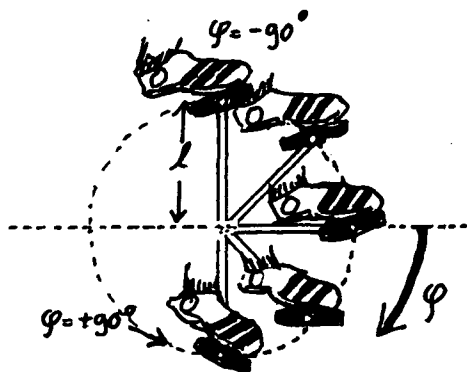


fig. 1 De stand van de trapper en de voet op verschillende tijden. De kracht wordt steeds in de richting van de draaicirkel gemeten.

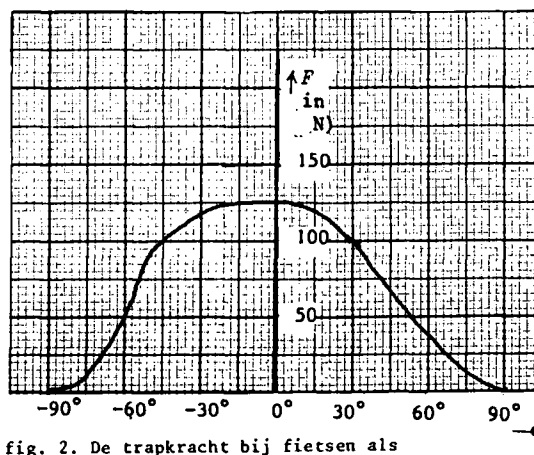


fig. 2. De trapkracht bij fietsen als functie van de draaiingshoek ϕ .

ARBEID UITREKENEN

Als de trapper éénmaal rond is heeft ze 5,1 m afgelegd.

►► Bepaal het rendement van de fiets.

Probleem 2.5 WELK MOTORVERMOGEN?

Van een moderne, aerodynamisch ontworpen auto zijn twee versies die aan de buitenkant gelijk zijn, maar een verschil in motorvermogen hebben.

Gegevens:	Model A	Model B
max. vermogen (kW)	44,6	67
cilinderinhoud (cm ³)	1360	1580
massa (kg)	885	950
<u>verbruiken (liters per 100 km)</u>		
• constante snelheid 90 km/h	5,6	5,5
• constante snelheid 120 km/h	7,5	7,3
• stadsverkeer	7,7	9,0
• gemiddeld	6,9	7,2
max. snelheid (in km/h)	155	176
acceleratie 0-100 km (in s)	15,6	11,3
C _w -waarde	0,33	0,33
Frontoppervlak (m ²)	2,0	2,0
rolwrijving (N)	2,4	2,6
prijs (f)	40.000	50.000

Uit deze lijst kunnen als voordelen van model B ten opzichte van model A gezien worden:

- sneller optrekken, wat met name bij het passeren van een voorligger gebruikt wordt
 - hogere maximumsnelheid (maar de wettelijke maximumsnelheid is 100 km/h).
- Nadelen zijn:

- de massa van de auto is groter
- het gemiddeld bezineverbruik is hoger
- model B is duurder.

Eén belangrijk voordeel van model B kan niet uit de gegevens worden afgelezen: de prestaties in de bergen.

►► Is het met (één van) beide modellen mogelijk om met 108 km/h (30 m/s) een helling van 10% op te rijden?

Gebruik als formule voor de luchtwrijving:

$$F_l = c_w \cdot A \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2$$

met ρ de dichtheid van de lucht en A het frontoppervlak.

ARBEID UITREKENEN

Probleem 2.6 RENDEMENT VAN DE ELOK 1600

Een lokomotief van het type Elok 1600 trekt 8 wagons tussen Helmond en Venlo op een horizontaal baanvak. De trekkracht van de lokomotief ($m = 40$ ton) op de rest van de trein ($m = 505$ ton) wordt tijdens de rit gemeten: deze is gemiddeld 110 kN. De snelheid is dan 30 m/s. Het vermogen dat uit de bovenleiding wordt opgenomen, is ook geregistreerd: 4,0 MW.

De som van de luchtwrijving, rolwrijving en gemiddelde slipwrijving op de lokomotief is 5,0 kN.

Let op: de som van de genoemde wrijvingskrachten op de gehele trein is veel groter; die is echter in de trekkracht op de lokomotief inbegrepen.

►► Bereken het rendement van de lokomotief

Probleem 2.7 CAPACITEIT VAN EEN AARDGASCOMPRESSOR STATION

In het Nederlandse aardgasnet is een grote gasleiding van Slochteren (Gr) naar de Randstad opgenomen. De pijpdoorsnede is $1,00 \text{ m}^2$.

Om de 100 km is de leiding onderbroken voor een compressor (= samenpers-) station: er staat er bijv. één in Ravestein en één in Ommen. Daar wordt de druk verhoogd van 44 bar tot 65 bar (1 bar = 1000 mbar = $10^5 \text{ Pa} = 10^5 \text{ N/m}^2 = \text{ca. } 1 \text{ atm}$ (atmosfeer)); de druk in de leiding daalt namelijk tijdens het transport, o.a. door wrijving. De compressorstations werken dus als gaspomp.

Het proces van samenpersen van het gas staat schematisch in fig. 1 getekend:

- Het gas dat onder een druk van 44 bar in het compressorstation aan komt wordt in de cilinder gezogen: totaal $1,00 \text{ m}^3$ (zie fig. 1a).
- Het gas wordt samengeperst tot 65 bar, waarbij de zuiger 27 cm verplaatst wordt (fig. 1b). Voor de eenvoud is aangenomen dat de temperatuur van het gas ongeveer constant blijft, wat in werkelijkheid zeker niet het geval is.
- Vervolgens gaat een klep open en wordt het gas bij 65 bar het leidingsnet ingeperst (fig. 1c).
- Nu kan een volgende hoeveelheid gas in de cilinder gezogen worden.

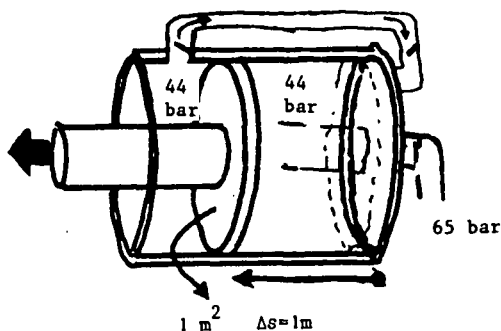


fig. 1a Het inzuigen van het aardgas

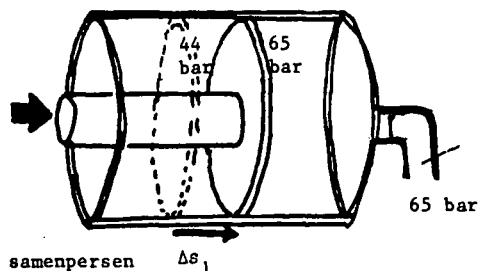


fig. 1b Het samenpersen

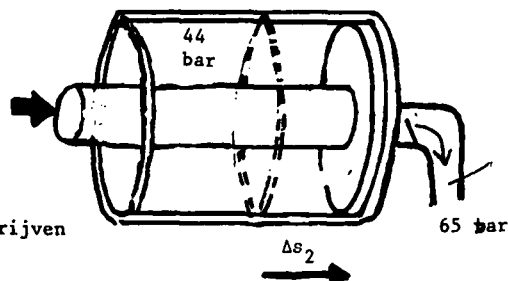


fig. 1c Het uitdrijven

ARBEID UITREKENEN

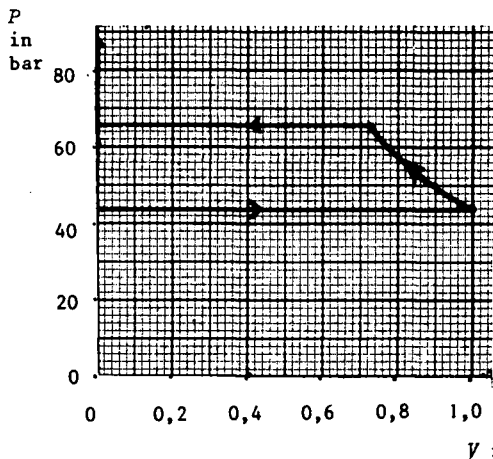


fig. 2 De grafiek van druk en verplaatsing bij het samenpersen van aardgas in een compressor bij constante temperatuur.

De druk van het gas in de cilinder staat als functie van de verplaatsing in fig. 2 getekend.

Op strenge winterdagen, als de gasleverantie maximaal is, moet een compressorstation voldoende aardgas kunnen verpompen. Elk station werkt zelf ook op aardgas (en neemt dus een klein gedeelte op uit de leiding, maar dat mag je verwaarlozen) en heeft een vermogen van 75 MW dat met een rendement van 33% gebruikt kan worden.

- Hoeveel m^3 gas van 44 bar kan een compressorstation maximaal verpompen per seconde? Is dat voldoende om aan een maximum aanvraag van $1600 \text{ m}^3/\text{s}$ (onder normale druk) op een koude winterdag te voldoen?

3.ARBEID GEBRUIKEN

Inhoud:

3.1 Een energievergelijking opstellen	42
3.2 Verandering van kinetische energie	43
3.3 Netto kracht en netto arbeid	45
3.4 De schuif wrijvingskracht als een zich aanpassende kracht	52
3.5 Zwaarte-energie	56
3.6 Conservatieve krachtvelden	59
3.7 Potentiële energie	61
3.8 De veerkracht als conservatieve kracht	61
3.9 Arbeid door actie- en reaktiekracht	64
3.10 Problemen	66



vooruitblik

Door de energievergelijking van een systeem op te schrijven kun je tot uitdrukking brengen welke interne energieomzettingen plaatsvinden en welke energie van buitenaf wordt toe-(of af-)gevoerd via arbeid, warmtetransport en straling. Je hebt arbeid dus nodig voor de energievergelijking.

Je kunt arbeid ook gebruiken om krachten uit te rekenen. Daarbij zal blijken dat het produkt van netto kracht en verplaatsing van het zwaartepunt niet altijd de som van de hoeveelheden arbeid die verricht zijn oplevert. Om zwaarteenergie of in het algemeen potentiële energie goed te definiëren heb je ook het begrip arbeid nodig.

Al met al vormt arbeid de schakel tussen de mechanica en de energieleer, wat van groot belang is voor het oplossen van problemen van allerlei aard, die je aan het eind van dit hoofdstuk zult tegenkomen.

ARBEID GEBRUIKEN

3.1 EEN ENERGIEVERGELIJKING OPSTELLEN

Wil je van de fietser uit fig. 3.1 weten hoe groot het vermogen is dat hij ontwikkelt, dan kan je als systeem fietser en fiets nemen. De krachten op dat systeem zijn de zwaartekracht, de normaalkracht, de luchtwrijving, de rolwrijving en de kracht van de weg op de fiets. De kracht van de fietser op de pedalen is dan een *interne kracht*: die mag je niet meetellen bij het opstellen van je energievergelijking.

De energievergelijking wordt dan:

$$W_{zw} + W_{nor} + W_{lucht} + W_{rol} + W_{weg} + Q = \Delta E_k + \Delta E_{chem}$$

Daarin is Q de term die aangeeft hoeveel energie er via warmte, straling etc. het systeem uit naar buiten 'verdwijnt' of in het systeem wordt opgenomen (bijv. als de zon schijnt). Je kunt ook Q en de ΔE_{chem} samennemen door op de plaats van de chemische energie $\eta \cdot \Delta E_{chem}$ te schrijven. Je neemt dan via het rendement η alleen dat deel van de chemische energie mee dat voor energieoverdracht via arbeid beschikbaar is.

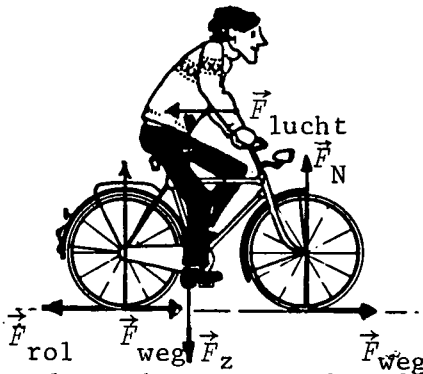


fig. 3.1 De krachten op het systeem fietser en fiets

Een aantal van bovengenoemde arbeiden zijn nul en kunnen dus weggelaten worden. De normaalkracht verricht bij fietsen geen arbeid, want die staat loodrecht op de weg: $W_{nor} = 0$.

Ook de arbeid die de weg op de fiets uitoefent is nul omdat in het raakpunt weg en het stukje fietsband (behalve bij slippen!) niet ten opzichte van elkaar bewegen. Dit moeilijke punt komt verderop nog meer aan de orde.

Aan de kant van de energieveranderingen staat geen verandering van zwaarte-energie. Zwaarte-energie is in het gekozen systeem geen systeemenergie. Immers: zwaartekracht wordt als een uitwendige kracht gezien die arbeid verricht. In een systeem met zwaarte-energie moet de zwaartekracht dus een interne kracht zijn want je moet of de arbeid van de zwaartekracht in het linkerlid of de zwaarte-energie in het rechterlid van de energievergelijking meenemen. Beide doen leidt tot dubbel tellen.

Een ander belangrijk punt is dat je moet weten gedurende welke tijd je naar het systeem kijkt. Alleen maar als de fiets een constante snelheid heeft? Of ook bij het optrekken en afremmen? Alleen zo lang die over een vlakke weg rijdt of ook tijdens het op- en afrijden van een helling?

Wat je moet doen bij het opstellen van een energievergelijking:

- Kies een systeem waarvoor de energievergelijking moet gaan gelden en bepaal zorgvuldig wat wel en wat niet tot je systeem behoort.
- Kies de periode of het deel van de beweging gedurende welke je het systeem bekijkt.
- Bepaal welke (uitwendige) krachten er op het gekozen systeem werken: deze kunnen arbeid verrichten die in het linkerlid van de energievergelijking komt te staan.
- Bepaal welke systeemenergieën er in het systeem komen te staan: deze komen in het rechterlid van de energievergelijking te staan.

ARBEID GEBRUIKEN

- Beslis of je energiestromen door warmtetransport, straling, geluid-transport, elektrisch transport etc. afzonderlijk beschrijft of via een rendementsfaktor η in één van de systeemenergieën meeneemt.

1 WELK SYSTEEM?

Via het opstellen van een vergelijking wil men te weten komen hoeveel vermogen er maximaal via arbeid door de remkracht van de remblokjes op een fietswiel geabsorbeerd kan worden.

Welk systeem zou je voor dat probleem kiezen?

Teken de krachten die op dat systeem werken, bepaal de systeem-energieën en stel de energievergelijking op.

2 TOUWTREKKEN

Bij het touwtrekken sleept een man twee kinderen met 10 cm/s drie meter door het zand heen. De kracht in het touw is daarbij $3 \cdot 10^2$ N. Bekijk het systeem 'man' en het systeem 'kinderen'.

- Teken de krachten die op beide systemen werken en de eventuele wegen waarover die krachten verplaatst worden.
- Stel de energievergelijking van beide systemen op.
- Bepaal hoeveel chemische energie in beide systemen is omgezet als in beide systemen 10^4 J warmte is vrijgekomen tijdens dit deel van de touwtrekwedstrijd.

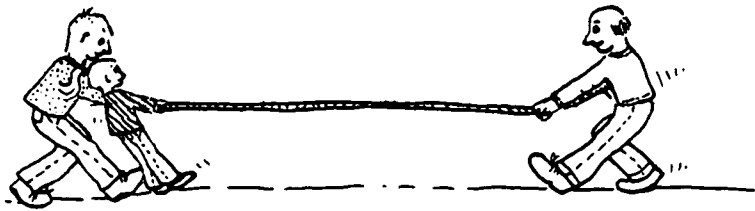


fig. 3.2 De man sleept de kinderen voort

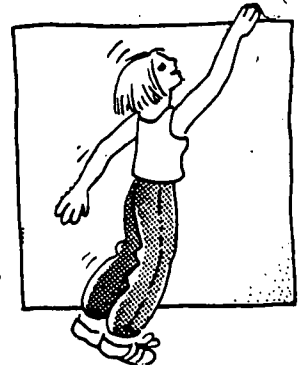


fig. 3.3

3 SYSTEEM 'BAL'

Janneke moet de energievergelijking van een bal die recht omhoog geworpen wordt beschrijven gedurende de 'vrije val'. Ze kiest twee systemen: de bal tijdens de beweging omhoog en de bal tijdens de beweging omlaag.

Irma zegt: dat hoeft niet: je kunt de beweging omhoog en omlaag als één systeem beschrijven. Wat vind jij daarvan

- als de wrijvingskracht niet verwaarloosd mag worden;
- als dat wel mag?

3.2 VERANDERING VAN KINETISCHE ENERGIE

Als er een nettokracht op een voorwerp werkt krijgt het voorwerp een versnelling en dus verandert de snelheid. Als de kracht een component in de richting van de snelheid heeft, neemt de snelheid toe of af en verandert de kinetische energie. (Anders verandert alleen de richting.) Bij rechtlijnige bewegingen kun je als de kracht (ongeveer) de grootte van de snelheidsverandering met de mechanicaformules uitrekenen, bijv. met:

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v \text{ en}$$

$$\Delta s = \left(\frac{v_e + v_b}{2} \right) \cdot \Delta t$$

ARBEID GEBRUIKEN

Dit stel formules ben je tegengekomen als je het thema 'Verkeer' hebt gedaan.

De snelheidsverandering kun je ook berekenen met de formules

$$F = m \cdot a \text{ en}$$

$$s(t) = v(o) \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

$$v(t) = v(o) + a \cdot t$$

Dit stel formules kun je in alle mechanica leerboeken vinden en staat bijv. ook in het blok 'Bewegingen'.

Om de verandering van snelheid, en dus van kinetische energie, te kunnen berekenen heb je bij gebruik van bovenstaande formules altijd de tijd als tussenstap nodig. Via arbeid kan je deze tussenstap omzeilen.

4 REKENEN MET MECHANICA FORMULES

Op de slee van een luchtkussenbaan ($m = 500 \text{ g}$) kan je een kracht van 2 N laten werken.

De slee kan daardoor versneld van de ene kant van de baan naar de andere gaan, over een totale afstand van $1,70 \text{ m}$.

Bereken de verandering van kinetische energie met behulp van de hierboven staande formules.

Door de bovenste twee of de daaronderstaande drie formules met elkaar te combineren krijg je de relatie:

$$F_{\text{netto}} \cdot \Delta s = \Delta E_k$$

Daarin komt de tijd niet voor. In problemen kun je vaak deze relatie veel sneller en makkelijker toepassen dan een van de beide formule paren van hierboven: je hoeft dan maar één formule toe te passen en je hebt de tijd als tussenstap niet nodig. Deze *rekenregel van de kinetische energie* kun je in veel gevallen gebruiken om de nettokracht, de weg of de snelheid uit te rekenen.

5 KINETISCHE ENERGIE - REKENREGEL

Reken de verandering van kinetische energie uit opdracht 4 nogmaals uit, nu met bovenstaande rekenregel. Vergelijk je uitkomst met die van opdracht 4.

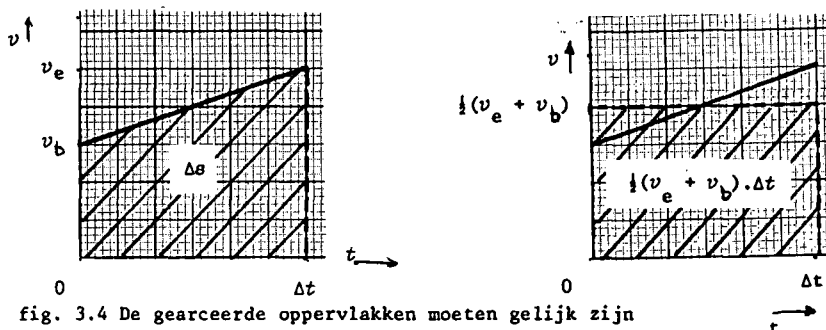
Uiteraard is er een samenhang tussen de genoemde formules:

samenhang tussen formules

Neem bijvoorbeeld de formules zoals ze in het thema 'Verkeer' gebruikt zijn:

$$F_{\text{netto}} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v \quad (1)$$

$$\Delta s = \left(\frac{v_e + v_b}{2} \right) \Delta t \quad (2)$$



ARBEID GEBRUIKEN

Strikt genomen gelden ze slechts voor constante krachten
Deze formules hangen nauw samen met de wet van kinetische energie en
arbeid: wiskundig gezien kan je de kinetische energie-rekenregel eruit
afleiden.

Uit formule (2) volgt:

$$\Delta t = \frac{2 \cdot \Delta s}{v_e + v_b}$$

Substitutie in (1) levert:

$$F_{\text{netto}} \cdot \frac{2 \cdot \Delta s}{v_e + v_b} = m \cdot \Delta v$$

met $\Delta v = v_e - v_b$ kan je dat schrijven als:

$$F_{\text{netto}} \cdot \Delta s = \frac{1}{2} m \cdot (v_e + v_b) \cdot (v_e - v_b)$$

en dat leidt tot de gewenste rekenregel

$$F_{\text{netto}} \cdot \Delta s = \Delta \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

6 BEWEGINGEN EN ARBEID

Puzzel voor geïnteresseerden:

Laat zien dat je uit de formule

$$F = m \cdot a$$

samen met de plaatsfunctie $s(t)$ en de snelheidsfunctie $v(t)$ voor
eenparig versnelde bewegingen (uit 'Bewegingen') ook de wet van
arbeid en kinetische energie kunt 'afleiden'.

Samengevat:

*Voor elk voorwerp dat eenparig versneld (rechtlijnig) wordt (ook als $a = 0$
dus het geval van een eenparige beweging) kun je opschrijven:*

$$F_{\text{netto}} \cdot \Delta s = \Delta E_k$$

waarbij F_{netto} de som van alle krachten op het voorwerp is en Δs de
verplaatsing van het zwaartepunt van het voorwerp. Deze rekenregel van
kinetische energie kan in plaats van de mechanicaformules gebruikt
worden, bijv. om de nettokracht uit te rekenen of de verandering van
kinetische energie.

3.3 NETTO KRACHT EN NETTO ARBEID

$F_{\text{netto}} \cdot \Delta s$ is een netto kracht maal een weg. Is dit nu ook een *netto arbeid*?

Met andere woorden: geeft $F_{\text{netto}} \cdot \Delta s$ nu ook de som van alle 'arbeiten' die

op het voorwerp verricht zijn? Geeft dat dus de netto mechanische energie
die van buitenaf aan het voorwerp is overgedragen? En hoe hangt dat samen
met de energievergelijking?

Het antwoord op deze vraag is: in bijzondere gevallen wel maar meestal niet.
Dat wordt toegelicht aan de hand van drie voorbeelden: een bal die omhoog
geworpen wordt, iemand die omhoog springt en een rond voorwerp dat de
helling af komt rollen.

1e voorbeeld: een omhoog geworpen bal

Een tennisbal van 80 g wordt recht omhoog gegooid en verlaat de hand van
de werper met een snelheid van 7,7 m/s. De hand bevindt zich dan 1,80 m
boven de vloer en heeft over 1,10 m een constante kracht uitgeoefend.

ARBEID GEBRUIKEN

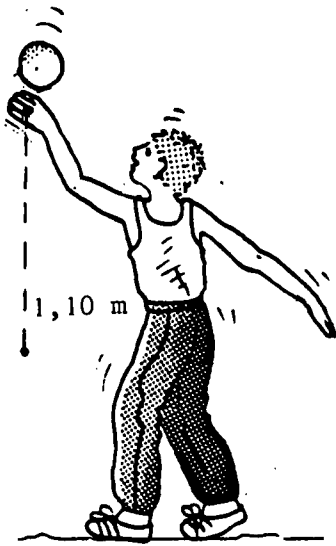


fig. 3.5 De hand van de jongen oefent over 1,10 m een kracht op de bal uit.

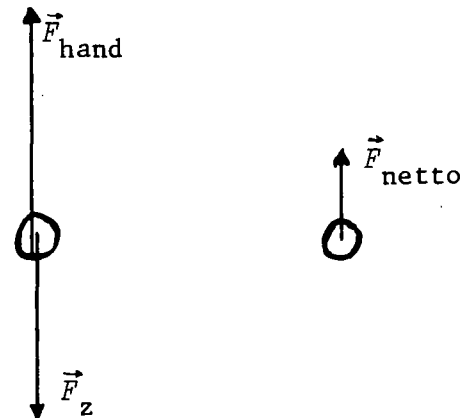


fig. 3.6 a. De krachten op de bal
b. De nettokracht op de bal

Je kunt nu uitrekenen hoe groot de kracht van de hand op de bal was en hoe hoog de bal komt. Verwaarloos de luchtwrijving, maar even voor het gemak.

De nettokracht tijdens de worp is te berekenen:

$$F_{\text{netto}} \cdot 1,10 = \frac{1}{2} 0,080 (7,7^2 - 0)$$

$$F_{\text{netto}} = 2,2 \text{ N}$$

Aangezien de zwaartekracht $9,8 \cdot 0,080 = 0,80 \text{ N}$ omlaag is moet de kracht van de hand op de bal $3,0 \text{ N}$ geweest zijn.

Als je nu gaat kijken naar de arbeid die door de twee krachten is verricht krijg je:

$$W_{\text{zwaarte}} = -0,80 \cdot 1,10 = -0,88 \text{ J}$$

$$W_{\text{hand}} = +3,0 \cdot 1,10 = +3,3 \text{ J}$$

De netto-arbeid is $W_{\text{netto}} = 3,3 - 0,88 = 2,4 \text{ J}$ (eigenlijk $2,42 \text{ J}$, maar de laatste 2 is onbetrouwbaar omdat 3,3 betekent dat de waarde tussen 3,25 en 3,35 ligt).

Voor het produkt van netto kracht en weg krijg je:

$$F \cdot \Delta s = 2,2 \cdot 1,10 = 2,4 \text{ J}$$

Dat is gelijk aan de netto arbeid, de som van W_{zwaarte} en W_{hand} : er is $3,3 \text{ J}$ mechanische energie toegevoerd waarvan $0,88 \text{ J}$ wegens toename van zwaarte-energie opgaat en de rest over is als kinetische energie. Nu de energievergelijking. Kies als systeem de bal tijdens het wegwerpen. De uitwendige krachten zijn dus de kracht van de hand en de zwaartekracht. De systeemenergie is alleen de kinetische energie. De energievergelijking wordt:

$$W_{\text{zwaarte}} + W_{\text{hand}} = \Delta E_k$$

$$E_z \cdot \Delta s + F_w \cdot \Delta s = \Delta E_k$$

$$(\Sigma F) \cdot \Delta s = \Delta E_k$$

$$F_{\text{netto}} \Delta s = \Delta E_k$$

De energievergelijking en de rekenregel van de kinetische energie nemen dus in dit geval dezelfde vorm aan. Maar is dat altijd zo?

ARBEID GEBRUIKEN

8 HOE HOOG KOMT DE BAL?

Bereken hoe hoog de opgeworpen bal komt.

2e voorbeeld: iemand springt omhoog

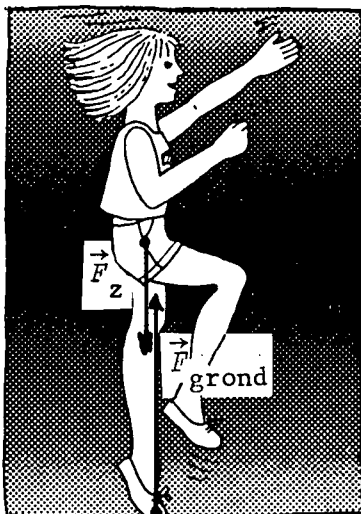


fig. 3.7

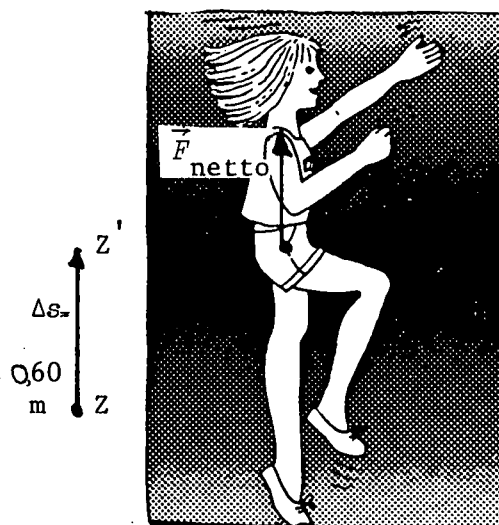


fig. 3.8 De nettokracht op het meisje en de verplaatsing van het zwaartepunt

Een meisje van 1,60 m en 60 kg springt vanuit een door de knieën gezakte stand recht omhoog. Zo oefent ze gedurende enige tijd een kracht uit waardoor haar zwaartepunt 60 cm omhoog gaat en ze met een snelheid van 4 m/s recht omhoog van de vloer loskomt.

Je kunt nu gaan uitrekenen hoe groot de kracht is die zij van de vloer heeft ondervonden en hoe hoog ze springt. Ook hier wordt de luchtweerstand verwaarloosd.

De nettokracht tijdens het afzetten is te berekenen via:

$$F_{\text{netto}} \cdot 0,60 = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 4^2$$

$$F_{\text{netto}} = 8,0 \cdot 10^2 \text{ N}$$

Aangezien de zwaartekracht $5,9 \cdot 10^2 \text{ N}$ is, is de kracht op haar voeten dus $13,9 \cdot 10^2 \text{ N}$ geweest.

Als je nu gaat kijken naar de arbeid die door de twee krachten, de afzetkracht F_{afzet} en de zwaartekracht F_z is verricht krijg je:

$$W_{\text{zwaarte}} = -9,8 \cdot 60 \cdot 0,60 = -3,5 \cdot 10^2 \text{ J}$$

$$W_{\text{afzet}} = 13,9 \cdot 10^2 \cdot 0 = 0$$

De voeten van het meisje bleven immers tijdens het afzetten op de vloeren het aangrijpingspunt van de afzetkracht werd niet verplaatst. Dat er bij het afzetten geen (uitwendige) arbeid werd verricht kan je ook zien aan het feit dat er geen energie van de vloer aan het meisje werd overgedragen.

In dit voorbeeld is het produkt van de nettokracht maal de weg dus *niet* gelijk aan de netto arbeid: de eerste is $4,8 \cdot 10^2 \text{ J}$ en de tweede is $-3,5 \cdot 10^2 + 0 = -3,5 \cdot 10^2 \text{ J}$. Het verschil tussen die twee zit 'm in het feit dat er in het lichaam van het meisje (chemische) energie wordt vrij-

ARBEID GEBRUIKEN

gemaakt. Daardoor ziet de energievergelijking van het systeem 'meisje' er als volgt uit:

$$W_{\text{zwaarte}} + Q = \Delta E_k + \Delta E_{\text{chem}}$$

Als het rendement van de omzetting van chemische energie η is kan je de warmteontwikkeling Q verrekenen door de energieën vergelijking te schrijven als

$$W_{\text{zwaarte}} = E_k + \eta \cdot \Delta E_{\text{chem}}$$

$$-3,5 \cdot 10^2 = 4,8 \cdot 10^2 + \eta \cdot \Delta E_{\text{chem}}$$

$$\eta \cdot \Delta E_{\text{chem}} = -8,3 \cdot 10^2 \text{ J}$$

ΔE_{chem} is negatief omdat de chemische energie van het meisje afneemt.

9 HOE HOOG KOMT HET MEISJE?

Bereken zelf hoe hoog het zwaartepunt van het meisje komt.

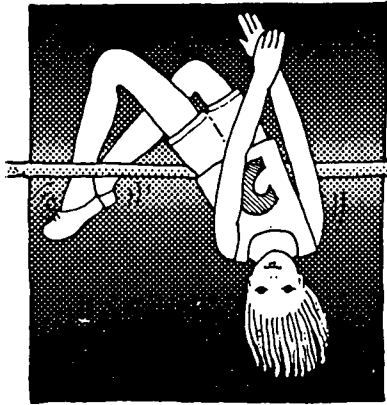


fig. 3.9

de rol van vervorming

Waarin zit nu het verschil tussen deze twee voorbeelden? Het antwoord daarop is: in de *vervorming* van het systeem waarop arbeid verricht wordt. Van de bal die omhoog gegooid wordt heb je (in feite ongemerkt) aangenomen dat die niet vervormd wordt: daardoor worden de zwaartekracht en de kracht van de hand over *precies dezelfde* afstand verplaatst. De netto kracht, waarvan je aanneemt dat die in het zwaartepunt aangrijpt, wordt dus ook over dezelfde afstand verplaatst als de zwaartekracht en de kracht van de hand.

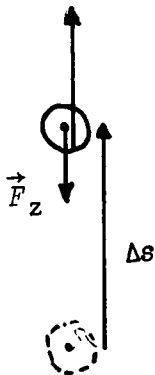
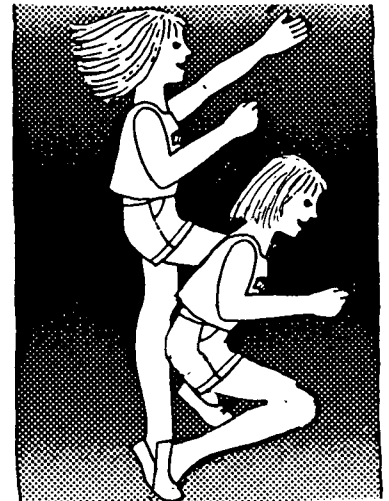


fig. 3.10 De bal: geen vervorming. Alle krachten worden over dezelfde afstand verplaatst.

fig. 3.11 Het meisje: wel vervorming tijdens het springen.



ARBEID GEBRUIKEN

Bij het opspringen is dat anders: het lichaam van het meisje wordt wél vervormd, o.a. door de beweging van haar benen. Daardoor wordt de kracht van de vloer *niet* en de zwaartekracht *wél* verplaatst.

Toch mag je ook in dit geval de rekenregel van de kinetische energie wel toepassen, maar de uitkomst van $F_{\text{netto}} \cdot \Delta s$ mag je niet zien als een

in werkelijkheid verrichte arbeid: de afzetkracht, die wel in F_{netto} zit wordt immers niet over de afstand Δs , de verplaatsing van het zwaartepunt, verplaatst.

Vervormingen kosten altijd energie of leveren energie op. Dan kan 'passief' zijn: louter mechanische energie opslaan en weer afgeven zoals bij de vervorming van een bal die op de grond stuitert, of 'actief' zoals bij het springende meisje waarin een niet mechanische energie (in dit geval chemische energie) in mechanische energie wordt omgezet of omgekeerd. In de energie vergelijking komt er dan aan de rechterkant een term bij:

$$\begin{array}{ccccccc} W_{\text{afzet}} & + & W_z & = & \Delta E_k & + & \Delta E_{\text{chem}} \\ \parallel & & & & & & \\ 0 & < 0 & > 0 & < 0 \end{array}$$

10 ARBEID DOOR DE NETTOKRACHT?

Ga na in welke van de volgende situaties $F_{\text{netto}} \cdot \Delta s \neq W_{\text{netto}}$ is. Je kijkt naar de krachten op:

- een slee die (met wrijving) van de helling glijdt;
- een auto die tegen een betonnen muur botst;
- een fiets die door remblokjes op de fietswielen tot stilstand komt;
- een schip dat via een lier en een aan de wal vastgemaakte kabel door een matroos naar de wal wordt gelierd;
- op een bergbeklimmer waarvan de val door een geborgd rekbaar touw wordt afgeremd;

Geef, waar nodig, van de gekozen systemen ook de vervorming aan.

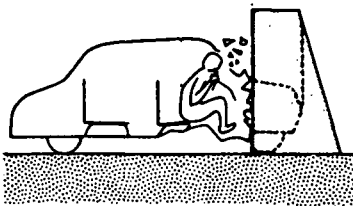


fig. 3.12 Botsing tegen een betonnen muur

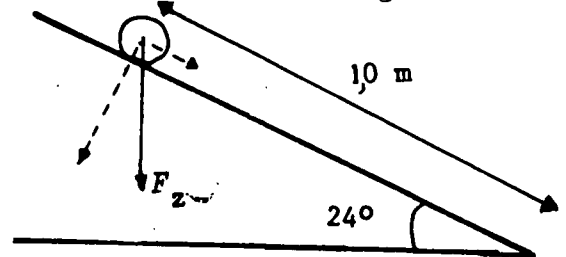


fig. 3.13 Een buis die van een helling afrolt

3e voorbeeld: een rollend voorwerp

Een stukje van een holle aluminium buis gaat zonder slip van een helling van 24° afrollen. Bovenaan de helling is zijn snelheid 0, onderaan de helling 1,0 m verder is zijn snelheid 2,0 m/s geworden. Neem aan dat de massa van de buis 1,0 kg is.

Uit de rekenregel voor de kinetische energie kun je nu uitrekenen hoe groot de netto kracht op de buis is:

$$\begin{aligned} F_{\text{netto}} \cdot \Delta s &= \Delta \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \\ F_{\text{netto}} \cdot 1 &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (4^2 - 0) \\ F_{\text{netto}} &= 2,0 \text{ N} \end{aligned}$$

ARBEID GEBRUIKEN

Als je nu naar alle krachten op de buis gaat kijken zie je dat op de buis, behalve de zwaartekracht, ook de normaalkracht moet werken en mogelijk een wrijvingskracht tussen de buis en de helling. Neem voor het gemak aan dat er geen sprake is van luchtwrijving. In fig. 3.14 staan de krachten aangegeven. De aangrijpingspunten zijn ook getekend. Die zullen belangrijk blijken te zijn.

Omdat de som van de krachten 2 N langs de helling omlaag moet zijn, moet gelden:

$$F_N = 9,1 \text{ N}$$

$$F_w = 2,0 \text{ N}$$

Nu kan ook de netto arbeid op de rol uitgerkend worden. Voor de zwaartekracht geldt:

$$F_{\text{zwaarte}} \cdot \Delta s = +4,0 \text{ J} = +4,0 \text{ J}$$

De normaalkracht verricht nooit arbeid: die staat loodrecht op de weg. En de wrijvingskracht? Dat zit ingewikkelder.

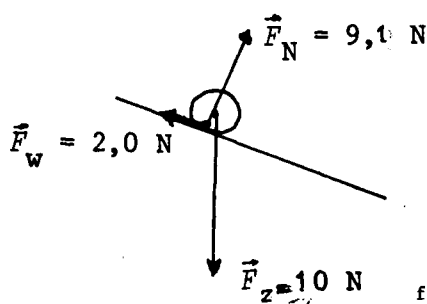


fig. 3.14 De krachten op de buis

rotatie-energie

De kinetische energie onderaan de helling, ten gevolge van de snelheid van 2 m/s kun je uitrekenen: $E_k = 2,0 \text{ J}$.

Je mist nog 2,0 J energie, want door de arbeid van de zwaartekracht is 4,0 J vrijgekomen. Nu is het verleidelijk om te zeggen dat die 2,0 J vanwege de negatieve arbeid van de wrijvingskracht als warmte wordt afgegeven. Maar dat is niet waar! Je buis gaat rollen en krijgt dus ook *rotatie-energie*.

Dat is te begrijpen door te kijken naar de weg waarover de wrijvingskracht werkt. De buis rolt zonder slip. Met andere woorden: de momentane snelheid van de lijn waarop de buis de helling raakt is tijdens het rollen nul. Welliswaar verplaatst die lijn zich over het oppervlak van de buis, maar bij die verplaatsing raakt het oppervlak al niet meer aan die lijn. De wrijvingskracht werkt dus steeds op een andere raaklijn, wordt niet verplaatst en verricht dus geen arbeid.

$$W_{\text{wrijving}} = 0$$

Toch heeft de wrijvingskracht wél een ander effect: door de combinatie van de wrijvingskracht (aangrijpingspunt op het oppervlak) en de zwaartekracht (aangrijpingspunt in het zwaartepunt) werkt er een *koppel* op de buis waardoor de rotatie-energie toeneemt.

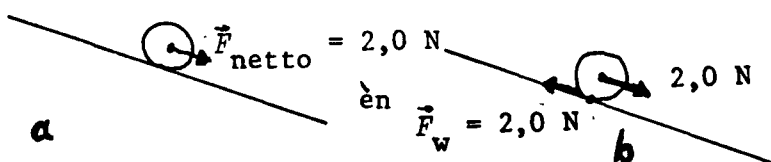


fig. 3.15 a. De netto kracht op de buis
b. Het koppel op de buis

ARBEID GEBRUIKEN

De energie vergelijking van het systeem 'rollende buis' wordt dus:

$$W_{\text{zwaarte}} = \Delta E_{\text{trans}} + \Delta E_{\text{rot}}$$

ΔE_{kin} moet hier dus worden gezien als de toename van de *translatieenergie* ΔE_{trans} .

11 LATEN ROLLEN (proef)

Laat van een helling een holle buis en een massieve staaf rollen. Zorg dat je de helling niet te steil maakt om doorslippen te voorkomen.

Wat neem je waar? Waardoor zou dat komen? Aktiviteit 12 gaat daar op in.

12 ROLLENDE BUIS EN STAAF

In deze opdracht gaat het om het vergelijken van de beweging van een aluminium staaf, ook van 1,0 kg, met dezelfde straal als de aluminium buis.

Om deze buis onder aan de helling ook een snelheid van 2,0 m/s te laten hebben moet de helling van 1,0 m tot 0,75 m verkort worden.

- Bereken de wrijvingskracht op de aluminium buis met behulp van de rekenregel voor kinetische energie.
- Bereken de arbeid die de afzonderlijke krachten op de aluminium staaf verrichten
- Stel de energievergelijking op en bereken daarmee de rotatie-energie.
- Waarom is het nodig dat op de aluminium staaf een kleinere wrijvingskracht werkt?
- Wat is je conclusie t.a.v. de rotatieenergie van een holle buis vergeleken met die van een massieve cilinder (als ze even snel rollen).
- Hoe zal een vliegwiel dus zoveel mogelijk geconstrueerd worden?



fig. 3.16 De rollende buis en de rollende staaf

overeenkomsten en verschillen tussen de drie voorbeelden

De overeenkomsten tussen de drie voorbeelden zijn:

- de wet van behoud van energie geldt: er is een energievergelijking op te schrijven van de vorm:

$$\Sigma W + Q = \Delta E_{\text{trans}} + \Delta E_{\text{rot}} + \Delta E_{\text{inw}} + \Delta E_{\text{chem}} + \dots$$

- met behulp van de kinetische-energie-rekenregel kan de netto kracht (op het zwaartepunt), of de verandering van kinetische energie uitgerekend worden.

$$F_{\text{netto}} \cdot \Delta s = \Delta E_k \quad (\Delta E_k = \Delta E_{\text{trans}}!)$$

ARBEID GEBRUIKEN

Deze twee regels gelden algemeen, maar het uitwerken ervan kan soms erg ingewikkeld zijn.

Een belangrijk verschil tussen het eerste voorbeeld en de twee andere is dat er in de energievergelijking van het eerste voorbeeld rechts alleen de kinetische energieterm voorkwam, bij de twee andere kwam daar nog een term bij (resp. ΔE_{chem} en ΔE_{rot}).

Het gevolg daarvan is dat de energievergelijking en de kinetische-energie-rekenregel in het eerste voorbeeld met elkaar samenvallen. Dat betekent dan ook dat $F_{\text{netto}} \cdot \Delta s = W_{\text{netto}} (= \Sigma W)$.

Zodra echter aan de rechterkant van de energie-vergelijking een andere term $\neq 0$ dan alleen de ΔE_k optreedt verschillen de kinetische energie regel en de energievergelijking van elkaar en heeft het produkt $F_{\text{netto}} \cdot \Delta s$ geen betekenis in de zin van arbeid door de netto kracht meer.

Er kunnen dan uitwendige krachten optreden die wel wezenlijk zijn voor optreden van de energieomzettingen, maar die zelf geen arbeid verrichten. De verplaatsing van het zwaartepunt komt dan niet overeen met de verplaatsing van de aangrijpingspunten van de afzonderlijke krachten.

13 SCHIJNMASSA TGV ROTATIE

De massa van wagenstel van de Utrechtse sneltram is 35 ton. Vanwege allerlei roterende delen in de tram (wielen, assen, rotor van de motor enz.) moet daar voor het berekenen kracht en versnellingen bij optrekken en remmen 3,5 ton 'schijnmassa' bij opgeteld worden.

- Leg uit dat er voor een tram met roterende delen een grotere remkracht nodig is dan voor een tram zonder (veel) roterende delen, ook al zijn deze massa's hetzelfde en ondervinden ze dezelfde remvertraging.
- Bereken de kinetische en de rotatieenergie van een Utrechtse tram die 20 m/s gaat. Bij een noodstop remt de tram met trommelremmen op de assen, met blokremmen op de rail en op de motor.
- Hoeveel energie komt er bij het remmen tot stilstand vrij, waar en in welke vorm komt die energie vrij?
- Bereken de gemiddelde kracht die de rails ondervinden als de remweg bij de noodstop 70 m is.

3.4 DE WRIJVINGSKRACHT ALS EEN ZICH AANPASSENDE KRACHT

De wrijvingskracht op de massieve aluminium staaf van de vorige paragraaf en de holle aluminium buis van opdracht 12 verschillen van elkaar, zoals je hebt kunnen uitrekenen. Dat komt omdat ze met een verschillende versnelling van de helling afrollen door de verschillen in massaverdeling (massief, danwel hol). De wrijvingskracht past zich aan aan de voorkomende situatie: die levert precies die kracht dat het juiste, bij de versnelling behorende koppel gaat werken.

Dat de wrijvingskracht zich aanpast kan gebeuren omdat de grootte van de wrijvingskracht kan variëren tussen 0 en een bepaalde maximum-grootte: F_{wmax} .

Dat kun je ook merken door de staaf of de buis in de lengte op de helling te leggen, zie fig. 3.17.

ARBEID GEBRUIKEN

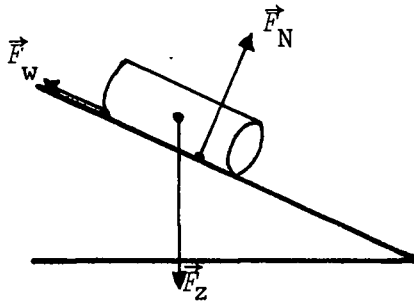


fig. 3.17 Holle en massieve buis op een hellend vlak: beide blijven in rust. Let erop dat de normaalkracht nu niet in het midden aangrijpt om het koppel t.g.v. wrijvingskracht en zwaartekracht op te heffen.

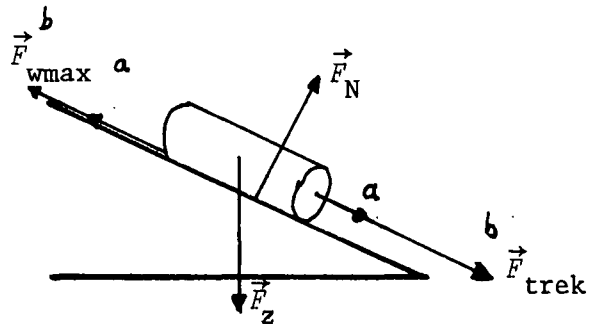


fig. 3.18 a. Een kleine trekkkracht: de staaf blijft in rust.
b. Een grote trekkkracht: de staaf komt in beweging.

Als de hellingshoek niet al te groot is, blijven ze stil liggen op de helling. Dus moet de wrijvingskracht zich dan aangepast hebben aan de x -component van de zwaartekracht en dus 4,0 N zijn.

Nu vormen de wrijvingskracht en de x -component van de zwaartekracht ook wel een koppel, maar omdat er sprake is van een stabiel evenwicht (bij draaiing gaat het zwaartepunt nu omhoog) leidt dat niet tot een draaiing (in feite levert de normaalkracht een compenserend moment). Als je bovendien een kleine kracht langs de helling naar beneden gaat uitoefenen (zie fig. 3.18) komt de staaf nog niet in beweging: de wrijvingskracht heeft zich weer aangepast zodat de som van de krachten nul blijkt. Maar de wrijvingskracht kan niet onbegrensd toenemen: er bestaat een bepaalde maximale wrijvingskracht F_{wmax} . Als de som van trekkkracht en F_{zx} groter wordt dan F_{wmax} zal de staaf versneld langs de helling naar beneden gaan glijden. Pas dan verricht de wrijvingskracht arbeid.

maximale wrijvingskracht

De maximale wrijvingskracht is afhankelijk van het betreffende voorwerp, o.a. van de ruwheid van het oppervlak. De aluminium staaf en de ijzeren buis kunnen dus wel een verschillende maximale wrijvingskracht te zien geven.

De maximale wrijvingskracht is ook afhankelijk van de normaalkracht die het voorwerp ondervindt. Dat kun je merken door de hellingshoek groter te maken, waardoor de normaalkracht afneemt. Bij een bepaalde hellingshoek gaat een voorwerp 'vanzelf' schuiven: de x -component van de zwaartekracht is dan groter geworden dan de maximale wrijvingskracht.

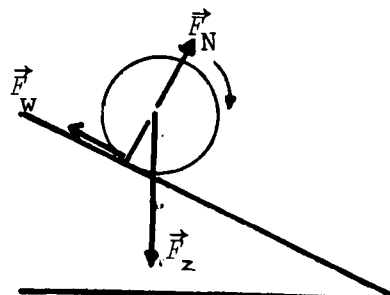
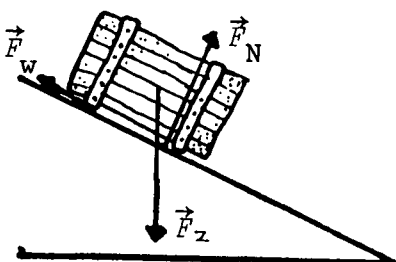


fig. 3.19 De (niet maximale) wrijvingskracht op een kist en op een wiel.

ARBEID GEBRUIKEN

drie soorten wrijvingskrachten

Je moet drie wrijvingskrachten goed uit elkaar houden:

- de schuifwrijvingskracht. Deze wrijvingskracht maakt in statische situaties de som van de krachten evenwijdig aan een 'ruw oppervlak' nul. Deze heeft een maximaal mogelijke waarde F_{wmax} die alleen afhankelijk is

van de ruwheid van de oppervlakken en van de normaalkracht. Bij voorwerpen die schuiven of slippen is de (schuif-)wrijvingskracht altijd maximaal. Voor stilstaande voorwerpen geldt $0 \leq F_w < F_{wmax}$.

Voor rollende voorwerpen geldt $0 \leq F_w < F_{wmax}$ en deze wrijvingskracht verricht geen arbeid. Behalve als er sprake is van slip. Maar dan is $F_w = F_{wmax}$ en komt er warmte vrij in de banden en het wegdek.

- de rolwrijvingskracht werkt alleen op draaiende wielen en dergelijke en is te wijten aan *vervormingen* van de rollende oppervlakken (een band bijvoorbeeld) en verricht altijd arbeid. Op harde banden is de rolwrijving bijvoorbeeld kleiner omdat de band dan minder kan vervormen.

Het verschil tussen schuifwrijving en rolwrijving bij fietsen is dus dat de schuifwrijving géén arbeid verrichtende ('energieabsorberende') kracht is en rolwrijving wél.

- de luchtwrijvingskracht werkt op bewegende, luchtverplaatsende voorwerpen en verricht altijd arbeid. De luchtwrijving wordt gegeven door de formule

$$F_l = c_w \cdot A \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2$$

14 SCHUIVENDE KIST

De kist van fig. 3.19 wordt vanuit rust door een kracht van 3,0 N in beweging gebracht, zodat die van de helling af gaat schuiven. De maximale wrijvingskracht is 5,0 N. De hellingshoek is 24°.

a. Bereken de snelheid van de kist als de kracht van 3,0 N 2,0 m is verplaatst. (Massa = 40 kg.)

b. Bereken waar de kist weer stil zal staan als de trekkracht na de 2,0 m ophoudt met werken.

Rijdend op een fiets bijvoorbeeld kom je alle drie de wrijvingskrachten tegen.

- in de situatie dat je met een constante snelheid rijdt (zie fig. 3.20.) werken de luchtwrijving en de rolwrijving naar achteren en de (schuif-)wrijvingskracht op de banden naar voren. De schuifwrijvingskracht F_w heeft een dergelijke grootte aangenomen dat geldt (mits de fiets niet slipt):

$$\vec{F}_{wschuif} + \vec{F}_{wlucht} + \vec{F}_{wrol} = 0$$

De schuifwrijvingskracht is de kracht van de weg op je banden waardoor je vooruit kunt gaan! De lucht- en rolwrijving verrichten arbeid, de schuifwrijving niet: die wordt immers niet verplaatst als er geen slip is. De energievergelijking van het systeem fietser + fiets luidt nu (met rendement η bij de omzetting van chemische energie):

$$W_{lucht} + W_{rol} = \eta \Delta E_{chem}$$

ARBEID GEBRUIKEN

Zonder de schuifwrijving zou het wiel 'geen greep' hebben op de grond en zouden de lucht en de rolwrijving de fiets afremmen, hoeveel chemische energie je ook zou vrijmaken in je lichaam: het rendement zou nul zijn.

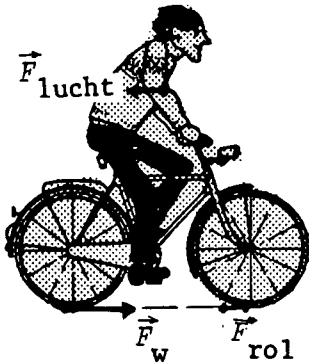


fig. 3.20 Fietsen met constante snelheid: de kracht van de weg op de wielen (dat is: de schuifwrijving) heft de rol- en luchtwrijving op.

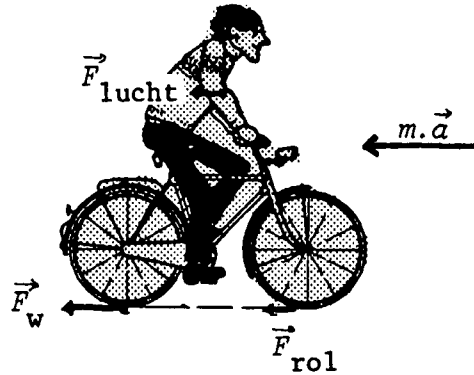


fig. 3.21 Remmen: de kracht van de weg op de wielen keert om van richting.

15 FIETSEN IN LOS ZAND

Wat verandert er aan de energievergelijking als je door los zand fietst waar, vanwege het wegzakken, de verticale en zijwaartse component van de schuifwrijvingskracht wel degelijk arbeid verricht?

- in de situatie dat je gaat remmen (zie fig.3.21.) keert de richting van de schuifwrijvingskracht om en gaat gelden:

$$\vec{F}_w + \vec{F}_{\text{lucht}} + \vec{F}_{\text{rol}} = m \cdot \vec{a}$$

Als er geen slip is bij het remmen, verricht de (schuif-)wrijvingskracht weer geen arbeid. Wel ontstaat er in het remsysteem inwendige energie (dat evt. als warmte kan worden afgestaan) waardoor de kinetische energie afneemt. De energievergelijking wordt dan (zonder warmteafgifte):

$$W_{\text{lucht}} + W_{\text{rol}} = \Delta E_k + \Delta E_{\text{inw}}$$

16 GEBLOKKEERDE WIELEN

Als je wielen bij het remmen geblokkeerd raken, kom je in een slip, wat gevaarlijk kan zijn, o.a. door het optreden van verschillen in schuifwrijvingskrachten op de wielen: dus ontstaan koppels die het voertuig dwars op de weg draaien.

- Waarom zal er bij blokkerende wielen geen inwendige energie in het remsysteem vrijkomen?
- Schrijf de energievergelijking voor dit geval op.

17 KRACHT EN ARBEID OP FIETS

Een fietser van 80 kg (met fiets) rijdt met constante snelheid (5 m/s) over een horizontale weg. De fietser moet 60 W vermogen leveren bij het fietsen. De rolwrijving is 5 N.

- Bereken de luchtwrijving en de (schuif-)wrijvingskracht op de banden. Geef ook hun richting aan.

ARBEID GEBRUIKEN

- b. Bereken de arbeid per seconde van de rolwrijving, de lucht-wrijving en de (schuif-)wrijving.
- c. Controleer je uitkomsten door de energievergelijking van de fietser met zijn fiets op te stellen. Bedenk met welk teken de geleverde 60 W in de energie- (eigenlijk: vermogen-) vergelijking moet krijgen.

18 WRIJVINGSLOOS FIETSEN?

Herma en Wiebe discussiëren over de vraag of wrijvingsloos fietsen in theorie mogelijk is.

Herma zegt: "Natuurlijk wel. De snelheid die je hebt hou je zonder te trappen, omdat de kinetische energie niet door wrijvingsarbeid afneemt".

Wiebe zegt: "Zonder een schuifwrijvingskracht kun je niet op gang komen of afremmen. Dus ook in theorie heb je bij het fietsen altijd een wrijvingskracht nodig."

Wat vind jij?

19 WRIJVINGSKRACHT VAN DE WEG

- a. Een nat wegdek is veel gladder dan een droog wegdek. Toch kost het niet minder, eerder meer vermogen om, bij verder dezelfde omstandigheden en snelheid, over een nat wegdek te fietsen dan over een droog wegdek. Hoe is dat te verklaren?
- b. Een asfaltweg is ruwer dan een klinkerweg. Toch is de rolwrijving op een klinkerweg groter. Verklaar dat.

3.5 ZWAARTE ENERGIE

Tot nu toe heb je zwaarteenergie nog niet gebruikt, maar heb je wel de arbeid door de zwaartekracht uitgerekend. In deze paragraaf ga je leren hoe die twee met elkaar samenhangen.

Als een steen (zonder wrijving) omlaag valt verricht de zwaartekracht (positieve) arbeid op de steen, waardoor de kinetische energie toeneemt. Dat kun je ook zo zeggen: de kinetische energie neemt toe omdat de zwaarte-energie van de steen afneemt.

Wat is nu precies het verschil tussen deze twee beschrijvingen, die beide goed zijn?

In de eerste beschrijving is de zwaartekracht een uitwendige kracht op het systeem 'steen' en is de kinetische energie de enige systeemenergie.

In de tweede beschrijving zijn er twee systeemenergieën: naast kinetische energie is er ook zwaarteenergie. Dat betekent echter dat de zwaartekracht in die beschrijving geen uitwendige kracht is en dus geen (uitwendige) arbeid verricht, maar een inwendige kracht die voor interne energieomzettingen zorgt. Er is dus sprake van een ander systeem dan in beschrijving 1. Dit systeem kun je aanduiden als het systeem 'steen + zwaartekrachtveld'.

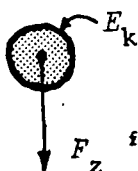


fig. 3.22 Het systeem bal met de zwaartekracht als uitwendige kracht.



fig. 3.23 Het systeem bal en zwaartekrachtveld met de zwaartekracht als interne kracht.

ARBEID GEBRUIKEN

zwaartekrachtveld

Wat wordt nu precies met zwaartekrachtveld bedoeld? Overal op de aarde, boven de aarde, op grote afstand van de aarde werkt de zwaartekracht van de aarde op je. Die zwaartekracht zorgt er bijvoorbeeld voor dat een ruimtevaartuig een baan om de aarde kan beschrijven.

Door de aanwezigheid van de aarde heerst er in de ruimte om de aarde heen een *zwaartekrachtveld*. Dat wil zeggen dat een massa die je op een willekeurige afstand van de aarde plaatst een invloed van de aarde ondervindt in de vorm van de zwaartekracht.

In schema gezet:

aarde → zwaartekrachtveld → veroorzaakt zwaartekracht op een steen.

In deze visie oefent de aarde dus niet direkt, maar door tussenkomst van het *veld* een kracht op je uit.

Behalve het zwaartekrachtsveld zijn er ook andere krachtevelden, zoals het elektrische veld of de krachtevelden die de protonen en neutronen bij elkaar houden in de kern.

zwaarteenergie

Als een steen, waar een zwaartekracht van 20 N op werkt, 2,4 m omlaag valt verricht de zwaartekracht (beschreven in systeem 'steen') + 48 N arbeid op de steen. Je kunt ook zeggen (in systeem 'steen + zwaartekracht') dat de zwaarteenergie 48 J afneemt, of $\Delta E_z = -48$ J.

Algemeen kun je als definitie van z zwaarteenergie geven:

arbeid in systeem 'voorwerp' = -verandering van zwaarteenergie in het systeem 'voorwerp + zwaartekrachtveld'

Je kunt het bovenstaande ook in formulevorm schrijven.

Als het voorwerp van een punt A naar een punt B gaat in het zwaartekrachtveld geldt:

$$\begin{aligned} W_{z,A \rightarrow B} &= -\Delta E_{z,A \rightarrow B} \\ &= -(E_{zA} - E_{zB}) \end{aligned}$$

Met deze formule kun je zien dat de energievergelijking van de twee systemen in elkaar om te zetten zijn. De energievergelijking van systeem 'steen':

$$W_{\text{zwaarte}} = \Delta E_k$$

is om te zetten in de energievergelijking van systeem 'steen + zwaartekrachtsveld':

$$0 = \Delta E_k + \Delta E_z$$

door in te vullen dat $W_z = -\Delta E_z$ en ΔE_z naar het rechter lid te brengen: de kant van de systeem-energieën.

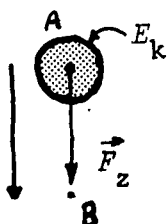


fig. 3.24



ARBEID GEBRUIKEN

20 STEENWORP

Klaas werpt een steen weg. Hij laat de steen op 2 m hoogte los. De steen heeft dan een snelheid van 10 m/s. In het hoogste punt heeft de steen nog een snelheid van 3 m/s. Verwaarloos de wrijving.

- Schets de baan van de steen.
- Bereken hoe hoog de steen komt.
- Bereken met welke snelheid de steen op de grond terecht komt.
- Bereken de hoek die de snelheid met de grond maakt bij het neerkomen.

21 TREKKRACHT OP EEN LIFTKOOI

Een liftkooi met passagiers (totale massa 500 kg) start en heeft op 2 m hoogte een snelheid van 2,5 m/s.

Bereken de trekkracht die de kabels op de liftkooi uitoefenen op twee manieren: door de energievergelijking van het systeem liftkooi zonder en met het zwaartekrachtsveld op te schrijven.

de grootte van de zwaarte-energie

De relatie tussen arbeid door de zwaartekracht en zwaarte-energie zegt wel iets over de *verandering* in zwaarte-energie, maar niet over de zwaarte-energie zelf. Om de zwaarte-energie zelf uit te rekenen heb je een *nulniveau* voor de zwaarte-energie nodig. Omdat er alleen iets gedefinieerd is over de verandering van zwaarte-energie mag je het nulniveau willekeurig kiezen. Dan wordt de zwaarte-energie in een punt P gegeven door de verandering van de zwaarte-energie als je van P naar het nulniveau gaat.

Heel gebruikelijk is natuurlijk de keuze van het aardoppervlak als nulniveau. Als een voorwerp met massa m van een hoogte h naar de grond toegaat verricht de zwaartekracht een arbeid

$$W_z = m \cdot g \cdot h$$

dus geldt:

$$\Delta E_z = -m \cdot g \cdot h$$

In een punt P op de hoogte h boven de grond (nulniveau) heeft een massa m dus een zwaarte-energie van

$$E_{zp} = m \cdot g \cdot h$$

Let wel op dat verondersteld is dat de zwaartekracht (en dus g) constant is. Ver van de aarde neemt de zwaartekracht echter wel merkbaar af. Dan moet deze formule vervangen worden door een betere.

De weg waarlangs de massa m naar de grond gaat is niet van invloed op de grootte van de arbeid door de zwaartekracht. Immers: bij de zwaartekracht is alleen het hoogteverschil van belang (zie par. 2.5).

ARBEID GEBRUIKEN

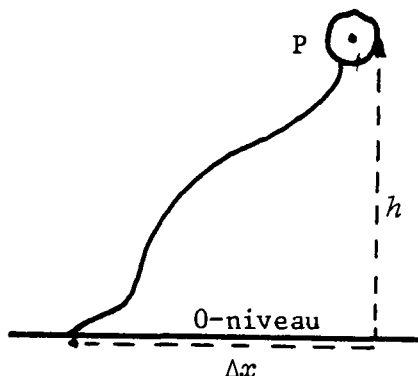


fig. 3.25 Voor het verschil in potentiële energie in p is alleen de hoogte h boven het nulniveau van belang.

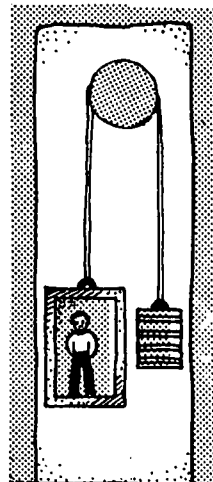


fig. 3.26 Lift met contragewicht

22 EEN LIFT MET CONTRAGEWICHT

Als de lift van het warenhuis het Wespennest op de begane grond is hangt het contragewicht 500 kg op 25 m boven de vloer. De liftkooi heeft een massa van 350 kg en gaat met 6 mensen (75 kg elk) omhoog naar de 3e verdieping op 12 m hoogte en gaat met drie passagiers weer terug.

- Met hoeveel is de zwaarte-energie van het liftstelsel met passagiers toegenomen toen de lift van de begane grond naar de 3e verdieping ging? Waar is die energie vandaan gekomen?
- Met hoeveel is de zwaarte-energie van het liftstelsel toe/afgenomen toen de lift met drie passagiers terugging? Op welke wijze zal de betreffende energiehoeveelheid toe- of afgevoerd zijn?
- Waarom is het in deze situatie niet handig om de zwaartekracht als uitwendige kracht te beschouwen?

3.6 CONSERVATIEVE KRACHTVELDEN

Het water in een watertoren vertegenwoordigt een behoorlijk grote hoeveelheid zwaarte-energie. Als er bijvoorbeeld 100 m^3 water in zit (dus $m = 10^5 \text{ kg}$) op een gemiddelde hoogte van 20 m is de zwaarte-energie $2 \cdot 10^8 \text{ J}$. Die energie krijg je eruit door de kraan open te zetten en het water eruit te laten lopen. Op welke afstand van de watertoren je de kraan opent maakt voor de vrijkomende zwaarte-energie niet uit (wel voor de onder-vonden wrijving in de waterleidingsbuizen). Evenmin maakt het uit welke kronkels de waterleidingsbuizen maken of op welk tijdstip je het water weg laat lopen. Het enige wat belangrijk is, is over welke hoogte het water naar beneden stroomt.

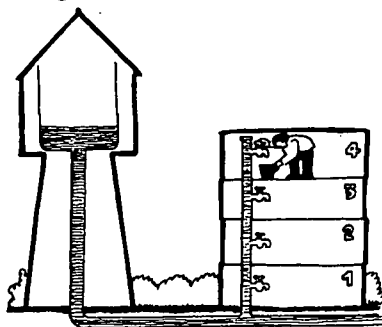


fig. 3.27 Opslag van zwaarte-energie in water

ARBEID GEBRUIKEN

Om deze eigenschappen noemen we het zwaartekrachtveld een *conservatief* krachtveld, een krachtveld waarin je energie kunt opslaan en waaruit *alle* opgeslagen energie weer aan de omgeving kan worden afgestaan door het laten verrichten van arbeid door de veldkracht. Omdat het zwaartekrachtveld conservatief is heeft het zin om over zwaarte-energie te praten immers:

$$\Delta E_z = - W_z$$

Aan de hand van drie 'gedachtenexperimenten' kan je nagaan welke onverwachte effecten er zouden optreden als het zwaartekrachtveld niet conservatief zou zijn.

1e gedachten experiment:

Stel je voor dat de zwaartekracht 's nachts kleiner was dan overdag. Dan zou het het beste zijn om de watertoren 's nachts vol te pompen en overdag leeg te laten lopen. Je kunt er zelfs energie mee opwekken: een perpetuum mobile!

2e gedachten experiment:

Stel je voor dat het water op plaats A meer zwaarte-energie heeft dan op plaats B, bij dezelfde hoogte. Dan zou je het water op plaats B kunnen oppompen en op plaats A naar beneden kunnen laten stromen. Ook dan zou je een perpetuum mobile kunnen maken.

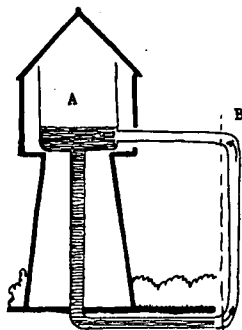


fig. 3.28 Als de zwaarte-energie in A groter is dan in B, wat dan.....?

23 3E GEDACHTEN EXPERIMENT

Ga zelf de gevolgen na voor het geval dat bij vallen *minder* zwaarte-energie vrijkomt dan erin gestopt wordt bij het omhoog pompen.

Een krachtveld is conservatief als de verandering van veldenergie van een voorwerp alleen afhangt van het veld en begin- en eindpunt van de verplaatsing en niet van andere zaken zoals de weg tussen begin en eindpunt, de duur of het tijdstip van de verplaatsing en dergelijke.

Een ander belangrijk krachtveld dat conservatief is, is het elektrische veld. Een 'ideale' veer, dat wil zeggen een veer waarin geen wrijvingskracht werkt, kan je ook als een conservatief krachtveld zien. Een voorbeeld van een niet-conservatieve kracht is de wrijvingskracht. Daarmee kun je geen energie opslaan.

ARBEID GEBRUIKEN

3.7 POTENTIELE ENERGIE

Het zou niet zinvol geweest zijn om het begrip zwaarteenergie te gebruiken als het zwaartekrachtsveld niet conservatief zou zijn. Immers dan hing de arbeid die de zwaartekracht (in het systeem 'voorwerp') af van de weg die tussen begin en eindpunt was afgelegd. Dan kon je voor de zwaarteenergie

$$-\Delta E_{zA \rightarrow B} = W_{zA \rightarrow B}$$

veel verschillende uitkomsten krijgen, afhankelijk van de weg tussen A en B.

Nu is het omgekeerd ook het geval: als een krachtenveld conservatief is, dan is het zinvol om een 'veldenergie' te definiëren van de vorm zoals de zwaarteenergie. In het algemeen worden dit soort veldenergieën samengenomen onder het woord *potentiële energie*. Die wordt in formulevorm gedefinieerd door:

$$E_{\text{pot}B} - E_{\text{pot}A} = -W_{\text{veld}A \rightarrow B}$$

waarbij verondersteld wordt dat een 'veldgevoelig voorwerp' van een plaats A in het veld naar een plaats B wordt gebracht. Bijvoorbeeld een massa in een zwaartekrachtsveld, een geladen voorwerp in een elektrisch veld.

Als toepassing van die definitie zal hier de potentiële energie van een veer uitgerekend worden.

3.8 DE VEERKRACHT ALS CONSERVATIEVE KRACHT

Bij een massa die aan een veer hangt te trillen vinden voortdurend energieomzettingen plaats: van zwaarteenergie naar veerenergie en kinetische energie en omgekeerd.

24 TRILLENDE MASSA AAN EEN VEER

Een massa trilt aan een veer.

a. In welke stand(en) is

- de zwaartekracht maximaal;
- de kinetische energie maximaal;
- de kinetische energie nul;
- de veerenergie maximaal?

b. Teken de krachten op de massa in die standen op schaal.

Uiteindelijk komt de massa aan de veer tot rust, ook als je de veer in vacuüm laat trillen. Dat komt omdat er geen enkele veer te vinden is waarin tijdens de vervorming geen wrijvingskracht werkt, al zijn er wel veren te maken waarin die heel klein is.

Dat betekent dat de veerkracht bij het uitrekken van de veer toch altijd weer een beetje groter is dan bij de eerstvolgende inkrimping. Niettemin wordt in de natuurkunde vaak verondersteld dat er met ideale veren gewerkt kan worden. In reële situaties worden afwijkingen daarvan in tweede instantie gecorrigeerd.

ARBEID GEBRUIKEN

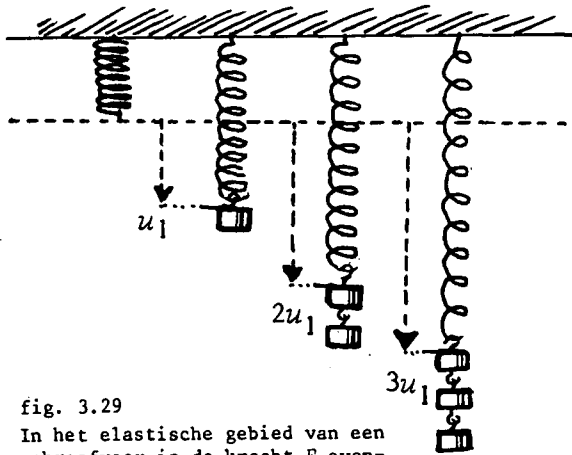


fig. 3.29

In het elastische gebied van een schroefveer is de kracht F evenredig met de uitrekking u .

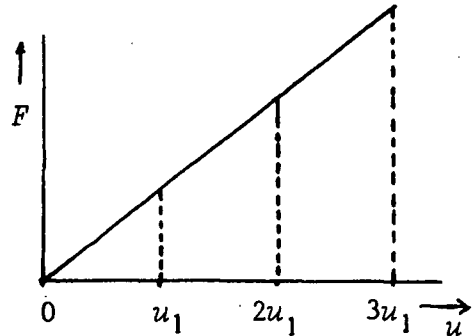


fig. 3.

Dat levert een rechte lijn in het F, u -diagram op.

Een grotere kracht op de veer geeft een evenredig grotere uitrekking u aan de veer. In formulevorm geldt voor een ideale, ook wel elastisch genoemde, veer (voor uitrekken en induwen):

$$\vec{F} = -C \cdot \vec{u} \text{ of } \vec{F}(u) = -C \cdot \vec{u}$$

Het min-teken geeft aan dat de kracht van de veer en de uitrekking $\vec{u}$ tegengesteld gericht zijn. C is de veerconstante. Dat is een maat voor de 'stijfheid' van de veer. Voor een veer met een grote veerconstante zal je een grote kracht nodig hebben om die uit te rekken. Voor een slappe veer is de veerconstante klein.

Als je de veer te ver uitrekt gaat de nulstand verlopen omdat je buiten het *elastisch gebied* van de veer komt. De formule geldt dan niet meer. Voor een niet ideale veer is de veerconstante bij het uitrekken iets groter dan bij het inkrimpen.

Wat hierna volgt geldt alleen voor een ideale veer.

arbeid door de veerkracht

Nu gaan we kijken naar het oppervlak onder de F, u -grafiek, naar de arbeid dus die nodig is bijvoorbeeld om de veer tot situatie I, II of III van fig. 3.29 uit te rekken. Uit fig. 3.30 zie je dat het oppervlak onder de F, u -grafiek steeds groter wordt, als je van $u = u_1$ gaat naar $u = 2u_1$ en $u = 3u_1$. Het oppervlak hangt dus zelf ook af van hoe ver je de veer uitrekt, hoe groot je u dus maakt. Er bestaat dus een oppervlaktefunctie $O(u)$. In dit geval kunnen we die de arbeidsfunctie $W(u)$ noemen.

Hoe hangen $W(u)$ (of $O(u)$) en $F(u)$ nu samen? Om dat na te gaan, ga je naar de toename van $W(u)$ kijken, als u een *kleine beetje* toeneemt: met Δu . $W(u)$ neemt dan met ΔW toe.

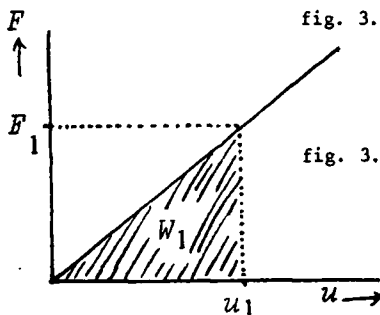
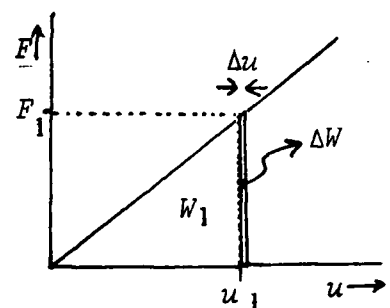


fig. 3.31 De arbeid W_1 nodig om een veer vanuit het evenwichtspunt een uitrekking u_1 te geven, is gelijk aan het gearceerde oppervlak in het F, u -diagram.

fig. 3.32 De toename van de arbeid ΔW als de uitrekking u toeneemt is de toename van het oppervlak in het F, u -diagram.



ARBEID GEBRUIKEN

Als je Δu klein neemt, is de kracht over dat stukje extra uitrekken wel ongeveer constant te veronderstellen. Dan krijg je:

$$\Delta W = F_1 \cdot \Delta u \quad \text{of} \quad F_1 = \frac{\Delta W}{\Delta u}$$

Als je Δu nu heel klein maakt (wiskundig gezien neem je de limiet dat Δu naar 0 nadert) gaat $\frac{\Delta W}{\Delta u}$ over in $\frac{dW}{du}$, de afgeleide van W .

Omdat voor u_1 in principe elke u gekozen mag worden, kun je de waarde F_1 vervangen door de functie $F(u)$ zodat:

$$F(u) = \frac{dW}{du}$$

Je moet de arbeidsfunctie dus zó zoeken dat de afgeleide gelijk is aan $F(u)$. Dus

$$\frac{dW}{du} = -C \cdot u$$

Je kunt eenvoudig nagaan dat de arbeidsfunctie

$$W(u) = -\frac{1}{2}C \cdot u^2$$

aan deze voorwaarde voldoet.

In de wiskunde zul je de $W(u)$ als de 'primitieve' functie van $F(u)$ tegenkomen.

veerenergie

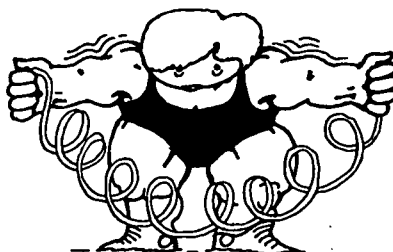
Uit de formule blijkt dat de arbeid door de veerkracht afgezien van het teken voor uitrekken en inkrinpen gelijk is (ideale veer). Als je een veer van een uitrekking u_1 en uitrekking u_2 geeft is de arbeid die dan verricht wordt niet afhankelijk van de vraag of er tussendoor nog een aantal extra uitrekkingen en inkrimpingen uitgevoerd zijn. De veerkracht is dus conservatief en je kunt een veerenergie definiëren als:

$$\begin{aligned} E_{\text{veer } u_2} - E_{\text{veer } u_1} &= -W_{\text{veer } u_1 \rightarrow u_2} \\ &= \frac{1}{2}C \cdot u_1^2 - \frac{1}{2}C u_2^2 \end{aligned}$$

Algemeen geldt dus (bij uitrekking van het nulpunt $u = 0$ tot u)

$$E_{\text{veer}} = \frac{1}{2}C u^2$$

fig. 3.33



25 DE VEER VAN JACOB

Jacob heeft een 'body builders-veer' met een veerconstante van $8,4 \cdot 10^2$ N/m. Hij kan de veer 60 cm uitrekken. Hij wil weten hoeveel energie hij dan in de veer stopt.

- Hoe groot is de spierkracht van Jacob bij $u = 60$ cm en hoe is die gericht?
- Hoe groot is de veerkracht van zijn veer en hoe is die gericht?
- Teken de F , u -grafiek van de veer en haal uit oppervlak daar-
onder de arbeid die de veer heeft verricht. Hoeveel energie heeft Jacob dus in de veer gestopt?
- Bereken de veerenergie ook wiskundig.

ARBEID GEBRUIKEN

26 DE VEER VERDER UITREKKEN

Jacob spant zich nog meer in en weet de veer nog 10 cm uit te rekken.

Bereken hoeveel de veerenergie toeneemt.

27 EEN PEES UITREKKEN EN ONTSPANNEN

De krachten van de pees uit opdracht 17 van hoofdstuk 2 kunnen wiskundig weergegeven worden door:

$$F = -15 \cdot 10^6 \cdot u^2 \text{ bij spannen (} F \text{ in N, } u \text{ in m)}$$

$$F = -720 \cdot 10^6 \cdot u^3 \text{ bij ontspannen.}$$

a. Ga na dat de arbeidsfuncties van de pees zijn:

$$W = -5 \cdot 10^6 \cdot u^3 \text{ bij spannen}$$

$$W = -180 \cdot 10^6 \cdot u^4 \text{ bij ontspannen.}$$

b. Krijg je op grond van deze functies dezelfde uitkomsten als je in opdracht 26 hebt gekregen?

c. Is de pees een ideale veer waarvoor je de veerenergie kunt uitrekenen?

In de wiskundeles zul je uitgebreid op het bepalen van oppervlaktefuncties ('primitieve') en het bepalen van waarden daarvan ('integreren') terugkomen. Na al die wiskundelessen zal je arbeid als 'integraal' kunnen schrijven:

$$W(s) = \int F(s) \, ds$$

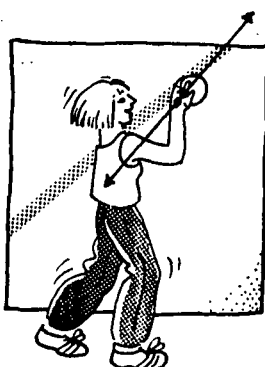
en voor de potentiële energie:

$$\Delta E_{\text{pot A B}} = \int_A^B F_{\text{veld}}(s) \, ds$$

3.9 ARBEID DOOR AKTIE- EN REAKTIEKRACHT

Twee systemen kunnen een kracht op elkaar uitoefenen. Beide systemen ondervinden dan een even grote, maar tegengestelde kracht. Krachten komen dus altijd in paren voor: een actie- en een reactiekracht.

De aangrijpingspunten van beide krachten liggen nooit in het zelfde systeem (behalve bij krachtenparen binnen een systeem, maar daar hebben we het nu niet over). Dit is de 3e wet van Newton, ook wel het actie-reactieprincipe genoemd.



$F_{\text{hand op steen}}$

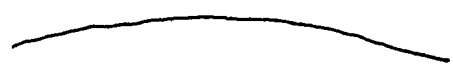
$F_{\text{steen op hand}}$

fig. 3.34 a. De kogel in de hand ondervinden reactiekrachten van elkaar.

b. Aarde en steen ondervinden reactiekrachten van elkaar.



$F_{\text{aarde op steen}}$

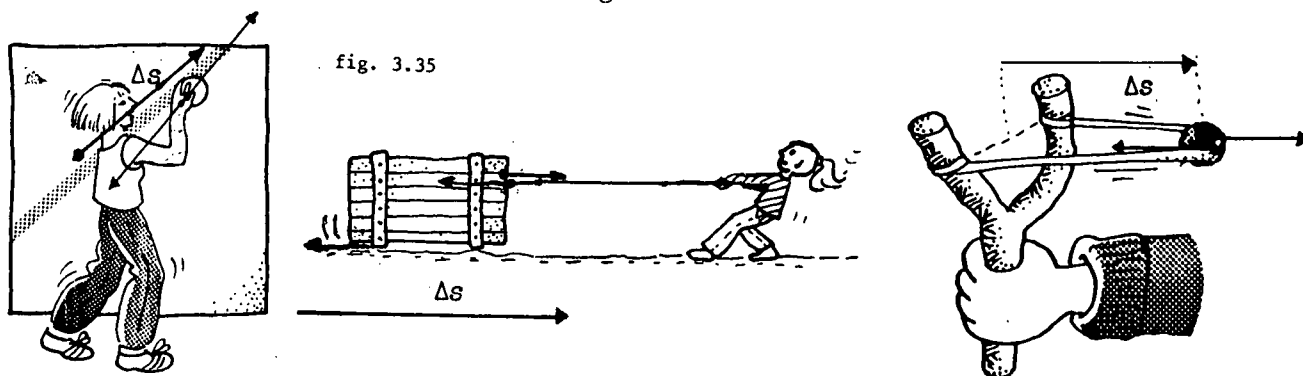


$F_{\text{steen op aarde}}$

middelpunt v/d aarde

ARBEID GEBRUIKEN

In veel gevallen verrichten aktie- en reaktie beide arbeid omdat hun aangrijpingspunten verplaatst worden. Bijvoorbeeld bij het werpen van een bal. De bal en de hand oefenen beide een kracht op elkaar uit (zie fig.3.34) en ondervinden dus beide een evengrote, tegengestelde kracht. Vaak zijn de afstanden waarover beide aangrijpingspunten worden verplaatst, gelijk aan elkaar. Zie de voorbeelden van fig.3.35:



In dat geval wordt er op beide systemen arbeid verricht: evengroot, maar tegengesteld van teken. In feite betekent dat dat alle energie die via de (negatieve) arbeid van de (aktie-)kracht aan het ene systeem wordt onttrokken door (positieve) arbeid van de reaktiekracht, aan het andere systeem wordt toegevoerd: de bal krijgt meer kinetische energie; de kist aan het katapult krijgt energie die door de wrijving verder wordt afgevoerd; de

katapult krijgt meer veerenergie. Kijk nu eens naar een brok klei dat valt. Het aktie- reaktiepaar wordt gevormd door $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$.

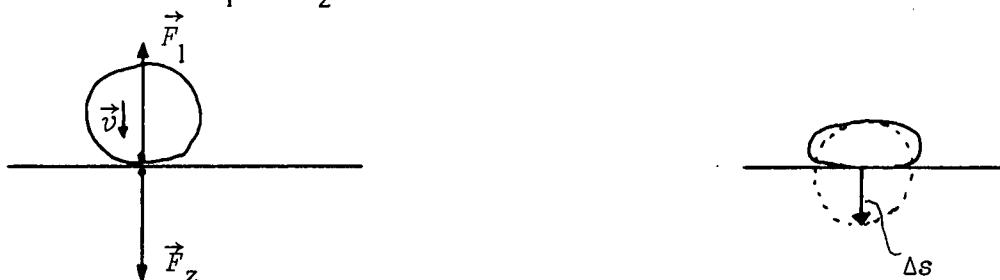


fig. 3.36 Het brok klei als het de grond raakt en als het tot rust is gekomen.

Het aangrijpingspunt van $\vec{F}_2$ wordt duidelijk niet verplaatst. Maar het aangrijpingspunt van $\vec{F}_1$? Daarop zijn twee antwoorden mogelijk. Je kunt zeggen: de grond is op zijn plaats gebleven, dus het is niet verplaatst. Je stelt je dan op als een waarnemer die ten opzichte van de grond stilstaat. Je kunt ook zeggen dat $\vec{F}_1$ over een afstand Δs (zie fig.3.36) verplaatst is. Dan bekijk je de situatie vanuit het brok klei, wat natuurlijk minder voor de hand ligt. Door deze vervorming wordt er dan ook géén energie van het systeem 'brok klei' naar buiten getransporteerd, maar de kinetische energie wordt omgezet in vervormingsenergie en thermische energie. Het ligt dus het meest voor de hand om te zeggen: beide (re-) aktiekrachten worden niet verplaatst.

Algemeen kun je zeggen: voor energieomzettingen van het ene systeem in het andere, waarbij *kinetische energieveranderingen* optreden is een uitwendige kracht ('afzetkracht') nodig die *niet verplaatst* wordt. Dat heeft tot gevolg dat er vervorming of rotatie noodzakelijk is.

ARBEID GEBRUIKEN

28 WEL OF GEEN AFZETKRACHT?

Is er bij de volgende situaties sprake van verandering van kinetische energie en andere systeemenergiën? Zo ja, wijs dan de kracht die niet verplaatst wordt en de vervorming van de betrokken systemen aan.

- a. gaan rennen (systeem: mens);
- b. remmen op de fiets zonder slip (systeem fietsen + fiets);
- c. een boot wegduwen met een stok, terwijl je erop staat (systeem boot + mens met stok);
- d. raket naar een hogere baan brengen (systeem raket + uitlaatgassen).

29 EEN AUTO SLEPEN

Een auto sleept een andere auto af met constante snelheid. De kracht in het sleeptouw is 1500 N.

- a. Bereken de arbeid van de kracht van 1500 N op de gesleepte auto en de reactiekracht daarvan.
- b. Geef aan welke energiestromen of omzettingen van systeemenergieën er bij de arbeid door die krachten betrokken zijn.

30 OMHOOG SPRINGEN

Iemand is 50 cm door de knieën gezakt en springt vanuit die houding omhoog. Hij zet zich daarbij met een kracht van 1200 N tegen de grond af.

Bereken de arbeid door de actie- en reactiekracht van springer en vloer op elkaar. Welke systeemenergieën veranderen?

3.10 PROBLEMEN

Als afsluiting van dit hoofdstuk vindt je ook een aantal problemen. Ze zijn wat lastiger dan die van hoofdstuk 2, soms omdat er in deze problemen van arbeid gebruik gemaakt wordt om een kracht, een verplaatsing of iets dergelijks uit te rekenen, soms omdat er meer stappen in het oplossingsproces nodig zijn. Het kan bijvoorbeeld zijn dat je (in de 'vertaalfase') de probleemstelling moet *herformuleren*. Een vraag als: "Zal de springer over de lat komen" kan dan bijv. in termen van energie vertaald moeten worden, bijv.: "Kan hij voldoende zwaarteenergie krijgen?" Voor het probleemoplosschema kun je terugkijken naar het schema van blz. 34.

Wat betreft de 'oriëntatiefase' kan daaraan toegevoegd worden:

- Zijn er veranderingen in kinetische (translatie-)energie die gepaard gaan met veranderingen van andere systeemenergieën?
- Zijn er (dus) uitwendige (afzet-)krachten waarvan het aangrijpingspunt niet verplaatst wordt en die dus geen arbeid verrichten?
- Zijn de hoeveelheden arbeid verricht door relevante actie- en reactiekrachten aan elkaar gelijk?
- Is de arbeid door een kracht via de arbeid door zijn reactiekracht te berekenen?

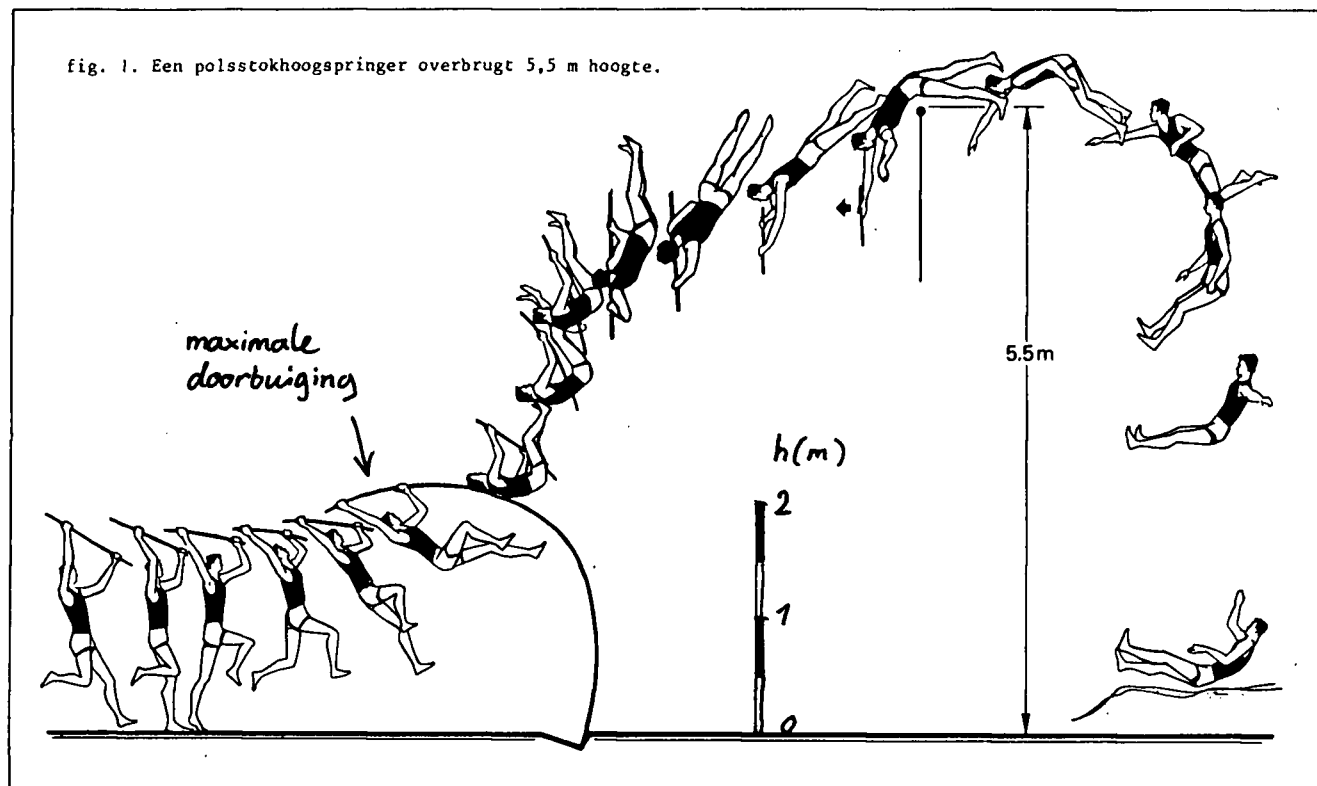
Wat betreft de 'vertalingsfase' kan daaraan toegevoegd worden:

- Maak een keuze tussen de rekenregel voor kinetische energie en de energievergelijking.
- Herformuleer de probleemstelling in termen van de gekozen vergelijking.

ARBEID GEBRUIKEN

Probleem 3.1 KRACHT IN DE ARMEN VAN EEN POLSSTOKHOOGSPRINGER

fig. 1. Een polsstokhoogspringer overbrugt 5,5 m hoogte.



De polsstokhoogspringer van figuur 1 ($m = 70 \text{ kg}$) komt aanlopen met hoge snelheid (10 m/s). Je ziet dat de flexibele (fiberglas) stok gebogen wordt als de atleet omhoog zwaait. Op de armen van de atleet werkt een grote, bij benadering *constante*, kracht.

In dit probleem kijken we alleen naar het gedeelte van de figuur tot waar de stok maximaal doorgebogen is. De doorbuiging van de stok, Δs , kan je meten zoals in fig. 2 is aangegeven.

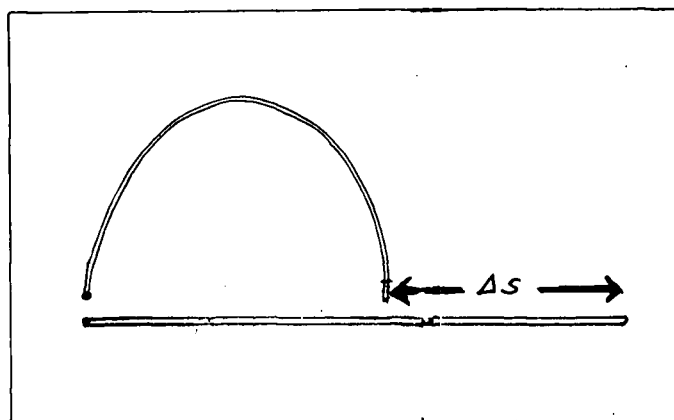


fig. 2.

Op het moment dat de polsstok maximaal gebogen is, is van de kinetische energie van de man nog 20% over.

De energie die hij zo 'investeert' in de polsstok, wint hij even later terug als zwaarte-energie: daarover gaat probleem 3.2.

Uit fig. 1 kan je de hoogte-verandering van het zwaartepunt van de atleet en de lengte-verandering Δs (= doorbuiging) van de polsstok aflezen.

►► Bereken de constant veronderstelde kracht waarmee de man de polsstok moet vasthouden.

ARBEID GEBRUIKEN

Probleem 3.2 ENERGIE GELEVERD BIJ POLSSTOKHOOGSPRINGEN

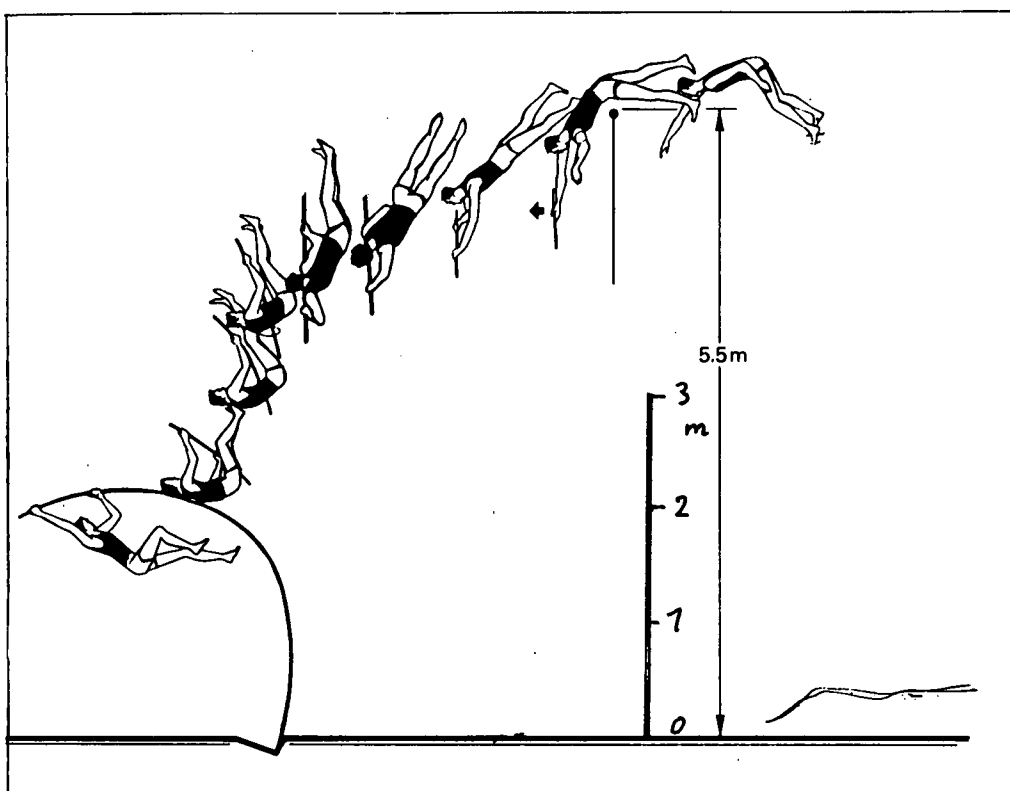
De polsstokhoogspringer komt aanlopen met 10 m/s.

Op het moment dat de polsstok maximaal gebogen is (eerste plaatje in fig. 1) is van de oorspronkelijke kinetische energie van de atleet nog 20% over. Om nu het hoogteverschil tot de lat te overbruggen kan zowel van de veerenergie in de stok als van chemische energie uit de spieren gebruik gemaakt worden.

Neem aan dat de polsstok 1600 J kan terug leveren.

De springer weegt 70 kg.

Verdere gegevens kun je uit fig. 1 opmeten.



- Bereken de energie die de spieren nog bij moeten leveren tijdens het 'opsteken' (= opdrukken aan de stok).

Probleem 3.3 BOTSEN DE MAGNETEN?

Saskia wil in de klas een zelf bedachte methode demonstreren om de afstotende kracht tussen twee magneten te bepalen.

Als ze de ene magneet in de buis laat vallen, zal deze boven de andere blijven zweven, zegt ze (zie fig. 1). Maar de leraar houdt haar tegen: hij is bang dat de magneten toch zullen botsen en dat de glazen buis daardoor zal breken.

ARBEID GEBRUIKEN

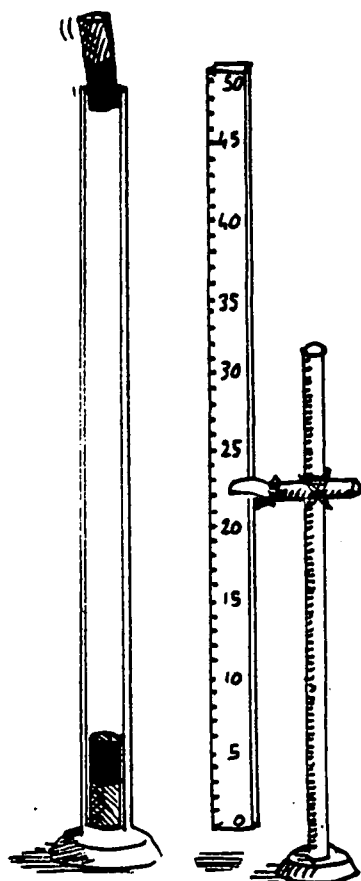


fig. 1. Kan je deze magneet in het glas laten vallen?

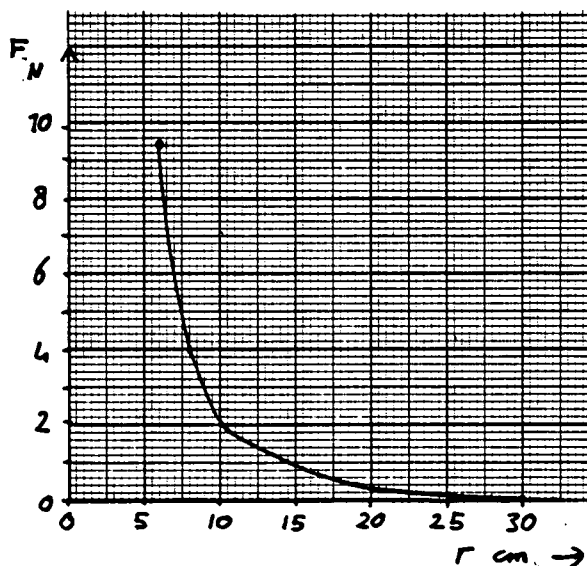


fig. 2. De grafiek van de afstotende kracht tussen de twee magneten en de afstand tussen de middelpunten.

Saskia beweert dat dat niet zal gebeuren. Haar argumenten zijn:

- Er treedt veel *wrijving* op tijdens het vallen, met de glaswand en de ontsnappende lucht.
- De afstotende kracht verricht voldoende arbeid om de magneet tijdig te stoppen. Ze heeft een grafiek (fig. 2) die deze afstotende kracht geeft, als functie van de afstand tussen de middens van de magneten.

Volgens Saskia is op basis van het tweede argument al uit te rekenen dat er niets kapot zal gaan.

►► Heeft Saskia gelijk? De magneten wegen elk 60 g en zijn 6,0 cm hoog.

NB: Als je integraalrekening kent, neem dan in plaats van fig. 2 de formule:

$$F(r) = \frac{0,002}{r^3} \quad \text{met } F \text{ in N en } r \text{ in m.}$$

Met de richting van de kracht is bij deze formule nog geen rekening gehouden.

Probleem 3.4 HOEVEEL ENERGIE KOST HET WERPEN VAN EEN BAL?

Arnold wil weten hoeveel energie het wegwerpen van een bal kost. Daar-toe plakt hij een tikkerstrook aan zijn hand vast. Een klasgenoot leidt die door een tijdtikker. Bij het werpen beweegt hij zijn hand zo veel mogelijk langs een rechte lijn. Uit de tikkerstrook die hij op die

ARBEID GEBRUIKEN

manier van zijn worp krijgt haalt hij de versnelling van zijn hand en dus van de bal. Daaruit stelt hij de volgende $a, \Delta s$ -grafiek op.

NB: je kunt deze proef ook zelf doen!

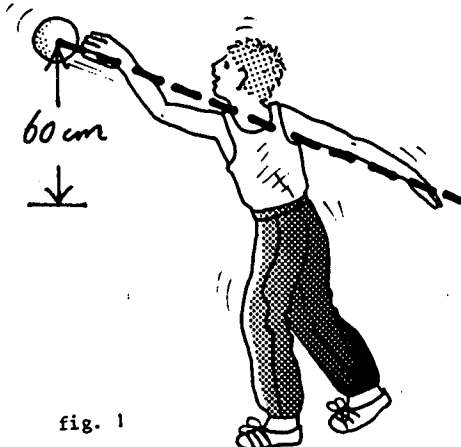


fig. 1

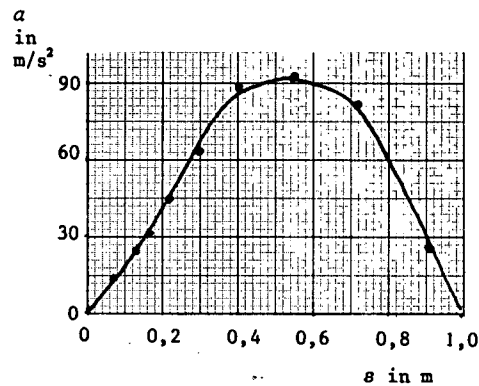


fig. 2 De a, s -grafiek van de bal

Je mag aannemen dat de bal bij het werpen niet vervormd wordt en dat de luchtweerstand geen rol speelt. De massa van de bal is 70 g.

Arnold schat zijn rendement bij het weggooien laag, op 5% omdat de meeste energie in de beweging van zijn lichaam gaat zitten.

- Bereken hoeveel chemische energie het wegwerpen van de bal hem dan gekost heeft.

Probleem 3.5 LOOPWEERSTAND BIJ HARDLOPEN

Van een kilometer hardlopen word je aardig moe en je krijgt het er flink warm van. Ook je hartslag en je ademhalingsfrequentie zijn hoger dan normaal. Dat komt omdat je dat heel wat vermogen kost. Als je met een constante snelheid van 4,8 m/s hardloopt zonder dat je schoen over de weg slipt, verbruik je ongeveer 800 W. Daarvan is het rendement voor niet zo ervaren lopers ongeveer 20%. De rest van de energie wordt in de vorm van warmte en straling aan de omgeving afgegeven.

- Er werkt luchtweerstand. Voor het berekenen daarvan kun je de formule gebruiken:

$$F_l = c_w \cdot A \cdot \frac{\rho}{2} v^2$$

Voor de c_w van een hardloper kan je 0,7 nemen, voor het oppervlak A 0,6 m². De ρ is de dichtheid van de lucht.



fig. 1 De beweging van enkele lichaamsdelen van een hardloper.

ARBEID GEBRUIKEN

- Verder werkt er de 'loopweerstand', te vergelijken met de rolweerstand bij rijden. Daarin zitten verwerkt de 'weerstand' die je ondervindt door het feit dat slechts een deel van de veranderingen in zwaarteenergie tijdens het lopen opgevangen kan worden door opslag als elastische energie in spieren en pezen; door het schuiven van de voet in de schoen; door het vervormen van de schoen etc.
- Ten slotte werkt er de wrijvingskracht tussen de schoen en de grond.

- Bereken de bijdrage van het schuiven in de schoen, de vervorming e.d. in de arbeid door de loopweerstand als het zwaartepunt van de loper tijdens één stap 8,4 cm omhoog en omlaag gaat en 50% van de zwaarteenergie door omzetting in veerenergie in de spieren in pezen voor de volgende stap beschikbaar blijft.

Probleem 3.6 MAXIMALE SPRINGHOOGTE

Van welke hoogte kan je springen zonder je pijn te doen?

Neem aan dat je vanuit een gestrekte stand van een hoogte springt en zover mogelijk doorveert bij het neerkomen, maar niet omvalt.

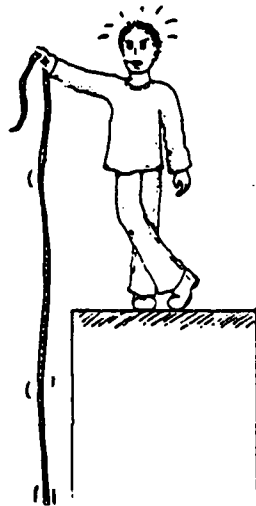


fig. 1

Tijdens het inveren wordt de kracht die je op de vloer (en de vloer dus op jou) uitoefent constant verondersteld: tussen 2000 en 4000 N afhankelijk van hoe sterk je bent in je benen.

(Als je van een té grote hoogte springt is de snelheid nog niet helemaal nul als je maximaal hebt ingeveerd: je slaat tegen de grond, kneust of breekt wat of, als je slim bent, maak je een extra koprol waardoor je je 'remweg' verder verlengt.)

- Bereken op basis van metingen of schattingen betreffende je eigen lichaam van welke hoogte je veilig kunt springen.

(Als je je antwoord wilt controleren door te springen, verzeker je er dan nog eens van dat je geen fouten hebt gemaakt!)

ARBEID GEBRUIKEN

Probleem 3.7 MEEGEVENDE OBSTAKELS LANGS DE WEG

Men streeft ernaar obstakels langs de weg, bijv. lichtmasten zó te construeren dat ze meegeven als er een auto tegenop botst. Daardoor wordt als het ware een remweg voor de auto in het obstakel ingebouwd.

effekten

Als mogelijke effecten van een meegevend obstakel (lichtmast, verkeersbord, wegwijzers, vangrail e.d.) zouden genoemd kunnen worden:

1. De vertraging die de bestuurder ondervindt (een mens kan maar 300 m/s^2 hebben) neemt af.
2. De constant veronderstelde kracht op de auto is kleiner.
3. De auto wordt minder vervormd, waardoor de inzittenden minder kans lopen beklemd te raken.

Om na te gaan welke van de genoemde effecten het belangrijkste zijn worden in dit probleem twee theoretische frontale botsingssituaties met elkaar vergeleken:

- botsing tegen een niet meegevende betonnen muur;
- botsing tegen een meegevende wand (bijv. vangrail).

botsing tegen de betonnen muur

Een personenauto (leeg: 800 kg) wordt met 48 km/h met een (dummy-)bestuurder van 80 kg tegen een betonnen muur gereden. De voorkant van de auto blijkt 40 cm ingedeukt te zijn en de veiligheidsgordel van de bestuurder blijkt maximaal 15 cm uitgerekt geweest te zijn.

botsing tegen de meegevende wand

Een personenauto van dezelfde soort met dezelfde dummy-passagier in dezelfde gordel, wordt met dezelfde snelheid tegen een meegevende, maar niet terugverende, wand gereden. De wand wordt 25 cm verplaatst en de voorkant van de auto blijkt nu 15 cm ingedrukt te zijn.

Bij vergelijking van de twee situaties blijkt slechts één van de genoemde effecten op te treden.

- Welke is dat en wat moet er aan de meegevende wand veranderd worden om ook de andere effecten te laten optreden?

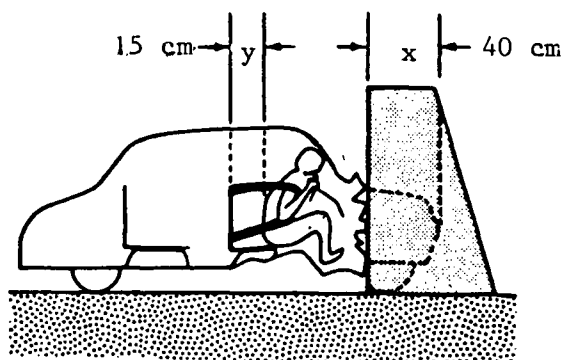


fig. 1 Botsing tegen een betonnen wand

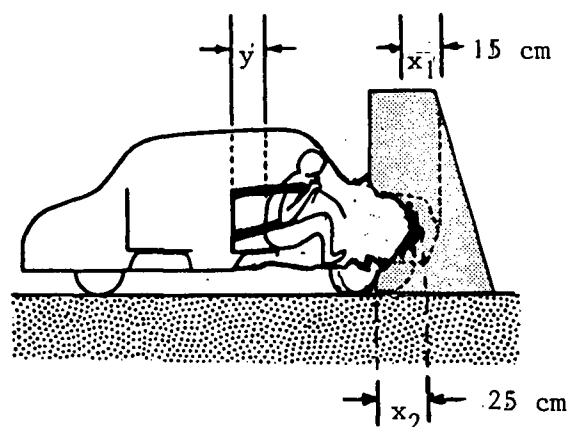


fig. 2 Botsing tegen een meegevende wand

ARBEID GEBRUIKEN

Probleem 3.8 FIETSEN OP EEN PONT

Bij het nadenken over het optellen van snelheden en de bijbehorende toename van kinetische energie stuit Ton op een merkwaardig probleem, dat het beste toegelicht kan worden aan de hand van een fietser die op een varende pont gaat fietsen.

Ga ervan uit dat de pont met 3 m/s vaart en dat de fietser (massa met fiets 80 kg) op de pont in 5 s van stilstand optrekt naar 5 m/s in de vaar richting.

Nu kan je de toename van de kinetische energie van de fietser op twee manieren beschrijven:

- *ten opzichte van de pont*

De kinetische energie van de fietser was 0 en neemt toe tot $\frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 5^2 = 1000$ J. Dus $\Delta E_k = 1000$ J. De fietser raakt deze kinetische energie weer kwijt door te stoppen.

- *ten opzichte van de wal*

De kinetische energie van de fietser was $\frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 3^2 = 360$ J en neemt toe tot $\frac{1}{2} \cdot 80 \cdot (3+5)^2 = 2560$ J. De toename is dus $\Delta E_k = 2200$ J.

De fietser raakt de 2560 J kwijt als die tijdens het fietsen opbotst tegen een (t.o.v. de wal) stilstaand ding, bijv. een lage brug.

Let op dat verondersteld is dat de pont tijdens het optrekken met een constante snelheid van 3 m/s doorvaart.



Heeft de fietser nu 1000 J (afgezien van verliezen door de wrijvingskrachten) energie geleverd voor toename van zijn kinetische energie of 2200 J?

Waar komt het verschil tussen die twee vandaan?

