2. BEWEGING

2.1 Inleiding. De eenparige rechtlijnige beweging

Vanuit pedagogische overwegingen zou men met de behandeling van de ritmische beweging kunnen beginnen, om daarna te vervolgen met de rondgaande en rechtlijnige beweging. Men spreekt dan de leerlingen in het ritmische midden aan en werkt van daaruit naar de polariteiten recht en rond, ofwel denken en willen. Het is echter ook mogelijk met het heldere rechtlijnige denken te beginnen, het ronde daartegenover te plaatsen om daarna tot een synthese te komen in de ritmische beweging. Deze weg zal hier gevolgd worden. Een praktisch voordeel hiervan is dat tijdens de bespreking van de ritmische beweging, zoals onder andere bij geluid, het maken van opgaven over snelheid, afstand en tijd verder geoefend kan worden, zodat een goede basis ontstaat voor de behandeling van de vrije val en de versnelde beweging.

Bij het bespreken van een onderwerp in de klas is het altijd weer een uitdaging antropomorf te werk te gaan. Wat sluit direct bij de mens aan en wat zijn afgeleide verschijnselen? De S.I. eenheden afstand, tijd en massa zijn geen primaire belevingen: binnen de mechanica is beweging het meest aan de mens verwante fenomeen. Het karakter van beweging ligt vervat in de begrippen snelheid en snelheidsvariatie. Vanuit deze overwegingen is het dus vanzelfsprekend de periode in de meest brede zin van het woord met beweging te beginnen. We kunnen daarvoor naar de oereigen bewegingen binnen de natuurrijken kijken:

mens:	gemotiveerde beweging van binnen uit, actief
dier:	instinctieve beweging
plant:	groeibeweging van buitenaf, passief
mineraal:	ondergane beweging

Dit overzicht kan verder uitgewerkt en besproken worden. Zo kent de mens alle vier bewegingstypen. Hij kan handelen vanuit een motief, maar ook vanuit z'n instincten of driften. Ook groeien zijn haren zonder dat hij zich daar actief voor hoeft in te spannen en kan hij zich laten voortbewegen door een trein. Tevens kan men zielebewegingen bespreken: denkbewegingen (een gedachtengang of de vlucht van de gedachten), gevoelsbewegingen (sympathie en antipathie, zachtmoedig, openhartig) en wilsbewegingen (moed, brutaliteit). De polariteit binnen de groeibeweging van de plant, het uitbreiden en samentrekken, zijn hier ook te behandelen, evenals de verschillende bewegingen van dieren die door middel van toneelspel getypeerd kunnen worden.

Na een dergelijke inleiding is het voor velen een opluchting dat de beweging van de dode stof het hoofdonderwerp van de periode wordt en dat de bewegingen van de overige natuurrijken te ingewikkeld zijn om mechanisch te bekijken of te berekenen. Zelfs de beweging van lucht of water komt op de tweede plaats, we gaan het meest passieve bekijken: bewegingen van vaste voorwerpen. Geen blaadjes papier of piepschuim, maar stenen, kogels, e.d. We trekken ons zover uit de natuur terug, dat we geheel in de voorstelling kunnen blijven, doordat we ons de allereenvoudigste beweging voorstellen. Hiervoor kiezen we de constante rechtlijnige beweging, die in de natuur niet voorkomt en technisch zeer moeilijk te realiseren is. Het is een geïdealiseerde beweging, waarbij men een bewegend punt in de voorstelling neemt.

Om nog duidelijker te laten uitkomen dat we ons in deze voorstelling verregaand van de natuur distantiëren, vraagt men een leerling bijvoorbeeld te beschrijven, hoe zijn reis naar school verloopt. Dan abstraheren in plaats van idealiseren we de reis tot een beweging die constant én rechtlijnig verloopt. Vervolgens leggen we maar één aspect van deze voorgestelde, volledig van de natuur gereduceerde beweging vast en dat is de snelheid. De beleefbare beweging met al z'n snelheidsvariaties, waar de mens met zijn beleving direct mee verbonden is, moeten we goed onderscheiden van de kwantitatieve snelheid. Deze laatste wordt bepaald door het tijdsverloop en begin- en eindpunt van de verplaatsing vast te leggen. In de beweging zelf ben je dan niet geïnteresseerd, maar alleen in het geabstraheerde begrip gemiddelde snelheid. We meten afstand en tijd als buitenstaanders die niet deelnemen aan het proces zelf. Men kan als voorbeeld een wielerwedstrijd of iets dergelijks nemen en de sporter vergelijken met de jury. We streven er in deze periode naar om steeds meer jury te worden. De werkelijke beweging is nauwelijks vast te leggen of te berekenen. De geabstraheerde rechtlijnige, constante beweging is heel eenvoudig te berekenen, maar nauwelijks te realiseren.

Een voorbeeld. Eén van de leerlingen moet 6 km fietsen en doet daar 20 minuten over. Zijn gemiddelde snelheid is dan:

in 20 min 6 km
in 10 min 3 km
in 60 min 18 km.

In de helft van de tijd legt de leerling 3 km af: dit is een interpolatie. We extrapoleren ook door te zeggen: zou de leerling één uur lang doorfietsen, dan zou er 18 km afgelegd zijn. We concluderen dat de gemiddelde snelheid dus 18 km/h bedraagt. Dit geldt ook voor de eerste 10 min! Dus:

$$\text{de gemiddelde snelheid} = \frac{\text{totale afstand}}{\text{totale tijd}}$$

in formule: $v = \frac{s}{t}$ waarbij: v = velocitas, snelheid

s = spatio, afstand
t = tempus, tijd

Laat de leerlingen een *s-t* grafiek maken, bijvoorbeeld van hun reis van huis naar school, en de gemiddelde snelheid berekenen.

Na deze inleiding, waarbij reeds op een elementaire wijze het wiskundig formuleren verbonden wordt met de natuurkundige verschijnselen, een van de hoofduitgangspunten van deze periode, onderzoeken we de verschillende soorten bewegingen. In het boek van von Baravalle *Physik als reine Phänomenologie* worden tal van voorbeelden gegeven van technische bewegingen. Er zijn drie primaire bewegingen te onderscheiden:

rond: cirkel, ovaal, spiraal, cardioïde
ritmisch: lemniscaat, slinger, sinusoïde
rechtlijnig: voortgaande beweging, vrije val.

In de natuur is de ritmische beweging regel en de rondgaande uitzondering. Het lopen van de mens is een mooi voorbeeld van een ritmische beweging. De techniek laat vooral rondgaande beweging zien, terwijl daar de ritmische beweging eerder uitzondering is. Deze drie primaire bewegingen zijn qua vorm ook in de lichamelijke gestalte en qua zielebeweging in de psyche van de mens terug te vinden: hoofd, romp en ledematen van het lichaam, verbonden met de zielefuncties denken, voelen en willen. Het hoofd wordt gekenmerkt door de ronde vorm, in de borst overheerst de ritmische vorm (ribben) en beweging (ademhaling en bloedsomloop), in de ledematen overheersen de rechte vormen. Op het psychische vlak beleven we aan het denken het rechte element (gedachtengang), het voelen is een ritmisch gebeuren dat zich afspeelt tussen in sympathie verbinden en in antipathie afstand nemen, in het willen kunnen we het ronde, gebalde element beleven. In schema:

	lichaam	*psyche*
rond	hoofd	willen
ritmisch	ribben, adem, hart	voelen
recht	ledematen	denken

Bovenstaand overzicht kan in de klas onderzoekend opgebouwd en met vele voorbeelden omkleed worden.

Opgaven

De opgaven in dit boek zijn bedoeld als voorbeelden, hoe men van een ervaarbare situatie uitgaand geleidelijk aan tot abstractie komt. Laat om te beginnen leerlingen bijvoorbeeld de tijd opnemen van hun dagelijkse reis van huis naar school en met een kilometerteller op de fiets de afstand. Gevraagd wordt dan de gemiddelde snelheid te bepalen.

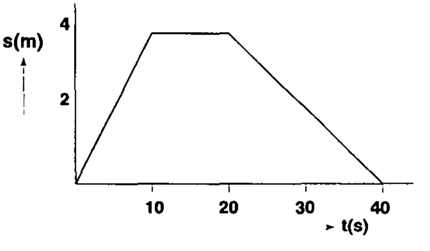
1. Annet reist van huis naar school. Ze moet eerst 15 km met de bus, dat duurt 20 minuten; daarna moet ze nog 5 km fietsen, dat duurt ook 20 minuten.
   a. Bereken de gemiddelde snelheid van de bus.
   b. Bereken ook de gemiddelde fietssnelheid.
   c. Bereken ook de gemiddelde snelheid van de hele reis.
   d. Teken van deze reis een *v-t* en een *s-t* grafiek.

2. Een marathonloper loopt de 42 km in 2 uur en 6 minuten.
   a. Hoe groot is zijn gemiddelde snelheid in km/uur en in m/s ?
   b. Kun je deze hardloper op de fiets bijhouden?

3. Lucht heeft bij windkracht 6 een snelheid van 13 m/s.
   a. Als deze windsnelheid 3 uur aanhoudt, hoe groot is dan de afstand die de lucht heeft afgelegd?
   b. Als die lucht bij ons aankomt, vanwaar kan hij dan afkomstig zijn?

4. Een verkeersvliegtuig (Boeing 747) vliegt met een gemiddelde snelheid van 950 km/uur van New York naar Amsterdam (5400 km).
   a. Hoe lang duurt de vlucht?
   b. Hou je aan deze vlucht een jet-lag over?

5. Van een bepaalde beweging is het *s-t* diagram hieronder gegeven.
   a. Beschrijf in je eigen woorden wat voor een beweging dit moet zijn geweest.
   b. Bereken de snelheid bij elk van de drie delen van de beweging.
   c. Teken het *v-t* diagram dat bij deze beweging hoort.



2.2 De rondgaande beweging

Na de hiervoor beschreven introductie van de rechtlijnige beweging zullen we nu voorbeelden van rondgaande bewegingen bespreken aan de hand van enkele technische toepassingen.

Draaischijf

In een speeltuin staat een schijf (d=3m) die rond kan draaien en waarop je kunt gaan staan. Als de schijf in 5 sec ronddraait, is de omtreksnelheid:

$v = \frac{s}{t} = \frac{\pi d}{t} = \frac{3{,}14 \times 3}{5} \simeq$ 1,88 m/s. Dit is 1,88 × 3,6 = 6,8 km/h.

Vervolgens kunnen de leerlingen berekenen wat de snelheid op ½ m en op 1 m van het middelpunt is. Idem wanneer de schijf in 3 sec of in 1 sec ronddraait. De omtreksnelheid is evenredig met de afstand tot het middelpunt.

Twee wielen op één as hebben altijd een gelijk toerental; hun omtreksnelheden zijn recht evenredig met hun diameters.

Tandwiel-, snaar- of kettingoverbrenging

Twee wielen verbonden door een ketting, een riem of door tanden hebben dezelfde omtreksnelheid. Omdat de tanden allemaal even groot zijn, is de verhouding van het aantal tanden gelijk aan de verhouding van de diameters. De toerentallen van de wielen verhouden zich omgekeerd evenredig met de aantallen tanden.

Voorbeeld:
Gegeven twee tandwielen met resp. z_1 = 52 tanden en z_2 = 16 tanden. Diameter d_1 = 25 cm, toerental n_1 = 1,5 omw/s.
Gevraagd: d_2 en n_2.

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{52}{16} = 3{,}25 \rightarrow d_2 = \frac{d_1}{3{,}25} = \frac{25}{3{,}25} = 7{,}7 \text{ cm}$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{z_1}{z_2} = 3{,}25 \rightarrow n_2 = n_1 \times 3{,}25 = 1{,}5 \times 3{,}25 = 4{,}9 \text{ omw/s.}$$

Tandwielen met rechte tanden raken elkaar op een punt, het contactpunt. Schuine tanden hebben een glijlijn als contactverloop, waardoor veel minder slijtage optreedt.

De behandeling van differentieel, versnellingsbak of worm-wormwieltakel zijn ook uitstekende voorbeelden voor de 10e klas, evenals de lagering van assen met glijkogels of druklagers. Het zoeken naar overbrengingen sluit altijd goed aan en kan meerdere dagen voortgezet worden.

Opgaven

Hieronder volgen enige vraagstukken die op elkaar aansluiten en waarbij men de fiets met al zijn draaiende delen nader leert kennen. Men maakt de overgang van naïeve gebruiker naar actief kennende gebruiker en objectieve berekenaar.

1. Een fietser wil graag iets te weten komen over de overbrengverhouding op zijn fiets. Daarom gaat hij een beetje zitten tellen en rekenen tijdens het fietsen. Eerst meet hij hoeveel seconden het duurt om de afstand tussen twee hectometerpaaltjes af te leggen. Dat duurt 20 s.
   a. Ga na dat zijn snelheid 18 km/uur is.
   Hij telt nu hoeveel keer zijn trappers rond moeten in één minuut. Dat is 55 keer helemaal rond. De lengte van de trapperstang is 17,5 cm.
   b. Hoe groot is de snelheid van de trappers in hun rondgaande beweging?

2. De fietser rijdt op 28 inch banden. Dat wil zeggen dat de wieldiameter inclusief band 28 inch is (1 inch = 2,54 cm).
   a. Hoe groot is de omtrek van een wiel?
   b. Hoeveel keer draait dat wiel rond op een afgelegde weg van 100 m?
   Zijn fiets heeft geen versnelling.
   c. Ga na dat de overbrengverhouding trappers achterwiel ongeveer 2:5 is.

3. Later thuis gekomen wil hij dit gaan controleren door de tanden van de tandwielen te tellen. Hij vindt: voortandwiel 44 tanden, diameter 17 cm, achtertandwiel 18 tanden, diameter 7 cm.
   a. Laat zien dat deze getallen juist kunnen zijn.
   b. Hoe groot is de overbrengverhouding van de trappers naar het achterwiel, berekend uit deze getallen? Klopt dit met de eerder gevonden verhouding?

4. De diameter van zijn dynamowieltje is 18 mm.
   a. Hoeveel omwentelingen per seconde maakt dat wieltje bij gemiddelde snelheid?
   b. Hoe groot is de overbrengverhouding voorwiel-dynamowieltje?

2.3 De ritmische beweging

Een toegankelijk en mooi voorbeeld hiervan vormt de slinger. Allereerst laat men verscheidene voorwerpen slingeren. Dan vraagt men de leerlingen waar de slingertijd (de tijd die nodig is om één keer heen en weer te slingeren) vanaf hangt. Genoemd worden bijvoorbeeld: gewicht, uitwijking, slingerlengte, wrijving. Vervolgens kan de invloed van elk der factoren één voor één worden onderzocht.

Meet men bijvoorbeeld de tijd van tien slingeringen bij verschillende beginuitwijkingen, dan blijkt deze min of meer gelijk te zijn. Bij grote beginuitwijkingen wordt de slingertijd iets langer. De invloed van de wrijving kan men onderzoeken door een stuk papier op het slingergewicht te bevestigen. De slingeruitwijking neemt nu snel af, maar de slingertijd blijft toch gelijk. Dan kan men de slingertijd voor verschillende gewichten meten. Deze blijkt ook gelijk te zijn. Een proef die op een volgend spoor brengt is de volgende. Wanneer de slinger heen en weer gaat, verkort men de slingerlengte door het touw van de slinger over een scharnierpunt te trekken. De slinger zal nu sneller gaan en de uitwijking zal toenemen. De systematische meting van het verband tussen slingerlengte en slingertijd kan men de leerlingen thuis laten uitvoeren. De volgende dag verzamelt men de metingen:

lengte (m)	*tijd* (s)
1	2
2	2,8
½	1,4
¼	1

Tussen de meetgegevens constateert men de volgende relaties:
- wordt de slingerlengte 4 keer kleiner, dan wordt de slingertijd 2 keer kleiner;
- wordt de slingerlengte 2 keer kleiner, dan wordt de slingertijd $\sqrt{2}$ keer kleiner.

De begripsopbouw kan als volgt geschieden:
1. Langere slingerlengte, dan ook langere slingertijd.
2. Een vier keer langere lengte geeft een twee keer langere tijd.
3. Neemt de lengte kwadratisch toe, dan neemt de tijd met de eerste macht toe.
4. De verhouding tussen de slingertijden T komt overeen met de wortel uit de verhouding van de slingerlengten l. In formule:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}$$

5. De lengteverhouding komt overeen met het kwadraat van de tijdsverhouding:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \quad \text{of} \quad \frac{T^2}{l} = \text{constant}$$

6. In de formules van stap 4 en 5 kunnen we nu de gegevens van een referentieslinger invullen, bijvoorbeeld: $l_2 = 1$ m en $T_2 = 2$ s. Hieruit volgt het algemene verband:

$$T = 2\sqrt{l} \quad \text{of} \quad l = \frac{1}{4} T^2$$

Zo kan men voor iedere slinger de waarde van T of l berekenen, wanneer de andere bekend is. De relatie $l \propto T^2$ kan men nu als uitgangspunt nemen voor het maken van een aantal opgaven, zodat het rekenen met kwadratische verhoudingen geoefend kan worden. Daarmee legt men een basis voor de latere bespreking van de vrije val en de eenparig versnelde beweging.

Opgaven

1. Een kroonluchter in een kathedraal slingert heen en weer. Hij maakt 6 hele slingeringen in 1 minuut.
   Schat de lengte van de kabel waaraan hij hangt.

2. Een slinger van 1,2 m en een van 1,0 m worden in hun uiterste stand tegelijk losgelaten.
   Bereken hun slingertijden. Hoe lang duurt het voordat ze weer gelijktijdig hun uiterste stand bereiken?

2.4 Combinaties van bewegingen, samengestelde beweging

Na de behandeling van de rechtlijnige, rondgaande en ritmische beweging kan men de leerlingen naar combinaties van deze grondtypen laten zoeken. We zetten een aantal voorbeelden in schema:

→	rond	ritmisch	recht
rond	tandwielen ketting/riemover- brenging dynamo op fiets- band	naaimachine excentriek klepstoker zaagmachine	lier fiets schroef krik vishengel
ritmisch	zuiger/krukas onrust van klok	schommelen adem/hersen- vocht	vliegende hollander zwemmen zagen
recht	windmolen waterrad	wind/vlag wier in stro- mend water	heimachine/paal zeilboot

Deze voorbeelden hebben betrekking op allerlei situaties waarin de ene beweging een andere teweegbrengt. Men kan de leerlingen naar nog andere vormen van overbrenging vragen of bijvoorbeeld de volgende opgave geven.

Beschrijf de samenhang van de bewegingen in de volgende situaties:

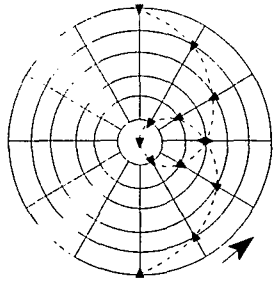
a. Wind waait over een korenveld en doet de halmen bewegen.
b. Stromend water in een rivier doet een gierpont van de ene oever naar de andere gaan.
c. Je blaast over de hals van een (lege) fles en je hoort een toon klinken.
d. Je rijdt op je fiets en je voorwiel beweegt.
e. Je rijdt op je fiets en je achterwiel beweegt.
f. Je rijdt op je fiets over een klinkerweg en je wat loszittende achterspatbord beweegt.
g. Je schrijft op het bord en het krijtje piept.

Daarnaast zijn er ook situaties waarin een beweging als een samenstelling van de basisbewegingen is te beschouwen. Enkele voorbeelden daarvan hieronder.

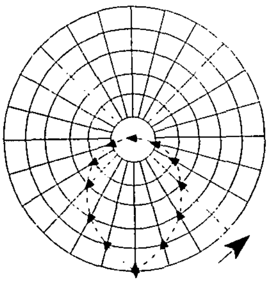
Lopen over een draaischijf

Welke beweging neem je van bovenaf waar als iemand dwars over een draaiende schijf loopt, die intussen precies één keer ronddraait? En welke als de schijf intussen een half rondje draait? We verdelen de middellijn (het looptraject) in 12 gelijke stukken. Draait de schijf één keer rond, dan verdelen we de cirkel ook in 12 segmenten. Draait de schijf een half rondje, dan verdelen we de cirkel in 24 segmenten. Toelichting bij het construeren:

- Loop je neus achterna door telkens naar de volgende concentrische cirkel te stappen.
- Intussen draait de schijf, dus beweegt naar een volgend cirkelsegment.
- De bewegingen worden op deze wijze samengesteld.



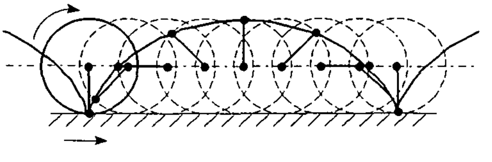
De schijf draait één rondje



De schijf draait een half rondje

Het rollende wiel: cycloïde

Het wiel van een fiets of ander voertuig heeft twee bewegingen, namelijk een rondgaande en een rechtgaande. Loopt men naast een fiets, dan valt op dat het ventiel achterblijft wanneer het dicht bij de grond is en vooruit snelt wanneer het boven is. Op de grond staat het stil, omdat het wiel ten opzichte van de stilstaande grond niet slipt. Het hoogste punt van het wiel heeft een dubbele snelheid. Men kan dit door de volgende constructie verduidelijken:



Bovenaan werken de rondgaande en de voortgaande bewegingen in dezelfde richting. Onderaan werken de rondgaande en de voortgaande bewegingen elkaar tegen. Omdat de snelheid in het laagste punt nul is, hebben beide bewegingen een even grote snelheid en is de snelheid van het hoogste punt het dubbele van die van de as.

Als variant kan men de beweging van een rupsband onderzoeken die het stilstaan op de grond duidelijk laat zien.

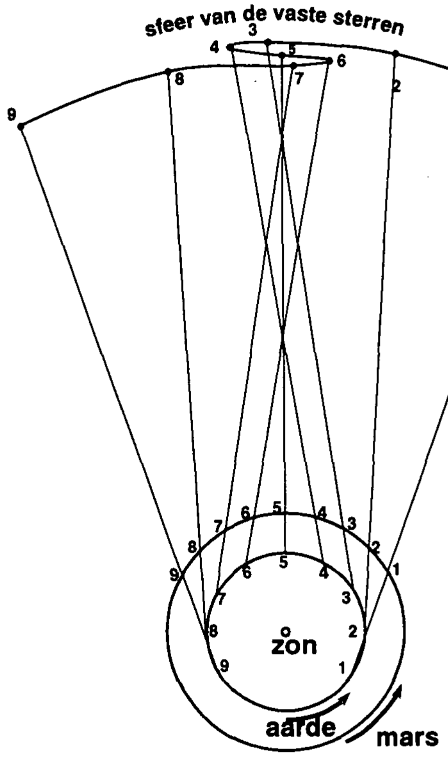
De planeetbanen

Hierbij hebben we te maken met een combinatie van rondgaande bewegingen. Als voorbeeld bekijken we de beweging van de planeet Jupiter. In eerste instantie beweegt Jupiter, samen met alle sterren en planeten, dagelijks in een cirkel rondom de aarde, de spiegeling van de aswenteling van de aarde. Zien we af van deze dagelijkse beweging, dan beschrijft Jupiter, vanuit de aarde gezien, een baan langs de sterrenhemel in ongeveer 12 jaar, die echter niet regelmatig verloopt. Soms ziet men Jupiter ten opzichte van de vaste sterren vooruit snellen, soms teruglopen. Ptolemeus (87-150) volgde de traditie van Aristoteles (384 - 322 v.C.), die stelde dat de planetensferen tot het goddelijke domein behoorden en dus de meest volmaakte geometrische vorm hadden, de cirkel. Ptolemeus verklaarde de heen- en teruggaande beweging van Jupiter ten opzichte van de vaste sterren door de aanname dat de planeet tegelijkertijd aan twee cirkelbewegingen deelneemt: een (kleine) cirkel, de epicykel, die de planeet in een jaar doorloopt en waarvan het middelpunt in twaalf jaar een grote cirkelbaan om de aarde beschrijft.

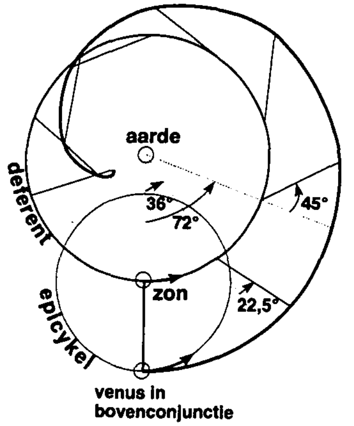
Vanaf het moment dat Copernicus (1473-1543) het heliocentrische wereldbeeld concipieerde kwam de weg vrij om de heen- en weergaande beweging van Jupiter te verklaren vanuit de combinatie van een (nagenoeg) cirkelvormige beweging van Jupiter om de zon in twaalf jaar en de beweging van de aarde, die zelf in één jaar een (nagenoeg) cirkelvormige baan rond de zon beschrijft. Door de beweging van de aarde ziet men Jupiter heen en weer bewegen ten opzichte van de sterrenhemel, net zoals men een raamkozijn op en neer ziet bewegen ten opzichte van het panorama buiten het raam wanneer men zijn hoofd op en neer beweegt.

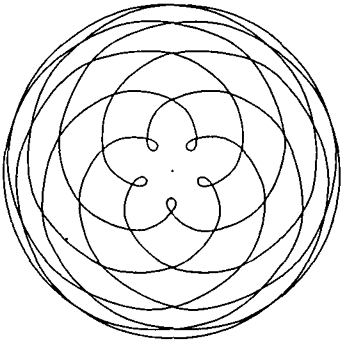
Uit de gegevens van afstanden en tijden kunnen we de planeetbanen construeren. Hieronder volgen die constructies voor Mars en Venus, ieder op een bepaalde manier beschouwd.

a. ***Mars*** is evenals Jupiter een buitenplaneet: zijn baan om de zon ligt buiten die van de aarde en volgt hetzelfde principe als die van Jupiter, alleen zijn de verhoudingen heel anders. Mars bevindt zich gemiddeld op 1,52 AE van de zon (AE = Astronomische Eenheid = gemiddelde afstand van aarde tot zon) en doorloopt zijn baan in circa 2 jaar. Tekenen we de baan van de aarde als een cirkel met straal van 2 cm, dan moet de baan van Mars getekend worden als een cirkel met een straal van ruim 3 cm. Nemen we als tijdsstap 1 maand, dan moeten we de baan van de aarde in 12 delen verdelen en die van Mars in 24 delen. We tekenen aarde en Mars in 9 posities, waarvan de 5e in oppositie. Vanuit de aarde tekenen we de kijkrichtingen naar de sfeer van de vaste sterren. Deze kijkrichtingen vertonen ten opzichte van deze sfeer een heen en weer gaande beweging.



b. *Venus* is een binnenplaneet: haar baan ligt tussen die van de aarde en de zon. Venus is circa 0,7 AE van de zon verwijderd We beschouwen de baan van Venus geocentrisch, in bovenaanzicht, dus zo dat de aarde in het middelpunt staat en we de zon er in een cirkel omheen zien bewegen. De omlooptijd van Venus is zo dat ze vrijwel precies 5 omlopen maakt in 8 aardejaren. De baan van Venus wordt beschreven door een punt op een epicykel. Als het middelpunt van de epicykel 36° verder op de deferent is, dan moet de epicykel 5/8 x 36 = 22,5° extra verder gedraaid zijn. Verder moet gelden: $r_{def} : r_{epi} = 10 : 7$. In de tekening is begonnen bij een bovenconjunctie. Na 8 stappen wijst de straal van de epicykel die de plaats van Venus aanwijst naar het middelpunt, naar de aarde. Venus is dan in benedenconjunctie. Het volgende deel van de baan is het spiegelbeeld van het eerste getekende stuk. Gebruiken we de tekening van het eerste deel als mal dan kunnen we snel de volledige baan tekenen.





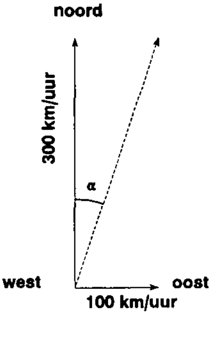
Een schip in dwarsstroom of een vliegtuig in zijwind

Eenvoudig maar in de praktijk veel voorkomend is de samenstelling van twee rechtlijnige bewegingen. Een vliegtuig dat vliegt door een windveld neemt deel aan twee voortgaande bewegingen. Het gaat ten opzichte van de lucht vooruit en wordt ten opzichte van de grond ook nog meegenomen door de wind. Een voorbeeld.

Een vliegtuig vliegt volgens kompas in noordelijke richting met een snelheid van 300 km/uur, er is een westenwind van 100 km/uur. Teken de richting waarin het vliegtuig ten opzichte van de grond zich verplaatst. Hoe groot is de snelheid die het vliegtuig heeft ten opzichte van de grond?

$$v = \sqrt{300^2+100^2} = 100\sqrt{10} \approx 316 \text{ km/h}$$

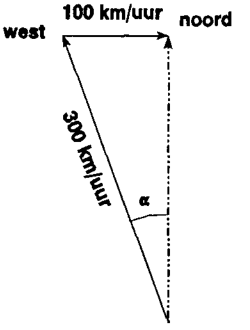
$$\tan \alpha = 1/3 \rightarrow \alpha \approx 18° \text{ oost}$$



De piloot wil nu zo sturen dat hij ten opzichte van de grond een noordelijke koers volgt. Hoe moet hij sturen en hoe groot wordt dan zijn snelheid ten opzichte van de grond?

$v = \sqrt{300^2 - 100^2} = 100\sqrt{8} \approx 283$ km/h

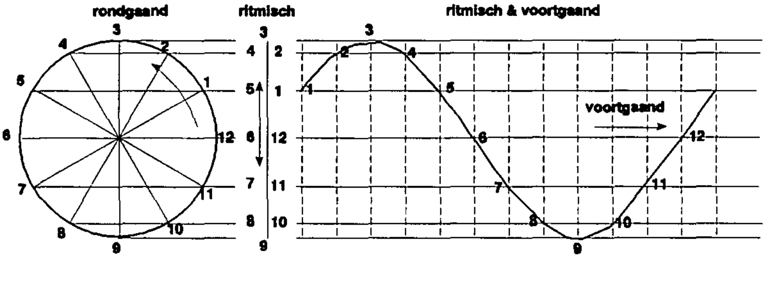
$\sin \alpha = 1/3 \rightarrow \alpha \approx 19°$ west



De sinusoïde

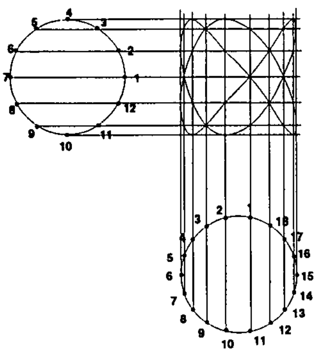
Een andere in de praktijk ook zeer interessante samengestelde beweging is de beweging die ontstaat als een ritmische (harmonische) beweging samengesteld wordt met een rechtlijnige. Zoiets kan je experimenteel zichtbaar maken met behulp van een stemvork met een haakje aan één van de poten. Deze stemvork moet een lage frequentie hebben bijv. 125 Hz. Als je hem aanslaat dan kan je hem langs een beroet glasplaatje (10 × 20 cm) halen. Een andere mogelijkheid is om een fles gevuld met gezeefd zand te laten slingeren. Terwijl het zand uit de fles loopt trek je er dan regelmatig een strook zwart papier (30 × 200 cm) onderdoor. Mooi wit zand krijg je door het zand dat verkocht wordt voor vogelkooien te zeven.

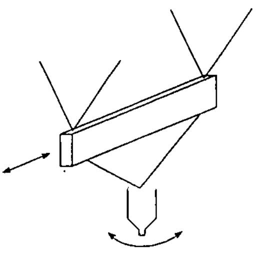
De constructie van zo'n spoor kan gemaakt worden door te bedenken dat een harmonische beweging een cirkelbeweging is "van opzij gezien", een geprojecteerde cirkelbeweging dus. Verdeel een cirkelomtrek in 12 gelijke delen; de deelpunten zijn de plaatsen waar een ronddraaiend punt zich op achtereenvolgende tijdstippen bevindt. Deze punten worden geprojecteerd. Je ziet dan het spoor van een ritmische beweging. Als je deze nu combineert met een rechtlijnige beweging dan ontstaat het spoor van de samengestelde beweging zoals deze in de proefjes werd getoond. Het spoor is in de wiskunde bekend als de sinuslijn.



Figuren van Lissajous

Een logisch vervolg hierop is het samenstellen van twee loodrecht op elkaar staande ritmische bewegingen. Beide worden weer vanuit een cirkelbeweging geconstrueerd. De figuur die ontstaat als het spoor van de beweging wordt genoemd naar Lissajous. De leerlingen kan men bladen uitdelen waarop al enig voorwerk is gedaan zoals hieronder. De beide cirkels zijn even groot, ze worden in dezelfde richting doorlopen, met hetzelfde beginpunt, maar niet met dezelfde omloopsnelheid. Hier is de verhouding 2:3, dat geeft een niet àl te ingewikkeld patroon. Het spoor kan experimenteel verkregen worden door de zandfles te laten slingeren aan een samengestelde slinger.





Met een samengestelde slinger kunnen we heel fraaie figuren maken. Een relatief zware balk hangt aan vier touwen aan een plafond. De touwen moeten alle even lang zijn en netjes in een rechthoek aan het plafond zijn vastgemaakt. De balk kan dan alleen in zijn lengterichting slingeren. Onder de balk hangt dan de tweede slinger: een fles met zand. Deze hangt aan twee even lange touwen zodat hij alleen dwars op de lengterichting van de balk kan slingeren. Als nu de balk én de fles beide slingeren, dan voert de fles een samengestelde slingerbeweging uit. Deze beweging kan je dan registreren door uit de fles zand te laten lopen. Gebruik hiervoor (gezeefd) vogelkooizand. Als je dat op een strakgespannen zwarte doek laat vallen, dan geeft dat een mooi contrast en het is ook gemakkelijk opgeruimd. De fles moet veel meer zand bevatten dan je eruit wilt laten stromen, want als hij vrijwel leeg is dan slingert hij door de relatief groter wordende luchtwrijving niet zo goed meer. De balk moet betrekkelijk zwaar zijn, want als de fles een beetje leegstroomt dan gaat het gemeenschappelijke zwaartepunt van balk en fles wat omhoog en daarmee verandert de periode van de bovenste slinger.

Het is het mooist als de twee slingers zo afgesteld zijn (door de lengte van de koorden aan te passen) dat hun perioden zich tot elkaar verhouden als eenvoudige getallen (b.v. 3:5). Daarbij moet je wel bedenken dat de bovenste slinger bestaat uit de balk en de fles samen. Uitproberen is het gemakkelijkst, want de fles moet ook nog vlàk boven de doek hangen.

2.5 De golfbeweging

Dit onderwerp sluit aan bij de ritmische beweging. Eerst kunnen een aantal voorbeelden van trillingsbewegingen worden getoond die goed waarneembaar zijn. De behandeling van de drukgolven bij geluid betekent een stap naar de abstractie en kan daarom beter in tweede instantie volgen.

Lopende golven in touw of veer

Met een touw, maar nog beter met een lange veer, kan men de langs- en dwarsgolven laten zien. Men heeft hier te maken met een nabootsingsprincipe: wat vooraan of elders wordt aangezet, wordt nagedaan door de rest van de veer. Vervolgens kan men de weerkaatsing van een dwarsgolf aan een los of vast uiteinde onderzoeken.

Terugkaatsing van lopende golven

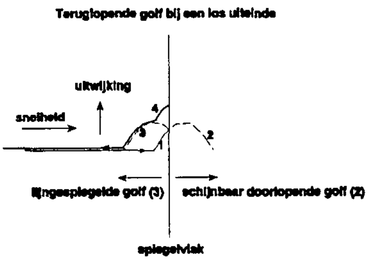
a. *Bij een los uiteinde.* Hiervoor bindt men een dun draadje aan het uiteinde van de veer. We zien een golfberg terugkeren als een golfberg. Hetzelfde geldt voor een golfdal. We kunnen stellen dat een vrij uiteinde geheel meedoet aan het nabootsingsprincipe.

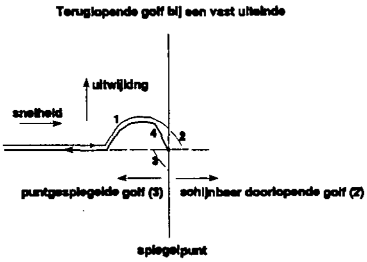
Terugkerende golven kunnen geconstrueerd worden door gebruik te maken van lijnspiegeling: door de lopende en de gespiegelde golf bij elkaar op te tellen krijgt men de reële uitwijking van de veer.

Nu kunnen een aantal begrippen opgehaald worden: de lengte van een golfberg en -dal noemen we de golflengte λ, de trillingstijd T, het aantal trillingen per seconde de frequentie f, de voortplantingssnelheid van de golf v. De relatie hiertussen is:

$$v = \frac{s}{T} = \frac{\lambda}{1/f} = \lambda f$$

b. *Bij een vast uiteinde.* Hierbij keert een golfberg als een dal terug en vice versa. Het vaste uiteinde weerstaat de beweging en brengt een tegenbeweging teweeg. Het samengaan van de lopende en teruggekaatste golf kan men construeren door gebruik te maken van puntsymmetrie: ook hier ontstaat de reële uitwijking van de veer door de lopende en de gespiegelde golf bij elkaar op te tellen.





Watergolven

Door proeven met de golfbak zijn o.a. cirkelgolven, evenwijdige golven, weerkaatsing tegen een wand, golflengteverkleining in ondieper water (zoals boven een zandbank kleine golfjes ontstaan) zichtbaar te maken. Bij het overgaan van de watergolfjes naar een ondieper gedeelte kan men wijzen op het "breken" naar de normaal toe. Hetzelfde is aan de kust te zien: de brekergolven komen steeds loodrecht op het strand af.

Staande golven

Neem een soepele veer, zet één uiteinde vast en breng het andere uiteinde in een op- en neergaande beweging, terwijl de veer onder een constante spanning gehouden wordt. Bij een bepaalde frequentie treedt een mooi patroon op, waarbij sommige punten van de veer stil staan. Dit patroon ontstaat doordat heengaande en terugkerende golven elkaar ondersteunen. Dit is alleen het geval als de golfbeweging precies in de lengte past. Voert men de frequentie van de op- en neergaande beweging langzaam op, dan ontstaat eerst chaos en daarna weer regelmaat met een vast punt extra. Hieraan kan aanschouwelijk gemaakt worden dat een regelmatig patroon alleen ontstaat, wanneer de lengte van de veer overeenkomt met een geheel aantal keren een golfberg, ofwel $n \times \frac{1}{2} \lambda$.

Ook is het mogelijk twee touwen diagonaal in het lokaal te spannen, de een dik de ander dun. Neem in elk der touwen een krachtmeter op en zet de beide touwen onder dezelfde spanning. Tik op beide touwen tegelijk en je kan zien dat in het dunne touw de golfsnelheid het grootst is. Span nu twee even dikke touwen met verschillende spanning en doe hetzelfde. Nu is de snelheid in het strakste touw het grootst. Met $v = \lambda f$ kan je nu snel duidelijk maken waarom de snaren in een vleugel dik/dun, kort/lang of strak/minder strak zijn.

Na bestudering van golfbewegingen in veren en vloeistof kan men overgaan op proeven met geluid. Men kan die introduceren met stemvorken, waarbij (net als bij alle slag-, blaas- en snaarinstrumenten) kleine afmetingen hoge tonen en grote afmetingen lage tonen voortbrengen.

Resonantie

a. Houd een stemvork boven een glazen buis. Door de buis in een bak met water te houden kan men de lengte van de luchtkolom variabel maken. Neemt men een stemvork van 512 Hz, dan treedt resonantie op wanneer de buis circa 14, 46, 78 en 110 cm uit het water steekt. Het verschil tussen de resonantieafstanden heeft een constante waarde:

14 (+32) 46 (+32) 78 (+32) 110

Deze waarde is bij alle stemvorken steeds het dubbele van de kleinste resonantieafstand; bij 512 Hz is die 16 cm. Doordat de buik van de luchttrilling iets boven het uiteinde van de buis ligt, is de buislengte boven water iets kleiner dan 16 cm. Het wateroppervlak fungeert hier als een vast uiteinde dat stilstaat, dus geen drukvariaties ondergaat. De open bovenkant van de buis is als een los uiteinde dat wel drukvariaties ondergaat en waar de stemvork de beweging in stand houdt. Net als bij de staande dwarsgolf past het golfpatroon alleen in de buis bij bepaalde lengtes. Dit treedt voor de eerste keer op wanneer de lengte van de luchtkolom ¼ λ is en vervolgens bij ¾ λ, 1¼ λ, 1¾ λ, enz. De drukvariaties in de lucht verplaatsen zich dus met een snelheid die berekend kan worden uit:

$$s = 16 \text{ cm} = 0{,}16 \text{ m}$$

$$t = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{f} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{512} = \frac{1}{2048} \text{ s}$$

$$v = \frac{s}{t} = 0{,}16 \times 2048 = 328 \text{ m/s}$$

b. Proef van Kundt. Gebruikt wordt een buis met kurkvijlsel en een hoge druk luidspreker, aangesloten op een frequentiegenerator. De resonantie is hoorbaar en zichtbaar. Door de buislengte te variëren kan men onderzoeken welke frequenties passen. Resonantie treedt weer op wanneer de halve golflengte een geheel aantal keren in de buis past. Aansluitend kan men de proeven van Quincke en Melde doen.

c. Twee hoge druk luidsprekers naast elkaar in de buitenlucht opgesteld (binnen ontstaan er teveel reflecties op de wanden) geven een hyperbolische verdeling van sterke en zwakke geluidssterkten. Vraag de leerlingen op 5 à 10 meter afstand van de luidsprekers in de dwarsrichting met een luisterend oor heen en weer te lopen tot waar ze zo min mogelijk geluid waarnemen.

De begrippen resonantie en eigenfrequentie kunnen nog nader aanschouwelijk gemaakt worden aan twee identieke stemvorken, een trillend spatbord, de beroemde Tacoma Narrows Bridge in de USA, een plank over een sloot, een ladder opklimmen terwijl de stapsnelheid met de eigenfrequentie overeenkomt, water in een bad in ritmische beweging brengen.

Resonantie is een verschijnsel dat zich ook zeer goed laat vergelijken met de menselijke ziel. Als iemand een enthousiast verhaal hoort vertellen over een landstreek, waar degene zelf ook pas een leuke vakantie heeft genoten, dan kan de ziel gaan meebewegen, gaan 'resoneren'. Als 'je eigen toon' op die manier wordt aangeslagen, kan je beleving extra versterkt worden.

2.6 De valbeweging

Aan dit thema is het opnieuw mogelijk de methode van onderzoek die bij de eenparige rechtlijnige beweging werd gevolgd te gebruiken (zie paragraaf 2.1). Men begint met gekleurde ballen die in mooie bogen geworpen worden. Men vraagt: welke bal vind jij het mooiste en welke boog spreekt je het meeste aan? Dan laat men verschillend gekleurde blaadjes vallen, zowel in verticale als in horizontale stand. Herinner ook aan de eigen valbeweging, bijvoorbeeld als een auto hard over de top van een heuvel rijdt en vraag naar de beleving daarbij. Steeds vraagt men wat wel en niet bevalt. Zo blijft men in het gebied van de sympathie en antipathie.

Een hele andere invalshoek vormt de vraag naar de samenhang van al deze bewegingen. Nu moet er weer worden waargenomen, niet om de proef te beleven, maar om je er denkend mee te kunnen verbinden. Men zal onbelangrijke factoren moeten uitsluiten om het vallen zo puur mogelijk tevoorschijn te laten komen: een proces van elimineren, van uitsparen, opdat het fenomeen vallen zich uit kan spreken. Vragen als: hoe variëren we een proefopstelling? welke proef gaat aan deze vooraf en welke sluit er bij aan? moeten gesteld worden, opdat het "vallen" in doorzichtige klaarheid als noodzakelijk gevolg van de proefopstelling denkend-waarnemend zichtbaar wordt. Een mogelijke ervaringsreeks krijgt men door achtereenvolgens de volgende voorwerpen te laten vallen en te kijken wat gebeurt: een stuk papier, gum, krijtje, blokje hout, balletjes van verschillend formaat, ballon met waterstofgas, dot watten, dot watten in een schaaltje, enz.

De ballon gaat omhoog, net als een blokje hout onder water. Gewichtsvermindering treedt bij alle voorwerpen in lucht op, maar is meestal procentueel klein, namelijk minder dan 2%. Een andere factor is dat de luchtverplaatsing bij het vallen remmend werkt op de val. Hierdoor krijgen grote, lichte dingen, zoals een dot watten, al snel een constante snelheid. Dit kan ook goed zichtbaar gemaakt worden door een knikker in een buis met water te laten vallen. Wil men de val als fenomeen op zichzelf onderzoeken, dan moet men compacte, zware voorwerpen nemen, zoals een steen, een stalen kogel, enz. De samenhang tussen de factoren gewichtsvermindering, wrijving en vallen is zodanig, dat alle voorwerpen in het begin steeds sneller vallen, vervolgens met een constante snelheid vallen totdat ze op de grond te belanden. Alleen duurt bij grote, lichte materialen de versnellende fase korter dan bij compacte, zware voorwerpen. De volgende proevenreeks biedt aanknopingspunten voor een voortzetting van de begripsvorming.

1. Laat verschillende compacte voorwerpen vallen van enige meters hoogte. Alle voorwerpen beschrijven dezelfde valbeweging. Het optillen en omhoog brengen van de voorwerpen is gewichtsafhankelijk, evenals het effect bij het neerkomen. Maar de valbeweging zelf is onafhankelijk van het gewicht. Dit wordt helemaal goed zichtbaar door verschillende voorwerpen (stukje lood, lucifer en papiertje) in een vacuüm gezogen valbuis te laten vallen; het vallende voorwerp is dan optimaal van de omgeving geïsoleerd.

2. De proef met het knopentouw van August laat zien dat bij grotere valhoogtes de eindsnelheid toeneemt. Dit betekent ook dat tijdens de val in dezelfde tijden steeds grotere afstanden worden afgelegd. Men kan dit heel mooi hoorbaar maken. Wanneer men de knoopafstanden in de verhoudingen 1 : 3 : 5 : 7 enz. neemt, dan hoort men tijdens het vallen de knopen met een regelmatige tik op de grond vallen. Een touw van circa 10 m lengte met een tiental zware moeren in plaats van knopen maakt dit nog scherper hoorbaar. Aangezien tijdens het vallen de tijdsverschillen constant zijn geeft de reeks 1 : 3 : 5 : 7 enz. de snelheidstoename weer. Hieruit volgt dat de snelheidstoename per tijdsverschil constant is, dus dat bij een valbeweging de snelheid evenredig met de tijd toeneemt.
   Men kan de leerlingen erop wijzen dat de valhoogten kwadratisch oplopen, volgens een rekenkundige reeks van de tweede orde, namelijk $h_1 = 1 \quad h_2 = 1+3=4 \quad h_3 = 1+3+5=9 \quad h_4 = 1+3+5+7=16$ enz.

3. De kogelglijbaan volgens Galileï. Men laat een stalen kogel rollen van een schuin opgesteld aluminium hoekprofiel, waarop lengtematen zijn aangebracht. Laat een aantal leerlingen met stopwatches de tijd meten en neem daarvàn het gemiddelde. Meet de tijden eerst om de halve meter:

s(cm)	t(s)
0	0
50	1,55
100	2,2
150	2,7
200	3,1

Hieruit is af te lezen dat bij een verdubbeling van de tijd de afstand verviervoudigt.

Meet vervolgens de tijden bij afstanden die kwadratisch toenemen:

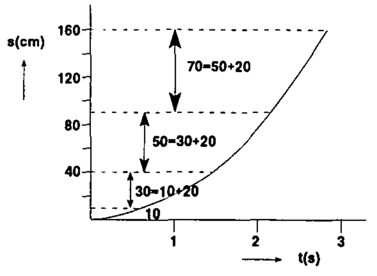
s(cm)	s(dm)	t(s)
0	0	0
10	1	0,7
40	4	1,4
90	9	2,1
160	16	2,8

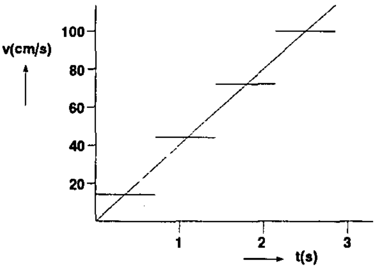
In dit geval nemen de tijden toe volgens een rekenkundige reeks.

Met deze tweede tabel kan als volgt gerekend worden:

s (cm)	Δs (cm)	t (s)	Δt (s)	$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ (cm/s)	Δv (cm/s)	$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (cm/s/s)
0		0				
	10		0,7	$\frac{10}{0,7} = 14,3$		
10		0,7			28,5	$\frac{28,5}{0,7} = 40,7$
	30		0,7	$\frac{30}{0,7} = 42,8$		
40		1,4			28,6	$\frac{28,6}{0,7} = 40,9$
	50		0,7	$\frac{50}{0,7} = 71,4$		
90		2,1			28,6	$\frac{28,6}{0,7} = 40,9$
	70		0,7	$\frac{70}{0,7} = 100$		
160		2,8				

De s,t en v,t grafieken zijn als volgt opgebouwd (op elk tijdstip is $v_t = 2 \times v_{gem}$):





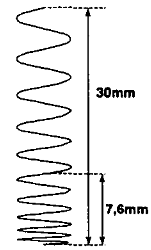
De volgende tussenstand is gelijk aan de vorige plus 20. Het getal 20 staat voor de constante toename van de tussenstanden.

De snelheidstoename is constant, in dit geval 28,6 cm/s.

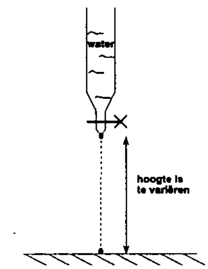
4. De tijdtikker. Deze proef is algemeen bekend. De gemeten waarden wijken soms beduidend af van de gravitatieversnelling, maar door de grootste gemeten afstandsverschillen te gebruiken krijgt men acceptabele uitkomsten. De eerste puntjes zijn vaak onduidelijk. Neem een aantal puntjes na elkaar en bereken de versnelling van de vrije val met behulp van de volgende tabel:

Δs (cm)	Δt (s)	v_{gem} (cm/s)	Δv (cm/s)	$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (cm/s/s)
1,8	1/50	90		$\frac{20}{1/50} = 1000$
			20	
2,2	1/50	110		
			20	
2,6	1/50	130		
			20	
3,0	1/50	150		
			20	
3,4	1/50	170		

5. De proef van Lippich: een beroete vallende glasplaat langs een trillende stemvork. Met een stemvork van 128 Hz hebben de eerste 5 golfjes een lengte van 7,6 mm. De eerste 10 golfjes zijn samen 3 cm lang. Men ziet hieruit dat de proef vrij nauwkeurig uitgevoerd moet worden. Neemt men net als bij de tijdtikker de latere golfjes die vrij goed te zien zijn, dan kan men op vergelijkbare wijze als proef 4 tot een acceptabel resultaat komen.



6. De druppelproef. Het kraantje van een met water gevulde buret wordt zo afgesteld, dat de volgende druppel loslaat, als de voorgaande op de ondergrond valt. De hoogte wordt gevarieerd. Meet de tijd voor 10 á 20 druppels:



h (m)	t(20 dr.) (s)	t(1 dr.) (s)	$v_{gem}=h/t$ (m/s)	$v_{eind}=2v_{gem}$ (m/s)
0,25	4,5	0,225	1,11	2,22
0,5	6,4	0,32	1,56	3,13
0,75	7,8	0,39	1,92	3,85
1,0	9,0	0,45	2,22	4,44
1,25	10,1	0,50	2,50	5,00

Op eenvoudige wijze kunnen nu de volgende berekeningen worden uitgevoerd. Een versnelde beweging van 0 m/s tot v_{eind} legt dezelfde weg af als een eenparige beweging waarvan de snelheid gelijk is aan $v_{gem} = ½ v_{eind}$. Hieruit volgt:

$$s = v_{gem}t = ½\ v_{eind}t$$

De snelheidsverandering in de tijd is de versnelling g:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = g \quad \text{of} \quad \Delta v = gt$$

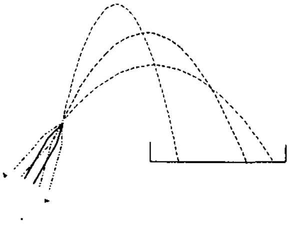
Een combinatie van beide geeft:

$$s = ½(g \times t) \times t = ½gt^2$$

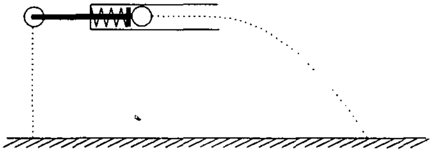
De snelheidstoename bij de eerste meting in 0,225 s bedraagt 2,22 m/s.
De snelheidstoename in de eerste hele seconde is:
$g = \Delta v / \Delta t = 2{,}22/0{,}225 = 9{,}8$ m/s.
De valversnelling of gravitatieversnelling is dus = 9,8 m/s/s.

7. Knikkers van een hoog gebouw laten vallen en de tijd en de hoogte opmeten en daaruit de valversnelling berekenen.

8. De kogelbaan.
   a. Gooi een krijtje langs het bord en teken ongeveer de baan.
   b. Neem een slang met een pipet aan het uiteinde. Hiermee kan prachtig vallend water gedemonstreerd worden.



   c. Neem een lat met een horizontaal geplaatste spuitpipet. Aan de lat hangen op gelijke afstanden met moeren verzwaarde touwtjes. De lengte van deze touwtjes neemt toe volgens de kwadratische rij. Stel de waterstraal zo in, dat de vorm van de waterboog langs de moeren beschreven wordt.
   d. Demonstreer de kogelschieter, waarbij een kogel horizontaal wordt weggeschoten en tegelijkertijd een tweede kogel verticaal valt. De gelijktijdige tik op de grond geeft aan dat beide kogels even snel vallen, ook al heeft de ene tevens een horizontale beweging. De constante horizontale beweging en de valbeweging zijn onafhankelijk van elkaar. Kogelbanen zijn parabolen. Bij deze beweging is de horizontale snelheid evenredig met de tijd en de verticale evenredig met de tijd in het kwadraat.



$$s_{hor} = v_{hor} t \qquad s_{vert} = \tfrac{1}{2} g t^2$$

Na deze reeks van proeven kan men de gevormde begrippen en afgeleide verbanden verder verdichten door het maken van opgaven.

2.7 Achtergronden en ideeënvorming

2.7.1 De kennisweg

Inzicht in verschijnselen ontstaat wanneer deze worden doorzien in hun samenhang met andere verschijnselen. In het proces om tot inzicht te komen kunnen vier fasen onderscheiden worden:*

1. De eerste stap op weg naar inzicht is dat men in staat is de verschillende facetten van een verschijnsel in ruimte en tijd te onderscheiden. Men stelt bijvoorbeeld vast dat een slinger in het hoogste punt van de ruimtelijke beweging geen snelheid heeft, terwijl de grootste snelheid wordt bereikt in het laagste punt.
2. Bij de tweede stap wordt het proces dat zich in het verschijnsel afspeelt door de mens verinnerlijkt, zodat een exacte voorstelling van dit proces uit de herinnering kan worden opgebouwd. Men is in staat een proefopstelling te maken en daaruit eenvoudige technische toepassingen te ontwikkelen. Een voorbeeld hiervan is de uitvinding van het slingeruurwerk.
3. Op het derde niveau overstijgt men het enkele fenomeen, doordat men het verschijnsel in samenhang met andere verschijnselen ziet. Men is in staat om zelf nieuwe proeven te bedenken of de bestaande proefopstelling te veranderen, opdat het verschijnsel beter tot zijn recht komt. Ook is men in staat overeenkomsten te zien tussen het betreffende fenomeen en verschijnselen uit andere wetenschapsgebieden. Als men bijvoorbeeld de grootheden slingerlengte en slingertijd in een kwadratisch of tweedemachtswortelverband zet, dan vergelijkt men de wetmatigheden van het slingerproces met begrippen die in de wiskunde zijn ontwikkeld.
4. In de vierde fase is de mens in staat het fenomeen in de eigen ziel te verbinden met scheppende, vormende krachten die én in de eigen ziel én in het fenomeen werkzaam zijn. Het verband tussen verschijnsel en omgeving wordt dan als het ware bezield. Een goed uitgangspunt vormt de vergelijking van het fenomeen met verwante verschijnselen in de ziel. Zo kan de slingerbeweging niet alleen herkend worden in de ademhaling van de mens, maar ook in de gedurige pendelbeweging waarin de ziel verkeert. Net als bij het inademen de lucht neemt de mens de zintuigindrukken in zich op, de wereld wordt ook in innerlijk opzicht ingeademd. En zoals de lucht weer wordt uitgeademd, ademt de mens ook de

* Vergelijk ook Cusanus (paragraaf 5.5.2) en de beschrijving van de fenomenologische methode in deel I, hoofdstuk 3.3.

indrukken weer uit, bevrijdt hij zich daar weer van. De fase van inademen en opnemen van indrukken gaat gepaard met een zeker gevoel van spanning: de mens moet actief met het ingeademde in wisselwerking treden. Bij de uitademing treedt een zekere ontspanning op: het moment van volledige uitademing wordt ervaren als een toestand van bevrijding, als een openstellen voor nieuwe mogelijkheden. Dit laat zich vergelijken met de slingerbeweging die zich voltrekt tussen de polariteiten beweging en rust, waarbij de toestand van de grootste beweging overeenkomt met het bereiken van het diepste punt en die van rust met de grootste hoogte en wijdte, tussen een bewogen wórden en kunnen gáán bewegen, tussen actie en potentie.
Verbindt men op een dergelijke wijze zielekrachten met wereldkrachten, dan scherpt men de blik voor de laatste. Men zou kunnen zeggen dat de blik bezield wordt voor het waarnemen van de wezenlijke samenhang tussen fenomeen en wereld.

Voor niveau drie wordt de term verstandsdenken gebruikt, voor niveau vier de woorden imaginatie of intuïtie. Dit vierde niveau is voor de huidige mens nog moeilijk bereikbaar en nog volop in ontwikkeling. Als die ontwikkeling doorzet zal het in de toekomst net zo vanzelfsprekend worden en tot de normale verworvenheden gaan behoren als het verstandsdenken in de afgelopen 700 jaar.

Denken kunnen we omschrijven als het zien van samenhangen in de wereld van de waarneming. De waarneming komt door de zintuigen tot de mens, terwijl de gedachten die de samenhang openbaren in het eigen innerlijk gevonden worden. Langs puur innerlijke weg kan ook de wiskunde ontwikkeld worden. De verbanden in de wiskunde kan men vergelijken met wetmatigheden in een verschijnsel. Bijvoorbeeld: in een rechthoekige driehoek verhouden de rechthoekszijden zich als 3 : 1

$a = 3, 6, 9, 12$ etc.

$b = 1, 2, 3, 4$ etc.

Deze getallenreeksen staan in een lineair verband tot elkaar. Zoeken we naar het wetmatige verband tussen afstand en tijd bij een constante snelheid, dan kunnen we dit vergelijken met een lineair verband. De snelheid v is de constante verhouding tussen de afstand s en de tijd t.

In deze periode is het belangrijk aan de leerlingen te laten zien dat wat de mens wiskundig - dus helemaal innerlijk - denkend kan ontwikkelen, dezelfde oorsprong heeft als de wetmatigheden die in de verschijningswereld werken, die denkènd aan de waarneming ontwikkeld kunnen worden. Gedachten zijn beelden van de scheppende, ordenende wereldkrachten, die impulserend en structurerend in de wereld werken. Wiskundig denken we deze krachten direct. Natuurwetenschappelijk kunnen we ze denkend aan de waarneming van de verschijnselen ontdekken.

2.7.2 Beweging en de cyclus van het kenproces

Het sterkst in de pedagogie werkt datgene wat de leerkracht werkelijk is, wat hij ervarend en belevend denkt. Rudolf Steiner wijst in dit opzicht steeds weer op de noodzaak het materialisme te overwinnen, onder andere in de laatste voordracht van *Algemene menskunde**. Het maakt een groot verschil of de leerkracht verkondigt "meten is weten", of dat hij zegt "meten is vergeten", namelijk vergeten wat de natuur werkelijk is. We moeten meten, maar na deze reductie moet een inductie volgen om ons in de geest met de stof te kunnen verbinden.

Voordat we tot het meten overgaan zullen we eerst aansluiting moeten zoeken met de gewaarwordingen van de omgeving en de eigen belevingen van de leerlingen. Het thema beweging is zo'n gebied van gewaarwordingen dat dicht bij de mens staat. Komen we te spreken over een hardloopwedstrijd, dan kan iedereen daar gelijk in meekomen. Op het moment dat men de overgang maakt naar het meten aan de beweging, moet men de leerlingen erop wijzen, dat we ons door te meten buiten het proces houden en ons alleen fixeren op het begin- en eindpunt van de beweging. Mijn meevoelende interesse in de hardloopster en mijn metingen aan afstand en tijd staan polair tegenover elkaar. Interesse betekent er tussen zitten, deelnemen aan het proces, en speelt zich af in het nu. Meten houdt in er buiten staan en alleen naar de uiteinden van het proces kijken. Zo is ook een tooninterval een proces, waarvan de tonen de uiteinden zijn. Eerst doordat de verhouding van afstand en tijd mij iets zegt en hierdoor het begrip snelheid kwantitatief wordt vastgelegd, ontstaat weer een verbinding tussen de beleving en de voorstelling. Het denken bevrijdt de geïsoleerde voorstellingen via het begrip en maakt een reële verbinding met de direct beleefbare wereld mogelijk.

het intuïtieve denken

↑

schijnbare tegenstelling tussen denken en waarnemen;
door de mens worden beide gescheiden, maar ook weer verbonden

↓

de belevingswereld

* Rudolf Steiner: *Algemene menskunde als basis van de pedagogie.*

Beweging is zo met de mens verbonden, dat hij er niet buiten kan gaan staan. Alleen de kwaliteiten afstand en tijd kunnen we tegenover ons plaatsen. Die moet de mens eerst ervaren en maatloos waarnemen, alvorens hij een maat-eenheid kan vastleggen. Hiervan is te leren dat de menselijke ziel niet zelf tijd en ruimte is, maar zich in tijd en ruimte manifesteert. Snelheid echter kan niet direct gemeten worden. Maar de menselijke ziel is wel inherent verbonden met snelheid en versnelling. Daarom kunnen deze kwaliteiten alleen indirect vastgelegd worden.

Geen enkele maat-eenheid is in de natuur te vinden, elke eenheid moet door een afspraak tussen mensen worden vastgelegd. Dit kan als volgt in beeld worden gebracht:

de **kwaliteit** afstand is in de natuur ervaarbaar	de **eenheid** van afstand is een afspraak	de **naam** van de eenheid is een geïncarneerd begrip
s	**l**	**meter**

Zowel voor het meten, wegen als tellen geldt dat de mens op de hier aangegeven wijze objectief tegenover de wereld kan gaan staan, zodat een eigen binnenwereld tegenover de natuur wordt gecreëerd. Kleine kinderen beleven dit intens wanneer ze leren tellen. Op de leeftijd van de 10e klasser is het probleem echter, dat de leerlingen ervaren dat het meten belevingsloos is, evenals het begrip dat ontwikkeld wordt. Dat het begrip de belevingswereld doorlicht en een nieuwe verbinding met de wereld aangaat zou daarom expliciet naar voren moeten komen door de wijze waarop men de stof behandelt. Te gauw blijft men echter in het oefenen van opgaven steken, terwijl de menskundige achtergrond ondoorzichtig blijft voor leraar en leerling. Want denken is een weg van de eenzaamheid. Maar al denkende kan een brug worden geslagen van het eigen innerlijk naar het wezenlijke van natuur en kosmos. Wanneer de leraar de waarde van het denken kent, dan hoeft hij niet bang te zijn de abstractie in te gaan, omdat door de abstractie heen de kern van de wereld in het eigen innerlijk gevonden wordt.

2.7.3 Snelheid en versnelling

In onze fantasie, in onze voorstellingen en ons gemoed, is een en al innerlijke beweging. Men zou kunnen zeggen dat innerlijke beweging het draagvlak van de ziel is. Zoals in de natuur de stoffelijkheid - en binnen de stoffelijkheid vooral de vaste stof - het draagvlak vormt voor de natuurlijke processen, zo vormt het bewegingselement het draagvlak voor de zieleprocessen. Anders gezegd, beweging is de substantie van de ziel. Vandaar dat voor de beleving uiterlijke beweging heel toegankelijk is.

Het vastleggen van een beweging doen we door uit de beweging te gaan, namelijk door de fixatie van begin- en eindpunten. Zoals we hiervoor hebben gezien is het meten van afstand en tijd een afstandelijke activiteit. Hieruit vinden we het begrip gemiddelde snelheid. Vervolgens kunnen we een stap verder doen, dan ontstaan nieuwe begrippen. Neemt bijvoorbeeld de snelheid evenredig met de tijd toe, dan concluderen we: $\Delta v/\Delta t$ = constant. Deze constante noemen we de versnelling a.

Deze opbouw is in overeenstemming met de menskunde en verschilt van de gangbare, waar eerst afstand en tijd gedefinieerd worden, terwijl snelheid en versnelling daar als begrippen aan toe worden gevoegd:

- gangbaar: definitie afstand en tijd → begrippen snelheid en versnelling;
- vanuit de menskunde: beleving → beweging
meting → afstand en tijd
begrip → gemiddelde snelheid, versnelling.

De relatie tussen de *kwantiteiten* afstand en tijd is een maat voor de *kwaliteit* snelheid, die daarmee als (gemiddelde) waarde kan worden vastgelegd:

$$s \propto t$$
$$s = \text{constante} \times t$$
$$\text{constante} = v_{gem} = s/t$$

Het begrip versnelling ontstaat door naar de snelheidsverandering ten opzichte van de tijdsverandering te kijken:

$$\Delta v \propto \Delta t$$
$$\Delta v = \text{constante} \times \Delta t$$
$$\text{constante} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a \text{ (versnelling)}$$

We schrijven de versnelling a achter de formule om te laten zien dat het *begrip* versnelling *gevonden* wordt uit het quotiënt, terwijl we de gemiddelde snelheid v_{gem} vóór de formule s/t schreven om aan te geven dat de beleefbare kwaliteit snelheid wordt *vastgelegd* door de abstracte grootheden afstand s en tijd t.

2.7.4 Beweging als autonome werkelijkheid

Sinds enkele eeuwen treedt in het bewustzijn van de westerse mensheid één hechte en reële werkelijkheid steeds meer op de voorgrond: de werkelijkheid van de stof, van de materie. De materie vormt het fundament waar we op kunnen bouwen, wat ten grondslag ligt aan alle natuurverschijnselen, waar de wereld uit voortkomt. Dit paradigma van het materialisme is universeel, het heeft het gehele denken doordrongen, zodat denken in niet-materiële grootheden nauwelijks als realiteit kan worden ervaren. De mens is er ook in volle zin aardeburger door geworden.

Bewegingsverschijnselen zijn in dit denken niet alleen aan (bewegende) dingen gebonden, ze worden bovendien beschouwd als teweeggebracht door aan materie verbonden krachten. Dat iets beweegt moet een oorzaak hebben, en die oorzaak, zij het een botsing van deeltjes, zij het de werking van een gravitatie- of ander veld, ligt uiteindelijk in iets materieels besloten. Niet altijd is dit de gangbare denkwijze geweest. Zo verstonden bijvoorbeeld de Aristotelici onder beweging elke overgang van "potentie" naar "act", van mogelijkheid naar realisatie. Zij onderscheidden daarbij de volgende veranderingen, "bewegingen":

substantiële verandering:
- ontstaan (generatio)
- vergaan (corruptio)

accidentele verandering:
- kwalitatief veranderen (alteratio), bijvoorbeeld verdamping
- kwantitatief veranderen (augmentatio of diminutio), bijvoorbeeld slijtage
- veranderen van plaats (motus localis).

Het bewegingsbegrip was hier dus veel ruimer en van veel fundamenteler karakter.

De tijd lijkt gekomen dat het denken uit zijn nauwe materialistische ketenen wordt bevrijd De mens is aan het op zichzelf gesteld zijn ontwaakt en toe aan een volgende ontwikkelingsstap. Daarbij kan hij, steunend op het zekere fundament dat zijn geschoolde denkvermogen hem biedt, opnieuw de blik richten op de wereld, inclusief zichzelf. Hij kan tot de erkenning komen dat hij als mens méér is dan een functionerend lichaam met energetische afscheidingen als gevoel, gedachten, intenties, moraliteit. Hij hoeft zijn zelfstandigheid, zijn ik-beleven niet te verloochenen door het primaat van de materie op te geven en aan niet-materiële factoren van het leven een eigen bestaansrecht toe te kennen.

Dat geldt ook voor de natuurbeschouwing. De noodzaak om alle natuurverschijnselen aan de materie te binden kan losgelaten worden, zodat ze met een zekere onbevangenheid opnieuw kunnen worden waargenomen. Dan blijkt dat bewegingsverschijnselen als de vrije val en de planetenbewegingen in hun wetmatigheden volledig te beschrijven zijn door alleen de beweging in ogenschouw te nemen. De begrippen kracht, materie, massa, volume, kleur, enz. spelen hierbij geen noodzakelijke rol. De vrije val is een gewichtsloze val, waarbij alle voorwerpen dezelfde versnelling krijgen zolang ze gewichtsloos blijven, dat wil zeggen niet in hun val worden afgeremd; hij is als puur bewegingsfenomeen te beschrijven.

Zo kijkend komt men ertoe het gravitatieveld van de aarde als een autonome werkelijkheid te zien, die weliswaar in samenhang staat met gewichtfenomenen, massa, traagheid, e.d., maar daarmee nog geen afgeleide daarvan is. Evenzo is het verschijnsel van de planetenbewegingen als een autonome realiteit te zien, beschreven in de wetten van Kepler, geen afgeleid maar een primair fenomeen, waarin een bewegingsrealiteit, samenhangend met andere realiteiten in de natuur, zich uitspreekt. Door in de natuurkunde de zelfstandigheid van de beweging ten opzichte van de materie te herkennen, kan de weg gebaand worden om ook in het menselijke de zelfstandigheid van de ziel ten opzichte van het lichaam realiteitswaarde toe te kennen.

2.7.5 Resonantie

Bij de beschouwing van de proeven met geluid is het van wezenlijk belang expliciet onderscheid te maken tussen de ritmisch bewegende lucht en de beleefbare toon. Deze uiterlijk meetbare en innerlijk beleefbare werkelijkheden hangen nauw met elkaar samen. Zij vormen in hun afgestemd zijn op elkaar een eenheid. Dit is zo sterk, dat de gangbare natuurkunde de beleefbare toon over het hoofd ziet en als een subjectieve toevoeging afdoet. Toonbeleving en beweging vormen twee sferen of krachtvelden, die met elkaar samenhangen en ook in de natuur buiten ons met elkaar verbonden zijn, de eerste van tastbare, ponderabele, de tweede van imponderabele aard. De beleving bijvoorbeeld dat men door te spreken of te zingen zo groot wordt als de hele ruimte, dat men de ruimte innerlijk vult, moet serieus genomen worden als een feitelijke waarneming. Trilling en klank horen bij elkaar als lichaam en ziel.

Resonantie in uiterlijke zin wordt hoorbaar bij twee identieke stemvorken. Resonantie in figuurlijke zin doet zich voor in ieder goed gesprek. Beide soorten waarnemingen moeten als feitelijk genomen worden. De huidige zintuigleer maakt een holistische visie bij voorbaat onmogelijk, daar alleen de meetbare trilling als reëel in de ruimte werkzaam genomen wordt en de beleving als een toevoeging die slechts in de mens aanwezig is.

Naast de toon als innerlijke kwaliteit en de beweging als uiterlijke tastwaarneming treedt er ook een adiabatisch warmteproces op, dat zich in samenhang met de beweging door de ruimte heen verplaatst. De ritmische bewegingen in de lucht brengen continu compressie en expansie van lucht tot stand, waardoor respectievelijk verhitting en afkoeling ontstaat. Zoals bij de 9e klas werd besproken (zie deel I, hoofdstuk 4.6) is warmte het element dat op de grens tussen het ruimtelijke en het onruimtelijke verschijnt. Bij trilling en klank vormt de warmte de bemiddelaar tussen de uiterlijke, ruimtelijke beweging en de innerlijke, onruimtelijke beleving. Dit laat zich vergelijken met een mens die zin krijgt iets te ondernemen en daarvoor innerlijk en uiterlijk warm loopt.

klank			motivatie	
─┼──→	warmte		─┼──→	warmte
beweging			lichaam	

Klank heeft geen snelheid, alleen de warmtestroom, de bewegende lucht en de trillende snaar hebben snelheid. De toon openbaart zich overal daar in de ruimte waar de voorwaarden van een dynamische beweging vervuld zijn. De toon is onruimtelijk en raakt voor één moment de ruimte als het ware aan. Spreken over geluidssnelheid heeft het gevaar in zich om het wezenlijke van het geluid onbesproken te laten. Men kan daarom beter spreken van de uitbreidingssnelheid van de bewegingen in de lucht.

2.7.6 De eenheid van afstand

In het verleden waren er streek- en landgebonden afspraken over de eenheden van lengte en gewicht. Eenheden van lengte waren bijvoorbeeld de duim, el, palm, voet en de vadem. In Nederland gold voor "1 uur gaans" een afstand van 5,556 km. In Engeland werd de inch vastgelegd als de lengte van drie naast elkaar gelegde rijpe gerstekorrels uit het midden van een aar. De "voet" werd vastgelegd als de gemiddelde voetlengte van 12 mannen die zondags na elkaar uit de kerk kwamen. De "palm" was één handbreedte zonder de duim en was vier duimen groot.

In 1791 werd door Lodewijk XVI bepaald dat vijf geleerden van de Académie des Sciences een algemene lengtemaat zouden vaststellen die de "meter" genoemd zou worden. De initiatiefnemer van dit plan was C. de Talleyrand-Perigord (1754-1838). Deze ex-bisschop en diplomaat overleefde alle franse regimes en was er vast van overtuigd dat je met een bij de situatie passende maat moet meten. Nog in datzelfde jaar werd voorgesteld om 1/40-miljoenste deel van de aardomtrek, gemeten over de polen en Parijs, als de meter vast te leggen. Nu was het mogelijk 9 booggraden van de aardomtrek (dat is 1/40 deel ervan, dus per definitie 1.000.000 m) op te meten, namelijk de afstand van Duinkerken tot ongeveer Barcelona. Twee landmeters voerden deze opdracht nauwgezet uit met behulp van driehoeksmeting. In zes jaar tijd voltooiden zij hun werk. Als eenheid gebruikten zij de toen gangbare "toise". Zij kwamen op 513.074 toise en de meter was dus 0,513074 toise.

In 1799 werd de meter officieel ingevoerd door middel van een platina-eindmaat (staaf van precies de lengte van een meter). Dit was de standaardmeter die heel zorgvuldig in het Institut des Poids et des Mesures te Sèvres bij Parijs werd bewaard. Afgeleide maten als de vierkante en kubieke meter en de kilogram als maat voor het gewicht van 1 liter water van 4 °C werden algemeen in gebruik genomen. In 1872 werd de lat vervangen door een stevige platina-iridium staaf met een kruisvormige doorsnede, waarop twee krasjes op een afstand van precies één meter werden gezet. Hiervoor werd de grootste hoeveelheid platina ooit bijeen gebracht gesmolten. Echter, enige jaren later werd ontdekt dat de twee landmeters naast mogelijke meetfouten duidelijk aanwijsbare rekenfouten hadden gemaakt. Een conferentie werd in 1875 belegd en daar werd besloten dat de afstand tussen de krasjes op de platina staaf de meter was en verder niets. Na de wereldoorlogen, toen er reeds vele kopieën van de platinameter waren gemaakt, heeft men in 1960 tijdens de 11e Meet- en weegconferentie de meter nogmaals veilig gesteld. Vastgelegd werd dat 1650763,73 maal de golflengte van de oranje-rode spectraallijn van het element krypton overeenkomt met 1 meter. Hiermee mag duidelijk zijn geworden, dat de eenheid van lengte een vrij te kiezen afstand is die niet in de natuur is verankerd.