

HOOFD IN DE WOLKEN, VOETEN OP DE VLOER

PRAKTIJKGERICHT ONDERZOEK
NAAR WISKUNDIG DENKEN IN
ICT-RIJK REKEN-WISKUNDEONDERWIJS

OPENBARE LES
11 OKTOBER 2018
PROF. DR. PAUL DRIJVERS

KENNISCENTRUM LEREN
EN INNOVEREN
LECTORAAT DIDACTIEK VAN
WISKUNDE EN REKENEN



HOGESCHOOL
UTRECHT

HOOFD IN DE WOLKEN, VOETEN OP DE VLOER

PRAKTIJKGERICHT ONDERZOEK
NAAR WISKUNDIG DENKEN IN
ICT-RIJK REKEN-WISKUNDEONDERWIJS

OPENBARE LES
11 OKTOBER 2018
PROF. DR. PAUL DRIJVERS

KENNISCENTRUM
LEREN EN INNOVEREN
LECTORAAT DIDACTIEK VAN
WISKUNDE EN REKENEN

1. WAAROM DIT LECTORAAT? 5

2. PRAKTIJKGERICHT WETENSCHAPPELIJK ONDERZOEK 9

Venster I: Open Online Bètadidactiek 13

3. WISKUNDIG DENKEN 17

Wat verstaan we onder wiskundig denken? 17

Venster II TORPEDO 23

Denken en doen 24

Venster III Goniometrische bewegingen 26

4. ICT IN WISKUNDEONDERWIJS 29

Motief en middel 29

Venster IV De rit naar Hamburg 32

Digitaal toetsen van wiskundig denken 34

Venster V PIAAC 36

5. AGENDA VAN HET LECTORAAT 39

Drie onderzoekslijnen 39

Tableau de la troupe 41

Dankwoord 45

Referenties 46

Kenniscentrum Leren en Innoveren 50

Curriculum vitae 52

Colofon 55

“ONZE SAMENLEVING
IS DOORDRENKT VAN
**GRAFISCHE EN
NUMERIEKE INFORMATIE
MET WISKUNDIGE
KENMERKEN.**”

1 / WAAROM DIT LECTORAAT?

Laat ik aan het begin van deze openbare les stilstaan bij de vraag waarom Hogeschool Utrecht een lectoraat Didactiek van Wiskunde en Rekenen heeft ingesteld. Het antwoord kent een aantal stappen.

Om te beginnen is rekenen-wiskunde een belangrijk vakgebied, niet alleen omdat de Nederlandse kenniseconomie vraagt om hoogopgeleide professionals in het gebied van bètavakken en techniek, maar vooral met het oog op de zelfredzaamheid van iedereen die deel uitmaakt van onze samenleving. Een samenleving die immers doordrenkt is van grafische en numerieke informatie met wiskundige kenmerken die je als beroepsbeoefenaar en als burger moet kunnen beoordelen en tot op zekere hoogte begrijpen. Rekenen en wiskunde hebben dus een belangrijke praktische waarde in de voorbereiding op de beroepspraktijk en de ontwikkeling van burgerschap. Daarnaast heeft het reken-wiskundeonderwijs ook een belangrijke vormende waarde, die goed aansluit bij het 'bildungsideaal' dat Hogeschool Utrecht hoog in het vaandel heeft.

Het reken-wiskundeonderwijs in Nederland is weliswaar goed te noemen, maar we kunnen constateren dat de kwaliteit ervan tegelijkertijd onder druk staat. Dit blijkt onder andere uit de teruglopende resultaten bij internationale vergelijkende toetsen zoals PISA en TIMSS (zie bijvoorbeeld Limpens & Stolwijk, 2017). Al zijn dergelijke vergelijkende toetsen slechts een beperkte barometer voor ons onderwijs, toch dienen ze serieus genomen te worden (Drijvers, 2016). Er is werk aan de winkel!

Voor welke uitdagingen staan we dan? In Nederland vindt op dit moment een curriculumvernieuwing plaats onder de noemer Curriculum.nu. Vanuit mijn lectoraat en mijn leerstoel hebben we gereageerd op het tweede tussenproduct van het ontwikkelteam

rekenen-wiskunde van Curriculum.nu¹. In deze reactie worden de volgende hoofdpunten voor nadere ontwikkeling genoemd:

1. *Doorlopende leerlijnen* van basisonderwijs naar voortgezet onderwijs (zowel algemeen vormend als beroepsonderwijs) naar vervolgonderwijs (zowel mbo als hoger onderwijs). De overgangen in ons onderwijssysteem zijn het meest kwetsbaar voor breuken in een doorgaande ontwikkeling. Daar liggen kansen voor verbetering.
2. De *balans* tussen het functionele en het formele in de reken-wiskunde curricula, en tussen differentiatie en (te vroege?) determinatie. In vergelijkend internationaal onderzoek doet Nederland het goed. Dit komt onder meer door het functionele en toegepaste karakter van ons reken-wiskundeonderwijs. De stof wordt in het algemeen aangeboden op een manier waaruit blijkt hoe rekenen en wiskunde functioneren in samenleving en beroep. Toch staan de resultaten onder druk en met name het niveau van de beter presterende leerlingen is aanleiding tot zorg. Dit roept een aantal vragen op. Hoe zorgen we voor adequaat reken-wiskundeonderwijs voor leerlingen van alle niveaus? En hoe voorkomen we tegelijkertijd dat we te snel en te definitief selecteren en determineren? Hoe kunnen we binnen heterogene groepen differentiëren? Hoe kunnen we het plezier in wiskunde en de persoonlijke vormende waarde ervan een plaats geven in de curricula?
3. *Actualiteit* van de reken-wiskunde curricula. De inhoud en aanpak van het reken-wiskunde onderwijs zijn aan actualisering toe. Het gaat dan qua inhoud met name om onderwerpen als statistiek, computational thinking en programmeren. Onderdeel van een nieuwe aanpak is de inzet van ICT-middelen en aandacht voor wiskundig denken.

¹ Zie https://curriculum.nu/wp-content/uploads/2018/06/Tweede-tussenproduct-ontwikkelteam-RW-Curriculum.nu_.pdf

4. *Samenhang* van reken-wiskundeonderwijs met andere vakken. Hoe kunnen we een betere samenhang met onderwijs in andere vakken bewerkstelligen? Het gaat hierbij niet alleen om de exacte vakken, al kunnen die wel een prioriteit zijn.

Aspecten die in het tussenproduct van Curriculum.nu niet aan bod komen, maar die minstens zo belangrijk zijn voor de kwaliteit van het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs zijn de schoolboeken en de toetsing. Het belangrijkste aspect is echter zonder twijfel de kwaliteit en kwantiteit van leerkrachten en docenten. Hogeschool Utrecht is, met haar lerarenopleidingen basisonderwijs en voortgezet onderwijs, een belangrijke speler om juist hieraan te werken. De vormgeving van de lerarenopleidingen rekenen-wiskunde en van het wiskundeonderwijs in de andere instituten dient gebaseerd te zijn op evidentie vanuit vakdidactisch onderzoek. Om daarin te voorzien is het lectoraat Didactiek van wiskunde en rekenen ingesteld. De missie van het lectoraat is dan ook om door middel van praktijkgericht onderzoek bij te dragen aan de kwaliteit van de initiële lerarenopleidingen voor het primair en voortgezet onderwijs en het beroepsonderwijs op het gebied van wiskunde en rekenen, met specifieke aandacht voor de inzet van digitale middelen hierbij. Daarnaast heeft ook de professionalisering van leraren de aandacht, evenals het onderwijs in de wiskunde binnen verschillende opleidingen van Hogeschool Utrecht zelf.

Waarom zou je er, ten slotte, als hoogleraar bij de Universiteit Utrecht voor kiezen om tevens als lector leiding te geven aan een dergelijk lectoraat? Daar zijn verschillende motieven voor, maar de voornaamste reden is het belang dat ik hecht aan het contact tussen wetenschap en praktijk, tussen denken en doen, tussen de wolven en de grond. Het bouwen van bruggen tussen deze werelden, die soms wat te ver van elkaar verwijderd zijn, beschouw ik als een uitdaging. Hierna ga ik dan ook de relatie tussen wetenschappelijk en praktijkgericht onderzoek nader onder de loep nemen.

**“DE UITDAGING IS OM
DE GRENZEN TUSSEN
PRAKTIJKGERICHT EN
WETENSCHAPPELIJK
ONDERZOEK TE DOEN
VERVAGEN.”**

2 / PRAKTIJKGERICHT WETENSCHAPPELIJK ONDERZOEK

Hogeschool Utrecht en het Kenniscentrum Leren en Innoveren daarbinnen, investeren nadrukkelijk in wat zij praktijkgericht onderzoek noemen. De verhouding tussen praktijkgericht onderzoek en wetenschappelijk onderzoek, de term die vooral bij universiteiten wordt gehanteerd, is echter niet altijd duidelijk. Soms lijkt er zelfs enige spanning te bestaan tussen praktijkgericht onderzoek en wetenschappelijk onderzoek. Als lector die ook hoogleraar is bij een universiteit ga je daar dan over nadenken. Wat verstaan we onder wetenschappelijk onderzoek en wat onder praktijkgericht onderzoek? Hoe verhouden deze twee zich tot elkaar, en wat betekent dit voor mijn lectoraat? Voor ik specifiek op de didactiek van wiskunde en rekenen inga, wil ik eerst bij deze algemene kwestie stilstaan.

Wat verstaan we onder wetenschappelijk onderzoek? In de European Code of Conduct for Research Integrity wordt wetenschappelijk onderzoek omschreven als “the quest for knowledge obtained through systematic study and thinking, observation and experimentation” (All European Academies, 2017, p. 3). Volgens deze definitie, die is overgenomen in de gedragscode voor wetenschappelijke integriteit van de Vereniging van Samenwerkende Nederlandse Universiteiten (2018), gaat het bij wetenschappelijk onderzoek dus om een systematische zoektocht naar kennis; kennis die we verkrijgen door denken, observeren en experimenteren. Op deze manier leidt het tot generieke kennis en theorieontwikkeling. Hoewel er binnen deze algemene omschrijving nog veel interpretaties, onderzoeksopvattingen en -paradigma’s mogelijk zijn, vormt ze toch een richtinggevend vertrekpunt.

En wat is praktijkgericht onderzoek? Collega-lector Daan Andriessen definieert dit in zijn openbare les als volgt: “Praktijkgericht onderzoek is onderzoek waarvan de vraagstelling wordt ingegeven door de beroepspraktijk en waarvan de opgedane kennis direct bij kan

dragen aan die beroepspraktijk” (Andriessen, 2014, p. 14). Er kan, aldus Andriessen, een spanning bestaan tussen de praktische relevantie en de methodische grondigheid, waaraan praktijkgericht onderzoek tevens moet voldoen. In lijn met Andriessen sluiten De Lange, Schuman en Montesano Montessori (2016) zich aan bij de stelling van de HBO-raad dat praktijkgericht onderzoek geworteld is in de beroepspraktijk en bijdraagt aan de verbetering en de innovatie daarvan. In hun boek *Praktijkgericht onderzoeken in het onderwijs* voegen Van Swet en Munneke (2017) daaraan toe dat onderzoeken meer is dan opzoeken of uitzoeken, omdat het gaat om onderliggende mechanismen van de fenomenen die je wilt onderzoeken. Daarmee komt vanzelf het criterium van diepgang bovendien: het gaat bij onderzoek niet alleen om beschrijven, maar ook om verklaren en begrijpen. Zo beschouwd streeft praktijkgericht onderzoek naar mijn idee dus net zoals wetenschappelijk onderzoek naar praktijkoverstijgende, generieke kennis. Dat is in lijn met Van Aken en Andriessen (2011), die praktijkgericht onderzoek zien als een vorm van wetenschappelijk onderzoek, waarbij ik overigens verwacht dat elke wetenschappelijk onderzoeker uiteindelijk aan een betere wereld hoopt bij te dragen. Hun definitie is als volgt: “Wetenschappelijk onderzoek met als doel kennis te ontwikkelen om daarmee een betere wereld te realiseren wordt wel [...] praktijkgericht onderzoek genoemd” (Van Aken & Andriessen, 2011, p. 15).

Wiskundigen houden van definities, dus we blijven nog even in deze sfeer: wat is een praktijk? Bakker en Akkerman omschrijven een praktijk als volgt: “Een praktijk is een systeem van handelingen die historisch zijn gegroeid om bepaalde doelen te bereiken met daarvoor ontwikkelde middelen. Daarbij gelden bepaalde regels en worden taken ook op een bepaalde manier verdeeld” (Bakker & Akkerman, 2016, p. 10). Deze definitie komt uit de hoek van de boundary crossing, de theorie over grenzen die bestaan tussen verschillende praktijken en de manieren waarop je deze grenzen kunt overschrijden of slechten. Behalve op grenzen tussen beroepspraktijken van onze studenten en de opleidingen binnen Hogeschool Utrecht kunnen we het idee van boundary crossing

ook toepassen op de soms wat gescheiden werelden van wetenschappelijk onderzoek en praktijkgericht onderzoek.

Want hoe wordt er vanuit deze werelden naar elkaar gekeken? Enigszins karikuraal beschreven bevinden de wetenschappers zich in de ivoren toren, waar zij zich bezighouden met fundamenteel en theoriegedreven onderzoek, en van waaruit zij wat neerbuigend neerkijken op het gekrioel van de praktijkgerichte onderzoekers ver onder hen. Deze praktijkgerichte onderzoekers, van hun kant, vinden dat zij werkelijk met de voeten in de modder en de klei staan, dat hun werk er pas echt toe doet en impact heeft. Ze voelen zich onvoldoende erkend door de historisch gegroeide wetenschappelijke gremia, en kijken af en toe met een mengeling van ergernis, afgunst en bewondering omhoog naar de wetenschappers met hun hoofd in de wolken.

Als ik deze badinerende toon achter me laat, hoe verhouden zich dan wetenschappelijk onderzoek en praktijkgericht onderzoek werkelijk tot elkaar? Wat op de eerste plaats opvalt, is dat de twee definities helemaal niet strijdig zijn met elkaar; het gaat eerder om een voorgrond-achtergrond kwestie. Een systematische zoektocht naar kennis door denken, observeren en experimenteren kan heel goed van toepassing zijn bij onderzoek waarvan de vraagstelling wordt ingegeven door de beroepspraktijk en waarvan de opgedane kennis direct bij kan dragen aan die beroepspraktijk. Sterker nog, het label 'praktijkgericht onderzoek' is geen vrijbrief om de gangbare normen van wetenschappelijk onderzoek te negeren. Die normen betreffen, alweer volgens de VSNU, eerlijkheid, zorgvuldigheid, transparantie, onafhankelijkheid en verantwoordelijkheid. Bij de invulling daarvan gaat het al snel over navolgbaarheid en consistentie van theorie en methode. Anderzijds is het label 'wetenschappelijk onderzoek' geen excuus om niet na te denken over de relatie met en de relevantie voor de praktijk. Hierover nadenken is zelfs je maatschappelijke plicht en verantwoordelijkheid als wetenschappelijk onderzoeker. Dit houdt onder andere in dat je zowel de probleemstelling als de resultaten

van het onderzoek moet kunnen uitleggen aan de praktijk, en de consequenties ervan voor de praktijk moet kunnen overzien.

De twee antagonisten staan dus niet tegenover elkaar, maar spelen wel elk een eigen rol in het stuk. Praktijkgericht onderzoek legt vooral nadruk op het oplossen van een praktijkprobleem, en liefst zo dat de oplossing of aanpak in meer dan één praktische situatie bruikbaar is, terwijl wetenschappelijk onderzoek primair is gericht op kennisontwikkeling en theorievorming. De uitdaging voor ons allemaal is om de grenzen tussen deze werelden te doen vervagen. In termen van boundary crossing kunnen grensobjecten daarin een belangrijke rol spelen. Grensobjecten zijn bijvoorbeeld de wetenschappelijke publicaties van praktijkgerichte onderzoekers. Die moeten enerzijds aan de wetenschappelijke standaarden voldoen en anderzijds de praktijkrelevantie zichtbaar maken. Een ander type grensobjecten vormen conferenties zoals *Onderwijs meets onderzoek*, die ik in mijn oratie heb aangekondigd (Drijvers, 2015) en waarvan we vandaag de derde editie beleven: een inspirerende gelegenheid voor praktijk en wetenschap om met elkaar in gesprek te gaan. En wellicht ben ik zelf met mijn dubbelfunctie wel als 'grensganger' te beschouwen; ik hoop in elk geval als bruggenbouwer te kunnen fungeren.

Voor mijn lectoraat Didactiek van wiskunde en rekenen staat een aantal seinen al op groen als het gaat om het verbinden van wetenschap en praktijk. Ten eerste kent vakdidactisch onderzoek als wetenschappelijke discipline in het algemeen een grote praktijkcomponent, terwijl het in theoretisch opzicht een nog vrij jong vakgebied is. Ten tweede zijn er mogelijkheden, zoals lerarenpromotiebeurzen en hogeschoolvouchers, voor docenten en opleiders om praktijkgericht wetenschappelijk onderzoek uit te voeren, bijvoorbeeld in de vorm van design research (Bakker, 2018). Ten derde staan de onderzoeksvragen en -lijnen van het lectoraat dichtbij de praktijk waarop het zich richt, namelijk de onderwijspraktijk in primair, voortgezet en hoger onderwijs, en de opleidingspraktijk voor docenten en leerkrachten. Denk bijvoorbeeld aan het vakdidactische onderwijs binnen Hogeschool

Utrecht, waaraan het lectoraat kan bijdragen (zie Venster I voor een voorbeeld rond online materialen voor vakdidactiek). Of denk aan de voorbereiding van pabostudenten op de landelijke kennis-toets wat betreft het probleemoplossend vermogen (zie Venster II). Ten vierde draagt het lectoraat bij aan landelijke praktijkgerichte netwerken zoals Elwier/Ecent en speelt het een rol in landelijke processen zoals curriculum.nu.

Samengevat wil ik in het lectoraat dus het beste van twee werelden combineren en de kloof tussen praktijkgericht onderzoek en wetenschappelijk onderzoek overbruggen door onderzoek uit te voeren dat zowel praktijkgericht als wetenschappelijk is, al kunnen de accenten van geval tot geval verschillen. Op deze manier kunnen wij als Kenniscentrum Leren en Innoveren met ons hoofd in de wolken en onze voeten op de vloer de *trait-d'union* vormen tussen de wereld van de wetenschap en de praktijk. Vandaar de titel van deze openbare les.

Venster I Open Online Bètadidactiek

In het door het ministerie van OCW gehonoreerde onderzoek 'Open online bètadidactiek' werken Hogeschool Utrecht, Universiteit Utrecht en het Nationaal Expertisecentrum Leerplanontwikkeling (SLO) samen met een aantal andere hogescholen en universiteiten in het land. Projectleider is Theo van den Bogaart, hogeschoolhoofddocent wiskunde bij Instituut Archimedes en lid van de kenniskring van het lectoraat. In het project hebben opleiders van enkele eerste- en tweedegraads lerarenopleidingen voor de exacte vakken gezamenlijk online lesmateriaal over vakdidactiek ontwikkeld, beproefd en gereviseerd. Het geproduceerde materiaal omvat een viertal online modules voor vakdidactiek, die online beschikbaar zijn². In deze modules zijn inzichten geïntegreerd uit onderzoek (in de vorm van achtergrondliteratuur), onderwijs (suggesties voor opleiders die de modules gebruiken) en praktijk (materiaal rond onderwijs in de onderwerpen van de modules). Figuur 1 geeft een indruk van de inhoud van deze modules.

² Zie <https://elbd.sites.uu.nl/2017/11/13/open-online-betadidactiek>

Figuur 1
Voorbeeld uit het
online materiaal: een
instructievideo voor
een light board.



De opbrengsten van het project betreffen zowel de onderwijs- en opleidingspraktijk als de wetenschap. De opbrengst voor de beroepspraktijk verloopt via de studenten, die hun ervaringen met online cursusmateriaal uit de opleiding, in het bijzonder voor een onderwerp als vakdidactiek, meenemen naar stageschool en beroepspraktijk. Tevens wordt het materiaal ingezet in professionaliseringsactiviteiten voor docenten uit de beroepspraktijk.

De doorwerking naar de lerarenopleidingen bestaat ten eerste uit de ervaring die de betrokken ontwerpers en testers hebben opgedaan met het co-design en het gebruik van online materiaal in bètadidactiek. Dit heeft tevens geleid tot visieontwikkeling bij de deelnemers. Deze ervaringen zijn gedeeld door middel van presentaties en vakpublicaties (Van den Bogaart, Drijvers & Tolboom, 2018; Van den Bogaart, Drijvers & Tolboom, in press). Ten tweede zijn de ontworpen modules gebruikt in verschillende opleidingen in Nederland.

De kennisontwikkeling betreft twee aspecten:

- Het procesmodel van intensieve samenwerking in kleine instuutsoverstijgende teams. Dit model bleek effectief te zijn. Co-design, intensieve bootcamps, online samenwerking en de productie van modulair materiaal van kleine bouwstenen staan in dit model centraal.
 - De kenmerken van online materialen voor bètadidactiek. Wat betreft het materiaal zijn er twee belangrijke bevindingen: (1) het aanbrengen van flexibiliteit in het materiaal is voorwaarde om aan te sluiten bij de diverse opleidingscontexten en de wens tot autonomie van de opleiders en (2) online materiaal biedt door het gebruik van video's krachtige mogelijkheden om studenten te laten reflecteren op denkbeelden van leerlingen en bijbehorende didactische interventies. Over deze bevindingen is gerapporteerd in presentaties op internationale conferenties en in artikelen.
-

“WISKUNDIG DENKEN
IS VOOR ÁLLE
LEERLINGEN
BELANGRIJK.”

3 / WISKUNDIG DENKEN

Wiskundig denken is in de huidige maatschappij zeer belangrijk. Hogere-orde wiskundige denkactiviteiten als probleemoplossen, modelleren en abstraheren zijn voor iedereen essentieel. Want we hebben doorlopend contact met digitale en andere middelen waarvan de werking op wiskundige principes is gebaseerd.

Wat verstaan we onder wiskundig denken?

Wat beogen we met het reken-wiskundeonderwijs in Nederland? Het doel van reken-wiskundeonderwijs is niet dat leerlingen leren om snel en foutloos zo veel mogelijk moeilijke sommetjes te maken. Zoals beschreven in de structuurnota van dit lectoraat is het doel eerder dat ze leren om adequaat en verstandig om te gaan met numerieke, grafische en wiskundige aspecten in de wereld om hen heen, die zowel het privéleven als de beroepspraktijken omvat. Dit is tegenwoordig nog belangrijker dan vroeger, omdat mensen nu doorlopend interacteren met digitale en andere middelen waarvan de werking op wiskundige principes is gebaseerd. Het vruchtbaar en adequaat gebruik van dergelijke tools vraagt om wiskundige denkvaardigheden van een hogere orde, die dus cruciaal zijn om te leren. Het is om deze reden dat wiskundig denken in de nieuwe examenprogramma's wiskunde voor havo en vwo een belangrijke plaats heeft (Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs, 2013).

Zowel in de structuurnota van dit lectoraat als in mijn oratie staat wiskundig denken dan ook centraal. Maar wat verstaan we daaronder? Dat is nog niet zo'n eenvoudige vraag. Als kernaspecten van wiskundig denken onderscheid ik probleemoplossen, modelleren en abstraheren (Drijvers, 2015). Over elk van deze drie aspecten is veel gedacht en geschreven; hier vat ik ze slechts kort samen. Probleemoplossen wordt gezien als de cruciale hogere-orde vaardigheid om problemen aan te pakken die niet routinematig kunnen worden opgelost. Denk bijvoorbeeld aan het zoeken van

aanknopingspunten, het overwinnen van obstakels, het zoeken van nieuwe wegen, en het van achteren naar voren redeneren. Wiskunde heeft niet het alleenrecht op probleemoplossen; het is juist een vakoverstijgende vaardigheid die in een breed scala van situaties van pas komt. Wel is wiskunde een zeer geschikt domein om heuristieken voor probleemoplossen te ontwikkelen. Een project waarin hieraan wordt gewerkt is het TORPEDO project, beschreven in Venster II.

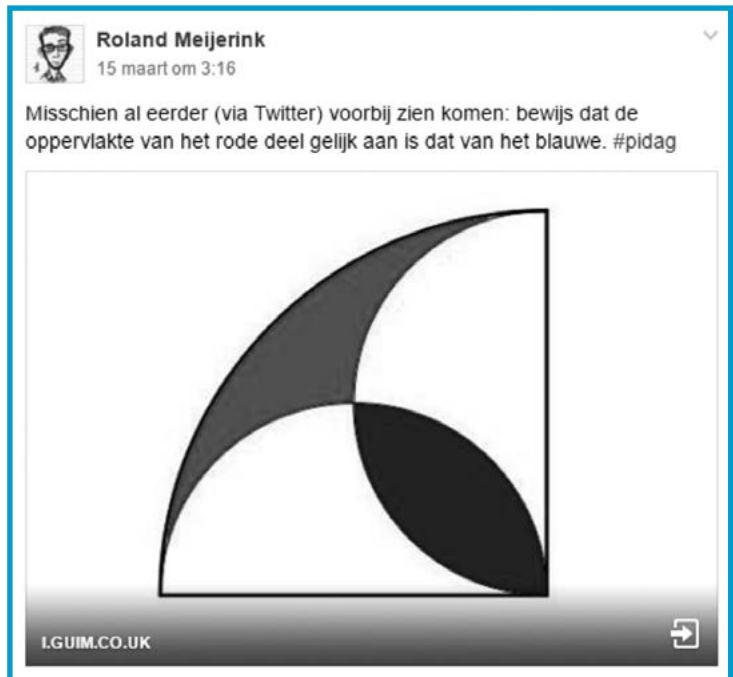
Bij modelleren gaat het met name om het mathematiseren van problemen uit de wereld om ons heen, die worden 'vertaald' in wiskundige termen en met wiskundige middelen worden opgelost, waarna de oplossing weer naar de werkelijkheid wordt terugvertaald (Drijvers, 2012; Spandaw & Zwaneveld, 2012). Binnen de theorie van realistisch reken-wiskundeonderwijs noemt men dit proces van heen- en terugvertalen horizontaal mathematiseren (Treffers, 1987; Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014).

Abstraheren is wellicht het meest interessante aspect van wiskundig denken, enerzijds omdat het zo fundamenteel is en anderzijds omdat we er in het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs zo weinig expliciete aandacht aan besteden. Abstraheren leren en onderwijzen is ook een complexe zaak (White & Mitchelmore, 2010). Zonder nader in te gaan op het cognitief-psychologisch onderzoek naar bijvoorbeeld reflectieve abstractie, wil ik benadrukken dat abstraheren niet zozeer gaat over het afstand nemen van de werkelijkheid, maar over het creëren van een nieuwe betekenisvolle werkelijkheid op een hoger niveau. Abstraheren is dus een proces van de-contextualiseren en re-contextualiseren, van het loslaten van het ene niveau en het creëren van een betekenisvol, meeromvattend nieuw niveau, dat daarmee concreet wordt. Zo bekeken is abstraheren nauw verwant met wat Treffers (1987) verticaal mathematiseren noemt. Twee hoogleraren in de wiskunde, die ik onlangs interviewde, beschreven hun eigen wiskundig handelen in termen van "verdichting" en "een ander niveau", wat sterk doet denken aan abstractie:

“Op een bepaald moment heb je de theorie geïnternaliseerd als een soort black box, en dan kan je het in allerlei analoge situaties gebruiken. En als je dat dan tien keer herhaalt, dat soort processen, dat is een soort van verdichting.”

“Naarmate je verder in het probleem verwikkeld raakt, laat je die voorbeelden wel los, en ze worden vervangen door voorbeelden op een ander niveau...”

Figuur 2
Denkactiverende
opgave op de
Facebookgroep Leraar
Wiskunde.



Tijd voor een voorbeeld. Omdat π ongeveer gelijk is aan 3,14, staat 14 maart wel bekend als π -dag, een dag die zoals u begrijpt wiskundigen in feestelijke stemming brengt. In figuur 2 ziet u een bericht op de Nederlandse Facebookgroep Leraar Wiskunde, gepost rond die dag. Het aardige in deze opgave is dat je die

rode en blauwe oppervlakten natuurlijk kunt gaan berekenen, maar dat het mooier is om een redenering op te zetten als volgt:

- We zien een kwart cirkel en twee halve cirkels. De straal van de kwart cirkel is twee keer zo groot als de straal van de twee halve cirkels.
- De oppervlakte van een cirkel is evenredig met het kwadraat van de straal. Dus de oppervlakte van de grote cirkel in zijn geheel (waarvan we maar een kwart zien) is vier keer zo groot als die van de kleine cirkels (waarvan we maar de helft zien).
- Dus de oppervlakte van de kwart cirkel is gelijk aan die van een kleine cirkel.
- Dus de oppervlakte van de kwart cirkel is gelijk aan die van de twee kleine halve cirkels.
- De twee halve cirkels overlappen, en overdekken de kwart cirkel niet geheel. Dus de oppervlakte van de overlap van de kleine halve cirkels is gelijk aan de oppervlakte van het ontbrekende stuk.
- Dus de oppervlakte van het blauw deel is gelijk aan die van het rode deel.

Het leuke aan deze oplossing is dat er niet gerekend maar geredeneerd wordt. Verder is de benodigde voorkennis maar heel beperkt, dus dat kan het obstakel niet zijn voor de leerlingen. We zien elementen van probleemoplossen: dit is een non-routine probleem waarvoor de leerling nog geen kant-en-klare procedure tot beschikking heeft. Modelleren speelt nauwelijks een rol, omdat het gebruiken van de formule voor de oppervlakte van een cirkel eerder als standaard toepassing te beschouwen is dan als modelleeractiviteit. Abstraheren speelt in die zin een rol, dat een ideale cirkel in feite al een abstractie is. Voor veel leerlingen van een jaar of dertien, veertien is zo'n cirkel vermoedelijk al een concreet wiskundig object en is deze abstractiestap dus wellicht al gezet. Al met al illustreert dit voorbeeld dus met wat voor activiteiten leerlingen kunnen worden aangezet tot denken. De waarde daarvan overstijgt naar mijn idee het specifieke wiskundecurriculum. Overigens zijn vaardigheden zoals probleemoplossen, modelleren en

abstraheren relatief: wat voor de ene leerling een betekenisloos en abstract probleem is, kan voor een andere leerling betekenisvol en concreet zijn. Evenzo kan een opgave die voor de ene leerling routine is voor een andere een groot beroep doen op het probleemoplossend vermogen. Dit hangt onder andere af van de vaardigheid, de voorkennis en de belangstelling van de leerling. De kunst voor de docent of ontwerper is dus om activiteiten in gang te zetten die in de juiste mate beroep doen op wiskundig denken bij de beoogde doelgroep.

“ALLE LEERLINGEN ZULLEN TE MAKEN KRIJGEN MET TOEPASSINGEN VAN VISUELE, NUMERIEKE EN WISKUNDIGE REPRESENTATIES WAARTOE ZE ZICH ZULLEN MOETEN VERHOUDEN.”

Zo algemeen geformuleerd klinkt het streven naar wiskundig denken in het reken-wiskundeonderwijs wellicht erg hoogdravend en ambitieus, en kan het met name relevant lijken voor goed presterende leerlingen. Toch ligt het om verschillende redenen voor de hand om wiskundig denken breder te zien. Ten eerste is wiskundig denken een geschikt – en misschien wel het belangrijkste – doel van reken-wiskundeonderwijs, omdat alle leerlingen te maken zullen krijgen met toepassingen van visuele, numerieke en wiskundige representaties waartoe ze zich zullen moeten verhouden. Is het functionele rekenen in de Nederlandse referentieniveaus rekenen³ niet een invulling van wiskundig denken voor de betreffende doelgroep (Expertgroep Doorlopende leerlijnen Taal en Rekenen, 2008)? Is het herkennen van rekenen en wiskunde in toepassings-situaties niet een vorm van modelleren? Is het herkennen van patronen en structuren in berekeningen niet een vorm van abstractie? Zijn dit geen zaken die voor elke leerling van belang zijn?

³ Zie http://www.taalenrekenen.nl/ref_niveaus_rekenen/niveauopbouw/

Niet alleen in Nederland, maar ook internationaal staan hogere-orde wiskundige vaardigheden sterk in de belangstelling. Zo is het idee van *mathematical literacy*, wiskundige geletterdheid of gecijferdheid, dat het kader vormt van internationaal vergelijkende toetsen zoals PISA (OECD, 2016) en PIAAC (OECD, 2013), eveneens op te vatten als een pleidooi voor de hogere-orde wiskundige denkactiviteiten voor iedereen. Tegelijkertijd kan een meer theoretische en formele benadering van rekenen en wiskunde juist een functionele invulling van het reken-wiskundeonderwijs zijn voor de leerling die zich voorbereidt op hoger onderwijs. Ik zie het spectrum van functioneel rekenen naar wiskundig denken dus eerder als een continuüm dan als een dichotomie; een spectrum dat voor alle leerlingen van belang is. Dit lijkt me een vruchtbaar uitgangspunt voor het ontwikkelen van reken-wiskundeonderwijs in Nederland en daarmee ook voor de huidige curriculumherziening.

“INTERNATIONAAL STAAN HOGERE-ORDE WISKUNDIGE VAARDIGHEDEN STERK IN DE BELANGSTELLING. ZOALS HET IDEE VAN MATHEMATICAL LITERACY, WISKUNDIGE GELETTERDHEID OF GECIJFERDHEID.”

Een tweede reden om een brede visie op wiskundig denken te omarmen is dat wiskundig denken aansluit bij de in Nederland gangbare opvatting over realistisch reken-wiskundeonderwijs. Daarin neemt het betekenisvol redeneren een belangrijke plaats in. Het is van belang dat elke leerling op zijn of haar niveau leert redeneren en denken, om daarmee goed voorbereid te zijn op vervolgonderwijs, beroepspraktijk en burgerschap.

Samengevat richten we ons in dit lectoraat dus op de hogere-orde wiskundige denkvaardigheden, die we vatten onder de noemer van wiskundig denken. Daarbij is het van belang om ons te realiseren dat deze denkvaardigheden gerelateerd zijn aan

niveau en belangstelling van de leerling, en daarmee ook een invulling kunnen krijgen in de sfeer van mathematical literacy en een functionele benadering van rekenen-wiskunde. Wat blijft, is een nadruk op het denken, het begrijpen, het redeneren om vat te krijgen op de grafische, numerieke en wiskundige aspecten van de wereld om ons heen, zowel in privé-situaties als in beroepspraktijken.

Venster II TORPEDO

Voor het TORPEDO-project heeft Marjolein Kool, hogeschoolhoofddocent rekenen-wiskunde bij Instituut Theo Thijssen en lid van de kenniskring van het lectoraat, in samenwerking met lectoren Ronald Keijzer van de iPabo en Paul Drijvers een Comenius Teaching Fellow beurs verworven. TORPEDO staat voor Terugblikken Op Reken-wiskunde Problemen En Doorontwikkelen. In dit onderzoeksproject wordt een online leeromgeving ontworpen voor de ontwikkeling van probleemoplossend vermogen van pbostudenten. In de TORPEDO-omgeving worden studenten tijdens zelfstudiesituaties gesteund en uitgedaagd om na het werken aan een non-routine rekenprobleem op het niveau van de landelijke kennistoets rekenen te reflecteren op de opgave, de

Figuur 3
De TORPEDO
leeromgeving voor
het reflecteren
op oplossings-
processen.

Het blauwe gebied

Gegeven:
Het figuur dat hiernaast is afgebeeld.

Gevraagd:
Hoe groot is de oppervlakte van het blauwe gebied in vierkante centimeters?

1. Reken-wiskundekennis
In stukken delen, omvormen, insluiten en formules gebruiken zijn allemaal geschikte manieren om de oppervlakte van een figuur uit te rekenen.

2. Kennis voor het oplossen van problemen

a. Tekenen, in gedachten knippen, plakken, schuiven, weghalen... zijn mooie aanpakken om oppervlakteopgaven inzichtelijk aan te pakken.

b. Formules ... kunnen ook handig zijn

Vraag je bij elke aanpak af: Kan het hier in de gegeven situatie?

Maak foto's of aantekeningen

Wat heb je van deze opgave geleerd?
Wat ga je onthouden voor een volgende keer?

Omvormen door in gedachten oneindig smalle latjes te verschuiven kan soms ook handig zijn.

oplossingsmanieren en het oplossingsproces. Deze reflectie wordt gestimuleerd en gesteund door werkzame bestanddelen als een probleemoplossend stappenpad, filmpjes van oplossingsmanieren, expertreflecties, variantopgaven, leerlingenwerk en een forum van medestudenten, en draagt bij aan de ontwikkeling van het probleemoplossend vermogen van de student. Het project bouwt voort op eerder onderzoek rond het gebruik en ontwerp van een website met oefenopgaven op het niveau van de landelijke kennistoets rekenen (<https://sites.google.com/site/oefensitekenisbasistoets/>). Zie figuur 3 voor een impressie van de TORPEDO leeromgeving.

Dit onderzoek zal leiden tot kennis over manieren om in online leeromgevingen probleemoplossende vaardigheden en een reflectieve attitude van studenten te bevorderen. De opbrengst voor de opleidingen, in dit geval de lerarenopleiding basisonderwijs, zal zijn dat studenten over adequate digitale middelen beschikken om in zelfstudiesituaties hun probleemoplossend vermogen te ontwikkelen, en dat ze daarmee ook beter worden voorbereid op de landelijke kennistoets rekenen. TORPEDO wordt aan alle pabo's in Nederland ter beschikking gesteld. Voor de beroepspraktijk biedt deze omgeving een kwaliteitsimpuls voor de instroom van studenten naar het veld vanuit de lerarenopleiding. Leerkrachten met een groter probleemoplossend vermogen zijn wellicht ook beter in staat om oplossingsmanieren van hun leerlingen te begrijpen en te evalueren. Voor de lerarenopleiding levert dit onderzoek kennis op over effecten van het gebruik van online leeromgevingen bij zelfstudie.

Denken en doen

Tot zover is wiskundig denken vooral beschreven als een hersenactiviteit. Is wiskunde niet typisch een vak dat je in je hoofd beoefent? Gaat het niet primair om de cognitieve ontwikkeling van leerlingen? Kun je wiskunde doen met je ogen dicht, zonder een vin te verroeren?

Tot op zekere hoogte wel, al zal de toegepast wiskundige hier wellicht anders over denken. Maar er is meer. De laatste jaren doet de gedachte opmars dat zelfs bij een abstract vak als wiskunde kennis stevig verankerd is in ervaringen, opgedaan via waarneming en fysieke actie. Cognitie is geworteld in sensorimotor activiteit. Denk aan bewegingen en aan gebaren, die vanaf de geboorte de ervaringen vormen waarop kennis is gebaseerd en daarvoor wellicht ons referentiekader vormen. Sterker nog, kunnen we hoofd en lichaam wel zo sterk van elkaar scheiden? Is er wel zo'n duidelijke grens tussen denken en doen, of gaat dat in feite hand in hand?

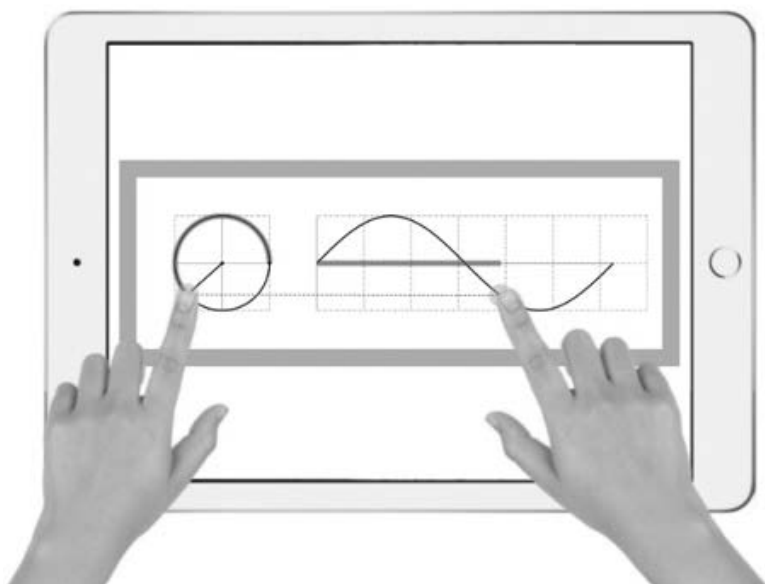
“KAN HET GEBRUIK VAN DIGITALE MIDDELEN WORDEN INGEZET OM DE SAMENHANG TUSSEN DENKEN EN DOEN IN HET WISKUNDEONDERWIJS VORM TE GEVEN?”

Onder de noemer van *embodied cognition* wordt onderzocht op welke manier het wiskundeonderwijs kan profiteren van een basis in fysieke ervaringen (zie bijvoorbeeld Lakoff & Núñez, 2000; Duijzer, Shayan, Bakker, Van der Schaaf & Abrahamson, 2017). De oorsprong van deze onderzoekslijn ligt in het werk van Piaget op het gebied van sensorimotor schema's en reflectieve abstractie (zie bijvoorbeeld Müller, Carpendale & Smith, 2009). Interessant is de vraag in hoeverre het gebruik van digitale middelen, die in eerste instantie juist afstand lijken te creëren tussen de activiteit en het werk, kunnen worden ingezet om de samenhang tussen denken en doen in het wiskundeonderwijs vorm te geven. Venster III geeft een indruk van lopend onderzoek aan de Universiteit Utrecht op dit gebied. Het is de ambitie van het lectoraat om dit interessante perspectief te betrekken in het onderzoek naar ICT in reken-wiskundeonderwijs.

Venster III Goniometrische bewegingen

In het door NWO gehonoreerde onderzoek *The Digital Turn in Epistemology* wordt aan de Universiteit Utrecht onderzocht hoe embodiment in combinatie met het gebruik van digitale middelen tot het leren van wiskunde kan leiden. Onder begeleiding van projectleider Arthur Bakker en Paul Drijvers werkt Rosa Alberto vanuit dit perspectief aan het onderwerp goniometrie (Alberto, Bakker, Walker-van Aalst, Boon & Drijvers, ingediend). Het scherm hieronder laat een applet zien binnen de Digitale WiskundeOmgeving (zie <http://www.numworx.nl/>), waarin leerlingen met twee vingers over het scherm bewegen: één vinger beweegt een punt over de eenheidscirkel, en de andere beweegt een punt over de grafiek van de sinusfunctie (zie figuur 4). De uitdaging is om de twee bewegingen met elkaar te coördineren. Als dat lukt, verschijnt op het scherm een groen kader bij wijze van positieve feedback.

Figuur 4
Multi-touch omgeving
voor goniometrie.



**“DIGITALE TOOLS
STELLEN HOGE EISEN
AAN DE BURGER.”**

4 / ICT IN WISKUNDEONDERWIJS

Door steeds meer digitale tools op de werkvloer en thuis, hebben leerlingen ook inzichten en vaardigheden nodig om die tools verstandig te kunnen gebruiken. Zoals abstraheren, modelleren, statistisch en administratief inzicht.

Motief en middel

De samenleving digitaliseert. Burgers hebben, zowel in de professionele omgeving als in de privésfeer, steeds meer te maken met digitaal gereedschap, waarvan de werking voor de gebruiker steeds minder transparant is. Tegelijkertijd moet hij of zij wel verstandig met dergelijk gereedschap leren omgaan en zich bijvoorbeeld bewust zijn van de mogelijkheden en de beperkingen ervan. Dat vraagt om kennis van de inhoudelijke achtergronden. Zowel op de werkvloer als in de thuissituatie veranderen digitale tools de gangbare praktijken en werkwijzen door subtiele mens-machine interacties en door de kennis en aannames die in het gereedschap zijn ingebouwd. Paradoxaal genoeg stelt de beschikbaarheid van digitaal gereedschap, dat toch ontwikkeld is om het de mens gemakkelijker te maken, hoge eisen aan de burger. Doordat het gereedschap steeds geavanceerder wordt en het karakter krijgt van een expertsysteem, vraagt het gebruik ervan om inzicht en vaardigheid van de gebruiker. Dat gaat verder dan knoppenkennis. Wie bijvoorbeeld statistische software als SPSS gebruikt of een administratiesysteem als SAP, merkt dat dit ook een beroep doet op statistisch dan wel administratief inzicht. Als dit inzicht ontbreekt, kan het gebruik van dergelijke tools zelfs problemen veroorzaken. Een werknemer of ondernemer moet grafieken die de uitvoer van een productieproces beschrijven kritisch kunnen interpreteren om opvallende zaken te signaleren (Hoyles, Noss, Kent & Bakker, 2013). De burger ziet zich geconfronteerd met statistische marges in uitkomsten van peilingen en moet de betekenis daarvan doorgronden.

De digitalisering van de samenleving stelt dus andere eisen aan burgers en werkers, en daarmee ook aan onderwijs en opleiding, die zich meer op hogere-orde vaardigheden zullen moeten richten. ICT is echter niet alleen motief tot verandering, maar wellicht ook een middel om die verandering te realiseren. In hoeverre kan de inzet van ICT-middelen in het onderwijs bijdragen aan het verwerven van de vereiste vaardigheden? Onderzoek toont aan dat de opbrengst van de inzet van ICT in het wiskundeonderwijs tot op heden nog niet spectaculair is (Drijvers, 2018). Een van de factoren hierin vormen de technische en didactische vaardigheden van leerkrachten en docenten. De adequate en effectieve inzet van digitale middelen in het primair en voortgezet onderwijs en beroepsonderwijs vraagt om nieuwe didactische vaardigheden van toekomstige leraren. Maar tegelijkertijd bieden digitale leeromgevingen binnen de lerarenopleidingen mogelijkheden om deze vaardigheden te onderwijzen en ontwikkelen. Zo vormt de digitalisering zowel motief als middel voor veranderingen in het onderwijs in rekenen en wiskunde. Dit is een van de kernen van het lectoraat.

“HET GAAT OM HET BELANG VAN WISKUNDIG DENKEN IN EEN GEÏNSTRUMENTEERDE SAMENLEVING.”

Theorieën die hierbij van pas kunnen komen zijn de zogeheten instrumentatie- en orkestratietheorieën. Sinds Vygotski (1978) en Rabardel (1995) weten we dat gereedschappen, *tools*, tussen mens en activiteit staan. Ze mediëren tussen, in ons geval, het uitvoeren van wiskundige taken en de leerling. Er wordt in dit verband gesproken van *extended cognition*, omdat de tools de mogelijkheden van de leerling vergroten. Specifiek bij wiskundige tools kent het gebruik ervan niet alleen een technische maar ook een wiskundig-inhoudelijke component. Het oplossen van een vergelijking op een grafische rekenmachine door twee grafieken met elkaar te snijden, bijvoorbeeld, vraagt van de leerling niet alleen

vaardigheid in het instellen van het kijkvenster en het aanroepen van de betreffende procedure, maar ook om het inzicht dat een oplossing van een vergelijking te maken heeft met het snijden van de grafieken van linker- en rechterlid. Leren met ICT komt in deze visie neer op het ontwikkelen van schema's waarin die technische en wiskundig-inhoudelijke aspecten parallel ontstaan. Dat is de kern van instrumentatietheorie: dat het leren gebruiken van de mogelijkheden van de tools gepaard gaat met het ontwikkelen van de beoogde inzichten (Drijvers, Godino, Font & Trouche, 2013). Venster IV bevat een voorbeeld van hoe het gebruik van ICT en wiskundig denken hand in hand kunnen gaan en elkaar kunnen versterken. De kunst voor de docent is dan om situaties te orkestreren waarin de activiteiten van leerlingen met specifieke tools leiden tot het beoogde leren. Dit wordt de instrumentele orkestratie genoemd (Drijvers, Doorman, Boon, Reed & Gravemeijer, 2010).

Samengevat is het doel van het lectoraat dan ook om door middel van praktijkgericht onderzoek bij te dragen aan:

- reken-wiskundeonderwijs dat de leerling toerust voor een leven en een beroep in een geïnstrumenteerde samenleving;
- de opleiding die de leraar toerust tot het realiseren van dergelijk onderwijs.

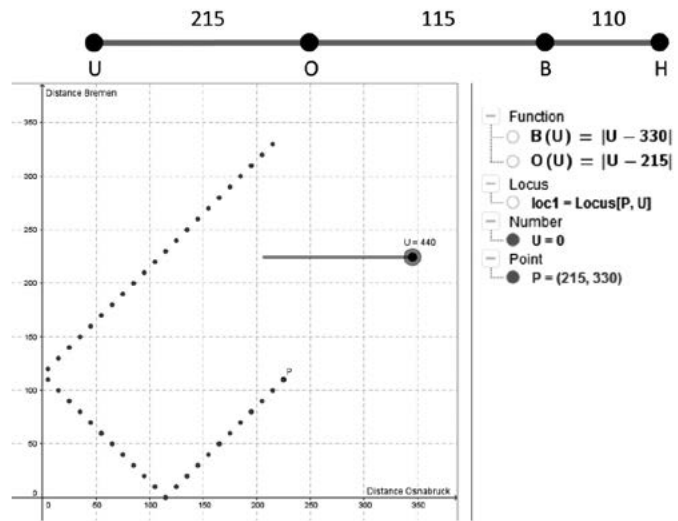
“HET GEBRUIK VAN ICT EN WISKUNDIG DENKEN KUNNEN HAND IN HAND GAAN EN ELKAAR VERSTERKEN.”

Het motto van het lectoraat Didactiek van Wiskunde en Rekenen luidt dan ook: wiskundig denken in een geïnstrumenteerde samenleving. Specifieke aandacht daarin hebben de lerarenopleidingen basisonderwijs en voortgezet onderwijs. Het lectoraat wil daarbij aansluiten bij de lopende initiatieven binnen de HU, zoals gepersonaliseerd en blended leren.

Venster IV De rit naar Hamburg

Dit venster illustreert hoe het gebruik van ICT en het wiskundig denken met elkaar interacteren en elkaar kunnen versterken. Ten behoeve van de ICME13 conferentie in 2016 heb ik een opgave beschreven over de autorit van Utrecht naar Hamburg, waar de conferentie plaatsvond (Drijvers, geaccepteerd). Na 215 km rijden passeer je Osnabrück, dan is het nog eens 115 km naar Bremen, en dan volgen de laatste 110 km naar Hamburg. De vraag is hoe in de loop van die dag de afstand tot Bremen zich verhoudt tot die naar Osnabrück.

Figuur 5
Animatie van de autorit
Utrecht – Hamburg
in Geogebra.



Schematisch gezien kunnen we ons de snelweg als een rechte lijn voorstellen en is de situatie zoals weergegeven in figuur 5 bovenaan. Vervolgens kunnen we met behulp van de absolute waarde functie van deze autorit een animatie maken in Geogebra (zie de stippellijn in figuur 5). De baan doet denken aan die van een biljartbal die je in de hoek van een biljart stoot, een voetbal die je in de hoek van een muurtje schiet, of aan een lichtstraal die weerkaatst wordt in twee spiegels. Een link naar fysieke ervaringen, denk aan embodiment! Het opstellen van de formules rechts

in figuur 5 vraagt echter om een samenspel van technische kennis van Geogebra en wiskundig inzicht in de variabelen die in het spel zijn en de manier waarop deze samenhangen. Dat is waar instrumentatie in beeld komt.

Ik gebruik hierboven het woord 'spel', want dat is wat ICT-gebruik vaak ook mogelijk maakt. In het spel van deze probleemsituatie dienen varianten zich aan. Wat gebeurt er bijvoorbeeld als ik nóg een stad op mijn route in het schema opneem? Tenslotte ligt Cloppenburg tussen Osnabrück en Bremen, 60 km na Osnabrück. Hoe verhouden zich de afstanden van de auto tot de drie steden in de loop van de dag? Dat geeft natuurlijk een driedimensionale grafiek, alsof je een tennisbal in de hoek van een driedimensionale ruimte slaat. Ook dat laat zich uitstekend in Geogebra simuleren.

Een tweede variant gaat uit van het besef dat snelwegen gelukkig niet door de stadscentra lopen. Als we aannemen dat zowel Osnabrück als Bremen bijvoorbeeld 10 km van de snelweg afliggen, hoe verandert dit de grafiek? En wat voor kromme ontstaat dan? Figuur 6 geeft het antwoord op de eerste vraag. Om dit plaatje te maken, is wat wiskundig denkwerk nodig voor het opstellen van de verbanden. Vervolgens heeft Mathematica geholpen met het vereenvoudigen van de formules en het tekenen van de grafiek, want dit leek de mogelijkheden van Geogebra te boven te gaan. De resulterende formule heeft de volgende impliciete vorm in algemene termen:

$$(x^2 + y^2 - b^2 - d^2 - (a - c)^2)^2 = 4(x^2 - b^2)(y^2 - d^2)$$

waarin

$$a = \text{afstand Utrecht} - \text{afslag Osnabrück} = 215$$

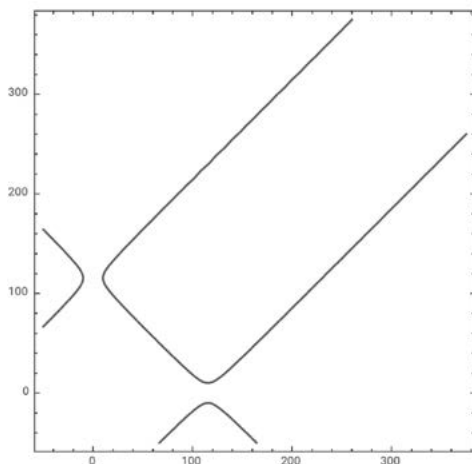
$$b = \text{afstand afslag Osnabrück} - \text{Osnabrück} = 10$$

$$c = \text{afstand Utrecht} - \text{afslag Bremen} = 330$$

$$d = \text{afstand afslag Bremen} - \text{Bremen} = 10$$

Opvallend is dat we twee extra takken van de grafiek krijgen die niet verwacht waren. Dit heeft te maken met wat onvoorzichtigheid bij het omgaan met absolute afstanden, dus die kunnen we negeren.

Figuur 6
Grafiek van de autorit
als de steden niet
aan de snelweg liggen
in Mathematica.



Digitaal toetsen van wiskundig denken

In het voorgaande is het belang van wiskundig denken als hogere-orde vaardigheid benadrukt, evenals digitalisering als motief en als middel voor verandering in het wiskundeonderwijs. De vraag is hoe deze twee ontwikkelingen samenkomen in toetsing. Op welke manieren kunnen digitale middelen worden ingezet voor de formatieve en summatieve toetsing van wiskundig denken? Immers, is onderwijsvernieuwing niet gedoemd te mislukken als er niet tegelijkertijd adequate toetsing wordt ontwikkeld?

Laten we beginnen met de constatering dat de toetsing van hogere-orde vaardigheden in het algemeen niet eenvoudig is. Een Nederlands voorbeeld betreft de toetsing van wiskundig denken in de centrale examens wiskunde voor havo en vwo. Een recente analyse maakt duidelijk dat het aandeel van opgaven die werkelijk een beroep doen op wiskundig denken in de periode 2011-2017 een lichte afname laat zien (Drijvers, Kodde-Buitenhuis & Doorman, ingediend). Het is kennelijk niet eenvoudig om hogere-orde denkvaardigheden duurzaam in de Nederlandse examenpraktijk te integreren. Daarbij kan men zich natuurlijk de vraag stellen of een centraal schriftelijk examen met beperkte tijdsduur wel de beste toetsvorm is voor hogere-orde vaardigheden. De werkgroep

ICT bij het CE wiskunde havo/vwo heeft dan ook onlangs geadviseerd om de centrale examens wiskunde in twee delen te splitsen, waarbij in het tweede deel ICT een belangrijke plaats inneemt. Bovendien biedt het schoolexamen goede mogelijkheden voor ICT-gebruik. Denk bijvoorbeeld aan praktische opdrachten, waarin leerlingen meer tijd hebben om de mogelijkheden van ICT te exploreren en te exploiteren (CvTE, 2018).

Zowel internationaal als nationaal is digitale toetsing van wiskundige vaardigheden bezig aan een sterke opmars. Denk aan de internationale vergelijkende toetsen zoals PISA, TIMSS en PIAAC, en in Nederland aan de rekentoets, de kennistoetsen van de lerarenopleidingen en de centrale examens wiskunde voor vmbo. Het gaat dan met name om toetsen *door* technologie. De leerling werkt dan in de digitale omgeving en vaak is ook (een deel van) de beoordeling geautomatiseerd. Dit in tegenstelling tot toetsen *met* technologie, waarin de leerling wel ICT gebruikt, bijvoorbeeld een grafische rekenmachine, maar de antwoorden toch op papier geeft. Met name op toetsing door technologie bestaat bij wiskunde nog de nodige kritiek. Zo riep bijvoorbeeld de rekentoets veel weerstand op in het land, die voor een deel veroorzaakt werd door de digitale afname.

Wat is het probleem met de digitale toetsing van wiskunde? Er zijn twee beperkingen, die sterk met elkaar samenhangen. Ten eerste zien we dat het veel eenvoudiger is om lagere-orde vaardigheden, zoals de beheersing van standaardprocedures, te toetsen dan hogere-orde vaardigheden, zoals wiskundig denken (Hoogland & Tout, 2018). Dit geldt ook voor traditionele toetsing met pen en papier, maar de beperkingen van digitale toetsomgevingen maken dit extra pregnant. En daar zit het tweede probleem: veel digitale toetsomgevingen bieden op dit moment te weinig wiskundige middelen die het de leerling mogelijk maken zich wiskundig uit te drukken, zoals je dat met pen en papier zou doen. Dit kan de validiteit en betrouwbaarheid van de toets in de weg staan. Voor het digitaal toetsen van wiskunde hebben we dan ook geavanceerde toetsomgevingen nodig, die:

- het de leerlingen mogelijk maken om soepel met formules, grafieken en tabellen om te gaan;
- de toetsontwerpers in staat stellen om items te ontwerpen die gericht zijn op hogere-orde vaardigheden;
- mogelijkheden bieden voor subtiele en intelligente automatische beoordeling van leerlingewerk (Drijvers, in druk).

Digitale toetsing van rekenen-wiskunde is in opmars en heeft naar mijn idee veel potentie. Er moet echter nog het nodige water door de Waal stromen om alle beloftes op dit punt in te lossen, zodat werkelijk mogelijkheden ontstaan voor een flexibele digitale formatieve en summatieve toetsing van hogere-orde vaardigheden. Binnen het lectoraat wordt hieraan op verschillende manieren gewerkt. Dit illustreren we in Venster V.

Venster V PIAAC

Het Programme for the International Assessment of Adult Competencies (PIAAC) onderzoekt de vaardigheid van volwassenen op het gebied van lezen, schrijven, functioneel rekenen en het oplossen van problemen in een technologie-rijke omgeving (OECD, 2013). De resultaten van de eerste cyclus tussen 2008 en 2016 vormen een rijke bron van gegevens over de samenhang tussen deze vaardigheden en bijvoorbeeld de kansen van volwassenen op de arbeidsmarkt. Zo vertoont de score op de 'numeracy'-toets bijvoorbeeld een grote positieve samenhang met het te verwachten jaarinkomen.

Voor de tweede cyclus tussen 2019 en 2023 wordt er verder nagedacht over de wijze waarop we functioneel rekenen kunnen toetsen op een manier die daadwerkelijk past bij een probleemoplossende houding in een technologie-rijke omgeving. Online winkelen en bankieren zijn immers gemeengoed geworden. De daarvoor benodigde wiskundige denkvaardigheden gaan inmiddels veel verder dan het oplossen van talige contextsommetjes zoals die tot op heden in allerlei rekentoetsen te vinden zijn.

Figuur 7
Openbaar item van
PIAAC-cyclus 1
(bron: <http://www.oecd.org/skills/piaac/Numeracy%20Sample%20Items.pdf>).

OECD PIAAC Section

Unit 11 - Question 1/1

Read the article about wind power stations. Using the number keys, type your answer to the question below.

How many wind power stations would be needed to replace the power generated by the nuclear reactor?

Wind Power Stations

In 2005, the Swedish government closed the last nuclear reactor at the Barsebäck power plant. The reactor had been generating an average energy output of 3,572 GWh of electrical energy per year.



Work continues in Sweden on installing large offshore wind farms using wind power stations. Each wind power station produces about 6,000 MWh of electrical energy per year.

For your information:
Electrical energy is measured in Watt hours (Wh)

1 kWh	= 1 kilo Wh	=	1,000 Wh
1 MWh	= 1 Mega Wh	=	1,000,000 Wh
1 GWh	= 1 Giga Wh	=	1,000,000,000 Wh

Het lectoraat is vertegenwoordigd in de internationale Numeracy Expert Group en werkt mee aan de ontwikkeling van toetsvragen voor de nieuwe cyclus. De daarmee opgedane kennis kan weer ingezet worden bij de lerarenopleidingen voor basisonderwijs en voortgezet onderwijs waar het gaat om het toetsen van functioneel rekenen.

**“HOE KUNNEN WE
DIGITALE MIDDELEN
INZETTEN TEN BEHOEVE
VAN HOGERE-ORDE
DENKACTIVITEITEN
BIJ REKENEN EN
WISKUNDE?”**

5 / AGENDA VAN HET LECTORAAT

De geschetste thematiek rond wiskundig denken en de rol van ICT is breed. Wiskundig denken betreft een scala aan vaardigheden en het beschikbare gereedschap daarbij omvat niet alleen een scala aan digitale tools maar ook technisch, fysiek en zelfs mentaal gereedschap. Om tot een concretere agenda te komen is het nodig om het thema toe te spitsen op enkele onderzoeklijnen. Het lectoraat Didactiek van wiskunde en rekenen richt zich op drie van deze lijnen, die sterke overeenkomsten vertonen met vergelijkbare onderzoeklijnen in de andere vakdidactische lectoraten van Hogeschool Utrecht. Hieronder werk ik deze drie lijnen schetsmatig uit en presenteer ik vervolgens de betrokken onderzoekers.

Drie onderzoeklijnen

De eerste onderzoeklijn is gericht op wiskundig denken in de eigen opleidingen met behulp van digitale middelen. De centrale onderzoeksvraag in deze lijn is hoe de lerarenopleidingen rekenen en wiskunde aan kwaliteit kunnen winnen op het gebied van wiskundig denken en hogere-orde vaardigheden door de inzet van digitale middelen. Het gaat hierbij om zowel vakinhoudelijke als vakdidactische elementen in de opleidingen van Instituut Archimedes en Instituut Theo Thijssen. Het oefenen van lagere-orde vaardigheden kan voor een deel worden uitbesteed aan digitale middelen. Daardoor kan de interactie tussen studenten en opleiders zich sterker richten op hogere-orde vaardigheden dan nu het geval is. Mogelijkheden van digitale middelen voor gepersonaliseerd onderwijs, voor blended leren en voor toetsing worden onderzocht. Voorbeelden van onderwijs en onderzoek in deze onderzoeklijn zijn ICT-ondersteunde leerlijnen statistiek en dynamische modellen (in samenwerking met het lectoraat Bètadidactiek) binnen Instituut Archimedes en de digitale voorbereiding op de landelijke kennis-toetsen op de pabo. Mede-onderzoekers in deze onderzoeklijn zijn de hogeschooldocenten, die via kwantitatieve en kwalitatieve

methoden, zoals ontwerpgericht onderzoek, de opbrengsten van de onderwijsvernieuwingen zullen onderzoeken.

De tweede onderzoekslijn betreft wiskundig denken in het onderwijs met behulp van digitale middelen. De centrale onderzoeksvraag in deze lijn is hoe digitale middelen in het primair, voortgezet en beroepsonderwijs kunnen worden ingezet ten behoeve van hogere-orde denkactiviteiten bij rekenen en wiskunde. De veranderende rol van rekenen en wiskunde in beroepspraktijken vraagt immers ook om een nieuwe benadering van het reken-wiskundeonderwijs. Hierbij sluiten we aan bij nieuwe ontwikkelingen in de verschillende curricula voor rekenen en wiskunde. Voorbeelden van onderzoek in deze lijn betreffen het ontwerpen en onderzoeken van een leergang Computational thinking in het primair onderwijs, het bevorderen van functioneel rekenen in een digitale omgeving voor vmbo, en onderzoek naar de effectiviteit van digitale lesmethoden en van computeralgebra in havo en vwo. Onderzoekspartners zijn leraren in het primair, voortgezet en beroepsonderwijs, lerarenopleiders (denk aan promotie vouchers en lerarenbeurzen) en studenten van de verschillende opleidingen die hun afstudeeronderzoek binnen dergelijke projecten kunnen positioneren.

De derde onderzoekslijn betreft het professionaliseren van leraren met betrekking tot wiskundig denken en digitale middelen. De centrale onderzoeksvraag in deze lijn is hoe leraren zich efficiënt kunnen professionaliseren met betrekking tot de didactiek van wiskundig denken en het gebruik van digitale middelen. Deze vraag omvat zowel de inhoud van de professionalisering als de werkvorm ervan. Voorbeelden van onderzoek in deze lijn: de deskundigheidsbevordering van leraren in het beroepsonderwijs op het gebied van rekenen; de ontwikkeling van een 'reflectie-app' die leraren stimuleert te denken en te communiceren over de kwaliteit van hun didactische rol tijdens interactieve gesprekken over wiskundig denken; het onderzoeken van professionaliseringsactiviteiten zoals lesson study; en de ontwikkeling van online modules voor onderwerpen zoals statistiek en vakdidactiek. Partners hierin

zijn opleiders als ontwikkelaars en uitvoerders en leraren als deelnemers. Ook hier geldt dat de onderzoeksmethode in veel gevallen een ontwerpcomponent zal kennen en dat data van zowel kwalitatieve als kwantitatieve aard zijn.

Deze drie onderzoekslijnen zijn, in combinatie met de verschillende doelgroepen van het lectoraat, richtinggevend voor de agenda van het lectoraat de komende periode.

Tableau de la troupe

Tot besluit van deze lectorale rede stel ik graag de onderzoekers in het lectoraat kort aan u voor. De lectoraatskring bestaat momenteel uit de volgende medewerkers van Hogeschool Utrecht.

- Theo van den Bogaart, hogeschoolhoofddocent wiskunde bij Instituut Archimedes en curriculumverantwoordelijke voor de bachelor- en masteropleiding Leraar Wiskunde. Hij is betrokken bij tal van onderwijsinnovaties rond ICT in onderwijs.
- Karel Boonstra, hogeschooldocent didactiek van rekenen-wiskunde bij Instituut Theo Thijssen. Hij is ook werkzaam bij de academische lerarenopleiding primair onderwijs en oriënteert zich op onderzoek naar hogere-orde denkvaardigheden bij ICT-rijk meetkundeonderwijs op de basisschool.
- Marie-José Bunck, hogeschooldocent rekenen bij het Seminarium voor Orthopedagogiek en Instituut Archimedes. Ze is betrokken bij de ontwikkeling van en het onderzoek naar een diagnostisch instrument voor leerlingen met ernstige rekenproblemen.
- Paul Drijvers, lector in de didactiek van wiskunde en rekenen en tevens hoogleraar in de didactiek van de wiskunde bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht.
- Gerard Dümmer, hogeschooldocent ICT en onderwijs bij Instituut Theo Thijssen. Hij ontwerpt en onderzoekt in samenwerking met het lectoraat Didactiek van het bèta- en technologieonderwijs een leerlijn voor het verklaren en ontwerpen van de technisch geprogrammeerde leefwereld in de bovenbouw van het basisonderwijs.

- Karen Heinsman, hogeschooldocent didactiek van rekenen-wiskunde bij het Seminarium voor Orthopedagogiek en Instituut Archimedes. Ze is mede-uitvoerder van een systematische literatuurstudie naar gecijferdheid in het beroepsonderwijs.
- Kees Hoogland, hogeschoolhoofddocent en onderzoeker bij het Kenniscentrum Leren en Innoveren. Hij is onder andere betrokken bij het internationale PIAAC-onderzoek, projectleider van het Erasmus+-project Common European Numeracy Framework en bij een systematische literatuurstudie naar gecijferdheid in het beroepsonderwijs.
- Marjolein Kool, hogeschoolhoofddocent didactiek van rekenen-wiskunde bij Instituut Theo Thijssen en curriculumverantwoordelijke voor rekenen binnen de pabo. Zij voert als Comenius Teaching Fellow het TORPEDO-project uit.
- Jop Schaap, hogeschooldocent wiskunde bij Instituut Archimedes. Hij doet onderzoek naar het gebruik van rijke digitale leeromgevingen die authentieke onderwijspraktijken voor de studenten in de opleiding kunnen brengen.

DANKWOORD 45

REFERENTIES 46

KENNISCENTRUM LEREN EN INNOVEREN 50

CURRICULUM VITAE 52

COLOFON 55

/ DANKWOORD

Mijn dank gaat uit naar het College van Bestuur van Hogeschool Utrecht voor het in mij gestelde vertrouwen, naar Theo van den Bogaart, Kees Hoogland en Marjolein Kool voor het becommentariëren van de eerdere versies van deze rede en het bijdragen aan de Vensters, naar Rosa Alberto en Arthur Bakker voor de input voor Venster III en naar Rogier Bos voor de bijdrage aan Venster IV.

/ REFERENTIES

Alberto, R., Bakker, A., Walker-van Aalst, O., Boon, P., & Drijvers, P. (ingediend).

Networking theories with design research: An Embodied Instrumentation case study in trigonometry.

All European Academies (ALLEA) (2017). *The European Code of Conduct for Research Integrity. Revised Edition.* Berlin: ALLEA. https://ec.europa.eu/research/participants/data/ref/h2020/other/hi/h2020-ethics_code-of-conduct_en.pdf

Andriessen, D. (2014). *Praktisch relevant én methodologisch grondig? Dimensies van onderzoek in het hbo.* Openbare les, Hogeschool Utrecht. Utrecht: Hogeschool Utrecht. <https://www.onderzoek.hu.nl/publicaties/sharekitDetail?id=urn%3anbn%3anl%3ahs%3a23-18f97569-5839-4fec-bfb4-6250c79d1491>

Bakker, A. (2018). *Design research in education: A practical guide for early career researchers.* London, UK: Routledge.

Bakker, A., & Akkerman, S. (2016). Het leerpotentieel van grenzen: een theoretische basis. In A. Bakker, I. Zitter, S. Beausaert, & E. de Bruijn (Red.), *Tussen opleiding en beroepspraktijk; het potentieel van boundary crossing* (pp. 9-26). Assen: Koninklijke Van Gorcum.

College voor Toetsen en Examens (2018). Toekomstbestendig Toetsen; ict bij de centrale examens wiskunde havo/vwo. Rapport CvTE-commissie Inzet ict bij de centrale examens wiskunde havo/vwo. https://www.examenblad.nl/document/cvte-rapport-toekomstbestendig/2018/havo/f=/CvTE_GGBGR_Eindrapport.pdf

Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (2013). *Denken & doen, wiskunde op havo en vwo per 2015.* Utrecht: cTWO. <http://www.fi.uu.nl/ctwo/publicaties/docs/CTWO-Eindrapport.pdf>

De Lange, R., Schuman, H., & Montesano Montessori, N. (2016). *Praktijkgericht onderzoek voor reflectieve professionals.* Antwerpen: Garant.

Drijvers, P. (2012). Wat bedoelen ze toch met... modelleren? *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 31 (4), 34-37.

Drijvers, P. (2015). *Denken over wiskunde, onderwijs en ict.* Inaugurale rede. Utrecht: Universiteit Utrecht. http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/Oratie_Paul_Drijvers_facsimile_20150521.pdf

Drijvers, P. (2016). Pisa agendeert belangrijke vragen. *Trouw*, 16 december 2016, p. 22.

Drijvers, P. (2018). Empirical evidence for benefit? Reviewing quantitative research on the use of digital tools in mathematics education. In L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel,

H.-S. Siller, M. Tabach, & C. Vale (Eds.), *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education; Tools, Topics and Trends* (pp. 161-178). Cham: Springer International Publishing.

Drijvers, P. (accepted). *Traveling to Hamburg – An example of task design within Realistic Mathematics Education*. The case of the Netherlands.

Drijvers, P. (in press). Digital assessment of mathematics: opportunities, issues and criteria. *Mesure et évaluation en éducation*.

Drijvers, P., Kodde-Buitenhuis, H., & Doorman, M. (submitted). Assessing mathematical thinking as part of curriculum reform in the Netherlands. *Educational Studies in Mathematics*.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75 (2), 213-234.

Drijvers, P., Godino, J.D., Font, V., & Trouche, L. (2013). One episode, two lenses; A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 82 (1), 23-49.

Duijzer, A.C.G., Shayan, S., Bakker, A., Van der Schaaf, M.F. & Abrahamson, Dor (2017). Touchscreen Tablets: Coordinating Action and Perception for Mathematical Cognition. *Frontiers in Psychology*, 8, 1-19.

Expertgroep Doorlopende leerlijnen Taal en Rekenen (2008). *Over de drempels met rekenen. Consolideren, onderhouden, gebruiken en verdiepen*. Enschede: Expertgroep Doorlopende leerlijnen Taal en Rekenen.
<http://www.steunpuntaalenrekenen.nl/sites/default/files/Over%20de%20drempels%20met%20rekenen.pdf>

Hoogland, K., & Tout, D. (2018). Computer-based assessment of mathematics into the twenty-first century: pressures and tensions. *ZDM Mathematics Education*, 50, 675-686.

Hoyles, C., Noss, R., Kent, P. & Bakker, A. (2013). Mathematics in the Workplace: Issues and Challenges. In A. Damlamian, J.F. Rodrigues & R. Strässer (Eds.), *Educational interfaces between mathematics and industry: report on an ICMI-ICIAM-study* (pp. 43-51). Wien: Springer.

Lakoff, G., & Núñez, R.E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

- Limpens, G., & Stolwijk, R. (2017).** PISA 2015. *Euclides*, 92 (2), 18-22.
- Müller, U., Carpendale, J.I.M., & Smith, L. (2009).** *The Cambridge companion to Piaget*. New York: Cambridge University Press.
- OECD (2013).** *OECD Skills Outlook 2013: First Results from the Survey of Adult Skills*. Paris: OECD Publishing. <http://dx.doi.org/10.1787/9789264204256-en>
- OECD (2016).** *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. Paris: OECD Publishing. <http://dx.doi.org/10.1787/9789264255425-en>
- Rabardel, P. (1995).** *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.
- Spandaw, J., & Zwaneveld, B. (2012).** Modelleren, van werkelijkheid naar wiskunde en weer terug. In P. Drijvers, A. van Streun, & B. Zwaneveld (Red.), *Handboek Wiskundedidactiek* (pp. 235-264). Utrecht: Epsilon.
- Treffers, A. (1987).** *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas project*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Van Aken, J., & Andriessen, D. (Red.) (2011).** *Handboek ontwerpgericht wetenschappelijk onderzoek*. Amsterdam: Boom.
- Van den Bogaart, T., Drijvers, P., & Tolboom, J. (in press).** Co-design and use of open online materials for mathematics and science didactics courses in teacher education: product and process. In G. Aldon & J. Trgalova (Eds.), *Selected papers from ICTMT 13*. Cham, Switzerland: Springer.
- Van den Bogaart, T., Drijvers, P., & Tolboom, J. (2018).** Co-design van online lesmateriaal vakdidactiek voor de lerarenopleiding: proces en product. *Velon Tijdschrift voor lerarenopleiders*, 39 (2), 59-68.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014).** Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.
- Van Swet, J., & Munneke, L. (2017).** *Praktijkgericht onderzoeken in het onderwijs*. Amsterdam: Boom.
- Vereniging van Samenwerkende Nederlandse Universiteiten (VSNU) (2018).** *Nederlandse gedragscode wetenschappelijke integriteit*. Conceptversie voor consultatie. Amsterdam: VSNU. <https://vsnu.nl/nederlandse-gedragscode-wetenschappelijke-integriteit.html>
- Vygotski, L.S. (1978).** *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- White, P., & Mitchelmore, M.C. (2010).** Teaching for Abstraction: A Model. *Mathematical Thinking and Learning*, 12, 205-226.

/ KENNISCENTRUM LEREN EN INNOVEREN

Het lectoraat Didactiek van Wiskunde en Rekenen maakt deel uit van het Kenniscentrum Leren en Innoveren, een van de vier kenniscentra van Hogeschool Utrecht (HU). Dit Kenniscentrum is in februari 2017 opgericht. De HU heeft in 2016 de kwaliteit van samenleven in de stedelijke omgeving als centraal thema voor onderwijs en onderzoek gekozen. Voor het Kenniscentrum Leren en Innoveren is het vraagstuk daarbij hoe mensen en organisaties overeind blijven én waarde toevoegen in een complexe en dynamische samenleving.

Een klimaat van leren en innoveren vormt een belangrijke voorwaarde voor de verdere ontwikkeling van de stad en regio. Het hoger beroepsonderwijs heeft daar een belangrijke rol in. Om die rol te kunnen vervullen is kennisontwikkeling over leren in brede zin noodzakelijk. Tegelijkertijd is kennisontwikkeling over vorm en inhoud van het leren binnen de hogeschool nodig. Het kenniscentrum Leren en Innoveren richt zich daarom tegelijkertijd naar buiten en naar binnen.

Al ons onderzoek heeft directe waarde voor de beroepspraktijk: docenten en andere opleiders, professionals en organisaties die (willen) leren en innoveren. De resultaten van ons onderzoek leiden niet alleen tot wetenschappelijke inzichten; ze worden ook praktisch toegepast. De samenwerkingspartners van het Kenniscentrum Leren en Innoveren zijn opleidingen, docenten en studenten van Hogeschool Utrecht, het regionale onderwijs- en opleidingsveld en (inter)nationale organisaties. In samenwerking met deze partners levert het centrum een bijdrage aan het verder verhogen van de docentkwaliteit binnen Hogeschool Utrecht en docenten en andere opleiders in het brede veld van onderwijs en scholing. Vertegenwoordigers uit de beroepspraktijk nemen op eigen verzoek en op verzoek van het kenniscentrum deel aan onderzoek en werken actief mee bij het toepasbaar maken en

benutten van ontwikkelde kennis. Doorwerking van onderzoek ontstaat mede door het samen te doen: gezamenlijk kennis opbouwen, kennis delen, impliciete kennis externaliseren, verschillende soorten kennis combineren en nieuwe kennis internaliseren.

Lectoren zijn de dragende krachten van het kenniscentrum. Zij zetten kennis en ervaring in voor onderzoek en innovatie van de beroepspraktijk. De lectoren werken samen met onderzoekers die hun functies doorgaans combineren met die van docent. Deze combinatie leidt tot goede verbindingen tussen de lectoraten en opleidingen, en tot overdracht van nieuwe kennis uit het onderzoek naar het onderwijs. Hogeschool Utrecht stimuleert haar docenten om in onderzoek te participeren en zelf promotieonderzoek te verrichten binnen hun vakgebied. Ook worden studenten actief betrokken bij het uitvoeren van het praktijkgericht onderzoek.

Het Kenniscentrum Leren en Innoveren bestaat uit negen lectoraten. Voor een overzicht zie <https://www.onderzoek.hu.nl/Kenniscentra/Leren-en-Innoveren>.

/ CURRICULUM VITAE

Paul Drijvers (1958) is lector Didactiek van Wiskunde en Rekenen. Dit lectoraat is medio 2017 van start gegaan onder het motto 'Wiskundig denken in een geïnstrumenteerde samenleving'. Hij combineert dit lectoraat met het hoogleraarschap in de Didactiek van de Wiskunde bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht.

Na zijn doctoraalexamen wiskunde was Paul geruime tijd leraren-opleider wiskunde bij de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen. Tevens werkte hij bij het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum aan professionaliseringsactiviteiten voor wiskundedocenten, met name gericht op het integreren van digitale middelen in het wiskundeonderwijs. In 2003 promoveerde hij bij de Universiteit Utrecht op een proefschrift met de titel *Learning algebra in a computer algebra environment*. Een belangrijke uitkomst daarvan is dat de inzet van ICT in het wiskundeonderwijs niet zo eenvoudig is als het lijkt, maar van de leerling een subtiel samenspel vraagt tussen technische en wiskundige vaardigheden. Geleidelijk aan is Paul meer gaan werken bij het Freudenthal Instituut, waar hij in 2014 tot hoogleraar is benoemd. Daarnaast werkte hij als onderzoeker en toetsdeskundige bij Cito. Hij was tevens gasthoogleraar in Montréal, Parijs en Lyon en heeft een groot internationaal netwerk.

Er zijn verschillende inhoudelijke thema's die Paul aanspreken. Een eerste focus is de inzet van digitale middelen, variërend van grafische rekenmachines tot online leeromgevingen, in het wiskundeonderwijs, en de manier waarop leraren die effectief kunnen gebruiken. Digitaal toetsen heeft daarbij zijn speciale aandacht. Een tweede onderwerp is het leren en onderwijzen van wiskundige denkwijzen, een van de speerpunten van de nieuwe curricula voor wiskunde van havo en vwo. Bij de ontwikkeling daarvan was hij tussen 2005 en 2015 nauw betrokken. Vakinhoudelijk liggen de onderwerpen algebra en statistiek hem het meest na aan het hart.

Vanuit zijn verleden bij de lerarenopleiding hecht Paul groot belang aan het raakvlak tussen theorie en praktijk, aan de wisselwerking tussen het klaslokaal en de wetenschappelijke bibliotheek. Hij is ervan overtuigd dat deze twee werelden elkaar kunnen inspireren en nodig hebben en probeert de uitwisseling ertussen te bevorderen. Zo was hij redacteur van het *Handboek wiskunde-didactiek*, dat op veel lerarenopleidingen wordt gebruikt, en van de *Nieuwe Wiskrant*. Ook publiceert en presenteert hij regelmatig voor docenten en is hij mede-initiatiefnemer en organisator van de jaarlijkse conferentie *Onderwijs meets Onderzoek*, waarin wiskundedocenten en onderwijsonderzoekers elkaar ontmoeten en informeren.

/ COLOFON

Auteur

Prof. dr. Paul Drijvers

Eindredactie

Mariek Hilhorst Tekstredactie en Productiebegeleiding

Fotografie

Evelyne Jacq

Vormgeving

Vuur, Utrecht

Drukwerk

Grafisch bedrijf Tuijtel, Hardinxveld-Giessendam

Lectoraat Didactiek van Wiskunde en Rekenen
Hogeschool Utrecht
11 oktober 2018

Openbare les

Hoofd in de wolken, voeten op de grond
Praktijkgericht onderzoek naar wiskundig denken
in ICT-rijk reken-wiskundeonderwijs

Bezoekadres

Kenniscentrum
Leren en Innoveren
Padualaan 97
3584 CH Utrecht

Postadres

Kenniscentrum
Leren en Innoveren
Postbus 14007
3508 SB Utrecht

Telefoon

088 481 73 73

E-mail

lectoraatDWR@hu.nl
paul.drijvers@hu.nl

Website

[www.onderzoek.hu.nl/Kenniscentra/Leren-en-Innoveren/
Didactiek-van-Wiskunde-en-Rekenen](http://www.onderzoek.hu.nl/Kenniscentra/Leren-en-Innoveren/Didactiek-van-Wiskunde-en-Rekenen)

ISBN (EAN) 978-90-8928-132-6
Oktober 2018, Hogeschool Utrecht
Kenniscentrum Leren en Innoveren



Op deze uitgave is de CC-BY-NC-licentie van toepassing.
Het is toegestaan om deze uitgave te kopiëren, distribueren,
vertonen en op te voeren, en om afgeleid materiaal te maken
dat op dit werk gebaseerd is zolang dit geen commerciële
doeleinden heeft en uitsluitend als de auteur vermeld wordt als
maker: prof. dr. Paul Drijvers/Hogeschool Utrecht.

