

# Kinderen onderzoeken 'snelheid'

Frans van Galen  
Koeno Gravemeijer  
Frans Van Mulken  
Elise Quant



Onze snel veranderende wereld stelt andere eisen aan de kennis die leerlingen nodig hebben.

Het draait om inzicht, informatie kunnen opzoeken, probleemoplossen. Een bezinning op het curriculum lijkt daarom noodzakelijk.

Het nieuwe vak wetenschap & techniek kan daar een voorbeeldrol bij spelen, want in dat vak staat immers centraal dat leerlingen zelf op onderzoek gaan. Lessen wetenschap & techniek laten zich goed combineren met reken-wiskundelessen.

In dit boekje wordt een lessenserie over snelheid beschreven voor groep 7 en 8 van de basisschool.

De lessen zijn bedoeld om het nadenken over ander onderwijs te stimuleren, maar ook als voorbeeld van de integratie van de vakken wetenschap & techniek en rekenen-wiskunde. Het boekje geeft een verslag van ervaringen op de basisscholen en laat zien hoe de leergang een rol kan spelen in het Pabo-onderwijs.

---

**KWTZ**

Kenniscentrum Wetenschap en Techniek Zuid

**ESoE**

Eindhoven School of Education



---

**KWTZ**

Kenniscentrum Wetenschap en Techniek Zuid

**ES<sub>0</sub>E**

Eindhoven School of Education

De in dit boekje beschreven lessen en de leerlingopdrachten zijn te downloaden via de website van de Eindhoven School of Education en via rekenweb.nl.

[http://www.tue.nl/universiteit/over-de-universiteit/  
eindhoven-school-of-education/innoveren/steff/](http://www.tue.nl/universiteit/over-de-universiteit/eindhoven-school-of-education/innoveren/steff/)  
<http://www.fi.uu.nl/rekenweb/grafiekenmaker/snelheid.html>

## **Kinderen onderzoeken 'snelheid'**

Frans van Galen

Koenno Gravemeijer

Frans Van Mulken

Elise Quant



Frans van Galen is medewerker aan het Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen van de Universiteit Utrecht. Hij houdt zich bezig met de rol van ICT in het reken-wiskundeonderwijs, onder andere als ontwerper van spellen voor het Rekenweb ([rekenweb.nl](http://rekenweb.nl)).

Koeno Gravemeijer is emeritus hoogleraar science- en techniek educatie bij de Eindhoven School of Education van de Technische Universiteit Eindhoven. Twee belangrijke thema's in zijn werk zijn de rol van modellen en representaties in science-, techniek- en rekenen-wiskundeonderwijs, en de vraag hoe het onderwijs in deze vakken leerlingen het beste voorbereidt op de maatschappij waar ze in de toekomst in terechtkomen.

Elise Quant is medewerker van de Eindhoven School of Education van de Technische Universiteit Eindhoven. Zij houdt zich bezig met het ontwikkelen van multidisciplinair onderwijsmateriaal voor het bètadomein en is betrokken bij diverse projecten voor professionalisering van docenten.

Frans Van Mulken is als docent-onderzoeker rekenen-wiskunde & didactiek verbonden aan de pabo van de Avans Hogeschool. Daarnaast is hij project-leider van het Rekenlab van KPO Roosendaal waarin vierdejaars pabostudenten in rekenleerteams samen met de leraren van de basisschool ontwikkelingsonderzoek uitvoeren op het gebied van rekenen-wiskunde.

Foto omslag: Mieke Abels

Eindhoven TU/e, Eindhoven School of Education, 2012

## Vooraf

Dit boekje gaat over een lessenserie rond snelheid voor groep 7 en 8 van de basisschool. De lessenserie is ontwikkeld in het kader van het denken over het onderwijs voor de toekomst. Uitgangspunt daarbij is dat computers in toenemende mate een intermediair vormen tussen onszelf en de ons omringende werkelijkheid. Het kunnen omgaan met variabele grootheden (zoals bijvoorbeeld, afstand, tijd en snelheid) vormt een belangrijke voorwaarde voor het begrijpen van hoe computers deze vertaalslag maken.

In dit boekje bespreken we de uitgangspunten van de leergang en we laten aan de hand van voorbeelden uit de klas zien wat zulke lessen op kunnen leveren. De concrete lesbeschrijvingen, de werkbladen en de software die in de lessen gebruikt wordt, zijn te vinden op de project-website <sup>1</sup>.

In het boekje beschrijven we ook hoe de lessenserie een rol kan spelen in het Pabo-onderwijs. Het onderwerp snelheid ligt op het grensvlak van de vakken wetenschap & techniek en rekenen-wiskunde en is een onderwerp dat zich bij uitstek leent voor 'onderzoekend leren'.

De lessen zijn binnen het Kenniscentrum Wetenschap en Techniek Zuid ontwikkeld in het project 'Science and Technology for the Future' (Steff) van de Eindhoven School of Education.

We zijn veel dank verschuldigd aan de leraren van de scholen waar we de lessen mochten uitproberen: de H.Hart basisschool en basisschool Joseph in Roosendaal, de Jacinta basisschool in Breda en basisschool het Palet in 's Hertogenbosch.

Aan het project is meegewerkt door Dinja Coenradi, Femke Dijkers, Ilona Goedhart en Angela van Wijk, als studenten van het onderzoekslab. Huub de Beer heeft inhoudelijk bijgedragen en gezorgd voor ICT-ondersteuning.

We hopen dat dit boekje leraren en a.s. leraren zal stimuleren om met de leerlingen op onderzoek te gaan en dat het zal bijdragen aan het nadenken over onderwijs dat leerlingen op de toekomst voorbereidt.



# 1 Onderzoekend leren

## Leren in de informatiemaatschappij

Onze wereld verandert snel. Het is niet moeilijk om dingen aan te wijzen die pas kort bestaan en nu niet meer zijn weg te denken uit ons leven. Google, mobieltjes en TomToms zijn er voorbeelden van. Tegen de tijd dat de basisschoolleerlingen van nu volwassen zijn zullen dingen die vandaag nog niet bestaan zo'n zelfde plek veroverd hebben. De snel veranderende wereld stelt andere eisen aan de kennis die we nodig hebben. Routines en vaste procedures spelen een veel kleinere rol dan vroeger, het draait om inzicht, informatie kunnen opzoeken, probleemoplossen. Een bezinning op het curriculum lijkt daarom noodzakelijk.

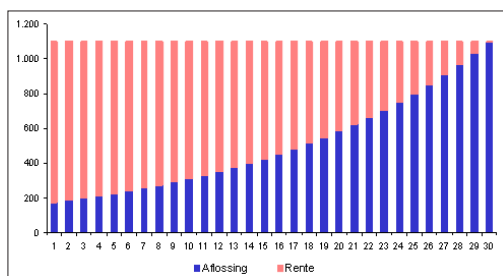
Het nieuwe vak wetenschap & techniek heeft op dit moment slechts een bescheiden plaats in het basisschoolcurriculum, maar het kan een voorbeeldrol spelen binnen het nadenken over ander onderwijs. Bij wetenschap & techniek staat immers centraal dat leerlingen zelf op onderzoek gaan. Bij voorkeur voeren ze in groepjes kleine experimenten uit en er zou ook ruimte moeten zijn om kinderen hun eigen onderzoeksvragen te laten formuleren. Hoe dit alles het beste kan worden vormgegeven is nog niet precies bekend, het vak is nieuw en er zal nog heel wat geëxperimenteerd moeten worden.

Wetenschap & techniek zou als vak echter niet op zichzelf moeten staan. Er is een grote verwantschap met het vak rekenen-wiskunde. In het rekenonderwijs vormen realistische contexten het startpunt voor het ontwikkelen van nieuwe concepten en als situaties waarin kinderen hun ontwikkelde kennis leren toepassen. In het vak wetenschap & techniek spelen meten en het werken met kwantitatieve gegevens een belangrijke rol. Het ligt voor de hand om de vakken te combineren en een deel van het rekenonderwijs te gaan geven vanuit eigen onderzoekjes die leerlingen doen, in plaats vanuit de contexten van het rekenboek.

In dit boekje beschrijven we een leergang die bedoeld is als voorbeeld van zo'n integratie. Snelheid is een typisch natuurkunde-onderwerp en de manier waarop we de activiteiten hebben opgezet past in onze ogen helemaal bij het vak wetenschap & techniek: experimenteren, meten, groepswerk, klassikale discussies. Tegelijkertijd is de leergang bedoeld om leerlingen inzicht te laten ontwikkelen in de rol van wiskundige hulpmiddelen, met name inzicht in grafieken.



De leergang rond snelheid die we ontwikkelden heeft als achterliggend doel dat kinderen leren redeneren over verbanden. Vooral door de invloed van de computer worden we tegenwoordig overspoeld met kwantitatieve informatie. Op allerlei terreinen van het dagelijks leven worden we geacht over zulke informatie te kunnen oordelen: in ons werk, in wat we vinden van politieke beslissingen ('btw-verhoging leidt tot minder theaterbezoek') en bij persoonlijke keuzes die we moeten maken (hypotheekvorm, mobiel abonnement). Inhoudelijk gezien gaat het om de samenhang tussen twee of meer veranderlijke grootheden, of variabelen. We kunnen globale uitspraken doen - 'meer a betekent meer b' - maar vaak gaat het er ook om hoe sterk het verband is en hoe het samenhangt met de waarden van de desbetreffende variabelen. Bij de keuze van een bepaalde hypotheekvorm, is het bijvoorbeeld niet alleen goed om te weten dat naar mate de hypotheek langer loopt, het aflossingsdeel toeneemt en het rentedeel navenant afneemt; van belang is



Afbeelding 1. Rente en aflossing annuïteitenhypotheek

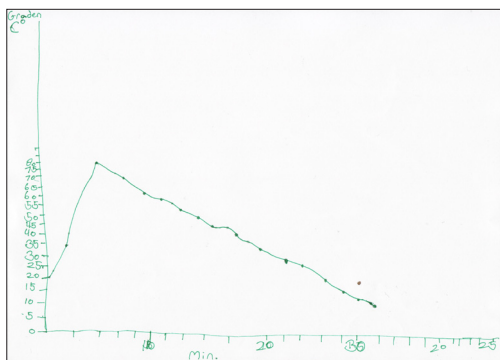
vooral te weten hoe dit proces precies verloopt (afbeelding 1). De verandering gaat eerst heel langzaam, maar naar het einde steeds sneller. In de eerste jaren los je nauwelijks af en naar het einde van de looptijd betaal je bijna geen rente meer en raak je dus ook het belastingvoordeel van de hypotheekrenteaftrek kwijt.

We denken dat dit type redeneren over samenhangen tussen variabelen een belangrijke vaardigheid is in de informatiemaatschappij waar we de leerlingen op willen voorbereiden. Conceptueel gezien betekent dit dat de leerlingen een notie moeten ontwikkelen van wat een variabele is en hoe je over een samenhang tussen variabelen kunt redeneren. Grafieken kunnen daar een belangrijke rol bij spelen.

## Een voorbeeld: afkoelen van een kopje thee

Een kopje thee dat je een tijd laat staan koelt af, dat weet ieder kind, maar hoe verloopt dat afkoelen precies? Een wiskundig hulpmiddel voor het onderzoeken van het verband tussen temperatuur en tijd is het maken van een grafiek. We hebben in verschillende klassen gevraagd om te voorspellen hoe een

grafiek van dat afkoelen er uit zal zien en veel kinderen maken dan een schets als Ewout (afbeelding 2), die een rechte lijn van 80 graden naar 20 graden trekt. Sommige kinderen maken daarbij de fout om de lijn door te trekken tot nul graden – dat lokt zo’n grafiek uit – maar ze zien al snel in dat dat niet goed kan zijn.

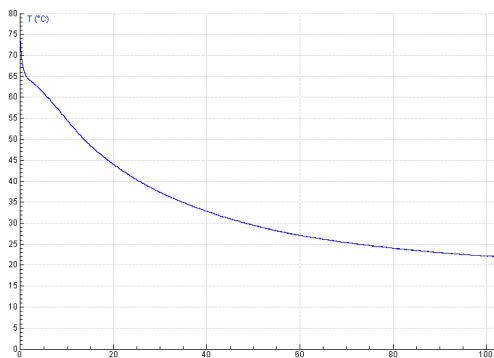


Afbeelding 2. Ewout heeft getekend hoe volgens hem thee zal afkoelen. De stijging aan het begin is het warm worden van de thermometer.

Wanneer we het experiment uitvoeren met een aan de computer gekoppelde thermometer en een kopje heet water drie kwartier of een uur laten afkoelen blijkt dat de grafiek een bocht krijgt (zie afbeelding 3). Dat leidt tot de vraag wat dat zegt over het afkoelen. Nila, uit groep 6 verklaarde de grafiek zo:

‘Omdat het eerst heel warm is en dan is het nog een heel groot verschil van hoeveel graden het hier eigenlijk is. En dan koelt ie heel snel af omdat het verschil heel groot is. Een als ie dan dichterbij is gaat het langzamer omdat het dan dichterbij is.’

Zo’n afkoelexperiment leidt tot een uitgebreid gesprek over warmte. Hoe warm zal het hier in de klas zijn? Is alles in de klas zo warm, ook dingen die van ijzer zijn? Hoe warm ben je zelf, en hoe kan het dat je warmer bent dan de 20 graden van de klas? Wat gebeurt er als iets afkoelt? Waar blijft die warmte? Het gaat ons hier echter vooral om de wiskundige aspecten van de activiteit.



Afbeelding 3. Afkoelen van een kopje thee.

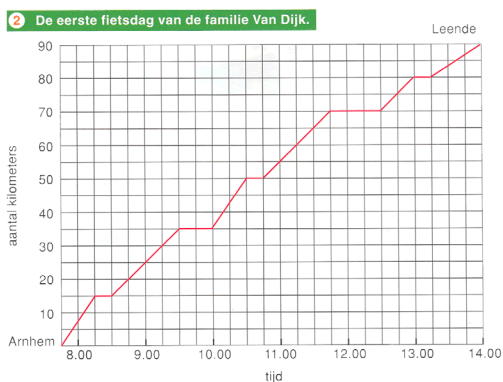
- Via zo'n afkoelexperiment wordt temperatuur een variabele. Jonge kinderen kennen 'heet' en 'koud' en 'lekker warm', maar dat zijn voor hen nog losse eigenschappen. Iets oudere kinderen kennen een aantal getallen die bij temperatuur horen: als je koorts hebt ben je 38 graden, water dat kookt is 100 graden, het vriest bij 0 graden. Via het experiment en via andere activiteiten met thermometers leren kinderen dat temperatuur allerlei waarden kan aannemen en dat de getallen die zij kennen - zoals 100, 38 en 0 – waarden zijn op een schaal.
- Ook tijd wordt in het experiment een variabele. In het dagelijks leven verwijzen tijdstippen naar specifieke momenten in het verleden of in de toekomst, maar in zo'n afkoelexperiment wordt tijd daar als het ware los van gemaakt. Een specifiek punt in de grafiek gaat niet over 'maandag, tien voor twee', maar over '15 minuten na de start van het afkoelexperiment'.
- De grafiek laat zien dat er een verband is tussen de twee variabelen en hoe dat verband er uit ziet. Dat verband kun je eventueel verder onderzoeken door het experiment te herhalen, wat nogmaals onderstreept dat temperatuur en tijd los zijn komen staan van het hier en nu, en variabelen zijn geworden.
- Kinderen leren via de grafiek veranderingen te analyseren: eerst koelt de thee snel af, maar daarna gaat het steeds langzamer. De grafiek helpt ook bij het zoeken naar een verklaring. Blijkbaar is er een verband tussen de temperatuur van de thee en de snelheid waarmee hij afkoelt.

Het is belangrijk dat leerlingen leren op een dergelijke analyserende manier naar verbanden te kijken. Grafieken spelen daarbij een belangrijke rol. We kunnen dit toelichten aan de hand van de opmerking van Nila. Door na te denken over het temperatuurverloop dat de grafiek laat zien, kwam Nila op het idee dat de snelheid waarmee de thee afkoelt afhankelijk is van het verschil tussen de temperatuur van de thee en die van de omgeving. Doorredenerend op dit idee zouden we ervan uit kunnen gaan dat de snelheid waarmee de temperatuur daalt evenredig is met de grootte van het temperatuurverschil. Dit geeft ons de mogelijkheid om een wiskundige formule op te stellen die dit proces beschrijft en deze aan meetgegevens te toetsen. Met zo'n formule kunnen we vervolgens computers laten rekenen en op basis daarvan kunnen we voorspellingen doen en simulaties maken. Het startpunt voor een dergelijke benadering is dat we, net zoals Nila doet, de gra-

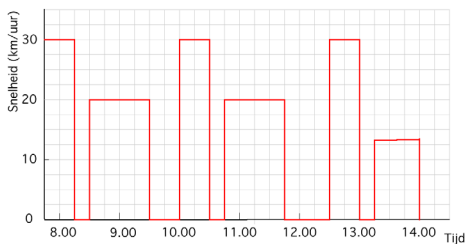
fiek zien als een dynamische beschrijving van een verband, waarbij we in gedachten een punt langs de lijn laten bewegen, van links naar rechts. We zien dan dat de temperatuur daalt naarmate de tijd verstrijkt, maar ook dat dit steeds langzamer gaat en dat de temperatuur van de thee de omgevings-temperatuur steeds dichterbij nadert. De grafiek fungeert zo als hulpmiddel om na te denken over hoe de ene grootte verandert onder invloed van verandering in de andere.

Met deze insteek kiezen we voor een ander soort grafiekenonderwijs dan nu gebruikelijk is. In de huidige methodes voor het basisonderwijs komen grafieken regelmatig aan de orde, maar op een vrij oppervlakkige manier. De onderwerpen wisselen per keer en de nadruk ligt daarbij op het aflezen. In de leergang die we in dit boekje bespreken gaat het vooral om het gebruiken van grafieken om dynamisch te redeneren over samenhangen tussen veranderlijke grootheden, of variabelen.

Wanneer we deze manier van denken willen stimuleren in het onderwijs doet het er op zich niet zo veel toe wat we precies als onderwerp kiezen. In het boekje 'Dynamische grafieken op de basisschool' (van Galen & Gravemeijer, 2010) worden onderwijsactiviteiten besproken die zijn ontwikkeld rond een scala aan onderwerpen: snelheid, temperatuur, licht, lengtegroei en populatiegroei. In het project 'Science and technology for the future' (Steff) is ervoor gekozen om het onderwerp snelheid verder uit te diepen en daar een uitgewerkte leerlijn voor te ontwikkelen.



Afbeelding 4. De eerste fietsdag van de familie van Dijk. Uit: De Wereld in Getallen, 7A.



Afbeelding 5. Bij de afstandsgrafiek van afbeelding 4 hoort deze snelheidsgrafiek.

## Lessen rond snelheid

Een argument om snelheid te kiezen als onderwerp is dat snelheid een lastig begrip is dat op verschillende manieren in grafieken kan worden gepresenteerd. Snelheidsveranderingen zijn niet alleen af te lezen in een snelheidsgrafiek, maar ook in een afstandsgrafiek, zoals die van de fietstocht van afbeelding 4. Wanneer de afstand binnen een periode sterk oploopt - de lijn is steil - is de snelheid van de fietser groter dan wanneer de afstand minder verandert. Bij zo'n afstandsgrafiek van afbeelding 4 zou een snelheidsgrafiek horen als die van afbeelding 5. Het feit dat verschillende grafieken mogelijk zijn en dat stijgen, gelijk blijven en dalen binnen die grafieken een verschillende betekenis hebben maakt snelheid tot een complex onderwerp, maar tegelijkertijd tot een onderwerp dat stimuleert tot nadenken over essentiële aspecten van grafieken.

Een tweede argument is dat het bij snelheid mogelijk is om op een heel natuurlijke manier het maken van een grafiek te introduceren als een vervolgstap van het meten van afstanden. We zullen daar in het volgende hoofdstuk uitgebreid op ingaan. Tenslotte speelde als praktisch argument mee dat vanuit een vorig project <sup>2</sup> een computerprogramma beschikbaar was waarin kinderen zelfstandig kunnen experimenteren met snelheids- en afstandsgrafieken. Dit computerprogramma – Treinmachinist – blijkt goed in te zetten voor het zelfstandig werken in tweetallen. Het biedt leerlingen de mogelijkheid om te experimenteren zonder dat het veel organisatie vraagt van de leerkracht.

## Overzicht

De opbouw van dit boekje is als volgt. In hoofdstuk 2 gaan we in op de achtergronden van de leergang en we geven een beknopt overzicht. Een praktische beschrijving van de lessen is te vinden op de project-website <sup>1</sup>.

In hoofdstuk 3 bespreken we voorbeelden uit de verschillende klassen waar de leergang, of een deel ervan, is uitgetoetst.

In hoofdstuk 4 bespreken we de doorgaande naar het voortgezet onderwijs en de relatie met de onderwerpen integreren en differentiëren in het vwo.

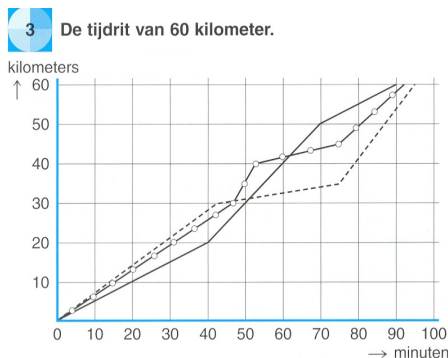
In hoofdstuk 5 beschrijven we hoe de ontwikkelde leergang een rol kan spelen in het opleidingsonderwijs op de Pabo.

## 2 Snelheid

### Een interessante grootheid

Snelheid is een belangrijk natuurwetenschappelijk onderwerp dat bij het onderwijs in wetenschap & techniek zeker aan de orde zou moeten komen. Snelheid komt echter ook aan de orde bij het vak rekenen-wiskunde en we kunnen daar bij aansluiten. In de meeste reken-wiskundemethoden krijgt het bijzondere karakter van snelheid als een samengestelde grootheid - afgelegde afstand per tijdseenheid - geen aparte aandacht, maar de methoden bevatten wel opgaven over afstandsgrafieken en daarbij worden ook vragen over snelheid gesteld. Een voorbeeld is de opgave uit Pluspunt die staat afgebeeld in afbeelding 6. De grafiek laat zien welke afstand wielrenners hebben afgelegd op een bepaald tijdstip. Vanuit zo'n grafiek zijn uitspraken te doen over de snelheid van de renners. Alex, bijvoorbeeld, fietste in de eerste 40 minuten veel langzamer dan de andere twee, want hij had in 40 minuten maar 20 km afgelegd, terwijl de anderen bijna 30 km hadden gefietst. Dat verschil in snelheid leidt tot een andere vorm van zijn grafiek, want die stijgt minder snel dan bij de anderen.

Opvallend is dat echte snelheidsgrafieken - grafieken met snelheid als variabele op de y-as - in de methoden bijna niet voor komen. De reden is misschien dat afstandsgrafieken en snelheidsgrafieken makkelijk door elkaar gehaald worden. Met onze lessenserie willen we ons richten op wat het onderwerp snelheid zo lastig maakt en we zetten daarom ook expliciet ver-



—○— Emre  
- - - Norbert  
— Alex

- Wie wint de tijdrit?
- Wie is na 40 km het snelst?
- Na hoeveel kilometer is Alex het snelst?
- Na hoeveel kilometer krijgt Norbert een geweldige inzinking?
- Wie van de drie renners rijdt het meest wisselend?

Afbeelding 6. Vragen over een afstandsgrafiek. Uit Pluspunt, 7.



schillende soorten grafieken naast elkaar. Daarmee gaan we verder dan de huidige reken-wiskundemethodes en komen we bij vragen die meestal pas in het voortgezet onderwijs aan de orde komen. Naar onze ervaringen kunnen leerlingen in het basisonderwijs zulke vragen echter goed aan.

Grafieken spelen in onze lessenserie een centrale rol. Dat is omdat we de leerlingen willen laten nadenken over hoe afgelegde afstand en snelheid variabelen kunnen zijn die veranderen in de tijd. Een grafiek is een manier om de relaties tussen variabelen te visualiseren. We hopen dat kinderen door het nadenken over de verschillende grafieken beter gaan begrijpen wat 'snelheid' is, maar ook dat ze daardoor beter gaan begrijpen wat de basisconcepten achter grafieken zijn.

## **Momentane snelheid tegenover verplaatsing binnen een bepaalde tijd**

Snelheid is een samengestelde grootheid, dat wil zeggen een grootheid die de verhouding tussen twee andere grootheden vastlegt. Bij snelheid zijn die grootheden afstand (lengte) en tijd, met als veel gebruikte maten 'km per uur' en 'm per seconde'. Er zijn meer samengestelde grootheden, waar we in het dagelijks leven mee te maken hebben, bijvoorbeeld benzineverbruik of prijs per kilo. Prijs per eenheid is iets wat in het rekenonderwijs uitgebreid aan de orde komt. Een verschil met snelheid is echter dat de prijs per eenheid verwijst naar een relatief constante eigenschap, terwijl we bij snelheid meestal juist geïnteresseerd zijn in hoe deze verandert. We willen weten hoe de verhouding tussen afstand en tijd verandert over de tijd.

Dit is een vrij abstracte manier van formuleren. Bij jonge kinderen is snelheid eerst gekoppeld aan concrete ervaringen: op een driewieler kun je 'langzaam' rijden of 'snel', en auto's rijden 'heel hard'. We kunnen er vanuit gaan dat als kinderen snelheden leren associëren met getallen – zoals: 'in de stad mag een auto maar 50 km per uur rijden' – de maat 'km per uur' in eerste instantie ook alleen een naam is, zoals bij temperatuur bijvoorbeeld 'graden' hoort. Pas bij wat oudere kinderen krijgen de afzonderlijke woorden binnen 'kilometer per uur' betekenis. Ze leren dan snelheid op te vatten als een verhouding. Vaak gebeurt dat zonder dat er op school veel aandacht aan snelheid wordt besteed, maar er zijn ook genoeg kinderen die moeite hebben om die stap te maken. We zullen daar straks voorbeelden van geven. Vooral het feit dat het meestal gaat om een verhouding die van moment tot moment verandert maakt snelheid tot een lastig begrip.

Waar het met name om gaat is dat kinderen moeten leren om onderscheid te maken tussen momentane snelheid - de snelheid op een willekeurig moment - en snelheid als verplaatsing binnen een bepaalde tijd. Om dat verschil concreet te maken: om 50 km per uur te rijden (momentane snelheid) hoeft een auto niet een uur te rijden en, andersom, als een auto in een uur 50 km heeft gereden (verplaatsing binnen een uur) weet je niet of de bestuurder onderweg de maximum snelheid niet heeft overtreden. In onze taal maken we onderscheid via de woordjes 'per' en 'in'. Met 'de auto reed 50 km per uur' verwijzen we naar de snelheid op een specifiek moment en als we willen vertellen dat de auto 50 km heeft afgelegd zeggen we: 'de auto reed 50 km in een uur'.

Wat daarbij lastig is, is dat we momentane snelheid meestal uitdrukken in 'km per uur', een maat die verwijst naar een lang tijdsinterval. Wanneer we zeggen dat een auto 50 km per uur rijdt doen we in feite een soort gedachtenexperiment: als de auto deze snelheid aan zou houden, dan zou hij in 1 uur zoveel km rijden. Leerlingen raken in de war omdat ze 'km per uur' niet opvatten als een gedachtenexperiment, maar heel concreet denken aan een uur dat voorbij moet gaan.

Die verwarring is duidelijk te zien in de interviews die we hielden met kinderen van groep 7. Een van de vragen was: 'Je moeder gaat met de auto naar een winkel. Ze hoeft maar 10 minuten te rijden voordat ze bij die winkel is. Kan ze dan 50 km per uur rijden?' Veel leerlingen gaven een correcte uitleg, maar er kwamen ook antwoorden als: <sup>3</sup>

Sylvie: 'Nee, omdat het dan langer is. Want als je 10 minuten rijdt, dan kan je geen 50 km in een uur rijden. (...) Als je twee uur rijdt kan je wel 50 km doen, maar 10 minuten niet, omdat het dan veel te kort is om 50 km te rijden.'

Yulia: 'Nee, want ze doet er 10 minuten over en 50 km in een uur, dan moet je het wel anders zeggen, denk ik. Maar dan rij je wel heel erg snel.'

Rosalie: 'Nee, omdat het maar 10 minuutjes rijden is.' (...) 'Als je bijvoorbeeld 30 km per uur rijdt en je hebt 10 minuutjes, dan moet je dat delen door 6. Hoeveel kilometer dat doet. Dan kom je er ongeveer uit hoeveel kilometer je dan per 10 minuutjes rijdt of zo.'

Deze leerlingen vatten de vraag op alsof het er om ging of je in 10 minuten echt 50 km, of 30 km zou rijden. Alle drie konden ook niet aangeven wat het verschil was tussen '50 km per uur' en '50 km in een uur'.

Een ander voorbeeld is de reactie van een leerling op de vraag wat je kunt zeggen als een auto stil staat. We hadden eerst uitgebreid gesproken over de snelheidsmeter in de auto. Daarna vroegen we hoeveel km per uur een auto rijdt als hij stil staat.

Luka: 'Nul'

Onderzoeker: 'Kan dat, nul kilometer per uur?'

Luka: 'Als hij een heel uur stil staat dan kan het wel.'

Zoals gezegd, veel kinderen konden de vraag over moeder die naar de winkel rijdt wel goed beantwoorden. Sommige kinderen beschreven '50 km per uur' spontaan als een gedachtenexperiment.

Joost: 'Dat betekent dat ... je rijdt bijvoorbeeld 20 minuten, en dan rij je 20 minuten 50 km per uur, dus als je dan zal ik maar zeggen, een uur zou rijden, dat je dan 50 km aflegt.'

Het helpt hierbij ongetwijfeld dat kinderen snelheid heel concreet kennen als het getal op de snelheidsmeter. In dat opzicht is snelheid net zo concreet als bijvoorbeeld temperatuur. Je kunt voelen of iets warm of koud en je kunt de temperatuur precies meten met een thermometer. Op een soortgelijke manier kun je snelheid rechtstreeks ervaren - bijvoorbeeld als je fietst - maar als je er een getal aan wilt koppelen heb je een snelheidsmeter nodig.

Een deel van de verwarring komt waarschijnlijk doordat we snelheid uitdrukken in 'km per uur'; er zou minder verwarring optreden als we de snelheid van auto's zouden uitdrukken in 'meter per seconde'. Dat zou het probleem echter ook verhullen, want we zouden dan niet merken of leerlingen 'meter per seconde' al opvatten als een verhouding of dat ze nog concreet denken aan een afgelegde afstand binnen een specifieke tijd.

## De verhoudingstabel

Met onze lessenserie hopen we te bereiken dat leerlingen snelheid niet alleen gaan kennen als een getal op de snelheidsmeter, maar ook als een verhouding tussen afgelegde weg en tijd. Die verhouding functioneert in veel gevallen als een wiskundige voorspelling: als de auto met deze snelheid een uur zou rijden dan zou hij 50 km afleggen. Het is geen voorspelling over wat er in werkelijkheid zal gebeuren, want de snelheid van de auto kan van moment tot moment veranderen en het kan zijn dat de automobilist helemaal geen uur hoeft te rijden.

In onze lessenserie stellen we de relatie tussen afgelegde afstand en tijd heel expliciet aan de orde en daarin speelt de verhoudingstabel een belangrijke rol. Met de verhoudingstabel kun je een gemeten snelheid - bijvoorbeeld de afstand die een batterij-autootje reed in 10 seconden - omzetten naar een snelheid in centimeters per seconde of naar kilometers per uur. Wanneer een autootje 3 meter heeft gereden in 10 seconden en het reed met een constante snelheid, dan reed het 30 cm in 1 seconde. Je kunt in dit geval ook zeggen: de snelheid van het autootje was 30 cm per seconde. Met wat rekenwerk is die snelheid ook om te zetten naar 1,08 km per uur.

|     |     |    |      |        |
|-----|-----|----|------|--------|
| cm  | 300 | 30 | 1800 | 108000 |
| sec | 10  | 1  | 60   | 3600   |

Rekenen aan verhoudingen blijft overzichtelijk wanneer daarvoor een verhoudingstabel gebruikt wordt. Het is gebruikelijk om de term 'verhoudingstabel' te gebruiken voor een tabel waarin horizontaal wordt gerekend, zoals hierboven. Een verticale tabel, zoals hieronder, is echter even overzichtelijk, en voor leerlingen eenvoudiger te tekenen. Belangrijk is in ieder geval dat steeds duidelijk is wat de eenheden zijn.

| cm    | sec  |
|-------|------|
| 300   | 10   |
| 30    | 1    |
| 1800  | 60   |
| 10800 | 3600 |

Na het maken van zulke berekeningen is een belangrijke vraag wat de berekening nu betekent. Zal het autootje in een uur echt een kilometer rijden? Waarschijnlijk niet, weten leerlingen, want het is bijvoorbeeld maar de vraag of het batterijtje genoeg stroom levert voor een uur. Bovendien maakt het veel uit op wat voor ondergrond zo'n autootje rijdt. Zo'n berekening is met andere woorden een goede aanleiding om te bespreken dat 'km per uur' naar een gedachtenexperiment verwijst.

Een soortgelijke discussie kan worden uitgelokt via een probleem als:

Iemand heeft 320 kilometer gereden en daar deed hij in zijn auto 4 uur over. Wat kun je zeggen over de snelheid van de auto?

In zo'n gesprek zal al gauw het begrip 'gemiddelde snelheid' naar boven komen. Kun je concluderen dat de auto elk uur precies 80 km zal hebben gereden? Nee, op de snelweg rijd je harder dan in de stad, en misschien was er ergens een file. Wat je wel kunt zeggen is dat de auto gemiddeld 80 km per uur reed. Leerlingen komen soms zelf met die term, maar hebben dan niet een rekenprocedure in gedachten - getallen bij elkaar optellen en dan delen. Ze bedoelen dat er een soort compensatie is: de auto rijdt soms harder en soms zachter en uiteindelijk komt de auto even ver als wanneer de bestuurder altijd precies 80 km per uur had kunnen rijden. Dat is in feite ook de kern van het begrip 'gemiddelde', veel meer dan de rekenprocedure.

Rekenen met verhoudingen kan overzichtelijk worden gedaan in een verhoudingstabel, maar zo'n tabel gaat uit van een vaste verhouding tussen afstand en tijd, terwijl het in de meeste situaties juist zo kenmerkend is dat snelheid voortdurend verandert. Juist het feit dat die verhouding van moment tot moment kan veranderen maakt snelheid tot een waardevol onderwerp voor de basisschool. Het vormt een tegenwicht tegen de vele situaties in de rekenboeken, waar wel sprake is van een constante verhouding, zoals boodschappen in de supermarkt, of recepten. Als tomaten €2,80 kosten per kilo, dan moet je voor 500 gram de helft van dat bedrag betalen. Of wanneer je 300 gram tagliatelle nodig hebt in een recept voor 4 personen, dan heb je 600 gram nodig wanneer je voor 8 mensen kookt, en 900 gram voor 12 mensen. Met afstand en tijd kan ook verhoudingsgewijs gerekend worden, maar in tegenstelling tot hoeveelheden in recepten en de prijs van appels in de supermarkt is zo'n berekening bij snelheid meestal niet meer dan een gedachtenexperiment.

Wanneer het gaat om veranderende verhoudingen hebben we niet veel aan de verhoudingstabel. Er is een echter een wiskundig hulpmiddel dat hier bij uitstek geschikt is: de grafiek.

## Grafieken

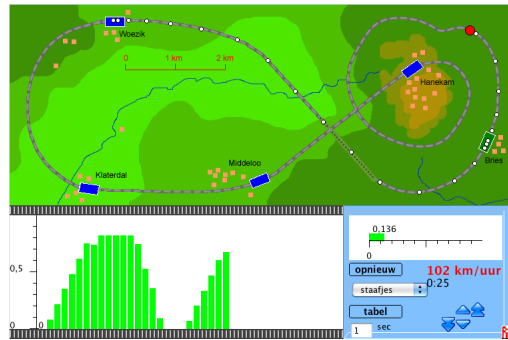
Grafieken zijn een hulpmiddel om een veranderende verhouding tussen grootheden weer te geven. Elk punt in de grafiek geeft aan hoe de waarde

van de ene grootte correspondeert met een waarde van de andere grootte. De vorm van de grafiek brengt daarmee de relatie tussen de groottes in beeld

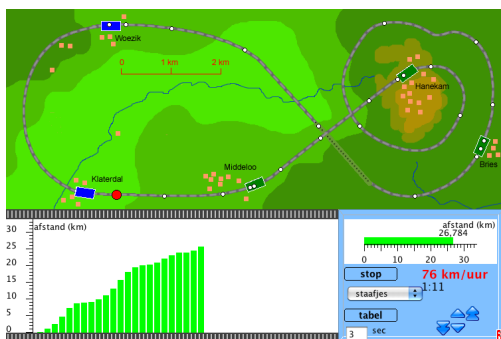
Het feit dat er bij afstand, tijd en snelheid verschillende soorten grafieken mogelijk zijn maakt snelheid tot een bijzonder interessant onderwerp, ook voor de basisschool. We kunnen die verschillende soorten grafieken het beste bespreken aan de hand van het computerprogramma *Treinmachinist*. Dit programma speelt een belangrijke rol in de lessenserie.

*Treinmachinist* begint voor de leerlingen als een spel. Op het scherm staat een treinbaan afgebeeld en een rode punt op die baan geeft aan hoe de trein zich verplaatst (zie afbeelding 7). De opdracht in het spel is om zo snel mogelijk een rondje te rijden, maar wel onder twee voorwaarden: de trein mag niet harder rijden dan een bepaalde maximumsnelheid en hij moet op tijd stoppen bij elk tussenstation. De leerlingen hebben knoppen om de trein te laten optrekken - langzaam of snel - en om hem te laten remmen - ook langzaam of snel. Terwijl de leerlingen de trein laten rijden tekent de computer onder op het scherm een grafiek.

In de eerste helft van de lessenserie laat de computer een grafiek zien die aangeeft hoeveel meter de trein gereden heeft tussen twee meetmomenten. De computer zet elke seconde - de tijdseenheid kan ook anders worden gekozen - een punt op de treinbaan, op de plek waar de trein zich bevindt. De staafjes van de grafiek corresponderen met het meetertje rechtsonder op het scherm. Het meetertje geeft de afstand aan die de trein heeft afgelegd vanaf het vorige meetpunt. Op elk meetmoment wordt als het ware het liggende staafje uit de meter rechtop in de grafiek gezet. Op een indirecte manier is de grafiek die zo ontstaat ook een grafiek van de snelheid van de trein, want hoe sneller de trein rijdt, des te groter is de afstand die hij in een seconde aflegt.



Afbeelding 7. Grafiek van de verplaatsing tussen twee meetmomenten ('stukjes-afstand-grafiek').

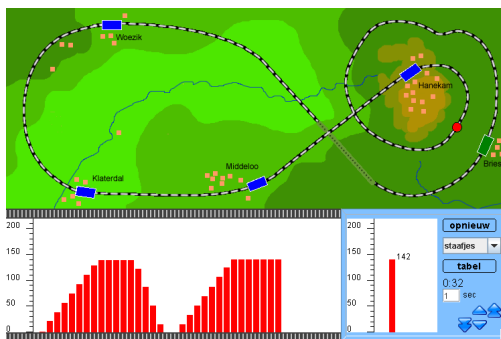


Afbeelding 8. Grafiek van de totaal afgelegde weg ('totale-afstand-grafiek').

Andere, wat minder duidelijke namen zijn 'verplaatsings-grafiek' tegenover 'afstandsgrafiek', of 'grafiek van de afgelegde weg'.

Ook op grond van de totale-afstandsgrafiek valt iets te zeggen over de snelheid van de trein. Als in de grafiek van de totaal afgelegde afstand de staafjes een tijdje dezelfde hoogte houden betekent dat dat de afstand tot het startstation niet verandert en dat de trein dus stil staat. Een recht stukje in de afstandsgrafiek correspondeert in deze grafiek met een snelheid 0. Langzaam of snel rijden van de trein correspondeert met minder of meer steil zijn van de grafiek.

Het derde type grafiek dat in de lessenserie aan de orde komt is een echte snelheidsgrafiek, zie afbeelding 9. Rechtsonder staat de snelheidsmeter van de trein die van moment tot moment aangeeft wat de snelheid is van de trein.



Afbeelding 9. Snelheidsgrafiek

Een ander soort grafiek is afgebeeld in afbeelding 8. In deze grafiek geven de staafjes steeds de totale afstand weer vanaf het startstation. In dit geval heeft het staafje aan het eind de maximale lengte, want dan is het eindpunt bereikt. Om een onderscheid te maken tussen de twee soorten grafieken kunnen we de eerste soort een 'stukjes-afstand-grafiek' noemen en de andere een 'totale-afstand-grafiek'.

Andere, wat minder duidelijke namen zijn 'verplaatsings-grafiek' tegenover 'afstandsgrafiek', of 'grafiek van de afgelegde weg'.

Ook op grond van de totale-afstandsgrafiek valt iets te zeggen over de snelheid van de trein. Als in de grafiek van de totaal afgelegde afstand de staafjes een tijdje dezelfde hoogte houden betekent dat dat de afstand tot het startstation niet verandert en dat de trein dus stil staat. Een recht stukje in de afstandsgrafiek correspondeert in deze grafiek met een snelheid 0. Langzaam of snel rijden van de trein correspondeert met minder of meer steil zijn van de grafiek.

Het derde type grafiek dat in de lessenserie aan de orde komt is een echte snelheidsgrafiek, zie afbeelding 9. Rechtsonder staat de snelheidsmeter van de trein die van moment tot moment aangeeft wat de snelheid is van de trein.

Om de zoveel seconden - in het voorbeeld steeds na 1 seconde - wordt dat staafje in de grafiek geplaatst. Omdat de snelheidsgrafiek een grafiek is van iets dat in principe elk moment gemeten kan worden kan de computer naar keuze ook een continue lijngrafiek te laten zien.



## Van staafjesgrafiek tot lijngrafiek

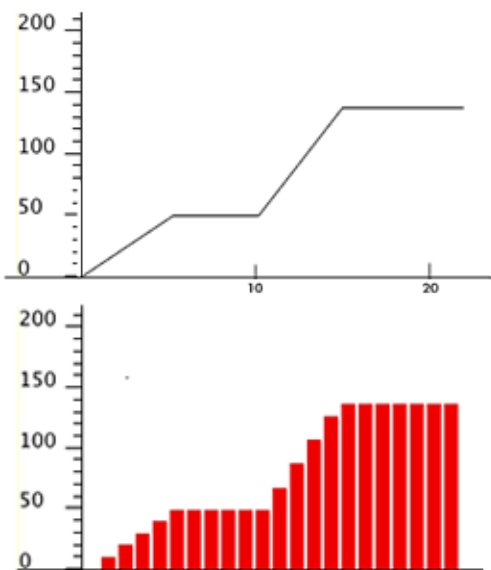
De lessen rond snelheid zijn bedoeld om bij te dragen aan een leerlijn waarin stapje voor stapje inzicht in grafieken ontwikkeld wordt (van Galen & Gravemeijer, 2010). Naar ons idee moet in zo'n lijn het werken met staafjesgrafieken, zoals die van Treinmachinist, vooraf gaan aan het werken met lijngrafieken. Vergeleken met een lijngrafiek is een grafiek van staafjes veel concreter: elke meting wordt apart afgebeeld als een staafje, in plaats van dat het een punt is, ergens op een lijn.

De plaatjes van afbeelding 10 illustreren het verschil tussen een lijngrafiek en een staafjesgrafiek. Het zijn snelheidsgrafieken van een optrekkende trein. Wanneer iemand moet beschrijven hoe je kunt zien dat de trein eerst langzaam optrekt en later sneller, is bij de lijngrafiek een formulering nodig als:

‘De lijn is steiler in het tweede stuk, en dat betekent dat de snelheid van de trein daar in dezelfde tijd meer toeneemt dan in het begin’.

Zo'n formulering met ‘in dezelfde tijd’ is heel abstract en er zijn dan ook maar weinig leerlingen die een correcte beschrijving kunnen geven. Meestal blijft het bij vage uitspraken als: ‘daar is hij steiler’. Vergeleken met de lijngrafiek is de staafjesgrafiek veel concreter, want daar staat elk staafje voor een meting en kun je aan het verschil tussen de staafjes zien hoe de snelheid toeneemt. Leerlingen hebben dan ook geen moeite met het onder woorden brengen waar ze hun interpretatie op baseren.

‘In het eerste stuk gaat de trein elke seconde 10 km per uur harder rijden. In het tweede stuk rijdt hij elke seconde steeds ongeveer 20 km per uur sneller.’



Afbeelding 10. Hoe zie je dat de trein eerst langzaam optrekt en dan sneller?

Het feit dat de staafjes voor losse metingen staan geeft leerlingen houvast bij het onderzoeken van allerlei aspecten van de grafiek:

- Wat betekent het dat de grafiek stijgt? Wat betekent dalen?
- Wat betekent het dat de grafiek een tijd even hoog blijft?
- Wat kun je aflezen uit de steilte van de grafiek?

Het geeft leerlingen ook houvast bij het onderzoeken van de relaties tussen grafieken:

- Waarom loopt de grafiek van de totale afstand bij de trein steeds verder op, terwijl de stukjes-afstand-grafiek op en neer gaat?
- Wat zegt de stukjes-afstand-grafiek over de snelheid van de trein?
- Hoe zie je in de stukjes-afstand-grafiek dat de trein met een constante snelheid rijdt? Hoe zie je dat in de totale-afstand-grafiek?
- Hoe zie je versnellen en vertragen in de ene grafiek en hoe in de andere?
- Hoe zou je van de stukjes-afstand-grafiek een totale-afstand-grafiek kunnen maken? En andersom?
- Wat zegt de oppervlakte van de staafjes in de stukjes-afstand-grafiek over de totaal afgelegde afstand?

Uiteindelijk moet dit ertoe leiden dat leerlingen inzicht ontwikkelen waarmee ze ook lijngrafieken kunnen interpreteren op een manier die verder gaat dan het herkennen van uiterlijke kenmerken.

## **Afstanden uitzetten in een grafiek**

Bij het onderzoeken van snelheid fungeren grafieken als gereedschap; ze worden samen met de leerlingen ontwikkeld als hulpmiddelen om een probleem op te lossen. We beschreven aan de hand van het spel Treinmachinist drie soorten staafgrafieken:

- de stukjes-afstand-grafiek (verplaatsingsgrafiek),
- de totale-afstand-grafiek (afgelegde weg),
- de snelheidsgrafiek.

In de lessen rond snelheid komen deze grafieken alle drie aan de orde. Om te zorgen dat ze voor alle leerlingen betekenis krijgen wordt een directe relatie gelegd met het meten van afstanden. Hieronder beschrijven we hoe vanuit het meten van de snelheid van autootjes eerst de verplaatsingsgrafiek



Afbeelding 11. Snelheid meten van een autootje dat met een constante snelheid rijdt.



Afbeelding 12. Strook van een autootje dat ook met een constante snelheid rijdt, maar sneller.



Afbeelding 13. Meetstrook van een autootje dat steeds harder gaat rijden. De afgelegde afstand binnen het tijdsinterval wordt steeds groter.

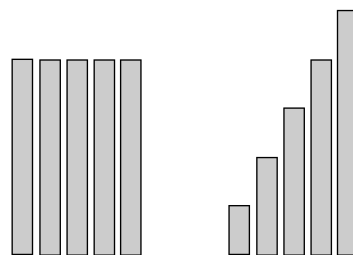
of 'stukjes-afstand-grafiek' ontwikkeld wordt, om vandaaruit de relatie te leggen naar de andere soorten grafieken.

Een van de eerste activiteiten in de lessenserie is dat leerlingen de snelheid van autootjes op batterij meten door om de paar seconden op een papieren strook met een streepje aan te geven waar het autootje dan is. De strook die dat oplevert ziet er bijvoorbeeld uit als die in afbeelding 11.

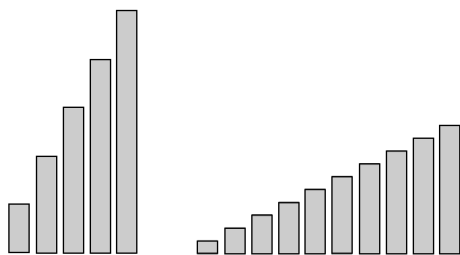
Dergelijke stroken zijn te gebruiken om de snelheid van verschillende autootjes te vergelijken, want bij een autootje dat sneller rijdt zal de strook er uit zien als in afbeelding 12. In de praktijk zullen door onnauwkeurigheid bij het meten de afstanden tussen de meetpunten overigens niet zo netjes gelijk zijn.

In plaats van twee auto's te vergelijken kunnen we ook kijken hoe de snelheid van één auto verandert. De strook van afbeelding 13 laat bijvoorbeeld zien hoe een auto optrekt.

Het representeren van snelheid met stroken legt een basis voor het maken van een grafiek. In een grafiek tekenen we de stroken verticaal, want dat levert een plaatje op waarin de verandering duidelijker te zien is, zie afbeelding 14.



Afbeelding 14. Grafiek van opeenvolgende verplaatsingen. Links van een autootje dat met constante snelheid rijdt, rechts van een autootje dat versnelt.



Afbeelding 15. Wanneer we vaker meten wordt de afgelegde afstand tussen de meetmomenten kleiner.

De grafiek die op deze manier gemaakt wordt is een grafiek van heel concrete metingen: als een autootje 2 meter heeft gereden tussen twee meetmomenten, dan representeert een staafje die 2 meter. Een dergelijke grafiek lijkt op een snelheidsgrafiek, maar in een snelheidsgrafiek staat elk staafje al voor de verhouding tussen afstand en tijd. Het verschil is te

illustreren met wat er gebeurt als we de tijd tussen de metingen verkleinen, als we bijvoorbeeld twee maal zo vaak gaan meten. Bij een snelheidsgrafiek komen er dan meer staafjes in de grafiek, maar een staafje van, zeg,  $0,8 \text{ m/sec}$  blijft een staafje van  $0,8 \text{ m/sec}$ . Bij een verplaatsingsgrafiek komen er niet alleen twee maal zoveel staafjes in de grafiek, maar die staafjes worden twee keer zo klein (zie fig. 15).

In het tweede deel van de lessenserie wordt eerst de totale-afstand-grafiek verkend. Daarna wordt de stap gemaakt van een verplaatsingsgrafiek naar een echte snelheidsgrafiek.

## De lessenserie

We beschrijven hieronder in grote lijnen de opbouw van de lessen. De lessen zijn opgedeeld in twee series, omdat de leerlingen waarschijnlijk hun interesse verliezen wanneer alle lessen achter elkaar worden gedaan. De eerste serie lessen kan bijvoorbeeld gedaan worden in groep 7 en de tweede serie in groep 8. Het is ook mogelijk om uit de lessen een kortere serie samen te stellen.

### *Het eerste deel van de lessenserie*

In de eerste les wordt het onderwerp snelheid geïntroduceerd vanuit een probleem over een auto die vlak bij een school een ongeluk heeft veroorzaakt. De leerlingen wordt gevraagd hoe je op basis van video-opnamen vast kunt stellen of auto's te hard rijden. Ter vergelijking is er ook een opname van een auto die precies  $30 \text{ km per uur}$  rijdt, zoals het hoort in een woonbuurt.

Een van de mogelijkheden die wordt onderzocht is om op het scherm te vergelijken welke afstanden de auto's afleggen per seconde, zie afbeelding 16.

In een volgende activiteit laten kinderen autootjes op batterij of een speelgoedtrein met constante snelheid langs een strook papier rijden. Ze zetten om een vast aantal seconden een streepje op het papier op de plek waar het autootje of de trein op dat moment is (afbeelding 17). De snelheid kan hierna vergeleken worden via de lengte van de stroken.

In een derde activiteit wordt kinderen gevraagd om zelf een representatie te bedenken voor de situatie dat een speelgoedtrein optrekt, weer langzamer gaat rijden en uiteindelijk stopt bij een volgend station.

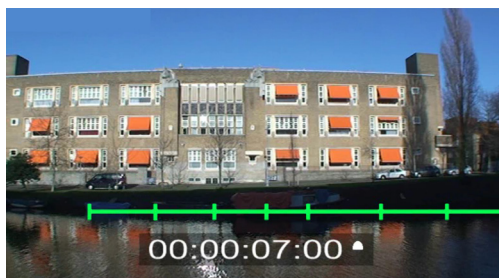
Vervolgens onderzoeken de leerlingen hoe je snelheid kunt weergeven in een grafiek van stukjes afstand. Ook leren ze hoe je snelheid om kunt rekenen, bijvoorbeeld van 'm per seconde' naar 'km per uur'.

Als verwerkingsactiviteit maken leerlingen opdrachten rond het computerspel waarin ze een treinmachinist spelen.

### *Het tweede deel van de lessenserie*

In het tweede deel van de lessenserie wordt de totale-afstand-grafiek geïntroduceerd en vergeleken met de stukjes-afstand-grafiek uit de eerste lessenserie.

De EuroMotion sensor meet afstanden via de weerkaatsing van ultrasoon geluid. Met deze sensor kunnen kinderen de computer grafieken laten ma-



Afbeelding 16. Op een video-opname kun je meten of auto's te hard rijden.



Afbeelding 17. Leerlingen meten de snelheid van een batterij-autootje door om de vijf seconden een streepje te zetten.

ken van toelopen naar de sensor, of juist ervan weglopen, van langzaam lopen en snel lopen en ook van bijvoorbeeld steeds sneller gaan lopen.

Alleen of in tweetallen maken leerlingen nieuwe opdrachten rond het computerspel Treinmachinist.

De lessen worden afgesloten met een activiteit waarin leerlingen op straat de snelheid van auto's meten met een stopwatch.

## 3 In de klas

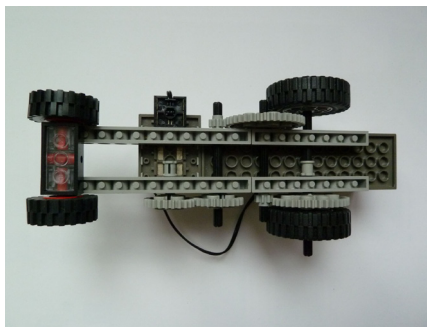
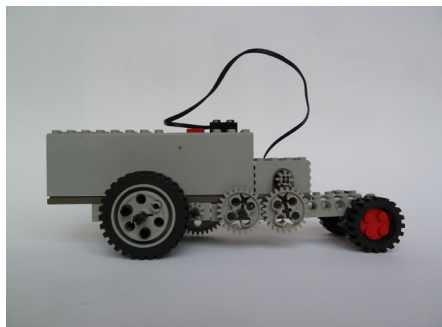
### Ervaringen

In dit hoofdstuk lichten we een aantal onderdelen van de leergang toe aan de hand van ervaringen in de klas (zie ook: Dijkers, 2011). Voor de handleiding met de lesbeschrijving van alle onderdelen verwijzen we naar de project-website <sup>1</sup>.

### Welk autootje rijdt het hardst?

Als een van de eerste activiteiten in de lessenserie meten de leerlingen zelf de snelheid van een autootje dat op een batterij rijdt. Geschikte autootjes zijn lastiger te vinden dan men misschien zou verwachten, want speelgoedwinkels verkopen vooral bestuurbare autootjes en die rijden te hard om er aan te kunnen meten. Als de school over technisch lego beschikt zouden kinderen daar de autootjes van kunnen maken, wat meteen een mooie wetenschap-en-techniekles over tandwielen kan vormen. Een voorbeeld van zo'n autootje staat in afbeelding 18. In plaats van een gezamenlijke les, waar meer autootjes voor nodig zijn, is het ook mogelijk om het meten een keer in de klas voor te doen en daarna de leerlingen in groepjes na elkaar een opdracht uit te laten voeren.

Als voorbeeld bespreken we een les op basisschool het Palet in Den Bosch. De les werd gedaan in de aula van de school. In de aula is rails voor een grote Playmobil trein uitgelegd, gemaakt van gebogen stukken die zo om



Afbeelding 18. Met technisch Lego kunnen leerlingen een autootje maken dat een geschikte snelheid heeft voor het meetexperiment.





Afbeelding 19. Om de vijf seconden zetten leerlingen op de strook een streepje op de plek van de trein.

en om aan elkaar zijn gelegd dat het een slingerende, maar rechte baan is geworden. De leerlingen zitten op hun knieën naast de baan. De leerkracht heeft het rolletje van een papieren telstrook uitgerold tot een lange strook naast de treinbaan. Een computerprogramma op een laptop telt met verschillende soorten geluiden steeds vijf seconden af: piep, piep, piep piep, TAK, piep, piep, piep piep, TAK .... De leerkracht laat de locomotief

eerst een keer langzaam rijden. De leerlingen zitten met een potlood in de aanslag en degene bij wie de trein langskomt op het moment van de TAK op de computer geeft met een streepje op de strook aan waar de trein op dat moment is. Het blijkt dat er vier streepjes kunnen worden gezet voordat de trein aan het eind van de rails is. De leerlingen zetten een 'L' bij de streepjes, van 'langzaam'.

Hetzelfde wordt nog eens gedaan, maar nu rijdt de trein op volle snelheid. Dit keer kan er maar één keer een streepje worden gezet. 'Kunnen we nu weten hoeveel keer sneller hij is gegaan?' vraagt de leerkracht? Het blijkt dat

drie stukjes van het langzaam rijden binnen het ene stuk van het snel rijden passen. De trein reed de tweede keer minstens drie keer zo snel, is de conclusie.

Hierna krijgen de leerlingen per groepje een autootje dat op een batterij rijdt en een lange strook papier. Ze doen met de autootjes hetzelfde als met de trein. Het meten levert soms wat praktische problemen op.



Afbeelding 20. In groepjes meten de leerlingen de snelheid van batterij-autootjes.

De bestuurbare auto die een leerling zelf heeft meegebracht rijdt veel te snel en twee van de andere autootjes blijven niet rechthoekig rijden. Dat laatste wordt opgelost door de auto af en toe een tikje te geven.

In de les hierna, weer in de eigen klas, worden de gemaakte stroken vergeleken. Je kunt aan de stroken zien welk autootje harder heeft gereden, want als een autootje harder rijdt staan de streepjes verder uit elkaar. De leerkracht knipt ook een van de stroken in stukken en constateert dat de stukken niet allemaal even lang zijn. Wat betekent dat? De leerlingen zijn het er over eens dat het komt doordat het zo moeilijk is om precies op het goede moment een streepje te zetten. Eigenlijk, zeggen ze, zouden alle stukken even lang moeten zijn, want de snelheid van de autootjes blijft hetzelfde.

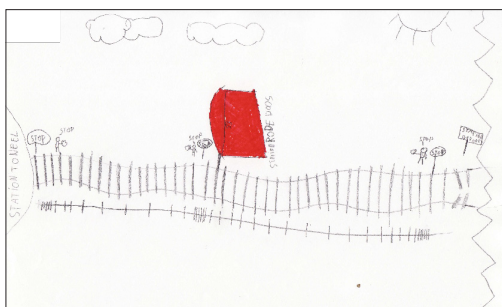
## Hoe geef je optrekken en remmen weer?

Centraal in de lessenserie staat het beschrijven van snelheidsveranderingen en het ontwikkelen van hulpmiddelen daarvoor. Een van de activiteiten is dat de leerlingen zelf een representatie bedenken voor het optrekken en remmen van een speelgoedtrein. We zullen in dit hoofdstuk laten zien wat een dergelijke opdracht op kan leveren (zie ook: van Galen & Quant, 2011). De voorbeelden zijn afkomstig uit de twee parallelklassen - groep 7 - van de school waar we ook de vorige les van bespraken.

De les in het aula van de school werd afgesloten zoals hij was begonnen: met de leerlingen op hun knieën naast de treinbaan. De leerkracht vertelde dat de rails nu een treinbaan was met drie stations: het toneel was het eerste station, een grote rode doos in het midden was het tweede station en het einde van de rails was het derde station. Daarna liet de leerkracht de trein rijden en beschreef daarbij hardop wat er gebeurde: de trein staat stil, hij start, gaat steeds harder rijden en remt daarna weer om op tijd bij het volgende station te kunnen stoppen.

Terug in hun eigen klas beschreef de leerkracht nog eens hoe de trein langs de verschillende stations was gereden: optrekken, remmen, stoppen, weer optrekken, weer remmen. De leerlingen kregen de opdracht om een plaatje te maken waarin ze dat optrekken en remmen van de trein lieten zien. De opdracht was geïnspireerd op werk van Sherin (2000) en diSessa & Sherin (2000).

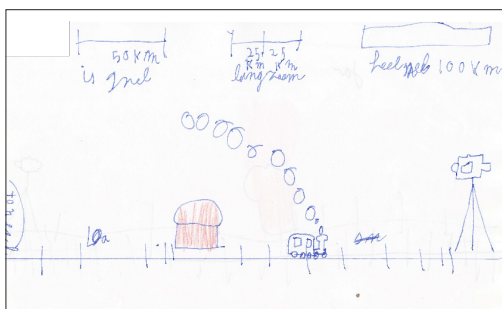
De tekeningen die deze opdracht opleverde verschillen erg in hoe concreet ze zijn. Willem blijft in zijn tekening (afbeelding 21) heel dicht bij de situ-



Afbeelding 21. Willem

atie van de speelgoedtrein. De treinbaan loopt rechthoekig, maar slingert omdat hij gemaakt is van gebogen stukken. De rode doos in het midden is het tweede station. Het derde station was in zijn klas 'station Gevaar' genoemd omdat de rails daar ophield. Willem heeft het gevaar in zijn tekening wat aangedikt.

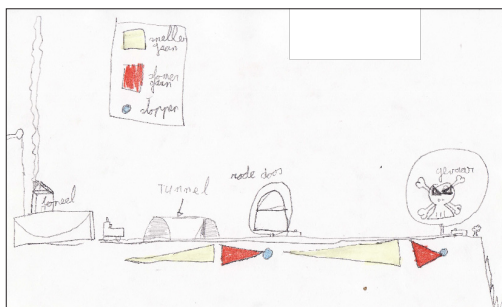
De eigenlijke weergave van het optrekken en remmen van de trein is bij Willem te zien op de lijn onder de rails. De afstand tussen de verticale streepjes wordt groter als de trein sneller gaat rijden en weer kleiner als de trein remt. Deze representatie past heel direct bij de concrete meetactiviteit waarbij de leerlingen steeds om de 5 seconden op een strook naast de trein een streepje



Afbeelding 22. Jazzley

hadden gezet. In die meetactiviteit had de trein echter een constante snelheid en er werden maar een paar streepjes op de strook gezet.

Op de tekening van Jazzley (afbeelding 22) is de lijn zelf wat onduidelijker, maar bovenaan staat een uitleg waarin '25 km' ('langzaam') de helft is van '50 km' ('snel') en dat weer de helft van 'heel snel'. Waarschijnlijk wordt met '25 km' niet de afstand bedoeld, maar een snelheid, zoals we in het dagelijks spraakgebruik vaak ook slordig zijn en zeggen dat een auto '25', of '25 km' rijdt, in plaats van voluit '25 km per uur'.



Afbeelding 23. Ijsbrand.

De tekeningen van Emiel, Ramon en Colin (afbeeldingen 24-26) gaan al in de richting van een traditionele grafiek. De tekening van Emiel heeft nog heel concrete elementen - rails met golven, mensjes naast de rails - maar de snelheid van de trein wordt weergegeven via de hoogte van de stippen in de railsvakken. Ramon doet hetzelfde, maar laat alle concrete elementen weg. Colin geeft de snelheid van de trein weer via de lengte van verticale strepen. Dit was iets dat hij zelf had bedacht, want de leerlingen hadden nog niet met het programma Treinmachinist op de computer gewerkt. Ter verduidelijking: de stippen staan er omdat Colin eerst 'l', 'g' en 's' in de vakken had gezet, maar hij realiseerde zich later dat de juf had gezegd dat ze liefst geen woorden moesten gebruiken.

A handwritten musical score on a wavy line. The notation consists of various note heads (some filled, some open) and stems. Below the line, there are three labels in boxes: 'Hauu', 'Zoo', and 'grou'. Each label is followed by two 'x' marks. The labels are written in a stylized, cursive font.

A hand-drawn sketch of a landscape. A horizontal line represents a river or path, with several rectangular blocks of scribbled lines above and below it, representing trees or bushes. The word "river" is written vertically on the left side, and "trees" is written vertically on the right side. The drawing is done in blue ink on a white background.

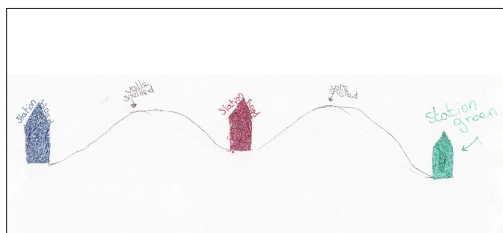
A hand-drawn diagram of a river cross-section. The river is represented by a wavy line at the bottom. Above the river, there are several vertical lines representing the riverbed or banks. Some of these lines have small circles or dots on them, possibly representing rocks or vegetation. The word "River" is written on the left side, and "Food" is written in the center. The diagram is simple and appears to be a student's drawing.

A hand-drawn map of a river system. The river flows from the top left towards the bottom right. Along the river, there are several labeled features: 'station' (top left), 'station' (middle left), 'station' (middle right), and 'bridge' (bottom right). There are also some unlabeled features: a small house-like shape near the top left station, a small house-like shape near the middle left station, and a small house-like shape near the middle right station. A small black dot is located near the bottom right station. The word 'bridge' is written at the bottom right. The word 'station' is written at the top left, middle left, and middle right. The word 'bridge' is written at the bottom right. The word 'station' is written at the top left, middle left, and middle right. The word 'bridge' is written at the bottom right.

29

heeft een snelheidsgrafiek getekend naast een treinbaan met zes stations. Zijn grafiek en treinbaan passen echter niet precies bij elkaar, want bij de stations is de grafiek niet altijd op zijn laagste punt. Opmerkelijk is ook wat Roy als legenda schrijft bij de grafiek: de stijgende lijn staat voor 'snel' en niet voor harder gaan rijden, de dalende lijn staat voor 'zacht' en niet voor langzamer gaan rijden en de horizontale lijn verwijst naar 'normaal' rijden, en niet naar het aanhouden van dezelfde snelheid. Het is duidelijk dat Roy nog alleen maar een globaal idee heeft van wat een snelheidsgrafiek is.

De tekening van Joyce (afbeelding 28) lijkt het meest op een echte grafiek. Zij tekent weliswaar geen assen, maar geeft wel aan waar de trein 'op vol-



Afbeelding 28. Joyce

le snelheid' rijdt. Ook Joyce combineert haar grafiek met concrete elementen; de drie huisjes staan voor de drie stations. Niet onverwacht interpreterden medeleerlingen haar lijnen daardoor als bergen en een van hen protesteerde dan ook, want, zei hij, als je de bergen op gaat ga je juist steeds langzamer rijden.

We hadden de leerlingen bij deze opdracht niet gevraagd om een grafiek te tekenen; de opdracht was met opzet wijder geformuleerd: maak een tekening of plaatje waarin je de snelheidsveranderingen van de trein laat zien. De opdracht prikkelde de fantasie van de leerlingen en ze probeerden allemaal om een eigen manier te bedenken. Voor het klassengesprek dat hierop volgde was dat goed, want hierdoor werd duidelijk dat er allerlei verschillende representaties mogelijk zijn, met een 'echte' grafiek als een van de mogelijkheden. In het gesprek kwam ook aan de orde wat belangrijk was in de tekeningen en wat vooral versiering was. Het gesprek hielp bovendien om een brug te slaan tussen het meten van snelheid via een strook, naar een grafiek waarin afstanden verticaal worden weergegeven.

## Zelf een grafiek tekenen

Leerlingen op de basisschool kennen grafieken vooral als kant en klare plaatjes in hun schoolboeken. Het is nuttig hen ook af en toe de opdracht te

geven om zelf een grafiek te tekenen, want daaruit blijkt heel direct wat ze van grafieken begrijpen. We bespreken in deze paragraaf een voorbeeld uit het tweede deel van de lessenserie.

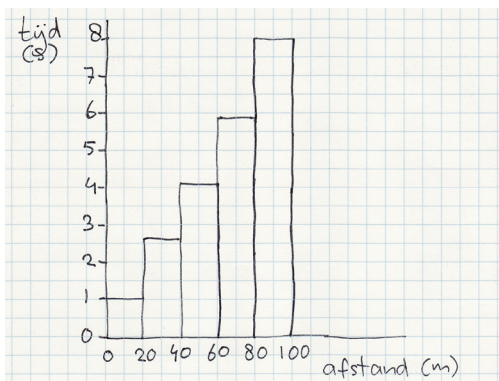
Op een school waar de lessen al eerder waren uitgeprobeerd had de leerkracht het snelheidsproject afgesloten door de leerlingen op straat de snelheid van auto's te laten meten. Een stuk van 100 meter was uitgezet en om de 20 meter stond een leerling met een stopwatch die de tijd klokte vanaf het moment dat de auto langs het startpunt kwam en de leerling daar met een vlag zwaaide. We gaven leerlingen van groep 8 op een andere school de resultaten van dit experiment - zie de tabel - en vroegen hen daar zelf een grafiek voor te bedenken.

| afstand | tijd    |
|---------|---------|
| 20 m    | 1,0 sec |
| 40 m    | 2,7 sec |
| 60 m    | 4,1 sec |
| 80 m    | 5,9 sec |
| 100 m   | 8 sec   |

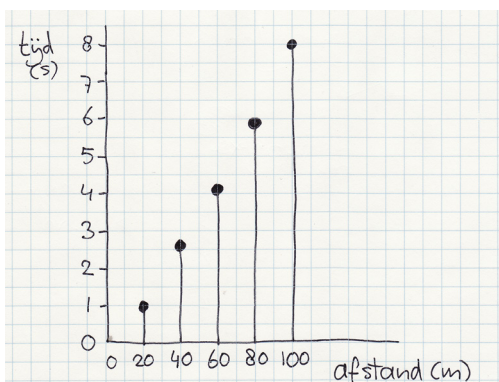
De volgende les werden de gemaakte grafieken vergeleken. De leerkracht had een aantal grafieken nagetekend op grote vellen, zie afbeelding 29-33. Dit leverde een aantal discussiepunten op:

- Een staafgrafiek is mogelijk, maar dan moet wel duidelijk zijn dat bijvoorbeeld '80 m' geldt voor de hele breedte van de staaf. In de grafiek van afbeelding 29 lijkt het alsof de staaf iets zegt over het stuk tussen 60 m en 80 m.
- Een lijn door de meetpunten is handig, omdat je daarmee makkelijk kunt aflezen wat de tijd op niet gemeten afstanden zou kunnen zijn. De tijd bij 70 m zou in dit geval 5 sec zijn. Hier ligt een fundamenteel punt onder: we weten niet zeker of de tijd bij 70 m inderdaad 5 sec was, want die meting hebben we niet; de lijn tussen de gemeten punten geeft een schatting.
- In principe ben je vrij om de tijd op de horizontale of op de verticale as te zetten, maar gebruikelijk is dat we de tijd horizontaal zetten.
- Hoe kun je de tijd het beste uitzetten? Maak je een as met vaste afstanden tussen de hele seconden, of zet je de feitelijk gemeten tijden op vaste afstanden van elkaar? (zie afbeelding 32 en afbeelding 33).

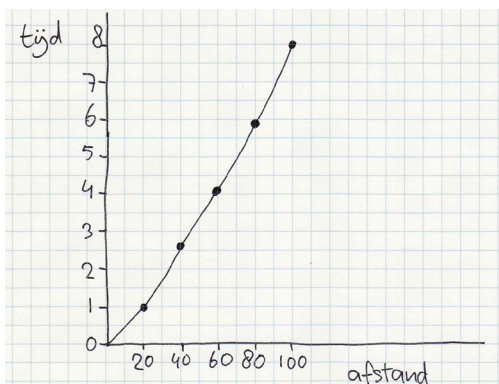




Afbeelding 29.



Afbeelding 30.



Afbeelding 31.

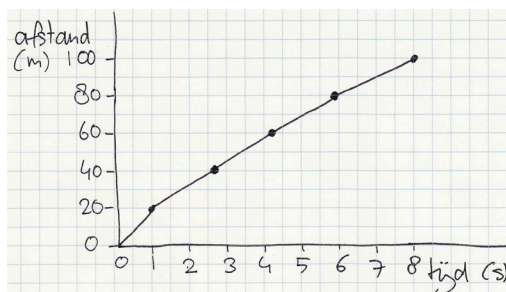
In dat laatste geval wordt de grafiek een rechte lijn en zegt de vorm van die lijn niets over de samenhang tussen afstand en tijd.

Dit laatste is in feite het belangrijkste discussiepunt: hoe deel je de assen in? Alleen als een as verhoudingen in de tijd correct weergeeft leidt dat tot een plaatje waaruit we iets over de snelheid kunnen aflezen. Wanneer je simpelweg de metingen naast elkaar zet geeft dat een rechte lijn als grafiek. Bij afbeelding 32 en 33 is het verschil niet zo duidelijk te zien omdat de auto met een redelijk constante snelheid reed, maar stel dat de auto eerst heel zachtjes zou hebben gereden en daarna steeds harder, dan zou dat in het geval van de laatste grafiek nog steeds een rechte lijn hebben opgeleverd.

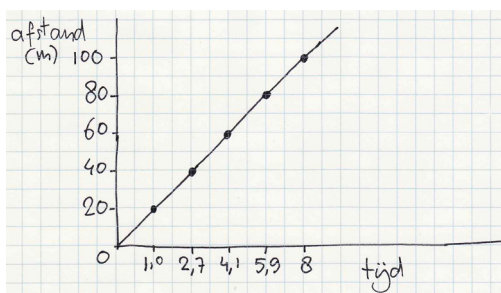
Op grond van deze les en andere ervaringen met tekenopdrachten pleiten we ervoor om leerlingen vaker te vragen om zelf een grafiek te maken. Zo'n opdracht stimuleert leerlingen om na te denken over de wezenlijke kenmerken van een grafiek. Elders (van Galen en Gravemeijer, 2010) bespraken we een les waarin de leerkracht vertelde dat ze af en



toe een zonnebloem had opgemeten en ze gaf de leerlingen de lengte van die zonnebloem na 4, 5, 9, 10 en 11 weken. De opdracht leidde onder andere tot een discussie over het verschil tussen een staafgrafiek met de metingen direct naast elkaar en een grafiek waarin de horizontale as een echte tijdas was. Een ander voorbeeld beschreven we in een artikel over een lessenserie rond groeien (van Galen 2010). Leerlingen kregen een tabel met de lengte van hun meester op zijn verjaardagen en moesten daar zelf een grafiek voor bedenken. Naast de te verwachten gewone lengtegrafieken leverde dat ook grafieken op van het lengteverschil tussen het ene jaar en het daarop volgende jaar. Een dergelijke grafiek maakt de groei per jaar heel direct zichtbaar.



Afbeelding 32.



Afbeelding 33.

## Omrekenen

Bij snelheid speelt omrekenen een belangrijke rol. Als we weten dat we met de auto twee en een half uur hebben gedaan over ongeveer 220 km willen we graag weten hoeveel dat 'per uur' was. Of als we een snelheid willen opmeten in 'meters per seconde' dan meten we een langere periode - bijvoorbeeld 10 seconden of een minuut - om een nauwkeurige meting te krijgen. In de les die we hier bespreken werd de leerlingen gevraagd om een gevonden meetuitkomst om te rekenen naar andere combinaties van afstand en tijd. Een belangrijk doel van de les was om het onderscheid te bespreken tussen de omrekenprocedure en het doen van een echte voorspelling.

Femke Dijkers gaf de lessenseries in groep 7 van een school in de Wouwse Plantage. Ze begint deze les met het ophalen van wat in voorgaande snelheidslessen aan de orde is geweest. Daarna laat ze drie leerlingen voor in

$$\begin{array}{l}
 5 \text{ sec.} = 1 \text{ meter } 47\frac{1}{2} \text{ cm} \\
 60 \text{ sec.} = 6 \times 2 \text{ m } 95 \text{ cm } 6 \times 3 \text{ m} = 18 \text{ m} \\
 30 \text{ sec.} = 9 \text{ m} \\
 1 \text{ uur} = 60 \times 18 = 1080 \text{ m} \\
 1 \text{ dag} = 24 \times 1080 = 24000 + 1920 \\
 \quad 24 \times 80 = 1600 + 320 = 1920 \\
 \quad 24000 \\
 \quad \underline{1920 +} \\
 25920 \text{ m} \\
 1 \text{ week} = 7 \times 20000 = 140000 \\
 \quad 7 \times 5000 = 35000 \\
 \quad 7 \times 900 = 6300 \\
 \quad 7 \times 20 = 140 \\
 \quad \quad 181440 \text{ m} \\
 2 \text{ weken} = 181440 \\
 \quad 181440 + \\
 \quad \underline{362880} \quad \text{m}
 \end{array}$$

Afbeelding 34. Anna en Lisa hebben uitgerekend hoeveel het autootje zou rijden in een uur, in een dag, in 1 of 2 weken.

de klas opmeten welke afstand een lego-autootje in 10 seconden rijdt. Dat blijkt 2 meter en 95 cm te zijn. De leerlingen krijgen de opdracht om in tweetallen uit te rekenen hoe ver het autootje zou rijden in een uur, in 30 seconden en in 5 seconden. Wanneer ze daarmee klaar zijn mogen ze zelf andere tijdsduren kiezen. Als de leerlingen een paar minuten bezig zijn zegt Femke dat ze de 2 m 95 mogen afronden als ze dat willen. Uit het leerlingwerk blijkt dat bijna alle groepjes dan overstappen op 3 meter in 10 seconden.

Een voorbeeld van het werk van de leerlingen is afbeelding 34. Anna en Lisa hebben onder andere uitgerekend hoeveel het autootje zou rijden in een uur, in een dag en in 1 of 2 weken. Ze hebben op hun blaadje ook tussenberekeningen opgeschreven. Andere tweetallen rekenden uit hoeveel het autootje zou rijden in een jaar of langer. Er is zelfs een tweetal dat

doorgaat tot miljarden eeuwen. In het rekenwerk worden overigens vrij veel fouten gemaakt omdat de leerlingen te veel uit hun hoofd proberen te doen. Er zijn ook leerlingen die zich vergissen bij de stappen in de tijd en bijvoorbeeld voor een minuut 29,5 meter nemen, dat wil zeggen 10 keer 10 seconden in plaats van 6 keer 10.

In de nabespreking laat Femke eerst een aantal leerlingen vertellen wat ze hebben uitgerekend en hoe ze dat hebben gedaan. Dan vraagt Femke of we zeker weten dat als we het autootje inderdaad een dag laten rijden, dat het dan 25920 m zal rijden, zoals een groepje berekend heeft. Een leerling die er niet zeker van is wijst op het afronden - 3 m, terwijl het eigenlijk 2 m 95 was - maar dat is het enige argument dat op tafel komt. Het lijkt alsof alle leerlingen van mening zijn dat als je het goed hebt uitgerekend, het ook moet kloppen. De enige leerling die er nog wel een voorwaarde aan verbindt is Quinten:

‘Als je 3 meter hebt en je gaat het gewoon helemaal precies uitrekenen dan moet het kloppen. Als ie over hetzelfde, dezelfde grond blijft rijden, want als ie in een keer over de steentjes gaat rijden dan gaat ie wel zachter.’

Pas als de leerkracht zelf andere dingen noemt die tegen zouden kunnen zitten, zoals tegenwind of wachten voor een stoplicht - gelach - dan zeggen de leerlingen dat je het inderdaad niet zeker kunt weten.

Deze discussie over zeker weten of niet is belangrijk. Natuurlijk weten de leerlingen heus wel dat er van alles kan gebeuren waardoor dat lego-autootje die 25 km niet zal halen, maar blijkbaar hebben ze er moeite mee om onderscheid te maken tussen het rekenmodel - werken met een vaste verhouding - en de reële contextsituatie. Zo’n onderscheid is typerend voor de relatie tussen wiskunde en de werkelijkheid; de wiskunde levert hulpmiddelen voor het onderzoeken en voorspellen van verschijnselen in de werkelijkheid, maar een wiskundige beschrijving is altijd een benadering. In dit geval raakt het onderscheid ook aan de kern van het begrip ‘km per uur’: de maat ‘km per uur’ legt een verhouding vast en zegt niets over de feitelijk gereden afstand of over werkelijk verlopen tijd.

### *Omrekenen in een verhoudingstabel*

Bij het omrekenen van samengestelde grootheden kan de verhoudingstabel een belangrijke rol spelen. In de hiervoor besproken les noteerde de leerkracht oplossingen van leerlingen op het bord in een verhoudingstabel, maar de leerlingen gebruikten de verhoudingstabel niet uit zichzelf. Er zijn twee argumenten voor een grote rol van de verhoudingstabel, een praktisch argument en een inhoudelijk argument.

Het praktische argument is dat de verhoudingstabel ervoor zorgt dat alle rekenstappen overzichtelijk naast elkaar komen staan. Dat is handig voor jezelf, want je houdt daarmee overzicht over je berekeningen, maar het is ook handig wanneer je aan een ander uit moet leggen wat jouw redenering was.

Het inhoudelijke argument is dat als de verhoudingstabel een standaard rekenhulpmiddel wordt in een klas een bepaald type berekeningen een eigen label krijgt: dit is rekenen in een verhoudingssituatie. Zoals in hoofdstuk 2 werd gezegd doet het er niet zoveel toe welke vorm men kiest voor de verhoudingstabel - horizontaal of verticaal - maar het is wel belangrijk dat de leerkracht zo’n tabel expliciet als ‘verhoudingstabel’ benoemt (van Galen e.a., 2005)

|               |    |     |     |     |     |     |     |     |              |              |
|---------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--------------|--------------|
| JARAK (cm)    | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 | 350 | 400 | 3000         | 10.000       |
| WAKTU (detik) | 1  | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 60 (1 menit) | 3600 (1 jam) |

Afbeelding 35. Leo en Chandra uit Surabaya rekenen het aantal cm per seconde om naar cm per minuut en per uur.

|               |    |      |               |                   |                   |
|---------------|----|------|---------------|-------------------|-------------------|
| JARAK (cm)    | 56 | 2800 | 3360 (33,6 m) | 201600 (2,016 km) | 403200 (4,032 km) |
| WAKTU (detik) | 1  | 50   | 60 (1 menit)  | 3600 (1 jam)      | 7200 (2 jam)      |

Afbeelding 36. Nadia en Ifa rekenen 56 cm in 1 seconde om naar het aantal cm per minuut, per uur en per 2 uur.

|                              |
|------------------------------|
| 56 cm / 1 detik              |
| 33,6 m / 1 menit             |
| 3360 cm / 1 menit            |
| <del>3360 cm / 1 menit</del> |
| 2,016 km / 1 jam             |
| 201600 cm / 1 jam            |

Afbeelding 37. De resultaten van Nadia en Ifa in cm/sec, m/min, cm/min, km/uur en cm/uur.

Voor voorbeelden van het rekenen met de verhoudings-tabel kunnen we putten uit een parallel-onderzoek dat werd uitgevoerd in Surabaya (Khikmiyah, 2011). In de lessen over snelheid die daar in een vijfde klas (groep 7) werden gegeven lag meer nadruk op het omrekenen van vaste, gegeven snelheden, en minder op veranderende snelheden. In afbeelding 35 is te zien hoe Leo en Chandra eerst uitrekenen hoeveel cm hun autootje af zou leggen in 2 tot 8 seconden en dan de overstap maken naar 1 uur en 2 uur. Nadia en Ifa (afbeelding 36) maken direct al grotere sprongen. Bij hen is vooral interessant dat ze hun uiteindelijke berekeningen noteren in verschillende maten: cm/sec, m/min, cm/min, km/uur en cm/uur (zie afbeelding 37).

Op een zeker moment in de serie lessen rond snelheid is het goed om de functie van de verschillende wiskundige hulpmiddelen als zodanig aan de orde te stellen.

De verhoudingstabel is een rekenhulpmiddel, waarbij afstanden en tijden niet persé verwijzen naar feitelijke afstanden of tijdsduren. In praktische situaties varieert snelheid vaak van moment tot moment en een belangrijk hulpmiddel om die veranderingen te beschrijven is de grafiek.

### Omrekenen op de computer

Ingewikkeld rekenwerk laten we in het dagelijks leven over aan een rekenmachine of aan de computer. Het is belangrijk dat leerlingen leren hoe je bijvoorbeeld 295 cm in 10 seconden om kunt rekenen naar een snelheid in km per uur, maar als de leerlingen eenmaal de principes daarvan begrijpen is het handig om hen een programmaatje te geven dat het rekenwerk kan overnemen. In de lessenserie introduceren we daarvoor de snelheidsrekenmachine van afbeelding 38<sup>4</sup>. Links kan een gevonden meetresultaat worden ingevuld, met de afstand in mm, cm, m of km en de tijd in seconden, minuten of uur. Vervolgens kan rechts worden gekozen hoe de gevonden waarden moeten worden omgezet. Dat kan in 'm per seconde', of 'km per uur', maar ook bijvoorbeeld in 'mm per minuut'.

|         |     |     |      |     |
|---------|-----|-----|------|-----|
| afstand | 295 | cm  | 1062 | m   |
| tijd    | 10  | sec | 1    | uur |

Afbeelding 38. Een computerprogrammaatje om gemeten snelheden om te zetten in een afstand per seconde, per minuut of per uur.

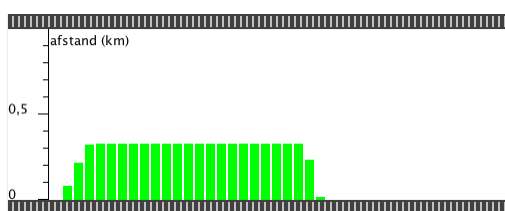
### Computertaken: Treinmachinist en Minirobot

Treinmachinist is een computersimulatie waarin de leerlingen een trein - weergegeven als een rode punt - over een treinbaan kunnen laten rijden. Er zijn knoppen om de trein te laten optrekken en te laten remmen en dit optrekken en remmen kan rustig gebeuren of snel. Terwijl de trein rijdt tekent de computer onderaan op het scherm een grafiek. Zoals beschreven in hoofdstuk 2 zijn er een aantal varianten van het programma. Deze tekenen verschillende grafieken:

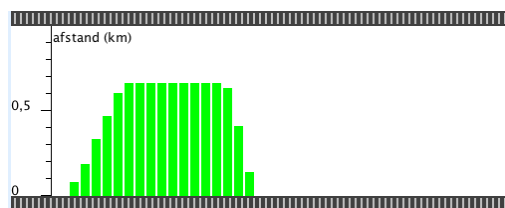
- een grafiek van de verplaatsing per tijdseenheid ('stukjes-afstand-grafiek'),
- een grafiek van de totaal afgelegde weg ('totale-afstand-grafiek'),
- een grafiek van de snelheid.

Rond het computerprogramma zijn series opdrachten gemaakt waar leerlingen zelfstandig aan kunnen werken. Bij voorkeur doen ze dat in tweetallen.

De opdrachten rond Treinmachinist blijken goed bruikbaar als verwerkingsstof bij de klassikale lessen. De eerste opdrachten gaan over grafieken van stukjes afstand en sluit aan bij de lessen waarin leerlingen op papieren stroken de snelheid van een batterijautootje meten en daarna van die stroken een grafiek maken. In de latere opdrachten wordt de totale-afstand-grafiek geïntroduceerd en tegenover de stukjes-afstand-grafiek gezet.



trein a



trein b

Afbeelding 39. Welke trein reed het langst? Welke trein reed het verst?

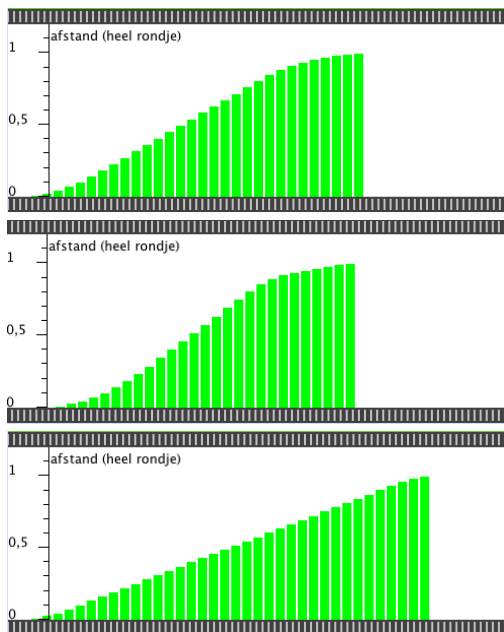
Vanzelfsprekend is het goed om een deel van de opdrachten klassikaal na te bespreken. Een opdracht die daarbij altijd tot discussie leidt is die van afbeelding 39, over twee grafieken van stukjes afstand. De vragen bij de grafieken zijn: Welke trein reed het langst? En welke trein reed het verst? Over de eerste vraag zijn de leerlingen het snel eens: trein a reed langer want de computer tekent elke seconde een staafje en de eerste grafiek heeft meer staafjes. Bij de tweede vraag zijn de meningen meestal verdeeld. Er zijn kinderen die kie-

zen voor a - 'Als je langer rijdt kom je verder' - en kinderen die kiezen voor b - 'Die trein reed harder en als je harder rijdt kom je verder'. Andere kinderen wegen de argumenten tegen elkaar af: 'Het scheelt maar een paar seconden, en hij rijdt twee keer zo snel!' Een vervolgvraag is of je het echt uit zou kunnen zoeken. Meestal zijn er dan kinderen die voorstellen om alle staafjes op elkaar te zetten of om hun totale lengte te meten, want als je de afstanden van alle seconden bij elkaar telt krijg je de totale afstand. Zo'n redenering loopt vooruit op wat een deel van de leerlingen in het vo zullen leren: de oppervlakte onder de grafiek geeft de totale afstand.

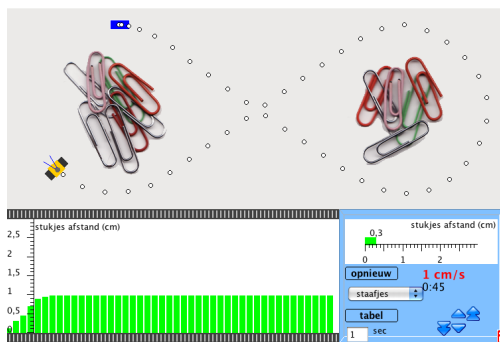
Een voorbeeld van een opdracht rond grafieken van de totale afstand staat in afbeelding 40. Gegeven is dat in één van de drie grafieken de trein een hele

tijd 100 km per uur reed, in een andere 150 km per en in de derde 200 km per uur. Ze staan echter niet in die volgorde, dus welke grafiek hoort bij welke snelheid? Leerlingen zijn geneigd om in eerste instantie het aantal staafjes te gaan vergelijken, want hoe meer staafjes, des te langer heeft de trein over een rondje gedaan. Als het gaat om de eerste twee grafieken is dat echter niet voldoende en moet ook de vorm van de grafiek erbij betrokken worden. De tweede grafiek loopt in het middendeel steiler, dus dat zal de grafiek van 200 km per uur moeten zijn.

Er is ook een serie opdrachten over een minirobot die een route loopt om twee bergjes paperclips. We maakten deze opdrachten omdat in de trein-simulatie de metingen over kunstmatige afstanden en tijden gaan: niet alleen de afstanden zijn op schaal, maar ook de tijdschaal - in seconden - is niet reëel. In de simulaties met de minirobot (zie afbeelding 41) is de afgelegde afstand per seconde een reële maat, al hangt het van de grootte van het computerscherm af of een cm in de simulatie ook precies een cm is op het scherm.



Afbeelding 40. Grafieken van de totale afstand. Welke trein reed 100 km per uur? Welke trein reed 150 km per uur? Welke trein reed 200 km per uur?



Afbeelding 41. De minirobot. De afstand wordt gemeten in cm.



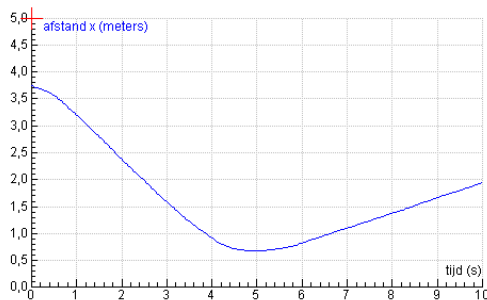
Bij een van de opdrachten rond de minirobot tekent de computer een grafiek van stukjes afstand, terwijl de leerlingen de opdracht krijgen om uit te zoeken wat de totale lengte is van de weg om de paperclips. De leerlingen die aan deze opdrachten toekwamen wisten daar inderdaad een methode voor te bedenken. Je kunt bijvoorbeeld de robot een zo groot mogelijk stuk met een vaste snelheid laten lopen (bijvoorbeeld 1 of 2 cm per seconde) en dan het aantal seconden tellen, of opzoeken in de tabel. Vermenigvuldigen van de twee waarden geeft de totale afstand.

## Grafieken maken met een sensor

Computerprogramma's zoals Treinmachinist en Minirobot zijn vrij eenvoudig in het onderwijs in te passen omdat het simulaties zijn. Het is zinvol om leerlingen daarnaast ook te laten experimenteren met gegevens van echte



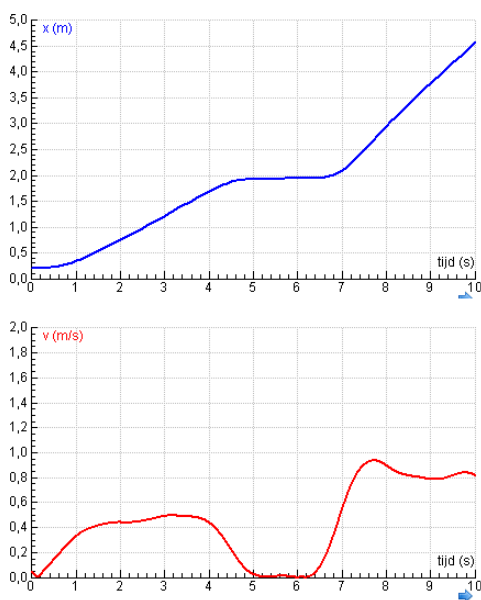
Afbeelding 42. EuroMotion sensor.



Afbeelding 43. Iemand loopt naar de sensor toe en daarna weer er van af.

metingen. We hebben leerlingen onderzoekjes laten doen met een aan de computer gekoppelde bewegingsmeter. Wij gebruikten daarvoor de EuroMotion sensor (afbeelding 42), in combinatie met het computerprogramma Coach (noot). De euroMotion sensor meet afstanden via de weerkaatsing van ultrasoon geluid. Leerlingen kunnen de sensor gebruiken om de computer een grafiek te laten tekenen van hoe zij naar het apparaatje toelopen of juist er van af. Harder of zachter lopen verandert de vorm van de grafiek. Op afbeelding 43 is te zien dat iemand eerst naar de sensor toeliep - de afstand wordt steeds kleiner - en daarna weer langzamer wegliep.

Als de sensor een keer klassikaal is gedemonstreerd kunnen de leerlingen zelfstandig, in kleine groepjes de opdrachten doen. Eerst krijgen ze de gelegenheid om vrij te experimenteren en daarna volgen een aantal meer gerichte opdrachten. Zo'n opdracht is bijvoorbeeld om eerst op papier te schetsen wat voor grafiek je wilt gaan maken en dan te kijken of je dat ook lukt. Omdat het computerprogramma een eerdere grafiek in een lichte kleur op het scherm laat staan is het ook mogelijk om leerlingen elkaars grafieken na te laten maken. We hebben verder een aantal schriftelijke opdrachten gemaakt waarin leerlingen gevraagd wordt om in woorden te beschrijven hoe iemand gelopen heeft.



Afbeelding 44. Bovenaan een door de computer getekende grafiek van de afstand, onderaan de tegelijkertijd getekende grafiek van de snelheid.

Via dergelijke opdrachten onderzoeken leerlingen vragen als:

- Hoe zie je in welke richting iemand loopt?
- Wat gebeurt er als iemand stil staat.
- Welk verschil is er tussen hard en zacht lopen?
- Hoe zie je dat iemand steeds harder, of steeds zachter gaat lopen?

In principe is het mogelijk om vanuit een afstandsgrafiek te berekenen hoe snel iemand liep op een bepaald moment. Dat is in ieder geval vrij makkelijk te doen als de snelheid constant blijft, dat wil zeggen als de afstandsgrafiek een rechte lijn is. In de grafiek van afbeelding 43 is te zien dat tussen seconde 1 en 4 de afstand terugliep van 320 cm naar 90 cm, dus de snelheid was op dat moment iets meer dan 70 cm per seconde.

Het is een zinvolle opdracht om leerlingen niet alleen in woorden te laten vertellen wat een afstandsgrafiek zegt over snelheid, maar om hen ook een

grafiek van de snelheid te laten schetsen. Zo'n schets kan dan vergeleken worden met wat de computer tekent. Afbeelding 44 geeft een voorbeeld van een door de computer gemaakte afstandsgrafiek in combinatie met een tegelijkertijd gemaakte snelheidsgrafiek. Een praktisch probleem is wel dat zo'n snelheidsgrafiek veranderingen veel directer weergeeft, waardoor bijvoorbeeld het lopen in een vast tempo meestal geen rechte, horizontale lijn geeft, maar bijna altijd een slingerlijn. Het interpreteren van de grafiek is daardoor vaak lastig. Op een afstandsgrafiek zijn kleine veranderingen in snelheid niet zichtbaar omdat het daar gaat om kleine veranderingen op een afstandsschaal van 5 meter.

## De laatste les: snelheid meten op de straat

De lessenserie die we ontwierpen begint met het verhaal over een school waar leerlingen wilden uitzoeken hoe hard auto's reden op de weg naast de school. Wat is dan een mooiere afsluiting van het project dan leerlingen zelf een keer de snelheid van passerende auto's te laten meten?

Op de school in Den Bosch werd het eerste deel van de lessenserie gegeven in groep 7 en het tweede deel een jaar later in groep 8. Ondanks dat het inmiddels een lange tijd geleden was wisten de leerlingen nog heel wat over wat ze de eerste lessen hadden gedaan. Ze wisten ook nog met welk verhaal het project begonnen was. In de laatste les kwam de leerkracht nog een keer terug op dat verhaal en ze stelde voor om ook bij de eigen school de snelheid van auto's te gaan meten.



Afbeelding 45. Leerlingen meten de snelheid van Joost op de fiets.

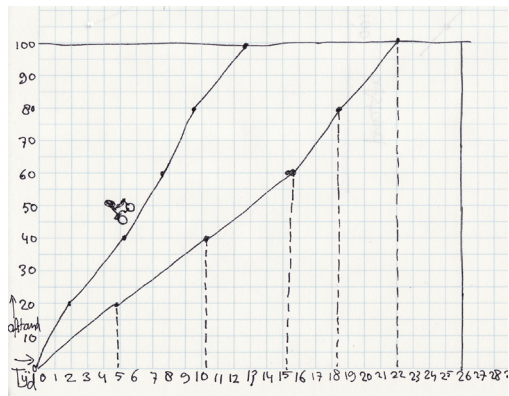
Als procedure werd gekozen dat leerlingen met een stopwatch langs de straat gingen staan, steeds met 20 meter tussenruimte. Het was een rustige weg, zodat het voor iedereen duidelijk was van welke auto de snelheid gemeten zou worden. Bij het begin - op 0 meter - zwaaiide een leerling met een vlag als de auto passeerde en alle groepjes drukten dan op de startknop van hun stop-

watch. Wanneer de auto langs de groepjes reed - op 20, 40, 60, 80 en 100 m - werd afgeklakt en de tijd werd opgeschreven. Niet alleen de snelheid van auto's werd gemeten, maar ook die van een motor en een mevrouw op de fiets. Een van de leerlingen mocht bovendien het stuk twee keer fietsen, een keer langzaam en een keer snel.

| afstand (m) | fiets mevrouw tijd (s) | blauwe auto tijd (s) | joost 1 tijd (s) | motor tijd (s) | joost 2 tijd (s) |
|-------------|------------------------|----------------------|------------------|----------------|------------------|
| 0           | 0                      | 0                    | 0                | 0              | 0                |
| 20          | 4,8                    | 3,5                  | 6,5              | 2,6            | 1,9              |
| 40          | 10,2                   | 6,0                  | ?                | 4,2            | 5,2              |
| 60          | 15,3                   | 8,2                  | 15,8             | 5,6            | 7,5              |
| 80          | 20,1                   | 10,8                 | 18,3             | 8,0            | 9,6              |
| 100         | 25,9                   | 13,5                 | 22,0             | 9,4            | 12,4             |

Afbeelding 46. De verzamelde meetresultaten.

Terug in de klas werden eerst alle gegeven op het digitaal schoolbord geschreven (afbeelding 46) en vervolgens tekenden de leerlingen een grafiek voor een van de metingen. Een voorbeeld van de grafieken die dat opleverde staat in afbeelding 47. De ene lijn is van Joost die langzaam fietst, de tweede lijn van Joost die zo hard mogelijk probeert te fietsen. De punten van het meten staan verticaal op regelmatige afstand van elkaar: 0, 20, 40, 60, 80 en 100 m. Op de horizontale tijdas wisselt daardoor de afstand tussen de meetpunten.



Afbeelding 47. Joost fietst een keer langzaam en een keer snel.

Met behulp van het omrekenprogramma (zie eerder, afbeelding 38) werden nog een aantal snelheden uitgerekend. De motor bleek gemiddeld 38,30 km/uur te hebben gereden, maar hij trok op aan het eind en reed over de laatste 20 meter 51,43 km/uur. Joost bleek bij het hard fietsen in zijn eerste 20 meter 37,89 km/uur te hebben gereden, wat een korte discussie opleverde of dat wel mogelijk was. De leerkracht wees er op dat een kleine meetfout op zo'n korte afstand al gauw een heel andere snelheid kon opleveren. Dat de leer-

lingen nog zoveel wisten over de lessen die een jaar eerder waren gedaan had ongetwijfeld te maken met de wat ongewone activiteiten in die lessen, zoals het meten met stroken hoe hard een speelgoedautootje rijdt. In dat opzicht waren de lessen in de tweede serie, met het uitgebreid bespreken van grafieken, veel schoolser. De laatste les legde weer heel concreet een relatie met het praktisch meten van snelheid. Het was waarschijnlijk ook een les die leerlingen zich zullen blijven herinneren en dat kan hen helpen bij het redeneren over een vrij gecompliceerd onderwerp als snelheid.

# 4 De doorgaande lijn naar het voortgezet onderwijs

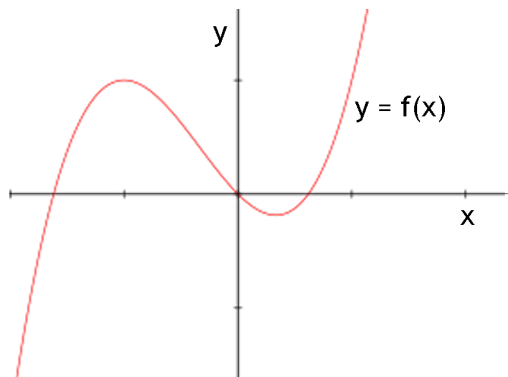
## Integreren en differentiëren

In dit hoofdstuk bespreken we kort de doorgaande lijn van de hiervoor besproken leergang naar het voortgezet onderwijs, met name de relatie met de onderwerpen integreren en differentiëren. In de bovenbouw van het vwo wordt de stap gezet naar een formele beschrijving en worden wiskundige hulpmiddelen ontwikkeld voor het beschrijven en analyseren van verandering. Het is nuttig om van die kant uit terug te kijken naar de lessenserie.

Het bespreken van de relatie met het onderwijs in de bovenbouw van het vo wekt wellicht de suggestie dat de in dit boekje beschreven lessen bedoeld zijn voor leerlingen die vwo gaan doen. Dat is echter niet onze bedoeling. Integendeel, we denken dat de kwalitatieve manier waarop leerlingen de verschillende soorten grafieken onderzoeken en met elkaar in verband brengen voor alle leerlingen zinvol is en bovendien ook goed haalbaar.

## Variabelen en functies

Wiskundig gezien gaat het in de lessenserie over snelheid om variabelen en functies. Een functie beschrijft een samenhang tussen twee variabelen zoals bijvoorbeeld afstand en tijd. Het kunnen ook abstracte variabelen zijn, bijvoorbeeld benoemd als  $x$  en  $y$ . Een gangbare schrijfwijze is dan  $y = f(x)$ , ofwel, 'y is een functie van x'. In het algemeen geldt dat een functie in een grafiek kan worden afgebeeld als een doorgaande lijn.

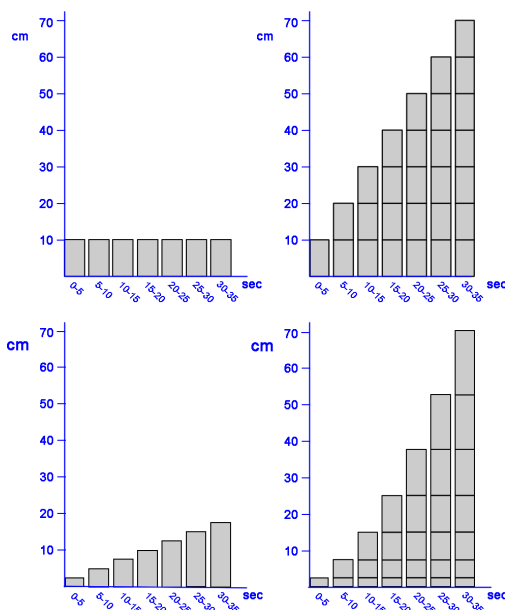


Afbeelding 48. 'y is een functie van x'.

Bij afstand, tijd en snelheid staan twee functies centraal:

- de afgelegde weg als functie van de tijd,
- de snelheid als functie van de tijd.

De centrale vraag hierbij is hoe je de ene functie uit de andere afleidt. Het gaat, met andere woorden, om de samenhang tussen het resultaat van de verandering - de afgelegde weg op een bepaald moment - en de mate van verandering op een bepaald moment - de snelheid.



Afbeelding 49. Vanuit een verplaatsingsgrafiek kunnen we een grafiek van de totale afstand construeren en andersom.

In termen van grafieken gaat het om het bepalen van de grafiek van de snelheid tegen de tijd, wanneer de grafiek van de afgelegde weg tegen de tijd bekend is, en omgekeerd, het bepalen van de grafiek van de afgelegde weg als die van de snelheid bekend is.

Bij de onderwerpen integreren en differentiëren komen dergelijke vragen op een algemene manier aan de orde. Het gaat bij integreren om het bepalen van de functie die het resultaat beschrijft wanneer de functie van de verandering bekend is en bij differentiëren om het bepalen van de functie die de verandering beschrijft als de resultaatfunctie bekend is.

Dit zijn onderwerpen die als regel pas in het vwo aan bod komen en waarbij algebra wordt ingezet om de verbinding tussen de twee functies te maken. In de hiervoor beschreven lessenserie wordt de algebra omzeild in een informele, meer kwalitatieve benadering waarin grafische representaties de hoofdrol spelen.

In de lessenserie wordt de snelheid van een autootje of een ander object in kaart gebracht door te kijken naar de verplaatsingen in een reeks van gelijke tijdsintervallen - bijvoorbeeld steeds 5 seconden. De lengte van de verplaat-

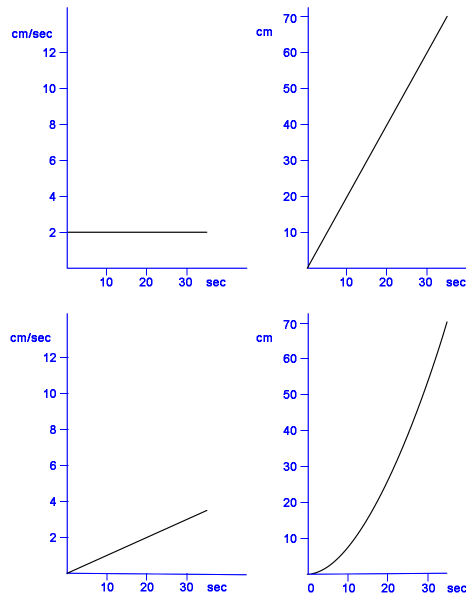


sing biedt dan een maat voor de snelheid gedurende het overeenkomstige tijdsinterval. Deze verplaatsingen kunnen worden uitgezet in een grafiek. In afbeelding 49, linksboven is de grafiek getekend van een autootje dat met een constante snelheid rijdt en daaronder van een autootje dat steeds harder gaat rijden.

Als de staafjes van deze grafieken op elkaar worden gestapeld geven ze de tot dat moment afgelegde weg aan (afbeelding 49, rechts).

Vanuit een grafiek van de verplaatsingen (links) kunnen we dus een grafiek maken van de totale afstand (rechts) door verplaatsingen bij elkaar te tellen. Omgekeerd kunnen we vanuit een grafiek van de totale afstand de verplaatsingsgrafiek construeren door het verschil te nemen tussen de lengtes van de staafjes.

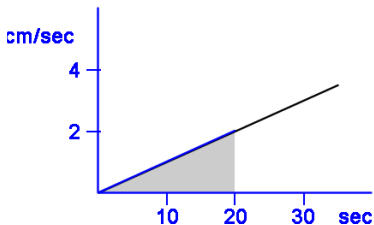
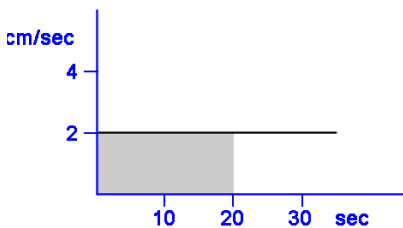
In dit geval zijn de omzettingen vrij gemakkelijk, omdat op de verticale assen steeds afstanden staan. De verplaatsingsgrafiek is dan ook geen echte snelheidsgrafiek, want bij een snelheidsgrafiek is afstand niet de variabele, maar 'afstand per tijd' ('cm/sec', 'm/sec', of 'km/uur').



Afbeelding 50. Vanuit een grafiek van de snelheid kunnen we de grafiek van de afstand construeren.

In afbeelding 50 zijn links twee snelheidsgrafieken getekend. We gingen bij de bovenste uit van een autootje dat met een constante snelheid rijdt van 10 cm in 5 seconden; dat is een snelheid is van 2 cm per seconde. In de onderste grafiek neemt de snelheid toe. Het ligt bij een snelheidsgrafiek voor de hand om continue grafieken te tekenen, want snelheid is een variabele die je elk willekeurig moment zou kunnen bepalen.

Ook in continue grafieken kunnen we vanuit de ene grafiek de andere construeren. We doen dat door uit te gaan van de oppervlakte onder de grafiek.



Afbeelding 51. Via de oppervlakte onder de grafiek is de afgelegde afstand te berekenen. Boven voor een autootje met constante snelheid, daaronder voor een autootje dat versnelt.

In afbeelding 51 hebben we de twee linkerplaatjes nog eens getekend, nu met de oppervlakte onder de grafiek tussen 0 en 20 seconden aangegeven in grijs.

Wanneer we bereid zijn om te vermenigvuldigen met verschillende maten kunnen we uit het plaatje links, voor de constante snelheid berekenen dat het autootje na 20 seconden een totaalafstand van  $20 \text{ sec} \times 2 \text{ cm/sec}$  zal hebben afgelegd, dat is 40 cm. Voor de toenemende snelheid in het plaatje rechts is de totaalafstand de oppervlakte van een driehoek die half zo groot is, maar wel heel snel groeit. Het autootje zal na 20 seconden een afstand van 20 cm hebben afgelegd.

Wat we hierboven aan de hand van een voorbeeld hebben beschreven is de kern van het integreren in het vo. Vanuit de algebraïsche formule van een functie kun je de oppervlakte onder een lijngrafiek berekenen en die oppervlakte geeft in het geval van een snelheidsgrafiek de totaal afgelegde afstand aan. In de snelheidslessen voor het basisonderwijs volgen we een informele benadering, maar die biedt wel inzicht in de achterliggende structuur.

## differentiëren

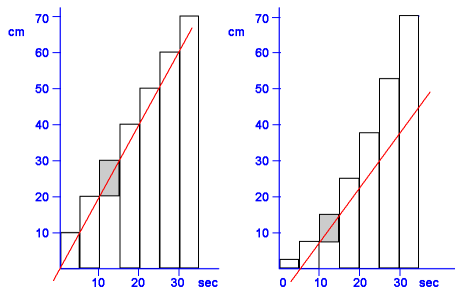
Het differentiëren, beoogt precies het tegenovergestelde, namelijk om vanuit een 'resultaatfunctie' de mate van verandering te berekenen. In het geval van snelheid en afstand houdt dit in dat vanuit de functie die de relatie tussen tijd en afgelegde weg beschrijft de snelheid wordt bepaald.

Ook hier kan een staafjesgrafiek weer als startpunt dienen. In figuur 52 stellen de verticale staafjes de in totaal afgelegde weg op een bepaald tijdstip

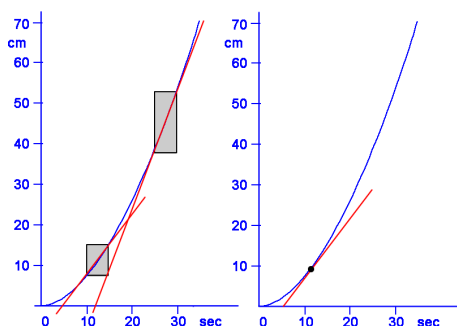
voor, links voor een autootje met constante snelheid, rechts voor een autootje dat steeds harder gaat rijden. Wanneer we naar het verschil tussen twee opeenvolgende staafjes kijken - in afbeelding 52 nemen we als voorbeeld het tijdsinterval tussen 10 en 15 seconden - dan kunnen we aflezen met hoeveel centimeter de afgelegde weg tussen twee tijdstippen is toegenomen. In de grafiek links zien we dat het autootje 10 cm rijdt in 5 seconden en omdat de snelheid constant is kunnen we ook zeggen dat de snelheid 2 m/sec is. In de grafiek rechts neemt de snelheid van het autootje toe en is dus niet constant. In dit geval geeft het verschil tussen de staafjes de gemiddelde snelheid binnen het interval.

Eenzelfde redenering is mogelijk als we in een continue grafiek twee tijdsintervallen willen vergelijken - zoals in figuur 53 links. In het tweede interval vindt een grotere verplaatsing plaats en is dus sprake van een grotere snelheid. Als we het interval heel klein maken - oneindig klein - dan vinden we via de raaklijn aan de grafiek de snelheid op een specifiek moment (afbeelding 53 rechts). Ook dit is weer te veralgemeniseren tot de verandering in functiewaarde bij een willekeurige functie. En ook hier geldt weer dat wanneer we de algebraïsche formule van de originele functie kennen, we de afgeleide functie kunnen bepalen.

Meer globaal bekeken kunnen we integreren typeren als sommeren en differentiëren als verschil bepalen. Dit komt overeen met wat met de staafjes op een informeel niveau gedaan kan worden. Je telt de staafjes van de verplaat-



Afbeelding 52. Vanuit de toename van de verplaatsing kunnen we de snelheid berekenen.



Afbeelding 53. Ook in een continue grafiek kunnen we vanuit de toename van de verplaatsing de snelheid berekenen.

singsgrafiek bij elkaar op om de grafiek van de afgelegde weg te krijgen of je neemt de verschillen tussen de op een volgende staafjes van een discrete afgelegde weg grafiek om de staafjes van een verplaatsingsgrafiek te krijgen. Zo kunnen we ervoor zorgen dat de leerlingen vertrouwd raken met de samenhang tussen twee van dergelijke functies die hetzelfde beschrijven.

# 5 Lesgeven

## Ervaringen in het pabo-onderwijs

In dit hoofdstuk beschrijven we ervaringen met de lessenserie in het pabo-onderwijs. Het geven van de lessen was een onderdeel van het 'onderzoekslab', een project waarin studenten samen met docenten en basisschoolleraars een leergemeenschap vormden. De lessen werden gezamenlijk voorbereid en de ervaringen van de lessen werden uitvoerig doorgesproken. Een uitgebreidere beschrijving van de ervaringen binnen dit 'onderzoekslab' is te vinden in Van Mulken (2011)

## Vaardigheden van de leerkracht

De voorgaande hoofdstukken hebben laten zien dat de lessenserie rond snelheid een actieve rol vraagt van de leerlingen. Ze meten, onderzoeken verbanden, doen voorspellingen, bedenken zelf representaties, enzovoort. Dit blijkt leerlingen aan te spreken; ze vonden de lessen spannend en waren erg betrokken. Op de school waar we een jaar later vervollessen deden wisten de leerlingen nog heel precies wat ze in de eerdere lessen hadden gedaan.

Dergelijke lessen stellen echter hoge eisen aan de vaardigheden en de kennis van de leerkracht, zowel door het onderwerp als door de open, onderzoeksgerichte aanpak. Het gaat om:

- *Kennis van de vakinhoud.* Om de lessen te kunnen geven is het nodig dat de leerkracht voldoende kennis heeft over het onderwerp. De leerkracht moet begrijpen wat snelheid is en hoe snelheid op verschillende manieren kan worden weergegeven in grafieken.
- *Vakdidactische kennis.* De leerkracht moet de bedoeling van de lessen doorzien en waar nodig de lessen kunnen aanpassen voor de eigen situatie. De leerkracht moet het denkproces van de leerlingen kunnen volgen en goede vragen kunnen stellen.
- *Vakpedagogische kennis.* De leerkracht moet de leerlingen kunnen stimuleren tot een actieve, onderzoekende houding.

We realiseren ons dat de eisen die de lessenseries stellen hoog zijn, maar dat betekent echter ook dat de lessen leraren en aanstaande leraren een situatie bieden waarin ze belangrijke kennis en vaardigheden kunnen leren.

## Onderzoekslab

De Pabo-afdeling van de Avans Hogeschool in Breda kent een minor ‘Onderzoek en Ontwerp’. Deze steunt op drie pijlers:

- Onderzoek; het uitvoeren van actieonderzoek,
- Ontwikkelen; innovatief ontwerpen,
- Innovatie; werken in een leergemeenschap van a.s. leraren, leraren en vakdeskundigen.

In deze minor werken de studenten zowel aan onderwerpen uit het reken-wiskundeonderwijs als aan het onderwerp snelheid. Dit laatste onderwerp ligt op de grens van wetenschap & techniek en rekenen-wiskunde.

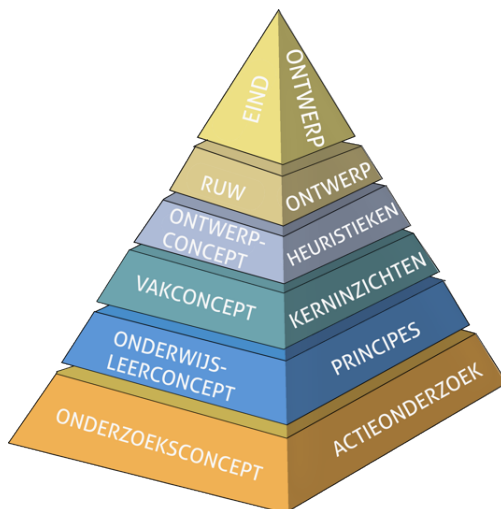
Waar het gaat om het doen van onderzoek door Pabo-studenten zijn verschillende begeleidingsmodellen denkbaar:

- De student kiest zelf een onderwerp en ontwerpt daarvoor lessen. Vervolgens onderzoekt de student of de lessen tot de gewenste leerresultaten leiden.
- De opleidingsdocent kiest het onderwerp en de lessen.
- De studenten doen hun onderzoek met lessen waarvoor al door vakdeskundigen een opzet is geschetst. De studenten werken deze opzet uit in een gedetailleerd plan.

Het bezwaar van de eerste vorm is dat elke student een op zichzelf staand onderzoek uitvoert, wat het samenwerken tussen studenten lastig maakt. Bovendien vereist het maken van een innovatief ontwerp vakdeskundigheid die studenten nog niet bezitten. Bij het alternatief waarbij alles al vooraf vast ligt komt het ontwerpen niet aan de orde en juist het ontwerpen van lessen zorgt er voor dat de a.s. leraren zich bezinnen op de doelen, werkvormen en gewenste leerprocessen.

In de minor ‘Onderzoek en Ontwerp’ is gekozen voor een vorm waarin de grote lijnen van een leergang al vastliggen, maar de precieze uitwerking in lessen ter discussie staat. In zekere zin kunnen we deze vorm typeren als ‘geleid heruitvinden’ of ‘guided reinvention’ (Freudenthal 1991). In dit geval gaat het echter niet om basisschoolleerlingen die onderdelen van de wiskunde als het ware opnieuw uitvinden, maar om Pabo-studenten die een deel van de vakdidactiek heruitvinden. De ruwe opzet voor een leergang rond snelheid was ontworpen door de projectgroep Steff.

Figuur 54 laat zien wat de leidende concepten zijn binnen de minor 'Onderzoek en Ontwerp'. Binnen deze minor wordt via aktieonderzoek toegewerkt naar een uitvoerbaar eindontwerp. De concepten zijn voor een deel ontleend aan de theorie van het realistisch reken-wiskundeonderwijs en voor een deel aan theorieën van het onderwijs in wetenschap & techniek. In belangrijke aspecten zijn deze vakken zeer verwant.



Afbeelding 54. Leidende concepten binnen de opleidingseenheid 'Onderzoek en Ontwerp'.

De leergemeenschap die in de periode 2009 - 2010 werd gecreëerd bestond uit vier pabo-studenten die de lessen gaven, twee opleidingsdocenten uit de projectgroep Steff en op de achtergrond de vier leraren van de klassen waar de lessen werden uitgevoerd. De studenten waren in hun derde of vierde jaar en deden een minor met een omvang van 20 ects, waarin ze ook onderzoek deden rond het onderwerp breuken. De lessen werden uitgevoerd in één groep 6 en in drie groepen 7.

Het voorbereiden en evalueren van de lessen was opgezet als een dakpanconstructie. Een les werd gezamenlijk voorbereid, dan door een van de studenten gegeven en op basis van die ervaringen aangepast. Een andere student gaf daarna de aangepaste versie van dezelfde les. Dit leidde tot een cyclisch proces van voorbereiden, uitvoeren, evalueren en bijstellen.

In de bijeenkomsten was er veel aandacht voor de eigen kennis van de studenten rond het onderwerp snelheid. Ook werd voortdurend aandacht besteed aan het stimuleren van een onderzoekende houding bij de leerlingen.

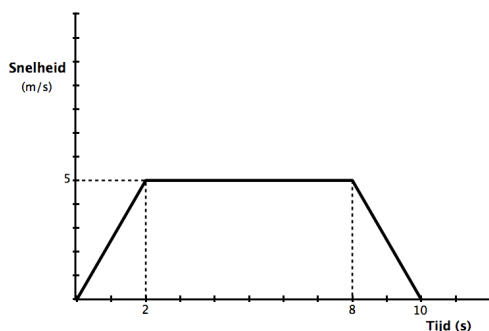
We beschrijven de opbrengsten van het onderzoekslab via een aantal voorbeelden. Een uitgebreidere beschrijving is te vinden in Van Mulken (2011).



## Kennis van de vakinhoud

In de bijeenkomsten werd steeds de eigen kennis van de studenten aan de orde gesteld. Onder andere werd de studenten regelmatig gevraagd om opgaven op eigen niveau op te lossen.

Studenten in het derde of vier jaar van de Pabo zouden op zich voldoende kennis moeten hebben om in groep 7 of 8 lessen rond grafieken te kunnen geven. Snelheid is echter een onderwerp dat op dit punt extra eisen stelt. Omdat snelheid een samengestelde grootheid is kun je vanuit een grafiek van afstand tegen tijd uitspraken doen over snelheid, en vanuit een grafiek van snelheid tegen tijd uitspraken over de afgelegde afstand. Dit bleek iets waar de studenten in eerste instantie moeite mee hadden. Een aspect daarvan was dat ze niet altijd in staat waren om de verschillende typen grafieken uit elkaar te houden.



Afbeelding 55. Wat deed de lift na 15 seconden?

Een voorbeeld is de snelheidsgrafiek van een lift, in fig. 55. De grafiek beschrijft de situatie waarin een lift vanuit stilstand steeds sneller gaat, vervolgens een bepaalde snelheid aanhoudt en dan weer afremt om te stoppen op een andere etage. Het bleek voor de studenten lastig om deze grafiek van snelheid niet te interpreteren als een grafiek van plaats. Zij zagen in deze grafiek in eerste instantie een voorstel-

ling van hoe een lift omhoog gaat, op een bepaalde etage blijft staan en dan weer naar beneden gaat. Dit beeld van de grafiek bleef interfereren met hun interpretatie van de situatie.

Ook sommige opgaven uit de webquests voor de leerlingen leverden discussies op. Het feit dat de studenten lessen moesten voorbereiden, de aandacht die in de bijeenkomsten aan het onderwerp werd gegeven en het geven van de lessen zelf zorgden er samen voor dat de kennis van de studenten rond het onderwerp snelheid veel preciezer werd.

## Vakdidactische kennis

Vakdidactische kennis heeft betrekking op de manieren waarop een leraar de leerprocessen van leerlingen kan ondersteunen. De vakdidactische kennis van de studenten werd vergroot via het lezen van literatuur - deels door de studenten zelf aangedragen - en door de cycli van voorbereiden, uitvoeren, evalueren en bijstellen.

In het ideale geval leidt het voorbereiden van lessen tot het formuleren van een 'hypothetisch leertraject' ('hypothetical learning trajectory', Simon 1995), dat wil zeggen een beschrijving van de uit te voeren lesactiviteiten met daarbij verwachtingen over hoe de leerlingen zullen redeneren en aannamen over hoe deze redeneringen een bijdrage kunnen leveren aan de beoogde doelen. Hoe explicieter leraren zijn in hun voorbereiding van een les, des te duidelijker is achteraf op welke punten de feitelijke gang van zaken verschilt van de verwachtingen. Het is met name de reflectie op deze punten - in een 'retrospectieve analyse' - die het leerproces bevordert.

De teksten die de studenten schreven waren vaak als beschrijving van een hypothetisch leertraject nog op veel punten onvolledig, maar er vond wel een duidelijke groei plaats. Waar de studenten zich eerst bij hun voorbereiding vooral bezighielden met organisatorische aspecten, kwam de nadruk later meer te liggen op het beschrijven en voorspellen van de denkprocessen van leerlingen. Ook de reflectie achteraf kreeg geleidelijk meer diepgang.

Als voorbeeld citeren we een stukje uit de reflectie van een student na de activiteit van het tekenen hoe de trein versnelt, weer remt en stilstaat bij een station (zie hoofdstuk 3).

'Ik had een aantal voorspellingen goed gedaan. Zo hebben een aantal kinderen gebruik gemaakt van de snelheidsstreepjes (de ruimte hiertussen is afgelegd in één seconde). Ook hebben een aantal kinderen de trein letterlijk nagetekend, evenals de kronkelige rails. Een aantal kinderen heb ik flink onderschat, aangezien zij meteen een grafiek tekenden'.

De voorspellingen die de student vooraf gedaan had maken de verschillen in aanpak pregnanter. Haar observaties leiden tot allerlei vragen:

- Wat voor grafieken tekenden die leerlingen precies? Waren de grafieken correct? Wat zeggen ze over de kennis van de leerlingen?
- Betekent het feit dat leerlingen een representatie maakten die heel dicht bij de situatie bleef dat ze geen grafiek zouden kunnen tekenen als hen dat gevraagd was? (In de verschillende try outs is gebleken

dat veel afhangt van de precieze formulering van de opdracht. De leerlingen waarvan we de tekeningen hebben opgenomen in hoofdstuk 3 voelden zich vrij om een heel eigen vorm te kiezen.)

- Welke plek kan zo'n tekenopdracht hebben binnen de leerlijn? (De bedoeling van de activiteit is vooral leerlingen te laten ervaren dat veranderingen in snelheid op allerlei manieren kunnen worden weer-geven; grafieken zijn een vorm waarin de visuele representatie als het ware is teruggebracht tot de kern, de relatie tussen afstand en tijd.)

Sommige van deze vragen werden door de student zelf beantwoord in haar verslag, andere kwamen aan de orde in de gezamenlijke bespreking.

Tot de vakdidactische kennis kunnen we ook rekenen dat een leraar heel gericht werkvormen inzet om een gesprek op gang te brengen tussen leerlingen. Niet alleen zijn discussies essentieel in het leerproces van de leerlingen, maar ze geven de leraar ook inzicht in wat leerlingen begrijpen. Een van de studenten schreef:

‘De kinderen hebben ook aan elkaar hun tekeningen laten zien en hierbij uitleg en onderbouwing gegeven. Zo werd ook mij duidelijk op welk niveau de kinderen zaten qua begripsvorming rondom het onderwerp snelheid’.

## Vakpedagogische kennis

Verrassend was de relatief korte tijd waarin de studenten er in slaagden om in de ‘ontdeklessen’ - een term die ook de leerlingen gebruikten - een cultuur te scheppen waarin de leerlingen met elkaar in discussie gingen. Ze wilden zelf dingen uitzoeken en bespraken met elkaar wat een goede aanpak zou kunnen zijn. Dit laat zien dat kinderen snel bereid zijn om een andere, veel meer actieve rol te nemen als de situatie hen daartoe uitnodigt.

Een bepalende factor daarin is vanzelfsprekend de houding van de leerkracht. Een van de studenten schreef over haar eigen leerproces op dit punt:

‘Leerlingen gaan aan de slag met stappen zetten, autootjes laten rijden, tekeningen maken van rijdende treinen. Het heeft mij doen inzien dat je veel meer kunt dan werken met blokjes of klokjes. En de leerlingen waren ook razend enthousiast. Ik stond bekend als de juffrouw die gekke dingen doet tijdens het rekenen. Dit maakte de leerlingen ook nieuwsgierig en hadden ze zin in de nieuwe les. Door creatief na te denken kun je veel lessen al gelijk een stuk interessanter maken. Ik heb nu gezien welke materialen er ingezet kunnen worden en heb geoe-

fend met de organisatie van zo'n les. Natuurlijk is de les iets drukker, maar ik ben van mening dat er op deze manier meer geleerd wordt dan wanneer je alleen uit boeken les geeft.'

Er ontstond in de verschillende klassen een zichzelf versterkend proces: de leerlingen reageerden enthousiast op de opdrachten en dat stimuleerde de a.s. leraren om risico's te nemen en de opdrachten nog meer open en uitdagend te maken.

Het enthousiasme van de leerlingen zette ook anderen in de school aan het denken. Een van de begeleidende leraren schreef:

'Mijn grootste inspiratie waren de ontdeklessen. De kinderen gingen steeds zo enthousiast aan het werk. Groep 6 en 7 werkte aan dezelfde opdrachten, en werkte goed samen. Helaas na een tijdje ga je weer verder uit het lesboek en komen de ontdeklessen eigenlijk veel te weinig aan bod.'

En de directeur van een school:

'Gekozen werd voor een andere benadering, namelijk door 'ontdekken' en 'laten ervaren' komen tot 'begrijpen'. Logisch is dat daarbij veel aandacht was voor werken op materiaal niveau en dicht bij de zgn. praktijk blijven. Dit verhoogde in niet geringe mate ook het plezier van de kinderen in de aangeboden lessen, wat ook weer prestatieverhogend werkt! De aspirant-leraren hebben ons (leerkrachten en leerlingen) geleerd om eens op een andere wijze naar het onderwijs te kijken.'

We kunnen concluderen dat een actieve, onderzoekende houding bij de leerlingen gestimuleerd wordt door een open en onderzoekende houding van de leerkracht. De organisatie van 'ontdeklessen' stelt extra eisen aan de leerkracht. Ze vragen een goede voorbereiding, met name op het punt van de organisatie. Ze vragen vooral ook veel flexibiliteit van de leerkracht tijdens het geven van de les. Zoals voor veel vaardigheden geldt: de beste manier om dit te leren is het te doen.

## **Wetenschap en techniek in de opleiding**

Vergeleken met de 43 landen die in 2007 aan het TIMSS-onderzoek meedeelden wordt in Nederland de minste tijd besteed aan natuuronderwijs (Mee-lissen & Drent, 2008). Daarbinnen wordt de onderwijstijd vooral besteed aan biologie (55 procent) en fysische aardrijkskunde (22 procent). Slechts 15 procent van de tijd voor natuuronderwijs wordt besteed aan natuur- en schei-

kunde. Nederlandse leraren voelen zich relatief minder goed toegerust voor het geven van natuur- en scheikundelessen. Niettemin volgt maar een op de vier leraren een nascholingscursus op het gebied van natuuronderwijs.

Tegen deze achtergrond is het niet verwonderlijk dat VTB-pro in de nascholing steeds de nadruk heeft gelegd op de natuurwetenschappen (Van Keulen & Van der Molen, 2009). Het scholingsaanbod zou zich volgens VTB-pro moeten richten op het verbeteren van de inhoudelijke kennis van leraren en op het verbeteren van hun attitude ten opzichte van het vakgebied. Het zou moeten leiden tot leraren die ruimte geven aan 'onderzoekend leren' en die wetenschaps- en techniekfilosofische vraagstukken niet uit de weg gaan.

In de opleiding kan eenzelfde lijn worden gevolgd. Gezien het bescheiden aandeel van 'wetenschap en techniek' in het basisprogramma van de opleiding en het grote aandeel van het leren in de bestaande onderwijspraktijk kunnen we er van uit gaan dat de beginsituatie van de deelnemende studenten aan het onderwijslab - wat betreft kennis en attitude - niet veel anders zal zijn dan die van leraren. Het opleidingsontwerp van het onderwijslab houdt hier rekening mee.

Naast de aandacht die er was voor het verwerven van vakkennis en een didactisch repertoire kregen studenten in de beginfase veel ruimte om een positieve attitude ten opzichte van 'wetenschap en techniek' te ontwikkelen. Dit deden ze onder andere via het bezoeken van een door VTB-pro georganiseerd congres over wetenschap en techniek en door deelname aan een conferentie met workshops over techniek in de opleiding en in de praktijk.

Daarnaast zijn de mogelijkheden uitgebuit van de vele relaties met andere vakken. Een publicatie als 'Drinken vissen water?' (Van der Heijden & Frankenhuys, 2007), waarin experts ingaan op vragen van kinderen over dieren in Artis, vormde een mooie brug met de vakgebieden Biologie en Nederlands. Raakvlakken tussen geschiedenis en techniek werden gevonden in onderwerpen als de groei van de wereldbevolking in de negentiende eeuw en de uitvinding van allerlei op stoom aangedreven machines (Lloyd, 2008). Ook kwam de industriële revolutie in Nederland aan de orde.

Vanzelfsprekend werden ook de raakvlakken met het vak rekenen-wiskunde onderzocht. Wat betreft de didactiek ligt er een duidelijke relatie tussen het concept van 'onderzoekend ontwerpen' bij wetenschap en techniek, en het meer vertrouwde, eerder in de minor aangezette, concept van 'onderzoekend leren' bij het vak rekenen-wiskunde. Beiden vragen om het leren

orkestreren van actief en interactief onderwijs. Bij dit alles werd een methodische werkwijze gevolgd. Eerst werden praktijktheorieën bewust gemaakt, van daaruit deden de studenten voorspellingen over het lesverloop in op video opgenomen lessen. Na het bekijken van het feitelijke verloop werden de praktijktheorieën geanalyseerd.

Ook in de activiteiten met leerlingen kreeg het vooraf nadenken over wat er waarschijnlijk gaat gebeuren veel nadruk. Leerlingen werd bijvoorbeeld gevraagd te voorspellen welk van twee opwindautootjes het snelst zou gaan, of om een tekening te maken van snelheidsveranderingen aan de hand waarvan iemand anders een verhaal over de gebeurtenissen zou kunnen vertellen. Dit laatste diende als opstapje naar het zelf interpreteren van snelheidsgrafieken.

Via de onderwijsactiviteiten werd techniek zowel voor de studenten als voor de leerlingen teruggebracht van een 'black box', tot iets dat je kunt doorzien. Snelheid bijvoorbeeld was eerst voor hen niet veel meer dan een getal op een snelheidsmeter of een meting van een flitspaal, maar het werd een grootheid die je ook zelf kunt bepalen met eenvoudige hulpmiddelen als een stopwatch, stroken papier en een meetlint.

Voor de leerlingen bleef het redeneren over snelheid op een heel concreet niveau, maar de a.s. leraren ontwikkelden fundamentele kennis rond begrippen als 'gemiddelde snelheid' en 'momentane snelheid'. Ze leerden gemiddelde snelheid kennen als de 'hellingshoek', de verhouding tussen een verplaatsing en de daarvoor benodigde tijd. Ze leerden ook dat momentane snelheid beschreven kan worden via de hellingshoek bij een tijdsinterval dat tot nul nadert.

## **Verkennen van de samenhang tussen variabelen**

Om bij leerlingen en a.s. leraren de behoefte te ontwikkelen techniek te doorzien - dus weg van het 'black box denken' - zijn zowel 'hands-on' als 'minds-on' activiteiten nodig. We hebben activiteiten nodig die uitnodigen tot handelen - proefjes bedenken, meten, resultaten helder weergeven - en activiteiten die uitdagen tot denken. Een ict-rijke leeromgeving kan hier veel aan bijdragen. Computers en chips spelen een centrale rol in de techniek van tegenwoordig en we zullen leerlingen en studenten moeten interesseren om na te denken wat er in die 'zwarte dozen' zit. Daarbij gaat het er ons niet op de eerste plaats om dat ze begrijpen hoe de electronica werkt - al is een

globaal inzicht daarin ook belangrijk - maar vooral dat ze leren doorzien hoe de getallen die chips en computers ons leveren tot stand komen. Een voorbeeld is de bewegingsmeter die ter sprake kwam in hoofdstuk 3. Gekoppeld aan een computer kan de EuroMotion sensor grafieken tekenen van afstand tegen tijd, of snelheid tegen tijd. Leerlingen en studenten zouden een idee moeten hebben over de manier waarop dergelijke grafieken tot stand komen.

Een tweede rol speelt ict in de leeromgeving via simulaties en andere didactische computerprogramma's. Het boekje 'Dynamische grafieken op de basisschool' (Van Galen en Gravemeijer, 2010) beschrijft een aantal van die programma's, onder andere het computerprogramma Treinmachinist dat ook in de leergang die we in dit boekje bespraken een belangrijke rol speelt. Via zulke programma's worden processen die in normale gebruiksprogramma's onzichtbaar blijven zichtbaar gemaakt en onderzoekbaar. We zouden kunnen zeggen dat we via zulke computerprogramma's ict inzetten om leerlingen ict te laten doorzien.

In die zin staat de leergang rond snelheid model voor onderwijs gericht op het verkennen van samenhangen tussen variabelen. De gedachte hierachter is dat het begrijpen van de samenhang tussen variabelen helpt om te doorzien hoe computers en gecomputeriseerde apparaten gegevens bewerken. Dergelijke apparaten spelen een steeds belangrijker rol als interface tussen de mens en de fysische werkelijkheid in de moderne informatiemaatschappij. Om goed beslagen ten ijs te komen is het nodig dat de leerlingen van nu vertrouwd raken met de onderliggende natuurwetenschappelijke en wiskundige inzichten. Dit vraagt een dieper inzicht in zaken als 'meten', 'variabele' en 'co-variantie', naast vaardigheid in het omgaan met grafieken als hulpmiddel om meetresultaten, variërende grootheden (variabelen) en samenhangen tussen grootheden/variabelen te beschrijven en te onderzoeken.

De ervaringen met de beschreven leergang laten zien dat dit gebied voor leerlingen van de bovenbouw van de basisschool goed toegankelijk is. Bovendien blijkt het onderwerp ook zeer motiverend te zijn voor de leerlingen, tenminste, wanneer de activiteiten worden ingebed in een onderzoeksgerichte benadering en worden ondersteund door passende software.

De ervaringen met het onderwijslab laten zien dat het geven van onderwijs op dit terrein voor a.s. leraren goed haalbaar is, al is wel duidelijk dat het een flinke investering vraagt in de opleiding, zowel wat de vakinhoud, als



wat de pedagogisch-didactische vaardigheden betreft. Het model van een leergemeenschap lijkt hier interessante mogelijkheden te bieden.

De beschreven lessenserie is tenslotte ook een voorbeeld van hoe 'wetenschap & techniek' geïntegreerd kan worden met 'rekenen-wiskunde'. Een dergelijke integratie ligt voor de hand, niet alleen van wege de inhoudelijke verwantschap, maar ook vanwege de verwantschap in didactiek; in beide vakken neemt het onderzoeken en redeneren een belangrijke plaats in. Beide vakken kunnen elkaar wat dit betreft versterken.

We hopen dat het beschrijven van onze ervaringen - zowel op de basisschool als in het Pabo-onderwijs - uitnodigt tot het gebruik van de ontwikkelde lessen.



## Literatuur

- Dijkers, F. (2011). Tussen twee stationnetjes ... *De Tondeldoos*, 12, 1, 13-15.
- diSessa, A.A. & B.L. Sherin (2000) Meta-representation: an introduction. *Journal of mathematical behavior*, 19 (4) 385-398.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education, China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Galen, F. van (2010). Groeigrafieken. *Praxisbulletin* 28 (2) p.20-23).
- Galen, F. van, E. Feijs, N. Figueiredo, K.Gravemeijer, E. van Herpen & R. Keijzer (2005). *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Galen, F. van & K. Gravemeijer. (2010). *Dynamische grafieken op de basisschool*. Ververs Foundation & Freudenthal Instituut.
- Galen, F. van & E. Quant (2011). Hoe geef je snelheid weer? *Volgens Bartjens*, 30 (5), 8-11.
- Gravemeijer. K. (2009). *Leren voor later. Toekomstgericht science- en techniekonderwijs voor de basisschool*. Intreerede. Eindhoven TU/e.
- Heijden, van der M. & M. Frankenhuis (2007). *Drinken wissen water?* Amsterdam: Nieuw Amsterdam Uitgevers.
- Keulen, van H. & W. van der Molen, eds. (2009). *Onderzoek naar wetenschap en techniek in het Nederlandse basisonderwijs*. Den Haag: Platform Bèta techniek.
- Khikmiyah, F. (2011). *Supporting students development of the concept of speed*. Master thesis Surabaya State University.
- Lloyd, C. (2008). *Wat is er in hemelsnaam gebeurd?* [vert. uit het Engels: What on earth happened?]. Amsterdam: Nieuw Amsterdam Uitgevers.
- Meelissen, M.R.M. & M. Drent (2008). TIMSS 2007. *Trends in leerprestaties in exacte vakken in het basisonderwijs*. Enschede: Universiteit Twente.
- Sherin, B.L. (2000). How students invent representations of motion. A genetic account. *Journal of mathematical behavior*, 19(4), 399-441.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.
- Van Mulken, F. (2011). *Onderzoekslab: snelheid onder constructie; achtergronden van een opleidingseenheid op het snijvlak van rekenen-wiskunde en wetenschap en techniek*. Breda: Avans Hogeschool.

## Noten

1. De in dit boekje beschreven lessen en de leerlingopdrachten zijn te downloaden via de website van de Eindhoven School of Education en via [rekenweb.nl](http://www.rekenweb.nl).  
<http://www.tue.nl/universiteit/over-de-universiteit/eindhoven-school-of-education/innoveren/steff/>  
<http://www.fi.uu.nl/rekenweb/grafiekenmaker/snelheid.html>
2. Zie <http://www.fi.uu.nl/rekenweb/grafiekenmaker/>. Een verslag van het project is te vinden in van Galen & Gravemeijer (2010).
3. Video-opnamen van de interviews zijn te bekijken via de projectwebsite.
4. Het computerprogramma is gemaakt door Huub de Beer en is te vinden op de project-website.