Achtergronden

van het nieuwe leerplan

Wiskunde 12-16

BAND 2

Achtergronden van het nieuwe leerplan Wiskunde 12-16

BAND 2

Achtergronden

van het nieuwe leerplan

Wiskunde 12-16

BAND 2

In de periode augustus 1987 tot augustus 1992 waren werkzaam in het team W12-16:

Mieke Abels
Rob Bloem
Jan van den Brink
Aad Goddijn
Koeno Gravemeijer
Gerrit van den Heuvel
Juul ten Hove
Leo Kalmijn
Douwe Kok
Hans Krabbendam
Marja Meeder
Theo Obdeijn
Nanda Querelle
Martinus Riemersma
George Schoemaker
Henk Staal
Heleen Verhage
Sylvia van der Werf
Monica Wijers
Pieter van der Zwaart

De administratieve ondersteuning van het project werd verzorgd door:

Sylvia Pieters
Evelien Veltman
Corine van den Boer
Ellen Hanepen

Verder werkten mee:
Truus Dekker
Joop van Dormolen
Ed de Moor
Fred Mulder
Wilma Verkooijen

Omslagontwerp en vormgeving: Ida Rouwenhorst

© Freudenthal Instituut RU Utrecht / SLO Enschede, september 1992

17 HET AANGEZICHT VAN DE MEETKUNDE 9

Inleiding 9
Meetkunde gebruiken 9
Meetkunde naar inhoud ingedeeld 14
Meetkunde doen en leren in fasen 16
Uitganspunten met nadere invulling 19
Het aangezicht van de meetkunde 25

18 KIJKMEETKUNDE 27

Wat is kijkmeetkunde? Een eerste verkenning 27
De inhouden van de kijkmeetkunde 32
Deelnemen en toeschouwen 74
Tekenen wat je ziet? 82
Kijkmeetkunde leren 89
Enkele grepen uit de geschiedenis van de kijkmeetkunde 92

19 MEETKUNDE OVER VORMEN EN FIGUREN 97

Concreet en mentaal handelen 97

20 PLAATSBEPALEN 105

Dagelijks en wiskundig plaatsbepalen 105
Richting en kompas 114
Verwantschap met andere onderwerpen 118
Wat zit er in het leerplan? 120

21 REKENEN IN DE MEETKUNDE 121

Maten 121
Verhoudingen 138

22 WISKUNDEWERKLOKAAL 159

Inleiding 159
Wiskundewerklokaal, een begrip 159
Invoering in stappen 160
Verschillende aspecten 160

23 WAT GING HIERAAN VOORAF? 163

Inleiding 163
Een inhoudsberekening 163
Twee soorten wiskunde? 165
Euclides 166
Natuurlijk niet het enige 166
Kritiek op Euclides 167
De Uebungensammlung 168
Sinds de vijftiger jaren 170
Terug naar W12-16 171
Waar staat W12-16? 172

24 INFORMATIEVERWERKING EN STATISTIEK 173

Waarom Informatieverwerking en Statistiek? 173
Centrale activiteiten van I&S 175
Niveaus in het verwerken van informatie 179
Keuze van contexten 181
Dwarsverbanden met andere leerstofgebieden 184

25 INHOUDSBESCHRIJVING VAN I&S 185

Kaarten, grafen en tabellen 185
Toepassingsgebieden 188
Systematisch tellen 193
Beschrijvende statistiek 201
Tenslotte 212

26 HET NIEUWE W12-16-PROGRAMMA OOK GOED VOOR MEISJES 215

Inleiding 215
Verschillen tussen jongens en meisjes 215
Gunstige omstandigheden 219
Uitgangspunten 220
Leerstofgebieden 224
Voorbeelden uit ontwikkelde leerlingmaterialen 226
Het experimentele examen wiskunde lbo/mavo C/D 237
Checklist voor materialen 239
Aanbevelingen voor de toekomst 240

27 PUBLIKATIES VAN EN OVER HET W12-16-PROJECT 243

Leerlingmaterialen van het team W12-16 243
Materialen voor docenten van het team W12-16 256
Artikelen over W12-16-werk verschenen in
Euclides en de Nieuwe Wiskrant 258

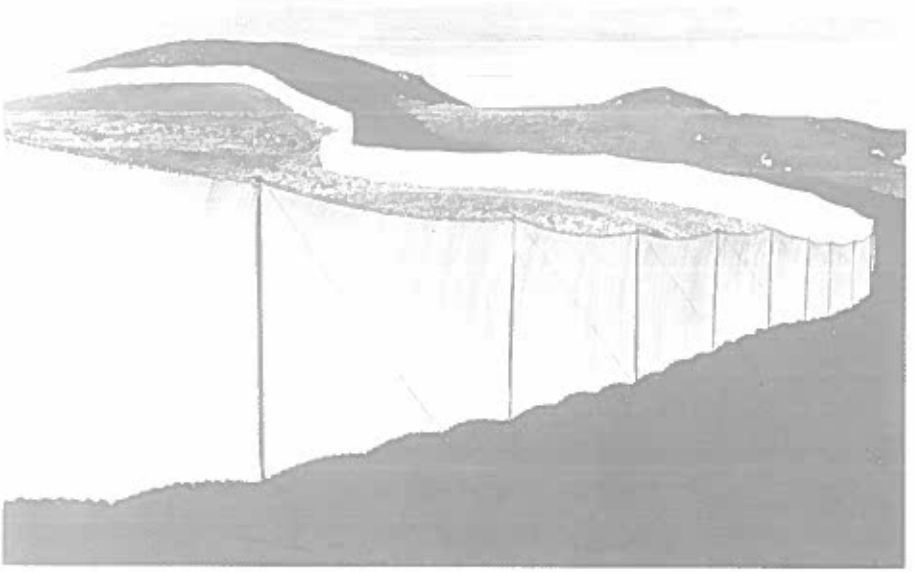


fig. 1: Running Fence van Christo (foto: Wolfgang Voltz).

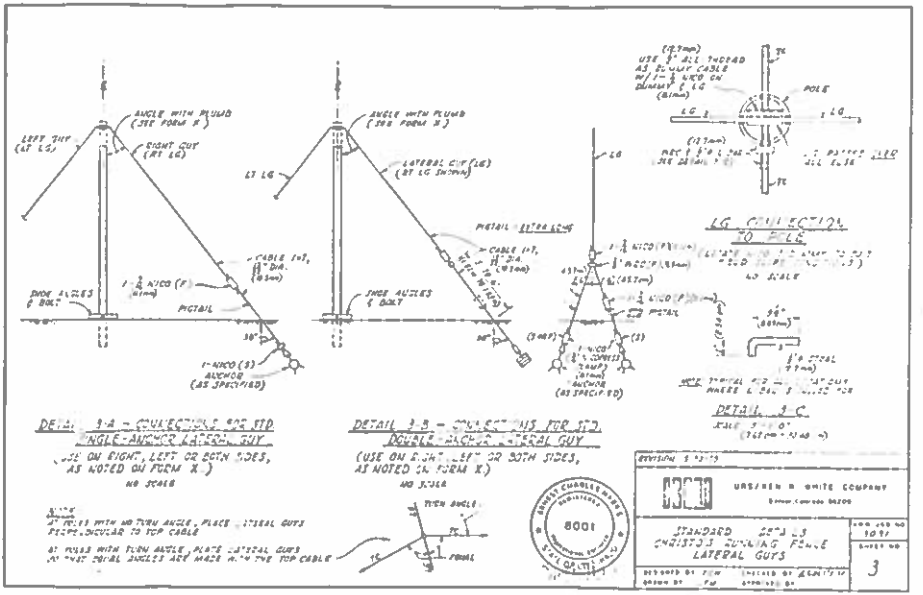


fig. 2: Constructietekening Running Fence.

HET AANGEZICHT VAN DE MEETKUNDE

Inleiding

In dit hoofdstuk zullen we de meetkunde van het project W1216 van verschillende kanten overzien.

Aan de orde komen daarbij een verkenning van de leerinhouden, een schets van de fases in het leerproces en uitgangspunten die bij de start van het project weliswaar al aanwezig waren, maar geleidelijk in belang zijn toegenomen.

Het hoofdstuk sluit af met een korte opsomming van de belangrijkste kenmerken van het voorgestelde meetkundeonderwijs.

Meetkunde gebruiken

We beginnen met vier voorbeelden van meetkundegebruik uit heel verschillende gebieden van menselijke activiteit. We doen dat om aan te geven hoe breed meetkunde is als we ons niet beperken tot de traditionele zuiver wiskundige.

De voorbeelden zijn gekozen uit de eindeloos vele situaties waarin iemand na zijn schoolperiode meetkunde kan tegenkomen. Ze zijn gekozen om er véél aspecten van meetkundegebruik aan te kunnen aanwijzen, ze zijn niet bedoeld om een mogelijk eindniveau van het meetkundeonderwijs aan te geven.

Per voorbeeld noemen we een paar van de meest opvallende meetkundige aspecten. Na de voorbeelden geven we een indeling in vier hoofdgebieden van meetkundige inhouden, waarin die aspecten hun plaats hebben.

Voorbeeld 1 – De Running Fence van Christo

In 1976 werd in Noord-Californië een kunstwerk van Christo gerealiseerd, een 5,5 meter hoog en 40 kilometer lang wit gordijn. Een foto van een gedeelte ervan (figuur 1, pag. 8) laat iets van de constructie zien: palen op regelmatige afstand, met een doorlopende topkabel waaraan het eigenlijke gordijn hangt. De concrete uitvoering van het kunstwerk is tijd en plaatsgebonden, maar foto's en technische tekeningen vormen een integraal deel van het geheel en zijn in diverse musea voor moderne kunst tentoongesteld.

Eén van de constructietekeningen is weergegeven in figuur 2 (pag. 8). In detail is aangegeven hoe de palen met tuikabels rechtop worden gehouden.

Een uitzonderlijke toepassing van allerlei gewone gebruiksmeetkunde:

- de fotograaf maakt effectief gebruik van perspectief om een indruk te geven van het gordijn in het landschap;
- de bouwtekeningen werken met orthogonale projectie; zo zijn er twee schetsen die dezelfde verankerde tuilijn uit verschillende richtingen gezien in beeld brengen;
- hoeken en loodlijnen komen voor; de hoek die het gordijn bij een paal maakt, wordt in het schetsje onderaan op de tekening op een bijzondere manier aangegeven: de turn angle, de draaihoek. De tuilijn vormt in het bovenaanzicht de deellijn van de hoek die het gordijn vormt;
- allerlei maten zijn aangegeven. Voor een object van deze omvang zal o.a. de totale kabellengte bepaald zijn. Uit deze tekening alleen is die niet af te lezen; er komt rekenwerk, eventueel met goniometrie aan te pas. (In totaal is 144 kilometer kabel gebruikt).

Voorbeeld 2 - Echografie

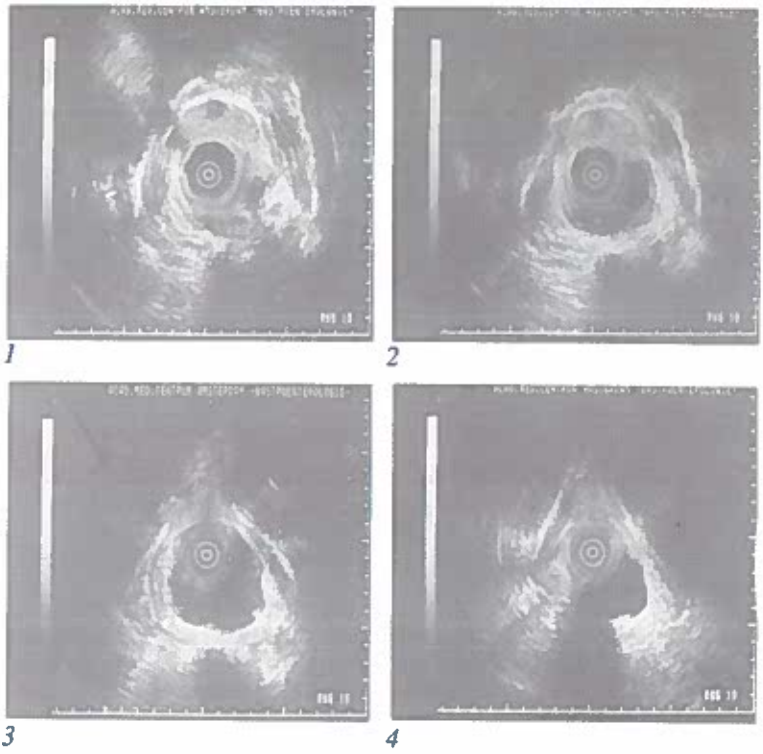


fig. 3: Echofoto's van endeldarm

Echografie is een medisch diagnostische techniek die van ultrageluid gebruikt maakt. Deze hoogfrequente geluidsgolven worden uitgezonden door een klein zendertje - een zogenaamde transducer - en worden door verschillende weefsels van het lichaam op verschillende wijze teruggekaatst. De teruggekaatste golven worden door dezelfde transducer opgevangen. Uiteindelijk wordt daaruit een beeld geconstrueerd, dat op een scherm of foto is te zien.

Een bijzondere vorm van echografie is die waarbij de echo's van binnenuit worden gemaakt; de zeer kleine transducer wordt dan via de schede of de endeldarm ingevoerd. De vier foto's in figuur 3 (pag. 10) zijn op die manier tot stand gekomen. Ze zijn met een zogenaamde radiaire scanningsmethode gemaakt, daarmee worden vlakke doorsneden in beeld gebracht. De afstand tussen de parallelle doorsnijdingen is steeds 2 cm. De schaalverdeling op de rand van de plaatjes geeft centimeters aan.

De foto's laten een stuk van de darm zien. De donkere plek rechts onder het midden is een abces. Het is van belang de inhoud van het abces te kunnen schatten.

Het juiste gebruik van deze foto's veronderstelt natuurlijk medische kennis; men moet bijvoorbeeld kunnen zien wat normaal weefsel is en wat een abces.

Maar overduidelijk zijn een aantal meetkundige inzichten nodig:

- het inzicht dat de parallelle snijvlakken een ruimtelijke object in kaart brengen;
- het (eenvoudiger) inzicht dat op de foto's met de meegetekende schaallijn kan worden gemeten;
- inzicht in het begrip inhoud, ook van wat onregelmatiger vormen. In deze situatie wordt soms de volgende vuistregel gehanteerd: inhoud = $\frac{2}{3}$ × lengte × (oppervlakte van de grootste doorsnede). De formule is exact voor de ellipsoïde; precies de grootheden die hier gemeten kunnen worden komen in de formule voor: lengte via de afstand tussen de doorsnijdingen; oppervlakte via meting op de foto zelf, eventueel met behulp van een doorzichtig roostervel.

Voorbeeld 3 – Een rozenboog maken

In figuur 4 (pag. 12) is een rozenboog afgebeeld zoals die vaak in tuincomplexen te zien is.

Onder de grond zijn de opstaande staven nog verbonden door twee elkaar kruisende diagonale verbindingen. De rozenboog is gemaakt van aan elkaar gelaste stukken betonijzer. Wie deze rozenboog wil maken - voor eigen gebruik of om in produktie te nemen - moet op zijn minst de lengtes van de diverse onderdelen kunnen bepalen.

fig. 4: Rozenboog van betonijzer.

Vanzelf dienen zich daarbij diverse meetkundige activiteiten aan:

- het meten moet 'georganiseerd' worden. Bijvoorbeeld door een lijstje te maken
- en door de boog in boven- en zijaanzicht te tekenen. Bij dat laatste is gebruik van roosterpapier een handige manier;
- de gebogen stukken vragen om kennis over cirkels en hoeken; het verdelen van de dwarsstukjes over de cirkelboog is gedaan met een indeling van de boog in stukken van 30°;
- de schuine stukken kunnen op schaal in het bovenaanzicht gemeten worden of met de stelling van Pythagoras bepaald worden. Gebruik van een rekenmachientje is dan handig.

Voorbeeld 4 – Wereldkaart met luchtlijnen

De aarde heeft de vorm van een bol, maar kaarten ervan zijn plat. De parallelcirkels en meridianen van de aardbol zijn op de kaart in figuur 5 (pag. 13) rechte lijnen. Maar de kortste wegen naar Amsterdam zijn juist weer kromme lijnen. Opmeten van richtingen op de kaart leidt dus tot fouten; de kompaskoers van vliegtuigen die vanuit

Amsterdam naar New York vertrekken is eerst 292° (dus 22° noordelijk van zuiver West), terwijl New York zuidelijker ligt dan Amsterdam.

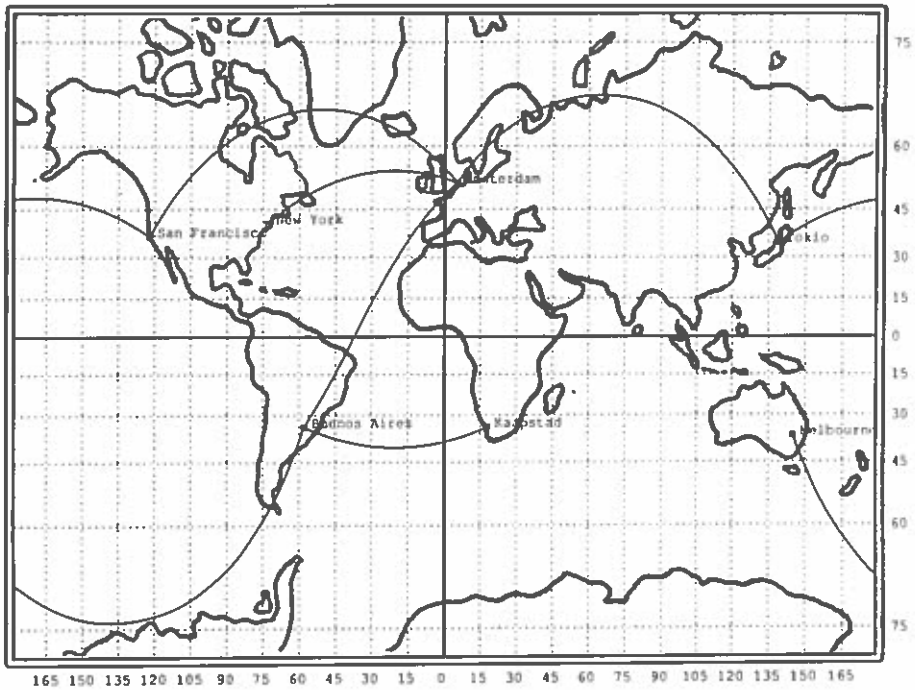


fig. 5: Wereldkaart met enkele kortste verbindingen

Weer een selectie uit de meetkundige kennis die bij het maken en gebruiken van zo'n kaart van belang is:

- de aarde is bolvormig; plaatsbepalen op aarde gaat met behulp van een coördinatensysteem van twee typen cirkels: parallelcirkels en meridianen. De coördinaten worden in graden uitgedrukt, niet in afstanden;
- kortste wegen op de bolle aarde zijn de lijnen die volgens de grootst mogelijke cirkels lopen. Daar horen de parallelcirkels niet bij (op de evenaar na);
- de kaart klopt op kleine stukjes goed: een klein stukje kaart is gelijkvormig met het corresponderende kleine stukje aarde; de verkleiningsfactor hangt echter af van de parallelcirkel waarop het stukje zit;
- door deze ongelijke oprekking wordt het geheel vervormd. Noordelijke en zuidelijke landen worden relatief te groot afgebeeld, vooral in oppervlakte. De rijke delen van de wereld zijn relatief te groot,

Meetkunde naar inhoud ingedeeld

Meetkunde komt voor in uiteenlopende situaties en wordt om verschillende redenen toegepast. In sommige van de gegeven voorbeelden ligt de nadruk op het praktisch nut (echografie en rozenboog), elders helpt meetkunde bepaalde dingen beter doorzien (de wereldkaart met de kromme lijnen) of geeft meer verdieping aan het plezier waarmee naar dingen gekeken kan worden (de Running Fence).

Uit het voorgaande is wel duidelijk geworden dat we een brede opvatting hebben over wat meetkunde is; meetkunde is niet alleen een systematische theorie over vormen en figuren en hun afmetingen, het is ook het dagelijks gebruik daarvan in allerlei situaties.

Doordat we de hechte relatie met de realiteit centraal stellen, komen we tot een indeling van het gebied meetkunde die meer geïnspireerd is op die band met de realiteit dan op een deductieve opbouw. Bij de nu volgende indeling in vier gebieden verwijzen we dan ook steeds naar de al gegeven praktijkvoorbeelden.

Kijkmeetkunde: meetkunde over kijken en afbeelden

Bij alle vier de voorbeelden valt het belang van de relatie tussen ruimtelijke objecten en vlakke afbeeldingen op. Bij de rozenboog is een foto gegeven; die is duidelijk genoeg om een algemeen idee te krijgen hoe het ding gemaakt wordt. Moet er gemeten worden, dan zijn andere manieren van voorstellen geschikter: bijvoorbeeld aanzichten van voren en van boven.

De foto van de Running Fence van Christo laat iets zien van de werking van het kijk- of fotografeerproces zelf. Het standpunt van de fotograaf bepaalt in belangrijke mate het resultaat. De echografie werkt ook met vlakke afbeeldingen van ruimtelijke zaken; nu echter zijn de afbeeldingen doorsnijvlakken van het object, op verkleiningen na onvervormd weergegeven. Tenslotte de wereldkaart. De bolvorm van de aarde is op de kaart niet meer zichtbaar. Slechts via een coördinatenstelsel is de verbinding met de oorspronkelijke vorm te zien.

De voorbeelden geven nog maar een klein deel van de mogelijke verbanden tussen vlakke weergave en ruimtelijkheid. Uitslagen (bouwplaten), schematiseringen (grafen), hoogtelijnen, er is nog veel meer. De manieren waarop al deze afbeeldingen gemaakt zijn, verschillen nogal. Vaak hangt de manier met een bepaalde wijze van kijken samen. Het onderwerp 'kijken' en nadenken over hoe 'kijken' werkt, betrekken we dan ook bij dit gebied van meetkunde.

Meetkunde van vormen en figuren

Ook al zijn de voorkomende objecten in de voorbeelden heel verschillend - rozenboog, abces - toch worden zaken vaak met dezelfde sleu-

telwoorden beschreven. Zo speelt de cirkel een rol bij de aardbol, op de tekening van Christo, bij benadering als darmdoorsnede in de echografie, als boog in de rozenboog.

Er is in de gewone spreek- en schrijftaal een repertoire aan termen die zo verbindingen leggen tussen uiteenlopende zaken. Het herkennen van die standaardvormen en het gebruik van hun eigenschappen is een terugkerend aspect van praktijkgerichte meetkunde. Lijn, vierkant, cilinder, kubus, bol, cirkel: het gaat daarbij om vlakke én ruimtelijke vormen.

Meetkunde over plaatsbepalen

Na 'hoe wordt iets afgebeeld' en 'wat is de vorm?' blijft over: de posities van dingen in de ruimte en ten opzichte van elkaar.

Bij de echografie speelt de parallelle positie van de snijvlakken een rol. Van een bepaald stukje abces kun je zeggen: op die foto, zóveel cm naar links en zoveel van onder.

Op de kaart is de rol van de coördinaten al heel duidelijk. De rozenboog wordt het makkelijkst getekend op roosterpapier: ook een simpele vorm van coördinaten.

De vliegroutes laten zien dat hier nog iets anders mee samenhangt: het begrip richting.

Een plek vastleggen ten opzichte van een andere kan op vele manieren: via afstanden, via richtingen, via speciale figuren (zoals de cirkels op aarde).

Zie ook het vastleggen van de plek waar een tuilijn voor de Running Fence verankerd wordt: blijkbaar speelde halveren van hoeken daar een rol. Er werd zo een richting bepaald ten opzichte van twee andere.

Rekenen in de meetkunde

Er is een veelheid van begrippen die met 'maat' te maken heeft. In de voorbeelden zagen we onder andere: lengte, oppervlakte, inhoud, hoeken. Zuiver wiskundig gezien zijn lengte, oppervlakte en inhoud slechts via verhoudingen bepaald. In de meetkunde van de praktijk gaat het om verhouding ten opzichte van een echte standaard in de werkelijkheid. Bij hoeken ligt dat anders, hoeken hebben hun eigen eenheid: de volle cirkel. Gewicht en tijd horen ook bij de praktische maten. Temperatuur, snelheid, kleur, enz. horen eigenlijk niet bij de meetkunde thuis: ze geven intensiteiten aan, in tegenstelling tot de eerder genoemde grootheden die extensiteiten aangeven.

In de voorbeelden spelen verbanden tussen maten een belangrijke rol, bijvoorbeeld:

- de formule voor de inhoud bij de echografie: verband tussen lengte, oppervlakte en inhoud;

- de toepassing van de goniometrie om het verband tussen hoeken en lengtes te vinden bij de Running Fence;
- verbanden tussen boog en hoek en tussen lengtes onderling (Pythagoras) bij de rozenboog.

Dit aanzicht van de meetkunde gaf vier gebieden van inhouden te zien. We bedoelen met deze indeling echter geen scheiding in vier los van elkaar staande delen. De gebieden overlappen elkaar en er is veel samenhang tussen. Het feit dat elk van de voorbeelden met alle vier gebieden te maken heeft, wijst daar al op. De indeling geeft slechts een ordening om tot een nadere beschrijving te komen in de volgende vier hoofdstukken (18 t/m 21).

De inhoudelijke indeling is gemaakt op basis van de brede opvatting van meetkunde die in het begin van deze paragraaf is aangeduid.

In de smalle opvatting van meetkunde, die zich beperkt tot de systematische 'zuivere wiskunde' spelen de activiteiten construeren en redeneren een grote rol. Daar vormen ze bouwstenen in de logische opbouw van de meetkunde. Redeneren is dan vooral bewijzen dat een bewering wáár is. Constructies – met passer en liniaal, maar ook met behulp van vaste spelregels bij ruimte constructies – waren dan in feite bewijzen dat bepaalde dingen bestonden, bijvoorbeeld een bol die raakt aan vier gegeven bollen. In onze opvatting van meetkunde komt ook construeren en redeneren voor, zij het in een wat andere zin. We betrekken ze meer bij de manier waarop meetkunde onderwezen en geleerd kan worden.

Daarover meer bij het volgende aanzicht van de meetkunde: dat vanuit het leerproces gezien.

Meetkunde doen en leren in fasen

Voor de hand ligt dat bij in de realiteit wortelend meetkundeonderwijs allerlei activiteiten met concreet materiaal zullen plaats hebben. Allereerst is dat nodig omdat de leerlingen de brugklas binnenkomen met nogal ongelijke ervaring wat betreft meetkundige activiteiten. Verschillen in basisonderwijs en verschillen in ervaring met activiteiten als tekenen en knutselen en verschillen in speelgoed en hobbies zijn de oorzaken. Vooral wanneer met een onderwerp wordt begonnen zijn allerlei vormen van materieel, concreet meetkundig handelen van belang om een brede gemeenschappelijke basis te krijgen om verder mee te gaan.

Maar niet alleen in de beginfase. Ook als begrippen wat meer geordend gaan worden kan het een rol spelen, nu echter vaak wat onderzoeksgerichter.

Maar ook als een (deel)leerproces in zekere zin geheel doorlopen is, en het er nog om gaat de verwerkte begrippen ook in andere situaties te leren toepassen, zal materieel handelen een rol blijven spelen.

In onze meetkundebeschrijving zal 'construeren' steeds de gewone betekenis hebben, dus aan materieel handelen gelieerd zijn; construeren in die zin hoort in het leerproces van realiteitsgebonden meetkunde thuis. In hoofdstuk 22 (Wiskundewerklokaal) zal beschreven worden wat er concreet bij komt kijken.

De tegenhanger van construeren is redeneren, in die zin dat redeneren juist gaat om het niet-materieel bezig zijn.

Daar hoort allereerst bij het verwoorden van wat gedaan is, van wat concreet handelend ontdekt is. De bruikbaarheid van de aangeleerde technieken hangt er vanaf. Verwoorden is namelijk: de essentiële kenmerken naar voren halen.

Redeneren, als logisch vervolg op verwoorden, zal aanvankelijk het aangeven zijn van samenhang tussen verschillende stappen bij een beperkt onderdeel: lokaal redeneren dus. Pas later zal redeneren gebruikt worden bij het vastleggen van grotere structuren, bij de opbouw van de meetkunde als systematisch geheel.

Redeneren is zo, net als construeren in onze betekenis, een onderdeel van het leerproces. In de geschiedenis van de wiskunde zijn redeneren en construeren eerder de middelen waarmee de meetkunde als systeem is opgebouwd. Redeneren blijft bij ons echter ook verbonden met het concrete handelen. Daar hoort dan ook het leerproces bij dat de redeneerwijze aanvankelijk heel situatiegebonden kan zijn en daarvan los komt doordat verschillende situaties soms gelijke redeneerwijzen opleveren. Dat is een gang van materieel naar abstract die essentieel bij dit type meetkunde hoort.

Op de achtergrond van de juist gegeven beschrijvingen van construeren en redeneren is een fasering van het leerproces te zien, die we nu expliciet gaan aangeven.

We onderscheiden grofweg drie fasen, die we met steekwoorden aangeven:

oriëntatie en verkenning:	van echt naar verschraling, uitlokking van verbazing
ordening en structurering:	nadenken over je verbazing met behulp van sterk gereedschap
overzicht en herkenning:	ervaren wat je al kunt, zelf samenhang zien.

In eerste instantie gaat het hierbij om een beschrijving van een leerproces aan bijvoorbeeld een klein onderdeel van de meetkunde. Soms zullen de fasen elkaar snel opvolgen, soms zal de cyclus uitgestrekter zijn, dat hangt van het betrokken onderwerp af.

In veel globalere zin geldt de beschrijving ook voor de periode 12-16 als geheel. Verderop in het leerproces zal uiteraard meer de structurering en herkenningsfase aan de orde zijn, maar ook dan zal het vaak gebeuren dat de hele cyclus van drie fasen – op microniveau – aan de hand van een klein onderdeel doorlopen wordt.

We zullen de fasen nu wat nader karakteriseren. Daarbij zal het accent liggen op de meer grootschalige kant van de fasering. In volgende hoofdstukken zal op de inhouden meer in detail worden ingegaan; daarbij komt hier en daar de fasering op microniveau aan bod. Het duidelijkst zal dat zijn bij de onderdelen kijkmeetkunde en rekenen in de meetkunde.

In de fase van *oriënteren en verkennen* worden nadere ervaringen opgedaan met begrippen die vaak al intuïtief bekend zijn, zoals lijn, hoek, kubus, cirkel, enzovoort. Die begrippen moeten als het ware onder de veelheid van opgedane ervaringen vandaan gehaald worden, ontdaan van misverstanden. Dit ontdoen van al te situatiegebonden kenmerken heet 'verschraling'.

Er zullen ook ervaringen worden opgedaan die verbazing opwekken en vragen oproepen, met name wanneer het gaat om ruimte en afbeelden. Het is het gebied waar de leerlingen het meest verschillende
ervaringen mee hebben.

In deze fase is het bezig zijn met concrete ervaringen rond meten en kijken van groot belang. Het wiskundewerklokaal kan hierbij een belangrijke rol spelen, maar ook de omgeving van de school.

Begrippen zoals hoeken, coördinaten, cirkel en veelhoek zijn niet los te zien van vaardigheden, zoals omgaan met een passer om een cirkel te tekenen en handig gebruik maken van een geodriehoek als teken- en meetinstrument.

Ordenen en structureren, de tweede fase, heeft te maken met kennis en vaardigheden die expliciet met de samenhang tussen verschillende begrippen te maken hebben. Denk aan werken met verhoudingen en vergrotingsfactoren, aan oppervlakte in relatie met de vorm van figuren, aan de stelling van Pythagoras. In deze fase worden dus ook meetkundige gereedschappen ontwikkeld en wordt hun gebruik beoefend. Ook komen daarbij allerlei nieuwe begrippen naar voren. Ordening en structurering omvat nadenken over je verbazing met behulp van begrippen zoals oppervlakte, inhoud, Pythagoras, veel rekenen met vergroten en verkleinen.

Bij het aanpakken van een probleem is verschralen nu een be-

redeneren, en het helder kunnen weergeven van die redenering, onderscheid makend tussen hoofdzaak en franje.

Bij het leren aanpakken van een probleem hoort het gebruik van overdrijving om een bepaalde bewering te ontkennen. Meer nadruk op wat je moet laten zien van je gedachtengang. Ook weten wat voor soort veronderstellingen je moet maken en dan ook moet declareren. Anders gezegd: je bewust worden van aannames en het ontwikkelen van de gewoonte die aannames ook te expliciteren.

In de fase van *overzicht en herkenning* gaat het erom de eerder geleerde dingen in bredere samenhang te leren herkennen en gebruiken. Als een bepaald stukje meetkundig inzicht binnen een bepaalde situatie is overmeesterd, dan is het toch nog een stap verder dat inzicht in nieuwe situaties toe te passen, vooral als daarbij nog allerlei andere onderdelen van de wiskunde een rol spelen. Dat veronderstelt ook meer reflectie. Het is ook ervaren dat je iets geleerd hebt en weten wat je geleerd hebt. Vaardigheden zoals verwoorden, verschralen, toepassen van blikwisseling, worden hierbij verder ontwikkeld.

Overzicht en herkenning is niet een fase die slechts doorbreekt bij havo en vwo. Principieel is gekozen voor een fasering waarbij alle leerlingen met behulp van het door hen geleerde, toekomen aan overzicht over de eigen kennis, de herkenning van het geleerde in nieuwe situaties.

Uitgangspunten met nadere invulling

De indelingen naar gebieden van de meetkunde en de fasering bij het leren van meetkunde ontstonden tijdens het project W12-16. Ze werden tijdens het werk steeds bijgesteld.

Er waren ook uitgangspunten vooraf. Deze uitgangspunten kregen in de loop van het project steeds meer lading. Er kwamen inzichten bij. De formulering werd uitvoeriger en completer. Nu volgt een beschrijving van meetkunde vanuit de uitgangspunten waar we voor staan.

Meetkunde voor mensen van 12 tot 16

Onze keuze voor praktisch bruikbare meetkunde hangt nauw samen met het feit dat het leerplan van W12 -16 in principe bedoeld is voor alle leerlingen van 12 tot 16 jaar, voor jongens en meisjes, voor leerlingen met heel verschillende culturele bagage, voor leerlingen die zowel op het gebied van praktische als abstracte vaardigheden nogal uiteenlopen.

Het is niet verantwoord het meetkundeonderwijs dan eenzijdig te richten op de groep die verder zal gaan met wiskunde en de minder

richten op de groep die verder zal gaan met wiskunde en de minder abstract gerichten een uitgedunde vorm van dezelfde meetkunde aan te bieden, waar niets meer op volgt en die niet op zichzelf staand nuttig is.

We geloven wel dat het heel goed mogelijk de praktisch gerichte meetkunde voor de verder gaande leerlingen te verbinden met meetkundige problemen, waar wat meer 'beschouwing' bij nodig is. Zo is in één van de experimenteerscholen een meetkundepakket in dezelfde vorm in een gymnasium 3 klas en een mavo 3 klas gebruikt. Beide groepen wisten goed raad met dezelfde leerstof, onderdelen uit de kijkmeetkunde, maar bij de gymnasiumleerlingen kwam het sneller tot generalisatie, wat algemenere conclusies en meer onafhankelijk redeneren.

Maar ook voor mavo en lbo bedoelen we met praktijkgericht meetkundeonderwijs méér dan het aanleren van gereedschapsmatige vaardigheden alleen. We bedoelen ook het verwerven van een inzichtelijk kader waarin die gereedschappen een plaats kunnen hebben. Voor wie nauwelijks (expliciet) gebruik zal maken van die aanwijsbare vaardigheden, is zo'n inzichtelijk kader misschien zelfs het belangrijkste. Bij dat inzichtelijk kader hoort in ieder geval een verworven vertrouwdheid met 'ruimte' in de ruimste zin. Vertrouwdheid met de dagelijkse eigenschappen van plaats, vorm en maat van gewone dingen. Vertrouwdheid met gevarieerde afbeeldingen daarvan en vertrouwdheid om simpele conclusies te kunnen trekken of voorspellingen te kunnen doen op dit gebied, ook zonder het bewustzijn dat het meetkunde of wiskunde is.

De vaardigheid om in allerlei situaties (niet in alle) met eenvoudige evenredigheden te kunnen rekenen hoort zeker ook bij dit basispakket meetkundige vorming.

Praktijkgericht meetkundeonderwijs geeft ruime kansen om aan te sluiten bij allerlei ervaringen die de leerlingen al hebben. Dat is niet alleen motiverend, het is ook in inhoudelijke zin nodig. De meetkunde wordt zo voor de leerlingen minder ver en zweverig.

Aansluiten bij ervaringen van de leerlingen hoeft helemaal niet te betekenen steeds uitgaan van hobbies en de typische puberteitscultuur. Het is vaak heel gewoon werken met je eigen waarnemingen die je met je eigen ogen doet en met je eigen handen nameet. Gunstige ervaringen op dit gebied hebben we vooral bij onderdelen van de kijkmeetkunde en meten.

Een voorbeeld is het bepalen van de hoek van je eigen blikveld. Daarbij moet je gaan stáán, één oog dicht doen en dan op het oog aftasten hoe ver je de uitgestrekte armen uit elkaar kunt doen zodat je nog net je handen kunt zien. Leerlingen blijken zo'n lichamelijke be-

leving snel op papier (in een bovenaanzicht van hoofd en handen) te kunnen vastleggen om de hoek te kunnen meten.

Meten is van oudsher al het meten met het eigen lichaam; denk aan de namen van lengtematen als duim, voet, el en vadem. Kennen van de verschillende lengtes van die stukken, nu modern uitgedrukt in centimeters, geeft prachtig steun aan praktisch meetinzicht, aan de echte beleving van de lengtematen.

Niet alleen bij het eigen lichaam, ook bij andere eigen belevingen moet het meetkundeonderwijs aansluiten. Het heeft weinig zin een kilometer te zien als 600 maal je eigen lengte, maar het is heel handig één afstand in je eigen omgeving te weten die ongeveer een kilometer is. Dat wordt dan jouw eigen persoonlijke kilometer. Het kan zijn van huis naar school, van de kerk tot het strand of van de bushalte naar oma. Zo'n maat gaat een leven lang mee.

Eigen ervaringen vormen ook het hart van de kijkmeetkunde. Daar gaat het om hoe de dingen er uit zien, vergeleken met wat ze echt zijn en hoe ze afgebeeld worden. De eigen waarneming wordt daarbij onderzocht zodat je zelf de context van de meetkunde bent.

Meetkunde leren op een concrete manier

De dingen waar praktische meetkunde over gaat, moeten zoveel mogelijk echt aanwezig zijn. Met andere woorden: allerlei vormen van concreet materiaal spelen een rol in het leren. Vat dit ruim op! Denk aan modellen van vormen als kubus en cilinder, maar ook aan de vorm van het lokaal als ongeveer een kubus en aan het gebied waar je een klap van de deur kunt krijgen als een stuk cilinder. Denk aan foto's waarop in de verte een héél klein flatje staat van 12 verdiepingen, maar ook dat je de echte flat buiten in de verte makkelijk tussen duim en wijsvinger kunt pakken vanuit je oog gezien.

Denk bij een bol aan een bal, maar ook aan een fietskogeltje, de aarde en zelfs de zon. De voetbal - of zo'n witte piepschuimbal - kan uitstekend dienen als model voor de aarde wanneer een tochtje per satelliet er niet in zit. Zo staat het ene concrete voorwerp model voor het andere.

Soms zijn concrete materialen echt voor bepaalde doelen gemaakt zoals de modelkubus, maar veel vaker zijn het de gewone dingen om ons heen die klaar voor gebruik liggen.

Meetkunde ziet er gevarieerd uit

Op een praktische manier meetkunde leren vraagt om een afweging van de keuze van situaties en van contexten. We streven daarbij diversiteit na.

Diversiteit in contexten en toepassingen is nodig omdat leerlingen verschillend zijn, verschillende belangstellingen hebben en verschil-

lende voorgeschiedenis hebben wat betreft concrete ervaringen met allerlei materialen. We zoeken dan ook naar afwisseling in voorbeelden op kleine en grote schaal, hard en zacht materiaal, dichtbij en veraf.

Toepassingen komen niet alleen uit de techniek voort, maar ook uit sociale situaties, uit dagelijkse dingen als verkeer huishouden en kleren en uit dingen met een meer esthetisch karakter.

Met name het esthetische aspect verdient speciale aandacht. Oog hebben voor mooie figuren, verkennen van fraaie patronen. Patchwork is bijvoorbeeld een gebied waar meetkunde en esthetiek elkaar overdekken. Hier hoort ook bij: verbazing oproepen, bijvoorbeeld over de vorm van de vijfhoekige knoop in een strook papier. Esthetiek is niet alleen symmetrie en regelmaat. Rijke structuren met hier en daar symmetrie en met regelmatigheden en afwijkingen kunnen juist aantrekkelijk zijn. De Islamitische kunst, waarin afbeelden van mensen door de Koran verboden is, heeft prachtige patronen opgeleverd. Of denk aan de prachtige patronen uit de Keltische cultuur.

De aard van de meetkunde lijkt te leiden tot een wat eenzijdige benadering van het esthetische. Regelmaat, symmetrie, vorm en verhouding komen ruim aan bod, maar kleur, warmte en andere meer emotioneel geladen aspecten blijven op de achtergrond.

Esthetiek in de zin van elegantie van een redenering zal binnen het W12-16 kader ook zeldzaam zijn. Op hoger niveau, misschien in vwo-3 zou het ter tafel kunnen komen.

Een ander aspect van esthetiek is de vormgeving van het leerlingenmateriaal. Aan experimentele pakketten besteedden we een maximum aan zorg voor zover dit nog verantwoord was gelet op de korte levensduur van deze pakketten; ze zullen daardoor zelden echt mooi genoemd kunnen worden. Er bestaan echter voorbeelden van prachtig uitgegeven leerlingenboeken, zoals de delen voor de brugklas van de methode Exact. We menen dat stijlvolle functionele illustraties, gevat in tekst van goede lay-out ook een uitdrukking zijn van dit esthetisch aspect.

Diversiteit in omgaan met meetkunde vinden we ook door te kijken naar het dichtbije en verre verleden. Meetkunde biedt goede mogelijkheden voor historische verkenningen. 'Pythagoras' vraagt om een historische inbedding. Pythagoras leefde vermoedelijk rond 600 voor Christus in wat nu Turkije heet, maar zijn stelling vinden we ook nog in oude Chinese literatuur (zie hiervoor de GWA-klapper). Veel leerlingen zal dit zeker boeien. Er kan zo ook een rechtzetting van vooroordelen plaats hebben. 'De' wiskunde lijkt een typisch westerse 20ste-eeuwse wetenschap, terwijl de wiskunde wortelt in het verleden en vooral ook in niet-westerse culturen. (Zie ook in 'Wiskunde

een Wereldvak' het hoofdstuk: The Crest of the peacock, Non-European roots of mathematics.)

Het lijkt vaak moeilijk te zijn historische toepassingen te vinden die geschikt zijn voor zwakkere leerlingen. Voorbeelden waarover gepubliceerd wordt, zijn bijna altijd bedoeld voor gymnasiumleerlingen die dan ook nog interessante dingen kunnen met de authentiek Latijnse of Griekse teksten. Toch is het mogelijk, zie het voorbeeld in de GWA-klapper en de toenemende mate waarin ook in methodes naar de geschiedenis van de wiskunde wordt verwezen. Al is het maar via het geven van een portret, een jaartal; kortom het aangeven van het feit dat wiskunde gemaakt is door vele mensen. Mensen van nu en vroeger, van ver en dichtbij.

Meetkunde is vanaf het begin ruimtemeetkunde

Na al het voorgaande zal duidelijk zijn dat we geen scheiding aanbrengen tussen vlakke meetkunde en ruimtemeetkunde, zoals dat vroeger gebeurde. Binnen een deductief opgebouwde, op theorie gerichte meetkunde kan dat nuttig zijn, bij de praktische meetkunde is het veeleer de ruimte die zich eerder aandient dan het vlak. Ruimtemeetkunde dus vanaf de start. Allerlei meetkunde die vlak lijkt, komt daarbij vaak voort uit het verkennen van de ruimte. Dat houdt ook in dat meetkundeonderwijs niet louter potlood-en-papier onderwijs kan zijn. Met potlood en papier beginnen aan ruimtemeetkunde vraagt een behoorlijke techniek van representeren van de ruimte op het platte vlak. Daarmee komen de leerlingen de school niet binnen. Dat moeten ze wel leren, mede dóór het meetkundeonderwijs. Studie van de ruimte begint in de ruimte zelf, en niet met verschraalde afbeeldingen waarin één dimensie moet worden bijgefantaseerd. Beginnen in de ruimte onderstreept nog eens het doe-aspect van meetkunde.

Meetkunde binnen de grenzen van de school

Onze leerlingen bevinden zich tussen basisschool enerzijds en allerlei vormen van voortgezet onderwijs en géén voortgezet onderwijs anderzijds. We streven met onze meetkundevoorstellen naar aansluiting op voorgaand onderwijs en vervolgonderwijs én naar zinvolheid voor wie geen wiskunde gaat gebruiken bij verdere opleiding of beroep.

Allereerst de basisschool. We kunnen vaststellen dat onze voorstellen in algemene zin goed aansluiten bij veranderingen in het reken- en wiskundeonderwijs op de basisschool, waar de aandacht voor meetkunde duidelijk groeit. Dat wil niet zeggen dat we allerlei voorkennis mogen veronderstellen bij onze leerlingen, maar wel een zekere ervaring met vormen en figuren en oriëntatie op vlak en ruimte. Sommige kennis is zeker aanwezig; ideeën over oppervlakte, inhoud en schaal bijvoorbeeld, maar verschillen tussen leerlingen on-

derling en de rekenmethodes waar die leerlingen mee gewerkt hebben zijn aanzienlijk. Verwacht wordt dat in de toekomst ook iets meer aan meetkunde gedaan zal gaan worden in de richting van de kijkmeetkunde.

Aansluiting naar mbo, havo en vwo hangt natuurlijk van het gehaalde niveau af. De bedoelde niveaus zijn in het Trajectenboek beschreven en in kringen van het voortgezet onderwijs wordt in het algemeen redelijk positief over de aansluiting gedacht. De keuze voor praktische meetkunde sluit voor die vormen van mbo waar meetkunde van belang is, denk aan modevakschool, technisch onderwijs, waarschijnlijk beter op de praktijkvakken aan dan de wiskunde van het oude leerplan. Voor de aansluiting op de wiskundevakken zelf in het technisch mbo is dat nu nog niet direct zo, maar juist in die hoek lijkt veel in beweging te komen.

Havo-B meetkunde overlapt de 12-16 meetkunde van het D-niveau gedeeltelijk en gaat er op verder. In het vwo is de situatie minder duidelijk, met name omdat de inhoud van het 4e klas programma in het Trajectenboek slechts wordt aangegeven met suggesties.

Door het gebruik van allerlei reële situaties lijkt overlap met andere vakken te ontstaan. Bij meetkunde – en wiskunde in het algemeen – gaat het om technieken die elders worden toegepast. Grofweg kun je stellen dat we ons bij wiskunde bezighouden met technieken die in meerdere situaties op verschillende manieren voorkomen en dat we dan speciaalnaar het gemeenschappelijke kijken.

Neem het begrip doorsnede als voorbeeld. Dat wordt in uiteen lopende disciplines als biologie (doorsnede van een bloemstengel), aardrijkskunde (doorsnede van een vulkaan) en techniek (doorsnede van een tunnel) gebruikt. Bij wiskunde staat dan de meetkundige begripsvorming voorop, bijvoorbeeld het leren onderscheid maken tussen een ruimtelijke tekening met een doorsneevlak en de ware vorm van die doorsnede. Daarbij kan de vulkaan of de doorsnede door een boomstam als voorbeeld dienen, maar de precieze samenstelling van de lava of de aard van de schors, dat hoort toch meer elders.

Wiskunde is in dit opzicht dus meer een steunvak.

Nog één laatste punt dat met de grenzen van de schoolse situatie te maken heeft brengen we naar voren. Praktische meetkunde is minder een meetkunde van op elkaar gestapelde en van elkaar afhangende zaken. Op allerlei momenten kan een leerling weer in de bocht springen als er iets mis gegaan is. Dat geldt op niveau van hoofdstukindeling (onderwerpen gaan steeds opnieuw van praktijksituaties uit) maar ook op de kleinere schaal van bijvoorbeeld één les. Eindeloze is die rekbaarheid niet, maar de flexibiliteit wordt hopelijk groter dan voorheen. Compleet afhaken moet een uitzondering worden!

Het aangezicht van de meetkunde

In dit hoofdstuk hebben we geprobeerd om een beeld te geven van meetkundeonderwijs door het te beschrijven vanuit verschillende standpunten. Zo kregen we verschillende aanzichten. Dit hoofdstuk kan gezien worden als een uitdrukking van wat we willen met de meetkundevoorstellen. Een geloofsbelijdenis, maar wel een beredeneerde en door experimenten ondersteunde. Door middel van de aanzichten probeerden we het wezen van het meetkundeonderwijs, oftewel het aangezicht van de meetkunde, te beschrijven. We vatten onze ideeën nu kort samen, met een overzicht van de aanzichten:

Inhoudelijke keuze

We kiezen voor praktijkgerichte meetkunde, zonder de weg naar pure meetkundige abstractie af te sluiten.

Keuze over de vormgeving van het leerplan:

Er zijn vier grote inhoudelijke gebieden: kijkmeetkunde, meetkunde van vormen en figuren, meetkunde over plaatsbepalen, rekenen in de meetkunde.
Deze onderdelen worden niet gescheiden aangeboden, binnen een 'hoofdstuk' kan het zwaartepunt schuiven tussen de gebieden.

Didactische keuzen:

- Fasering: In het begin nadruk op verkennende activiteiten, later pas meer op structurering, technieken en meer formele zaken.
- Aansluiten bij (dagelijkse) ervaring van de leerlingen. Gebruik maken van je lichaam. Ervaringen van de leerlingen serieus nemen. Zo veel mogelijk naar belangstelling en achtergrond.
- Gebruik van concreet materiaal, als startpunt, als steun onderweg, als model voor andere begrippen. Bij de keuze moet gelet worden op een brede zone van toepassingen en ook op esthetische aspecten en de verschillende leerstijlen en interesses van leerlingen.
- Ruimtemeetkunde van meet af aan.

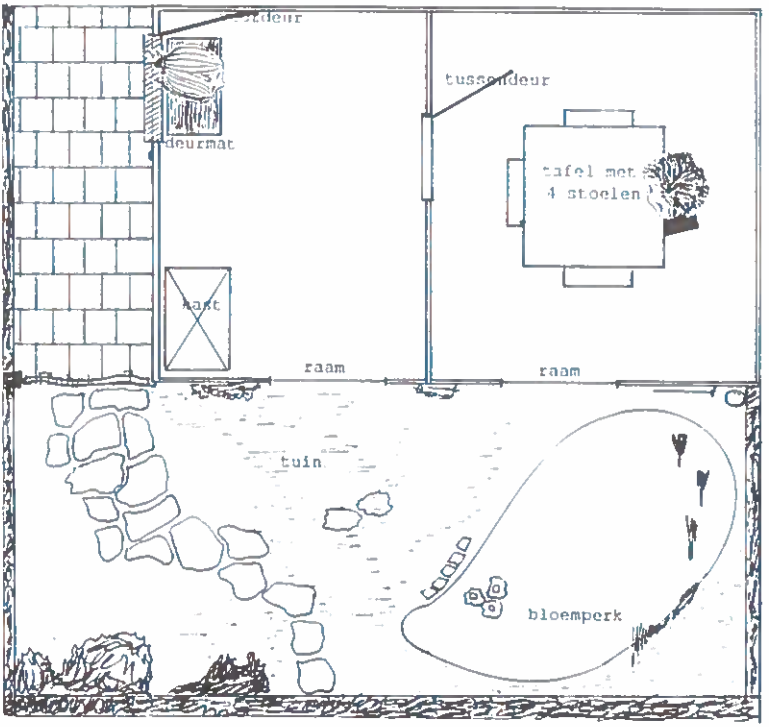
Keuzes over aansluiting:

- De aansluiting vanuit het basisonderwijs moet goed zijn.
- Leerlingen moeten voldoende meetkunde meekrijgen om in het vervolgonderwijs uit de voeten te kunnen.
- Meetkunde is ook steunvak.
- Afhaken bij één onderdeel mag niet fataal zijn.

wat kun je zien?

Van boven af gezien:
twee kamers, tuin;
twee ramen, tussendeur;
tafel, vier stoelen (drie wit, een zwart).
Jij staat op de deurmat, je vriendin zit op de zwarte stoel.

> *Maak het stuk van de rechterkamer dat jij vanaf de mat kunt zien grijs.*



'Kijk, een roodborstje in de tuin', zegt je vriendin.
Je kijkt en je kunt het óók zien.
> *Waár in de tuin zou het roodborstje kunnen zitten?*
Kleur dat stuk van de tuin rood.

fig. 1: Een typische kijkmeetkundeopgave.

KIJKMEETKUNDE

Wat is kijkmeetkunde? Een eerste verkenning

Allerlei soorten afbeeldingen van de werkelijkheid spelen een grote rol bij het gebruiken van meetkunde. Vaak - niet altijd - geven afbeeldingen ongeveer weer wat vanuit een bepaald standpunt of vanuit een bepaalde richting gezien wordt.

Kijkmeetkunde houdt zich speciaal met dat onderwerp bezig: de relatie tussen afbeelding en werkelijkheid en de rol van het kijken zelf daarbij. Daarbij worden veel meetkundige technieken gebruikt, die ook in andere toepassingen van de meetkunde van nut zijn.

Een voorbeeld

Om tot een nauwkeuriger afbakening te komen, nemen we eerst een typische kijkmeetkunde-opgave onder de loep.
De opgave gaat uit van een schetsmatige tekening van twee kamers en een tuintje. Er zijn twee personen aanwezig, in elke kamer één. Zie figuur 1, pag. 26.

Gevraagd wordt in feite naar het gebiedsdeel van de tuin, dat beide personen kunnen zien; in de terminologie van de opgave: waar kan het roodborstje zitten zodat jij (op de deurmat) én je vriendin (in de rechterkamer) het allebei kunnen zien.
De opgave is gebruikt in een derde klas; de leerlingen hadden al eerder opgaven onder ogen gehad waarbij de oplossing gevonden wordt door lijnen te trekken vanuit een op de tekening aangegeven oogpunt. In figuur 2 (pag. 28) is een uitwerking van de opgave te zien.

Het gebied wordt bepaald door rechte lijnen vanuit het oog van de kijkende personen te trekken; de lijnen lopen juist langs de rand van het raam.

Op het eerste gezicht is dat allemaal tamelijk eenvoudig. Er blijkt echter méér achter te zitten. Dat werd duidelijk toen gevraagd werd of het roodborstje inderdaad bij X (zie figuur 2) zichtbaar zou zijn. Een leerling zei: "Nee, want dan zit ie onder het raam". Volgens een andere leerling kon het wèl, want "misschien is het wel zo'n raam tot op de grond; op zo'n plattegrond is dat niet te zien". Al was dat niet expliciet met de opgave bedoeld, het verband tussen echte ruimte en vlakke afbeelding werd er bij betrokken. Een derde leerling had eerst niet goed uit de tekst bij de opgave begrepen dat ze zich ook in het standpunt van de vriendin in de andere kamer moest verplaatsen. Toen ze dat later wel begreep zei ze: "Oh, en dan moet je dat kruisen."

De essentie van de opgave was daarmee uitstekend onder woorden gebracht: het gaat om een constructie waarbij de combinatie van uit twee standpunten verkregen gegevens van belang is.

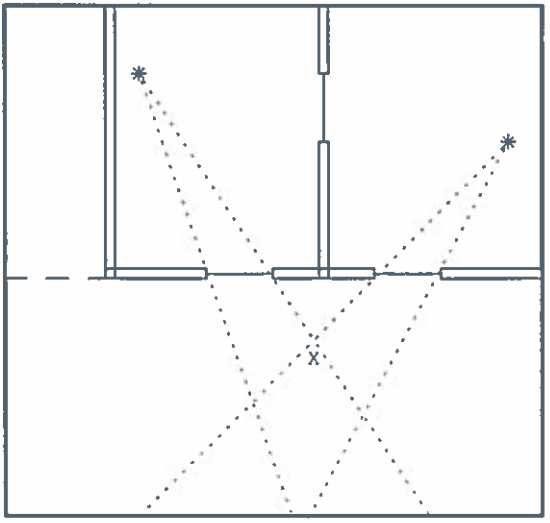


fig. 2: Globale uitwerking van de opgave van figuur 1.

De zes belangrijkste thema's

Aan de hand van het voorbeeld geven we nu zes elementen aan die voortdurend in de kijkmeetkunde terugkeren. Enkele ervan corresponderen met wiskundige begrippen, andere meer met meetkundige activiteiten. In de volgende paragraaf (De inhouden van de kijkmeetkunde, pag. 32) zullen we aan de hand van deze zes thema's de inhouden en activiteiten die bij kijkmeetkunde betrokken kunnen worden uitvoerig beschrijven, voor zover ze in het kader van de W12-16 meetkunde van belang zijn.

De kijklijn

De kern van de constructie in het voorbeeld is het tekenen van lijnen, vanuit een oogpunt. Blijkbaar heeft kijken vanuit een oogpunt iets met rechte lijnen te maken. We noemen deze lijnen vanuit het oog voortaan *kijklijnen*.

De rol van het standpunt

In het voorbeeld werd vanuit twee standpunten gekeken: vanaf de

deurmat en vanaf een stoel in de rechter kamer. Dingen worden vanuit verschillende standpunten verschillend gezien. Het lijkt een triviale opmerking, maar de precieze uitwerking ervan geeft aanleiding tot rijke meetkunde.

Kijkhoeken

Het zichtbare gebied werd ingeklemd tussen twee kijklijnen. De wijdte van zo'n gebied wordt bepaald door de hoek die de twee lijnen maken in het oog. Zo'n hoek heet een *kijkhoek*. Kijkhoeken hebben ook te maken met hoe groot iets eruitziet; het gaat daarbij om de 'hoek waaronder je iets ziet'.

Aanzichten en verklaringen

In het voorbeeld werd getekend in een bovenaanzicht van de situatie. Vaak zullen ook andere aanzichten een rol spelen. Als bijvoorbeeld zou worden ingegaan op de kwesties die met de hoogte van het raam te maken hebben, zou een zijaanzicht geschikter zijn. Tekenen van aanzichten is een middel, waarmee verklaringen van verschijnselen rond het kijken worden gegeven. Aanzichten worden ook gebruikt om ruimtelijke objecten met vlakke afbeeldingen te beschrijven.

Afbeeldingen in soorten

In het voorbeeld beweerde een leerling: de hoogte van het raam is op de plattegrond niet te zien. Daarmee wordt in feite vastgesteld dat bij het afbeelden van de ruimte op een tekening informatie verloren gaat. Hoe het afbeeldingsproces verloopt, bepaalt wat nog wel en wat niet te zien is. Kijkmeetkunde gaat daarom ook over de relatie ruimte/afbeelding, de techniek van het afbeelden zelf en over de soorten afbeeldingen die gebruikelijk zijn. Er zijn er méér dan de genoemde aanzichten.

Constructies

In het voorbeeld werd een gebied bepaald door vier lijnen te tekenen die elk door twee gegeven punten gingen, namelijk één oog en één raamrand. Het is typisch wat in de meetkunde een *constructie* wordt genoemd. Bij kijkmeetkunde komen allerlei constructies voor.

Drempels

Bij het beoefenen van kijkmeetkunde treden regelmatig dezelfde

moeilijkheden op. Het zijn drempels die genomen moeten worden. Opmerkelijk is dat volwassenen én jonge leerlingen vaak op dezelfde blokkades stuiten.

We menen een aantal van die blokkades redelijk in kaart te kunnen brengen.

In de paragraaf 'Deelnemen en toeschouwen' (pag. 74) gaan we hier nader op in.

Vervlechting

Zonneklaar is dat de schets van deze zes thema's niet geïnterpreteerd moet worden als een indeling van de kijkmeetkunde in deelgebieden.

In het voorbeeld treden ze al simultaan naar voren, en het is nauwelijks mogelijk ze los van elkaar te maken in één situatie. Dat heeft zijn consequenties voor de manier waarop kijkmeetkunde geleerd wordt. Uitgangspunt zal steeds weer een kijkervaring zijn die onderzocht wordt. Het onderzoek kan resulteren in extra aandacht voor één van de genoemde thema's, maar zelden zullen andere zaken volledig uit zicht raken.

Bij het nader beschrijven van waar kijkmeetkunde over gaat zullen we ook de vervlechting met andere delen van de meetkunde aangeven.

Licht, kijken en schaduw

De rechtlijnige gang van het licht is een natuurkundig verschijnsel. Strikt genomen is 'kijken' en 'afbeelden' dan ook slechts de buitenwiskundige context waaraan een groot stuk meetkunde wordt gekoppeld. Toch nemen we 'kijkmeetkunde' als zelfstandig onderdeel in het meetkundeoverzicht op, omdat kijkmeetkunde voor een fraaie verbinding zorgt tussen diverse onderdelen van de meetkunde.

Een deel van de meetkundige constructies die bij de kijk-context op natuurlijke wijze ontstaan, keren terug bij werken met licht en schaduw. Het verband is dat alles wat vanuit één punt gezien kan worden, ook vanuit dat ene punt belicht kan worden door een lampje. Vandaar dat de context licht en schaduw ook een rol speelt bij het beoefenen van kijkmeetkunde; soms zelfs bepaalde voordelen biedt. Dat is bijvoorbeeld zo als het verschil tussen parallelprojectie en centrale projectie wordt geïllustreerd met schaduwvorming door zonlicht en lamplicht.

Een verschil tussen de kijkcontext en de schaduwcontext is wel, dat we bij kijken deelnemer kunnen zijn met onze eigen ogen en bij schaduw alleen toeschouwer.

Zien en tekenen: een verschil

Voor een goede beoordeling van reacties van leerlingen op het gebied van kijkmeetkunde is het gunstig ook wat buiten-wiskundige kennis te hebben over kijken en de relatie met afbeelden. Ook voor het ontwerpen van leerlingenmateriaal is dat van belang. Het voornaamste is het inzicht dat de voor ons 'normale' manieren van afbeelden (fotografie, perspectief) in feite culturele codes zijn die niet altijd gegolden hebben en vaak nu ook niet voor iedereen gelden.

Inzicht in deze problemen hoort niet tot de expliciete leerstof voor de leerlingen, zéker niet voor 12-16 jarigen, maar is wel van belang voor degenen die het leerproces begeleiden: docenten en degenen die leerlingenteksten ontwerpen.

Bij onvoldoende herkenning van de problemen die hier kunnen ontstaan komt het anders tot onnodige misverstanden. De paragraaf 'Tekenen wat je ziet?' (pag. 82) geeft hier een kleine bijdrage.

Kijkmeetkunde opgebouwd

In de genoemde paragrafen wordt veel aangedragen om tot een concrete invulling van de leerlijn kijkmeetkunde te kunnen komen.

In de paragraaf 'Kijkmeetkunde leren' (pag. 89) leggen we ook nog verband met de in hoofdstuk 17 geschetste fasering.

Kijkmeetkunde is oud

In dit hoofdstuk is als illustratie een rotstekening van 2000 jaar voor Christus opgenomen en komt een afbeelding van een röntgenscanner uit 1990 voor.

Het ligt daarom voor de hand iets van de geschiedenis van dit stukje wiskunde te belichten. In de paragraaf 'Enkele grepen uit de geschiedenis van de kijkmeetkunde' (pag. 92) doen we dat. We noemen daarbij ook enkele bronnen ter inspiratie.

De inhouden van de kijkmeetkunde

In deze paragraaf bespreken we de zes genoemde basiselementen van de kijkmeetkunde wat nader. Steeds nemen we eerst de meer theoretische kant ervan onder de loep en gaan daarna in op zaken die bij het onderwijs van belang zijn. Daarbij richten we ons hoofdzakelijk op het C/D-niveau.

De kijklijn

Het is bijna een cirkelredenering als we beweren dat licht zich volgens rechte lijnen voortplant. We hebben namelijk haast geen andere manier om vast te stellen of drie punten op een lijn liggen, dan door 'kijken'. We controleren of een lat of een liniaal recht is door erlangs te kijken. In feite doen landmeters bij het uitzetten van een rechte lijn in het landschap niet anders, zij het met behulp van enige optische versterking. Wat gebeurt er eigenlijk precies als we kijken of drie (puntige) paaltjes in een veld op een lijn staan?

We kijken vlak over het eerste paaltje naar de andere twee en we zien ofwel zoiets als figuur 3 ofwel zoiets als figuur 4.

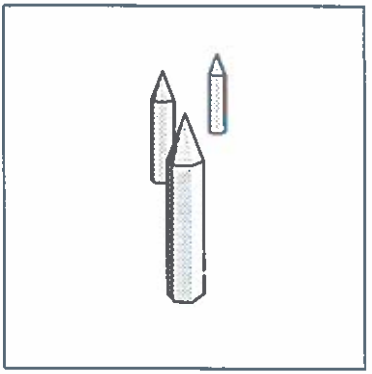


fig. 3

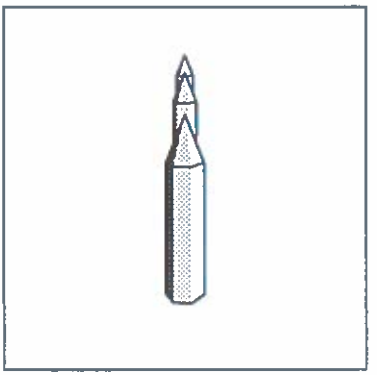


fig. 4

Eigenlijk zijn er in het geval van figuur 4 drie kijklijnen van ons oog naar de drie paaltopjes. Als we nog iets zakken met ons oog vallen ze samen: de puntjes van de paaltjes liggen op één lijn. Bij figuur 3 zal dat niet lukken.

De kijklijn is de weg waarlangs licht zich vanaf één paalpuntje naar ons oog beweegt. Dat die weg recht is, is een natuurkundig gegeven. In feite maakt het niets uit of we ons voorstellen dat we de wereld aftasten met kijklijnen die van ons oog uitgaan, of dat we ons voorstellen dat er licht vanaf de wereld naar ons toe komt. In beide

gevallen gaat het om rechte lijnen. Om verschijnselen te verklaren te-
kenen we in schetsjes die rechte lijnen. Daar begint de kijk*meetkun-
de*. De natuurkundige achtergrond is dan verder niet meer nodig.

Een officiële term voor het op één lijn proberen te zien van dinger is 'viseren'. Het woord hangt natuurlijk met 'vizier' samen. Daarbij denken we dan meer aan het vizier op een richtkompas of geweer dar aan het vizier van een middeleeuwse helm.

Kijklijnen en leerlingen

Niet alle leerlingen in de brugklas zijn met de praktijk van het viserer bekend. Het is echt een ervaring die doorgemaakt moet worden. Eer enkele illustratie (figuur 5) is genoeg voor de toelichting, maar zel doen hoort hier beslist bij.

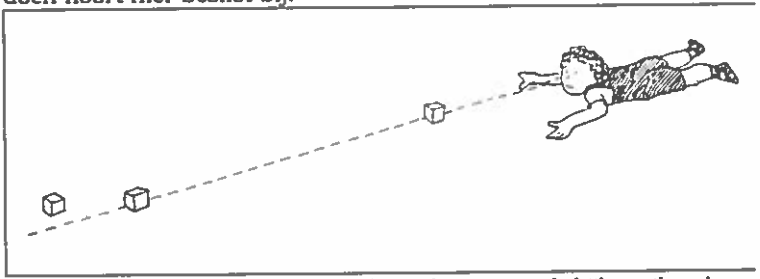


fig. 5: Kijken langs rechte lijnen, een basiselement van de kijkmeetkunde.

Van die ervaring naar het gebruiken van de kijklijn in een tekening i dan toch nog wel een stap. Bij zelf viseren zie je de lijn niet, maar bi de in figuur 6 gestelde opgave is tekenen met een liniaal of ande recht voorwerp de enige weg.

fig. 6: Kun je de torenhaan over de boom zien vanaf het oogpunt?

De les is: ook al sta je niet zelf in dat weitje, toch kun je vinden of j de torenhaan over de boom ziet. Het trekken van de lijn tussen oog punt en torenhaan beslist.

Het is nodig ergens in het leerproces precies te laten verwoorde dat de lijn vanuit het oog getrokken moet worden naar óf de torer haan óf de boomtop. Allebei is mogelijk, maar de lijn juist over d

boomtop lopend moet wel tot de toren worden doorgetrokken.

Een voor de hand liggend probleem is: waar vandaan kun je nog nèt het topje van de torenhaan boven de boom zien. Dat vraagt om de omgekeerde constructie. Nu is het oogpunt onbekend en moet de lijn torenhaan-boomtop richting grond worden getrokken. Dat is in principe lastiger, maar als vervolg op de eerste opgave goed mogelijk. Het al getekende oog namelijk suggereert andere mogelijke plaatsen. Deze suggestie van 'mogelijke plaats' zullen we vaker tegenkomen.

Maken we van de toren een lichtmast, dan is het weer wel simpel de schaduw van de boom te tekenen; de richting van het denken is anders, nu van boven naar boomtop naar gras. Toch zijn er leerlingen die ook hier niet direct met rechte lijnen werken en die een vaag gevoel hebben dat de lamp (of zon) iets donkers achter de boom neergooit.

Het is dus nuttig eens heel duidelijk zo'n lichtlijn, of schaduwlijn, in de ruimte te voelen. Op een zonnige ochtend kan dat bijvoorbeeld zo:

Laat iemand een klein rondje in het zonlicht houden. Stil houden! Vang de schaduw erachter op en leg de schaduw op de grond. Welke figuur maakt je hand dan? (zie figuur 7)

fig. 7: Schaduw vangen

Het plakkertje houdt een dun lichtbundeltje tegen, op de tast is te volgen waar het licht niet komt. Maar het is toch lastig, voor je het weet ontsnapt de schaduw! Het nut van zulke activiteiten is het be-

wust maken van de rechtlijnigheid. Bij andere activiteiten, bijvoor beeld bij het roodborstje uit de inleiding van dit hoofdstuk, mag e geen twijfel meer over bestaan dat de opgave met de liniaal moet wor den gedaan en dat die liniaal héél precies gelegd moet worden.

Recht overigens, dat is een eigenschap van de lijn. Sommige leer lingen vonden de schaduwlijn niet recht, maar schuin. De stand var de lijn was niet recht. Ze hadden gelijk; maar er zijn van die afgespro ken woorden die erbij horen. Met recht bedoelen we dus: niet krom.

Leerlingen - sommige - vonden uit dat je tamelijk snel de schaduv kunt volgen als je eerst een touw spant van het papieren rondje naa de schaduw op de grond. De rechte lijn van het licht is dezelfde recht lijn van de kortste verbinding; eigenlijk een diepzinnige vaststelling!

Ook de omkeerbaarheid van de kijklijn kan getest worden, dat i weer een andere mogelijkheid om de rechte lijn 'fundamenteel' te be kijken. Bijvoorbeeld als volgt:

Twee leerlingen, J en M staan vier passen van elkaar af. J doet één oo dicht en houdt een potlood in de uitgestrekte arm, zo dat hij precies d punt vóór een van M's ogen ziet. M kan zien wélk oog het is!

Een samenvatting:

- Experimenteren met viseren in het echt.
- De rechte lijn op de tast onderzoeken.
- Tekenen van viseerlijnen door gegeven punten, ook zonder gege ven oogpunt.
- Terminologie: oogpunt, kijklijn, rechte lijn.
- Omkeerbaarheid van de kijklijn.

De rol van het standpunt

Als we naar twee punten kijken, zeg A en B in figuur 8, vanuit pur P, dan zien we A links van B. (We nemen aan dat het een bovenaar zicht is.) Vanuit Q is A juist rechts van B. Zouden we van P naar lopen, dan zouden we A vóór B langs naar rechts zien bewegen.

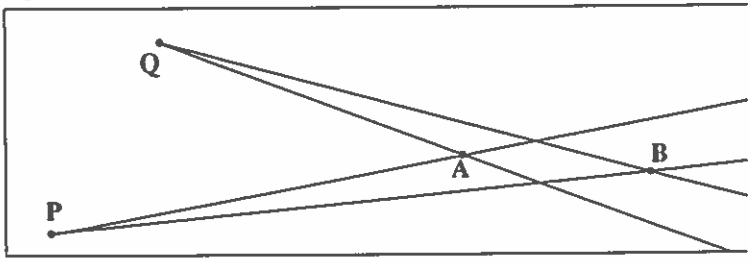


fig. 8

In principe is dat de verklaring van:

- Waarom het landschap lijkt te draaien als we vanuit een rijdende trein naar een boom in de verte kijken. Wat vóór of achter de boom staat beweegt zich dan schijnbaar in tegengestelde richtingen ten opzichte van de boom.
- Waarom de maan ons volgt als we door een straat lopen: B is dan de maan en heel ver weg. A is een schoorsteen op het dak. De lijnen naar B zijn bijna evenwijdig.

Als we denken dat Q ons linkeroog is en P ons rechteroog, dan is het ook een verklaring voor diepte zien met twee ogen: ons brein vertaalt de tegenstrijdige informatie over A links-of-rechts van B in: A vóór B. We hebben hier alleen besproken hoe de schijnbaar onderlinge posities van voorwerpen door het standpunt worden gewijzigd. De schijnbare gedaante van voorwerpen zelf komt later aan bod.

Standpuntproblemen en leerlingen

Dat onze twee ogen met onze hersens samen zo perfect diepte kunnen vaststellen kàn onderwerp van onderzoek zijn voor leerlingen. Het is echter geen makkelijk onderwerp is, omdat we ons van de snelle reacties in onze hersenen niet bewust zijn. We zien alleen: A ligt voor B. Maar het thema standpunt kan ook op andere wijze aan bod komen.

In figuur 9 is links een ronde tafel in bovenaanzicht getekend met een luciferdoosje, bal en poppeschoen erop.

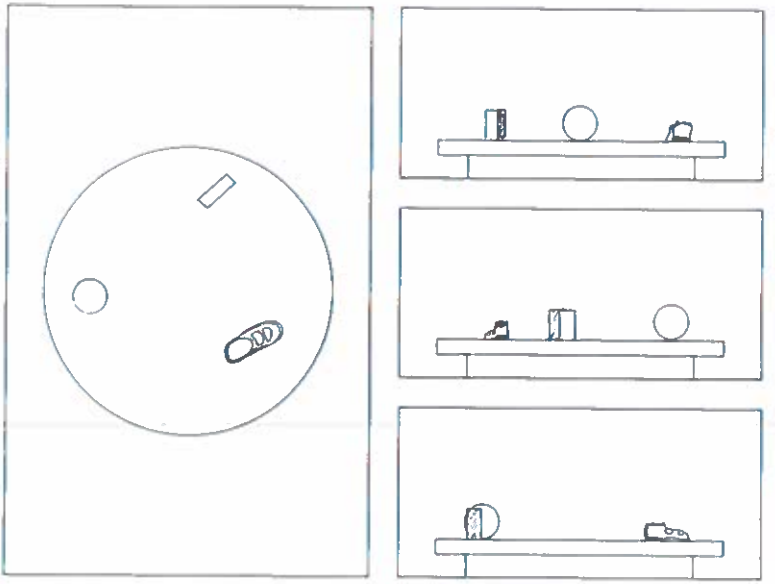


fig. 9

Met pijlen moet in de zone om de tafel aangegeven worden vanwaar de rechter plaatjes worden gezien (eentje kan niet!).
In gedachten loop je dan om de tafel en zo denkend maak je je de ordening bewust. Het voorstellingsvermogen wordt daarbij zwaar op de proef gesteld.

Hier ging het alleen nog om ordening – het zien van wat schijnbaar links en rechts van elkaar ligt – maar later zullen we opgaven laten maken waarin het er subtieler toegaat, waar de onderlinge grootte van de kijkhoeken erbij betrokken moet worden.

Dat voorwerpen er van verschillende standpunten gezien anders uit lijken te zien, spreekt vanzelf. De interessantere vraag is hóe ze eruit lijken te zien. Dat komt bij het onderdeel aanzichten ter sprake.

Samenvatting

- 'Standpuntverandering' kan echt plaats vinden of mentaal.
- 'Mentaal verplaatsen' geeft elementair oefenen van het ruimtelijk voorstellingsvermogen.

Kijkhoeken

Wat verder is, lijkt kleiner. Maar een dromedaris die van ons af loopt, wordt niet écht kleiner. Niet in grootte, maar wel in de hoek die de kijklijnen maken, zie figuur 10.

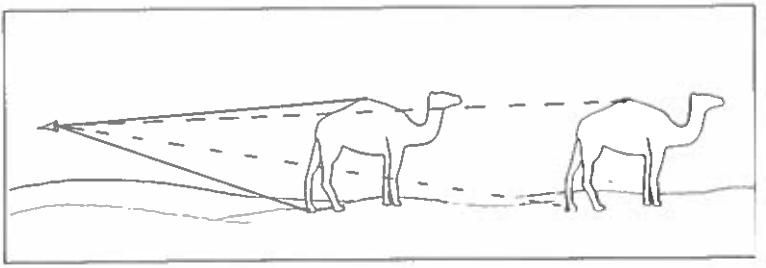


fig. 10

De hoek die twee kijklijnen bij het oog maken heet *kijkhoek*.
Het begrip kijkhoek is een van de middelen om zulke schijnbare vorm- of grootteveranderingen te beschrijven. Het is een bijzondere gave vorm van het begrip hoek. De kijklijn staat, doordat deze in het oog begint en naar de verte wegloopt, veel meer voor richting dan voor lengte. Het weggelopen beest lijkt kleiner, terwijl de figuur van de twee kijklijnen en de dromedaris ertussen juist groter is geworden.

In het geval van de dromedaris is de kijkhoek in een verticaal vlak gevat, maar kijkhoeken kunnen natuurlijk ook horizontaal optreden

Denk aan de hoek die een voetballer ziet tussen de doelpalen vanaf de penaltystip.

Als het om zaken gaat die wat verder weg liggen, torens of bouwwerken, die vanaf een uitzichtpunt worden gezien, kunnen we vrij goed horizontale kijkhoeken op het oog vergelijken. In de verticale richting is dat moeilijker. Het is bijvoorbeeld bijna ondoenlijk zo op het oog een ster aan de nachthemel uit te zoeken die 45° boven de horizon staat, precies tussen zenith en horizon dus. We wijzen in het algemeen te laag. Ook laten we ons beduvelen door dingen die nu eens hoog, dan weer laag staan, zoals de maan. Controleren wijst uit dat de hoge maan dezelfde kijkhoek beslaat als een pinknagel op armafstand en dat het voor de maan bij de horizon exact zo is. Ons gevoel spreekt daar het experiment tegen.

Vanuit het oog kunnen we met vingers, vuist en handspan direct kijkhoeken meten. Vuistregel is dat 1 cm op ongeveer 60 cm afstand (een uitgestrekte arm) ongeveer 1 graad is. Daarbij gaat het om een grove manier van werken.

Het komt in de praktijk vaak voor dat de twee kijklijnen van de kijkhoek verschillende rollen hebben. De ene is een vaste referentierichting, de andere duidt dan een richting aan.

fig. 11: Landmeters aan het werk volgens de aanwijzingen van Levinus Hulsius, de Duitse landmeter. Bij de (zeer) diverse metingen wordt gebruik gemaakt van een loodlijn als referentierichting.

Twee voorbeelden:

- Het meten van richting ten opzichte van de referentierichting 'noord'. De traditie wil dat we rechtsom draaiend meten.
- Het meten van hoogtehoeken ten opzichte een horizontale lijn als referentierichting.

In figuur 11 (pag. 38) zien we dat bij veel van de gebruikte instrumenten ook een loodlijntje aanwezig is voor de referentierichting.

Kijkhoeken en leerlingen

Een aardige startactiviteit is het meten van het blikveld. Bij de opgave in figuur 12 is een hoofdje te zien in bovenaanzicht. De opgave beschrijft wat gedaan moet worden.

Doe je linkeroog dicht en kijk alléén met je rechteroog. Houd je hoofd stil. Steek je twee armen naar voren en kijk naar je handen.
Beweeg eerst je linkerhand naar links; langzaam, tot die achter je neus verdwijnt.
Beweeg dan je rechterhand naar rechts (hoofd nog steeds stil) tot die ook niet meer te zien is.

Teken de stand van je armen in deze tekening. Je ziet je hoofd van boven. Je neus wijst naar de bovenkant van de bladzijde.

fig. 12: Meten van het blikveld

Ook hier weer heel expliciet de overgang van echt doen naar tekenen. In de tekening kan pas gemeten worden. De kijklijnen vanuit één oog langs de uiterste standen van de handen vormen de kijkhoek.

We laten uiteraard hoeken opmeten in handspannen, en meten ook de handspan zelf. De interessante manier is een vol rondje om je zelf heen hand te spannen. Praktisch iedereen komt tot achttien

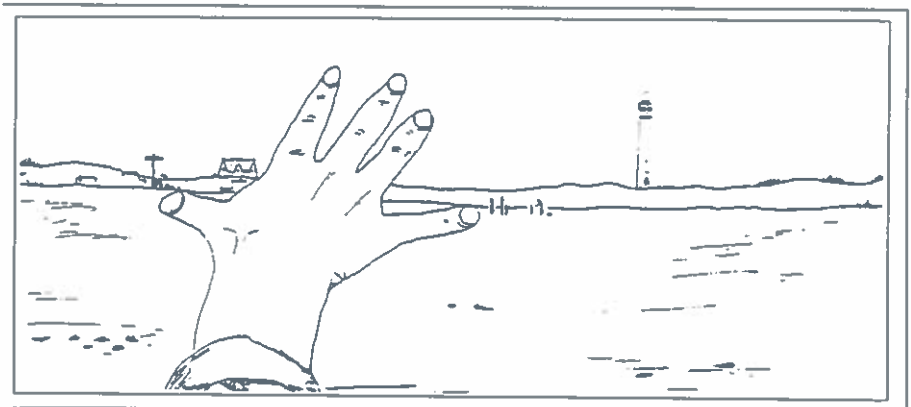
handspannen, dus tot ongeveer 20° voor één handspan. Ook laten we objecten zoals een persoon op 100 meter afstand, de zon en de maan met handspannen, vingerbreedten of pinknagels meten.

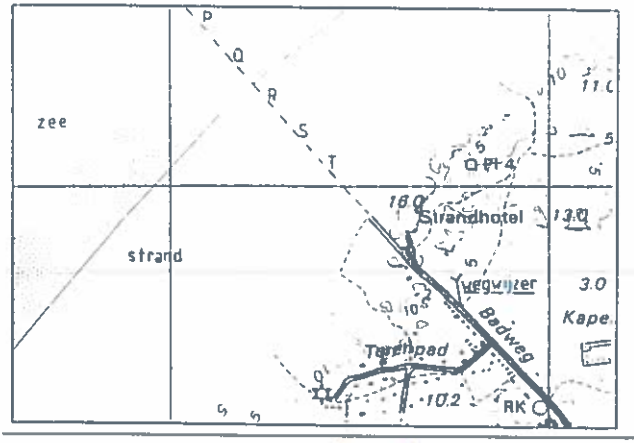
Allerlei situaties lenen zich voor oefenen in meten van hoeken. In kijkhoektaal bijvoorbeeld:

- Mensen staan op één lijn op onderling gelijke afstanden. Jij meet, van buiten de lijn, kijkhoeken. Zijn die gelijk?
- Net zo, maar op een cirkel. Jij staat middenin, of óók op de cirkel.

Deze activiteiten gaan simpelweg met getekende lijnen, cirkels en stippen. Het is natuurlijk wel oefenen met de geodriehoek, maar er wordt ook een essentieel verschil tussen de situaties ontdekt: niet altijd geven gelijke afstanden gelijke hoeken.

Bij de cirkelopstelling is duidelijk dat vanuit het midden gelijke hoeken worden gezien. Maar ook vanáf de cirkel gezien, geven op gelijke afstanden opgestelde mensen gelijke kijkhoeken. Merkwaardig! het hangt van de klas af of er op in gegaan kan worden.





De kijkhoek tussen Badweg (de paal bij de duim) en vuurtoren is anderhalve handspan, zeg 30°.

Knip een papieren hoek van 30° en schuif die over het kaartje. Zo vind je de plek waar je staat op de kaart.

Is het P, Q, R, S of T?

fig. 13: Positiebepaling met behulp van kijkhoek.

Het omgekeerde is: punten vinden waarvanuit iets onder een gegeven hoek wordt gezien. Dat kan gedaan worden zoals bijvoorbeeld in het voorbeeld van figuur 13 (pag. 40).
In dit voorbeeld wordt een papieren hulphoek gebruikt. Met P, Q, R, S, T wordt een range mogelijkheden gesuggereerd. Weer gaat het om het terugvinden van het oogpunt, net als bij het geval van de torenhaan. Vóór het komt tot het inzicht dat direct één lijn in de juiste richting *vanuit de vuurtoren* wordt getrokken, zijn diverse van zulke meer zoekgerichte activiteiten nodig. De stap van het onbekende standpunt naar de vuurtoren is nogal een grote.
In dezelfde categorie hoort de vraag: waarvandaan zie je het voetbaldoel onder 90°?
Weer is het van belang dat gewoon geprobeerd kan worden. De middelen zijn eenvoudig: een hoekje van een rechthoekig vel papier en twee stippen voor de doelpalen. Natuurlijk zoveel mogelijk punten laten vinden. Leerlingen ontdekken de halve cirkel.

Kijkhoeken in de verticale richting laten we óók voorkomen. En de vraag of het wel goed gaat als we de hoogte van de school in handspannen opmeten:

Zet je vriendin tegen de muur. Ga zover staan dat ze van jou uit gezien één handspan hoog is. Meet nu de schoolhoogte in handspannen. Kun je zo de échte hoogte van de school meten?

Meetkunde leren is niet alleen leren 'hoe het kan', maar ook leren beslissen wanneer iets niet goed gaat!

Het verband tussen 'ver' en 'schijnbaar klein' kan ook concreet onderzocht worden. Zie figuur 14 (pag. 42). Daar wordt een stok steeds een pas verder van de waarneemster af gelegd en er wordt gemeten hoeveel centimeter van een liniaal op armlengte nodig zijn om de stok voor het oog af te dekken. De foto geeft de situatie weer, de opdracht staat eronder.

Strikt genomen worden in dit geval lengtes gemeten en nog op variërende afstanden ook. Toch is de ontdekking duidelijk: de kijkhoek is kleiner, naarmate de stok verder weg ligt. Omdat het hier om kleine hoeken gaat, is de gemaakte fout (de verwarring van lengte en hoek, niet in getalmaat maar in concept) niet ernstig, temeer daar we voor grote hoeken juist het conflict op de spits drijven met bijvoorbeeld de duidelijk foutieve hoogtemeting van zoeven. Ook de in het begin genoemde situatie met de mensen op gelijke afstanden zorgt voor de vaststelling dat hoek en lijnstuk zelden evenredig toe en afnemen.

Doe dit met z'n tweeën.
Leg een stok dwars voor je op de grond. Kijk hoeveel cm je van een liniaal nodig hebt om de stok af te dekken. Schrijf dat op.
Laat de stok steeds een stap verder weg leggen.

Maak een lijstje:

hoe ver de stok weg ligt	nodig om de stok juist af te dekken
1 stap	..... cm
2 stappen	..... cm
3 stappen	..... cm
enz.	enz.

Schrijf op wat je merkt aan de getallen in de rechterkolom. Schrijf ook op wat er met de stand van je arm gebeurt, die de liniaal vasthoudt..

fig. 14: Stappen met stokken en afnemende hoeken.

Samenvatting

- Kijkhoeken meten in werkelijkheid. Dus vanuit het oog met behulp van andere lichaamsdelen als handspan, vingerbreedte.
- Kijkhoeken meten op papier waarbij het oogpunt is aangegeven
- Punten opzoeken als de kijkhoek naar twee punten gegeven is.
- De relatie tussen 'verder' en 'kleiner' in verband met kijkhoeken.
- Voorbereiden van inzichten die met de relatie lengte-hoek op vaste afstand te maken hebben.
- Meten van enkele klassiekers: de hoek van de zon (voorzichtig, alleen bij lage zonnestand of mistig weer!), de maan, een mens op 100 meter.

Aanzichten en verklaringen

In de kijkmeetkunde worden aanzichten op twee manieren gebruikt:
- als schets van een situatie waarin met kijklijnen wordt gewerkt om verklaringen te geven van verschijnselen;
- als speciale manier van afbeelden.

Van de eerste manier zijn al diverse voorbeelden de revue gepasseerd. Het tuintje met de roodborst was een voorbeeld van een bovenaanzicht, de weglopende dromedaris was in zijaanzicht getekend. In beide gevallen gaat het om tekeningen die een situatie weergeven waarin gekeken wordt. De gebruiker van de tekeningen bestudeert dus een kijksituatie als buitenstaander. In tegenstelling tot het zelf kijken naar de echte dromedaris of het echte roodborstje. Daar is de kijkende persoon deelnemer.

Het opvallendste verschil tussen de voorbeelden is dat in het eerste geval van bovenaf wordt gekeken en in het tweede geval van opzij, maar er is een subtieler verschil dat we eerst willen aanduiden om met meer precisie over de aard van dit soort afbeeldingen te kunnen spreken.

De dromedaris is van 'opzij' getekend, schreven we, maar daar valt op af te dingen. De schets kon even goed een (schaal)tekening zijn van het vlak waarin het oog en de relevante kijklijnen zich bevinden. De richting loodrecht op dat vlak is niet van belang. Er is alleen een vlak uit de situatie gelicht.

Bij het roodborstje is iets anders aan de hand: uit het gesprek met leerlingen bleek dat de hoogte wèl een - zij het verborgen - rol speelt. Het bovenaanzicht was zo gemaakt, dat elke verticale lijn precies één punt op de tekening wordt, en dat was essentieel.

Bij de dromedaris zou het er niet zo veel toe doen als op de tekening een boom op de achtergrond stond, die klein getekend is, omdat hij ver weg staat. Bij het roodborstje wilden we juist absoluut het pla-

fond van de kamers niet groter tekenen dan de vloer.

Meer exact geformuleerd: het bovenaanzicht van de tuinsituatie is echt als parallelprojectie bedoeld. Via een bundel verticale lijnen die van boven komen, wordt als het ware afgetast. Alleen de bovenkant, waar zo'n verticale lijn op stuit, komt in beeld.

Kijkmeetkundig kan bijvoorbeeld 'bovenaanzicht' op twee manieren intuïtief worden beschreven:

- het is wat je ziet als je hoog ergens boven staat;
- het is wat je van boven ziet, recht naar beneden, waarbij boven dan in feite geen vast punt is.

De tweede manier ligt dicht bij het idee van parallelprojectie. Er wordt een bundel evenwijdige kijklijnen gesuggereerd.
De eerste manier lijkt daar op en wel des te meer naarmate het hoge standpunt hoger is, vooral in verhouding met de uitgestrektheid van wat afgebeeld wordt.

Alles wat hier over bovenaanzichten is gezegd, geldt na verandering van verticaal in horizontaal ook voor zij- en vooraanzichten. Een subtiel verschil is echter dat er één verticale richting is, maar dat er vele horizontale richtingen zijn. Er is maar één soort bovenaanzicht, maar er zijn zijaanzichten uit allerlei richtingen mogelijk.

In figuur 15 zijn bij één bouwsel van letterblokken drie aanzichten uit drie horizontale richtingen gegeven:

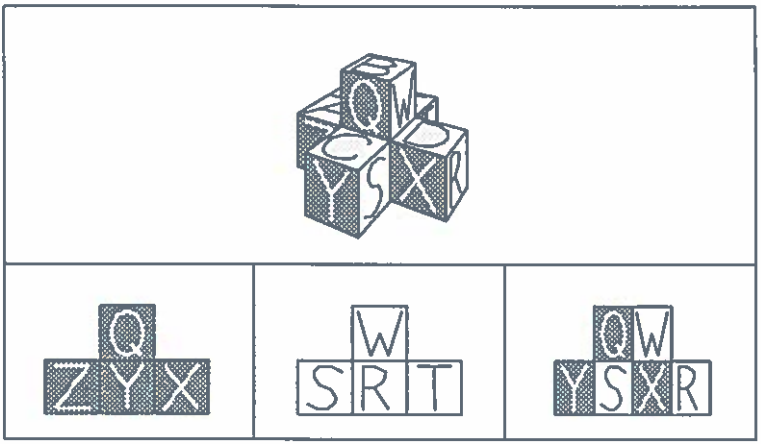


fig. 15: Blokkenbouwsel met vooraanzicht, zijaanzicht en aanzicht van rechtsvoor.

Bij het onderwerp rechte lijn merken we op dat 'recht' een eigenschap van de lijn was en van de stand onafhankelijk was. Bij aanzichten geven de karakteriseringen 'boven', 'zij', 'achter' juist de stand van voor-

werp ten opzichte van de projectierichting aan. 'Voor' is daarbij vaak nog een speciale kant van het voorwerp, terwijl boven weer met de zwaartekrachtrichting te maken heeft. Contextgebonden begrippen dus. Er is echter zelden verwarring over welke richting bedoeld wordt.

Parallelprojectie is eigenlijk algemener dan boven-, voor- en zij-aanzicht. Denk de zon als bron van evenwijdig stralen. Het proces van schaduwvorming is dan eigenlijk een vorm van parallelprojectie ook als de zon toevallig niet recht boven ons staat of juist ondergaat. Ook schuinvallende regen kan gezien worden als een concretisering van parallel projecteren.

De nauwkeurige aanzichten met het projectie-idee, zoals omschreven, worden gebruikt om ruimtelijke objecten vast te leggen. Ze worden vooral toegepast in architectuur en techniek; combinaties van meer projecties komen dan vaak voor. Daar worden ook parallelprojecties gebruikt waarbij de richting van de projecterende bundel niet loodrecht op het tekenvlak is.

Genoemd is al dat bij parallelprojectie informatieverlies optreedt: alle punten die op een projecterende lijn liggen, komen op de tekening op één punt terecht. Bij de beschrijving van de leerlingenactiviteiten komen we hier op terug.

Verklaren met aanzichten door leerlingen

Dit kennen we allemaal:

Doe één oog dicht en kijk met het andere oog naar de opgestoken duim aan een uitgestrekte arm. Wissel nu van oog, terwijl je duim stilblijft. Je ziet de duim verspringen ten opzichte van de achtergrond.

Leerlingen vinden het leuk hiermee te experimenteren, vooral als we de opdracht nog verrijken met het opmeten van de sprong op bijvoorbeeld het schoolbord. Met streepjes zetten door iemand anders kan dat. De leerling met de uitgestrekte hand stuurt dan een ander, die op de plek op het bord, waar de duim gezien wordt een streepje zet.

Verklaren van het springverschijnsel is lastig. Weinig leerlingen komen zelf met een tekening zoals in figuur 16.

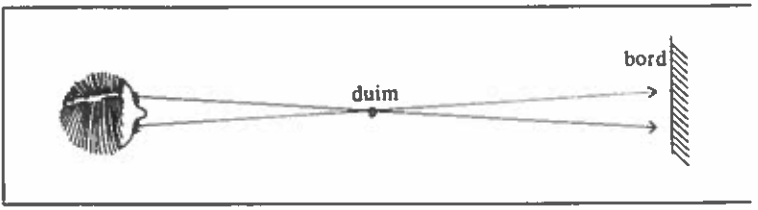


fig. 16: De duimsprong van bovenaf

De tekening geeft niet weer wat je ziet als je de duimspringproef zelf uitvoert. Leerlingen blijven bij zulke problemen vaak zitten in de rol van deelnemer en tekenen alleen hoe de duim vóór het bord verspringt. De stap van deelnemer naar beschouwende buitenstaander is lastig. Het leren gebruiken van aanzichten in een situatie als deze helpt die stap te maken. Het hulpmiddel 'aanzicht' is dan ook iets wat echt aangeleerd moet worden

Als het aanzicht gegeven is, kan er makkelijk mee gewerkt worden, zoals bijvoorbeeld in de tekening van boom en toren; moeilijkheden liggen dan vaak elders, zoals bij het bepalen van een strategie over de te trekken lijnen.

Aanzichten in de verklarende sfeer worden gevolgd door precieze aanzichten in de afbeeldingssfeer. Het eerder (pag. 44) gegeven letterblokkenbouwsel kan worden gebouwd en er kan getekend worden hoe het er van bovenaf uitziet.
Twee gevaren liggen hier:

- het oog ziet ook van boven nog wel dat er zijkanten zijn en sommige leerlingen laten ze toch in de tekening terugkeren;
- als het bouwsel uitgestrekter is, zijn zeker zijkanten te zien.

Het eerste gevaar is te bezweren door expliciet te vragen welke letters zichtbaar zijn. Het tweede gevaar kan beter vermeden worden, door te laten zien wat de conventie - want dat is zo'n bovenaanzicht - eigenlijk is. Door bijvoorbeeld bouwsel en bovenaanzicht eens naast elkaar af te beelden zoals in figuur 17.

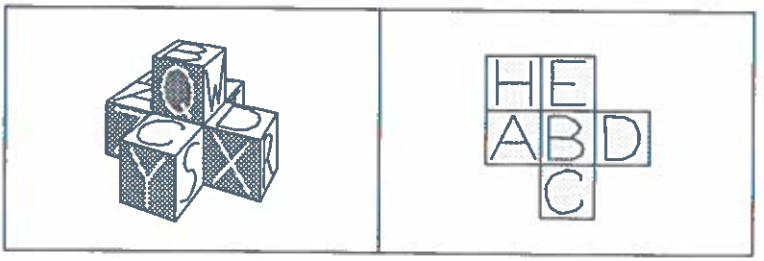


fig. 17: Bouwsel en bovenaanzicht naast elkaar.

De bedoeling is dan heel duidelijk: alle horizontale dingen worden precies goed afgebeeld.
Nu kan helder op het aspect informatieverlies worden ingegaan. Je kunt bijvoorbeeld in het bovenaanzicht niet meer zien dat B hoger ligt dan A. Na een verkenning rond zulke informatieverliezen in de plaatjes, kan een overzicht ingevuld worden, zoals via de hiervolgende opgave.

Hier is een overzichtvan wat je al ontdekt hebt.
*Het vakje met **NIET** betekent:*
*in het **bovenaanzicht** kun je **NIET** de verschillen in **boven/onder** zien*

wat is te zien	boven/onder	links/rechts	voor/achter
bovenaanzicht	**NIET**	WEL	WEL
vooraanzicht			
zijaanzicht van rechts			

Vul het overzicht verder in.

Schijnbare verkortingen, zoals het smaller worden in het schuin rechtsvoor-aanzicht, moeten hier eigenlijk ook onderzocht worden Maar in het project W12-16 beperken we ons, als het om meten ir plaatjes als deze gaat, tot situaties waarin duidelijk is dat verkortin gen geen rol spelen.
Het werken met de tabel van zoeven, voorbereid door analyse van d drie aanzichten, is een heel actieve vorm van ruimteverkenning. He van een aanzicht naar een ander aanzicht overspringen, maakt he object tot 'echt' ruimtelijk. De overgang naar toepassingen als teke ningen van gebouwen is daarom goed haalbaar.

De explicitering van wat aanzichten zijn, loopt goed via de 'gecon strueerde blokkenbouwsels, maar zowel in het begin van de leerlij als aan het eind zullen we ook met algemenere vormen werken. Denl aan droedels, zoals de bekende tekening van de Mexicaan op de fiet (figuur 18). Bij het onderwerp constructies bespreken we straks ee voorbeeld waar niet-loodrechte aanzichten van een grillig gevorm object gebruikt worden.

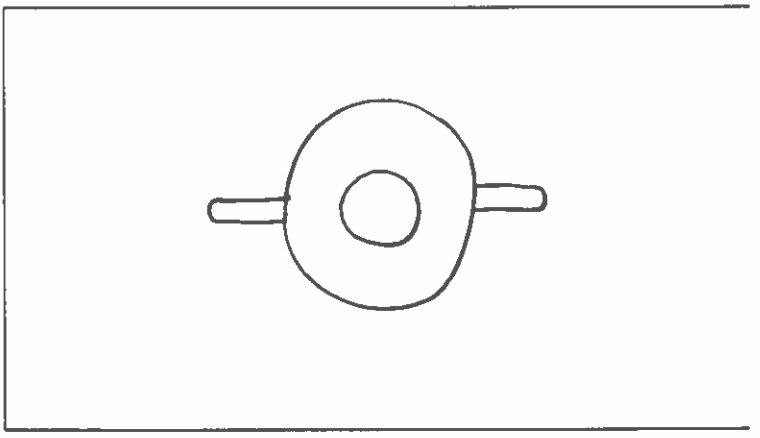


fig. 18: Mexicaan op fiets.

Samenvatting

- Zelf maken van schetsen van situaties waarin het om kijken gaat is lastig, maar wel belangrijk. De stap 'uit de situatie' is essentieel voor het redeneren.
- In gegeven aanzichten kan ook geredeneerd worden met behulp van kijklijnen.
- Aanzichten van blokkenbouwsels zijn goed om begrippen te expliciteren maar ook 'willekeuriger' objecten moeten gebruikt worden.
- De drie hoofdaanzichten (boven-, voor- en zijaanzichten) komen gecombineerd voor en krijgen de meeste nadruk.

Afbeeldingen in soorten

Bij het beschrijven van aanzichten kwam een bundel evenwijdige kijklijnen ter sprake. Maar in werkelijkheid komen de kijklijnen uit één punt, het oog. Voor het maken van afbeeldingen die zoveel mogelijk weergeven wat echt gezien wordt, kan daar op verschillende manieren rekening mee gehouden worden. Als eerste nemen we de klassieke perspectiefafbeelding onder de loep, daarna enkele manieren van afbeelden die er aan verwant zijn.

perspectiefafbeelding

Om de gedachte te bepalen nemen we het bekende Olympisch erepodium als voorbeeld. We gaan het podium van schuin-rechtsvoor bekijken, van stahoogte af. In figuur 19 is een situatieschets getekend waarin ook het oog is aangegeven én de plek waarboven het oog zich bevindt.

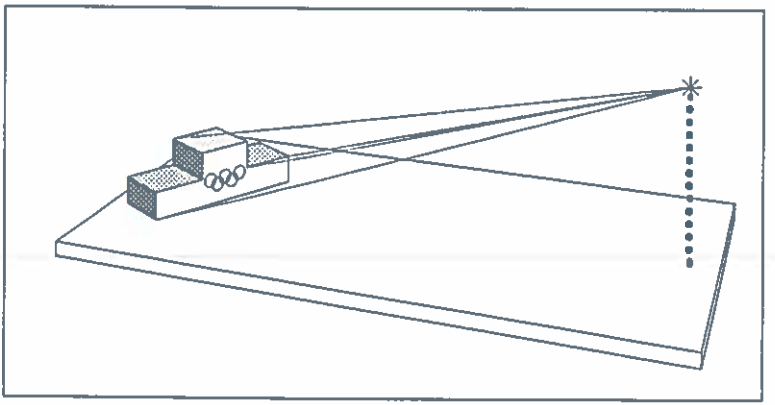


fig. 19: Het olympisch erepodium van schuin rechtsvoor bekeken.

In figuur 19 zijn ook enkele kijklijnen getekend: eigenlijk is bedoeld: alle kijklijnen van het oog naar alles wat van het podium is te zien. De kijklijnen die juist langs het podium raken, klemmen het podium in een soort kooi in. Deze kijklijnen, die als een bundel dunne draden in één punt bij het oog samenkomen, vormen wat Leon Battista Alberti in zijn boek 'De pictura' van 1435 de *zichtpiramide* noemt. Ook het beeld van de 'kooi' komt van Alberti, die zelf zegt dat hij zich over deze zaken liever in zulke ruwe termen uitdrukt dan in de woorden die wiskundigen gebruiken, 'die de vormen alleen in de geest beschouwen en geheel los van alle materie'.

Vanuit het oog worden de lijnstukken van het podium die in werkelijkheid even lang zijn, toch onder verschillende hoeken gezien. We willen nu een vlakke afbeelding maken van wat uit het oogpunt wordt gezien. We willen dan juist zorgen dat al die verschillen in kijkhoeken gerespecteerd worden.

Denk daartoe een doorzichtig vlak scherm dat rechtop staat tussen oog en het podium. Denk bijvoorbeeld het scherm als een rechtop staande grote glazen plaat, ruim hoger dan het oogpunt. Het kijkend oog moet het podium door de glazen plaat zien.
Zie figuur 20. De kijklijnen gaan dóór het scherm heen.

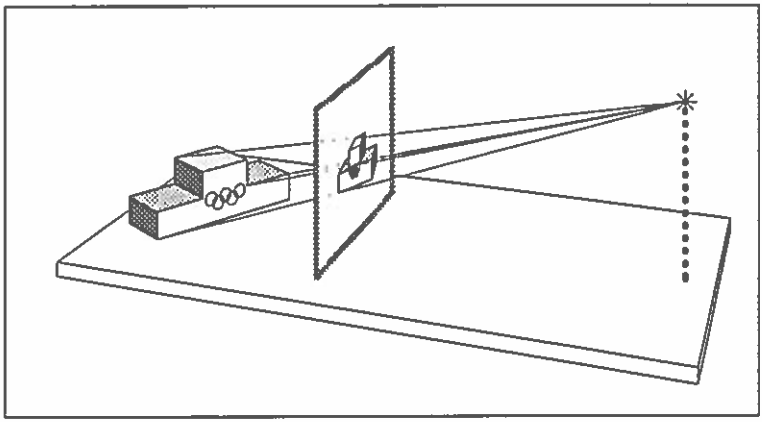


fig. 20: Erepodium met doorkijkscherm.

De plek wáár een kijklijn door het scherm gaat, denken we ons met de juiste kleur op het scherm gemarkeerd, de kleur dus van het bijbehorende punt van het podium. Het totaalresultaat van al die markeringen op het doorzichtige scherm is de *perspectiefafbeelding*.
In figuur 21 (pag. 50) is het scherm zelf op schaal getekend. Dat is dus de gedaante van de definitieve afbeelding.

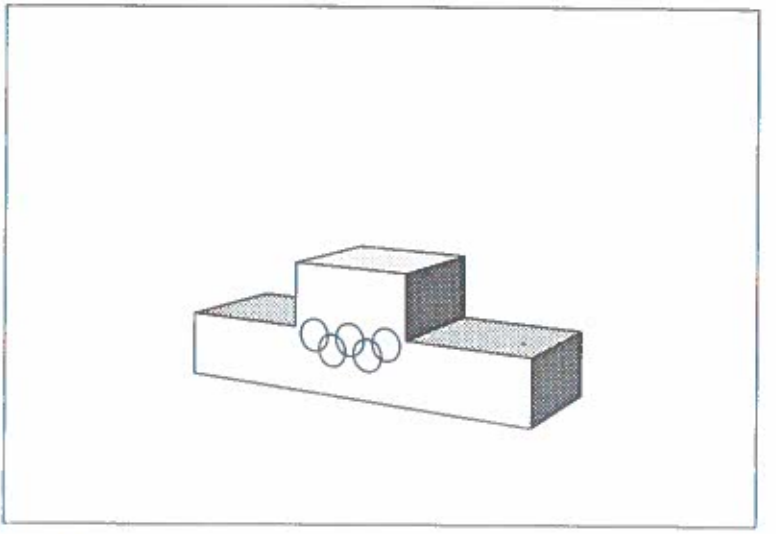


fig. 21: Het scherm zelf.

In figuur 21 is geen rechte hoek uit het object meer als rechte hoek afgebeeld. En de cirkels op de voorkant zijn ellipsen geworden, kortom: alles is vervormd.

Maar toch geldt: vanuit het oogpunt zijn de kijkhoeken naar lijnstukken op het scherm precies gelijk aan de kijkhoeken naar de corresponderende lijnstukken op het podium zelf, om de eenvoudige reden dat het om dezelfde kijklijnen gaat.
Om de afbeelding op de juiste manier te zien moeten we ons oog ten opzichte van de afbeelding in de oorspronkelijke oogpositie brengen. Hoe de afbeelding het best bekeken kan worden, in welke stand en van welke afstand, hangt dus af van de manier waarop de afbeelding gemaakt is. In de praktijk wordt daar zelden rekening mee gehouden, zodat bij het bekijken van de afbeelding niet de correcte kijkhoeken worden teruggeconstrueerd. Vooral als bijvoorbeeld het maken van de afbeelding van een heel wijde totaalkijkhoek uitgaat en de afbeelding op een relatief grote afstand wordt bekeken leidt dat tot schijnbare vervormingen.

Er is echter ook iets wat hoe dan ook in orde blijft: de manier waarop voorgrondobjecten delen van achtergrondobjecten onzichtbaar maken. En dat zijn natuurlijk verbanden in de afbeelding die sterk aan het ruimteeffect bijdragen.

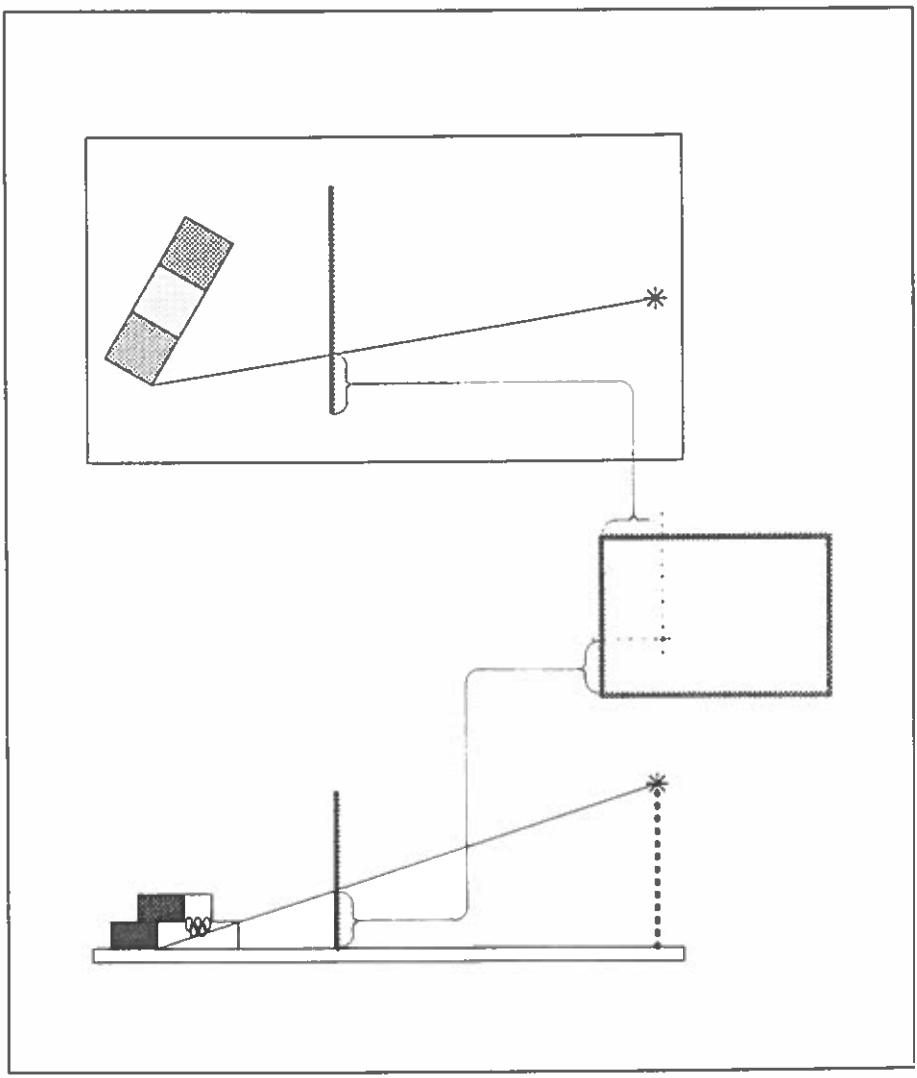


fig. 22: De constructie van Brunelleschi.
Via deze constructie is het mogelijk direct de perspectiefafbeelding op het scherm te construeren. Daartoe wordt een boven- en een zijaanzicht van de in figuur 20 geschetste situatie gemaakt. Zie boven- en onderaan in deze figuur.
In het zijaanzicht kan de schijnbare hoogte van een punt worden bepaald. In het bovenaanzicht wordt bepaald hoever de afbeelding van het punt van de linkerrand van het scherm ligt. Op het scherm worden de gegevens gecombineerd, zie middenrechts in deze figuur.

Op een of andere manier moet het gedachtenexperiment met draden als kijklijnen en het doorzichtige scherm in tekenpraktijk worden omgezet om een afbeelding op papier te krijgen. Er moet een op papier met liniaal en potlood uitvoerbare manier gevonden worden om snel de ligging van de doorgangspunten op het uiteindelijke scherm te vinden.

Er zijn diverse van zulke methodes ontwikkeld. Het begrijpelijkst is de constructie van Brunelleschi, architect van de koepel van de Dom van Florence, uit 1425. Deze constructie maakt gebruik van een boven- en een zijaanzicht van de situatie in figuur 20. In die aanzichten kunnen de hoogte en links- rechtspositie van het doorgangspunt van de kijklijnen opgemeten worden, omdat het doorkijkscherm in die afbeeldingen er als lijn uitziet. Zie figuur 22 (pag. 51) voor een verdere toelichting.

Deze constructie is mogelijk als we inderdaad boven- en zijaanzicht kunnen maken. Dat is meestal betrekkelijk eenvoudig, zoals in dit geval. Merk op dat de constructie alleen maar gebaseerd is op het kunnen maken van die aanzichten en niet op speciale eigenschappen van het te tekenen object. Door gewoon punt voor punt te werken ontstaat geleidelijk de perspectiefafbeelding.

Er zijn ook andere constructies. In het algemeen maken die wel gebruik van speciale eigenschappen van de te tekenen objecten, zoals evenwijdigheid van bepaalde rechte lijnen in het object. Daarbij wordt dan alleen op het tekenvlak gewerkt en speelt het ruimtelijk karakter van figuur 20 geen rol. Gevolg is dat die constructies vaak nogal algoritmisch zijn en daardoor vaak onbegrepen worden toegepast.

Foto's

In de kijkmeetkunde gebruiken we vaak *foto's*. Foto's zijn óók perspectiefafbeeldingen. Dat wordt duidelijk als we van de ouderwetse speldeprikcamera uitgaan. Zie figuur 23.

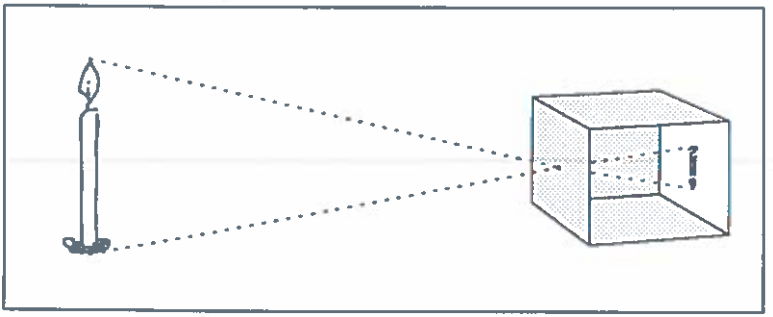


fig. 23: Vereenvoudigde voorstelling van het fotograferen.

Het scherm staat nu 'achter' het gaatje, dat de rol van oogpunt heeft. Voor normale lenzen gaat dit verhaal van figuur 23 goed op. (Bij visseoogglenzen niet.) Hoe verder het scherm van het gaatje (of de lens) hoe groter het beeld op het scherm, als de afstand van gaatje tot object hetzelfde blijft. Het gaat daarbij om gewoon lineair vergroten en meetkundig maakt het dan ook geen verschil of we met een telelens werken waarbij het scherm (de film) verder van het oogpunt (het midden van de lens) af ligt of dat we in het fotolab wat meer vergroten. Het maakt alleen in beeldkwaliteit uit, omdat het vergroten in de doka van het al gemaakt beeld uitgaat en dus defecten ervan, met name de korrelstructuur van de film, ook uitvergroot.

Het is belangrijk dit te weten, bij verklaringen van verschijnselen op foto's wordt namelijk vaak onterecht gegrepen naar de term 'tele-effect'. Het 'tele-effect' is in feite niets anders dan beperken tot een klein deel van wat gezien wordt en dat groot afbeelden. Maar bij gebruik van telelenzen wordt natuurlijk vaak vanuit een ander standpunt gefotografeerd. En verandering van standpunt heeft natuurlijk wel essentiële invloed op het resultaat.

Panorama's

In principe hoeft het scherm van figuur 20 niet vlak te zijn. Allerlei vormen kunnen in feite. Neem bijvoorbeeld eens een cilindervormig scherm, waar de waarnemer middenin staat en voer het hele proces nu uit met een heel landschap rondom (figuur 24). In het bovenaanzicht is onmiddellijk te zien dat alle horizontale kijkhoeken nu prachtig als hun corresponderende bogen op het rond gebogen oppervlak worden afgebeeld. Bij het vlakke perspectief was dat niet zo.

fig. 24: Panorama-afbeelding.

Er zijn speciale camera's die zulke panoramafoto's kunnen maken; de schilder Mesdag maakte op de aangegeven manier een groot rond panoramaschilderij dat in Scheveningen te zien is.

De hemelbol

Als we ook andere hoeken met juiste bogen willen afbeelden, moeten we een doorzichtige bol als scherm nemen, waarbij het waarnemend oog in het midden zit. Dat is het denkmodel dat gebruikt wordt om de schijnbare beweging van bijvoorbeeld sterren en planeten weer te geven.

In een planetarium (bijvoorbeeld in Artis in Amsterdam) worden sterren en planeten ook op een bol geprojecteerd, om een zo goed mogelijke suggestie van de hemel te geven. De beste plaatsen in het planetarium zijn natuurlijk in het midden van de zaal.

Zonnebanenkaart

Een afwijkende vorm ontstaat als we op de panoramastrook niet alleen dwars, maar ook in de hoogterichting met afstanden werken die met de hoeken evenredig zijn, zie figuur 25 als voorbeeld.

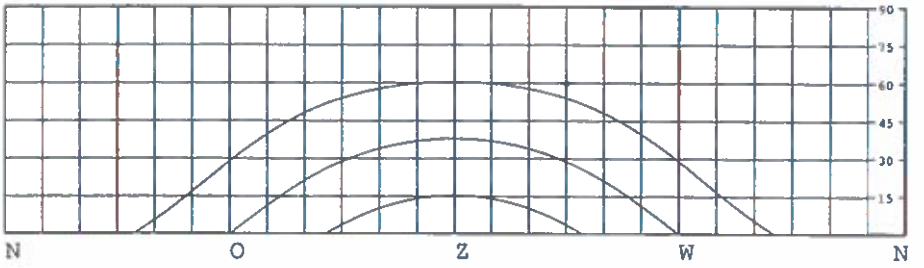


fig. 25: Zonnebanenkaart; alleen in zuiver horizontale en verticale richting komen gelijke afstanden op de kaart overeen met gelijke hoeken in de werkelijkheid.

De stip geeft een punt aan in ZW-richting en 60° graden boven de horizon. De middelste kromme lijn is de zonnebaan op 21 maart. De andere twee banen zijn die van 21 juni en 21 december. Deze afbeelding is géén projectie zoals de perspectiefafbeelding, de panorama-afbeelding en de hemelbolafbeelding, waarbij de afbeeldingen allemaal via centrale projectie worden gemaakt.

Informatieverlies, interpreteren

Punten in de werkelijkheid die vanuit het oog gezien op één kijklijn liggen, komen op de projectie-afbeelding op één punt terecht. De vlakke tekening verliest dus juist alle diepte-informatie.

Dat we in foto's en perspectieftekeningen toch zo goed diepte zien, komt omdat onze hersenen razendsnel bij de foto de juiste ruimtelijke objecten terugfantaseren. Dat is dus een interpretatieproces en het heeft er veel mee te maken dat we bijvoorbeeld de tafel van een foto allang in werkelijkheid kennen. Het interpreteren geschiedt dus ook op grond van kennis en ervaringen. Zie ook de paragraaf 'Tekenen wat je ziet?' verderop in dit hoofdstuk (pag. 82) waar hier dieper op in wordt gegaan, ook in verband met culturele verschillen.

Leerlingactiviteiten rond afbeelden

De activiteiten met leerlingen rond het thema afbeelden kunnen we in drie groepen indelen:

- Activiteiten rond het oefenen van ruimtelijk interpreteren van afbeeldingen.
- Het zelf maken van afbeeldingen.
- Activiteiten die gaan om het uitlokken van reflectie over het afbeeldproces zelf.

We gaan via enkele voorbeelden op elk van die groepen in.

We zagen ook bij het onderwerp aanzichten al eerder interpretatie-activiteiten: de droedel van de Mexicaan bijvoorbeeld. Verwant hieraan is het uitzoeken hoeveel blokken een bouwsel minimaal of maximaal kan hebben om gegeven aanzichten op te leveren, zoals bijvoorbeeld die van figuur 26 (pag. 56).

Bij dit voorbeeld kan nog wel bedacht worden waar de toren van 5 blokken hoog op het bovenaanzicht moet staan, door de pijlen die in de twee aanzichten door het hoogste ding lopen door te trekken. Maar waar de toren(s) van 4 hoog kunnen staan, dat is al lastiger te vinden. Zo wordt interpreteren van de afbeelding al snel zelf bouwen met kubussen op grond van de afbeeldingen.

Aanvullen van onaffe tekeningen is in feite ook in eerste instantie interpreteren. Bij de in figuur 27 (pag. 56) weergegeven opgave gaat het om het tekenen van het onzichtbare. Juist dat doet een beroep op het leggen van de juiste relatie tussen werkelijkheid en tekening en op het ruimtelijk voorstellingsvermogen

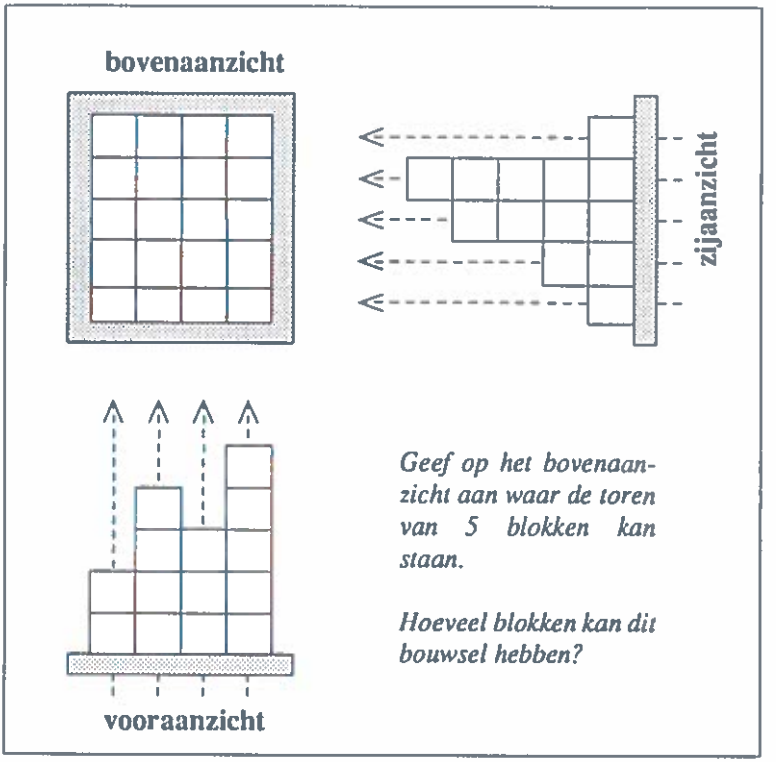


fig. 26: Aanzichten van een blokkenbouwsel. Waar staat de toren van 5 hoog?

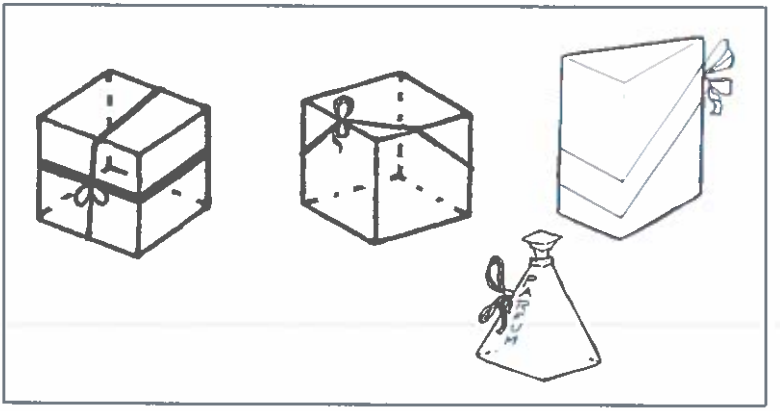


fig. 27: Teken de linten en de randen als die ontbreken in deze glasdozen.

Leerzaam voor leerling en toekijkende volwassenen zijn ook plaatjes waarbij soms méér, of niets mogelijk is, zoals die in figuur 28.

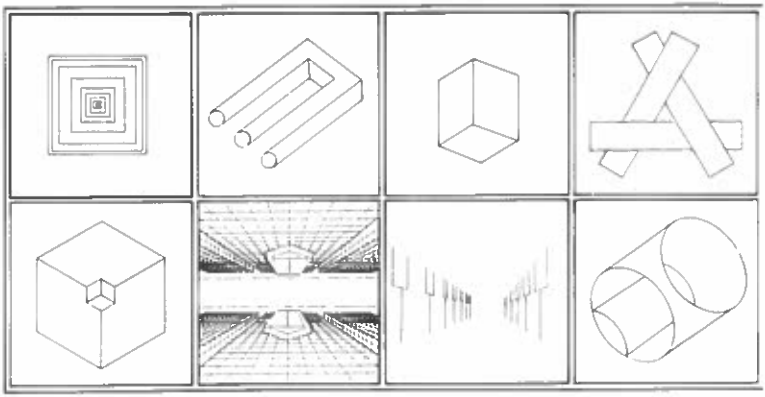


fig. 28

Het figuurtje linksonder lokte zes verschillende interpretaties in één tweede klas uit!

Het oefenen met deze en soortgelijke opgaven heeft twee effecten:

- Het voorstellingsvermogen wordt geprikkeld.
- Er moeten formuleringen gevonden worden. Het beschrijven van wat je ziet eist vraagt namelijk om taal die over ruimte spreekt.

Suggestief ruimte weergeven in een tekening blijft heel lastig; tenminste om dat te doen op de in onze cultuur aanvaarde perspectiefmanier. Leerlingen herkennen wèl uitstekend of bepaalde tekeningen 'goed' zijn, maar weten vaak niet hoe ze te verbeteren.

Bij figuur 29 is de opgave: maak de tekeningen af tot kubussen.

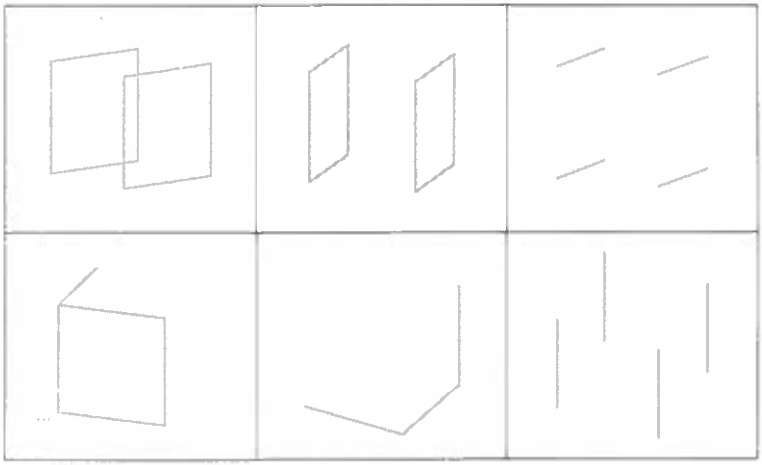


fig. 29: Kubussen afmaken.

Dat geeft in principe een goede tip aan de leerling: let op welke ribben evenwijdig zijn. In feite gaat het in figuur 29 om parallelprojectie en we nemen de gelegenheid te baat om nog eens te ageren tegen een wat minder geschikte vorm ervan, die in de schoolse sfeer lange tijd gebruikelijk is geweest: zie figuur 30.

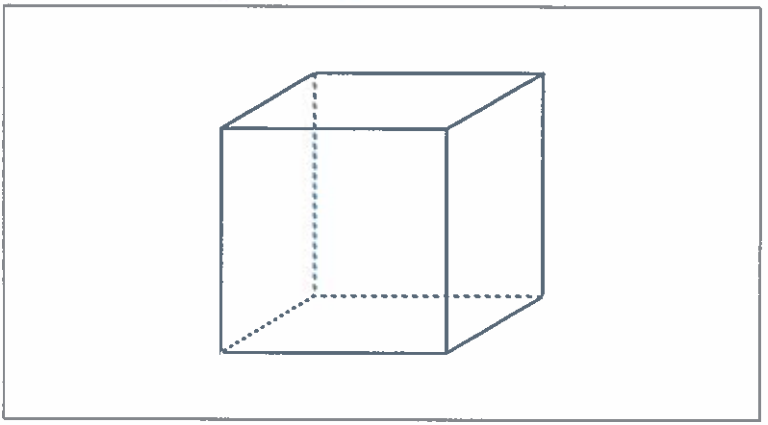


fig. 30: Een traditioneel, maar vreemd getekende kubus.

Dat is een parallelprojectie waarbij de kubus met één vlak evenwijdig aan het tekenvlak is gedacht en de bundel parallelle projectielijnen scheef loopt ten opzichte van het tekenvlak. Het schijnbare voordeel is dat nu twee vlakken geheel goed als vierkant zijn afgebeeld. In de praktijk is dat eerder een bron van verwarring: sommige lijnstukken en hoeken kloppen wel met de werkelijkheid, andere niet. Erg suggestief is de tekening ook niet. Een uitgebreid pleidooi tégen deze scheve parallelprojectie en vóór betere methodes staat in de Nieuwe Wiskrant van december '91; J. van de Craats: Hoe teken je een kubus?.

Een fraaie verbeelding van het idee achter het perspectieftekenen danken we aan Albrecht Dürer die in 1505 naar Italië reisde om het perspectief te leren kennen zoals de Italiaanse schilders dat geperfectioneerd hadden. Dürer's sterkste kant is het nooit geweest, maar hij geeft in zijn eigen leerboek (uit 1537) wel instructieve illustraties, zoals figuur 31 (pag. 59).

Het is een idee dat ook met eenvoudiger middelen is te realiseren:

- Elke ruit kan dienen als scherm voor portrettekenen (gebruik een afwasbare stift). Model en tekenaar aan verschillende kanten en allebei het hoofd stil houden.
- Met een doorzichtig velletje (of stukje perspex) kan al een eenvoudig voorwerp worden getekend. Teken zo maar eens een kubus of een rond bord, dat dan als ovaal op het schermpje komt.

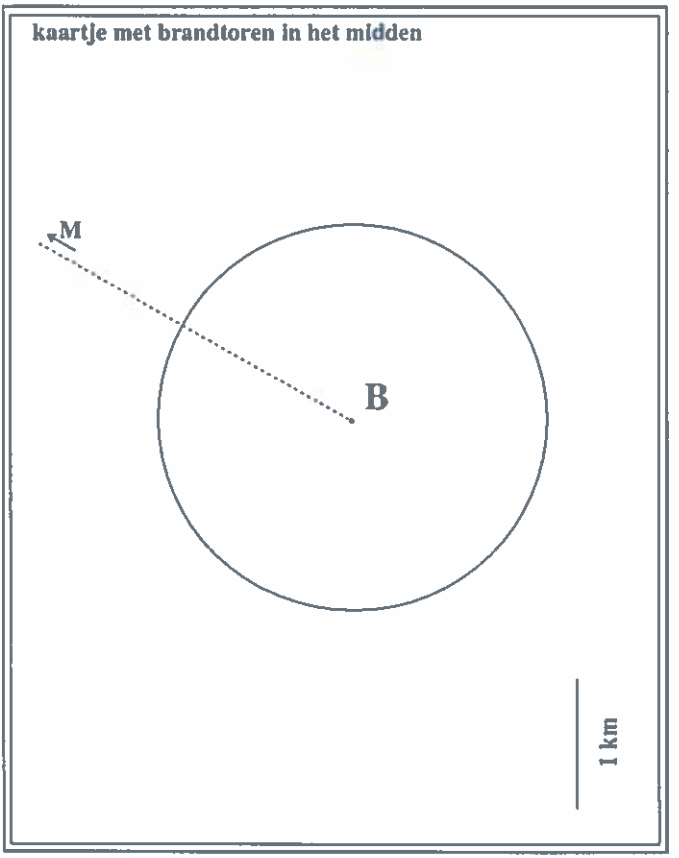
fig. 31: Een ingewikkeld object, een luit, wordt punt voor punt in perspectief getekend. Houtgravure van A. Dürer uit 1537.

Vooral dat laatste wekt verbazing. Net als het met een doorzichtig velletje overtrekken van een rond bord vanaf een gefotografeerde tafel. Op de foto lijkt (is?) het bord rond, op de overtrektekening is (lijkt?) het bord ovaal.

In het Dürer-voorbeeld is het op het scherm tekenen de reële activiteit. We gaan hier - in W12-16 tenminste - niet verder met het maken van schetsen óver die activiteit. Dat zou kunnen via de eerder aangegeven methode van Brunelleschi, maar dit heeft beter zijn plaats binnen het havo-B programma.

Tekentechnieken die gebaseerd zijn op gebruik van verdwijnpunten horen ook niet bij de W12-16 meetkunde. De techniek op zich draagt niet veel bij aan het inzicht in de situatie object-scherm-oog.

Een stap in de richting van het begrip verdwijnpunt is wel aangegeven bij het onderwerp kijkhoeken, bij het in figuur 14 (pag. 42) weergegeven voorbeeld. Maar daar gaat het om de tot nul naderende kijkhoek naar de stokken en niet om de steeds kleinere afbeelding van de stokken. Dan pas zou het verdwijnpunt, dat een punt op de afbeelding is en niet in de werkelijkheid, ter sprake komen.



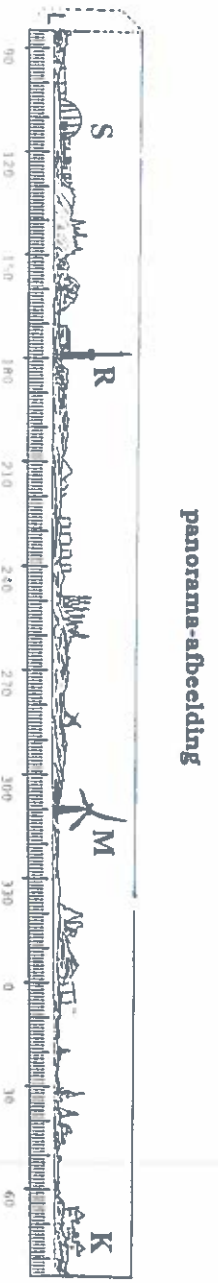


fig. 32: De panoramastrook kan rondgebogen en geplakt worden.
Door hem rond de toren B op de kaart te plaatsen kan het verband met kijkrichtingen wor-

Het werken met een panoramatekening is geschikt om het proces van afbeelden te verbinden met het richtingsbegrip. In figuur 32 (pag. 60) is een panoramastrook gegeven die aangeeft wat vanaf een brandtoren (bij B) op het kaartje te zien is.

Uitknippen, rondplakken, op de juiste manier op het kaartje opstellen. Dan kan uit het panorama de richting naar bijvoorbeeld de windmolen worden vastgesteld. De gradenverdeling onder het panorama kan daarbij gebruikt worden.

Bij elkaar is dit weer een vorm om afbeelding en werkelijkheid met elkaar in verband te brengen. Het werken met de panorama-afbeelding sluit natuurlijk direct aan bij het meten van de volle ronde kijkhoek met handspannen, zoals eerder uiteengezet.

De eerder genoemde zonnebanenkaart kan goed gebruikt worden in een klein project waarbij méér met de zon en zijn loop gedaan wordt.

Samenvatting

- Activiteiten in verband met het interpreteren van afbeeldingen die iets ruimtelijks voorstellen.
- Eenvoudige hulpmiddelen om het tekenen van objecten makkelijker te maken, met name gebruik van evenwijdigheid in het geval van parallelprojectie.
- Echt uitvoeren van het perspectiefproces via een doorkijkscherm van glas, perspex of gewoon van een velletje doorzichtig plastic.
- Geen techniek van perspectieftekenen in dit stadium, wel verkennen van het idee erachter.
- Verbindingen leggen met hoeken via bijvoorbeeld panorama-afbeelding en eventueel zonnebanenkaart.

Constructies

Bij kijkmeetkunde komen twee typen constructies veelvuldig voor:

- Constructies waarbij één oogpunt (eventueel één lichtbron) betrokken is. Het gaat dan vaak om centrale projecties.
- Constructies waar méér oogpunten bij betrokken zijn. Vaak wordt daarmee de positie van een ander punt bepaald op grond van de door de twee oogpunten gevonden informatie.

We hoeven hier niet op allerlei technische details in te gaan na al het voorgaande. We geven alleen voorbeelden bij de beschrijving van de activiteiten voor leerlingen.

Constructies en leerlingenactiviteiten

Constructies met één oogpunt en schaduwconstructies liggen dicht bij elkaar. In figuur 33 gaat het om schaduw door een lamp.

Een zijaanzicht van een lantaarn en een rij paaltjes. De lantaarn is aan. Teken op de grondlijn met blauw de schaduw van de paaltjes.

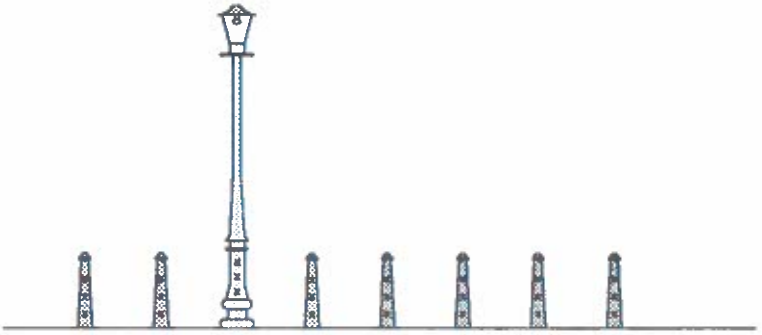


fig. 33

Het is een oefening waarbij nauwkeurig werken loont: dan komen de schaduwtoppen namelijk ook op gelijke afstanden van elkaar. Zo'n constructie is tevens een opstapje naar redeneren in de vorm van het overzetten van wat waargenomen is bij de vaste paaltjes naar een bewegende fietser:

Je loopt in het donker op straat. Je schaduw komt achter je aan. Bij de straatlantaarn haalt hij je in en gaat voor je uit. Dan verdwijnt je schaduw. Maar bij de volgende lantaarn haalt hij je weer in.
Als je een lantaarn nadert, wordt je schaduw dan groter of kleiner?

Het omgekeerde van de opgave in figuur 33 is de opdracht om uit de gegeven schaduwen van twee paaltjes de positie van de lamp te bepalen. Dat kan, tenzij de beide schaduwen even lang zijn: dan gaan de constructielijnen evenwijdig lopen; de lamp zal dan wel de zon zijn. Vervangen we de rij paaltjes door een touw met knopen, dan is de variatie nog groter. Als de knopen evenver uit elkaar zitten, komen de schaduwen even ver van elkaar:

- bij evenwijdig licht (de zon).
- als het touw evenwijdig aan de grond loopt.

Voor de volledigheid sommen we alle mogelijkheden hier op. Het gaat steeds om projecties van een rij punten naar een lijn; die lijn is in de volgende illustraties 'op de grond' getekend.

De zes basis vormen

I: Lijn evenwijdig aan projectievlak, centrale projectie.

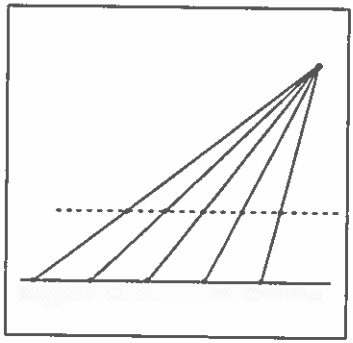


fig. 34

Situatie:
schaduw door lamp.
Eigenschap:
afstandsverhoudingen blijven kloppen.
Toepassing:
rekenen met vergrotingsfactor en eventueel met verhoudingen in driehoeken.

II: Lijn evenwijdig aan projectievlak, parallelprojectie.

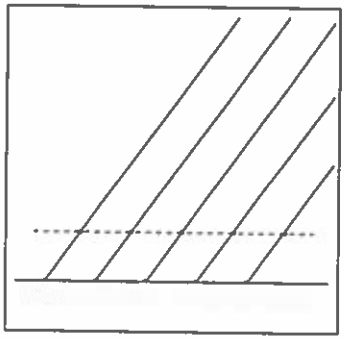


fig. 35

Situaties:
schaduw door de zon, droog blijven bij regen.
Eigenschap:
afstanden blijven hetzelfde.
Toepassing:
bij élke situatie met twee stel evenwijdige lijnen.

III: Lijn niet evenwijdig aan projectievlak, centrale projectie.

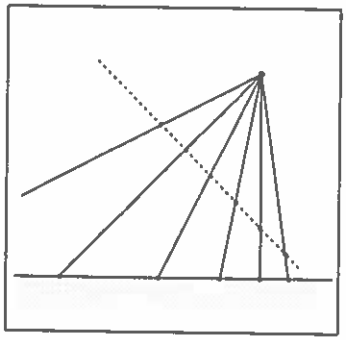
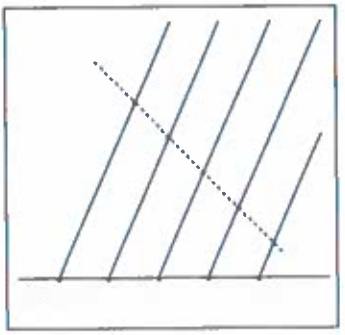


fig. 36

Situatie:
algemene situatie bij schaduw door lamp.
Eigenschap:
verhoudingen veranderen echt.
Toepassing:
als waarschuwing bij figuur 34.

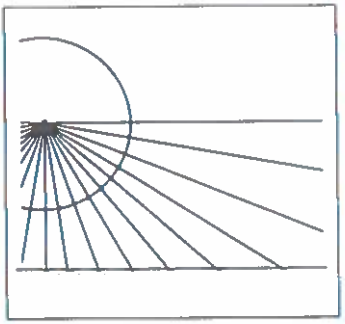
IV: Lijn niet evenwijdig aan projectievlak, parallelprojectie.



Situatie:
schaduw door de zon.
Eigenschap:
afstandsverhoudingen blijven kloppen.
Toepassing:
bij rekenen met verhoudingen in diverse figuren.

fig. 37

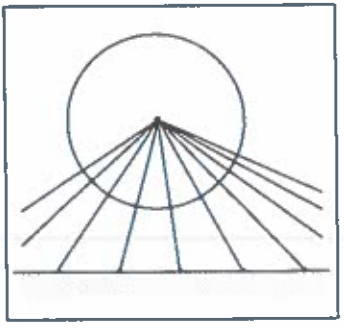
V: Punten op een cirkel met gelijke afstanden, centrale projectie.



Situatie:
schaduw van bol of cirkelvormige lampekap vanuit midden.
Eigenschap:
afstanden worden ongelijk.
Toepassingen:
bij redeneren over bijvoorbeeld foutieve hoogtemeting (zie bij 'Kijkhoeken').

fig. 38

VI: Gelijke afstanden op een lijn, centrale projectie vanuit midden van cirkel.



Situaties:
kijken naar rij mensen, hoeken bepalen.
Eigenschappen:
twee grenzen waar het tussen blijft, ongelijke hoeken die naar de buitenste punten kleiner worden.
Toepassing:
opbouw van ervaringsbasis voor tangensbegrip.

fig. 39

Diverse van deze constructies spelen later een rol bij het rekenen met evenredigheden, waarover later meer, o.a. in hoofdstuk 21.
Tot nu toe ging het over constructies waarbij één oogpunt gebruikt wordt. Bij het nu volgende voorbeeld is het moeilijk te zeggen of er één of twee oogpunten zijn.

Een schip vaart op de Noordzee (figuur 40). De vuurtoren van Den Helder wordt in het oosten gezien, en die van Egmond in het zuid-oosten. Waar bevindt zich het schip?

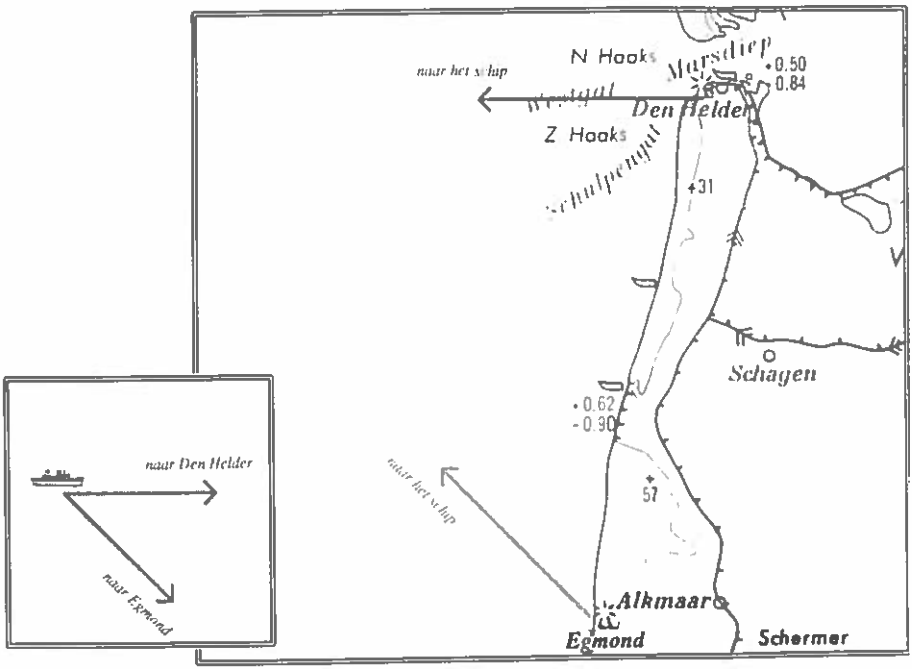
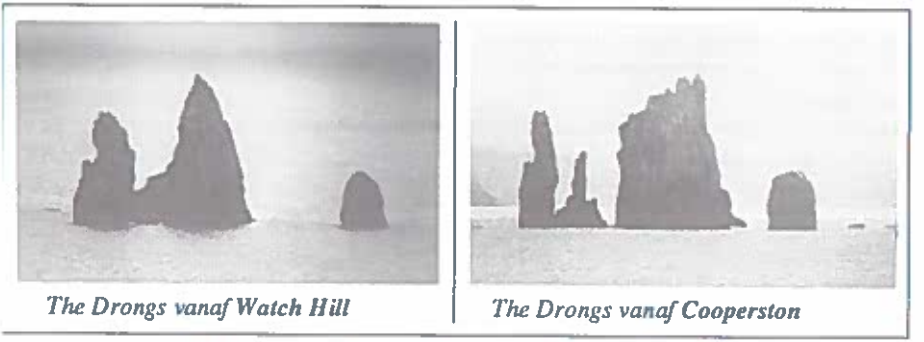


fig. 40: Waar bevindt zich het schip?

We herkennen de omkeringssituatie: het schip moet vanaf de vuurtoren in Den Helder in westelijke richting worden gevonden. Uiteindelijk wordt het schip door twee lijnen, één vanuit Den Helder, en één vanuit Egmond, gelokaliseerd. De omkering, in dit geval heel toepasselijk blikwisseling te noemen, maakte er een twee oogpunten constructie van.

Rijkere constructies met twee oogpunten ontstaan als het niet om één te vinden punt gaat maar om meerdere tegelijk.

In het volgende voorbeeld zijn twee aanzichten (foto's uit de verte) gegeven van één rotsgroepje (figuur 41).



The Drongs vanaf Watch Hill | *The Drongs vanaf Cooperston*

fig. 41: Twee aanzichten van de rotsgroep The Drongs (in Shetland, ten noorden van Schotland).

fig. 42: Kaart van The Drongs en omgeving. De foto's van figuur 41 zijn genomen vanaf de met een sterretje gemarkeerde plekken. 'The Drongs' zelf liggen in het gestippelde cirkeltje.

Op de kaart (figuur 42) zijn de standpunten voor de aanzichten en de positie van de rotsgroep aangegeven.
Nu kan middels het tekenen van de bundels (bijna) evenwijdige kijklijnen de rotsgroep in kaart worden gebracht.

Omdat het een vrij fundamenteel idee is en de situatie toch wel complex is, structureren we vóór met de schets van figuur 43.

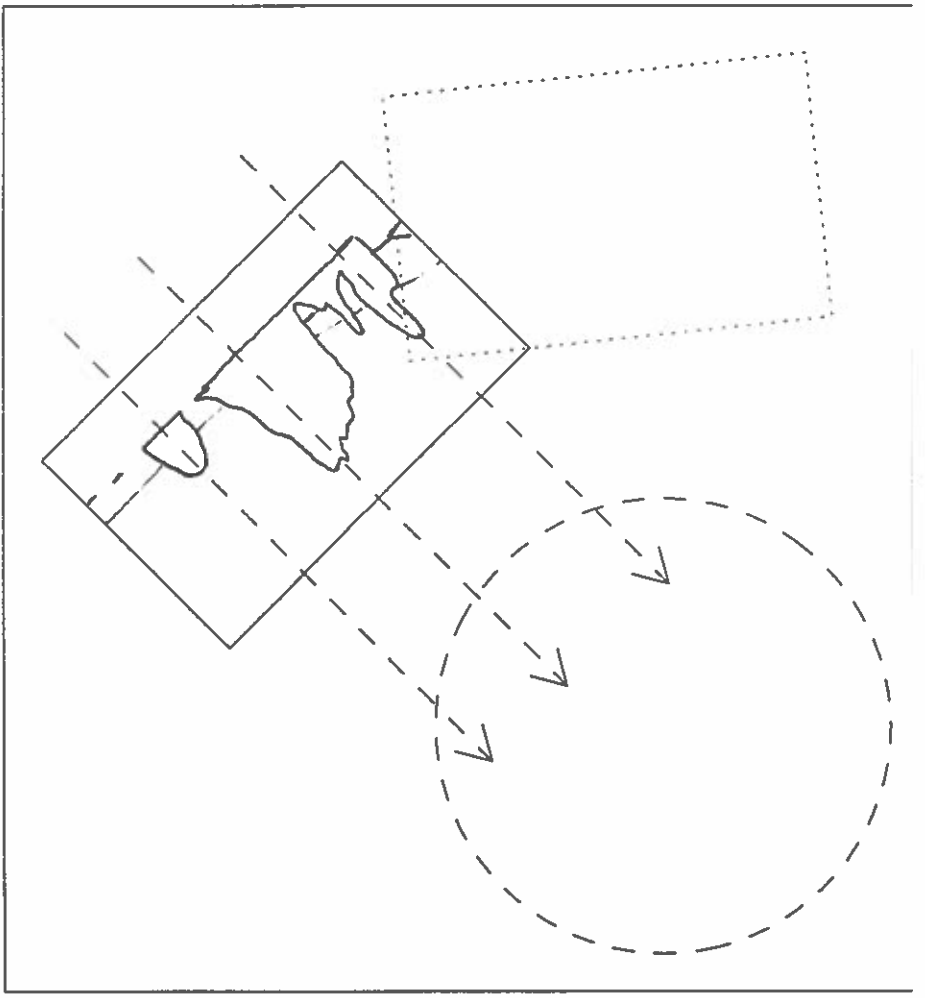


fig. 43: Het maken van de detailkaart.

Drie kijklijnen, die naar de drie belangrijkste toppen zoals gezien vanuit Cooperston, zijn ingetekend. Het fotootje vanaf Cooperston is gebruikt om de onderlinge afstanden over te brengen. In het gestippelde rechthoekje moet het andere aanzicht, dat vanuit Watch Hill worden overgenomen. De andere bundel kijklijnen helpt dan de drie toppen lokaliseren.

Diverse leerlingen gingen veel verder dan het aangeven van de

toppen van de drie rotsen, ze gaven op de detailkaart ook nog de grondvorm van de rotsen aan. Na de activiteiten met de blokjes (figuur 26, pag. 56) blijkt zoiets als dit probleem boeiend genoeg, zeker als we erbij vertellen dat op deze manier ook foto's van je eigen binnenste gemaakt kunnen worden. Zie figuur 44 voor een toelichting.

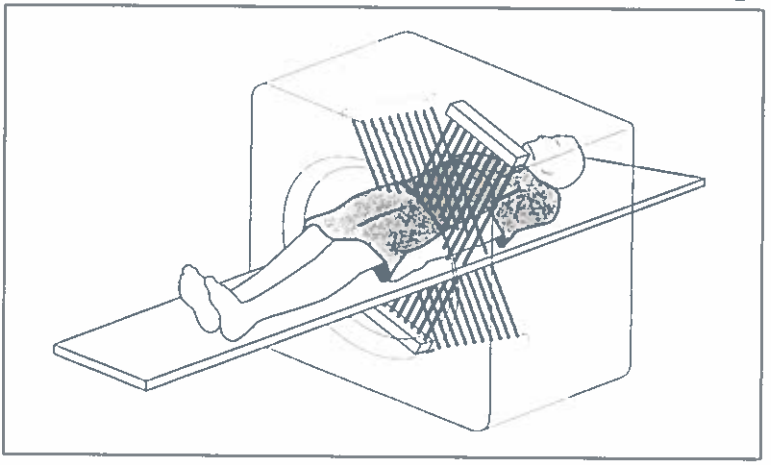


fig. 44: Een patiënt in een CAT-scanner. Er worden Röntgenfoto's van vele kanten genomen. De Röntgenbundel is heel plat, bijna vlak. De detectoren geven informatie door aan een computer, die het vlak waarin de opnames zijn gemaakt afbeeldt. Een doorsnede ontstaat.
Door de patiënt steeds een klein stukje te verschuiven kan een serie beelden gemaakt worden die tezamen een ruimtelijk beeld geven.

De constructies rond de rotsgroep mogen op het eerste gezicht te ingewikkeld lijken voor mavo C/D. Het blijkt mee te vallen. Zeker als we zorgen dat allerlei begrippen als aanzicht, kijklijn, evenwijdigheid voldoende expliciet aan de orde zijn geweest.
Constructies met twee plaatjes om een derde te vinden komen in andere vormen ook voor; denk bijvoorbeeld aan de constructie van Brunelleschi die bij het perspectiefafbeelden is genoemd.

Samenvatting

- Constructies die met centrale en parallelprojectie te maken hebben, kunnen in de schaduwcontext goed beoefend worden.
- De omkeerbaarheid van de kijklijn wordt vaak impliciet bij constructies gebruikt.
- Constructies met twee standpunten, mogelijk met twee aanzichten, zijn vrij algemeen toegepast. Ze zijn na goede voorbereiding niet te moeilijk.

Een demonstratie op hoger niveau

In het voorgaande zijn veel details uit de kijkmeetkunde belicht. Toch grepen we vaak terug op voorbeelden die al eerder voor een ander doel waren gebruikt. Dat is karakteristiek: de elementen van de kijkmeetkunde komen zelden onafhankelijk van elkaar voor.

Bij wijze van terugblik op de in het voorgaande geschetste inhouden bespreken we nu een wat lastiger kijkmeetkundeprobleem, waarbij we veel van het voorgaande, maar ook niet meer dan dat, nodig hebben bij de oplossing.

Het probleem is met succes aan vwo-groepen (vijfde klas) voorgelegd die - met behulp van sturende vragen - er goed uitkwamen. Dat is des te interessanter omdat het resultaat van wat nu volgt slechts zeer recentelijk is ontdekt.

Uitgangspunt is figuur 45, een schilderij van Pieter Saenredam (1597-1665) van de voormalige St. Odulphuskerk in Assendelft.

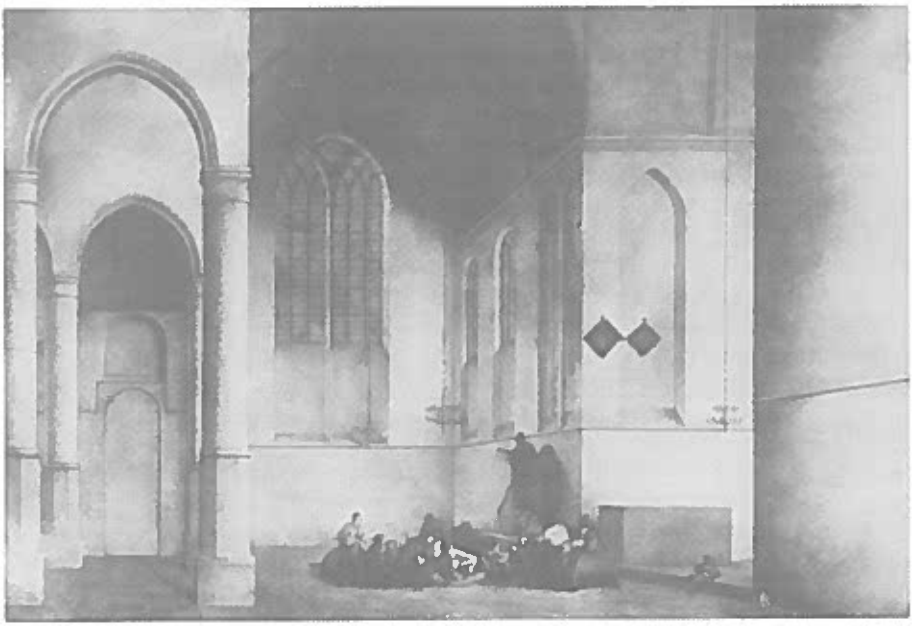


fig. 45: Pieter Saenredam, interieur van de voormalige St. Odulphuskerk in Assendelft (Turijn, Galleria Sabanda).

Het is natuurlijk een volgens de eigenschappen van het *perspectief* gemaakt schilderij, en dan moet de vraag beantwoord kunnen worden: waar *stond* Saenredam toen hij dit zag? Zo'n vraag is redelijk want we hebben gezien dat bij een perspectiefafbeelding één punt var

centrale projectie hoort. Dat punt moet zich ergens bevinden.

Het punt ligt in ieder geval buiten het vlak van het schilderij zelf en we moeten naar een ander *aanzicht* - of andere afbeelding - zoeken waarin dit punt een plaats heeft. We nemen daartoe eerst het linkerdeel van het schilderij onder de loep. We kijken onder twee portalen door, dwars op het middenschip van de kerk. Zou het helpen een *zijaanzicht* te maken van die twee portalen, van links? In figuur 46 is dat zijaanzicht getekend, naast het linkerdeel van het schilderij.

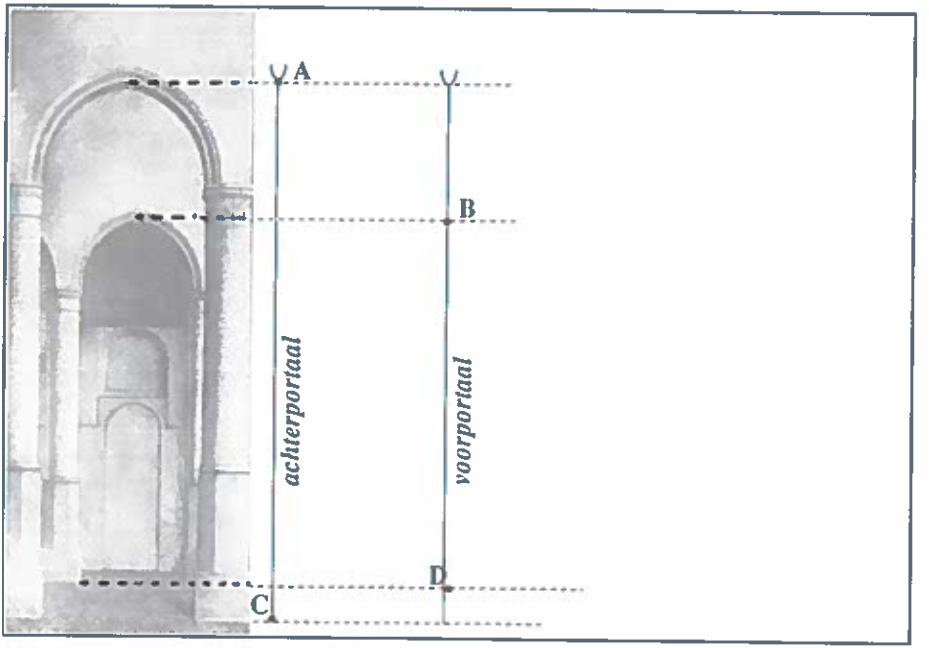


fig. 46: Het vinden van het standpunt van Saenredam.

In het aanzicht zijn de twee portalen even hoog, want we mogen wel aannemen dat de kerk symmetrisch is. We weten niets van de afstand tussen die portalen, wat dat betreft waagden we een gok; we kunnen echter ons aanzicht altijd nog dwars uitrekken indien nodig. Ergens rechts moet nu het oogpunt van Saenredam gevonden worden.

In figuur 46 willen we natuurlijk met *kijklijnen* werken om het oogpunt te vinden. Op het schilderij kunnen we geen kijklijnen vinden, want het *oogpunt* is niet zelf aanwezig op een perspectiefafbeelding. Toch kunnen we ons voorstellen hoe de kijklijn van Saenredam's oog naar de top van het achterportaal loopt. Die gaat dóór het voorportaal. Denk dit voorportaal met een *doorzichtig scherm* ingevuld. Er is één *doorganspunt*, waar die kijklijn dóór dat scherm gaat.

Nu de belangrijkste stap: dat doorgangspunt kunnen we toch aanwijzen óp het schilderij zelf.
Op het schilderij is het namelijk hetzelfde punt als de top van het achterportaal; de hele kijklijn naar die twee punten in de werkelijke kerk is namelijk op dat ene punt van de perspectiefafbeelding afgebeeld. Dat is typisch het soort *informatieverlies* dat bij het projecteren optreedt.

In het zijaanzicht hebben we nu echter twéé punten waar de kijklijn door gaat. Namelijk A en B in figuur 46; A is de top van het achterportaal, B het doorgangspunt door het voorste portaal. Met een stippellijn is aangegeven hoe de hoogtes van A en B op de tekening worden gevonden vanuit de perspectiefafbeelding.

De kijklijn kan nu in het zijaanzicht getekend worden. De *constructie* wordt voltooid door ook kijklijn C-D te trekken, die we op een soortgelijke manier vinden uit de voetpunten van de portalen. De twee lijnen bepalen samen het gezochte punt.

Wie het precies uitvoert, zal merken dat het oogpunt zich ongeveer twee schipbreedtes van het rechterportaal af moet bevinden (wat die breedte dan ook maar is). In zo'n kerk past dat echter absoluut niet, met andere woorden Saenredam staat eigenlijk buiten de kerk! Hij heeft alles geconstrueerd alsóf hij ongeveer bij X stond op de plattegrond (zie figuur 47).

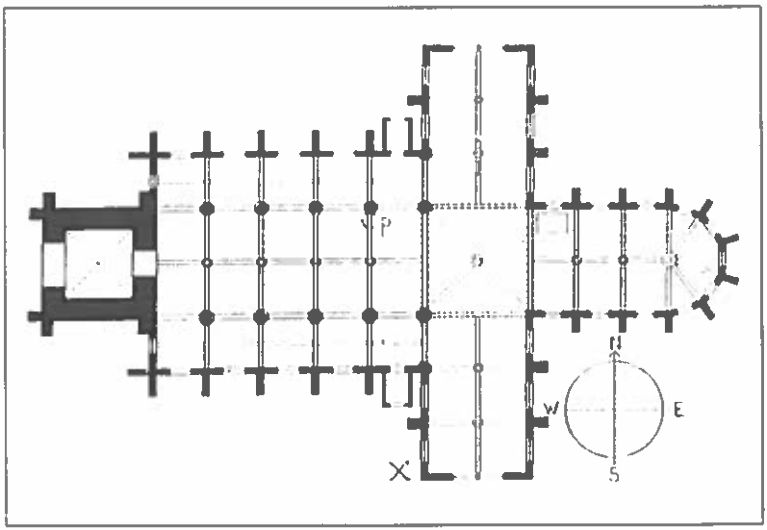


fig. 47: Plattegrond van de voormalige St. Odulphuskerk in Assendelft.

Even terugblikken op dit geheel!

In de voorgaande tekst zijn de gebruikte begrippen uit de kijkmeetkunde gecursiveerd. Het zijn er heel wat. Eigenlijk is alleen de

themagroep kijkhoeken niet vertegenwoordigd.

Opmerkelijk is dat er niet méér voor nodig is. Binnen de gegeven situatie drukten we ons uit in terminologie van de context (portalen, middenschip) én termen uit de kijkmeetkunde (kijklijn, standpunt). Binnen de situatie hoefden we ons ook niet op veel 'theorie' te beroepen. Alles gaat op grond van direct controleerbare inzichten over in feite alleen kijklijnen.

De oorspronkelijke (kunsthistorische) ontdekking dat Saenredam van buiten de kerk 'dacht', is gedaan door dr. R. Ruurs (1987) van het Kunsthistorisch Instituut van de Universiteit van Amsterdam. Hij werkt echter met het trekken van kijklijnen op de plattegrond. Bijvoorbeeld kan de kijklijn getrokken worden die naar de rechterkant van de grote kist loopt. Deze kijklijn gaat vlak langs de hoek van de muur die rechts op het schilderij te zien is. De lezer mag dat proberen en dan, door nog een dergelijke kijklijn te trekken ook het standpunt van Saenredam vinden. Dit is simpeler dan de bovengevolgde methode. Opgemerkt is – door Ruurs – dat de plattegrond gemaakt is naar aanleiding van onder andere dit schilderij. Ruurs signaleert de 'cirkelredenering', die voor zijn argumentatie echter niet fataal hoeft te zijn. De hierboven gegeven constructie is echter geheel onafhankelijk van de plattegrond.

Relaties met rest van de meetkunde

De inhouden van de kijkmeetkunde zijn niet alleen onderling verweven, ze raken ook vaak aan andere onderdelen van de meetkunde. Omdat al voldoende voorbeelden zijn vertoond, geven we alleen een korte opsomming.

Relatie met Rekenen in de Meetkunde

In hoofdstuk 21,'Rekenen in de meetkunde', wordt aangegeven hoe de schaduwcontext een denkmodel geeft voor vergroten en verkleinen, en steunt bij het rekenen met verhoudingen in driehoeken.

Relatie met Plaatsbepalen

Diverse van de gegeven constructies leidden tot een positiebepaling:

- de schipper bij Den Helder en Egmond;
- de kaart van 'The Drongs'.

Er is via het hoekbegrip, vooral in de panoramatoepassing, een sterke verbinding naar het richtingsbegrip. Het kaartje van 'The Drongs' ontstaat door het snijden van twee bundels evenwijdige lijnen. Het

verband met coördinaten is evident, hoewel het niet om rechthoekige coördinaten gaat. De systematische behandeling van drie onderling loodrechte aanzichten van een blokkenbouwsel leidt nog sterker naar coördinaten, omdat de rijen blokjes ook op natuurlijke wijze genummerd worden.

Relatie met Vormen en Figuren

Het tekenen van diverse aanzichten van objecten (denk aan kegel, bol, cilinder) helpt vormen preciezer te omschrijven. Het begrip 'doorsnede' zoals dat in hoofdstuk 19 voorkomt, moet echter losgezien kunnen worden van het begrip aanzicht. Hier ligt een mogelijke bron van verwarring.

Op hoger niveau is zo'n verwarring ook vaak te constateren: men weet vaak dat een kubus als schaduw een regelmatige zeshoek kan opleveren (een inzicht dat tot de kijkmeetkunde gerekend wordt) en dat de kubus volgens een regelmatige zeshoek kan worden doorgesneden (een vormen- en figureninzicht). Vaak wordt gedacht dat deze zeshoeken iets met elkaar te maken hebben. Tja, maar wat precies?

Relatie met Hoekbegrip

Hoeken komen bij meetkunde die aan de realiteit gebonden is in verschillende rollen voor.
Hier in de kijkmeetkunde als:

- kijkhoek
- richtingshoek.

De rol van 'hoek' van een object, zoals van een tafel of van een driehoek of de rol van 'draaihoek' zijn in de kijkmeetkunde niet essentieel. Met andere woorden: met kijkhoeken zijn we nog niet van de rest af!

Slotopmerking

In onze opzet geeft de kijkmeetkunde slechts steun voor de begripsontwikkeling in verband met bijvoorbeeld verhoudingen. Nadere structurering van dat onderwerp, in rekentechnische zin, hoort hier in 'De inhouden van de kijkmeetkunde' dus niet thuis. Zoiets geldt ook voor de relaties met de andere onderdelen van de meetkunde. Gevolg is wel dat de kijkmeetkunde zoals in dat onderdeel beschreven, minder structurerende elementen bevat dan mogelijk is. Het zij zo!

Deelnemen en toeschouwen

Bij het bedrijven van kijkmeetkunde zit je vaak in een dubbelrol. Enerzijds ben je de 'kijker' die iets ziet. Anderzijds ben je de 'beschouwer' die over dat kijken nadenkt.

Op dit onderscheid in twee rollen gaan we nu wat dieper in. We beginnen met een voorbeeld waarin de rollen door verschillende mensen worden gespeeld.

Voorbeeld: de schijngestalten van de maan in de klas

In een klas worden de schijngestalten van de maan onderzocht. Een diaprojector links voorin de klas speelt zon en een voetbal middenvoor is de maan. De activiteit met de klas verloopt in drie fasen. Eerst tekent iedereen op een kladje de maan (een cirkel op de tekening) en geeft de schaduwgrens aan. Het is duidelijk dat er nu verschillende tekeningen ontstaan. Nu volgt de tweede fase waarin de maan beweegt. Eén meisje staat vóórin de klas met de maan op haar uitgestrekte hand. Zij, haar hoofd althans, is de aarde (zie fig. 48).

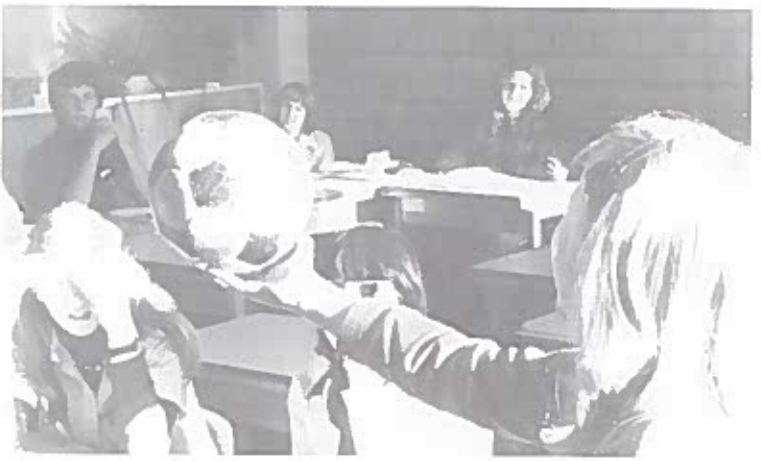


fig. 48: De maanfasen worden onderzocht. Een sterke lamp (buiten beeld) speelt de rol van de zon.

Ze draait de maan om zich heen. Voor de leerlingen in de klas, zeker die achteraan, verandert het beeld van de maan dan nauwelijks. Het meisje met de voetbalmaan is de échte deelnemer in het gebeuren. Zij ziet de schijngestalten van de maan in enkele seconden veranderen zoals in de werkelijkheid in een maand gebeurt.

De anderen in de klas zijn de toeschouwers bij het gebeuren; ze kijken van buiten af hoe zon, maan en aarde zich bewegen en wat

daarvan het gevolg is. Voor hun is ook de vraag: 'Wat ziet dat meisje voorin'. Eigenlijk betekent dat: neem in gedachten haar rol eens in. Anders gezegd: het gaat om mentaal verplaatsen.
Als afsluiting volgde het plaatsen van getekende schijngestalten van de maan op een getekende maanbaan. Het ging feilloos.

In dit voorbeeld waren de rollen van deelnemer en toeschouwer duidelijk verdeeld en in personen aanwezig. Daarom was het redelijk makkelijk het mentaal verplaatsen tot stand te brengen. Het mentaal verplaatsen gaat hier van de toeschouwerrol naar de deelnemerrol.

In het volgende voorbeeld zien we hoe leerlingen – geheel onbewust – dezelfde stap maken.

Voorbeeld: nogmaals de rotsen

We keren even terug naar het probleem van de rotsgroep. Twee foto's (fig. 41, pag. 66) lieten zien wat er uit diverse richtingen van de rotsgroep te zien was. Deze foto's hebben te maken met de deelnemerrol. Ze geven weer wat je wandelend rond de baai zelf zou zien.
Bij de andere illustraties, de kaartjes van fig. 42 en 43, zijn we in de toeschouwerrol: deze plaatjes vertellen waar de rotsen èn de wandelende fotograaf zich bevinden.
Figuur 49, een in de klas gemaakte foto, laat subtiel zien hoe de leerlingen zich zelf toch in de deelnemerrol brachten.

fig. 49: Twee leerlingen passen de ligging van het boekje aan de kijkrichting aan.

Twee van de drie leerlingen hielden het boekje op de kop. Zo kijken ze met de richting van de foto's mee over het kaartje van figuur 43. In zekere zin waren hier de twee rollen – deelnemer en toeschouwer – al impliciet aanwezig, doordat de foto's en de kaartjes op verschillende manieren functioneren.

In het voorbeeld van de duimsprong (zie figuur 16, pag. 45) ligt alles net iets gecompliceerder, hoe eenvoudig de situatie ook lijkt. In eerste instantie ben je weer deelnemer, want er wordt begonnen met het beleven van het verschijnsel zelf.
Het geven van een verklaring eist nu een rolverwisseling van deelnemer naar toeschouwer. Dat is juist andersom als bij de vorige twee voorbeelden en de rol van toeschouwer is niet op een of andere manier aangegeven.
Leerlingen deden dit (in een brugklas) niet vanzelf. Een tip die werkte is: bekijk je zelf eens van boven, zoals een vlieg op het plafond je zou zien. Daarmee werd de toeschouwersrol aangegeven.

Identificatie met mensen en dieren

In veel opgaven bij kijkmeetkunde wordt via het aangeven van een ander persoon of een ander dier de rolwisseling uitgelokt. Zwaar gezegd: er moet iets zijn om je mee te kunnen identificeren in de andere rol. Het zijn niet zulke gekke dingen die hier voorgesteld worden, denk bijvoorbeeld aan de algemeen aanvaarde termen 'vogelperspectief' en 'kikkerperspectief'. Lucht- en grondperspectief hebben het als terminologie niet gehaald, de dieren (vogel, kikker) wel!

Plaatjes met verschillende rollen

Bij de rollen deelnemer en toeschouwer horen twee soorten afbeeldingen. Figuur 50 laat zien wat er gebeurt als een plaatje met de verkeerde rol wordt geassocieerd.

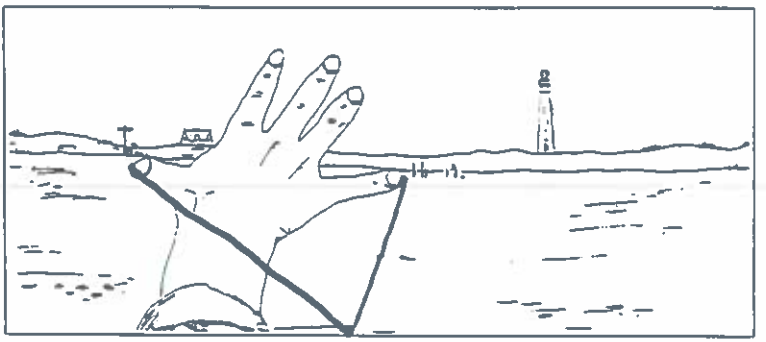


fig. 50: Een misbruikt wat-plaatje.

De bedoeling hier was te laten zien wat er met handspanhoek bedoeld wordt. Daarna moest op een of andere manier de handspanhoek gemeten worden. In deze afbeelding is dat door een leerling gedaan op het plaatje zelf. Dat is fout, want dit plaatje meldt alleen 'wat' het oog van de eigena(a)r(es) van de hand ziet: de duim bij het paaltje, de pink nog niet bij de vuurtoren. Het oog is niet op het plaatje aanwezig, er kan dan ook geen kijkhoek gemeten worden op dit plaatje.

Deze fout, het tekenen van kijklijnen op een tekening of foto waar dat eigenlijk niet kan, is heel algemeen. Meestal is het aangenomen oogpunt het midden van de onderkant van de afbeelding.

Bij dit plaatje is de bedoeling dat je het interpreteert alsof je zelf de deelnemer bent, alsof het jouw eigen hand is. Het plaatje geeft dan weer wat je ziet. Er zijn ook plaatjes die je juist in de rol van toeschouwer gebruikt. Een simpel voorbeeld is een bovenaanzicht van de handspanmeting, zie figuur 51. Nu schetst het plaatje de kijksituatie als geheel, het oogpunt van de deelnemende handspanner is er óók op te zien. Het plaatje vertelt hoe het zien van de handspanhoek werkt. De 'gebruiker' van het plaatje is nu buitenstaander en schouwt toe, in dit geval dus van boven af.

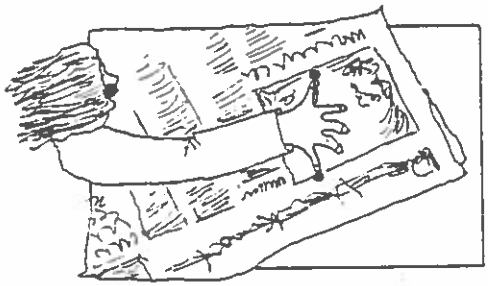


fig. 51: Een hoe-plaatje.

Wat-plaatjes, hoe-plaatjes

In de klas hanteerden we de termen wat-plaatjes en hoe-plaatjes voor deze twee zaken.

Wat-plaatjes laten zien wat je ziet. Je bent als gebruiker van het plaatje deelnemer. Hoe-plaatjes laten zien hóe het kijken in de gegeven situatie verloopt. Je bent als plaatjesgebruiker toeschouwer.

Effectief bleek te zijn in de klas een pakketje door te bladeren en bij de verschillende plaatjes te kijken van welke soort ze waren. De lezer van dit hoofdstuk zou dat ook kunnen doen.
Wat-plaatjes: bijvoorbeeld fig. 3, 4, 13 (boven), 21,27,32 (de strook).
Hoe-plaatjes: bijvoorbeeld fig. 1, 5, 6, 8, 10, 13 (onder), 16, 20, 23, 32 (het kaartje).

De hier aangegeven onderscheidingen helpen snel te zien wat er eigenlijk misgaat in allerlei situaties; het is vooral een praktisch bedoeld onderscheid.

We koppelden het karakter van het plaatje aan de aangegeven rollen. Strikt genomen gaat het dus niet om eigenschappen van de plaatjes zelf, maar om de manier waarop ze gebruikt worden.

Soms zijn beide rollen mogelijk, en kan het plaatje WAT én HOE zijn. Neem figuur 19 bijvoorbeeld, die is enerzijds op te vatten als een verklaring van het perspectief zien en het tekenen door de bezitter van het oog op het plaatje. Dan is het een 'hoe'-plaatje. Anderzijds kan het plaatje opgevat worden als 'wat' de buitenstaander ziet.
In eerste instantie werkt de WAT/HOE-indeling echter heel effectief en het lijkt niet nodig op grond van deze laatste haarkloverij de praktische terminologie te verlaten.

Samenvatting

- Twee rollen bij doen van kijkmeetkunde: deelnemersrol, toeschouwersrol.
- Rolwisselen gaat soms makkelijker als er iets is waar mee geïdentificeerd kan worden.
- Bij de twee rollen horen twee soorten plaatjes: Wat-plaatjes en Hoe-plaatjes.

Verborgen problemen

In de vorige paragraaf is een voortdurend terugkerend verschijnsel bij het bedrijven van kijkmeetkunde op het niveau van 12-16 jarigen uitvoerig in kaart gebracht. In deze paragraaf willen we aan de hand van één probleem nog een aantal kleinere knelpunten signaleren.
Als uitgangspunt nemen we twee verschillende foto's van Ransdorp. Ransdorp ligt ten noorden van Amsterdam. Er staat een stompe toren midden in het dorp en iets buiten het dorp ligt een landelijk ophaalbruggetje over een sloot. In figuur 52 (pag. 79) zien we de twee foto's. De vraag is: hoe kan dat nou, de ene keer is de brug groter, de andere keer de toren?
Voor de ervaren kijkmeetkundige is dit vrij eenvoudig: zijaanzicht maken en twee lijnen tekenen.

Met dit probleem is vroeger in een brugklas geworsteld; het probleem was gesteld in de hier gegeven vorm van twee foto's en een vraag naar een verklaring.

Allereerst duiken dan de in de vorige paragraaf aangegeven problemen op. Dat is mooi te zien op de foto in figuur 53 (pag. 79), waar enkele leerlingen hun verklarende schets op het bord maken.

Toren en brug, foto A

Toren en brug, foto B

fig. 52: Twee maal de brug bij Ransdorp. Wat is hoger, de toren of de brug?

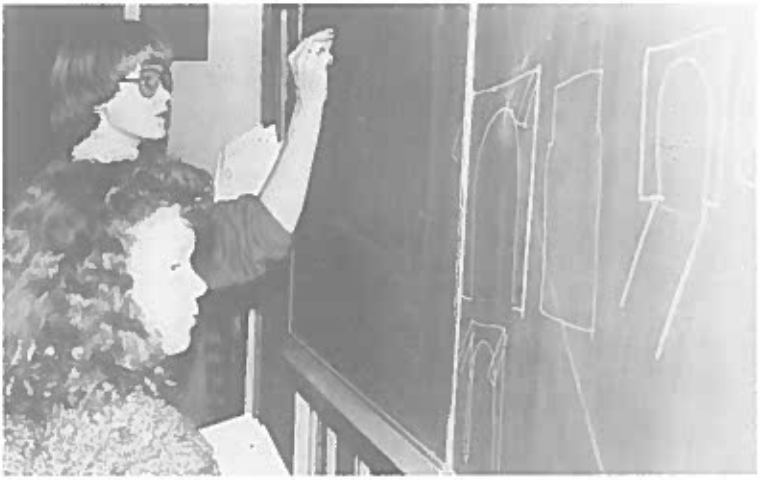


fig. 53: Geen verklaring, maar een herhaling van de foto's komt op het bord.

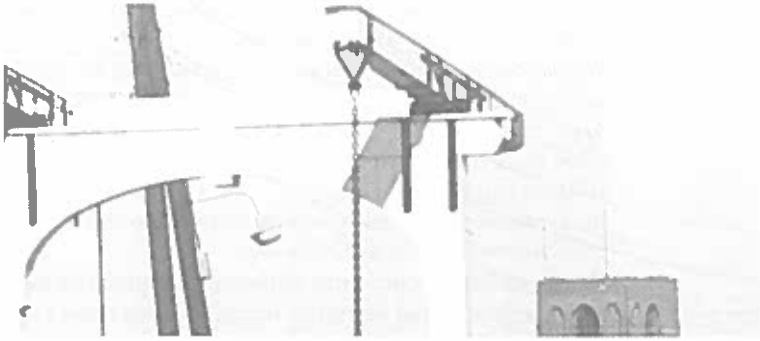


fig. 54: Ingezoomd, vanaf het standpunt van foto A.

Zo te zien tekenen ze de foto nog eens na. Er is geen spoor van uit de situaties stappen, van veranderen van rol.

Het ging om een klas waar nog niet zo expliciet het middel zijaanzicht aan de orde is gesteld als we nu in het programma voorstellen, de leerlingen treft hier geen blaam.

Een andere drempel komt naar voren door het vergelijken van de foto's. Vooral volwassenen komen hier met de schijnverklaring 'tele-effect'. Het gaan van de foto A naar foto B doet denken aan het inzoomen met de video-camera. De toren is 'dichterbij gehaald'.

Echt inzoomen, vanaf het zelfde standpunt als van waar foto A is genomen, levert echter op wat in figuur 54 (pag. 79) te zien is. Daar blijkt dat nog steeds de bovendwarsbalk van de ophaalbrug juist boven de lamp van de paal er achter is te zien. En ook de positie van de toren ten opzichte van de brug is ongewijzigd. Door inzoomen vanaf één standpunt verandert de onderlinge ligging op de afbeelding niet. Toch wijst deze verwarring ons de weg: laat eerst met één foto en in een gegeven aanzicht werken. Zo is het probleem dan ook in een 3e klas in het W12-16 experiment gebruikt.

Dan gaat het erom in het gegeven zijaanzicht, figuur 55, aan te geven vanwaar foto A genomen is. Dat is een probleem waarbij een kijklijn gevonden moet worden, die door de top van de toren èn een punt van de brug (of een punt daar vlak naast) gaat.

fig. 55: Ransdorp met ophaalbrug van opzij.

Een kijklijn zonder oogpunt, dat is als het ware een vergelijking oplossen: zoek een oogpunt, zodanig dat, enzovoort.

Handig is dan eerst eens te verkennen wat vanaf een gegeven oogpunt te zien is, zoals punt C in figuur 55, vast te stellen of punt C een 'oplossing' van de vergelijking kan zijn.

We hebben iets dergelijks al eerder gezien bij het vinden van een bepaald punt op het strand in figuur 13 (pag. 40). Daar was zelfs een serie mogelijkheden gesuggereerd.

Zelfs in deze vorm als nu geschetst was 'Ransdorp' voor derde klas C/D niveau niet eenvoudig.

In de eerste klas werd een verwant probleem concreet nagespeeld., maar verwacht hier niet alles van!

Het naspelen gebeurde met papieren bomen die op de tafel gezet kunnen worden. Vanaf één punt op de tafelrand moet worden gekeken: zie figuur 56 (pag. 81).

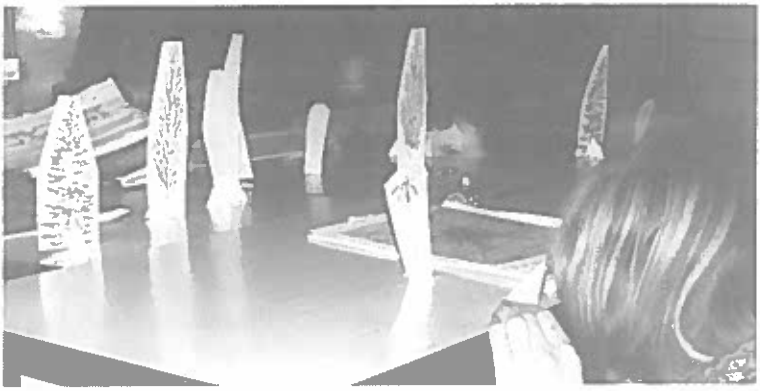


fig. 56: De bomen bekijken.

De bomen moeten zo geplaatst worden dat je eerst I van figuur 57 ziet en daarna zo dat je II van figuur 57 ziet.

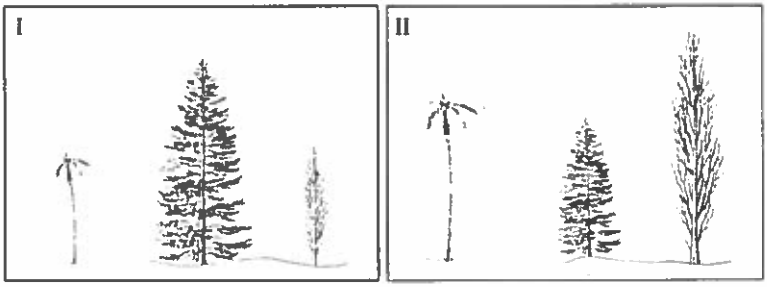


fig. 57: Schuif de bomen zo, dat je dit (links) of dit (rechts) ziet.

Die opdracht blijkt onverwacht lastig. Het probleem is dat je blijft zien dat de populier de hoogste van de drie bomen is, hoe je ook schuift. Dat dit op een afbeelding niet zo is, is een andere zaak.

Samenvatting

Soms lijken problemen toegankelijk, maar duiken tijdens het werken er mee toch onverwachte drempels op. Enkele zijn:

- de barrière van het in- en uit de situatie stappen;
- het lastige onderscheid tussen de functie van het standpunt en de functie van het formaat van de afbeelding;
- de moeilijkheid van het terugzoeken van een onbekend oogpunt;
- het probleem dat je wéét dat iets groter is terwijl het op de afbeelding niet zo is: de verwarring van werkelijkheid en beeld.

Dat laatste is een belangrijk punt. We wijden er de volgende paragraaf geheel aan en plaatsen het in een wat breder kader.

Tekenen wat je ziet?

Perspectief als code

In de paragraaf 'De inhouden van de kijkmeetkunde' (pag. 32), is perspectieftekenen beschreven als een manier om de werkelijkheid op een vlak weer te geven. En wel een zodanige dat de tekening dezelfde kijkhoeken oplevert als de werkelijkheid, als het oog maar vanaf het juiste punt in de juiste richting wordt gericht. In sommige Italiaanse kerken is het plafond zó beschilderd, dat haast niet te zien is waar de echte architectuur ophoudt en het schilderwerk begint, als maar op het juiste punt wordt gestaan! Echter kan haast niet, perspectief als dè volmaakte manier van afbeelden.
Toch klopt er iets niet.

Neem een foto, gemaakt met een normaal fototoestel en afgedrukt op 9 × 13 cm. Dat is een handig gemaakte perspectiefafbeelding. De blikwijdte van het fototoestel is 40^0, en om de foto onder die hoek te zien moet hij op ongeveer 21 cm van het oog (één oog!) gehouden worden. Dat doet niemand. Bovendien worden foto's zelden bekeken met één oog precies midden recht voor de foto.

We gebruiken perspectiefafbeeldingen echter niet op de manier van het kerkplafond. We lezen veeleer de foto als een 'code' voor bedoelde ruimtelijke objecten. Het heeft er mee te maken dat wij – West Europeanen – al zó vaak foto's en perspectief-tekeningen hebben gezien, dat we ook zonder het juiste standpunt in te nemen heel goed kunnen vaststellen wat de ruimtelijke betekenis van de afbeelding is. We doen al dit interpreteren onbewust en onmiddellijk. Dat moge blijken uit het volgende voorbeeld, waar we juist door al onze visuele ervaring op het verkeerde been worden gezet.
De meesten van ons zullen bij figuur 59 de indruk hebben dat de bovenste horizontale streep langer is dan de onderste.

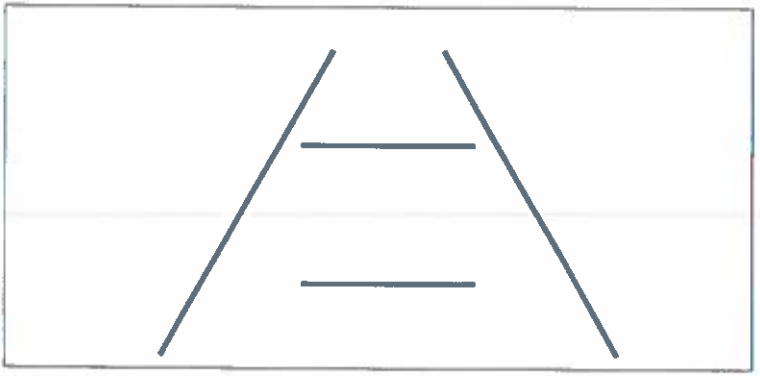


fig. 58: Gezichtsbedrog door dieptesuggestie.

Nameten leert dat dit niet zo is. De schuine strepen herkennen we onbewust als de code voor evenwijdige lijnen die van ons aflopen als bijvoorbeeld die van een spoorlijn. De voorste dwarslijn is dan half de spoorbreedte, de achterste lijn bijna de spoorbreedte. Met deze (en andere) figuren is onderzoek gedaan in West-Afrika onder mensen die niet blootgesteld zijn aan perspectieftekeningen. Die schatten de verhoudingen tussen de dwarslijnen correct in.

In onze samenleving wordt je verondersteld bepaalde afbeeldingen ruimtelijk te kunnen interpreteren, ook zonder dat je het juiste standpunt ten opzichte van de afbeelding weet.

Je moet als het ware de code van het perspectief tekenen impliciet kennen. Bij iets op het papier moet je direct weten: o, ze bedoelen een balk.

Er zijn verschillen tussen mensen in bedrevenheid met dit interpreteren volgens de heersende afbeeldingscodes; maar die treden pas naar voren in extreme situaties, als er weinig steun door herkenbare objecten op plaatjes is.

Werken we met onnodig abstracte tekeningen bij kijkmeetkunde, dan zal dat merkbaar zijn. Denk bijvoorbeeld eens hoe lastig het zou zijn de afbeeldingen van het letterblokkenbouwsel (figuur 15, pag. 44) te begrijpen als de letters er niet waren!

Tot slot van dit onderdeel over de code van het perspectief een kindertekening, zie figuur 59.

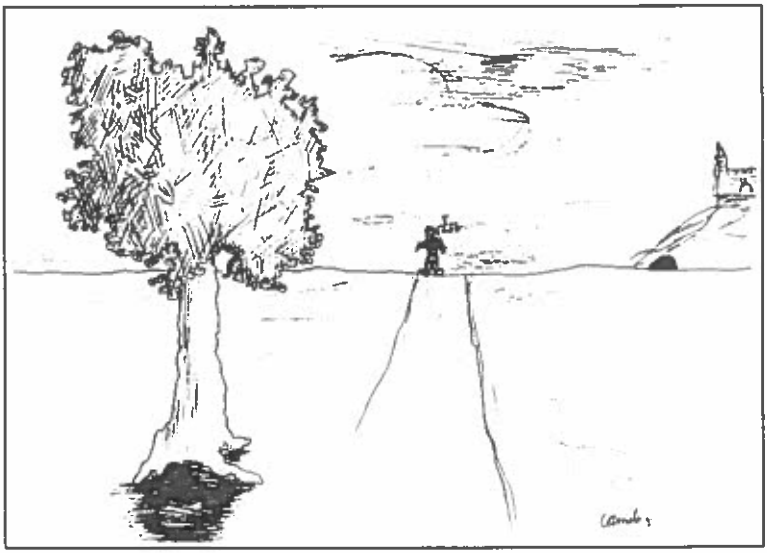


fig. 59: Fluitende Kaspar op weg.

Getekend door Camillo (11 jaar): de boom en de horizon waren al voorgetekend. De tekening was naar aanleiding van:
'...Vrolijk fluitend ging Kaspar weer op weg, nieuwe avonturen tegemoet.'

Camillo kent de codes voor vrolijk fluitend (♫) èn voor 'weg'. Hij gebruikt ze op zijn manier.

Wat je ziet en wat je weet

In figuur 60 zien we de oudst bekende afbeelding van een door paarden getrokken kar. Het is een in steen gekraste tekening uit *Uzbekistan*, van zo'n tweeduizend jaar voor Christus.

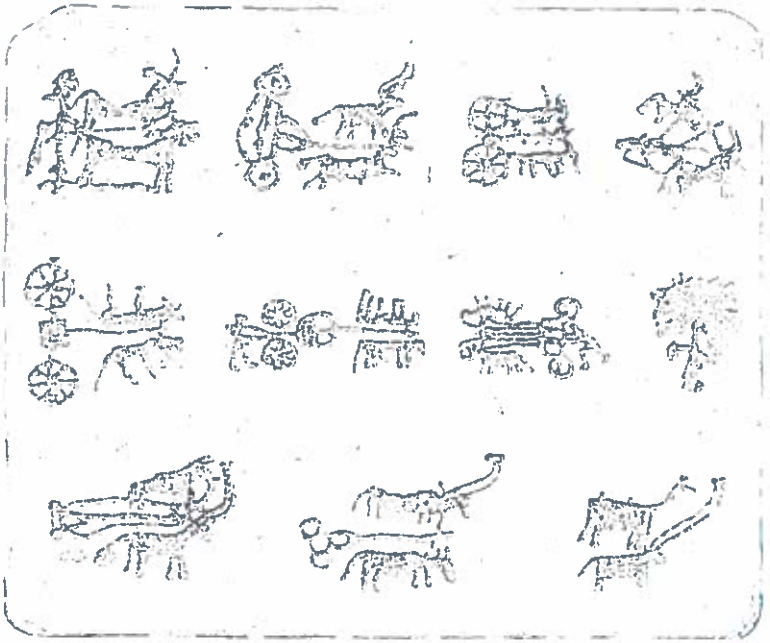


fig. 60: Paarden op een steen uit Uzbekistan; 2000 jaar voor Christus.

De 'tekenaar' laat zien dat er twee wielen en twee paarden zijn. De wagen met paarden is natuurlijk symmetrisch, dat is helder in de afbeelding te zien. Dit voorbeeld laat ook zien dat de veronderstelling dat vóór het perspectief in een soort parallelprojectie werd getekend (soms gesuggereerd bij Egyptische of Chinese tekeningen), niet in zijn algemeenheid juist is. De paarden met kar zijn op de gegeven manier afgebeeld om te laten zien hoe de kar met paarden in elkaar zit. Er is getekend wat je moet weten van de kar, niet hoe de kar geprojecteerd

wordt. Er is echt getekend wat je aan de kar kunt zien.

'Teken wat je ziet' is voor leerlingen ook niet zo'n geschikte opdracht als we iets willen in de richting van de perspectief-code.
We herkennen dat in de volgende voorbeelden.

Voorbeeld: een cilinder tekenen
Zet eens een wc-rolletje rechtop op tafel. Laat kinderen dan 'tekenen wat je ziet'. Vaak komt er zoiets als in figuur 61:

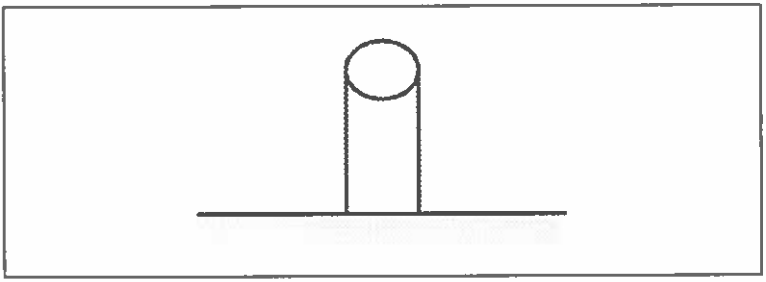


fig. 61: Een wc-rolletje getekend.

Je ziet immers dat:
- het rolletje plat op de tafel staat;
- het overal even dik is;
- het rond is.

Gebruik van het doorkijkscherm zoals door Dürer voorgesteld (figuur 31, pag. 59), of een simpele vervanger, is een stap in de richting van het formaliseren van 'tekenen wat je ziet'. Zulke activiteiten, het oefenen in interpreteren (zie figuur 28) en zelf tekenen (met hulp), leiden tot het beter verstaan van de bestaande codes.

Voorbeeld: een kubus tekenen

Een leerling van 13 jaar oud tekende de kubus van figuur 62. De leerling 'wist' hoe de voor- en bovenkant getekend 'moesten' worden. Bij het rechterzijvlak werd het volgens hem te gek.
Merk op dat de naar rechts uitstekende hoek wel 90^0 is.

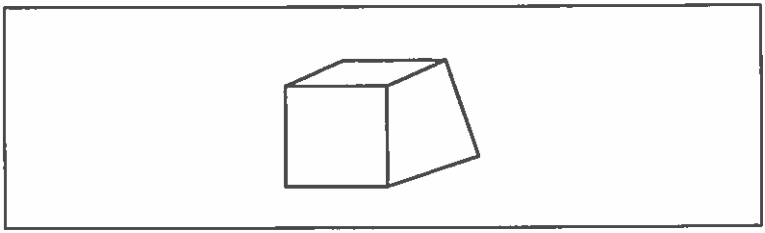


fig. 62: Een kubus.

Leerlingen vinden het prettig te merken dat ze de code van de volwassen wereld ook kunnen hanteren. Met opgaven als die van figuur 29 leren ze dat, nog zonder de achtergrond van wat voor projectie dan ook.

Het oog neemt geen foto's

Het menselijk oog mag dan oppervlakkig lijken op een fototoestel, de volledige werking van ons gezichtsvermogen is zo anders dan het fotografieproces, dat de gelijkenis ons ook op het onjuiste spoor zet.

Onze hersens en ons oog (lens en netvlies) vormen één geheel, dat een ruimtelijk beeld voor ons levert van de werkelijkheid die we zien.

Het is in theorie wel zo dat onze hersens analyseren wat op het netvlies wordt afgebeeld, maar we zijn ons niet bewust van de gedaante van het netvliesbeeld, alleen van het resultaat: het ruimtelijk idee. Maar dat laatste is dus feitelijk een constructie van onze hersenen. Een recent artikel uit Scientific Americain (september 1992) gaat precies hierover en traceert welke hersenactiviteiten er voor nodig zijn; Semir Zeki: The Visual Image in Mind and Brain. Een citaat:

The visual stimuli available to the brain do not offer a stable code of information. The wavelengths of light reflected from surfaces change along with alterations in the illumination, yet the brain is able to assign a constant colour to them. The retinal image produced by the hand of a gesticulating speaker is never the same from moment to moment, yet the brain must consistently categorize it as a hand. An object's image varies with distance, yet the brain can ascertain its true size.

The brain's task, then, is to extract the constant, invariant features of objects from the perpetually changing flood of information it receives from them. Interpretation is an inextricable part of sensation. To obtain its knowledge of what is visible, the brain cannot therefore merely analyse the images presented to the retina; it must actively construct a visual world.

Kortom: onze hersens zeggen ons: die boom *is* hoger, en niet: de boom komt groter op het netvlies. Waarbij 'is' dan betekent: in de constructie die de hersenen maken op grond van het netvliesbeeld.

Hierbij komt nog dat onze ogen, optisch gezien, heel slecht zijn. Slechts een klein deel van het netvlies – het centrum – bevat voldoende zenuwcellen om het beeld redelijk scherp te kunnen maken. De buitenkant van het netvlies geeft slechts grove peilingen door, maar de gevoeligheid voor beweging en verandering is daar juist groot is.

Daaruit merken we ook al dat onze hersens méér doen dan één kiekje bekijken. Ze verzamelen gegevens in de tijd, terwijl ons oog zich steeds ergens anders op richt. Er wordt uit het geheel een om-

vattend ruimtelijk beeld geschapen, dat voor onze gedachten overal scherp is.

Samenvatting van deze paragraaf:

- perspectieftekeningen leveren de juiste kijkhoeken alleen als het juiste standpunt wordt ingenomen;
- we doen dat laatste zelden en gebruiken veeleer onze voorafgaande ervaringen met afbeeldingen en onze kennis van de objecten zelf;
- zodoende functioneert 'perspectief' ook als een te interpreteren 'code' voor ruimtelijk afbeelden;
- die code wordt door ervaring aangeleerd;
- bij zelf tekenen, ook onder de opdracht 'teken wat je ziet' zullen leerlingen zich niet zonder meer door die code alleen laten leiden.

Dit alles naar aanleiding van wat bij de foto's van figuur 52 is aangeroerd!

fig. 63: Vuurtorenwachter en konijnen.

De vuurtorenwachter loopt naar de vuurtoren. Achter de toren spelen konijnen in het gras. Ze lopen niet meer weg voor de vuurtorenwachter. Thuis vertelt de vuurtorenwachter aan zijn kinderen: 'Als ik naar de toren loop, kom ik steeds dichter bij de konijnen. Ze lopen niet weg en toch zie ik er steeds minder. Hoe kan dat?'
Leg dat uit met deze tekening.

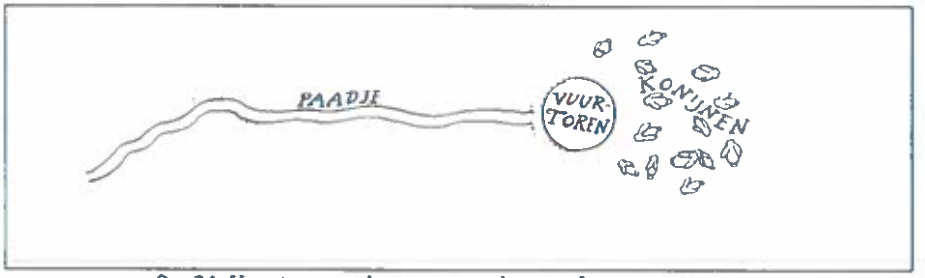


fig. 64: Vuurtoren en konijnen van boven af gezien.

Kijkmeetkunde leren

In het voorgaande is uitvoerig ingegaan op de diverse inhoudelijke thema's die bij kijkmeetkunde voorkomen. Er is ook geschetst wat ongeveer met leerlingen gedaan kan worden op dit gebied en wat de belangrijkste obstakels zijn.

We bekijken nu kort het leerproces vanuit de in hoofdstuk 17 geschetste fasering.

Oriënteren en verkennen

Het aardige van kijkmeetkunde is dat het zo gewoon is, dat het zo dicht ligt bij de gewone ervaringen van alledag. De proef met de duimsprong bijvoorbeeld (zie fig. 16 pag. 45) kan direct overal gedaan worden. Er is niets bijzonders voor nodig. Het is dan ook typisch voor wat in hoofdstuk 17 bij de fase oriënteren en verkennen is gezegd: iets doen met dingen die allang bekend zijn; maar ook: ze net op een hoger niveau tillen.
We hebben gezien dat het hoger niveau hier zit in het kennismaken met het hulpmiddel bovenaanzicht. In eerste instantie gaat het om het in deze situatie gebruiken van dat bovenaanzicht. Explicitering van het begrip, dat is echt weer een niveau hoger.

Het breed oriënteren op verschillende situaties houdt in dat zo'n middel geleidelijk uitkristalliseert. Of zoals in hoofdstuk 17 is gezegd: 'onder al te situatiegebonden kenmerken vandaan wordt gehaald.'
We geven nog één voorbeeld dat typisch is voor de oriëntatie- en verkenningsfase. Ook omdat het op een goede manier inspeelt op de relatie werkelijkheid-afbeelding, die hier 'concreet' wordt gemaakt in de klas.

Uitgangspunt is de situatieschets van figuur 63 (pag. 88) met de daarin aangegeven opdracht.
Het bovenaanzicht is ook gegeven, zie figuur 64 (onderaan pag. 88).

De opgave geeft een herkenbare situatie weer. Er kan dan ook uitstekend iets nagespeeld worden. In een klas werd een rond potje (zeg 5 cm groot) op de overheadprojector gezet. Punaises speelden de rol van konijn en één leerling moest over het vlak van de overheadprojector kijken. Die deed het echte viseerwerk, terwijl de klas op het scherm een bovenaanzicht zag en daar zich als het ware de getekende viseerlijnen kon voorstellen.

Verklaringen hierbij moeten natuurlijk echt getekend worden, het komt erop neer dat de vuurtorenwachter van dichtbij de vuurtoren onder een grotere hoek ziet dan van veraf. Bij het tekenen komen impliciet dus ook nog allerlei andere begrippen voor: raaklijnen (onbe-

noemd als zodanig) en hoeken (misschien nog onbenoemd). Zulke oriëntatie-activiteiten zorgen daar ook voor een basis waar later eventueel naar kan worden terugverwezen.

Ordenen en structureren

Kijkmeetkunde kan gemakkelijk ontaarden in alleen maar oriëntatie op allerlei losse probleemsituaties, waarin alles met alles samenhangt en alles van alles losstaat. In de paragraaf 'Inhouden van de kijkmeetkunde' hebben we geprobeerd begrippen toch ook geïsoleerd aan te geven. In wat in hoofdstuk 17 de fase van ordening en structurering is genoemd, zal veel van die inhouden expliciet benoemd worden. In de experimenteerperiode van het W12-16-project hebben we in die fase succesvol met allerlei vormen van samenvattingen van begrippen voor de leerlingen gewerkt.

In zo'n samenvatting in een leerlingentekst worden begrippen als kijklijn, kijkhoek, aanzicht, nog eens kort beschreven, gevolgd door een paar vragen die nu eens niet over een concreet probleem gaan, maar over die begrippen zelf.

Een andere vorm is het ordenen van wat ontdekt is; een voorbeeld is het ordenen van wat in diverse aanzichten nog wel en wat niet meer te zien is (zie het overzichtje vlak na figuur 17).
De ordening van de constructies die met projectie te maken hebben, (zie figuur 34 tot en met 39, pag. 63 en verder) zou ook als samenvatting kunnen functioneren. Een vorm is weer: terugbladeren naar wat al gedaan is, dat nog eens ordenen en overzien.

In de paragraaf 'Deelnemen en toeschouwen' (pag. 74) is het onderscheidingsmiddel wat/hoe voor plaatjes aangeroerd. Ook dat blijkt geschikt om nog eens terug te bladeren.

Samenvatten en ordenend terugkijken, het zijn noodzakelijke stappen om leerlingen ook te laten zien dat ze via de veelheid van oriënterende activiteiten toch inderdaad iets aanwijsbaars hebben geleerd.

Kijkmeetkunde op het niveau van twaalf- tot zestienjarigen omvat in onze opzet weinig stellingen, die vergelijkbaar zijn met bijvoorbeeld Pythagoras. Stellingen zouden bijvoorbeeld kunnen gaan over wat vervormd wordt en wat slecht verkleind wordt bij perspectief afbeelden. We hebben ervoor gekozen in de 12-16 periode de middelen van de kijkmeetkunde (rechte lijn, aanzichten, etc.) heel duidelijk te maken. Dat zijn de algemene en meest gebruikte zaken. In vervolgonderwijs – bijvoorbeeld havo B – kunnen dan wat meer stellingachtige zaken naar voren komen.

Overzicht en herkenning

In hoofdstuk 17 is nog een derde fase aangegeven: overzicht en herkenning. Na het voorgaande zal duidelijk zijn dat die fase niet goed onderscheiden is van wat eraan vooraf gaat. De fase is in hoofdstuk 17 ook gekenmerkt door het in nieuwe situaties gebruiken van aangeleerde kennis en vaardigheden.
Dat zal bij kijkmeetkunde, die steeds met reële situaties begint, natuurlijk vanzelf gebeuren. Hier is ook de verbondenheid met andere delen van de meetkunde van belang.

Ter afsluiting een voorbeeld dat in feite aansluit bij de vuurtoren van zoëven. Het is een probleem dat verbindingen heeft met kijkmeetkunde, rekenen met verhoudingen en eventueel met goniometrie.
In onze opzet dus voor klas 3/4.
Uitgangspunt is de foto van figuur 65.

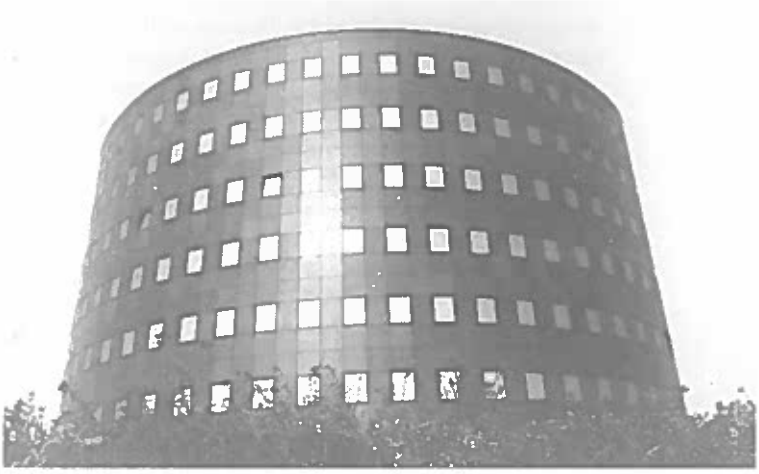


fig. 65: Een rond gebouw.

De bijbehorende opgave is:

Op de foto is een derde deel van het ronde gebouw te zien. De diameter is 40 meter. Van hoe ver van het gebouw af is de foto genomen?

De vuurtoren en de opgave met het ronde gebouw geven als het ware begin en eind aan van één onderwerp uit de kijkmeetkunde; zichtbaarheid in verband met ronde voorwerpen, eerste oriënterend, kwalitatief en later ook meer rekentechnisch benaderd. In zo'n afsluitende fase wordt expliciet van het begrip raaklijn en van eventueel de tangens gebruik gemaakt.

Enkele grepen uit de geschiedenis van de kijkmeetkunde

Voor ieder die er even bij stilstaat moet het een fascinerend probleem zijn: hoe is het mogelijk dat we met die twee ogen van ons zo'n schitterend, kleurrijk beeld van de wereld kunnen zien.

Sporen van die fascinatie vinden we al bij de Griekse filosofen van zo'n vierhonderd jaar voor onze jaartelling. Sommigen van deze filosofen meenden dat alle dingen 'beelden' van zichzelf uitzonden, die door het oog werden opgevangen. Volgens anderen zou dat niet mogelijk zijn: zo'n beeld van een kameel of berg kon nooit door de kleine oogpupil. Volgens hun zou het oog actief zijn, op een of andere manier de objecten aftasten.

De filosofen Plato en Aristoteles hebben in deze kwestie lijnrecht tegengesteld over het kijkproces gedacht en de tegenstelling is voor ons toch nog wel interessant. Plato meende dat het oog een vorm van het element vuur uitstraalde. Aristoteles echter laat de kracht vanuit de dingen ontstaan, die op een of andere manier het tussenmedium (lucht of water) activeren als er licht aanwezig is.

We moeten ons wel realiseren dat het niet zo eenvoudig is te beslissen welke richting de juiste is. Houden we een hand tussen oog en te bekijken voorwerp, dan zien we volgens beide theorieën de hand en niet het voorwerp!

Een eerste meetkundige beschrijving van het zien vinden we bij Euclides, dus ongeveer 300 jaar voor Chr. in Alexandrië. In zijn *Optica* werkt hij al met de rechte lijn als verklaringsmiddel. Een van de stellingen die geheel wiskundig worden bewezen is:

Propositie VI: Wanneer evenwijdige lijnen van een afstand worden gezien, lijken ze op ongelijke afstand van elkaar.

Dit klinkt aanvankelijk misschien wat onduidelijk, maar wat in feite beredeneerd wordt uit axioma's over het zien, is precies wat in figuur 14 (pag. 42) is gesuggereerd: de schijnbare hoek (de kijkhoek vanuit een vast punt) wordt kleiner naarmate die dwarsverbinding verder ligt en nadert (in moderne terminologie!) tot nul. In ons geval - bij het steeds verder weg liggen van de stok - werd de evenwijdigheid van de lijnen waar zich de stokuiteinden over verplaatsen alleen niet benadrukt.
Het belang van Euclides is dat hij meetkunde als middel gebruikt om de optische theorie op te bouwen.

Andere onderwerpen in het denken over kijken zijn onder andere de werking van het oog als orgaan en wat kleur is. Al deze zaken had-

den ook de belangstelling van diverse Arabische filosofen uit de periode van zevenhonderd tot dertienhonderd na Christus. We dienen daarbij te bedenken dat in de Christelijke traditie van die tijd het uit mechanische oorzaken verklaren van dingen niet hoog stond aangeschreven; daar ging het meer om het hogere doel waarop alles in de wereld zich richt; een aan de Griekse wiskunde tegengestelde houding die niet vruchtbaar is gebleken voor wetenschappelijk onderzoek waarin experimenten en waarneming een rol spelen.

Arabieren als Alkindi (negende eeuw), Avicenna en Alhazen (vroege elfde eeuw) bouwen wèl voort op de Griekse traditie; maar ook zij zijn onderling verdeeld over het feit of het oog nu iets uitzendt of niet. Een belangrijke bijdrage aan de wetenschap door de in Spanje verblijvende Arabieren is dat ze allerlei Griekse teksten in het Arabisch vertaalden èn vaak uit het Arabisch naar het Latijn. Via die weg dringt in de twaalfde en dertiende eeuw toch veel over de Griekse filosofie en wetenschap, verrijkt met Arabisch commentaar, binnen in onder andere Italië.

De late Christelijke Middeleeuwen kennen wel een preoccupatie met licht en heftige kleuren. Tal van schilderijen èn literatuur wijzen daarop. Dat geldt zeker voor de Italiaans dichter Dante Alighieri (1265-1321). Het is niet onwaarschijnlijk dat Dante, door bestudering van o.a. de theoloog Roger Bacon, met de meer wetenschappelijke optica in aanraking is gekomen. Bacon's werk was namelijk encyclopedisch en wat betreft *Optica* op genoemde Arabieren gebaseerd. Een opmerkelijke aanwijzing daarvan vinden we in Dante's *Vita Nuova*, waarin hij over zijn liefde voor Beatrice vertelt. Hij is dan negentien jaar, zij achttien en al getrouwd. Hij wil haar natuurlijk zien, maar zij mag dat niet merken:

'Op een dag gebeurde het dat die allerliefste ergens zat waar woorden opklonken ter ere van de Koningin der glorie en toevallig bevond ik mij toen op een plaats vanwaar ik de bron van mijn zaligheid kon aanschouwen, en halverwege tussen haar en mij in rechte lijn zat een edele en zeer knap uitziende dame, die herhaaldelijk naar mij keek, omdat zij zich verbaasde over mijn blikken, die naar haar leken uit te gaan. Het gevolg daarvan was dat velen dat kijken van haar opmerkten. Het trok zelfs zozeer de aandacht dat ik, toen ik van die plaats wegging, vlakbij mij hoorde zeggen: 'Kijk eens wat die vrouw in hem aanricht.' En toen men haar naam noemde, begreep ik dat men het over haar had, die zich halverwege op de rechte lijn had bevonden die uitgaande van de allerliefste Beatrice eindigde bij mijn ogen. Toen ik dat merkte, voelde ik mij zeer getroost door de overtuiging dat ik mijn geheim op die dag aan niemand door mijn blik had verraden.'

(Dante; Vita Nuova (1292); vertaling: Frans van Dooren.)

Blijkbaar is de meetkunde van het licht hem vertrouwd, anders zou Dante de situatie er niet zo eigenaardig mee kunnen beschrijven. Het is een opmerkelijk stukje: niet alleen wordt de kijklijn er in genoemd, ook het omkeerkarakter ervan en de kwestie van het informatieverlies komen heel direct in naar voren. Precies dat informatieverlies (kijkt Dante naar Beatrice of naar de edele dame?) is de zaak waar alles om draait.

Op andere plaatsen bij Dante en iets later bij Boccacio is het weer de kleurenpracht, de stralende helderheid van het licht die opvalt. Ook in de allegorische *Roman de la Rose* komt dat voor. In die roman vertelt Jean de Meun breedvoerig over de regenboog en over holle en bolle spiegels, die dwergen als reuzen laten verschijnen en andersom.

De inzichten over optica, ook toen al 'perspectiva' genoemd, hebben dan nog niet geleid tot een theorie over het afbeelden van de werkelijkheid. Volgens de kunsthistoricus S. Edgerton is het verschijnen van exemplaren van de *Atlas van Ptolemaeus* (nieuwe versies dus van een werk uit de Oudheid) daarin van belang omdat er vormen van kaartprojecties van de wereldbol in worden beschreven.

Deze projecties zouden in de kring waarin Brunelleschi verkeerde - we zijn nu in Florence in 1420-1425 - met onder andere de medicus-astroloog-astronoom-wiskundige-geograaf Toscanelli zijn besproken. Edgerton brengt ook nog aan het licht dat deze zelfde Toscanelli later in 1474 aan een vriend in Lissabon schrijft over een westwaartse route van Lissabon naar ... China, waarbij hij een kaart meestuurt, die helaas niet meer bestaat.

Het perspectieftekenen zelf, zoals door Brunelleschi bedacht, ontwikkelt zich snel in werkplaatsen van schilders en architecten.
De eerste omvattende verhandeling is die van de eerder genoemde Leon Battista Alberti, uit 1435.

Alberti zegt uitdrukkelijk dat hij niet als wiskundige, maar als schilder schrijft. Dit is het verschil volgens hem:

'Wiskundigen meten afmeting en vormen van de dingen in de geest alleen en geheel van de materie losgemaakt. Wij echter, die over de zichtbare dingen spreken, drukken ons in ruwere termen uit.'

Bij Alberti is het schilderij 'een doorsnede van de zichtpiramide' (zie ook de beschrijving ervan in dit hoofdstuk op pag. 49). Hij gaat direct ook in op schijnbare verkortingen, lijnstukken die op één punt terechtkomen, enzovoort.

Na Alberti ontwikkelen zich snel allerlei praktische perspectiefmethoden in de ateliers. Via Dürer, onder andere, komt de theorie èn de praktijk ook over de Alpen.

In essentie is het perspectief ook een beschrijving van de invloed van de positie van de waarnemer op wat die waarnemer ziet.
Dat is een 'modern' standpunt. Een afbeelding beschrijft in die opvatting wat waargenomen wordt en pretendeert niet direct 'de werkelijkheid' aan te geven.
Het is interessant dat in 1548 een uitgewerkte astronomische theorie wordt gepubliceerd, waar in feite vanuit het bewegen van de waarnemer merkwaardigheden in het gedrag van de planeten werden verklaard. We spreken natuurlijk over Copernicus en de bewegende aarde.

Zoals de kijkmeetkunde in de paragraaf 'De inhouden van de kijkmeetkunde' (pag. 32) van dit hoofdstuk is gepresenteerd, komen er nauwelijks getallen aan te pas. Men kan echter gemakkelijk al het construeren van lijnen vertalen in werken met formules en vergelijkingen. In die vorm speelt de kijkmeetkunde tegenwoordig een verborgen maar belangrijke rol. We noemen slechtsenkele voorbeelden:

- Alle kunstmatige beelden die tegenwoordig onze tv-schermen bevolken, de wegdraaiende letters en schuin wegklappende beelden: allemaal in berekeningen (voor snelle computers) omgezette perspectiefconstructies.
- De al genoemde Röntgenscanner, die door informatie uit van diverse kanten gemaakte opnamen een beeld van het inwendige van het hoofd kan vertonen.

Kijkmeetkunde staat nog niet stil!

Bronnen

In het voorgaande is onder andere gebruik gemaakt van:

1 John Fauvel and Jeremy Gray (ed.): *The History of Mathematics, a Reader*. London, 1987.
2 Dürer, A.: *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheidt*. Neurenberg, 1537.
3 Alberti, L.B.: *De Pictura*. Florence, 1435.
4 Eco, U.: *Kunst en Schoonheid in de Middeleeuwen*. Nederlandse vertaling bij uitgeverij Bert Bakker, 1989.
5 Edgerton S.: *The Renaissance Rediscovery of linear perspective*. New York, 1975
6 Montgomery Watt, W.: *Arabische Invloeden op Middeleeuws Europa*. Edinburg/Amsterdam, 1992

Alberti's boek is in Engelse vertaling als Penguin beschikbaar.
Dürer's boek is in betrekkelijke goedkope facsimile editie verkrijgbaar, met Engelse vertaling naast de originele pagina's en houtsneden, bij Abaris Books, New York.

MEETKUNDE OVER VORMEN EN FIGUREN

Een van de doelen binnen dit gebied van de meetkunde is het herkennen van verschillende meetkundige vormen in objecten en vlakke figuren en patronen die in de werkelijkheid voorkomen. Het herkennen van meetkundige vormen opent mogelijkheden naar redeneren, construeren, oriënteren. Meetkundige vormen en figuren zitten veelal verstopt in ruimtelijke objecten. Omdat het vaak gaat om plaatjes (foto's, tekeningen) van deze objecten, moeten de leerlingen die ruimtelijke vormen daarin kunnen herkennen. Ze moeten door hebben welke vertekeningen het gevolg zijn van het pletten van de ruimte tot een plat plaatje. Daarmee is al aangegeven dat zo'n onderdeel als meetkunde van vormen en figuren niet los staat van de andere gebieden kijkmeetkunde, plaatsbepalen en rekenen in de meetkunde. Los staan is hier bedoeld vanuit de activiteit van leerlingen. Meetkunde doen waarbij vormen en figuren een belangrijke rol spelen, kan niet los van denkactiviteiten op de andere gebieden.

Naast de studie van vlakke figuren met het doel de ruimte te kunnen (be)grijpen, willen we ook aandacht voor de studie van vormen en figuren die het platte vlak opvullen: patronen, symmetrie, regelmaat. We bepleiten hierin geen hiërarchie, in de zin van eerst een tijdje plat en dan pas de ruimte in. De moeilijkheidsgraad van de problemen bij patronen en vlakvullingen kan hogere eisen stellen aan redeneren dan bij het maken van doorsneden in een kubus nodig is.

We vinden dit deel van de meetkunde vanwege het redeneeraspect, het esthetisch aspect en het constructieaspect een waardevol deel van wiskundeonderwijs. Daarnaast leren de leerlingen juist in dit deel een aantal wetmatigheden zoals bijvoorbeeld de eigenschap van de som der hoeken in een driehoek, die elders goed van pas komen.

Concreet en mentaal handelen

Niet alle leerlingen hebben op jonge leeftijd dezelfde ervaringen gehad met activiteiten die het inzicht in vormen en figuren onderbouwen spelen met blokken, mozaïek, vouwen, knippen, plakken, overtrekken, natekenen, bouwen, slopen, enzovoort. Het ruimtelijk voorstellingsvermogen en de ervaringen met symmetrie en patronen en regelmaat is bij de twaalfjarigen zeer verschillend. Het is daarom goed alle leerlingen gelegenheid te geven nog een tijd concreet bezig te zijn. Ook in een later stadium is het goed om leerlingen hun mentale handelingen te laten controleren door concreet te handelen.

Dit concreet bezig zijn is geen doel op zich, maar is uitgangspunt voor construeren, berekenen en redeneren. Als de concrete materiële activiteiten niet gepaard gaan met mentale activiteiten, als het 'knippen en plakken' geen denkactiviteiten uitlokt, stelt het 'gedoe' - althans binnen het kader van wiskundeonderwijs - niets voor. Uiteindelijk gaat het erom dat leerlingen in staat zijn zelf te besluiten tot concreet handelen.

Laten we bedenken dat er met concreet handelen bij het bedrijven van wiskunde niets mis is. Galilei, begin zeventiende eeuw, onderzocht de cycloïde. Dat is de kromme baan die een buitenpunt van een wiel beschrijft als het wiel rolt. Hij bepaalde de oppervlakte onder de cycloïde met behulp van wegen van stukken karton. Hij ontdekte dat die oppervlakte drie keer de oppervlakte van het betrokken wiel is.

Torricelli, leerling van Galilei, kon dat later ook bewijzen; reken maar dat het bij het vinden van het bewijs nuttig is geweest dat Galilei zijn vondst al concreet handelend gedaan had. Denk aan architecten die maquettes maken van hun gebouwen, denk aan alle modellen die vitrines in wiskunde-instituten en lerarenopleidingen bevolken. Buiten de direct schoolse sfeer wordt het concrete handelen om ideeën te vormen serieus genomen. Laten we dat binnen het meetkundeprogramma op school ook doen; smalende opmerkingen over een beetje knippen en plakken gaan voorbij aan het feit dat het concreet handelen niet bedoeld is als bezigheid op zich, maar een functionele plaats in een leerproces heeft dat juist op mentaal handelen is gericht.

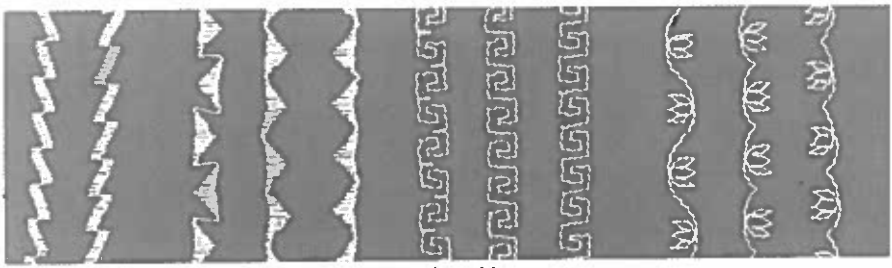
Vlakke vormen

Bij dit deel in de meetkunde horen de volgende doelen.

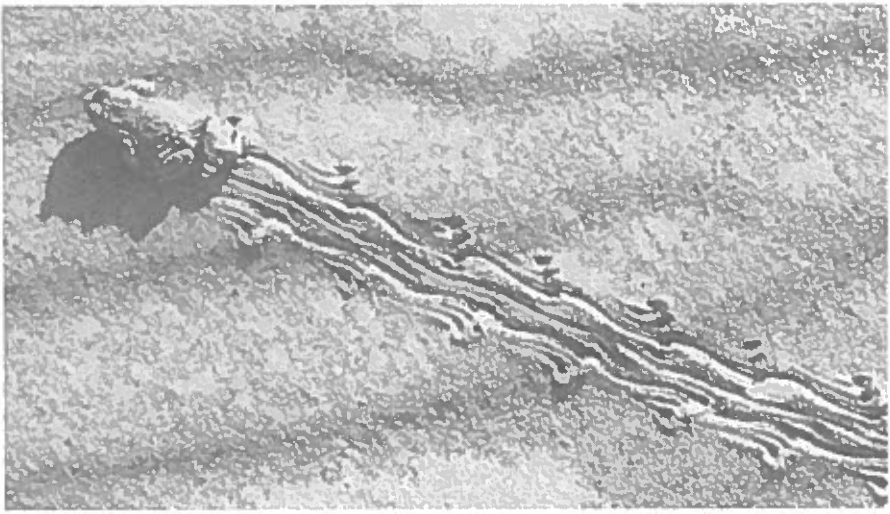
- Het in de werkelijkheid aan kunnen wijzen van symmetrieën (spiegelsymmetrie en draaisymmetrie), herhalingen (periodiciteit).
- Kwalitatieve en kwantitatieve uitspraken doen over de verschillende vormen, over de eigenschappen, de zijden en de hoeken.

Bij het werken aan deze doelen vinden wij het noodzakelijk dat de leerlingen vanaf klas 1 de situaties zo aangeboden krijgen dat ze ook beter om zich heen gaan kijken, oog krijgen voor esthetische aspecten bij patronen en ornamenten die ze eerst misschien niet eens opmerkten en ook leren verwoorden wat ze zien. Dat ze ook ervaringen kunnen opdoen aan de hand van concrete materialen. Daarom is het van belang dat bij het onderzoeken van bijvoorbeeld randsymmetrieën het aanbod van voorbeelden breed is.

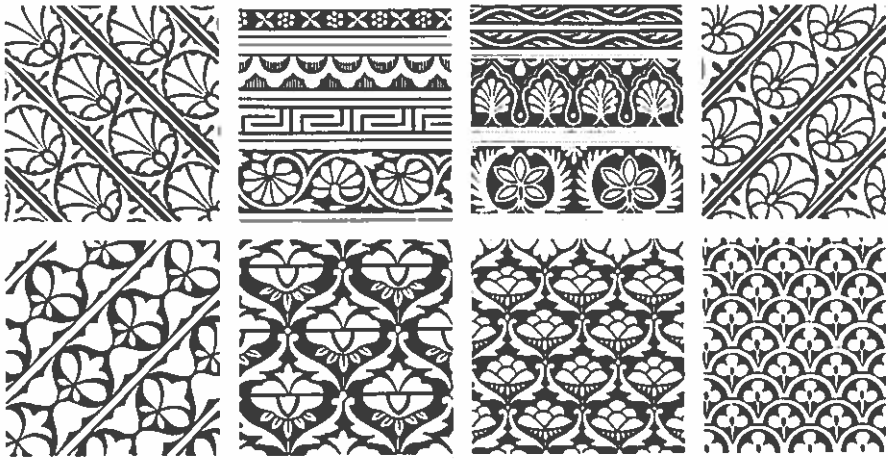
In figuur 1 (pag. 99) zien we zulke uiteenlopende dingen als steken die met een moderne naaimachine zijn gemaakt, het spoor van een pad en enkele versieringsmotieven uit India.



diverse steekpatronen van een moderne naaimachine

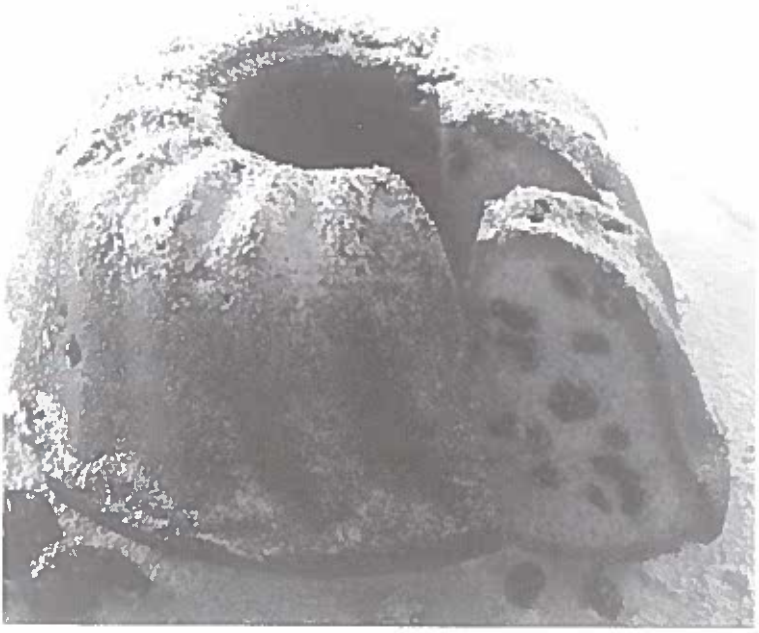


het spoor van een pad



enkele Indiase versieringsmotieven

fig. 1: Diverse voorbeelden van randsymmetrie.



Hieronder zie je vier doorsneden van deze tulband.
Leg van elke doorsnede uit hoe je die kunt krijgen.
Geef hierbij steeds aan (in woorden of in een plaatje) waar je moet snijden en in welke richting.

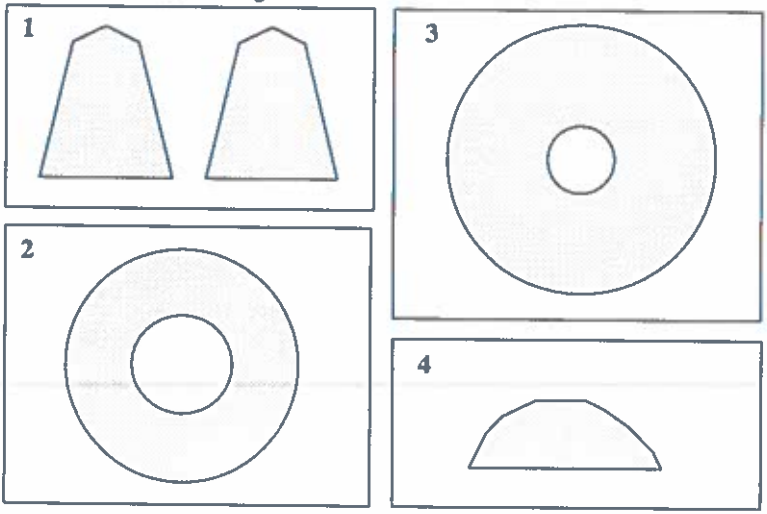


fig. 2:Een opgave over doorsneden

Ruimtelijke vormen

Het verkennen van ruimtelijke figuren gebeurt aan de hand van ob jecten uit het dagelijks leven, bijvoorbeeld verpakkingen, gebruiks voorwerpen, objecten in en rond het huis en objecten in en buiten d stad.

Het is niet de bedoeling dat de voorwerpen alleen geclassificeer worden naar vorm; ook aspecten als mooi, stevig en functioneel kun nen er bij betrokken worden.

Hoe kun je van (platte) materialen ruimtelijke voorwerpen of figu ren maken? Hoe zitten ruimtelijke voorwerpen of figuren in elkaar Deze vragen kunnen gesteld worden zowel aan de hand van concree materiaal als aan de hand van foto's en tekeningen.

De gewone objecten staan centraal: Een gulden heeft de vorm va een cilinder. Heeft een stapel guldens ook de vorm van een cilinder?

Na verkenning van ruimtelijke vormen worden objecten nu oo van 'binnen' bekeken. Voorwerpen worden 'doorgesneden' en de vorn van de aldus ontstane vlakken wordt bekeken. Omdat bijna iederee bij het doorsnijden van voedsel de ruimtelijke situatie kan voorstelle is dit een zeer geschikte context om kennis te maken met het begri doorsnede.

Zo komen twee aspecten van de ruimtemeetkunde aan bod:

- Het herkennen van ruimtelijke voorstellingen in 'platte' plaatjes
- Het zien van (snij)vlakken in ruimtelijke objecten.

Dit kan aan de hand van twee typen opdrachten:

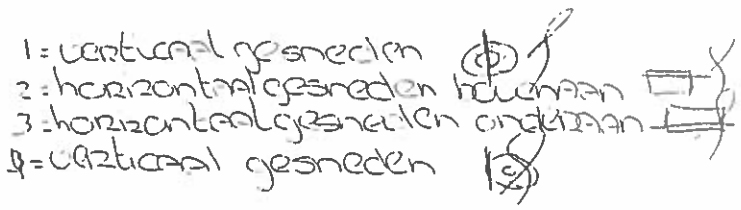
1 Gegeven een voorwerp en een snijrichting, gevraagd de doorsned op een bepaalde plaats. Hierbij wordt ook aandacht besteed aan looc recht op elkaar staande doorsneden, bijvoorbeeld:

Wat zie je als je een appel door het steeltje doormidden snijdt Maak een tekening.

Je kunt een appel ook anders doorsnijden. Bijvoorbeeld loodrecl op de vorige snijrichting.

Maak een tekening van zo'n doorsnede door het midden van ee appel.

2 Gegeven een of meer doorsneden van een object, bepaal de snij richting en de plaats waar gesneden is, bijvoorbeeld zoals in de opg ve bij figuur 2 op pag. 100. De reacties van een leerling op de vrage over de tulband zien we hier:



In dit verband komen ook parallelle doorsneden voor. Het gaat dan over het al dan niet veranderen van de vorm van de doorsneden. Hierop wordt doorgegaan bij het werken met de kubus.

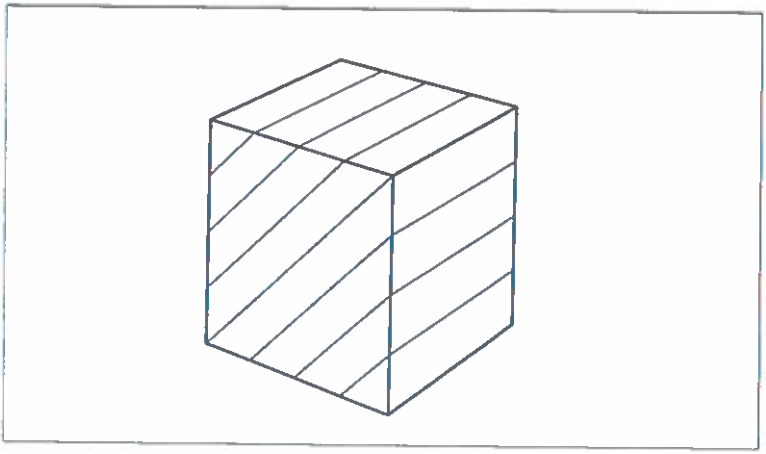


fig. 3

Je ziet hier (figuur 3) een kubus. De lijnen geven de plaats aan waar de kubus doorgesneden wordt.
>> Welke vormen krijgen de doorsneden? Teken er een.

Ook wordt later aan de hand van evenwijdige doorsneden van een object bekeken welke formule voor het berekenen van de inhoud gekozen moet worden.

Als het mogelijk is om in een object parallelle doorsneden te maken die gelijk zijn, dan kan de formule *inhoud* = $G \times H$ gebruikt worden (G = oppervlakte grondvlak, H = hoogte).

Door afwisselend te werken met plaatjes (tweedimensionaal), ruimtelijke objecten (driedimensionaal) en mogelijke doorsneden (tweedimensionaal) wordt het ruimtelijk voorstellingsvermogen geoefend. Daarna kan dan gewerkt worden aan moeilijkere vragen over bijvoorbeeld doorsneden in een kubus of over het berekenen van afstanden en hoeken die met behulp van een geschikte doorsnede bepaald kunnen worden door een schaaltekening of berekening te maken.

Doorsneden worden in het algemeen gebruikt om ruimtelijke problemen te herleiden tot vlakke problemen.

Toen het pakket Doorsneden in de klas werd gebruikt, is ook gewerkt met het computerprogramma Doorzien. Daar kunnen leerlingen gemakkelijk zelf zulke plaatjes mee maken als figuur 3. Maar ook

daarbij werd de fase van het concreet handelen niet overgeslagen. Sommige leerlingen hadden echte blokjes nodig, naast de computer, om te begrijpen wat er op het scherm gebeurt.

Je kunt een hoogtekaart zien als het over elkaar getekend zijn van een serie parallelle horizontale doorsneden van het berglandschap. Het bekende weerkaartje met isobaren lijkt op zo'n hoogtekaart. Dat is als het ware een kaart waarbij de contourlijnen niet de hoogtes, maar de luchtdruk aangeven. Een landschap van de luchtdruk als het ware. In een zadelpunt zal de luchtdruk niet veel verlopen (zodat er weinig wind is), net als dat in een zadelpunt in het berglandschap de bodem vlak loopt. Een dergelijk inzicht verbindt geheel verschillende gebieden uit de realiteit via wiskundige sleutelbegrippen. Het hier gegeven voorbeeld is natuurlijk moeilijk, maar toch is het de bedoeling zulke verbindingen in het oog te houden.

Met dit voorbeeld zijn we ineens uit de beslotenheid van vormen en figuren. Dat is ook steeds de bedoeling. Leerlingen moeten in staat zijn aan de hand van kennis van vormen en figuren te komen tot redeneren, construeren en berekenen.

PLAATSBEPALEN

Dagelijks en wiskundig plaatsbepalen

In de praktijk van alledag worden plaatsen op allerlei manieren pre cies aangegeven.

1 Neem bus 53 vanaf station Wezerhorst. Stap uit bij halte Oud Aa. Ga de brug over, dan links en de derde straat rechts. Je moe zijn op 312 (derde verdieping).
2 Bij de tandarts:
Tweevlaksvulling in 3.6., noodvulling in 2.2. Pas op met kauwe links!
3 Concertgebouw, grote zaal, Zaal: 24-31.
Dat is tamelijk achteraan in de zaal, links van het midden.
4 Adres: van Breestraat 194, 1071 ZZ Amsterdam.
Opzoeken in de zakatlas Amsterdam van Falkplan levert:
Breestraat, Van: 21 A3, dat wil zeggen: kaartje 21, vak A3.
5 Voor wereldreizigers: Port Louise (Kerguelen, Indische Oceaan ligt op 49.10° Z, 69.20° O.
6 De richting vanuit Madrid naar Mekka is 104°.
7 In Nederland staat de zon in juni op zijn hoogst in zuidelijke rich ting op 61°.

Plaatsbepalen komt veel voor. Er zijn allerlei systemen voor, afhan kelijk van de situatie. Soms wordt gebruik gemaakt van tellen (huis nummers, blokken op een kaart), in andere gevallen wordt gewerk met gemeten grootheden zoals afstanden en hoeken.

Plaatsbepalen komt in allerlei dagelijkse toepassingen voor, i meer geavanceerde toepassingen en in de wiskunde zelf. We willer uitdrukkelijk ook de dagelijkse, praktische kant serieus nemen om dat het hier gaat om middelen die iedereen moet kunnen hanteren Serieus nemen betekent ook dat de voorbeelden bij 'plaatsbepalen' i het nieuwe leerplan niet alleen bedoeld zijn als opstapje naar het wis kundige werken met coördinaten, maar dat de voorbeelden op zicl ook hun eigen belang moeten hebben.

Bij de voorbeelden 5 en 7 gaat het wiskundig gezien om hetzelfd coördinatensysteem: er worden twee richtingen gebruikt, twee hoek getallen. Die eenheid in wiskundig opzicht valt echter totaal niet o door de geheel andere situatie. In het eerste geval zijn we een netwerl van cirkels op aarde gewend, bij de zon echter kijken we naar de piel op de horizon recht onder de zon, meten daarvan de richting (dat i

Zuid, ofwel 180°) en bepalen dan de hoogtehoek (61°).

Een wiskundige opzet beperkt zich tot de 'abstracte' delen die gelijk zijn in beide voorbeelden. Vanuit de praktische benadering kiezen we voor beide voorbeelden, de wiskundige overeenkomst kan eventueel later aan bod komen.

Getallen in ongelijke rollen

De positie van tanden en kiezen wordt in de praktijk met twee getallen aangegeven: Het eerste getal geeft het kaakdeel aan, 1 = rechtsboven, 2 = linksboven, 3 = linksonder, 4 = rechtsonder. Het tweede getal betekent: tellen vanaf het midden. De twee getallen hebben heel ongelijke rollen; je moet haast wel eerst het kaakdeel opzoeken, dan pas de juiste tand of kies.

Bij het zoeken van blok A3 op een kaart is dat niet zo. Je kunt met A of met 3 beginnen, het maakt niets uit. 'A' en '3' hebben gelijke rollen.

Bij coördinaten in het gewone gebruik, zoals verdieping- en huisnummers, is er vaak zo'n structuur met ongelijke rollen. Daarbij kun je ook vaak slechts via één van de twee aanduiders groeperen. Zo kun je wel van één kaak spreken, maar alle 'zesjes' in de vier kaken, dat is een ongebruikelijke verzameling. Bij de huisnummers van flats lijkt het erop dat je in beide aanduidingen kan groeperen, maar vaak gaat het mis. Je mag redelijkerwijs verwachten dat 313 naast 314 (soms 315) zit, maar niet altijd zit 313 boven 213.

De contexten waarbij dit soort ongelijkheid voorkomt, zijn nuttig om te leren decoderen maar ze zijn vaak minder geschikt voor het opbouwen van meetkundig (vooral ruimtelijk) inzicht.

Blokken en punten

In veel woonwijken staan tegenwoordig plattegronden. Deze werken met een alfabetische straatnamenlijst en een blokaanduiding. Er staat bijvoorbeeld C3 achter de straat die je zoekt. De kaart is in blokken verdeeld en langs de rand staan C en 3 tussen lijnen, zoals in figuur 1 (pag. 107).
Het is een voorbeeld van plaatsbepalen met behulp van nummering. Het is een indelingssysteem waar met grove stappen wordt gewerkt, als het blok gevonden is, moet de straat zelf alsnog op het oog gevonden worden.

Door met afstanden te werken in plaats van genummerde aanduidingen kan op een kaart precies één punt aangegeven worden. Dan staan de getallen precies óp de lijnen, zoals in figuur 2 (pag. 107).

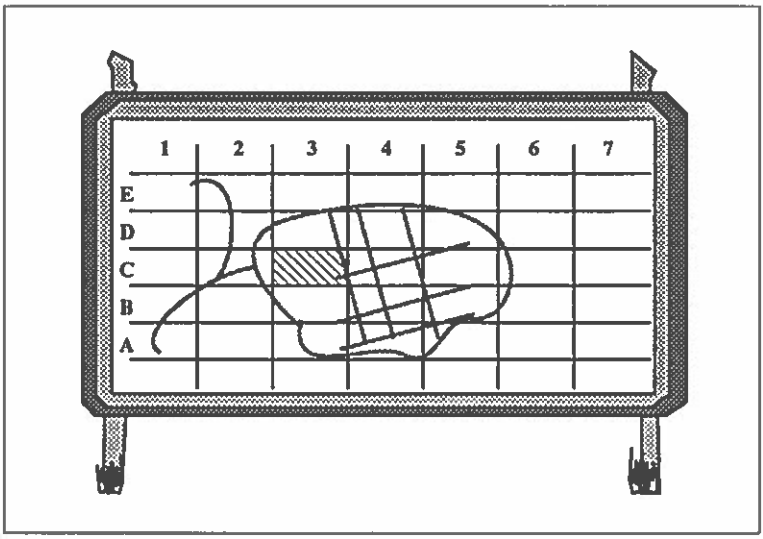


fig. 1: Blokindeling op buurtplattegrond; grove aanduiding van C3.

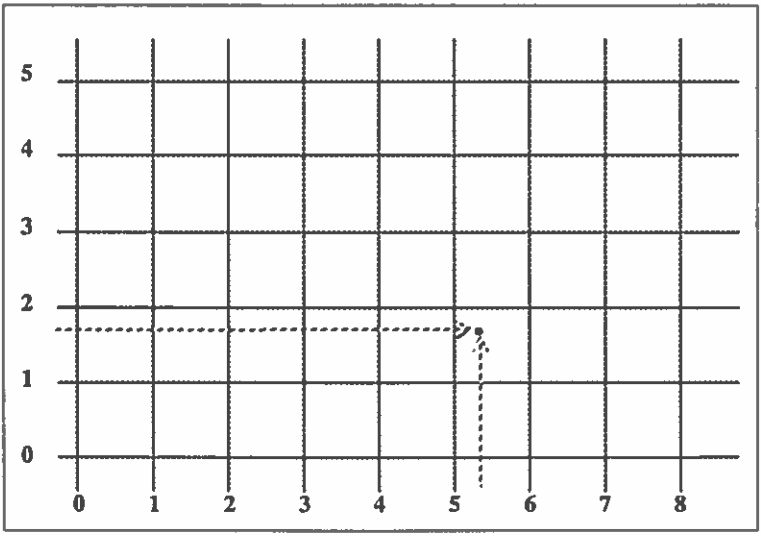


fig. 2: Continue indeling; precieze aanduiding van punt (5.4, 1.7.

Het is van belang dat leerlingen beide methodes in geschikte toepassingen tegen komen en ze goed van elkaar leren onderscheiden.

De wereld houdt zich niet altijd aan deze simpele indeling. De plattegrond van Manhattan met zijn streets en avenues gaat er dwars

tegen in: de getallen slaan op de straten en de lanen, niet op de blokken, maar je kunt wonen tussen 5th and 6th avenue.

De indeling in vakindeling en de continue indeling worden ook toegepast bij het maken van grafieken. Verderop in dit hoofdstuk gaan we nader op dergelijke samenhangen in.

In het algemeen laat de situatie geen twijfel toe over wat bedoeld is. Algemeen gebruikelijk lijkt te zijn bij blokindeling één van de aanduidingen in letters te geven en de andere in getallen. Denk bijvoorbeeld aan de kaartblokken en de bij schaken gebruikelijke zetnotatie, (e2 - e4 betekent de pion die voor de witte koning staat twee vakjes naar voren schuiven, de witte koning zelf staat op e1).

Openlijke en verborgen coördinaten

De gewone coördinaten op een kaart zien er uit als een lijnenstelsel, dat uit twee soorten lijnen bestaat, bijvoorbeeld zoals in figuur 3.

fig. 3: Coördinatensysteem van twee soorten lijnen.

Voor het opzoeken van een plek moet je in dit geval het snijpunt zoeken van een van de kromme lijnen en een van de rechte lijnen. Het lijnenstelsel is openlijk aanwezig.

Vaak is zo'n lijnenstelsel er niet en moet toch een plaats uit twee gegevens bepaald worden. Een voorbeeld hiervan is genoemd in hoofdstuk 2 over kijkmeetkunde. Vanaf een schip zag je twee vuurtorens in oostelijke en zuidoostelijke richting. Voor het plaatsbepalen moest je nu zelf lijnen trekken vanuit de vuurtorens in de juiste richtingen, het snijpunt is de te vinden plek. In dit geval zijn de twee lijn systemen de stralenbundels vanuit de beide vuurtorens, zie figuur 4.

Op de kaart zijn ze natuurlijk niet aanwezig.

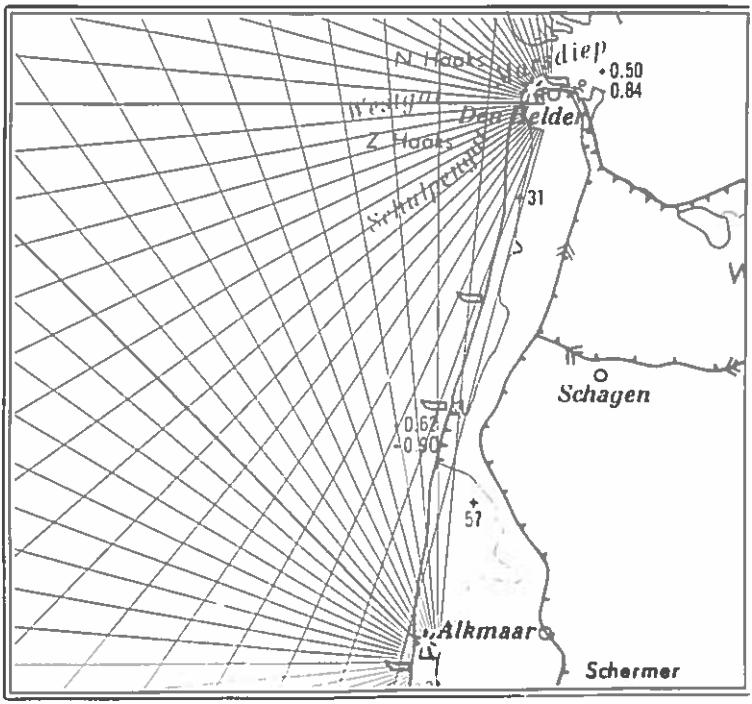


fig. 4: Verborgen coördinaatlijnen op zee.

Bij het zoekproces op een gewone kaart is vaak minder duidelijk da gebruik gemaakt wordt van zulke lijnen. Het lijkt er vaak op dat ge werkt wordt met twee pijltjes die van de rand van de kaart naar he te zoeken punt wijzen.

Globaal en puntsgewijs

Blijkbaar kun je op twee manieren tegen coördinaten aankijken. W nemen de aarde als voorbeeld.

De eerste manier is dat Noorderbreedte en Oosterlengte opgeva worden als hoeken vanuit het middelpunt van de aarde. Je ziet dar bijvoorbeeld Londen liggen op een aardstraal vanuit het midden var de aarde. De juiste straal wordt vastgelegd door de hoek met het eve naarvlak en nog een hoek, namelijk de hoek die het halfcirkelvormig vlak door beide polen en het punt zelf maakt met net zo'n halfcirkel vormig vlak door beide polen en Greenwich. In dit geval is die laatst hoek 0. In twee stappen is nu het juiste punt vastgelegd. Alleen Lon den wordt gevonden, los van de ligging van Londen t.o.v. andere plek ken op aarde. Zie figuur 5 (pag. 110).

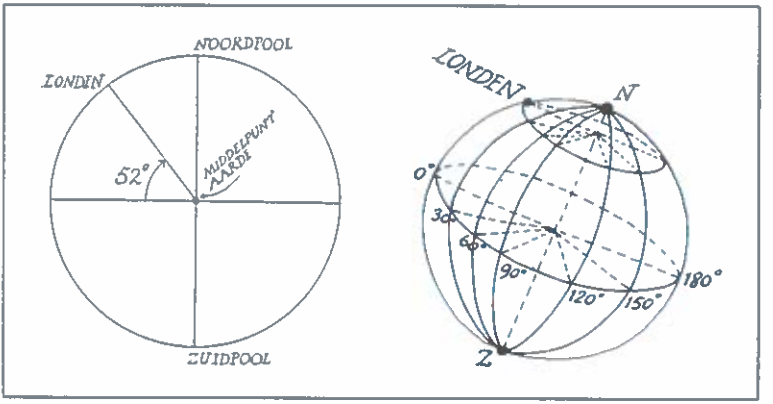


fig. 5: Eén punt op aarde vinden in twee stappen.

Deze manier is 'lokaal': de totaalstructuur die door het coördinatensysteem wordt gegeven speelt geen rol, alleen lokaal, op een plek, wordt gezocht.
De andere manier gaat juist wel van het geheel uit, het is globaal kijken naar een netwerk van cirkels op de bol. Zo'n netwerk kan als totaliteit ontstaan worden gedacht, bijvoorbeeld door een bol met een net te omhullen, zoals geschetst in figuur 6.

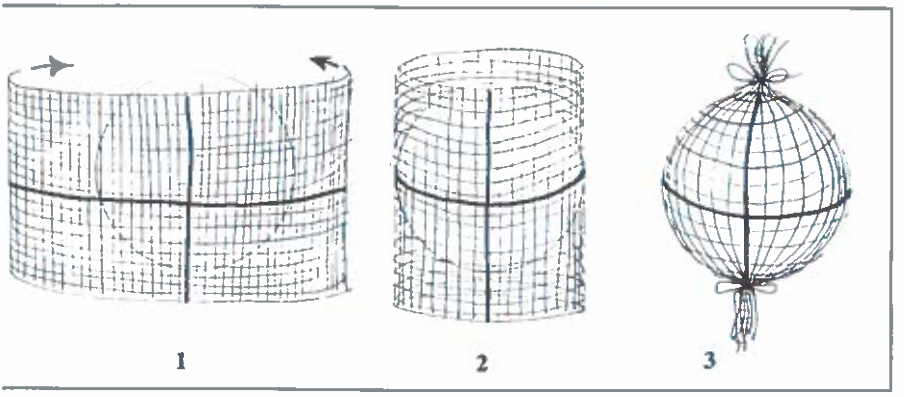


fig. 6: Een netwerk om de aarde.

Er zijn nu twee soorten kromme lijnen ontstaan. Halve cirkels die van pool tot pool lopen, de zogenaamde meridianen, en cirkels die evenwijdig aan de evenaar lopen, de parallelcirkels. Bij elke plek op aarde hoort nu één meridiaan en één parallelcirkel. Bij de polen doet het er niet toe welke meridiaan er wordt genomen.

Deze benadering geef t meer overzicht over het geheel maar maakt

niet direct duidelijk waarom bij dit coördinatensysteem hoeken wo den gebruikt.

De globale methode komt ook op heel elementair niveau voor: h kaartje voor de plaats in het theater of bioscoop geeft ook eerst 'rij z veel'. Er wordt dus een hele rij genoemd, niet één stoel.

Bij leren werken met coördinaten dient de globale aanpak steec in het oog gehouden te worden. We zagen dat bij de oriëntatieprobl men, waarbij het coördinaatnetwerk niet expliciet aanwezig is, jui die globale aanpak nodig is. Daar moest je eerst de lijn met 'alle' pun ten ten noordwesten van een vuurtoren vinden.

Nog een voorbeeld van deze benadering was het maken van h bovenaanzicht van de rotsgroep in het onderdeel kijkmeetkunde. Oc daar moesten lijnen getrokken worden die alleen nog maar de mog lijke posities weergeven. In het algemeen is er op dit punt overiger veel overlap met de constructies bij kijkmeetkunde.

Plaatsbepalen vanuit je eigen standpunt

Daar, in die richting en zó ver. Dat is toch wel de simpelste plaatsb paling. Met behulp van een kaart kunnen we in de klas een wegwijz maken die precies aangeeft waar iedereen woont, zie figuur 7.

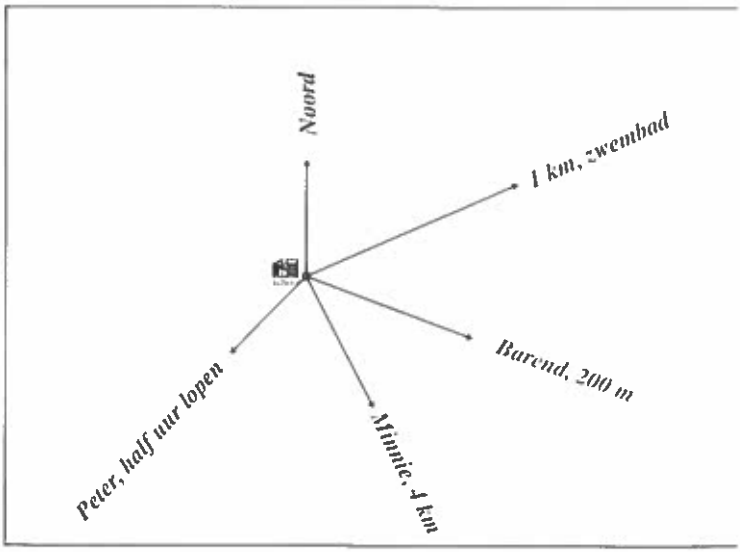


fig. 7: Waar we wonen ten opzichte van school.

Op uitzichttorens zie je wel van zulke dingen. Een hele cirkel met pi len voor de richtingen en afstanden erbij gegeven.

De weg wijzen is vaak aaneenschakelingen van mededelingen als:
loop drie blokken,
dan linksaf en weer twee blokken verder.
Karakteristiek is dat de aanduidingen gegeven zijn ten opzichte van de reiziger op de plaats waar die op een bepaald moment is; het zijn relatieve aanduidingen, geen absolute.

Meer geformaliseerd kunnen routes gelopen worden op grond van absolute richtingen, zoals de in figuur 8 weergegeven opgave

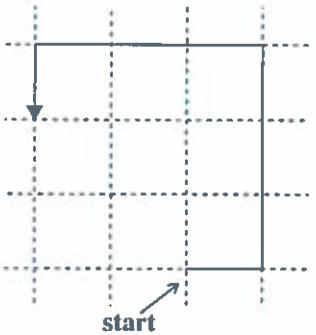
oost, noord, west, zuid

Hiernaast zie je een patroon op roosterpapier getekend.
De opdracht voor deze tekening is in een schema eronder kort opgeschreven.

>> Vertel in woorden hoe dit patroon is ingetekend.

>> Teken op roosterpapier het volgende patroon:

O	N	W	Z	O	N	W	Z
3	1	1	3	3	1	1	3



O	N	W	Z
1	3	3	1

fig. 8: Opgave met routebeschrijving.

Of juist met relatieve richtingen:

Doe dit acht keer:
doe drie stappen
draai 135 graden

Bij relatieve richtingen wordt steeds de zogenaamde draaihoek gegeven. In allebei de gevallen wordt met afstand en richting een positie aangegeven. Het systeem heet poolcoördinaten: vanuit één punt, de pool, wordt alles aangegeven. Blijkbaar komen zowel relatieve als absolute poolcoördinaten in het dagelijks gebruik gewoon voor.

Als we globaal (in de hierboven gegeven zin) kijken naar het poolcoördinatensysteem zien we:

- de punten in één richting vormen een lijn;
- de punten met dezelfde afstand vormen een cirkel.

De tradities met betrekking tot de richting zijn in toepassingen soms anders dan in de wiskunde. In de toepassing van navigatie, op kaarten en dergelijke geldt: vanuit het noorden rechtsom draaien. Het is verstandig het daarbij te laten in het W12-16 leerplan. In sommige delen van de wiskunde is de 0-richting vastgelegd als die van de x-as en is de draairichting linksom. Dat is vaak zo als er al een ander coördinatensysteem is, bijvoorbeeld wanneer we de steilheid van grafieken in graden willen uitdrukken, of bij complexe getallen. Voor W12-16 is dat vér weg, en verwarring treedt niet op als we alleen met de toegepaste vorm werken.

Relatieve richtingen worden vaak gebruikt op schepen en vliegtuigen. De 0-richting is dan die van het eigen schip en de hoek wordt opgegeven in de vorm van een klokstand. Er wordt bijvoorbeeld een walvis gesignaleerd op 'twee uur'. Een bruikbaar idee, ook omdat het een suggestieve manier van hoeken aangeven is.

Richting en kompas

Er zitten aan het begrip richting een paar lastige kanten. Als het gaat om richting vanuit jezelf naar een zichtbaar punt dan valt het nog wel mee, maar wat is eigenlijk 'naar het noorden'? Rondlopen en draaien met een kompas in de klas maakt al snel duidelijk dat het niet een plek ergens in de buurt is. We maken er in de klas een tekening bij:

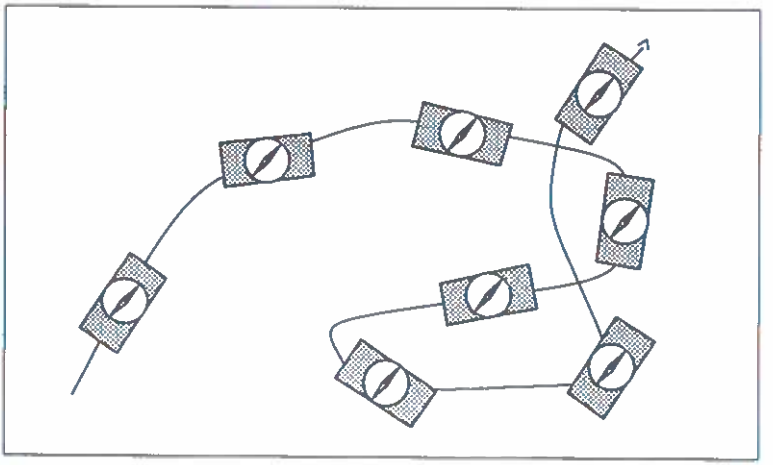


fig. 9: Lopen in de klas met een kompas.

De kompasnaald wijst het magnetische noorden aan, dat is niet precies het noorden van de noordpool, die bepaald wordt door de draaias van de aarde. In Nederland is het magnetische noorden ongeveer 4 graden westelijk van het echte noorden. Maar bij een eerste oriëntatie op het begrip richting op aarde laten we die details nog even liggen tot ze van belang worden.
Het verband tussen richting en evenwijdigheid moet aparte aandacht krijgen. Als we met z'n allen naar een plantje in de vensterbank wijzen staan onze armen zo:

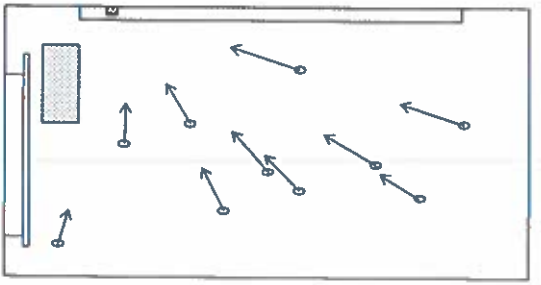


fig. 10

Wijzen we naar de boom aan de overkant, dan staan ze zo

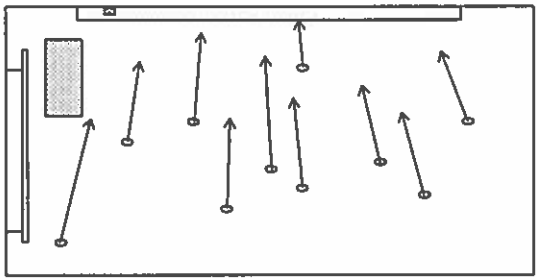


fig. 11

en naar de kerktoren héél ver weg zo:

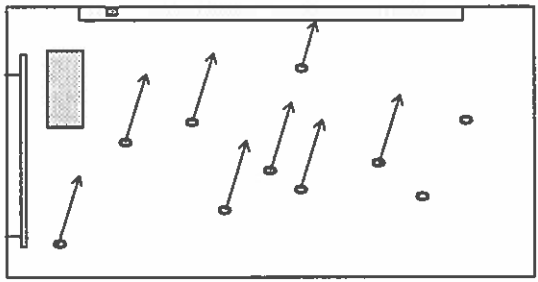


fig. 12: Niet iedereen kan de kerktoren zien.

Als het aan te wijzen punt héél ver is, ontstaat bijna-evenwijdigheid. 'Richting' heeft dus in eerste instantie te maken met richting naar één punt. Als het punt ver is, dan kunnen we niet de hele lijn van 'hier' naar dat punt trekken. We volstaan met een pijltje; op een klein stukje terrein (d.w.z. klein ten opzichte van de afstand tot het doelpunt) liggen de pijltjes evenwijdig.

Richtingen op aarde

Het voorgaande gaat ook op als we aan richting op het aardbolopper-vlak denken. De noordrichting is de richting naar de Noordpool. Vanuit Nederland uit gaat die richtingspijl dan wel schuin de aarde in, onder ongeveer 19°.

Meestal zullen we zeggen dat de richting naar de Noordpool het richtingpijltje is dat langs het aardoppervlak gaat, maar de echte richting zo goed mogelijk benadert. We kunnen ook een ander punt nemen als doel.

We 'voelen wel aan' dat het elastiekje dat we op de globe spannen van plaats A naar B de kortste route is. Dat die route precies in het vlak van A, B en het midden van de aarde loopt is ook heel aannemelijk, maar niet echt simpel te bewijzen.

Op aarde geven we richtingen aan met een hoek ten opzichte van de noordrichting; dat wil zeggen de plaatselijke noordrichting of meridiaan ter plekke.

Bizar klinkt nu: als je volgens de kortste route van A naar B gaat, ga je niet steeds in dezelfde richting. Toch is dat zo! Preciezer zou zijn: je gaat dan wel steeds in de richting van A naar B, maar die richting maakt niet steeds dezelfde hoek met de noordrichting. De problematiek is van belang bij:

- het uitzetten van koersen voor vlieg- en scheepvaartverkeer op aarde;
- het vinden van de juiste richting naar Mekka; Islamieten bidden vijf keer per dag in die richting.

Op dit kaartje, een wereldkaart waar alleen het coördinatennet op is aangegeven, zijn overal pijltjes richting Mekka gezet. Volg de pijlen en er ontstaan kromme lijnen op de kaart!

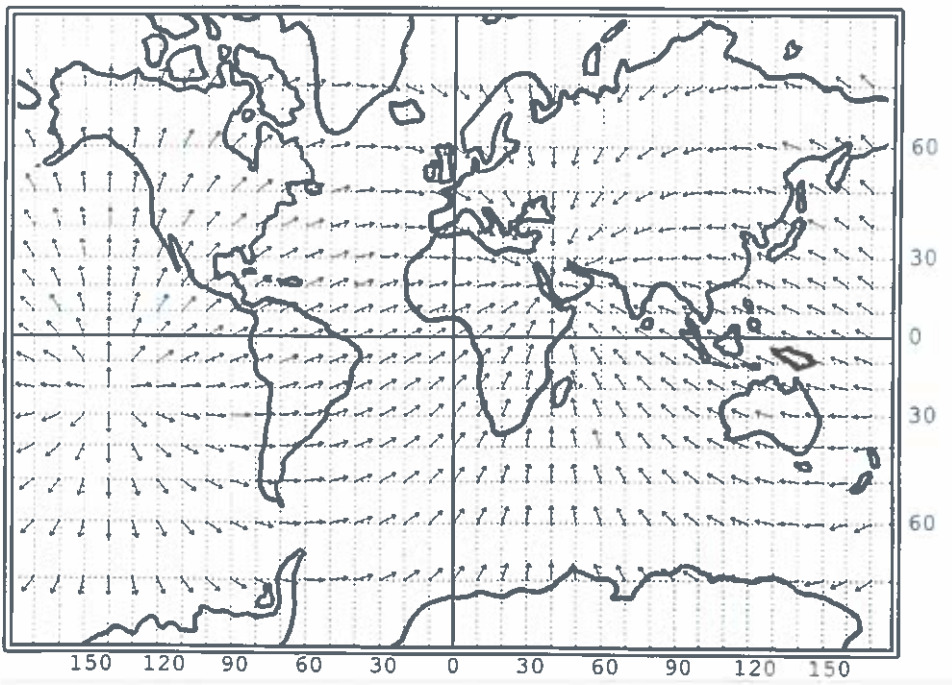


fig. 13: Kibla; de richting naar Mekka

De wiskunde die nodig is om op grond van de lengte- en breedtecoördinaten van twee plaatsen de richting van het ene naar het andere punt exact te berekenen, is in de Middeleeuwen door Arabische ster-

renkundige ontwikkeld in verband met het probleem van de richting naar Mekka. Voor W12-16 gaat dat veel te ver, maar wel kan de verbinding gelegd worden tussen richting van A naar B en grootste cirkel door A en B. (De grootste cirkel door A en B is de cirkel die ontstaat als we de wereldbol zouden snijden met een vlak door A, B en het midden van de aarde.)

Omdat we allemaal de wereldkaart hebben leren kennen met het bekende lijnenstelsel erop, begrijpen we direct dat de kortste weg van Amsterdam naar de Noordpool via de meridiaan loopt maar we zien niet zo direct in waarom de kortste weg van Napels (41° N, 14° O) naar New York (41° N, 74° W) niet via de parallelcirkel van 41° N loopt. Het elastiekje en de globe overtuigen, maar we kunnen ook een gedachtenexperiment doen. Zo: stel je voor dat Napels de Noordpool was. Houd de globe maar zo dat Napels bovenop zit. Denk er nu meridianen bij die dus allemaal naar Napels lopen. Er gaat er één door New York, en dat is duidelijk niet de parallelcirkel van zo pas, want die is kleiner.

Uit dit gedachtenexperiment blijkt eigenlijk dat coördinaten wel handig zijn, maar ook verdoezelen dat de bol overal als het ware aan zichzelf gelijk is. De Noordpool is een bijzonder punt van het coördinatenstelsel, maar daarom nog niet van de aarde als bolvorm. Natuurlijk is de Noordpool een bijzonder punt op aarde om heel andere redenen, maar dat zou zich niet moeten uiten in het bepalen van het vinden van kortste wegen.

Verwantschap met andere onderwerpen

Het werken met coördinaten heeft raakvlakken met andere zaken in het programma. We kijken eerst even naar verbanden met andere delen van de meetkunde.

Kijkmeetkunde

In het voorgaande is er al op gewezen dat bepaalde stukjes kijkmeetkunde sterk verwant zijn met plaatsbepalen, vooral waar de kijklijnen opgevat kunnen worden als de lijnen uit een coördinatensysteem. Bij het voorbeeld van de navigatie ten opzichte van de twee vuurtorens was dat zo, maar daar leidde het tot een niet meer zo gebruikelijk coördinatensysteem. Bij het voorbeeld van de rotsgroep met de twee aanzichten in het hoofdstuk Kijkmeetkunde ligt dat anders; daar leidde de constructie tot een zeer gebruikelijk systeem.

Vormen en figuren

In verband met dit onderwerp noemen we slechts een mogelijkheid die nauw aansluit bij wat gezegd is over globaal naar het systeem van coördinaten kijken.
Neem eens een ouderwetse speelgoed hijskraan bij de hand. De arm kan omhoog en omlaag, het touw met het haakje kan op- en afgerold, het hele bovenapparaat kan draaien op het voetstuk. Houd nu de arm eens in één stand en kijk wat het haakje dan nog kan doen. De hijskraan kan nog draaien en het haakje kan nog op en neer. De plekken waar het nog kan komen liggen op een cilinderoppervlak. Ook door de ander variabelen stuk voor stuk of in combinatievast te houden, krijgen we allerlei vormen en figuren te zien. Vroeger bestond het meetkundeonderwerp 'meetkundige plaatsen'. Er moest gevonden worden hoe een punt nog kon bewegen als het aan een of andere voorwaarde was gebonden. De hijskraan is een elementair voorbeeld ervan. We gaan in het nieuwe leerplan (voor 12-16) niet werken met verzamelingen die door zo'n voorwaarde worden gegeven. Geen cirkelvergelijking dus!

Algebra: grafieken en tabellen

Figuren die door een verband tussen grootheden worden bepaald, komen echter wel voor bij algebra, vooral natuurlijk verbanden die rechte lijnen voorstellen. Tot 'plaatsbepalen' hoort ook het inzicht dat de punten die hier in een rooster aangegeven zijn en die volgens het herhaalpatroon twee rechts, één omhoog zijn ontstaan, op één lijn

liggen, zoals in figuur 14.

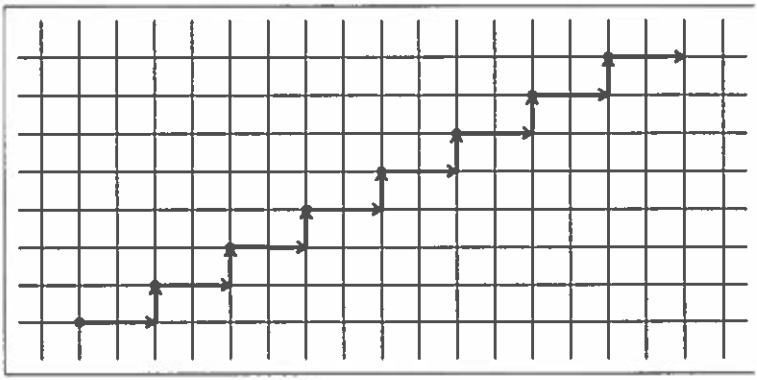


fig. 14: Steeds twee rechts, één omhoog. Punten op één lijn!

Hier kan ook mooi aangesloten worden bij het voorbeeld met de wan delingen op het roosterpapier (figuur 9). Kijk bijvoorbeeld wat er voo figuur ontstaat als vaak 'O 2 N 1' herhaald wordt!

Wat bij 'Blokken en punten' (pag. 106) is gezegd heeft ook te ma ken met een onderscheid dat bij grafieken belangrijk is. Bij grafieker wordt soms ook op de horizontale of verticale as met een vakkenin deling gewerkt in plaats van met een continue indeling.

Er is echter een belangrijk verschil tussen rechthoekige coördina ten zoals ze bij plaatsbepalen worden gebruikt en het maken van gra fieken. Omdat het in dit wiskundeprogramma regelmatig om toepas singen gaat, noemen we het hier expliciet. Bij plaatsbepalen in een rechthoekig systeem wordt in beide richtingen met afstanden ge werkt. Bij grafieken wordt weliswaar ook in een rechthoekig stelse gewerkt maar de grootheden die de grafiek verbindt zijn niet per s lengtes. Zo kunnen tijd/temperatuurgrafieken gemaakt worden. D afmeting die één uur krijgt op de horizontale as en één graad op d verticale as zijn volstrekt willekeurig en hebben geen onderlinge rela ties. Het is onzin te zeggen dat op een bepaald moment de tempera tuur stijgt onder een hoek van 45°. De steilheid van zo'n grafiek kar onmogelijk in graden uitgedrukt worden, die hoek zou afhankelijl zijn van de asindeling.

Bij grafieken hebben de assen vaak ook niet zulke gelijkwaardi rollen als de coördinaten bij plaatsbepalen.

Er is nog een - oppervlakkig - verband met het lezen van tabellen Het opzoeken van een veld in een tabel lijkt erg op het opzoeken va een door bijvoorbeeld C3 aangegeven blok op de stadsplattegrond Mogelijk verschil is ook nog dat de rijen en kolommen van een tabe niet geordend hoeven te zijn door oplopende getallen of letters.

Wat zit er in het leerplan?

Na al het vorige kunnen we dat kort opsommen:

- Werken in allerlei voorkomende situaties waarin plekken gecodeerd zijn aangegeven. Zoals: huisnummers, ook met verdiepingen. Hier hoort ook bij codes voor delen van gebouwen, indeling van zalen met genummerde plaatsen enzovoort.
- Werken met eenvoudige kaarten en plattegronden met alfabetische register en blok-codering.
- Kunnen lezen en noteren van routes met:
  - a dagelijkse taal;
  - b coördinatentaal, zoals die in de gegeven situatie gebruikelijk is.
- Het begrip richting, in verband met dichtbije punten en verre punten (in samenhang met evenwijdigheid), kunnen gebruiken.
- De kompasroos met N, O, Z, W, NO, ZO, ZW, NW en de 360-graden indeling.
- Coördinaten op aarde kunnen hanteren.
- Plaatsen kunnen vinden op grond van gegeven richting en afstand.
- De gebruikelijke methode voor coördinaten op aarde kunnen hanteren.
- Diverse constructies (met geodriehoek en liniaal) kunnen uitvoeren om een plaats te kunnen vinden op grond van twee gegevens:
- twee afstanden tot lijnen;
- twee gegeven richtingen uit gegeven punten;
- afstand en richting.

Onnodig hier weer te zeggen dat de opbouw van de leerstof verloopt langs de fasering die in hoofdstuk 17 is geschetst.

REKENEN IN DE MEETKUNDE

Maten

Meten

Al in de oudste tijden werden de te ruilen artikelen geteld, gewogen of gemeten om daardoor hun waarde te kunnen vergelijken.

Je hoeft lengten, gewichten, volumes, afstanden, enzovoort niet altijd in getallen uit te drukken om te weten te komen wie groter, zwaarder of langer is:

- 'Annet is groter dan Miryam', dat kun je nagaan door ze met de ruggen tegen elkaar te plaatsen, een latje op hun hoofden leggen en te kijken naar welke kant het latje schuin afloopt.
- 'Annet is zwaarder dan Miryam', dat kun je zien als ze op een wip gaan zitten.
- 'Fles A heeft een grotere inhoud dan fles B', dat kun je nagaan door één van de flessen te vullen met water en de inhoud over te gieten in de andere fles.
- 'De afstand van Amsterdam naar Eindhoven is groter dan de afstand van Amsterdam naar Utrecht'. Logisch, als je weet dat Utrecht tussen Amsterdam en Eindhoven ligt.

Het meest primitieve meten is een bepalen van volgorde. Getallen gaan pas een rol spelen als we de lengte, of een andere grootheid, van de één gaan uitdrukken in de andere. Bijvoorbeeld: Annet is twee keer zo zwaar als Miryam, de inhoud van fles A is drie keer zo groot als die van fles B.

Hetzelfde doe je bij het numeriek meten. Je kiest een eenheid (een voet, een meter, een kopje, een liter, een tel, een uur, een kilogram) en je zorgt er verder voor dat je die eenheid voldoende kunt reproduceren om de te meten grootheid in de gekozen eenheid uit te drukken. In de praktijk komt het er dan meestal op neer dat de gekozen eenheid afgepast wordt. Voor het bepalen van de maat tel je dan het aantal eenheden.

Met behulp van gelijke maateenheden kun je ook maten vergelijken. Als Annet 60 kg weegt en Miryam 30 kg dan kun je aan de getallen zien dat Annet twee keer zo zwaar is als Miryam. Ook als beide gewichten zijn uitgedrukt in andere eenheden kun je nog steeds aan de getallen zien dat Annet twee keer zo zwaar is.

Leerlingen

Alle activiteiten, van het vergelijken tot en met het werkelijk meten met behulp van meetinstrumenten, zijn zinvolle bezigheden voor alle leerlingen. Deze activiteiten hebben vaak het karakter van een practicum en vragen een goede organisatie in de klas. Tijdens zulke lessen kunnen leerlingen dan bijvoorbeeld in een soort circuit allerlei opdrachten doen, zoals het meten van het volume van een appel met behulp van een maatbeker en water, of het maken van een maatbeker van een plastic bekertje. Enige sturing via werkbladen zal nodig zijn. Zie bijvoorbeeld de practicumopdracht in figuur 1 .

Eerst schatten

1 *Hoeveel bekers melk kun je schenken uit één pak?*

2 *Hoeveel limonade kan er in het plastic bekertje?*

Dan meten

3 *Neem een maatbeker en zo'n plastic bekertje.*
Meet de inhoud van zo'n bekertje met behulp van een maatbeker.

4 *Maak van zo'n plastic bekertje je eigen maatbeker.*
Je hebt hiervoor nodig: een watervaste viltstift, een plastic bekertje, een kleine maatbeker.
Maak de verdeling van jouw maatbeker zo dat je kunt aflezen: 25 milliliter, 50 milliliter, 75 milliliter, enz.
Zet op de juiste plaats streepjes op jouw maatbeker en schrijf erbij:
25 ml, 50 ml, 75 ml, enz.

5 *Zitten de streepjes op jouw maatbeker op dezelfde afstand van elkaar?*
Hoe kun je dit verklaren?

6 *Hoeveel milliliter kan er in totaal in jouw maatbeker?*
Met hoeveel volle bekers heb je 1 liter?

fig. 1: Practicumopdracht inhouden meten.

Als er geen gelegenheid is om zo'n uitgebreid practicum te doen, kunnen toch zinvolle opdrachten aan de leerlingen gegeven worden. Een docent van een van de experimenteerscholen liet de leerlingen allerlei meetinstrumenten van huis meenemen. Dat werd een heel bonte verzameling, van stekenteller tot zwelhaak. De leerlingen zochten daarna uit wat je er allemaal mee kon meten. Tenslotte is met behulp van deze instrumenten een kleine tentoonstelling gemaakt over het meten.

Op een andere experimenteerschool gingen leerlingen van het tweede leerjaar buiten hoeken meten met behulp van door de school zelf geconstrueerde hoekmeters. Bij het meten bleek pas dat sommige leerlingen nog geen goed hoekbegrip hadden. Door deze meetles zijn ze 'meetbaar' een stapje verder gekomen.

In wat voor vorm het ook gebeurt, het is belangrijk dat alle leerlingen gelegenheid krijgen dergelijke praktische opdrachten te doen. Zie ook hoofdstuk 22: Wiskundewerklokaal.

Bij het meten gaat het natuurlijk niet alleen om het meten met behulp van een centimeter, een litermaat, een gradenboog of welk ander instrument dan ook. Belangrijk zijn ook het vergelijken van verschillende maten, aflezen van een schaal, interpreteren, het kiezen van de juiste nauwkeurigheid in verband met de context.

Voor veel leerlingen geldt dat ervaringen met hoofd en handen samen betere leerresultaten opleveren. De activiteiten helpen bij de ontwikkeling van een gevoel voor grootheden en bij het meten en vergelijken wordt het principe van het meten duidelijk: eenheid kiezen, afpassen en het aantal eenheden tellen. Bij sommige maten leidt 'tellen' al snel tot vermenigvuldigen. Bijvoorbeeld als we willen weten hoeveel opengevouwen kranten nodig zijn om de klasvloer vol te leggen. Bij de onderdelen 'oppervlakte' en 'inhoud' komen we hier op terug; bij die onderwerpen zal het systematisch tellen via vermenigvuldigen uitgebouwd worden tot het maken van formules.

Wat meet je met welke grootheden?

Voor het verven van een schutting moet je een idee hebben over de oppervlakte ervan, niet alleen over lengte en hoogte. De hoeveelheid verf meet je weer in inhoud.

Een gazon wordt ingezaaid met graszaad. Een hoeveelheid zaad hoort bij de oppervlakte van dit gazon, de vorm van het gazon doet er niet zo toe. De oppervlakte moet je noemen in de winkel voor tuinmaterialen. Ze vertellen je dan hoeveel zaad je nodig hebt. De hoeveelheid zaad wordt afgewogen.

Het meten gebeurt hier steeds in relatie met een context. Als je wilt weten hoe groot iets is, moet je ook weten wat je meet: de lengte, omtrek, oppervlakte, inhoud of eventueel gewicht. Wat is bijvoorbeeld een goede maat om de grootte van een vaas aan te geven? De hoogte, de diameter of de inhoud? De keuze van de gekozen grootheid hangt meestal

samen met de gegeven context. Dergelijke noties moeten de leerlingen krijgen over het gebruik van verschillende grootheden.

Wat wordt er gemeten, en waar ligt de grens?

In deze tijd wordt er van alles gemeten, overal zie je meetgetallen die bij verschillende metingen horen. Denk daarbij niet alleen aan grootheden als lengte of oppervlakte, maar ook aan getallen die concentraties lucht of bodemverontreiniging aangeven, het energieverbruik van apparaten, geluidssterkte, voedingswaardewijzers van etenswaren, hartslag, bloeddruk, schoenmaat, kledingmaat. Dit zijn zeker onderwerpen waaraan veel wiskundige activiteiten te verbinden zijn, die ook zeker in het wiskundeprogramma van 12 tot 16 jarigen thuishoren, maar die wij hier verder niet zullen beschrijven. We beperken ons hier tot de meer meetkundige aspecten van het meten. Dat wil zeggen dat we hier ook geen aandacht besteden aan grootheden als gewicht en tijd en samengestelde maten zoals snelheid en dichtheid. Voor de meer rekenkundige aspecten verwijzen wij naar de beschrijving het leerstofgebied Rekenen.

In het volgende gedeelte zoomen we in op een ander belangrijk aspect van het meten en rekenen in de meetkunde: met welke maten meet of reken je? We hebben hierbij een onderscheid gemaakt tussen referentiematen en standaardmaten.

Referentiematen

Referentiematen zijn persoonlijke maten die uit ervaringen ontstaan zijn. Het is een koppeling van een maat aan een bekend object, een maat die je 'bij je hebt' of die je je altijd kunt voorstellen. Iedereen weet en/of gebruikt wel een paar van dit soort eigen maten. Enkele voorbeelden.

- Mijn oma was aan het breien. Op een gegeven moment stopte ze en paste met haar middelvinger de lengte van het breiwerk af. Haar persoonlijke maat was de lengte van haar middelvinger. Ze wist dat deze 7 cm lang was. Mijn persoonlijke maat, de lengte van mijn middelvinger, was toen 5 cm.
- Tijdens paardrijles moesten we een volte rijden bij M. De rij-instructeur nam vanaf de hoefslag vier grote stappen en zei: 'Kijk, tot hier'. Twee persoonlijke maten: Voor de rij-instructeur was deze maat een flinke stap van een meter. Voor mij: een cirkel met een diameter van 4 meter.
- 'Laten we deze wandeling doen, die is 14 kilometer, daar doen we dus ongeveer drie uur over.' Hier is de persoonlijke maat de ervaring dat je in een uur ongeveer 5 kilometer loopt.

Hoe kun je referentiematen gebruiken?

Met referentiematen kun je meten en schatten, zonder dat je meetinstrumenten gebruikt zoals een liniaal of geodriehoek. De referentiematen dienen dan als eenheden waarmee gemeten wordt. In de voorbeelden hierboven waren dat de lengte van de middelvinger (7 cm) en de lengte van een forse stap (1 meter). Bij het toepassen van referentiematen is het 'herhaal-aspect' steeds heel duidelijk.

Het meten met referentiematen kan ook op afbeeldingen: je ziet een tekening van een huis en je gaat de hoogte van het huis schatten met behulp van de kennis dat een deur ongeveer 2 meter hoog is. De deur functioneert dan als een soort schaallijn.

Referentiematen kunnen ook helpen dat je iets bij een standaardmaat t voor te stellen. In het voorbeeld hierboven van de wandeling van 14 kilometer werd de afstand met behulp van een referentiemaat vertaald naar een voorstelbare afstand in tijd.
Bij het geven van argumenten kunnen referentiematen goede diensten bewijzen.
Een voorbeeld uit de krant:

> **Meer watergebruik**
>
> RIJSWIJK, 19 febr.
>
> De waterleidingbedrijven in Nederland hebben vorig jaar in totaal 974 kubieke meter ledingwater geleverd. Dat is meer dan in 1988. De Nederlanders gebruiken steeds meer leidingwater door de toeneming van het aantal kleine huishoudens. Ook neemt het gebruik toe doordat meer mensen vaker douchen en in bad gaan.

Gevraagd werd: 'Beredeneer dat de hoeveelheid van 974 kubieke meter in het kranteberícht fout is.'
De leerlingen gebruikten verschillende referentiematen:

- Een beker water is ongeveer 0,2 liter. Het aantal inwoners van Nederland gebruiken als referentiepunt:
  'Als elke Nederlander één bekertje water neemt, kost dat 14.500.000 x 0,2 l = 2.900.000 liter water. Dat zou betekenen dat slechts $\frac{1}{3}$ van de Nederlanders een bekertje water zou kunnen nemen, laat staan douchen, afwassen, wc doortrekken e.d.
- Bij inhoud een pak melk nemen als referentiepunt, ook voor het omrekenen: 1 liter melk = 1 dm^3. Aantal gezinnen in Nederland gebruiken als referentiepunt:

'Er zou nooit genoeg zijn voor heel Nederland. Je zou kunnen zeggen dat er ongeveer 974.000 melkpakken mee gevuld kunnen worden (1l melk = 1 dm^3; 974 m^3 = 974.000 dm^3). Per week gebruikt een gezin ongeveer 5 pakken. Stel dat er 2.000.000 gezinnen zouden zijn dan zouden er 10.000.000 liters melk/water worden verbruikt in 1 week = 10.000 m^3. De hele voorraad zou dan binnen 1 week allang op zijn!'

- Het waterverbruik van een persoon per dag gebruiken:
  'Ze zeggen dat een mens ongeveer 100 liter water per dag gebruikt. In Nederland zitten 14.000.000 mensen dus dat kan onmogelijk 974 m^3 zijn in een jaar.'
- Inhoud van een bad als referentiemaat gebruiken:
  'Een bad is ongeveer 2 x 1 x 1 m = 2 m^3. Elke week een bad: 104 m^3 per jaar x 14 miljoen inwoners is veel meer dan 974 m^3.'
- De inhoud van een wedstrijdzwembad:
  '974 kubieke meter zou denk ik net ongeveer genoeg zijn voor een wedstrijdbad in een zwembad van 25 meter lang, 20 meter breed en 2 meter diep.

Bij al deze redeneringen komen ook referenties voor naar bekende aantallen (zoals het aantal inwoners van Nederland en naar voorwerpen waar de redenerende mee bekend is zoals een bad, een melkpak, een zwembad, een bekertje. De combinatie met schattend rekenen, vooral vermenigvuldigen, met grote getallen is ook evident.

Welke referentiematen moet je kennen?

Bovenstaande voorbeelden illustreren dat niet iedereen dezelfde referentiematen gebruikt. Dat is ook niet nodig. Belangrijker is dat iedereen voor bepaalde grootheden een referentiemaat heeft. We noemen hieronder om welke grootheden het dan gaat en geven daarbij een paar mogelijkheden voor referentiematen.

Kleine lengten of afstanden (centimeters):
De lengte van je vinger, je handlengte of handbreedte, voetlengte, el, armlengte, lengte of breedte van een nagel. Deze maten zijn voor iedereen verschillend, dat geldt niet voor:
lengte van een A4-tje, de lengte van een stoeptegel (beide ongeveer 30 cm).

Iets grotere lengten of afstanden (meters):
De lengte van een grote stap (1 meter), de lengte van een volwassene (ongeveer 1,80 meter), je eigen lengte ofwel de afstand van vingertop tot vingertop bij zijwaarts uitgestrekte armen (voor kinderen een hele ontdekking dat die afstand inderdaad ongeveer gelijk is aan je

lichaamslengte), de hoogte van een deur (ongeveer 2 meter), de hoogte van een verdieping (ongeveer 2,5 meter)

Grote lengten of afstanden (van tientallen meters tot kilometers):
Voor sommige sporters de lengte van de atletiek- of ijsbaan (400 meter).
De weg van school naar huis, voor sommige leerlingen 5 kilometer, of de lengte van een bepaalde straat, of de afstand van plaats ... naar ....
De afstand die je in een uur loopt (4 kilometer) of 1 kilometer in een kwartier, of een afstand die je in een uur fietst (15 kilometer);
En eigenlijk zou iedereen moeten weten dat de omtrek van de aarde 40 000 kilometer is.

Hoeken:
Voor een hoek van 90° is het eenvoudig: de hoek van een raam of een blaadje papier. Een hoek van 45° is de hoek van datzelfde blaadje, maar dan dubbelgevouwen. Er zijn wel meer handige referentiematen voor hoeken, zoals de hoek tussen de wijzers van een klok om bijvoorbeeld 1 uur. En een heel handige is de handspanhoek: de hoek waronder je de uitgespreide hand bij gestrekte arm ziet anuit je oog. Deze is voor iedereen ongeveer 20° ongeacht lengte of leeftijd! Verklaring? Ondanks dat je groeit, blijven de verhoudingen van armlengte en handspan nagenoeg gelijk (zie ook hoofdstuk 18 bij het onderdeel kijkhoeken).

Oppervlakte:
Als referentiematen voor oppervlakte kunnen genoemd worden: de oppervlakte van je duimnagel (1 cm^2), de oppervlakte van je hand (1 dm^2), de oppervlakte van een A4-tje (6 dm^2), de oppervlakte van een opengevouwen krant (0,5 m^2), de oppervlakte van het schoolbord, de oppervlakte van je tafel, de oppervlakte van een voetbalveld (1 hectare).

Vaak gebruik je lengtematen om een voorstelling van een oppervlakte te krijgen. Als bijvoorbeeld een zaal een oppervlakte heeft van 120 m^2 dan kun je je de ruimte beter voorstellen door te denken aan een rechthoekige vloer van 12 meter (stappen) lang en 10 meter breed.

Inhoud:
Het gebruiken van lengtematen gebeurt bij inhoud ook vaak: je stelt je dan een balk voor met een bepaalde lengte, breedte en hoogte.

Toch zijn er zinvolle referentiematen voor inhoud. Elk kind moet weten dat de inhoud van een pak melk 1 liter is ofwel 1 dm^3, vooral omdat deze maat heel bruikbaar is bij het rekenen in het metrieke

stelsel om de overgang te kunnen maken van 'natte maten' (liters) naar de inhoudsmaat kubieke decimeter (zie ook het voorbeeld Waterverbruik van hiervoor).

Verder kunnen als referentiematen dienen:
De inhoud van een beker (ongeveer 0,2 liter ofwel 200 ml), de inhoud van een emmer (10 liter) of de tankinhoud van je bromfiets, de vulling van een inktpatroon (1 cm^3) en allerlei maten uit de keuken zoals een eetlepel (10 cm^3).

Belangrijk is in ieder geval dat de leerlingen een aantal veel voorkomende inhoudsmaten kunnen koppelen aan de inhoud van een voor hun bekend object. Het gaat dan om de volgende maten: cm^3, dm^3, m^3, milliliter, deciliter, liter.

Standaardmaten

Het metrieke stelsel danken wij aan de Franse Revolutie van 1789. Als eenheid van lengte werd in 1795 gekozen het tienmiljoenste deel van een kwart aardomtrek (gemeten langs de meridiaan van Parijs). Deze eenheid van lengte werd als centrale maat genomen: met behulp hiervan konden ook oppervlakte en inhoud worden bepaald, en gewicht werd gedefinieerd in relatie tot een bepaald volume water. De eenheid van lengte kreeg de naam meter (afgeleid van het Griekse woord metron, dat maat betekent). Veelvouden en gedeelten van de meter werden aangegeven met voorvoegsels, ook weer afgeleid van de Griekse woorden. Daaraan hebben wij dus die hele reeks van milli- tot kilo- te danken. Intussen (1983) is de eenheidsmeter opnieuw vastgelegd: het 1/299.792.458-ste deel van de afstand die het licht in één seconde aflegt. Als eenheid van oppervlakte werd toen niet de vierkante meter, maar de are gekozen (10 m x 10 m) en als eenheid van volume de stère (1 m x 1 m x 1 m). Een liter komt overeen met een millistère. De gram als eenheid van gewicht werd bepaald als het gewicht van 1 cm^3 bij de temperatuur van smeltend ijs.

Groot-Brittannië en de Verenigde Staten hebben toendertijd dit metrieke stelsel niet overgenomen en hebben daar nu nog last van.

Ook is geprobeerd een nieuwe hoekmaat in te voeren die bij het tientallig stelsel zou passen: een rechte hoek zou dan 100° worden en 1 graad 100 minuten, maar dat is bijna nergens overgenomen. Alleen in de landmeetkunde worden deze hoeken wel gebruikt; op zakrekenmachines kun je ermee rekenen met behulp van de toets GRAD. De afstelling van het maatsysteem op het tientallig stelsel maakt rekenen bijzonder makkelijk: kommagetallen functioneren hierbij prachtig.

Dit komt ook bij het meten tot uitdrukking als je bij het meten van een grootheid verschillende standaardeenheden gebruikt. De lengte van het lokaal is 9 meter en nog een stukje. Dat stukje is kleiner dan

een meter, je gaat kijken hoeveel decimeters erin passen. Dat zijn er vier en je houdt een stukje over. Daar passen zeven centimeter in, enzovoort. Door onderverdeling van de eenheid kunnen steeds kleinere stukjes gemeten worden. Als je tenslotte de lengte van het lokaal in één eenheid (meters) wilt uitdrukken, dan lukt dit met behulp van kommagetallen: 9,47... meter. In het kommagetal zijn de bij het afpassen gevonden getallen nog te zien.

Omdat de samenhang met kommagetallen zo sterk is, verdient het rekenen met kommagetallen extra aandacht (zie hierover het betreffende hoofdstuk).

Voor een overzicht van alle leerdoelen die horen bij maten en rekenen in het metrieke stelsel verwijzen wij naar het Trajectenboek en het Examenprogramma.

Oppervlakte

Oppervlakte is een 'rijke' maat, een grote verscheidenheid aan contexten is mogelijk. Er zijn namelijk veel begrippen te vinden die evenredig zijn met oppervlakte:

De hoeveelheid graszaad om een gazon in te zaaien, een drie keer zo groot grasveld vraagt drie keer zo veel graszaad. De hoeveelheid graszaad *is* niet de oppervlakte.

De hoeveelheid verf die nodig is om een muur te verven, het aanta tegels van een terras, de tijd om een korenveld te maaien, de prijs var een stuk vloerbedekking, de hoeveelheid warmte die uitgewissele wordt door je huid of door een radiatorkachel.

Oppervlakte komt voor in je kennis van de wereld. Iets van di soort overwegingen moet een plaats hebben in de leerlijn oppervlakte We vinden dat hierin verschillende ervaringen met oppervlakte eer plaats moeten krijgen. Hopelijk overwint deze aanpak het Pavlovge drag van sommige leerlingen: 'Oppervlakte, o ja dat is lengte maa breedte.' En uitspraken als: 'Een cirkel heeft geen oppervlakte wan die heeft geen lengte en breedte.' Bij zulke uitspraken is het basis principe van het meten geheel uit zicht geraakt: meten is het afpassen van een eenheid. Ieder snippertje papier kan een eenheid voor oppervlakte zijn, ieder rechthoekje of driehoekje, zelfs een vierkant.

Je bepaalt oppervlakte door te tellen hoeveel eenheden je nodig hebt om je oppervlak te bedekken. (oppervlakte is een maat van een stuk oppervlak). Het oppervlak kan grillig van vorm zijn, toch kun j tellen hoe vaak een klein vierkant er in gaat. En 1000 keer een vierkant van 1 bij 1 cm is 4000 keer een vierkantje van een kwart bij een kwart centimeter. Neem een heel klein vierkantje voor rare vormen Handig tellen: Bij een rooster moet je niet veel tellen, je gebruikt een vermenigvuldiging voor de herhaalde telling van één rijtje.

Net zoals bij lengte kun je oppervlakten vergelijken, samensteller

verdelen en meten. Maar vergeleken bij lengte biedt oppervlakte meer mogelijkheden wat betreft het samenstellen en vervormen. Het samenstellen van lengten is, op verwisseling van onderdelen na, ondubbelzinnig bepaald, terwijl je voorwerpen waaraan een oppervlakte wordt toegekend op zeer gevarieerde manieren kunt samenstellen. Knip- en plakprocedures kunnen vlakke vormen onherkenbaar veranderen, tangrampuzzelaars weten daar alles van.

Het meten van oppervlakten is vaak vrij ingewikkeld en kan zelfs heel moeilijk zijn. Het ligt dan voor de hand om te profiteren van een eventuele meetkundige structuur van het voorwerp en gebruik te maken van mogelijke afbeeldingen met behoud van oppervlakte. Als 'technieken' noemen we:

- samennemen;
- verschil nemen;
- verknippen;
- verschuiven;
- een combinatie van twee of meer van deze technieken.

Hieronder zullen we een aantal van deze technieken aan de hand van voorbeelden toelichten.

Verknippen en samennemen

Willekeurige veelhoeken zijn te herleiden tot rechthoeken of halve rechthoeken.
Zo zijn parallellogrammen te herleiden tot rechthoeken, zie figuur 2.:

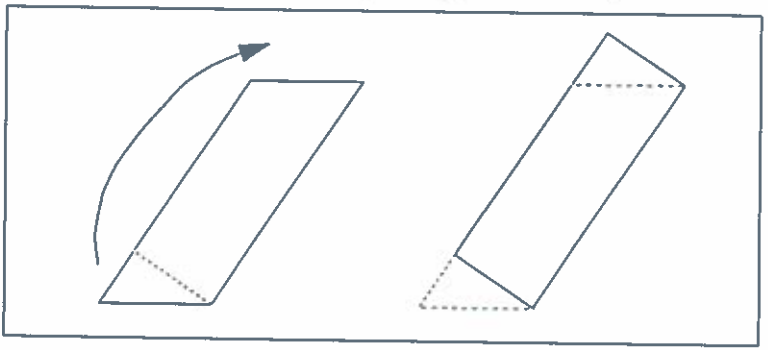


fig. 2

De oppervlakte van een parallellogram kan ook gevonden worden met behulp van het oprolidee: Knip het parallellogram uit en rol de basis tot één cirkel. Rol door tot het op is, uiteindelijk krijg je een cilinder. Knip de cilinder in de lengterichting open en leg hem plat neer. Je hebt nu een stel rechthoeken op elkaar liggen waarvan de lengte ge-

lijk is aan de basis van het parallellogram en de breedte gelijk is aan de hoogte van het parallellogram (de laatste kan smaller zijn). Zie figuur 3, waar de laatste fases van het proces zijn afgebeeld.

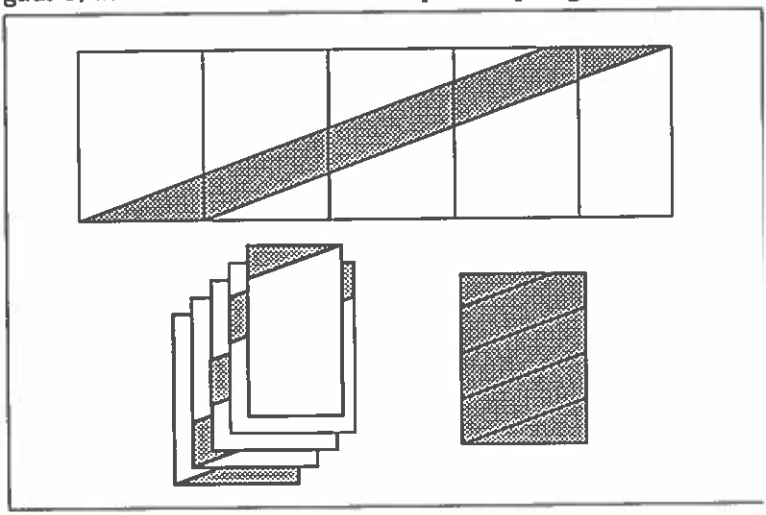


fig. 3: Van parallellogram naar rechthoek.

Dit lukt zelfs met een parallellogram van hier tot Zwolle, met een basis van 10 cm, een hoogte van 4 cm en de bovenste zijde 100 km verderop. Bij zo'n parallellogram van hier tot ginder moet je wel hee vaak rollen om op een cilinder uit te komen. Het gaat bijna je voorstellingsvermogen te buiten dat de oppervlakte alleen maar bepaald wordt door de lengte van de basis en de hoogte van het parallellogram en dat de uitgestrektheid er niet toe doet!

Driehoeken kun je herleiden tot parallellogrammen of tot halve rechthoeken:

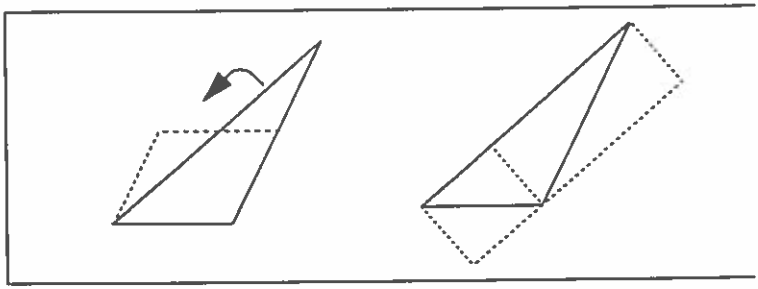


fig. 4: Van driehoek naar rechthoek.

Je kunt ook elke driehoek herleiden tot een andere driehoek met gelijke basis en hoogte:zoals in figuur 5 te zien is.

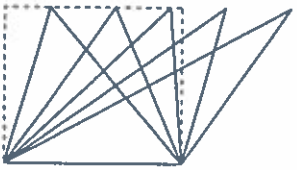


fig. 5

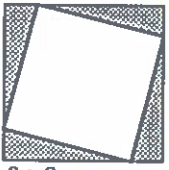


fig. 6

Op dezelfde manier kan een n-hoek herleid worden tot een $(n-1)$-hoek en bij voortzetting van dit proces kun je zo bij een driehoek uitkomen, zie fig. 7 op pag. 133.

In figuur 7a is een diagonaal getrokken (EC) en door D een lijn daaraan evenwijdig. EC houd je 'vast' en met punt D ga je schuiven, de oppervlakte van de driehoek verandert hierbij niet. Schuif nu D net zo ver op totdat het punt op de lijn door B en C ligt, zie figuur 7c. (Ook mogelijk is op de lijn door A en E.) De oppervlakte van vierhoek ABD'E is nu gelijk aan die van vijfhoek ABCDE.

Op dezelfde manier kun je van vierhoek ABD'E een driehoek maken met gelijke oppervlakte, zie figuur 7d en 7e.

Verschil nemen

Soms kun je ook de oppervlakte van een figuur zien als een verschil van twee figuren. Een bekend voorbeeld is het bepalen van de oppervlakte van een in een rooster 'scheefstaand' vierkant, zie figuur 6 hierboven. De zwarte driehoeken leg je twee aan twee samen. Het witte stuk is dus: *geheel - zwart*.

Schuiven

Een figuur kun je verdelen in parallelle lijnstrookjes. Door schuiven kun je de figuur vervormen waarbij de oppervlakte niet verandert.

In figuur 8 (pag. 133) zijn twee eenvoudige voorbeelden gegeven; op de bovenste rij een rechthoek die tot een slingerende figuur wordt omgevormd, op de onderste rij is een cirkel vervormd tot een halve ellips

Het geschetste begrip is algemeen geldig, als het maar een parallelverschuiving is. Het idee heet het principe van Cavalïeri. Dit principe is goed aanschouwelijk te maken met behulp van lucifers (zie figuur 9 op pag. 135) of met een telefoonboek waar op de zijkant een figuur getekend staat.

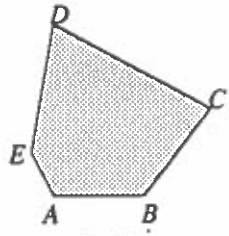


fig. 7a

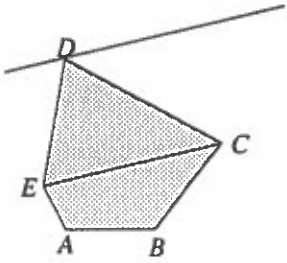


fig. 7b

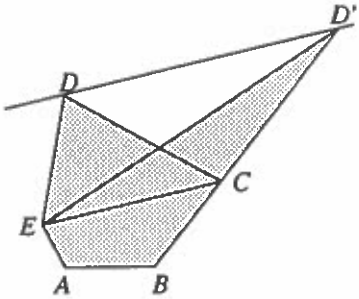


fig. 7c

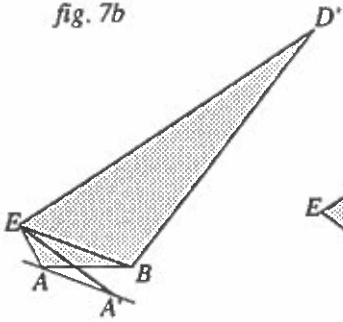


fig. 7d

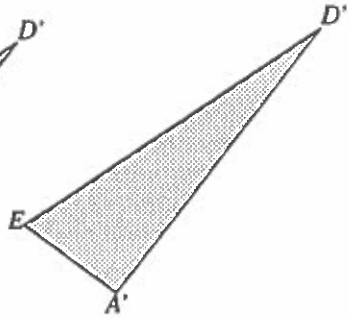


fig. 7e

fig. 7

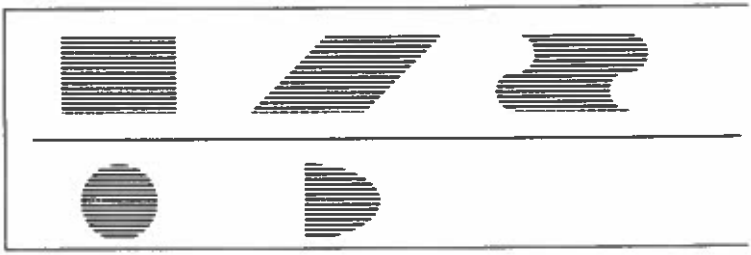


fig. 8

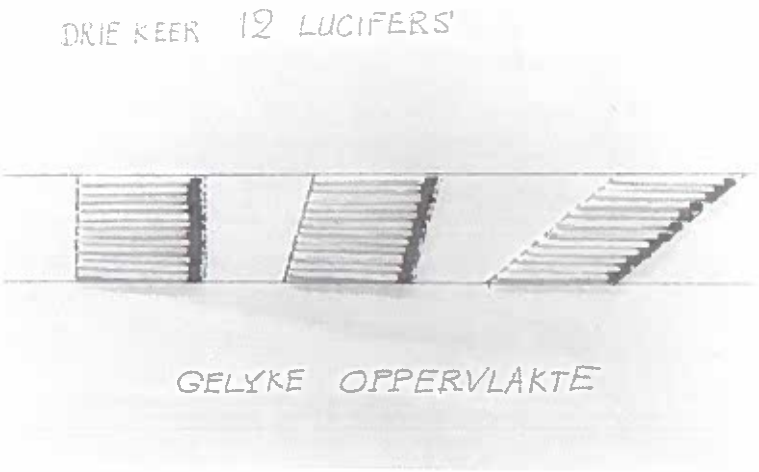


fig. 9: Het principe van Cavalièri met lucifers verbeeld.

Inhoud

De meest voorkomende inhoudsmaten zijn: cm^3, dm^3 of liter, m^3. Als je de inhoud van een klaslokaal wilt berekenen dan zul je m^3 gebruiken. Als je het hebt over de hoeveelheid water die een mens per dag moet drinken in de woestijn dan zul je liters gebruiken. Hoeveelheden van een doktersdrankje in cm^3 of, als het er heel precies op aan komt, in mm^3. Dit soort noties over het gebruik van verschillende maten zijn ook hier belangrijk.

Verder geldt veel van wat voor oppervlakte gezegd is ook voor inhoud:

Je kunt inhouden vergelijken, samenstellen, verdelen en meten. Inhoud is ook een samengestelde maat, maar nu van drie lengtematen. Door die derde dimensie krijgt het bepalen van inhoud een extra probleem: de tweedimensionale voorstellingen van ruimtelijke figuren doen een groot beroep op het ruimtelijk voorstellingsvermogen van de kinderen. Het tellen van het aantal blokjes in een tekening van een blokkenbouwsel kan voorbereid of ondersteund worden door ook te werken met concrete materialen.

Het tellen van het aantal gekozen eenheden kan uitnodigen tot verkortingen door middel van vermenigvuldigingen. Via het tellen van het aantal eenheden in één laag en dit aantal te vermenigvuldigen kom je uiteindelijk uit op een formule: oppervlakte = grondvlak x hoogte. (Zie verder bij Formules.)

De strategieën als samennemen en verschil nemen bij het bepalen

van oppervlakte kunnen tevens gebruikt worden bij het bepalen van inhoud. Ook het principe van Cavalïëri werkt: alleen gaat het dan om parallelle vlakjes. Dit kan bijvoorbeeld aanschouwelijk gemaakt worden met behulp van een stapel tegels die schroefvormig zijn opgesteld of een memoblok van losse blaadjes.

Formules voor oppervlakte en inhoud

Uit de eerder genoemde technieken kunnen oppervlakteformules voor verschillende vormen en hun onderlinge samenhang voortkomen. In een aantal gevallen gaat het niet om een bewijs, maar om het aannemelijk maken van een formule. Soortgelijke opmerkingen gelden ook voor inhoudsformules. Welke formules bij welk leerjaar horen staat gedetailleerd beschreven in het Trajectenboek. Hieronder geven we verschillende voorbeelden.

Formules kunnen direct, vanuit de herhaalstructuur ontstaan. Bijvoorbeeld oppervlakte rechthoek = lengte × breedte of inhoud balk = lengte × breedte × hoogte.

Formules kunnen soms geconstrueerd worden, zoals $\frac{1}{2}$ × basis × hoogte en $\frac{1}{3}$ × grondvlak × hoogte.

Dit laatste geldt bijvoorbeeld voor de oppervlakte van de cirkel. Hier moet de samenhang met de omtrek gelegd worden:

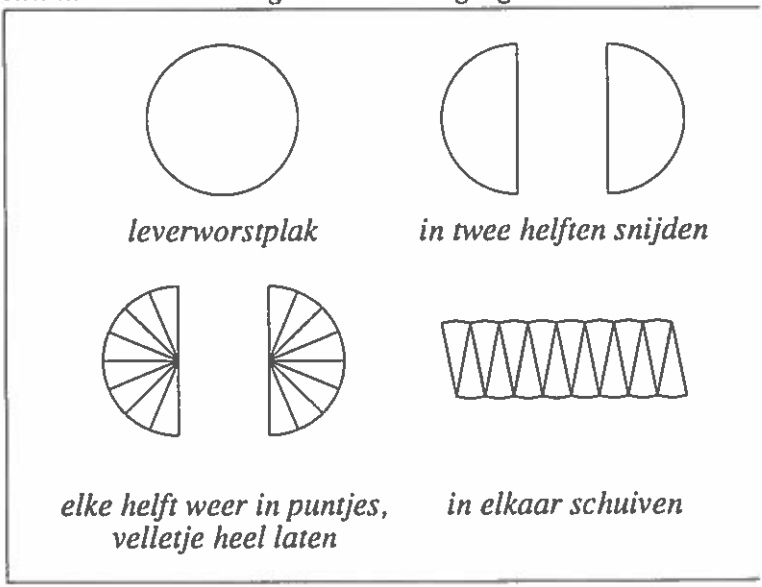


fig. 10

Dit zou iedereen eens echt gedaan moeten hebben en pas daarna:
oppervlakte = (de halve omtrek) × (de halve diameter)

Je zou ook kunnen zeggen: de π van de omtrekformule $2\pi r$ is dezelfde als die van de oppervlakteformule $2\pi r^2$.

Bij dit soort manipulaties is het verband met de algebraïsche vaardigheden duidelijk. Maar het gebruik van formules is niet puur een algebraïsche aangelegenheid. Er komt ook nog heel wat meetkundekennis bij kijken om de juiste formule te kunnen kiezen en (niet voor alle leerlingen) een afleiding van een formule te kunnen volgen of zelf produceren. Als voorbeeld nemen we het berekenen van inhoud.

Er zijn twee soorten ruimtelijke vormen:

- Figuren die je in even grote dunne plakjes kunt snijden
- Figuren die je niet in dunne even grote plakjes kunt snijden.

Van figuren die tot het eerste type behoren, kun je de inhoud berekenen met de formule: $inhoud = G \times h$.

Voorbeelden: kubus, balk, prisma, cilinder.

Voor het berekenen van de inhoud voor figuren van het tweede type is geen formule. Voorbeelden: banaan, molshoop, schelp, rookworst. Een uitzondering hierop vormen de figuren die aan de volgende eisen voldoen:

Ze lopen in één punt uit. Je kunt dunne plakjes afsnijden die allemaal dezelfde vorm hebben. Je kunt vanuit het punt rechte lijnen trekken die precies langs alle plakjes gaan. De inhoud kun je dan vinden met de formule: $inhoud = \frac{1}{3} \times G \times h$

Voorbeelden: piramide, kegel.

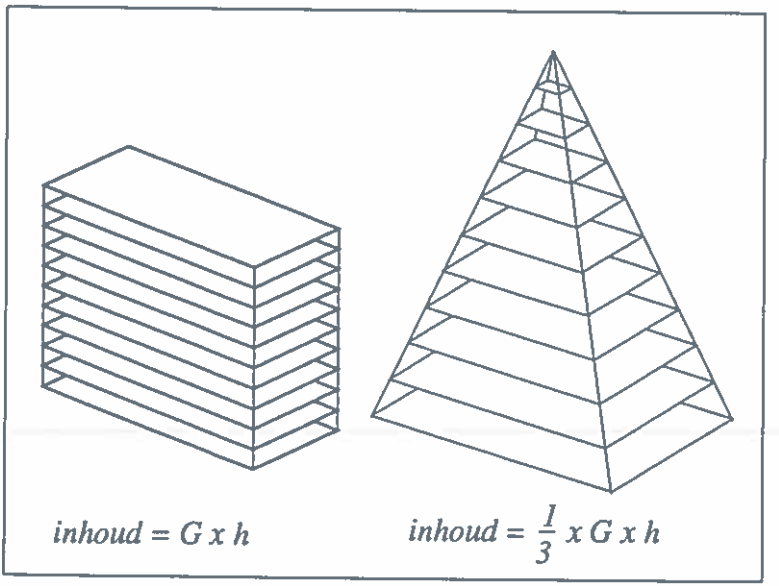


fig. 11

Voor de meeste leerlingen zal het zo zijn dat ze de formule moeten kennen en kunnen gebruiken. Een bewijs is te lastig.

Met het volgende voorbeeld kan de factor $\frac{1}{3}$ in de formule aannemelijk gemaakt worden:

Elke kubus kan als volgt verdeeld worden in drie congruente piramiden. Neem één hoekpunt van de kubus als top van elke piramide. Nu zijn er drie grensvlakken waar dat hoekpunt niet in ligt. Deze drie grensvlakken zijn elk het grondvlak van een piramide. De inhoud van één piramide is dus $\frac{1}{3}$ deel van de inhoud van de kubus, of we $\frac{1}{3} \times G \times h$.

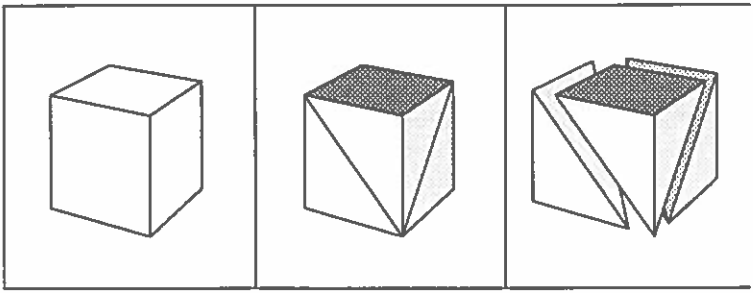


fig. 12

Verhoudingen

Als inleiding op het onderwerp verhoudingen hebben wij de volgende tekst genomen, geschreven door professor H. Freudenthal. Het zijn twee fragmenten uit het artikel 'Verhoudingen als verschijnsel' (wiskrant, 4^{e} jaargang, januari 1979)

Fragment 1 – Verhouding ingebouwd of aangeleerd?

De bal in de andere hoek van de kamer verschijnt op het netvlies van de baby even groot als de knikker vlak voor zijn oog. Maar op het netvlies wordt meer afgebeeld dan bal en knikker: omgevingen van die voorwerpen, die informatie verschaffen omtrent ver-weg en nabij. En al die informatie wordt doorgeseind naar de hersenschors om te worden verwerkt, op een manier die de baby in staat stelt, in strijd met wat op het netvlies wordt afgetekend, de knikker van de bal qua grootte te onderscheiden, voorwerpen, nabij en ver-weg, op wat je noemt hun ware grootte te schatten.

fig. 13

Een reus in het prentenboek, een groot paleis, Klein Duimpje en een mier – ze kunnen allemaal even groot afgebeeld zijn. Juist – maar dan niet op dezelfde bladzijde. Op één kan de reus het hele blad vullen, op de ander Klein Duimpje. Maar wee, als ze bij elkaar komen, want dan moeten hun verhoudingen kloppen. (Of neen – Klein Duimpje kan vlakbij en de reus in de verte afgebeeld zijn, beiden

ogenschijnlijk even groot.)

Verhoudingen moeten kloppen als het kind plaatjes kijkt: deze ba is van de pop en die van het meisje. Vreemd dat het kleine kind al het zelf tekent, verhoudingen niet in acht neemt. Laat het dan vreem zijn – het is net zo vreemd als het tekenen van poppetjes zonder buil op een leeftijd waarop het kind zoiets van zijn prentenboek niet zou accepteren. Ik ken geen psychologische verklaring voor deze discre pantie.

Kinderen spelen met auto's, poppen, huizen op verschillend schaal naast elkaar – het kan moeilijk anders. Maar als het moet, we ten ze wát verhoudingsgewijs bij wát hoort en hoe groot zoiets 'in he echt' is. Ze weten het operationeel en passief. Op welke leeftijd word zoiets bewust en actief? Ik schat dat dit met zes jaar begint. Een ri observaties:

Bastiaan (6:1)[1]*. Na een reeks zonnedagen ziet hij wolken en zegt: 'He gaat regenen.' 'Neen,' zeg ik, 'dit zijn heel hoge wolken, daar kom geen regen van; regenwolken zijn laag en donker.' Hij: 'Hoe hoog zij die wolken?' Ik (overdrijvend): 'Tienduizend meter.' Hij: 'En hoe hoo zijn regenwolken?' Ik: 'Duizend meter.' Hij: 'Dus (met de hond op d grond) als wij hier zijn en de regenwolken zó hoog (wijst ongeveer 3 cm boven de grond), dan zijn dat (wijst ongeveer 1 meter boven d grond), geen regenwolken.'*

Verhoudingen worden meetkundig uitgedrukt – met de precisie ha pert het nog.

Bastiaan (6:0). Tekening achteraf van wat hij in de zandbak heeft ge bouwd: tunnels (gestippeld), wegen, bruggen, muren.

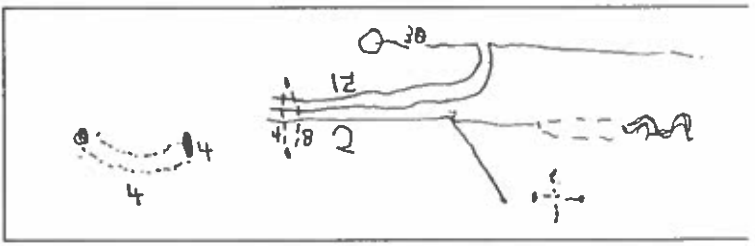


fig. 14

Bastiaan drukt op afstanden van een decimeter met parallelle wijsvir ger gaten in het zand. De volgende decimeter past hij af door zijn linke wijsvinger in het gat te zetten dat eerst door de rechter gemaakt is. D getallen zijn dus decimeters.

Verhoudingen worden meetkundig en numeriek weergegeven – e

[1](6:1) wil zeggen: zes jaar en één maand oud

wordt precisie betracht.

Bastiaan (7;6). De hoogte van een kerktoren (en apart van de klok) wordt viserend gemeten: vergeleken met een stok op een muurtje geplaatst, op een – afgestapte – afstand van de kerk.

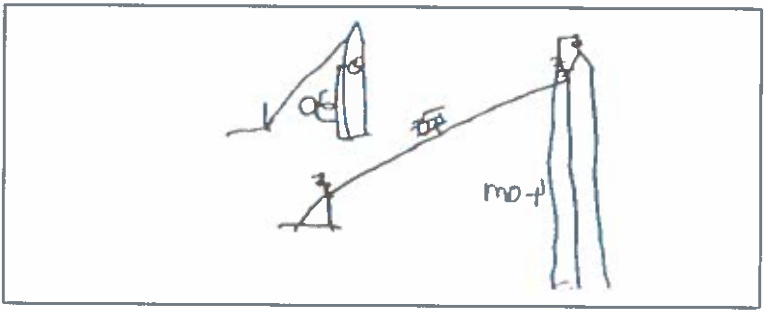


fig. 15

'Verhouding' als middel om een probleem op te lossen – meetkundig schetsmatig én numeriek met de vereiste precisie.

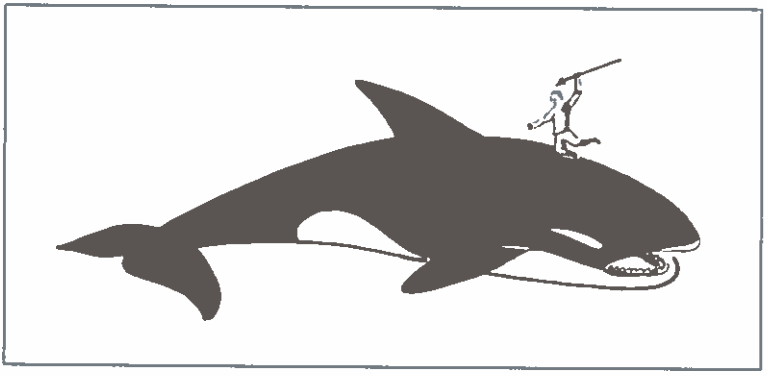


fig. 16

Coen (8;0) kijkt met zijn vader naar de poster voor de film Orca the killer whale. *'Wat klopt hier niet?,' vraagt vader. En Coen, na enige aarzeling: 'De walvis moet kleiner wezen. Toen we in Engeland waren, zagen we een Orca, die maar zo groot was als twee mannen... Ik herinner me de Orca toen hij uit het water sprong en de oranje bal raakte.'*
'Verhouding' om een conflict te beslechten; visuele en mentale situatie numeriek vergeleken met de vereiste precisie.

Een derde klas (De groeten van de reus)*: Uit het spoor, door de hand van de reus op het bord achtergelaten, wordt schattend afgeleid hoe groot de reus is.*

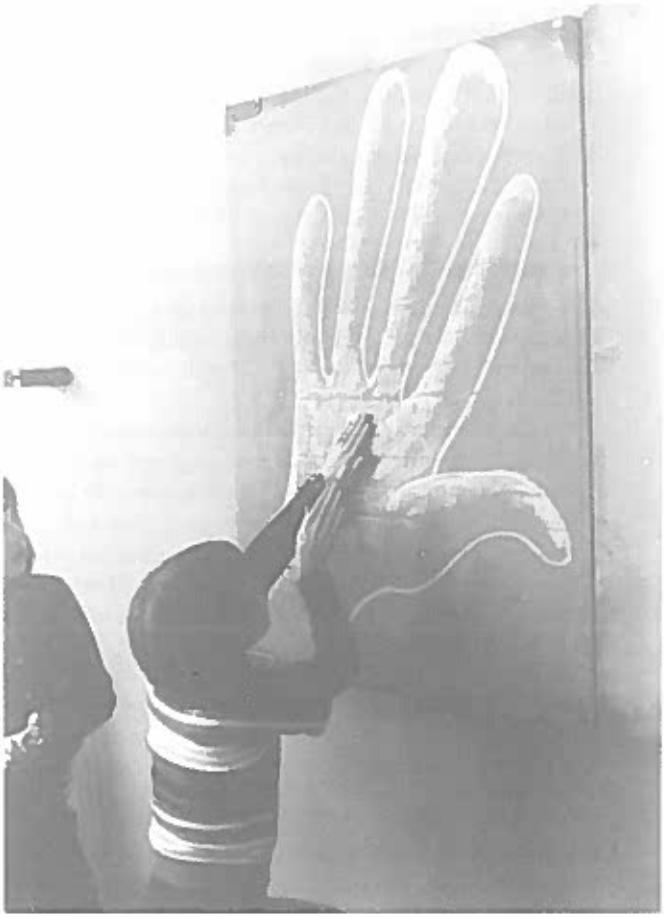


fig. 17

'Verhouding' als middel om een probleem op te lossen meetkundig ge geven en numeriek vertaald.

Ik zou dit verhaal kunnen vervolgen tot gevorderde leeftijd toe Het blijkt dat nog veel ouderen inzichtelijk met verhoudingen blijven werken, waar men breuken van ze zou verwachten.

Verhouding is iets oorspronkelijks. Ik laat in het midden hoevee ervan 'ingebouwd' is, voorgeprogrammeerd in de computer van onz hersenschors en hoeveel aangeleerd. Aangeleerd – en dan bedoel il

niet op school, want daar komen verhoudingen, als het dan nog gebeurt, laat aan de orde en bovendien bij wijze van sommetje die de intuïtieve 'verhouding' negeren of aan diggelen gooien. Aangeleerd veeleer met prentenboeken en speelgoed die onze grote wereld op schaal nabootsen.

Breuken worden meestal op een ander spoor dan dat van de verhoudingen geleerd en dat is jammer. In het onderwijs zouden breuken van verhoudingen kunnen profiteren en verhoudingen van breuken, verondersteld dat die twee leersporen didactisch in elkaar werden geleid. 'Verhouding' kan *didactisch* geenszins gemist worden, al lijkt het puur *mathematisch* wel zo te zijn.

Fragment 2 – Verhoudingsgetrouw afbeelden

Afbeelden speelde een rol in de voorafgaande voorbeelden. Afbeelden bij wijze van plaatje of symbolisch handelend (het geval van de wolken) of zoals de wijzer die tijd afbeeldt op de kringloop op de wijzerplaat.

Al die afbeeldingen zijn *verhoudingsgetrouw*: *De verhoudingen in het origineel worden getrouw weergegeven in het beeld.* Het woord verhouding hoeft er niet aan te pas te komen. Je kunt het waarnemen of de verhoudingen kloppen. Of veeleer, het valt je op als iets niet klopt. Het kind identificeert vroegtijdig plaatjes en modellen met de voorwerpen die ze geacht worden voor te stellen, ongeacht de schaal. Plaatjes en modellen op verschillende schaal naast elkaar worden als beelden van hetzelfde object aanvaard. 'Hoe groot is een walvis in 't echt?' kan een kind vragen, overtuigd dat de plaat – afgezien van de schaal – de walvis getrouw weergeeft. Wel zijn er ook van die schetsmatig, met één lijn getekende, walvissen, maar zelfs dit verschil tussen fotografisch getrouw beeld en een karakteristieke schets wordt begrepen.

Wegingen met een (verticale) veerbalans die Bastiaan (5:6) uitvoerde, werden op een horizontaal *en op andere schaal getypt beeld van de veerbalans aangetekend. Bastiaan merkte wel onbeduidende verschillen in de cijfernotatie (1 in plaats van 1) op, maar noch het verschil in oriëntatie noch de afwijkende schaal.*
Het getypte beeld van de veerbalans was immers structureel getrouw.

Zonder aarzelen aanvaarden kinderen dat op het schoolbord voorwerpen tien keer zo groot als op het werkblad worden getekend, dat de getallenlijn op het schoolbord 1 dm tot eenheid heeft tegen 1 cm op het werkblad. Zij aanvaarden naast elkaar getallenlijnen waarbij hetzelfde interval in plaats van de eenheid een tiental of honderdtal

voortstelt. Ze zouden echter direct protesteren tegen wijzigingen var de structuur die ingaan tegen de getrouwheid van verhoudingen

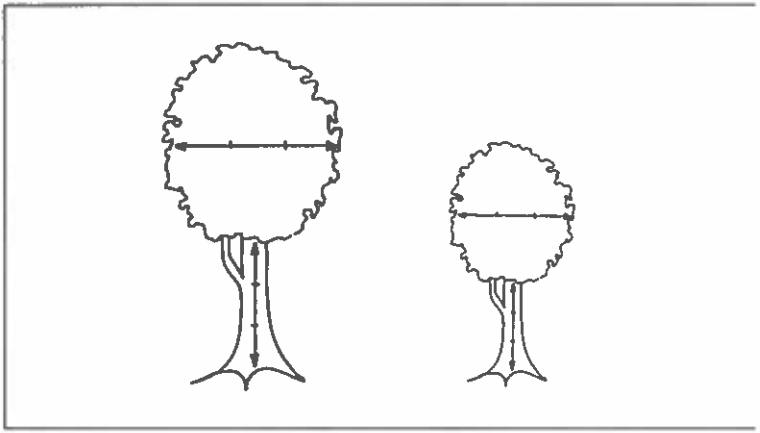


fig. 18

Wat betekent 'verhoudingsgetrouw' bij het afbeelden? Het principe luidt:

Wat onderling gelijk is in het origineel moet onderling gelijk zijn in het beeld.

Uit dit principe volgt door aan elkaar zetten van lengtes:

Wat dubbel (drie keer, ...) zo groot is in het origineel, moet dubbel (drie keer, ...) zo groot zijn in het beeld.

Door een blikwisseling volgt hieruit:

Wat de helft (een derde, ...) is in het origineel, moet de helft (een derde, ...) zijn in het beeld.

Die twee samengesteld levert uitspraken op zoals:

Wat zich in het origineel verhoudt als 3 : 4 (als 11 : 7, algemener als p : q), moet zich in het beeld verhouden als 3 : 4 (als 11 : 7 algemener als p : q).

Bij afbeeldingen, willen ze verhoudingsgetrouw zijn, moeten de *interne verhoudingen van het beeld dezelfde blijven als van het origineel.*

Met dit verhoudingsgetrouw afbeelden raken de kinderen vroegtijdig bekend bij schilderijen, kopieën van schilderijen, maquettes. Systematische of toevallige afwijkingen worden geconstateerd, bijvoorbeeld:

- het gebruik van verschillende maatstaven in verschillende richtingen;
- het gebruik van verschillende maatstaven bij verschillende figuren;
- het gebruik van verschillende maatstaven bij onderdelen van de zelfde figuur.

en dit geschiedt niet door verhoudingen of maatstaven expliciet te maken, maar in formuleringen zoals:

dit is te smal – namelijk vergeleken bij de hoogte; die figuur is te groot – namelijk vergeleken bij deze; de neus is veel te groot – namelijk vergeleken bij de andere lichaamsdelen.

Aanmerkingen ten aanzien van de getrouwheid van verhoudingen, maar zonder dat er uitdrukkelijk van verhoudingen sprake is.

Het vereist dieper inzicht in meetkundige relaties om andere gegevens als criteria van verhoudingsgetrouwheid erbij te betrekken:

Wat in het origineel een rechte hoek is, moet er in het beeld ook een zijn.

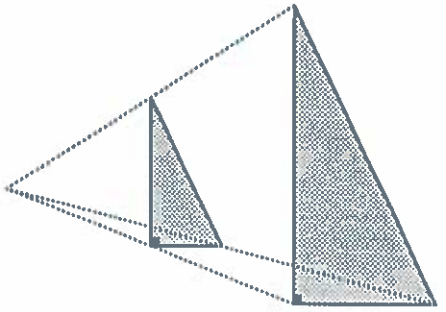


fig. 19

Of meer algemeen:

Bij het verhoudingsgetrouw afbeelden blijven de hoeken ongewijzigd.

Zijn de twee rechthoeken (figuur 20) verhoudingsgetrouw op elkaar af te beelden? Je kunt het beter zien als je er de diagonalen intekent en op hun hoeken let.

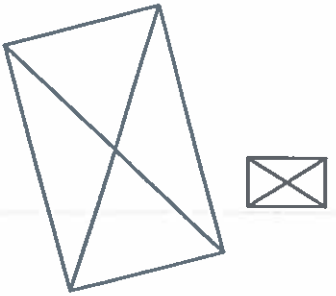


fig. 20

Er is echter nog meer aan de hand bij het verhoudingsgetrouw af-

beelden. Hoe beeld ik iets verhoudingsgetrouw af? Daarstraks heb ik het woord 'kopie' gebruikt. Kopie kan betekenen: *precies eender*. Het kan ook betekenen: *verkleind* of *vergroot*. En dat kopiëren kan dan geschieden fotografisch, door lichtdruk, als schaduwbeeld of netjes natekenend, eventueel met een pantograaf. Op schaal – zeggen we ook.

Wat bedoelen we met 'op schaal'?
1 : 10.000 staat wel eens op landkaarten en dat wil zeggen: *lengte 1 op de kaart is 10.000 in de werkelijkheid.*
Onder het plaatje van een microbe zou kunnen staan 1000 : 1 en dat betekent qua afmetingen 1000 *op de plaat is* 1 *in de werkelijkheid.*
Hoe groot is iets in het echt? En zonder uit te kijken bezwijkt de leerling voor de verleiding dat 1 cm op het plaatje in werkelijkheid 1 m of 1 km of 100.000 km is, alsof het niet anders kan.

Er zijn levensgrote statuen maar er zijn ook onder- of bovenmaatse, veelal 2 : 3 of 3 : 2 dat wil zeggen *2 in het beeld is 3 in het echt of omgekeerd.*

In biologieboeken heb je van die plaatjes – met een voorwerp naast een boomblad om te laten zien, wat de verhoudingen zijn.

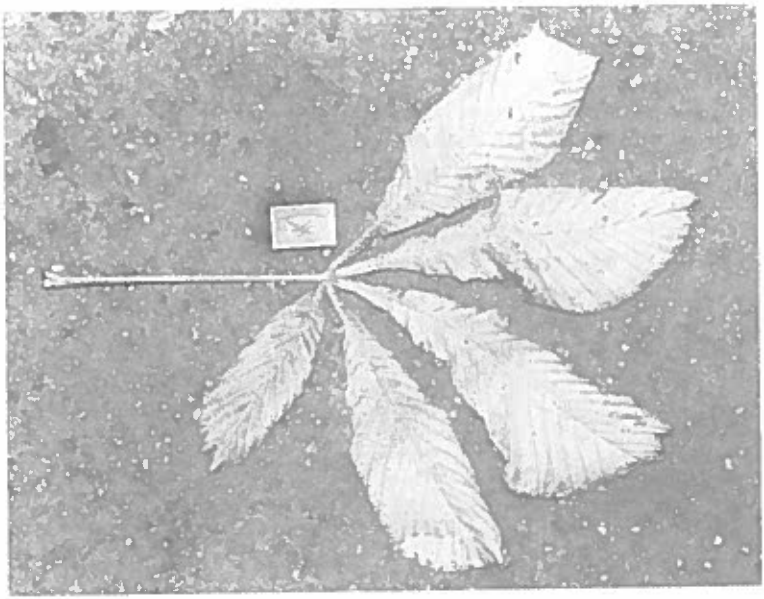


fig. 21

Die 1 : 10.000 of 1000 : 1 of 2 : 3 of 3 : 2 van daarstraks zijn *schaalverhoudingen* oftewel *externe verhoudingen* in tegenstelling tot de *interne* die we eerder bekeken.Wel, de verhouding van boomblad tot lucifersdoosje is zo'n interne verhouding binnen het plaatje. De verhou-

ding van boombladplaatje tot echt blad, van plaatje van het doosje tot echt doosje is extern: het is de *schaalverhouding*.
Ziedaar twee manieren om uit te leggen wat 'verhoudingsgetrouw' betekent en hoe je verhoudingsgetrouw afbeeldt:

1 de *interne* verhoudingen in het beeld moeten overeenstemmen met de corresponderende in het origineel
2 de *externe* verhouding tussen beeld- en origineellengtes moet alom dezelfde zijn: de schaalfactor.

Hoe komt 'verhoudingsgetrouw' aan deze twee met elkaar gelijkwaardige aspecten?

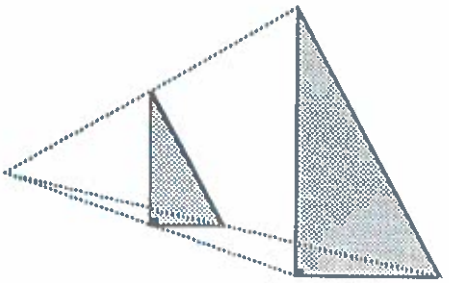


fig. 22

(1) OA' : A'B' = OA : AB is een gelijkheid van inwendige verhoudingen in beeld respectievelijk origineel.
(2) OA' : OA = A'B' : AB is een gelijkheid van externe verhoudingen.
Maar uit de geldigheid van (1) volgt mathematisch die van (2) en omgekeerd, door verwisseling van de binnentermen.
Uit de *gelijkheid van de interne verhoudingen* volgt dus de *standvastigheid van de externe verhoudingen*, en omgekeerd. In (2) staat de schaalverhouding van het afbeelden, die alom dezelfde moet zijn.

Hiermee is het tweede fragment uit het artikel van Freudenthal ten einde.

De door Freudenthal beschreven achtergronden over verhoudingen zijn te gebruiken bij zowel het programma van de basisscholen als bij het nieuwe leerplan van W12-16. Het zal duidelijk zijn dat de verhoudingen die in meetkundige situaties voorkomen in het laatstgenoemde leerplan wel expliciet gemaakt worden. Terwijl het verschil tussen interne en externe verhoudingen niet iets is dat tot de leerstof van 12 tot 16 jarigen behoort.
Helaas kunnen (nog) niet alle leerlingen die van de basisschool komen zich beroepen op eenzelfde oriëntatie op dit onderwerp: het meetkundeonderwijs op de verschillende scholen vertoont nog grote

verschillen. Daarom mag een fase van oriëntering in het voortgezet onderwijs niet overgeslagen worden. Hieronder gaan we nader in op een aantal aspecten van het onderwerp verhoudingen. Er is in dit onderwerp een gedeeltelijke overlap met Rekenen, wij leggen hier het accent op verhoudingen van lengtes in figuren.

Vergroten en verkleinen

Het gaat dan om alle soorten afbeeldingen waarbij verhoudingen in het origineel getrouw worden weergegeven in het beeld. Als denkmodel kan dienst doen het begrip kopie (een kopieermachine kan afdrukken maken die precies even groot zijn als het origineel, maar ook vergrotingen of verkleiningen). Bij het verhoudingsgetrouw afbeelden verandert de grootte van de hoek niet, terwijl de lengten met dezelfde factor worden verkleind of vergroot.

Roosterpapier is een handig hulpmiddelbij vergroten. Gebruik je roosterpapier waarvan de roosterhokjes rechthoeken of parallellogrammen zijn, dan wordt de figuur vervormd.

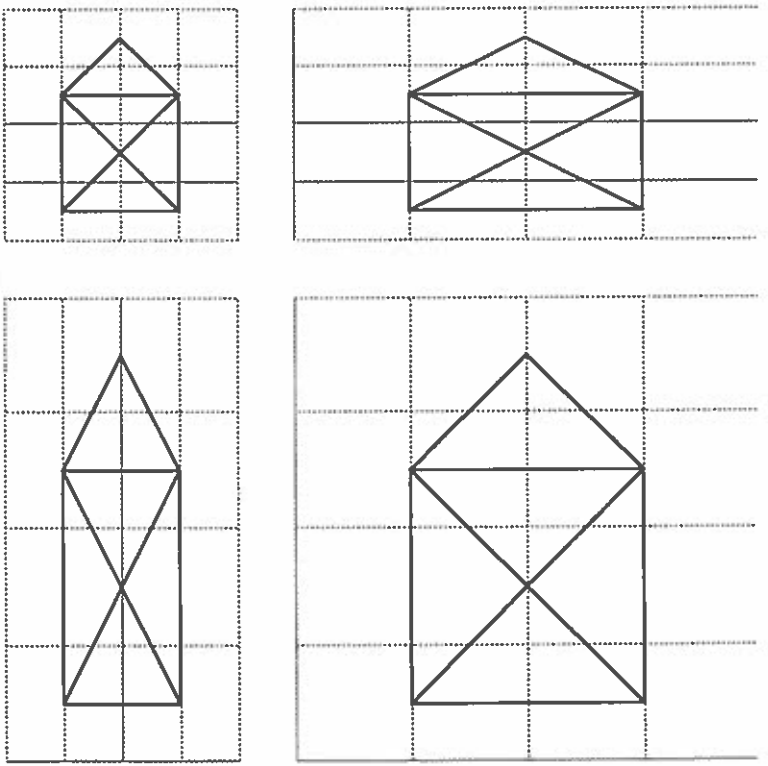
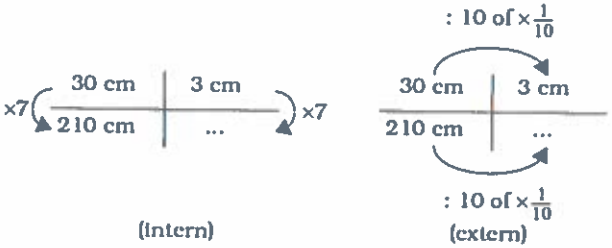


fig. 23

Bij een vergroting (verkleining) gaat het om de externe verhoudingen als je over de vergrotingsfactor praat.

Bij het rekenen kunnen verschillende modellen gebruikt worden: een dubbele getallenlijn, een verhoudingstabel of rekenen met behulp van pijlentaal.

Vaak bieden de dubbele getallenlijn of de verhoudingstabel de meeste mogelijkheden: binnen één model kun je kiezen om te rekenen met de interne of met de externe verhoudingen. De keuze wordt vaak ingegeven door de gegeven getallen.



(intern) (extern)

Het bepalen van de vergrotingsfactor kan ook met behulp van de pijlentaal door terug te rekenen:

$$30\text{ cm} \xrightarrow{\times\ldots} 210\text{ cm}$$

Schaal

In bepaalde situaties van verkleinen wordt gesproken over schaal. Vooral in situaties van plattegronden en kaarten.

Als je op een plattegrond alles 25 maal zo klein tekent, schrijf je erbij dat de schaal 1 : 25 is (externe verhoudingen). Het lijkt allemaal eenvoudig, maar voor veel kinderen is het dat niet. Met name als zij moeten meten, tekenen en rekenen in een tekening waarvan de schaal 1 : 100.000 is. Daarom een paar aanbevelingen bij de leerlijn voor het begrip schaal.

Allereerst activiteiten rond tellen en meten.

Het ontwikkelen van maatkennis is belangrijk, evenals activiteiten rond meten zoals:

Op een foto is de werkelijkheid verkleind afgebeeld. Je kunt de hoogte van het huis op de foto schatten met behulp van referentiematen: een deur, de hoogte van een verdieping, enzovoort. Je telt dus niet in het 'echt', maar op een plaatje.

Iets dergelijks kun je met een foto doen waarbij een liniaal is meegefotografeerd, de maat die je uittelt is dan een standaardmaat.

Zo kun je op de foto van de spin (figuur 24) met behulp van de liniaal uittellen hoe groot de spin is.

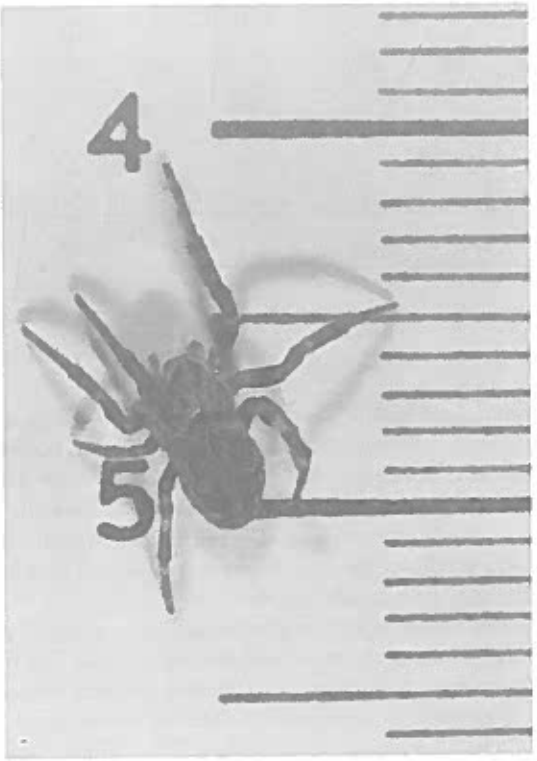


fig. 24

Schaallijnen werken op dezelfde manier. Je komt steeds vaker plaatjes tegen (in de krant, in tijdschriften) waarop met behulp van een schaallijn de schaal staat aangegeven. Ook bij het vak aardrijkskunde is expliciet aandacht voor het werken met een schaallijn.
Een variant hierop is het 'metermaatje', dit is een soort schaallinlaal (zie fig. 25). Dit wordt onder andere gebruikt door woninginrichters. Met deze liniaal kun je niet alleen eenvoudig lengtes bepalen in de schaaltekening, maar ook schaaltekeningen maken.
Bij al deze voorbeelden ging het om interne verhoudingen, om de verhoudingen binnen het plaatje.
Voor het bepalen van de vergrotingsfactor of de schaalverhouding moet je kijken naar de externe verhoudingen. Het metermaatje biedt een goede mogelijkheid om de overgang te maken via dubbele getal-

lenlijn en verhoudingstabel naar de schaalverhouding 1 : 25.

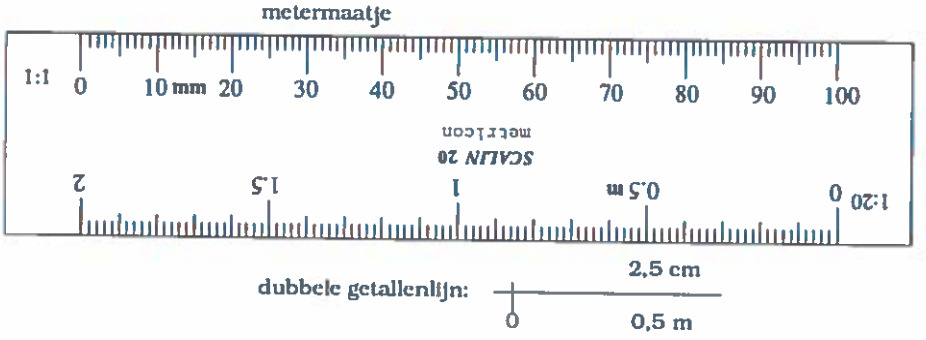


fig. 25

Wij bevelen aan om kinderen eerst te laten werken met een schaal waarvan het tweede verhoudingsgetal niet op een nul eindigt, dus bijvoorbeeld een schaal 1 : 4 of 1 : 87, en pas later met een schaal 1 : 100.000 of 1 : 25.000. Het geeft leerlingen de kans even opnieuw bewust te worden van wat met 1 : 4 bedoeld wordt. Bij 1 : 100.000 komen soms ongewenste ezelsbruggetjes boven (een handvol nullen eraf!), die begrip in de weg staan.

Onder het werken met schaal verstaan we niet alleen rekenactiviteiten, maar ook meet- en tekenactiviteiten zoals het maken van een schaaltekening (bijvoorbeeld van je eigen kamer), een voorwerp waarvan de gegevens in een schaaltekening staan (veel van dit soort schaaltekeningen zijn in hobbyblaadjes te vinden), een maquette, of een schaalmodel van een voorwerp.

Ook moeten de kinderen iets weten over de nauwkeurigheid van schalen, bijvoorbeeld:

'Welke schaal is nauwkeuriger? 1 : 1.000 of 1 : 10.000? Wat bedoel je daar mee?' Of:

'Welke kaart is beter om te gebruiken bij een wandeling?
Schaal 1 : 25.000 of 1 : 100.000? Waarom?'

Schaaltekening als meetmethode

De hierboven geschetste leerlijn voor vergroten en verkleinen hoort bij de eerste twee leerjaren. Hier worden schaaltekeningen en schaalmodellen meer bestudeerd als presentatievorm. Vanaf het tweede leerjaar gaan ze ook als hulpmiddel dienen om onbekende lengten en of hoeken te kunnen bepalen. De schaaltekeningen zijn dan vaak aanzichten van de situatie waarin gemeten wordt. Hier speelt de notie dat de grootte van een hoek in een verkleining of vergroting gelijk

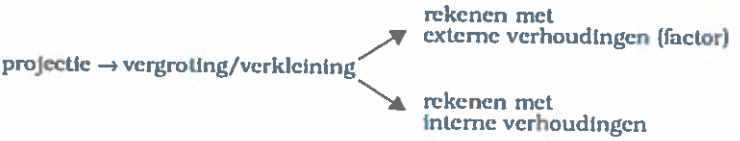
blijft een rol.
Op de foto in figuur 26 zijn leerlingen van één van de experimenteerscholen bezig de hoek te meten waaronder ze het kunstwerk een eind verderop zien. Met een meetlint hebben ze de afstand gemeten vanaf de hoekmeter tot het kunstwerk. Met behulp van de meetgegevens is in de klas een schaaltekening gemaakt waarmee de hoogte van het kunstwerk wordt bepaald.
Lastige vragen hierbij zijn: Welke invloed heeft een bepaalde schaalgrootte op de nauwkeurigheid van het antwoord? En: Hoe nauwkeurig moet je meten?
Zeker voor havo/vwo leerlingen geschikte problemen om over na te denken.

fig. 26

Verhoudingen bij projecties

Spelen met schaduwen van voorwerpen ten gevolge van zonlicht of lamplicht vinden kinderen heel boeiend. Intuïtief voelen zij aan dat voor de schaduw van een paaltje bij zonlicht geldt: Bij een drie maal zo hoog paaltje is de schaduw drie keer zo groot. Het onderzoeken van dit soort verbanden en het vergelijken van de situaties met zonlicht en lamplicht is een belangrijk oriëntatie op de begrippen parallelprojectie en centrale projectie. Het begrip projectie behoort niet tot de reguliere leerstof, wij gebruiken deze naam alleen om het verband in verschillende situaties duidelijk te kunnen maken. In het boven-

bouwprogramma wiskunde B van havo en van vwo komt het begrip projectie wel expliciet aan de orde.
In hoofdstuk 18 over Kijkmeetkunde zijn in het onderdeel over 'constructies' alle voorkomende situaties getekend en toegelicht. Hier gaan we verder in op de rekenaspecten, in het bijzonder: berekeningen in driehoeken.
Bij dit soort situaties met driehoeken gaat het om een speciaal geval van vergroten/ verkleinen waarbij door projectie of evenwijdigheid de gelijkvormigheid gegarandeerd is. Hier worden dus de volgende stappen gemaakt:



Een voorbeeld met zonlicht (parallelprojectie) is in figuur 27 weergegeven:

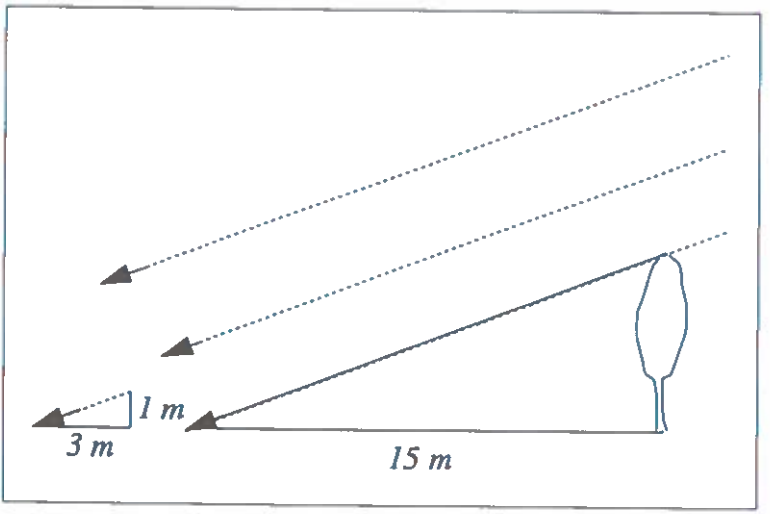


fig. 27

De schaduw van de meetlat is drie meter. De schaduw van de boom is 15 meter. Je kunt hier werken met de verhouding tussen de schaduwen, namelijk met de verhouding 3 : 15. Het ligt hier voor de hand om te werken met een factor: De schaduw van de boom is 5 maal zo groot als de schaduw van de meetlat, dus de boom is 5 maal zo lang als de meetlat.

Dit kan ook met behulp van een verhoudingstabel. In beide gevallen werk je met externe verhoudingen.

		×5	
lengte voorwerp	1 m		
lengte schaduw	3 m	15 m	
		5	

Werken met de interne verhoudingen kan ook: de verhouding tussen de lengten van voorwerp en schaduw is 1 : 3, ofwel:
De schaduw is 3 maal zo lang als het voorwerp, eventueel:
De lengte van het voorwerp is $\frac{1}{3}$ deel van de schaduw. In een verhoudingstabel bekijk je dan het verband op de volgende manier:.

lengte voorwerp	1 m		
lengte schaduw	3 m	15 m	×3

In werkelijke situaties zullen de getallen niet zo 'mooi' zijn, afgezien van die ene meter van de meetlat. Het rekenwerk wordt dan een stuk lastiger. In bovenstaand voorbeeld zou je het rekenprobleem nog aardig kunnen omzeilen door een lat te nemen waarvan de schaduw precies 1 meter is. Als de situatie zo'n aanpak niet toelaat kun je het rekenend oplossen door eerst te berekenen hoe lang de lat moet zijn om een schaduw van 1 meter te hebben. Dit is wat we bij Rekenen genoemd hebben: berekenen via *normeren op 1* (zie ook het hoofdstuk over verhoudingen bij Rekenen).
Een voorbeeld met lamplicht (centrale projectie) is in figuur 28 weergegeven:

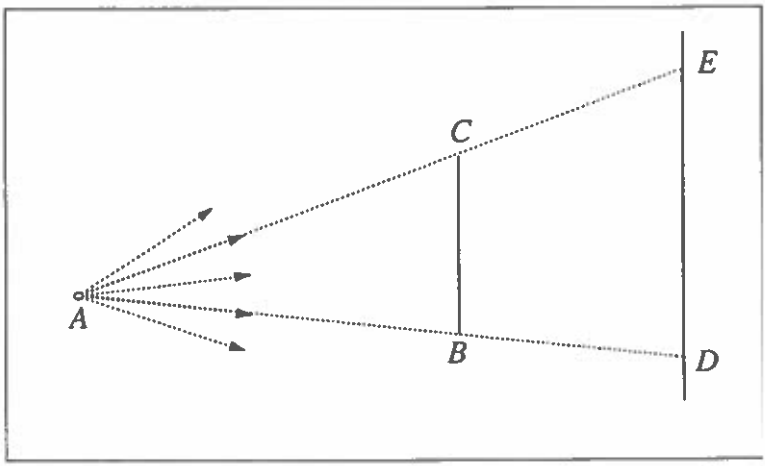


fig. 28

A is een lamp, BC is het voorwerp (bijvoorbeeld een pop uit een schimmenspel) en DE is de schaduw (op een scherm). Driehoek ACD is pas een vergroting van driehoek ACD als BE en CD evenwijdig zijn. Er kan nu gerekend worden met de interne of externe verhoudingen, al of niet gebruik makend van vergrotingsfactor of verhoudingstabellen.

De toepassingen in andere contexten zijn bijvoorbeeld binnen de kijkmeetkunde en bij 'vormen en figuren'. Deze toepassingen vinden plaats rond het derde leerjaar. In bijna alle situaties gaat het dan om 'twee driehoeken op elkaar', zoals in figuur 29.

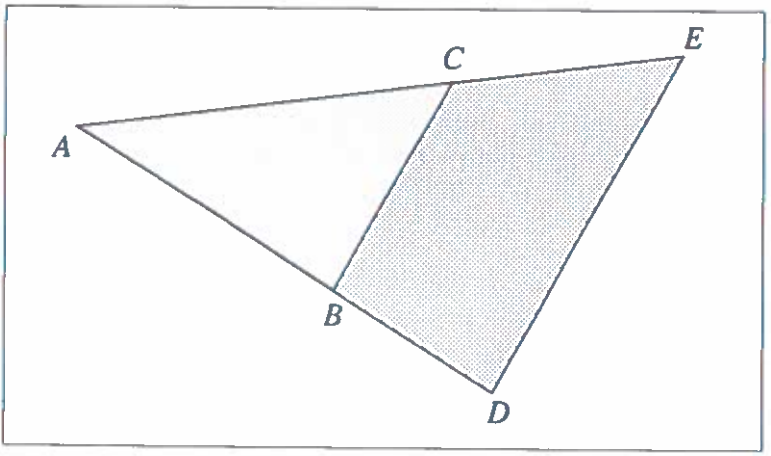


fig. 29

Op de experimenteerscholen bleken zich hier de volgende problemen voor te doen:

- Sommige leerlingen zagen in de tekening slechts één driehoek en niet twee. Oplossing: Met behulp van twee papieren driehoeken kon aanschouwelijk gemaakt worden dat ze op deze manier op elkaar passen.
- Sommige leerlingen zagen niet hoe ze het probleem moesten aanpakken. Oplossing: De hint 'dit gaat net zo als bij ...' of 'denk maar aan in A zit een lamp, BE is het voorwerp, enzovoort' bleek voldoende te zijn.

In een figuur waarbij de gelijkvormige driehoeken een soort zandloper vormen, is het plaatje van 'twee driehoeken op elkaar' pas te zien nadat één van de driehoeken om een hoekpunt over 180° gedraaid wordt.

In de leerplannen is het woord 'gelijkvormig' bewust vermeden. Daar zijn twee redenen voor geweest.

Ten eerste kan het woord verwarring wekken, zeker voor de zwakke

leerlingen, omdat het zo dicht ligt bij de uitdrukking 'gelijke vorm' uit de dagelijkse taal. Veel leerlingen hebben er daarom moeite mee te begrijpen dat bijvoorbeeld niet alle rechthoeken gelijkvormig zijn. De termen 'vergroten' en 'verkleinen' sluiten veel dichter bij het dagelijkse taalgebruik aan.

De tweede reden is dat introductie van het begrip gelijkvormigheid aanleiding kan zijn tot een systematisch onderzoek van dat begrip. Zeker voor de zwakkere leerlingen is dat niet de bedoeling. Wie het wil, kan dat in 3vwo doen. Dan gaat het echter niet in de eerste plaats om het begrip gelijkvormigheid, maar om de leerlingen te leren een systematisch onderzoek naar een begrip te doen.

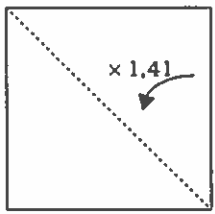
Andere verbanden

Een voorbeeld van zo'n ander verband is de tangens. Tot nu toe werd het begrip tangens (en ook sinus en cosinus) altijd geïntroduceerd vanuit de meetkunde en pas later kwamen deze begrippen als functies terug in de algebra. Aan deze volgorde willen we niets veranderen, we willen ook niets veranderen aan de tot nu toe ontwikkelde modellen om de tangens te introduceren zoals glijverhouding van (zweef)vliegtuigen of steilheid van hellingen. Wel nog een korte bezinning op het begrip tangens, bekeken vanuit een ander gezichtspunt.

Bij de tangens gaat het om een interne verhouding in een speciaal figuurtype (rechthoekige driehoek) die in verband gebracht wordt met een hoek. Er zijn meer van zulke verbanden te vinden, in iets eenvoudiger situaties. Het gaat dan om het rekenen met een factor binnen één figuurtype.
Voorbeelden:

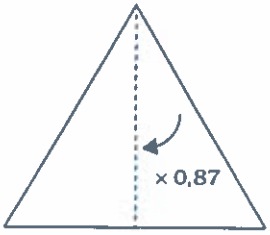
- Voor het figuurtype vierkant geldt dat er een factor is tussen lengte zijde en lengte diagonaal:
  lengte zijde × 1,41 = *lengte diagonaal*
  ofwel

$$\frac{lengte\ diagonaal}{lengte\ zijde} = 1,41$$



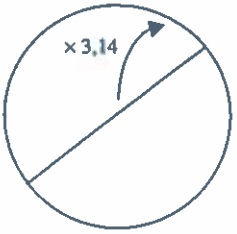
- Voor het figuurtype gelijkzijdige driehoek geldt dat er een vaste factor is tussen de lengte van een zijde en de hoogte van de driehoek:
  lengte zijde × *0,87* = *hoogte*
  ofwel

$$\frac{hoogte}{lengtezijde} = 0,87$$



- Voor het figuurtype cirkel geldt dat er een vaste verhouding is tussen de diameter en de omtrek:
  diameter × *3,14* = *omtrek*
  ofwel

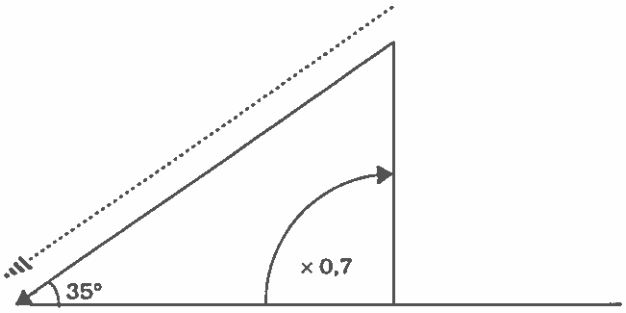
$$\frac{omtrek}{diameter} = 3,14$$



- Voor metrisch papier (zoals een A4-tje) geldt dat er een vaste verhouding is tussen de breedte en de lengte:
  breedte × *1,41* = *lengte* ofwel

$$\frac{lengte}{breedte} = 1,41$$

- Voor driehoeken van het type rechthoekig èn een hoek van 35° geldt ook dat er een vaste factor is tussen de rechthoekszijden. Bijvoorbeeld



schaduw × *0,7* = *hoogte*

ofwel

$$\frac{hoogte}{schaduw} = 0,7$$

In het laatste voorbeeld heet de factor: de tangens van een hoek van 35°.

Misschien dat goede aandacht voor het rekenen met verhoudingen en factoren in verschillende situaties in de meetkunde er toe kan bijdragen dat de goniometrische verhoudingen voor leerlingen meer zijn dan alleen maar de letters in het ezelsbruggetje SOS, CAS en TOA.

WISKUNDEWERKLOKAAL

Inleiding

Lange tijd was het beeld van de wiskundedocent: iemand die door de gangen loopt met een passer en een driehoek; de wiskundeleraar had genoeg aan een bord en een krijtje, terwijl collega's voor andere vakken al lang werkten met allerlei concrete materialen in compleet ingerichte vaklokalen of practicumruimten, met video, bandrecorder, diaprojector, overheadprojector en demonstratiemateriaal.

Eén uitgangspunt van het nieuwe leerplan is dat de wiskunde dichter bij de leerlingen moet staan. Leerlingen leren immers op verschillende manieren, met verschillende zintuigen. Ook bij wiskunde kunnen allerlei materialen gebruikt worden die het voorstellingsvermogen van de leerlingen prikkelen of het leerproces ondersteunen. Daarom zou het werken met concrete materialen bij wiskunde, niet alleen voor wiskundedocenten, maar ook voor hun collega's, leerlingen en hun ouders, heel vanzelfsprekend moeten worden. Hierbij is het voor de wiskundedocent van belang te weten welke materialen en middelen gebruikt kunnen worden en vooral hoe ze gebruikt kunnen worden. Omdat met name de meetkunde goede aanknopingspunten biedt is dit hoofdstuk in dit boek ondergebracht bij de meetkunde. Ondanks dat sommige beschrijvingen elders in de meetkundehoofdstukken al gegeven zijn hebben we ze voor de volledigheid hier nogmaals opgenomen.

Wiskundewerklokaal, een begrip

Een wiskundewerklokaal kan een compleet ingericht vaklokaal voor wiskunde zijn. Maar het begrip kan ook ruimer opgevat worden, als een aanduiding voor elke vorm van georganiseerd gebruik van materialen en gereedschappen bij het uitvoeren van allerlei wiskundeopdrachten. Wáár dat dan gebeurt maakt dan niet zo veel uit: het kan in een gewoon lokaal, in een vaklokaal van bijvoorbeeld handvaardigheid of natuurkunde, maar het kan soms ook buiten op het schoolterrein of thuis.

Natuurlijk zou het het mooiste zijn als straks de wiskundelessen in goed ingerichte vaklokalen voor wiskunde gegeven zouden kunnen worden, maar in de praktijk is dat op veel scholen roostertechnisch geen haalbare zaak. Dit was ook op sommige experimenteerscholen de aanleiding om te zoeken naar alternatieven, die resulteerden in de volgende oplossingen:

- Eén vaklokaal voor de hele sectie, waarin alle materialen voorhanden zijn.
  In verschillende lokalen een kast met daarin allerlei spullen.
- Een zelf ontworpen kar, die verrijdbaar is door de school.

Invoering in stappen

Het realiseren van een ruimte met allerlei materialen gaat niet van de ene dag op de andere, waarschijnlijk is dit financieel ook niet haalbaar! Dit heeft ook zijn voordelen: na de aanschaf van een soort basisuitrusting kan op een later moment ander materiaal aangeschaft of gemaakt worden. Bij de keuze voor die middelen kunnen dan de opgedane ervaringen en gerezen behoeften een rol spelen. Het verdient wel aanbeveling om binnen school er voor te zorgen dat, net zoals bij biologie, handvaardigheid, natuurkunde, enzovoort, het gebruikelijk wordt dat de sectie wiskunde over een toereikend budget kan beschikken. Voor een uitgebreide lijst van spullen en een begroting verwijzen wij naar de APS bundel 'Wiskundewerklokaal'.

Hoe je het een en ander in de les organiseert is een andere kant van het werken met concrete materialen. Dit kan variëren van een heel strakke organisatie tot een heel vrije, waarbij leerlingen gewoon door de klas lopen om spullen te pakken hetgeen aanvankelijk vaak rumoerigere klassen oplevert. Elke werkvorm eist voorbereiding. Het is raadzaam niet te kiezen voor een te grote verandering in n keer, maar in kleine stappen vanaf de strak gestuurde werkvormen naar meer vrije te gaan.

Verschillende aspecten

Het gebruiken van concrete materialen heeft verschillende aspecten. Hieronder worden verschillende aspecten genoemd en toegelicht met voorbeelden.

1 Middelen kunnen gebruikt worden bij het *aanbieden* van een probleem.
  Dit kunnen allerlei objecten zijn, zoals een schaarlamp, een moderne vaas, maar ook foto's, dia's of video-opnamen.
2 Middelen gebruiken om iets te *meten*.
  Hieronder vallen niet alleen de gebruikelijke meetinstrumenten zoals liniaal en geodriehoek maar ook allerlei andere instrumenten, zoals een kompas, een metermaatje, een weegschaal, een stopwatch, een meetlint, en ook eigengemaakte meetinstrumenten.
3 Verschillende middelen kunnen gebruikt worden ter *ondersteuning* van het voorstellingsvermogen. Dit is vooral belangrijk in driedimensionale situaties.
  Allerlei ruimtelijke modellen kunnen hiervoor gebruikt worden,

bouwplaatjes en verpakkingsmateriaal. Maar ook bijvoorbeeld een van latten gemaakte kubus van 1 m^2.

4 Aan de hand van middelen *onderzoek* doen.
De materialen die hier bij gebruikt kunnen worden lopen zeer uiteen. Eigenschappen onderzoeken van een vierkant of parallellogram met behulp van een blaadje papier. Met behulp van klei of ander materiaal vormen maken en doorsneden onderzoeken. Met behulp van lamplicht of zonlicht schaduwen van vlakke en ruimtelijke vormen bestuderen.

5 Middelen gebruiken van *modellen te maken* van de situatie om problemen op te lossen.
Zo'n model kan bijvoorbeeld een plattegrond zijn of een schaalmodel van aarde-zon-maan waarbinnen de oplossing gevonden wordt. Zo'n model kan ook slechts een hulpmiddel zijn om daarmee een manier te ontdekken om het probleem op te kunnen lossen. Bijvoorbeeld bij het probleem 'Zie je nu meer, minder of precies de helft van dit cilindervormig gebouw?' is een papieren cilinder een hulpmiddel om daarna te komen tot het maken van een verklarend bovenaanzicht.

6 Middelen gebruiken als *'smaakmaker'*.
Allerlei materialen die in de klas voorkomen kunnen leerlingen boeien en uitdagen er iets mee te doen. Hierbij denken we bijvoorbeeld aan:

- Leerlingenwerk in het lokaal, zoals tekeningen geconstrueerd met de passer of zelfgemaakte (draad)modellen.
- Een tijdelijke tentoonstelling, bijvoorbeeld over de langste dag.
- Meetinstrumenten, verpakkingen, bouwwerken.
- Posters (zoals bijvoorbeeld die van de Werkgroep Vrouwen en Wiskunde) of andere wiskundig gerichte mooie platen.
- Een kast met strategie- en denkspelletjes zoals Go, Master Mind, Schaken, Dammen, Knopentouwen, Tangram, e.d.
- Een leesplank met mooie boeken en tijdschriften, bijvoorbeeld:
  Jacoby, O. & Benson, W.H.: *'Wiskunde voor je plezier'*, Prisma 1256.
  Locher, J.L., e.a.: *'De Wereld van M.C.Escher'*, Meulenhoff, Amsterdam.
  M.C. Escher: *Grafiek en tekeningen*, J.J. Tijl, Zwolle, 1970.
  'Pythagoras', wiskundetijdschrift voor jongeren, IVIO, Lelystad.
  'Archimedes', tijdschrift voor de natuurwetenschappen, IVIO, Lelystad.
  Van der Blij, F.: *Wiskunstmatigheden*, Malmberg, 1968.
  Ernst, B.: *Levende wiskunde* (kegelsneden), Teleac, 1969.
  Enkele Engels en Duitstalige boekjes op dit gebied:
  Elffers, J.: *Tangram*, Schauberg (Du Mont), 1974.
  Dudeney, H.E.: *Amusements in mathematics*, Dover, 1958.
  Lauwerier, Hans: *Symmetrie*, Aramith Uitgevers, Amsterdam,

1988.
Rouse Ball, W.W. & Coxeter, H.S.M.: *Mathematical Recreations & Essays*, Cambridge, 1974.
Holden, A.: *Shapes, space and symmetry*, New York (Columbia University), 1968.

Literatuur

- W12-16 pakketten: *Meten, GWA-klapper, Beroepswiskunde.*
- *'Wiskunde-werklokaal'* , Samenwerkingsgroep Wiskunde 12-16, samenstelling Gera Thalhammer, Algemeen Pedagogisch Studiecentrum - Amsterdam, september 1991.
  Deze bundel geeft een beeld van wat in zes proefscholen is gedaan met betrekking tot het wiskundewerklokaal. Het grootste deel van deze bundel bestaat uit bijdragen van de docenten.
  Aan de orde komen:

1 Verschillende aspecten van het gebruik van materialen in de wiskundeles.
2 Voorbeelden van gebruik van het doorkijkscherm, de overheadprojector, bouwsystemen, de computer, de kompasroos.
3 Tips en suggesties over practicumlessen en het individueel gebruik van materialen.
4 Overzicht van materialen en hun prijzen, gebruikte werkbladen en pakketjes W12-16.
5 Voorbeelden van de inrichting van het wiskundewerklokaal op verschillende scholen.
6 Obdeijn, T., Dalhoeven, Th. & Johannink, C. : *Schoolonderzoek in Oldenzaal* in 'Nieuwe Wiskrant', 10, 1, 66 - 72.

WAT GING HIERAAN VOORAF?

Inleiding

De meest opvallende trek van het meetkundeprogramma dat in de vo rige hoofdstukken is geschetst, is toch wel de sterke binding met d realiteit.

We weten natuurlijk allemaal dat het wel eens anders is gewees in het meetkundeonderwijs, dat meetkunde juist gezien werd als top punt van zuiver, van de realiteit losgemaakt denken.

In dit hoofdstuk willen we laten zien dat onze visie op meetkund niet van vandaag of gisteren is maar zijn wortels heeft tot diep in d geschiedenis van het vak wiskunde zelf.

We doen daartoe een aantal grepen in de geschiedenis en noemen vooral aan het eind van dit hoofdstuk, enkele ontwikkelingen in he Nederlandse meetkundeonderwijs van de twintigste eeuw waar we o aan menen te sluiten met onze voorstellen in de voorgaande hoofd stukken.

In dit hoofdstuk wordt op geen enkele manier naar volledigheid ge streefd. Men kan ons dan ook verwijten dat we nogal selectief voor beelden kiezen. Wie voorbeelden wil zoeken die onze richting var denken ondersteunen of tegenspreken kan dezelfde bronnen gebrui ken als wij deden:

a The History of Mathematics: a Reader.
Dit is een verzameling bronteksten, bijeengebracht door Johr Fauvel en Jeremy Gray (Macmillan Press, London, 1987).
b Oude jaargangen van het tijdschrift Euclides.
c In dit hoofdstuk genoemde literatuur.

Een inhoudsberekening

Hier is probleem 41 uit de Rhind-papyrus uit Egypte, dat is dus on geveer 1850 voor Christus.

Vind de inhoud van een cilindervormige graanopslag met diameter 9 en hoogte 10.

De oplossing in de papyrus loopt als volgt:

Neem $\frac{1}{9}$ van 9, namelijk 1; de rest is 8.
Vermenigvuldig 8 met 8; dat is 64.
Vermenigvuldig 64 met 10; dat maakt 640 kubieke voet.
Tel er de helft bij; dat is 960. Dat is de inhoud in khar.

Neem $\frac{1}{20}$ van 960. Dat is 48.
4800 hekat graan gaat erin.

Dan volgen nog de uitgewerkte berekeningen, die wel een interessant inzicht in het Egyptische cijferen geven, maar voor ons nu minder van belang zijn.

De hele papyrus bevat rekenvoorbeelden en toepassingen, meetkundige dus, zoals deze.

Het probleem lijkt allereerst van praktisch belang. Lezers van de Bijbel zullen onmiddellijk moeten denken aan Joseph in Egypte, die op zijn dertigste de taak krijgt graan te verzamelen om de door hem voorspelde hongersnood het hoofd te kunnen bieden. Het zal heel wat organisatie en rekenen met inhouden gekost hebben!

De berekening zelf is interessant. Ergens moet toch een of andere benadering voor – modern gezegd – π zitten. Dat zit een beetje verstopt door het rekenen met stambreuken. De gebruikte berekening kan samengevat worden met de formule:

$$((1 - \tfrac{1}{9}) \times \text{diameter})^2.$$

Daaruit volgt dan, in onze termen uitgedrukt

$$\pi \approx 4 \times (1 - \tfrac{1}{9})^2 \approx 3.16.$$

Enigszins verwarrend in het voorbeeld is dat $\frac{1}{9}$ deel van 9 genomen moet worden, hetgeen makkelijk uitkomt. Wie in de papyrus echter doorgaat naar probleem 42 zal merken dat daar de inhoud van net zo'n ronde graanschuur wordt berekend, maar nu met diameter 10. De eerste stap is nu 'haal $\frac{1}{9}$ van 10, namelijk $1\frac{1}{9}$'; de structuur van de berekening is verder exact gelijk, alleen het rekenen met de voor ons onhandige stambreuken is gecompliceerder.

Het is levensgevaarlijk om nu maar meteen te concluderen dat de Egyptische wiskunde alleen op zulke concrete voorbeelden gericht is. In de Rhind-papyrus staan bijvoorbeeld problemen rond verhoudingen waar ook breuken als $14\frac{1}{14}\ \frac{1}{56}\ \frac{1}{97}\ \frac{1}{194}\ \frac{1}{388}\ \frac{1}{679}\ \frac{1}{776}$ in voorkomen. (Breuken werden altijd als som van stambreuken genoteerd.) Praktisch kan dat niet zoveel betekenen.

Aristoteles (± 350 voor Christus) beweert dat de Egyptenaren weliswaar door praktische problemen tot rekenen en meten kwamen, maar ook dat de priesterkaste zoveel tijd had, dat ze zich met wetenschappen konden bezig houden die niet gericht waren op het bereiken van de noodzakelijkheden voor het leven.

Of dit nu juist is of niet, de redenering op zich is interessant: het verschil tussen twee benaderingen van wetenschap is geformuleerd en ook het verband met maatschappelijke klasse is gelegd.

Twee soorten wiskunde?

In een van zijn dialogen laat Plato Socrates met Protarchus prater over de indeling van de wiskunde in twee soorten.

Protarchus: Op welk beginsel is het onderscheid tussen twee soorter rekenkunde dan gebaseerd?

Socrates: Er is een belangrijk kenmerk van verschil, Protarchus. De gewone rekenaar handelt met ongelijke eenheden: zijn 'twee' kan zijn twee legers, twee koeien, of twee wat dan ook, van het kleinste in de wereld tot het grootste; terwijl de filosoof met hem niets mee van doen wil hebben, tenzij deze toestemt dat elk voorkomen van zijn eenheid precies gelijk is aan alle andere.

Protarchus: Zeker, u maakt een belangrijk onderscheid tussen degener die zich met getallen bezighouden, wat het geloof rechtvaardigt dat er twee rekenkunden zijn.

Socrates: Dan wat betreft meten en berekenen bij bouwen en handel en meetkunde en rekenen zoals beoefend door filosofen zullen we zeggen dat dat één soort is, of herkennen we daar ook twee soorten?

Protarchus: Na wat al gezegd is, stem ik voor twee.

Even verderop laat Socrates er geen twijfel meer over bestaan dat de tweede vorm, die van de filosofen, de beste is. Die heeft precisie, puurheid en perfectie.

Uit een wiskundig tractaat uit de tijd van Plato kunnen we opmaken dat in die zuivere vorm van wiskunde de vraag naar 'Waarom' belangrijker is dan de vraag naar 'Hoe'. Het tractaat is toegeschreven aan Hippocrates en gaat over het berekenen van oppervlaktes van door cirkelbogen begrensde gebiedjes, de zogenaamde maantjes van Hippocrates. Het heeft te maken met de cirkelkwadratuur, een van de problemen die de Griekse meetkunde zich stelde. Het gaat niet om een toepassing zoals bij de graanopslag, dat is al opvallend op zich, maar nog belangrijker is de vorm van het tractaat waarin heel duidelijk de methode van stapsgewijs logisch gevolgtrekken van de ene stelling naar de andere wordt gedemonstreerd.

D. J. Struik legt in zijn 'Geschiedenis van de wiskunde' hetzelfde verband als Aristoteles. Deze vorm van wiskunde behoort toe aan een rijkere klasse die slaven had en zich tijd kon gunnen voor een meer wetenschappelijke wereldbeschouwing.

Later, in de derde eeuw voor Christus in het rijke Alexandrië, zien we zelf voor het eerst de volgende stap op de weg naar 'onafhankelijke' wetenschap: de beroepsgeleerde, in dienst van vorst of een bibliotheek, die voor salaris zijn gehele leven aan de wetenschap wijdt. Zo een is Euclides.

Euclides

Euclides verzamelt in zijn geschriften zoveel mogelijk van wat aan wiskunde bekend is. Hij behandelt meetkunde, rekenkunde en onder andere optica. De vorm is overal dezelfde: vanuit enkele uitgangspunten propositie na propositie afleiden.

De vorm van Euclides' belangrijke meetkundeboek(en) *Elementen* bleek eeuwenlang bruikbaar voor leerboeken. Euclides sloeg zijn slag, zou je kunnen zeggen, doordat hij het feitelijk monopolie had op het leerboek meetkunde. Zeker tot in de jaren zestig van deze eeuw beginnen de leerboeken vlakke meetkunde met 'punt' en 'lijn'; waarbij een punt ondeelbaar is en een lijn geen breedte heeft, letterlijk volgens Euclides.

Euclides beperkte zijn gestructureerde stijl niet tot de meetkunde; ook wanneer hij zich bezig houdt met verhoudingen of priemgetallen is de vorm steeds propositie-bewijs-propositie-bewijs.
Waarschijnlijk doordat de meetkundige werken van Euclides zoveel meer bekendheid hebben gekregen dan de meer arithmetische – en ook omdat die ook zeer meetkundig geformuleerd zijn– is de sterke associatie ontstaan tussen meetkunde en bewijzen.

De methode van Euclides werd, zeker na de Renaissance in Europa, gezien als de enig juist vorm van wetenschap bedrijven. Een apart, maar overduidelijk voorbeeld vinden we in de titel van een belangrijk werk van de Nederlands filosoof Spinoza uit de 17e eeuw: Ethica, ordine geometrica demonstrata.

Natuurlijk niet het enige

Euclides staat duidelijk aan de kant van de filosofen in de indeling van Socrates. We moeten aannemen dat intussen het praktisch gebruik van rekenen en meetkunde onder bouwers, handelaren en wat dan ook gewoon is doorgegaan. Er zijn eerst de materiële getuigen daarvan; bouwwerken, allerlei andere overblijfselen uit het verleden. Maar ook geschreven bronnen.

Een bijzonder geval zagen we al bij het hoofdstuk over Kijkmeetkunde, waar architecten en schilders een meetkundige toepassing ontwikkelen, het perspectief, die pas later uitkristalliseert tot 'officiële' wiskunde. Die officiële vorm ervan zal de projectieve meetkunde worden en het is aardig om te zien dat in de geschiedenis van de projectieve meetkunde de band met toepassingen nog te zien is.

Desargues was de voorloper van de projectieve meetkunde. Hij was van beroep architect en ingenieur. Hij schreef voor mensen die meetkunde nodig hadden in hun professie. Zijn wiskundig werk werd pas 150 jaar later opgepakt door G. Monge en als wiskundige theorie gefundeerd. Monge noemde het 'géométrie descriptive'. Hij geeft in

zijn colleges aan de technische universiteit voorbeelden uit de cartografie, beeldhouwkunst, schilderkunst, techniek en vestingbouw. Monge is overigens de 'uitvinder' van de parallelprojectie, een manier om op tekeningen van de ruimte nog te kunnen meten.

Kritiek op Euclides

In de periode tussen Euclides en nu komt af en toe kritiek op zijn methode opduiken. Van heel verschillende kanten.
Zo is er een zeventiende-eeuwse Franse wiskundige, Clairaut, die de hele opzet met bewijzen en axioma's niet zo belangrijk vindt. Volgens hem is dat bij Euclides allemaal zo gekomen, omdat hij zich moest verweren tegen de gehaaide redeneerders van de school der sophisten. Clairaut bedoelt waarschijnlijk diegenen die 'bewezen' dat een afgeschoten pijl stil in de lucht hangt en dat Achilles de schildpad niet kan inhalen.

In de negentiende eeuw is er kritiek uit juist het tegenovergestelde kamp. Euclides zou niet precies genoeg zijn. Er moesten extra aannames (nieuwe axioma's) gedaan worden om het bouwwerk van Euclides overeind te houden. Zo construeert Euclides bijvoorbeeld een gelijkzijdige driehoek uit het snijden van cirkels. Uit zijn axioma's is echter niet af te leiden dát die cirkels elkaar snijden. Het wonder is dat zoveel van Euclides' werk toch nog bleek te kloppen via een versterking van de axiomatische methode.

In dezelfde periode wordt vastgesteld dat het nuttig is ook meetkunden te bouwen op andere of kleinere axiomastelsels. Er ontstaan zogenaamde niet-Euclidische meetkunden, waarin het belangrijke axioma van Euclides over het bestaan van juist één lijn evenwijdig aan een gegeven lijn door een punt buiten de gegeven lijn niet wordt geaccepteerd; ook de projectieve meetkunde wordt uit een set axioma's opgebouwd en door aanname van extra condities toegesneden tot affiene meetkunde. In al deze nieuwe meetkunden speelt het begrip afbeelding steeds een grote rol.

In de twintigste eeuw is er veel aandacht voor het mechanisme van het wetenschap bedrijven zelf. Voor de wiskunde is in dit kader I. Lakatos van belang.

In *Proofs and Refutations* voert Lakatos een klas op die discussieert over een wiskundestelling. In de levendige discussie – een duidelijke verwijzing naar de dialogen van zijn landgenoot Plato – wordt helder gemaakt wat bewijzen eigenlijk is: een bewering zodanig in stappen uiteenzetten, dat het overtuigend is. Bewijzen niet meer absoluut, maar als consensus van hier en nu.

Lakatos zelf is subtieler en diepgravender dan deze samenvatting natuurlijk. De voor de hand liggende conclusie voor de onderwijswereld is: de wetenschappelijke uiteenzetting geeft niet meer direct

vorm aan de onderwijsgerichte aanpak van de meetkunde. Lakatos heeft zich dan ook vaak kritisch uitgelaten over de vorm waarin wiskunde in boeken wordt gepresenteerd.

Voor ons is bij Lakatos van belang de erkenning van het idee dat redeneringen ook op kleinere schaal zinvol zijn, zonder dat ze ingepast zijn in een totaal-deductief opgebouwd geheel.

De Uebungensammlung

In 1931 verschijnt bij uitgeverij Martinus Nijhoff in Den Haag:

UEBUNGENSAMMLUNG
ZU EINER
GEOMETRISCHE PROPÄDEUSE
von
T. EHRENFEST-AFANASSJEWA

Het is een verzameling van 188 opgaven met een inleiding.

Propädeuse is hier een essentieel woord in de titel. De bedoeling van de opgaven is leerlingen in het onderwijs (denk aan dezelfde leeftijdsgroep als het W12-16-project) gelegenheid te geven allerlei ervaringen met meetkunde op te doen in de werkelijkheid, voorafgaand aan de systematische opbouw van de meetkunde.

De kern van het geheel wordt duidelijk uit de eerste zinnen van het voorwoord:

Die vorliegenden Aufgaben unterscheiden sich von den gewöhnlich in den propädeutischen Geometriebüchern verwendeten in einer wesentlichen Hinsicht: sie sind nicht auf das anschauliche Erfassen der Sätze des systematischen Curses gerichtet, sondern auf die Ausbildung der wichtigsten geometrischen Begriffe und auf das Anschaffen eines möglichst variierten Vorrates von räumlichen Vorstellungen. Dementsprechend wird in ihnen vor allem der qualitative Aspekt der Raumbeziehungen hervorgehoben.

Er wordt duidelijk begripsvorming voorafgaand aan 'stellingen' gepropageerd en dan ook nog gericht op ruimtelijk voorstellingsvermogen.

Dat de sfeer van de opgaven ook goed aansluit bij wat door ons wordt voorgestaan, moge blijken uit enkele opgaven uit de verzameling:

58. In zwei Kartonstücken je eine Öffnung machen und diese Ekrane so vor einander stellen daß man durch die beiden Öffnungen einen bestimmten Punkt in der Klasse sehen kann. Sich überzeugen, daß man

vom Punkte aus durch die beiden Öffnungen eine Schnur gerade spannen kann.

170. Man hat einen Rock und ein Paar Hosen von gleicher Länge zu nähen. Für welches von beiden hat man mehr Stoff nötig? – ungefähr beurteilen, indem man den Rock als einen Zylinder und die Hose als zwe Zylinder zur schematischen Beurteilung auffaßt.

De opgavenverzameling is ingedeeld in rubrieken van meetkundige aard; zo komt opgave 170 uit de rubriek 'cirkels'. Opmerkelijk is dat de enige rubriek die in de titel iets van de 'werkelijkheid' heeft de rubriek 'rechte lijn als lichtstraal' is.

Ook de opvattingen over de relaties met andere vakken sluiten aan bij wat we tegenwoordig ook graag willen:

Es wird nicht gemeint, daß jede Aufgabe für eine 'Aufgabe der Geometriestunde' durchgehen soll. Viele von ihnen sind bestimmt um in andere Arten von Tätigkeit der Schüler eingeflochten zu werden: zeichnen, modellieren, aus allen möglichen Materialien ein Schulmodell, ein Spielzeug, ein Werkzeug, einen Schmuck für den Schulraum, ein Kleidungsstück etc. anfertigen; Fabriken besuchen, Excursionen in die freie Natur machen, Physik lernen etc. Der Mathematiklehrer soll eben auf der Höhe der Beschäftigungen seiner Schüler sein und auch in nahem Kontakt mit den anderen Lehrern stehen um gemeinsam denselben Zweck anzustreben!

Nederland kende in de vijftiger jaren een actieve groep die zich bezig hield met het meetkundeonderwijs in het Middelbaar Onderwijs. Tot die groep behoorden onder andere T. Ehrenfest-Afanassjewa, H. Freudenthal, P.M. van Hiele en D. van Hiele-Geldorf. De proefschriften van de laatste twee gaan beide over de opbouw van inzicht. In het proefschrift van P.H. van Hiele (De problematiek van het inzicht, Muuses e.a., 1957) is dat niet tot meetkunde beperkt, maar wordt wel gewezen op het belang van de concrete eerste fase en uiteraard wordt in dat kader de genoemde Uebungensammlung aanbevolen.

Het proefschrift van D. van Hiele-Geldorf (De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O, Muuses e.a, 1957) heeft directer op de meetkunde betrekking. Er werden ook lessen in verslagen en daaruit blijkt dat in het begin veel met concreet materiaal wordt gewerkt. Er wordt een bouwplaat gemaakt van een kubus, de kubus komt ook als model van meccano de klas in en al vóór de eerste kerstvakantie hebben leerlingen een diagonaalvlak van de kubus gemaakt en de lengte van de lichaamsdiagonaal bepaald.

We zien hieruit dat het gebruik van materiaal toch sterk gericht is op het verkennen van een van de traditionele vormen van de meet-

kunde. Het gaat hier dan ook om een didactiek voor die traditionele meetkunde.

Genoemde personen waren ook betrokken bij de publikatie van 'Het Wiskunde-programma voor het V.H.M.O, een ontwerp van de Wiskunde Werkgroep van de W.V.O' (Muuses, Purmerend 1953). De tweeledigheid van de doelstellingen van de meetkunde is daar ook duidelijk in aangegeven, zoals uit het volgende fragment blijkt:

a. De meetkunde brengt ons de kennis bij met behulp waarvan we de eigenschappen der ruimte, waarin zich het gehele leven afspeelt, beter leren begrijpen en beheersen.
b. Bij geen der vakken heeft de leerling een zo goede gelegenheid om een logisch samenhangend systeem van wetenschap op te bouwen en om de mogelijkheid te leren waarderen, om in plaats van door experimenteren, door zuiver nadenken tot vermeerdering van kennis te komen.

Er zijn onder de opgaven uit de genoemde Uebungensammlung zaken die aanmerkelijk verder gaan, zoals aan het kleding-voorbeeld (opgave 170) al te zien was. Daar is het ruwweg schatten van hoeveelheden stof toch zeker niet alleen een voorbereiding op rekenen aan cilinders, maar waardevol op zich. Dit wordt echter niet expliciet zo gezegd in de inleiding op de Uebungensammlung.

Sinds de vijftiger jaren

In Nederland zijn er korte omschrijvingen van het officiële rijksleerplan met wettelijke kracht. Samen met de daarop geschreven methodes bepalen die het feitelijke onderwijs voor een zeer groot percentage. De nadere invulling van het leerplan wordt sterk gestuurd door de examens. Het officiële rijksleerplan is kort en voor velerlei uitleg vatbaar. Dat is de wet. Anderzijds is er de jurisprudentie in de vorm van de jaarlijkse eindexamens. Er is een wisselwerking tussen de methoden en de jurisprudentie. Het leerplan biedt veel ruimte voor die wisselwerking.

Een blik op de methodes die in de jaren vijftig in zwang waren, doet vermoeden dat lang niet iedereen van de didactische inzichten van de van Hieles overtuigd was. Daarbij komt dat de omschrijvingen van de examens geheel in wiskundige termen waren gevat, want daar ging het allemaal om.

Tot 1958 kende het officiële leerplan (van HBS-B) het vak Beschrijvende Meetkunde. Een in feite uit toepassingen ontwikkeld vak, waarin veel tekenwerk, constructies, uitslagen, projecties hun plaats hadden. Het ontaardde echter vaak in al te specifieke technieken. Het moest het veld ruimen voor Analytische Meetkunde; stereometrie

bleef, dat was ruimtemeetkunde op axiomatische grondslag.

De stereometrie levert bijvoorbeeld bewijzen dat twee evenwijdige vlakken door een derde vlak gesneden worden volgens evenwijdige lijnen.

De praktijk van het onderwijs zag natuurlijk allerlei modellen van hout en karton en er waren ook docenten die het klaslokaal gebruikten als raamwerk voor kruisende lijnen, waarbij het kortste verbindingslijnstuk geconstrueerd werd al struikelend over de denkbeeldige lijnen in het lokaal. Maar minstens zo vaak werd de boodschap uitgezonden dat dit toch niet echte precisie, puurheid en perfectie was.

Belangrijke omwentelingen vinden plaats in de periode 1965-1970. De hele wereld gaat over op wiskunde die ook in het onderwijs op het basisprincipe van de verzameling is gebaseerd. Voor de meetkunde wordt dat de gestructureerde verzameling van de vectorruimte. En tegelijk dringt in de vlakke meetkunde de benadering via de transformatiemeetkunde zich op. Een transformatie is in eerste instantie een afbeelding, verzamelingtheoretisch gezien. De afbeelding heeft speciale eigenschappen die met allerlei symmetrieën en gelijkvormigheid te maken hebben. De verzamelingtheoretische benadering is in extreme zin van Socrates' tweede soort, de puur wiskundige.

De invoering gaat vrij radicaal: discussie is er alleen in de allerhoogste kringen van de wiskundigen zelf, die waren het in het algemeen eens op vooral Freudenthal na. Er zijn voor de gewone man en vrouw in de klas wel cursussen en natuurlijk nieuwe methoden.

Terug naar W12-16

In 1967 wordt, op aandringen van Freudenthal, het IOWO opgericht. Voor de groep van en rond het IOWO wordt steeds duidelijker dat de verzamelingsbenadering misschien wel eenheid aan de wiskunde als wetenschap biedt, maar uitermate ongeschikt is voor het onderwijs. Wiskobas, de basisschoolgroep, kon nog juist grootschalige invoering van op verzamelingenleer gebaseerd reken/wiskundeonderwijs op de basisschool voorkomen.

Het programma in het lbo, mavo, havo en vwo ontsnapte helaas niet aan de vooruitgang die de New Math bood, en in het lbo en mavo was dat misschien nog het meest schrijnend, waar het programma in feite een verdunning van het vwo-programma was.
Wiskivon, de groep voor het Voortgezet Onderwijs van het IOWO koos voor het ontwikkelen van onderop, vanuit lbo en mavo eerst.

Omdat leerplannen voor die scholen rond de meetkunde nog de meeste flexibiliteit hadden, konden nieuwe inzichten op dat gebied eerst ontwikkeld worden. Sommige in W12-16 gebruikte pakketten (*Regelmatige figuren, Zie je Wel, Schaduw en Diepte*) stammen nog uit

die periode 1975-1980.

De periode 1980-1990 laat twee nieuwe ontwikkelingen zien. Ideeën die zeer verwant zijn aan die van Wiskivon duiken in allerlei methodes op en de algehele 'strengheid' van de verzamelingsgerichte benadering verdwijnt in veel gevallen bijna geheel ten gunste van voorbeelden met toepassingen van de geleerde wiskunde.

De andere ontwikkeling is dat de Hewetgroep, in feite een onderdeel van het in 1980 tot OW&OC verkleinde IOWO, de kans krijgt voor vwo-bovenbouw een leerplan te ontwikkelen, dat bij de ideeën van Wiskivon aansluit èn een goede voorbereiding biedt voor hbo en universiteit.

Dat herhaalt zich – zij het met beperkter middelen van staatswege – voor de havo-top in de Hawex. En dan blijft de rest over voor W12-16.

Waar staat W12-16?

Eigenlijk moet uit onze produkten – vooral de pakketten, het Trajectenboek en dit achtergrondenstuk – voldoende duidelijk blijken waar W12-16 in dit veld van afwisselende stromingen staat.

Er is ook een nieuwe beschrijving van het eindexamenprogramma lbo/mavo. Dat wordt de wet. We blijven nog betrokken bij de nieuw te maken examens.

Het spel van de wisselwerking tussen leerplan (Trajectenboek), examens, methoden, nieuwe inzichten en ideeën over de didactiek is natuurlijk allang aan de gang.

Wat niet verandert: de docent is en blijft bij het wiskundeonderwijs de spelbepaler.

INFORMATIEVERWERKING EN STATISTIEK

Waarom Informatieverwerking en Statistiek?

In het W12-16 project is een leerstoflijn Informatieverwerking en Statistiek ontwikkeld. Dit leerstofonderdeel is opgenomen omdat we de leerlingen, op hun eigen niveau, willen laten zien hoe wiskunde gebruikt wordt in een maatschappij, waar statistische gegevens en wiskundige modellen een belangrijke rol spelen bij het nemen van beslissingen. Een centrale plaats in deze leerstoflijn wordt ingenomen door *grafische representaties*. Uitgaande van een gangbare indeling naar deelgebieden van de wiskunde zijn de onderwerpen van I&S afkomstig uit de statistiek, kansrekening, grafentheorie en combinatoriek. In het oude programma is voor dit soort zaken vrijwel geen aandacht, afgezien van het onderdeel statistiek, dat echter een zeer bescheiden plaats inneemt.

Omdat het onderdeel Informatieverwerking en Statistiek grotendeels nieuw is, is een motivering voor dit nieuwe leerstofgebied hier op z'n plaats. Een aantal overwegingen heeft ertoe geleid I & S in het programma voor twaalf- tot zestienjarigen op te nemen. Die overwegingen staan niet los van elkaar, ze hebben allemaal te maken met onze samenleving die voortdurend aan verandering onderhevig is.

Maatschappelijke ontwikkelingen

De maatschappij waarin wij leven wordt wel getypeerd als 'informatiemaatschappij'. Zeker nu we de beschikking hebben over computers kunnen we enorme hoeveelheden gegevens opslaan, bewerken en verwerken. De kunst is, uit al die gegevens de gewenste informatie te halen. Gegevens worden met elkaar in verband gebracht om er conclusies uit te kunnen trekken. Statistische technieken en modelvorming spelen daarbij een belangrijke rol. Ze vormen de basis voor gewichtige beleidsbeslissingen waar je als burger mee wordt geconfronteerd. In de veranderende maatschappij is het adequaat kunnen omgaan met informatie belangrijk voor iedereen. Leerlingen van twaalf tot zestien jaar zullen dit op school moeten leren, opdat zij straks in de maatschappij hun weg weten te vinden.

Opkomst van informatica en discrete wiskunde

Door de opkomst van computers en de informatica hebben enkele takken van de wiskunde nieuwe toepassingsmogelijkheden gekregen. De wiskunde die voor informatici van belang is, is vooral de wiskunde van de discrete structuren. Zo wordt bij het ontwikkelen van algorit-

men voor planningsproblemen bijvoorbeeld grafentheorie gebruikt. Kennis van combinatoriek is nuttig om te bepalen hoeveel oplossingen er voor een bepaald probleem zijn en om na te gaan of het verstandig is alle oplossingen te proberen, als het er om gaat een optimale oplossing te vinden. De getaltheorie heeft een lange geschiedenis en is tegenwoordig maatschappelijk bijzonder relevant. Ze speelt een belangrijke rol in de cryptografie en de coderingstheorie. De grafentheorie, combinatoriek en getaltheorie worden tot de discrete wiskunde gerekend.

Verbreding van inhoud van het schoolprogramma voor wiskunde

Het ligt voor de hand het wiskundecurriculum te verbreden met wiskundeonderwerpen die maatschappelijk relevant zijn. Dat zijn elementen uit de discrete wiskunde, en uiteraard ook statistiek. Een leerplan met alleen de 'traditionele onderwerpen' algebra en meetkunde, zou in de huidige tijd eenzijdig zijn.

Elders zijn dezelfde ontwikkelingen gaande

- In de cito-toets voor het basisonderwijs kent men het onderdeel 'informatieverwerking'.
- Op havo/vwo kennen we wiskunde A en B. Typische wiskunde A onderwerpen zijn matrices, grafen, kansrekening en statistiek. Zeg maar de meer maatschappelijke wiskundeonderwerpen. Overigens kunnen, wat het niveau betreft, sommige onderwerpen uit wiskunde A beter in de onderbouw dan in de bovenbouw gedaan worden. Tot nu toe startten die onderwerpen noodgedwongen in de bovenbouw, omdat wiskunde A daar pas begon. Binnen afzienbare tijd wordt Dynamische Simulaties waarschijnlijk keuze-onderwerp van wiskunde A op het vwo. Daarmee wordt het aspect van wiskundige modelvorming binnen wiskunde A versterkt. Bij het modelleerproces worden grafen als hulpmiddel gebruikt.
- In het mbo zijn richtingen als 'logistiek' en 'distributie' in opkomst. Bij de daar gehanteerde planningstechnieken wordt veel gewerkt met grafen en netwerken.
- In het buitenland krijgen deze onderwerpen ook een plek in het programma. Dat blijkt bijvoorbeeld uit materiaal van de Spode Group (Engeland)[1] en Comap (USA)[2].

Algemene doelen van wiskundeonderwijs

Het wiskundeonderwijs dat leidt tot het eindexamen lbo en mavo heeft een algemeen vormend karakter en is gericht op het gebruik van wiskunde in de maatschappij. Het gros van de leerlingen heeft baat bij wiskunde in de breedte, in plaats van een sterk hiërarchisch opgebouwd programma waarbij je als leerling makkelijk voor de rest van je schoolcarrière kunt afhaken. Het leerstofgebied I&S is bij uit-

stek geschikt om bij te dragen aan de algemene doelstellingen van wiskundeonderwijs zoals die geformuleerd zijn in de kerndoelen voor de basisvorming.

We citeren de eerste algemene doelstelling: 'Een wiskundige werkhouding ontwikkelen, waarbij systematisch werken, generaliseren, kritisch beoordelen van gegevens en uitkomsten en het creatief bedenken van oplossingen aan de orde komen.' Bij I&S zijn de algemene doelen zeker net zo belangrijk als de specifieke kennisdoelen.

Conclusie

De bovenstaande overwegingen maken duidelijk waarom I&S in het nieuwe leerplan is opgenomen. We vatten het nog eens kort samen: In de wereld om ons heen speelt Statistiek en Informatieverwerking een belangrijke rol. Elke burger krijgt ermee te maken. Daarom is in het nieuwe leerplan voor 12- tot 16-jarigen, dat weer een heel aantal jaren mee moet kunnen, plaats voor Informatieverwerking en Statistiek. Het leerstofgebied draagt bij aan een breed en evenwichtig programma voor iedereen. Met betrekking tot de doorstroming naar de bovenbouw van havo en vwo kan opgemerkt worden dat de nogal onnatuurlijke situatie van dit moment, de late start in de bovenbouw van sommige onderwerpen uit wiskunde A, zal verdwijnen. Bovendien krijgen leerlingen die later alleen wiskunde B gaan doen, in het nieuwe programma ook een bredere wiskundige basis.

Centrale activiteiten van I&S

In deze paragraaf gaan we nader in op de centrale activiteiten van Informatieverwerking en Statistiek. Dat zijn:

- informatie halen uit complexe voorstellingen
- modelvorming
- redeneren.

Ze worden hieronder nader uitgewerkt. In het volgende hoofdstuk wordt de inhoud dan meer in detail besproken.

Informatie halen uit complexe voorstellingen

Centraal in de leerstoflijn staat het aanbieden van verschillende (grafische) representaties met verschillende mate van complexiteit. Leerlingen moeten leren om de relevante informatie te halen uit op het eerste gezicht wellicht ingewikkelde of onoverzichtelijke voorstellingsvormen. Dat kunnen kaarten zijn of grafieken (bijvoorbeeld meer grafieken in één figuur die bovendien zijn voorzien van de nodige 'franje'), diagrammen of schema's. Om de relevante informatie uit een voorstelling te halen, is het nodig te durven vaststellen wat 'ruis' is en wat niet. Met andere woorden: wat zijn hoofd- en bijzaken als het om grafische voorstellingen gaat? Een ander aspect is het omvormen van

voorstellingswijzen in een andere. Tussen de verschillende representaties kan heen en weer gesprongen worden. Zo ontstaan vertaalactiviteiten op het gebied van de informatieverwerking.

Modelvorming

Een tweede activiteit naast het halen van informatie uit complexe voorstellingen, is het zoeken naar structuur of wiskundig model. Een model is een bepaalde weergave van de werkelijkheid, die gemaakt is met het oog op het vergroten van het inzicht in die werkelijkheid: hoofdzaken worden benadrukt, details weggelaten. Bij modelvorming gaat het vooral om verschralen, de reductie van werkelijkheid tot schematisch model, het weglaten van onbelangrijke aspecten van de context.

Wat belangrijk genoeg is om in het model op te nemen en wat weggelaten kan worden, zal niet voor iedereen hetzelfde zijn. De conclusies die uit een bepaald model volgen, zullen dan ook niet iedereen overtuigen. Je kunt van mening zijn dat het essentiële factoren waren, die verwaarloosd zijn. In de discussie over de grenzen aan de groei, die de Club van Rome op gang bracht, speelde ook mee of hun model van de wereld wel klopte.

Een ander voorbeeld: eendekroos groeit zeer snel. Onder gunstige omstandigheden verdubbelt de hoeveelheid elke 48 uur. Ervan uitgaande dat er in een vijver één vierkante meter kroos aanwezig is op tijdstip 0, kan dan uitgerekend worden hoeveel kroos er in de vijver is na 30 dagen.

Dit model is wel erg ruw. In werkelijkheid zal de groei niet exponentieel verlopen. Na verloop van tijd is er te weinig voedsel voor een ongeremde groei. Er is een maximale hoeveelheid kroos (M) die de vijver kan bevatten. Op grond van zulke overwegingen kunnen we het model bijstellen. Een redelijke aanname blijkt te zijn om de groei evenredig te nemen met de hoeveelheid kroos (K) en ook met de factor (M-K)/M, die aangeeft in welke mate de vijver nog niet gevuld is. Toegepast op de groei van de wereldbevolking: het eerste model, dat uitging van exponentiële groei, is bekend geworden als het model van Malthus. Het tweede model, dat uitgaat van geremde groei, is opgesteld door Verhulst.

Het werken met modellen en schema's is een belangrijk doel van I&S. Het komt vooral aan de orde bij het deelgebied 'Kaarten, grafen en tabellen'.

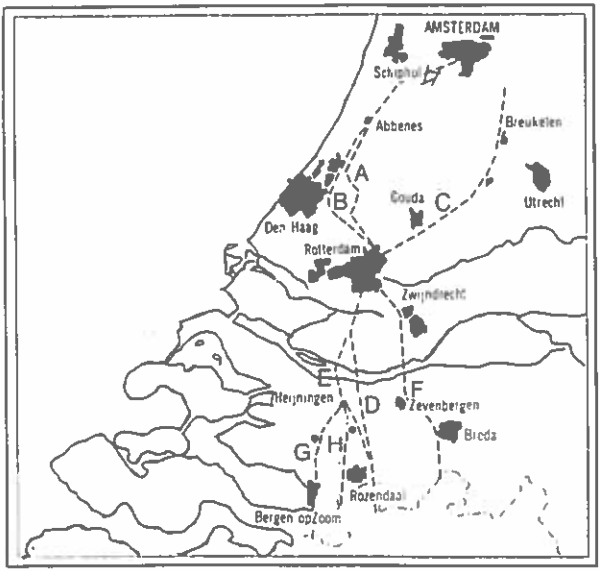
Redeneren

Wanneer de complexe werkelijkheid in kaart is gebracht en gereduceerd tot een bepaald model of een zekere structuur, komt redeneren over die werkelijkheid binnen handbereik. Het redeneren kan plaats

vinden binnen het model ('volgens het model groeit de bevolking steeds harder') of buiten het model ('de beschikbaarheid van voedsel is vergeten, het model kan niet kloppen'). Een aantal onderwerpen binnen I&S leent zich uitstekend voor redeneeractiviteiten, bijvoorbeeld systematisch tellen. Daar zit de moeilijkheid niet zozeer in het weglaten van ruis, het verschralen van de context, maar meer in het 'vertalen' van het probleem naar een geschikte telstructuur en het redeneren daarover.

Voorbeeld - Hogesnelheidstreinen

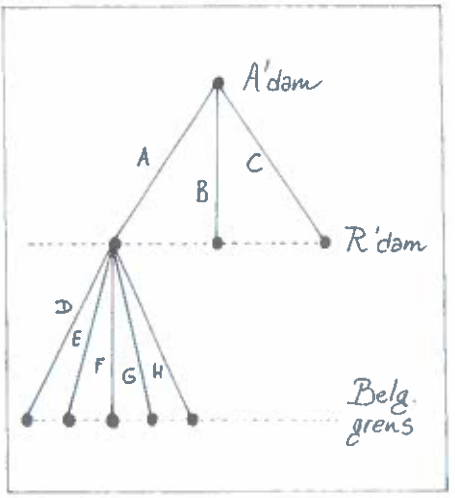
Een voorbeeld waarin we de drie aspecten van I&S terugvinden is het volgende stukje uit de krant. Het stukje gaat over mogelijke tracés voor de hogesnelheidstrein, waar de Nederlandse overheid een beslissing over moet nemen.



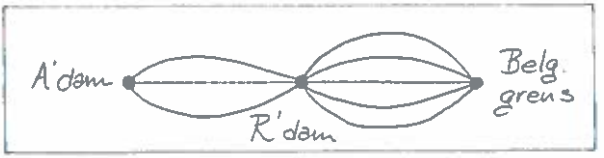
Traces noordelijk deel
Trace A: Amsterdam, Schiphol, Hoofddorp, Abbenes, richting Leiderdorp, Leiden, Hazerswoude, Benthuizen, boven Hillegersberg naar Rotterdam.
Trace B: volgt trace A tot Abbenes, daarna richting Voorschoten, Leidschendam, rechts van Voorburg naar Hillegersberg en Rotterdam.
Trace C: is eigenlijk niet interessant omdat het Schiphol links laat liggen. Zal niet serieus meetellen. Loopt van Rotterdam, onder Gouda, naar Woerden, Harmelen, Breukelen.
Traces zuidelijk deel
Trace D: Rotterdam, Willemspoortunnel, Heinenoord, Hollands Diep, richting Stampersgat, Roosendaal.
Trace E: Rotterdam, Heinenoord, Hellegat, Heijningen, dan naar rechts bij Oud-Gastel, zie aansluiting D.
Trace F: Rotterdam, Barendrecht, Zwijndrecht, Hollands Diep, Zevenbergen, Breda.
Trace G: volgt trace E tot Heijningen, links naar Steenbergen, Bergen op Zoom.
Trace H: volgt trace E tot Heijningen, links van Stampersgat naar Roosendaal.

Wat betekenen de letters? Volgt uit het feit dat er acht letters nodig waren om tracés aan te duiden ook dat de regering kan kiezen uit acht verschillende mogelijkheden? De praktijk wijst uit dat het geen vanzelfsprekende zaak is dat leerlingen dit soort kaarten kritisch kunnen lezen. Tegelijk kunnen we vaststellen dat je deze vaardigheid moet bezitten, wil je bijvoorbeeld kunnen meepraten over deze voorstellen. De vraag naar het aantal mogelijke spoorlijnen kan beant-

woord worden door alle mogelijke routes netjes en systematisch op te schrijven. Een mogelijke route is dan langs AF, de route dus van Amsterdam, via Breukelen naar Rotterdam en dan verder via Breda naar België. Deze vraag kan beter beantwoord worden als de kaart wat verder verschraald wordt. Onderstaand boomdiagram, een speciaal soort graaf, laat dat zien.



Uit het plaatje is snel af te lezen dat er 15 verschillende routes zijn. Het redeneeraspect komt nog duidelijker naar voren als de situatie wordt weergegeven als in onderstaand wegendiagram.



De hier besproken activiteiten vormen het hart van I&S. Alvorens vanuit deze achtergrond de inhoud van het leerstofgebied in detail te bespreken, gaan we in de volgende paragraaf eerst nog wat dieper in op het verwerken van informatie.

Niveaus in het verwerken van informatie

Het halen van informatie uit complexe voorstellingen is een belangrijk doel van I&S. Leerlingen kunnen dit niet zo maar, het is een vaardigheid die geleerd moet worden. In de leerstof zal dus ook op dit punt een zekere opbouw moeten zitten. Met het oog hierop noemen we in deze paragraaf enkele typen vraagstellingen, min of meer geordend naar oplopende moeilijkheidsgraad.

- Eenvoudige afleesvragen
  Het kunnen lezen van een kaart, tabel, grafiek of schema is een eerste vereiste om tot enige vorm van informatieverwerking te komen. *Afleesvragen* zijn bedoeld om dit te oefenen. Afleesvragen kunnen eenvoudig zijn en slechts bedoeld om 'in de stemming van de context te komen'. Maar lastiger afleesvragen zijn ook mogelijk. Bijvoorbeeld als door de veelheid van aangeboden gegevens de gevraagde informatie moeilijk te vinden is.
- Gegevens met elkaar combineren
  Door gegevens met elkaar te combineren kan nieuwe informatie tot stand komen. De verschillende gegevens kunnen uit één representatie afkomstig zijn, of uit verschillende. In het laatste geval kan het zijn dat gegevens niet direct vergelijkbaar zijn, bijvoorbeeld omdat er met verschillende eenheden of omschrijvingen van begrippen gewerkt wordt.
- Bij een gegeven representatie een andere maken
  Het ligt voor de hand bij een tabel een grafiek te maken. Zo'n opdracht kan meer of minder gesloten/gestructureerd worden aangeboden. Om leerlingen er van bewust te maken dat er bij het maken van een grafische voorstelling allerlei keuzes gemaakt moeten worden (welk type grafiek, wat komt er bij de assen als die er zijn, indeling van de assen), is het zaak dergelijke opdrachten met een zekere regelmaat vrij open te formuleren.
- Uitspraken onderbouwen of verwerpen
  Het ontwikkelen van een kritische houding en leren redeneren kan geoefend worden door leerlingen uitspraken voor te leggen die onderbouwd dan wel verworpen kunnen worden, op grond van de aangeboden gegevens. Ook het zelf formuleren van uitspraken en conclusies is een goede oefening in redeneren en verbaliseren.
- Eigen kennis van de wereld confronteren met gegevens of model
  Contexten moeten een zekere mate van herkenbaarheid hebben voor leerlingen. Als kennis van het verschijnsel redelijkerwijs verondersteld kan worden, is het een goede zaak daar in onderwijs ook gebruik van te maken. Eigen kennis van leerlingen kan aangewend worden om de 'schrale' gegevens uit een tabel of grafiek te 'verrijken'. In een schoolse situatie kunnen leerlingen met kennis van zaken over een stukje werkelijkheid in eerste instantie overigens ook wel eens in

het nadeel zijn. Die kennis kan bij het maken van opgaven ruis veroorzaken en daarmee blokkerend werken.

Voorbeeld - Tijdsbesteding

Naast kaarten en schema's zijn tabellen bij uitstek een rijke bron voor informatieverwerking. De hiervoor genoemde aspecten van het omgaan met informatie zijn in meerdere of mindere mate terug te vinden in het volgende voorbeeld over tabellen, afkomstig uit het W12-16 pakket 'Statistiek'.

In het Statistisch Zakboek van het CBS staan behalve grafieken ook veel tabellen. Een tabel over de tijdsbesteding van Nederlanders per week:

1 Gemiddelde tijdsbesteding per week van personen van 12 jaar en ouder, oktober 1985

	participanten			duur[1]		
	mannen	vrouwen	totaal	mannen	vrouwen	totaal
	%			uren:minuten		
Persoonlijke behoeften (eten, slapen e.d.)	100	100	100	74:11	76:28	75:27
Verzorging van kinderen	30	47	39	4:15	8:53	7:17
Huishoudelijk werk	89	99	94	7:13	24:02	16:57
Boodschappen	83	96	90	2:36	4:00	3:26
Klussen en karweitjes	68	46	56	4:51	2:31	3:48
Betaald werk	66	38	50	35:58	20:31	29:35
Onderwijs en vorming	40	41	41	16:42	13:34	14:57
Participatie en hulpverlening	43	57	51	4:26	3:41	3:58
Sport, hobby en spel	75	73	74	6:54	4:29	5:35
Mediagebruik	100	100	100	20:16	16:05	17:58
Uitgaan	78	75	77	5:04	4:01	4:30
Sociale relaties	96	99	97	10:13	12:34	11:32
Reizen	98	98	98	8:01	7:05	7:30
Steekproefaantal (abs.)	1 847	2 277	4 125			

[1] Gemiddelde tijdsbesteding van personen die de activiteit hebben verricht (participanten).

Als je een tabel tegenkomt, is het belangrijk om te kijken wat de getallen in de tabel voorstellen. Je kunt een tabel immers alleen gebruiken als je hem ook begrijpt!

- *In de eerste kolom staat onder andere het getal 83. Wat betekent dit getal?*
- *Op sommige plaatsen staat het getal 100. Wat wil dit zeggen?*
- *Wat betekent het getal 29:35 in de laatste kolom?*
- *Hoeveel uur per dag besteden we gemiddeld aan 'persoonlijke behoeften'?*
- *Bij welke activiteiten vind je grote verschillen in tijdsbesteding tussen mannen en vrouwen?*
  Noem ook een paar activiteiten waarbij er géén verschillen zijn.

Een andere tabel over de tijdsbesteding van mensen:

	student/scholier	huisvrouw	'senior'	werknemer	tweeverdieners
Persoonlijke verzorging	11:17	11:00	11:41	10:15	10:05
Kinderverzorging	0:04	0:55	0:04	0:17	0:01
Huishoudelijk werk	0:35	4:25	2:47	1:35	1:06
Boodschappen doen	0:14	0:37	0:29	0:22	0:19
Betaald werk	0:20	0:07	0:09	4:36	5:27
Onderwijs, vorming	4:47	0:07	0:06	0:13	0:11
Reizen	1:15	0:52	0:47	1:08	1:09
Vrije tijd	5:28	5:57	7:57	5:34	5:42

- *Vergelijk de twee tabellen met elkaar en noem een paar verschillen.*
- *Bedenk een vraag die je alléén met de eerste tabel kunt beantwoorden. Bedenk ook een vraag die je alléén met de tweede tabel kunt beantwoorden.*
- *Tabellen kun je vaak verduidelijken door er een grafiek bij te maken. Als je een grafiek zou moeten maken bij de kolom 'student/scholier' uit de tweede tabel, welk type grafiek zou je dan kiezen: lijngrafiek, cirkeldiagram, staafdiagram of nog iets anders?*

Keuze van contexten

Bij I&S is de concrete werkelijkheid makkelijk voorhanden. Het realiteitsgehalte van de contexten is hoog en de maatschappelijke relevantie in veel gevallen ook. Een aantal contexten voldoen aan wat je het *principe van de permanente actualiteit* zou kunnen noemen. Daarmee bedoelen we toepassingssituaties die met een zekere regelmaat in het nieuws zijn, zoals bevolkingsgroei en openbaar vervoer. Kranten en tijdschriften leveren een continue stroom van artikelen die als bron voor wiskundeonderwijs kunnen dienen. Voorbeelden in schoolboeken zullen misschien vrij snel verouderen, maar daar staat tegenover dat ze makkelijk ingewisseld kunnen worden voor iets recenters. Een bekende bron die aan het principe van de permanente actualiteit voldoet, is ook het Statistisch Zakboek, dat jaarlijks door het CBS wordt uitgegeven. In de boekenkast van de wiskundesectie of in het wiskundewerklokaal hoort een niet al te oud exemplaar van dit boekwerk aanwezig te zijn.

Voor de context van het *openbaar vervoer* pleit, naast de eigenschap van permanente actualiteit, dat het kunnen lezen van dienstregelingen en uitstippelen van routes en dergelijke onontbeerlijk is om je in de maatschappij te kunnen handhaven. Als het leren van dit soort vaardigheden gecombineerd kan worden met wiskundeonder-

wijs, is dat mooi meegenomen. Zo'n dubbele doelstelling treffen we ook aan bij wat we *consumentenstatistiek* zouden willen noemen. Enerzijds zijn de tabellen en grafieken die bijvoorbeeld in de Consumentengids staan voorbeelden van contexten met een hoog realiteitsgehalte waar genoeg wiskundige activiteiten rond te bedrijven zijn, anderzijds is het ook echt nuttig voor later om juist deze informatie te leren hanteren.

Voorbeeld - Consumentenstatistiek

Bij een test over Lekkerbekjes staat in de Consumentengids de volgende tabel:

LEKKERBEKJES

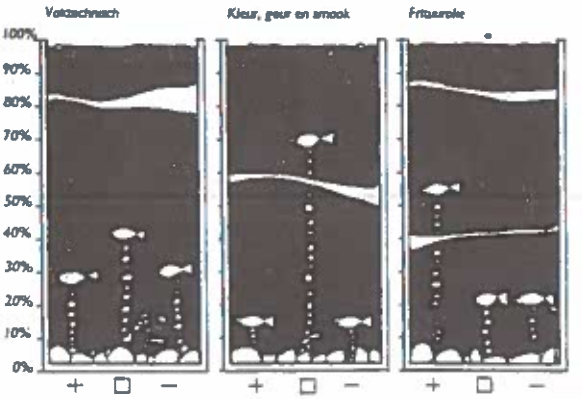
VERKOOPPUNT	GEWICHT PER STUK (G) LAAGSTE-GEM.-HOOGSTE	PRIJS PER STUK (F) LAAGSTE-GEM.-HOOGSTE	GOED-REDELIJK-SLECHT	KLEUR, GEUR EN SMAAK GOED-REDELIJK-SLECHT	FRITUURVOLGE GOED-REDELIJK-SLECHT	AANTAL OPMERKINGEN
OP 14 MARKTEN	65-115-232	14,20-18,20-24,20	2- 4- 8	2-10-2	8-4-2	0
BIJ 8 VISKARREN [1]	86-146-272	13,80-18,20-24,50	2- 6- 0	0- 5-3	4-2-2	0
IN 18 VISWINKELS [2]	47-121-214	15,00-18,70-26,80	7- 7- 4	4-13-1	10-3-5	3
40 VERKOOPPUNTEN	47-125-272	13,80-18,40-26,80	11-17-12	6-28-6	22-9-9	3

1 inclusief viskiosken 2 inclusief supermarkten

CONSUMENTENGIDS APRIL 1989

In de tabel staan steeds rijtjes van drie getallen. Het drietal 65-115-232 moet echter heel anders gelezen worden dan bijvoorbeeld het drietal 2-4-8. In het eerste geval gaat het om respectievelijk laagste, gemiddelde en hoogste waarnemingsuitkomst. In het tweede geval stellen de getallen frequenties voor, ingedeeld naar de categorieën goed-redelijk-slecht. Dat moet je als lezer dus allemaal maar begrijpen! Bij tabel staat verder nog de volgende figuur, zonder nadere toelichting:

De kwaliteit van lekkerbekjes, in procenten.

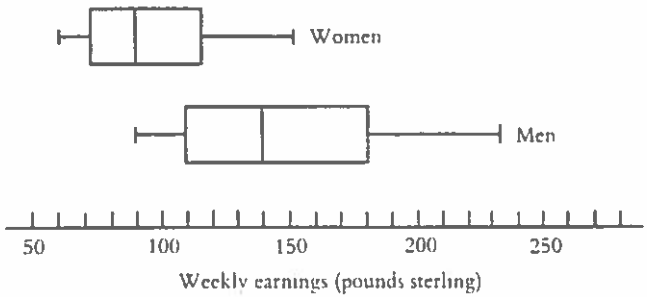


Na enig gepuzzel ontdek je dat elke viskom in feite een staafdiagram is, waarbij een visje de hoogte van een staaf voorstelt. De eerste viskom hoort bij de frequentieverdeling van 'vaktechnisch' voor alle verkooppunten samen. De frequenties (goed: 11; redelijk: 17; slecht: 12; totaal: 40) zijn omgezet in procenten.

In de statistiek wordt vaak gewerkt met groepsindelingen. Als het over mensen gaat, is een veel voorkomende groepsindeling die naar sexe. De statistiek maakt daardoor verschillen tussen jongens/meisjes en mannen/vrouwen zichtbaar. Als er opvallende verschillen naar voren komen, kan een bepaalde tabel of grafiek eventueel de aanleiding zijn om meer in algemene zin eens stil te staan bij de verschillen tussen jongens en meisjes en de oorzaken daarvan.

Voorbeeld - Salarissen

De inkomens van werkende mannen en vrouwen in Engeland, weergegeven in twee boxplots:



Een afleesvraag is bijvoorbeeld:
Hoeveel pond per week verdient een Engelse vrouw maximaal?

Iets ingewikkelder, vooral vanwege de taal, is de vraag:
Vrijwel alle mannen verdienen meer dan de 50% laagst betaalde vrouwen. Klopt deze uitspraak met de boxplot?

Aanleiding voor discussie is deze opgave:
Hieronder staan drie beweringen. Geef op elke bewering commentaar, uitgaande van de gegeven boxplots.
Bewering A: 'alle vrouwen verdienen in Engeland minder dan de mannen'.
Bewering B: 'vrouwen verdienen in Engeland in het algemeen minder dan mannen'.
Bewering C: 'vrouwen worden slechter betaald dan mannen'.

Contexten worden vaak bekeken op de mate waarin ze aansluiten bij de belevingswereld van de leerlingen. In het bovenstaande hebben we vooral bepleit om contexten te nemen die een zekere maatschappelijke relevantie hebben. Dat zijn immers vooral de situaties waar de leerlingen later mee te maken zullen krijgen, of die bijdragen tot 'goed burgerschap'. Daarmee willen we de contexten die dichter bij huis liggen, zeker niet uitsluiten. Naarmate de leerlingen ouder worden, zal er echter een verschuiving kunnen optreden van leerling-nabije contexten naar meer afstandelijke contexten. In de keuze van contexten zullen ook niveauverschillen te herkennen zijn. C/D leerlingen zullen zich misschien eerder willen inleven in algemeen maatschappelijke zaken dan A/B leerlingen.

Dwarsverbanden met andere leerstofgebieden

Er zijn dwarsverbanden tussen I&S en de andere leerstofgebieden, vooral rekenen en algebra. Een goed getalbegrip en praktische rekenvaardigheid zijn voor het bedrijven van statistiek onontbeerlijk. Decimale getallen en procenten komen in de statistiek bijvoorbeeld erg veel voor. Aan de andere kant hoeft een leerling ook weer niet feilloos te kunnen rekenen voor I&S. Het niet kunnen maken van een typische procentensom als 'de prijs na 10% korting bedraagt ƒ 15,- ; wat was de prijs oorspronkelijk?' is weliswaar vervelend, maar voor I&S geen bezwaar. Bij toegepast rekenen liggen contexten die ook tot I&S gerekend kunnen worden, vaak voor de hand. Het gaat dan bijvoorbeeld om het rekenen naar aanleiding van tabellen.

De verbanden met algebra liggen vooral op het gebied van tabellen en grafieken. Bij algebra ligt de nadruk op het expliciet opsporen van een verband, al dan niet te beschrijven door een wiskundige formule. Het startpunt daarvoor, een tabel of grafiek met een serie meetwaarden, kan echter in veel gevallen net zo goed tot I&S gerekend worden. In hoofdstuk 3 van band 1, dat gewijd is aan de wiskundige gereedschappen bij de algebra, wordt uitvoerig ingegaan op tabellen.

INHOUDSBESCHRIJVING VAN I&S

In het vorige hoofdstuk hebben we in globale lijnen doel en methode van Informatieverwerking en Statistiek besproken. In dit hoofdstuk geven we een nadere uitwerking van de inhoud. We hanteren daarbij de volgende indeling:

- kaarten, grafen en tabellen
- systematisch tellen
- beschrijvende statistiek.

Deze driedeling wil niet zeggen dat de gebieden strikt gescheiden zijn. Boomdiagrammen bijvoorbeeld horen zowel bij het eerste als bij het tweede deelgebied. Een kaart met migratiestromen hoort zowel bij het eerste als het derde deelgebied.

In het Trajectenboek is aangegeven hoe de uitlijning over de verschillende leerjaren eruitziet en welke accenten er voor de verschillende niveaus gelegd moeten worden.

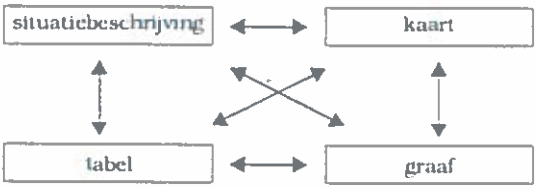
Omwille van de overzichtelijkheid komen de drie genoemde gebieden hier gescheiden en na elkaar aan de orde. In het leerplan horen de deelgebieden echter naast elkaar en met elkaar vervlochten aan bod te komen.

Het te ontwikkelen arsenaal aan wiskundig-technische gereedschappen is bij I&S tamelijk beperkt en vraagt geen strak hiërarchische opbouw. In de sequentie van de leerstof zit daardoor nogal wat vrijheid, een strakke uitlijning is van minder belang dan wellicht bij andere leerstofgebieden het geval is.

Kaarten, grafen en tabellen

Een eerste doel is het leren lezen van informatie die op bijzondere wijze wordt gepresenteerd. Mogelijke startpunten zijn: een situatiebeschrijving, een kaart, een of ander diagram of schema. Ook het combineren van informatie uit verschillende bronnen is belangrijk. De graaf is een speciale manier om informatie weer te geven. Het is een krachtig hulpmiddel om structuur in informatie aan te brengen en relaties tussen objecten zichtbaar te maken. Vandaar de aandacht voor het interpreteren en het tekenen van grafen. Een ander beschrijvingsmiddel dat centraal staat is de tabel. Bij een graaf hoort vaak een tabel, en omgekeerd. Zodoende ontstaan er allerlei vertaalactivi-

teiten:

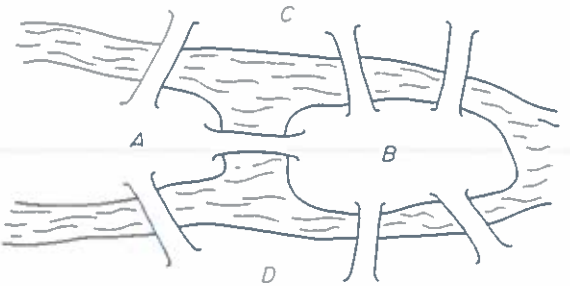


Eigenschappen van grafen

De leerlingen krijgen geen abstract-theoretische beschouwingen over de graaf aangeboden. Dat neemt niet weg dat er wel enkele eigenschappen van grafen aan bod komen. Enkele voorbeelden zijn:

- Wanneer zijn twee grafen aan elkaar gelijk?
- Hoeveel verbindingen zijn er als in een graaf met n punten alle punten met elkaar verbonden worden? (alleen in een concreet geval, bijvoorbeeld bij een toernooigraaf met zes deelnemers).
- Wanneer is in een graaf een rondwandeling (daarbij zijn begin- en eindpunt hetzelfde punt) mogelijk waarbij je alle verbindingen precies één keer gebruikt?

Het Koningsbergerbruggenprobleem wordt over het algemeen gezien als een start voor de ontwikkeling van de grafentheorie. Het probleem werd in de zeventiende eeuw geformuleerd en luidt als volgt: Het stadje Koningsbergen (tegenwoordig Kalingrad) in Oost-Pruisen werd door de rivier de Pregel in vier stukken gedeeld, die met elkaar verbonden waren door zeven bruggen. De bewoners vroegen zich af of het mogelijk zou zijn een wandeling te maken zodanig dat iedere brug precies eenmaal werd gebruikt. Omdat hun pogingen steeds faalden, geloofden zij dat een dergelijke wandeling niet mogelijk was.



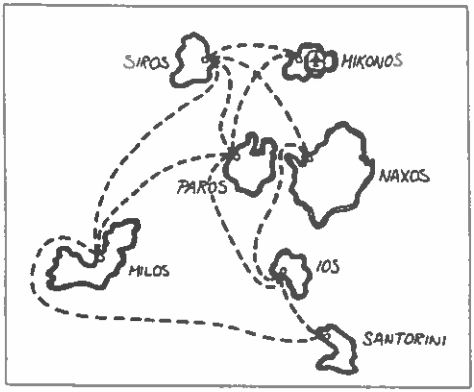
In 1736 werd het Koningsbergerbruggenprobleem door Euler (1707-1783) vanuit een wiskundige invalshoek benaderd. Euler bewees toen dat een dergelijke wandeling inderdaad niet mogelijk was.

Grafen en tabellen

Het verband tussen grafen en tabellen kan, afhankelijk van de situatie, op veel manieren gelegd worden. Het gaat daarbij steeds om tabellen met twee ingangen. Als er getallen bij de verbindingen staan die afstanden voorstellen, is er een afstandstabel te maken bij de graaf. Maar ook bij ongewogen grafen zijn tabellen mogelijk. Soms is een verbindingstabel (0 = geen verbinding; 1 = wel verbinding) zinvol, of een directe wegentabel (in dat geval geven de getallen in de tabel het aantal verbindingen tussen twee plaatsen aan).

Voorbeeld - Griekse eilanden

In sommige gevallen is de lengte van de verbinding of het aantal verbindingen tussen twee plaatsen niet van belang. Bij de rondreis langs de Griekse eilanden is het alleen belangrijk te weten of er wel of geen bootverbinding tussen twee eilanden is.



In dit soort gevallen kun je een zogenaamde verbindingstabel maken. In zo'n verbindingstabel geef je met een '1' aan dat er wel een verbinding is en met een '0' dat er geen verbinding is tussen twee eilanden.

Door ook te werken met tabellen, wordt het arsenaal aan vertaalactiviteiten uitgebreid. Bovendien vormen tabellen een zinvolle aanzet tot het werken met matrices dat in de bovenbouw van havo en vwo aan de orde komt.

Wat overwogen is maar weer verworpen

Bij de ontwikkeling van deze leerstoflijn zijn enkele ideeën naar voren gekomen die later toch weer zijn verworpen[3]. Zo leefde de gedachte om iets aan algoritmiek te doen. Dit is een maatschappelijk relevant onderwerp, zeker vanwege de toenemende automatisering. Een paradigmatisch voorbeeld meenden wij te vinden in het Handelsreizigersprobleem dat ingaat op de vraag wat de kortste rondreis langs een aantal plaatsen is. De kortste rondreis is in principe te vinden door alle mogelijkheden te proberen, maar bij een toenemend aantal steden neemt het aantal mogelijkheden dermate snel toe, dat deze methode in de praktijk al gauw niet meer uitoverbaar is. Er zijn echter wel diverse algoritmen die door een computer uitgevoerd kunnen worden en voor de praktijk een bruikbare oplossing leveren. Hiermee zou ook een aardig stukje computergebruik gerealiseerd kunnen worden.

Het idee om iets aan algoritmiek te doen leek bij nader inzien echter te ambitieus. Verder is het handelsreizigersprobleem nogal specifiek en computergebruik is in de dagelijkse schoolpraktijk lastig te verwezenlijken. Al met al hebben we deze ideeën bij nader inzien weer laten varen.

Toepassingsgebieden

We kunnen bij Kaarten, Grafen en Tabellen een aantal toepassingsgebieden onderscheiden. Enkele voor de hand liggende terreinen, waaraan veel contexten in het leerlingenmateriaal ontleend zijn, worden hieronder besproken. De door ons gemaakte keuze zal echter zeker niet de enig mogelijke zijn.

Verkeer en vervoer

Waarschijnlijk het meest voor de hand liggen de contexten op het gebied van verkeer en vervoer. Daar wordt vaak gewerkt met min of meer geschematiseerde kaartjes. Denk bijvoorbeeld aan de kaart van Nederland met het spoorwegennet die op elk station hangt. De ligging van punten en verbindingen is niet meer geheel overeenkomstig de werkelijkheid, maar geeft toch nog een redelijk beeld van de echte situatie. Kaart en graaf liggen dicht bij elkaar en het maken van een graaf bij een kaart is slechts een kleine stap.

Het op deze wijze 'vervormen' van de werkelijkheid is niet altijd zo vanzelfsprekend geweest als het tegenwoordig lijkt. Het idee is voor het eerst op grote schaal toegepast bij het ontwerpen van kaarten voor de Londense Underground. De ontwerpers tekenden de stations in de voorsteden in verhouding veel te dicht bij elkaar, en daarmee te dicht bij het centrum. De mensen moesten daar in het begin erg aan wennen. Het psychologische effect was, dat mensen in de voorsteden het gevoel hadden ook bij de stad te

horen. Tegenwoordig is het zo, dat het beeld dat mensen van Londen heb ben, voornamelijk bepaald is door het undergroundkaartje.

Vanwege de makkelijke voorstelbaarheid en hun maatschappelijke relevantie voor iedereen, nemen de toepassingen over verkeer en vervoer bij I&S een belangrijke plaats in. Het werken met tabellen (bijvoorbeeld voor afstand of prijs) is vanzelfsprekend en via eenrichtingsverkeer is het eenvoudig om gerichte grafen te introduceren.

Voorbeeld - NS reisplanner

Voorafgegaan is een serie opdrachten rond de NS reisplanner, een soort spoorboekje op de computer.

De heer Kuiper uit Zwolle moet naar Eindhoven. Hij heeft een bijzonder kaartje gekregen. Op dat kaartje staat de reisduur aangegeven van en naar Eindhoven, vanuit de belangrijkste stations van Nederland.

- *De reisduur van Utrecht naar Eindhoven is volgens het kaartje 53 minuten. Hoe lang duurt volgens het kaartje de reis Zwolle - Eindhoven?*
- *Meneer Kuiper beweert dat volgens het kaartje de reisduur van*

Groningen naar Maastricht gelijk is aan 4 uur en 13 minuten. Hoe komt hij daaraan? Controleer deze reisduur met de Reisplanner.

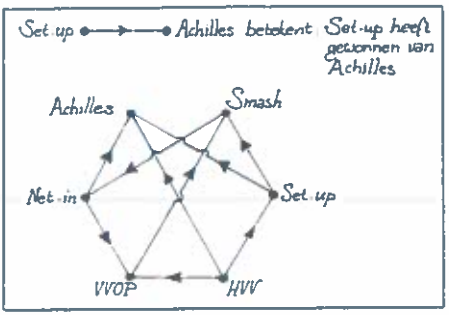
- *De reisduur van Amsterdam naar Zwolle is met dit kaartje slechts ruw te schatten.*
  Maak een schatting hoe lang deze reis duurt. Hoe lang duurt de reis volgens de Reisplanner? Verklaar het verschil.
- *Maak met behulp van de Reisplanner zo'n 'Reisduur-kaartje' voor een NS-station bij jou in de buurt.*

Grafen en mensen

In het W12-16 lesmateriaal hebben we de keuze gemaakt om grafen te introduceren vanuit geografische situaties. Het argument daarvoor is de makkelijke voorstelbaarheid. Er zijn ook situaties waarbij de graaf als beschrijvingsmiddel veel verder af ligt van de concrete situatie dan bij de geografische contexten. Een voorbeeld van een meer abstracte gerichte graaf is de toernooigraaf, die gebruikt kan worden om sportuitslagen in beeld te brengen. De punten van de graaf zijn de deelnemers, en de verbindingen (pijlen) ertussen geven de relatie 'heeft gewonnen van' aan. De stap van situatie naar graaf is nu veel groter dan hiervoor. De precieze ligging van punten en lijnen heeft nu geen enkele betekenis meer. Het is hooguit wenselijk de graaf zo te tekenen, dat die overzichtelijk is en makkelijk te lezen. Sportuitslagen kunnen ook in een tabel weergegeven worden. Het omzetten van graaf in tabel, en omgekeerd, en het vergelijken van die twee komt nu binnen handbereik.

Voorbeeld - Toernooien

Zes volleybalploegen spelen een onderling toernooi. Elke ploeg speelt één keer tegen de vijf andere ploegen. De toernooigraaf hieronder geeft de stand van zaken weer op een zeker moment:



Er zijn nog andere manieren om het verloop van het volleybaltoernooi weer te geven. Hieronder zie je daar een voorbeeld van. De wedstrij-

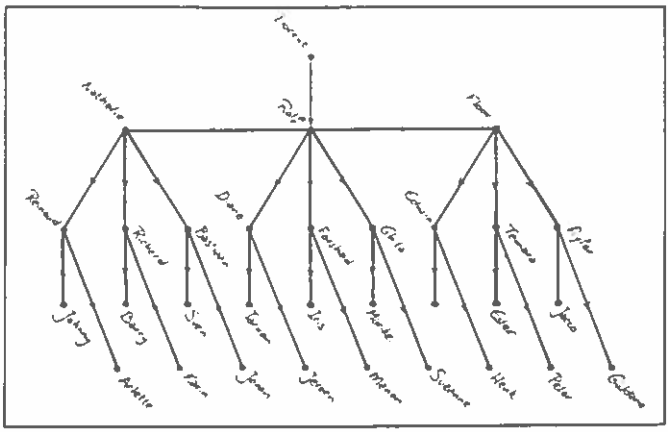
den die Net In tot nu toe heeft gespeeld, zijn al verwerkt:

	Achilles	Net In	VVOP	HVV	Set Up	Smash	Totaal
Achilles		0					
Net In	(2)		2			(0)	
VVOP		0					
HVV							
Set Up							
Smash		2					

Grafen kunnen ook relaties tussen mensen in beeld brengen. De relatie kan een directe familierelatie zijn, denk aan familiestambomen en graden van bloedverwantschap. Dicht bij de klas ligt het maken van een 'belboom', een soort waarschuwingsschema om snel een bericht aan alle leerlingen van een klas door te geven. De belboom is een graaf waarbij de leerlingen de punten zijn, en de (gerichte) verbindingen de betekenis 'belt op' hebben. Tenslotte noemen we de graaf die vriendschaps- of andere relaties tussen mensen in beeld brengt, het zogenaamde sociogram.

Voorbeeld - de Belboom

Op veel scholen maakt men bij elke klas een 'belboom'. De belboom is bedoeld om aan alle leerlingen van de klas snel een bericht door te kunnen geven. Bijvoorbeeld dat het proefwerk wiskunde niet doorgaat.



- *Hoeveel leerlingen heeft de klas?*
  Zoek uit hoeveel telefoontjes er nodig zijn om iedere leerling te waarschuwen.

- *Een docent belt om 7 uur 15 naar Rolf met de mededeling dat het eerste lesuur komt te vervallen. Neem aan dat elk telefoongesprek één minuut duurt. Hoe laat krijgt Tamara het bericht uiterlijk door? Maak een schatting van de tijd die het kost om de hele klas te waarschuwen.*
- *Maak een slimme belboom voor je eigen klas.*

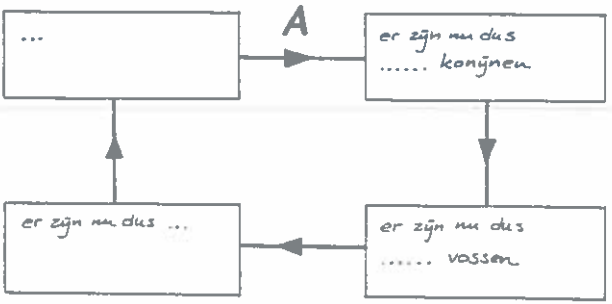
Grafen en dynamische processen

Grafen kunnen ook goed gebruikt worden om veranderingsprocessen in de tijd weer te geven. De punten van de graaf stellen dan toestanden voor, en de gerichte verbindingen (pijlen) geven weer welke overgangen tussen die toestanden er mogelijk zijn. De getallen bij de pijlen zeggen iets over de grootte van de betreffende overgang. Dit gebruik van grafen speelt later bij wiskunde A op havo en vwo een belangrijke rol. Maar ook in kranten en tijdschriften komen grafen die overgangsprocessen weergeven voor. In het algemeen is een graaf een goed hulpmiddel om de samenhang van diverse factoren in dynamische processen te verduidelijken: de graaf als bouwsteen bij het maken van wiskundige modellen.

Voorbeeld - Vossen en konijnen

Een klassiek voorbeeld van een prooi-roofdiersysteem is de wisselwerking tussen aantallen vossen en konijnen. Vier uitspraken die de wisselwerking beschrijven, zijn:
A: als er veel vossen zijn, zal het aantal konijnen sterk afnemen;
B: als er weinig vossen zijn, zal het aantal konijnen sterk toenemen;
C: als er veel konijnen zijn, zal het aantal vossen snel toenemen;
D: als er weinig konijnen zijn, zal het aantal vossen snel afnemen.

Kun je deze uitspraken in een logische volgorde zetten, zodat je kunt zien dat de ene uitspraak het gevolg is van de vorige?
Je kunt de uitspraken ook in een cyclus plaatsen, zodat duidelijk wordt welke uitspraak op welke volgt.
Hieronder is zo'n cyclus getekend, probeer dit schema verder af te maken.



Deze opgave is in de eerste plaats een oefening in redeneren: 'als dit, dan dat'. Het meer kwantitatief kijken naar prooi-roofdiersystemen is werk voor de bovenbouw van havo/vwo.

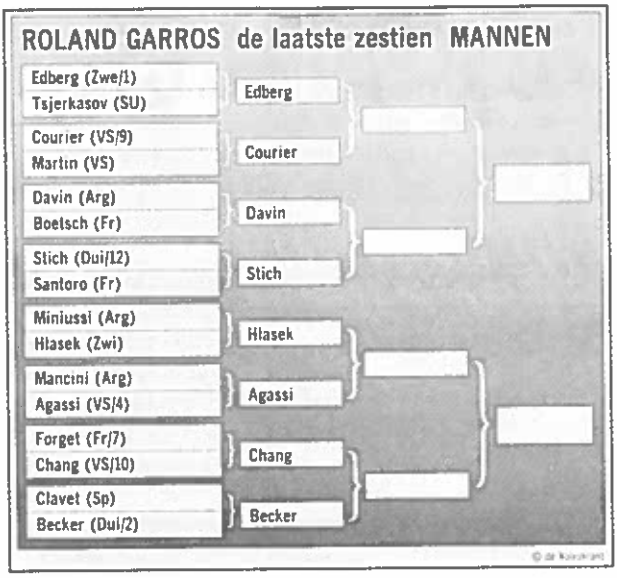
Systematisch tellen

We zijn nu toe aan de bespreking van het tweede deelgebied, dat is 'systematisch tellen'.

Bij sommige toepassingen van grafen komen telproblemen om de hoek kijken (bijvoorbeeld bij de toernooigraaf). Omgekeerd kunnen bepaalde telproblemen aanschouwelijk gemaakt worden met grafen. Het boomdiagram en het wegendiagram zijn de grafen waar we dan aan denken.

Voorbeeld - Tennistoernooi

Een wedstrijdschema voor een sporttoernooi is een mogelijke context voor een eerste kennismaking met systematisch tellen. Dergelijke schema's staan geregeld in de krant, een voorbeeld van 'steeds terugkerende actualiteit' dus. Het onderstaande schema betreft het Roland-Garros tennistoernooi van zomer 1991.



- *Er wordt gespeeld volgens het afvalsysteem. Hoeveel wedstrijder zijn er nodig bij zestien spelers?*

- *Probeer een wedstrijdschema te ontwerpen voor twintig spelers. Hoeveel wedstrijden zijn daarvoor nodig? En hoeveel rondes?*

Bij de vraag naar het aantal wedstrijden bij twintig spelers is het een mooie redenering om te zeggen: er zijn twintig spelers, bij elke gespeelde wedstrijd valt er één af, dus zijn er negentien wedstrijden nodig om één winnaar over te houden.

Vier typen telproblemen

Bij telproblemen is de context als zodanig vaak niet al te complex. De complexiteit zit veel meer in het vinden van de juiste telstructuur. In de combinatoriek worden verschillende typen telproblemen onderscheiden. Belangrijke kenmerken daarbij zijn volgorde en herhaling. Deze kenmerken kunnen wel of niet aanwezig zijn. Aldus leidt combinatie van deze twee eigenschappen tot vier karakteristieke typen telproblemen:

Volgorde wel belangrijk; herhaling niet toegestaan
Vier personen zitten in een tearoom en kiezen elk om de beurt voor de vitrine een gebakje uit. Er zijn nog zes gebakjes in voorraad, die allemaal verschillend zijn. De vier personen nemen zelf hun gebakje op een schoteltje mee. Op hoeveel manieren kan dat? Het antwoord is $6 \times 5 \times 4 \times 3$, ofwel $6!/2!$

Volgorde wel belangrijk; herhaling toegestaan
Vier personen zitten in een tearoom en zoeken een gebakje uit. Er is keus uit zes soorten, die allemaal in ruime aantallen voorradig zijn. De vier personen nemen zelf hun gebakje op een schoteltje mee. Op hoeveel manieren kan dat? Het antwoord is $6 \times 6 \times 6 \times 6$, ofwel 6^4.

Volgorde niet belangrijk; herhaling niet toegestaan
Iemand koopt vier gebakjes bij de banketbakker. Er zijn nog zes gebakjes in voorraad, allemaal verschillende. De bakker doet de vier gebakjes die de klant aanwijst in een doosje. Hoeveel mogelijke inhouden zijn er voor de gebaksdoos? De volgorde van de gebakjes doet er niet toe. Het antwoord is $6 \times 5 \times 4 \times 3 \ / \ 4 \times 3 \times 2 \times 1$, ofwel $6!/(4!.2!)$. Getallen van deze vorm heten binomiaalcoëfficiënten.

Volgorde niet belangrijk; herhaling toegestaan
Iemand koopt vier gebakjes bij de banketbakker. Er is keus uit zes soorten, die allemaal in ruime aantallen aanwezig zijn. De bakker doet de vier gekozen gebakjes in een doosje. Hoeveel mogelijke inhouden zijn er voor de gebaksdoos? Dit probleem is een stuk lastiger dan de voorafgaande. Het antwoord is $9!/(5!.4!)$ en als volgt te beredene-

ren: Noem de soorten gebakjes A, B, C, D, E, F. Een mogelijke keus is bijvoorbeeld BBCE. De sleutel tot de oplossing van het probleem schuilt in de volgende notatie voor dit rijtje:

```
A   B   C   D   E   F
|  XX| X |   |  X |
```

Er worden als het ware schotjes tussen de verschillende soorten geplaatst. Het rijtje BBCE correspondeert nu met het rijtje:
| X X | X | | X |. Zo correspondeert elke keus van vier gebakjes op eenduidige wijze met een rijtje kruisjes en schotjes. Omgekeerd stelt elk rijtje van vier kruisjes en vijf schotjes een keus van vier gebakjes voor. Er zijn 9!/(4!.5!) verschillende rijtjes van vier kruisjes en vijf schotjes.

Het is uiteraard niet de bedoeling de verschillende telstructuren als zodanig te behandelen. Dat is stof voor de bovenbouw havo/vwo en het is daar al lastig genoeg. Drie van de vier typen komen aan de orde in de bovenbouw. Ze spelen een rol bij kansrekening en bij kansverdelingen (binomiale verdeling). In de onderbouw kunnen wel enkele aanzetten gegeven worden, want telproblemen hebben ook op dat niveau wel degelijk hun aantrekkelijke kanten. Een noodzakelijke voorwaarde is natuurlijk wel, dat de opgaven heel concreet en voorstelbaar blijven. Eenvoudige telproblemen vragen geen specifieke voorkennis, en het redeneren krijgt er alle kans. Systematisch tellen kan zeker bijdragen aan het algemene leerdoel 'systematisch en methodisch werken'.

Bij telproblemen zijn vaak heel wat manieren van aanpak mogelijk:

- alle mogelijkheden uitschrijven en tellen,
- een tabel maken en mogelijkheden tellen,
- een graaf tekenen en verbindingen tellen.

Het sluitstuk is het opzetten van een redenering, waar het juiste aantal mogelijkheden rechtstreeks uit volgt. Een redenering kan tot stand komen nadat één van de voorgaande activiteiten is verricht, of als directe vertaling van de probleemstelling. Bij het oplossen van telproblemen zullen zich zeker niveauverschillen voordoen. Het is verstandig hierop te anticiperen door de opgaven zo te kiezen dat ze op verschillend niveau opgelost kunnen worden.

Voorbeeld - Schaaktoernooi

Zes spelers spelen een halve competitie. Alle deelnemers spelen dus één keer tegen elkaar. Hoeveel partijen worden er gespeeld?
Noem de spelers voor het gemak A, B, C, D, E en F. De hiervoor genoemde aanpakken zijn bij deze opgave mogelijk:

- Alle mogelijkheden uitschrijven en tellen:

AB AC AD AE AF
BC BD BE BF
... enzovoort

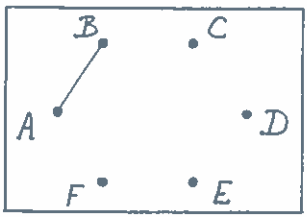
Het antwoord is 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 wedstrijden.

- Een tabel maken en mogelijkheden tellen:

	A	B	C	D	E	F
A		X	X	X	X	X
B						
C						
D						
E						
F						

De tabel heeft 6 × 6 = 36 hokjes. De hokjes op de diagonaal doen niet mee en verder staat elke wedstrijd er twee keer in. Dus (36 – 6)/2 = 15 wedstrijden.

- Een graaf tekenen en verbindingen tellen:



De punten van de graaf stellen de spelers voor, de verbindingen zijn de partijen. Het totale aantal partijen is gelijk aan het aantal verbindingen in de graaf. Vanuit elk punt vertrekken vijf verbindingen en er zijn zes punten. Op deze manier wordt echter elke verbinding twee keer geteld. Het aantal verbindingen is derhalve (6 × 5)/2 = 15.

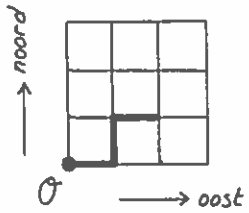
- Een rechtstreekse redenering zonder uitschrijven of visualisatie met behulp van graaf of tabel is: er zijn zes deelnemers, die elk vijf tegenstanders zullen ontmoeten. Dat wijst op 6 × 5 = 30 wedstrijden, ware het niet dat elke wedstrijd nu twee keer is geteld. Er zijn dus 30/2 = 15 wedstrijden te spelen.
- Volgens de systematiek van hiervoor (de vier typen telproblemen) is er sprake van een probleem zonder volgorde en zonder herhaling. Het gaat om het aantal manieren waarop twee objecten uit zes gekozen kunnen worden, dat kan op 6!/(2!.4!) manieren. Wederom is het antwoord 15.

De laatste aanpak is typisch voor de bovenbouw. Die veronderstelt immers dat het probleem echt als type herkend wordt en is daarmee veel abstracter dan de voorgaande manieren.

Sommige telproblemen laten zich vertalen naar wandelingen in een rooster (of stratenplan). In eerste aanzet wordt hiermee de driehoek van Pascal geïntroduceerd, echter zonder dit woord te noemen. Bij de telproblemen die zich hiervoor lenen is er keus uit twee alternatieven, is de volgorde onbelangrijk en is herhaling toegestaan. In de combinatoriek is het stratenplan een zeer krachtig denkmodel. Vanuit het systematisch uitzoeken van het aantal mogelijkheden, wordt een voorzichtig begin gemaakt met voorspellen, en daarmee met het kansbegrip.

Voorbeeld - Wandelen in een rooster

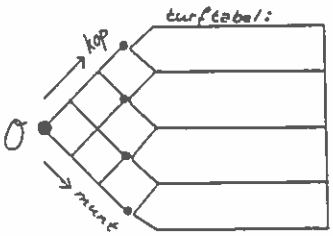
In het rooster hieronder kun je in twee richtingen wandelen, noord en oost. De getekende wandeling vanuit de oorsprong O bestaat uit drie stukken. Een manier om deze wandeling te beschrijven is 'oost-noord-oost'. We noemen dit een driestaps-wandeling. Welke punten van het rooster kun je allemaal bereiken met een driestaps-wandeling?



- *Stel je voor dat je 1000 keer lukraak een driestapswandeling maakt. Je begint steeds in de oorsprong en kiest bij elke stap lukraak tussen oost en noord. Waar kom je vaker uit, in het punt (3,0) of in het punt (2,1)? Hoe komt dat?*

Het lukraak maken van een driestaps-wandeling kun je naspelen door een munt op te gooien. Bij kop ga je noord, bij munt ga je oost. Gooi je bijvoorbeeld kop-munt-kop, dan ga je noord-oost-noord.

- *Gooi drie keer een munt op en schrijf de uitkomst op. Welke wandeling krijg je en in welk punt kom je terecht? Doe dit experiment 40 keer en schrijf de resultaten in de turftabel hieronder. Voor het gemak is het rooster een stukje gedraaid. In welk roosterpunt eindigen de meeste wandelingen? Is dit toevallig of had je dit wel kunnen voorspellen?*



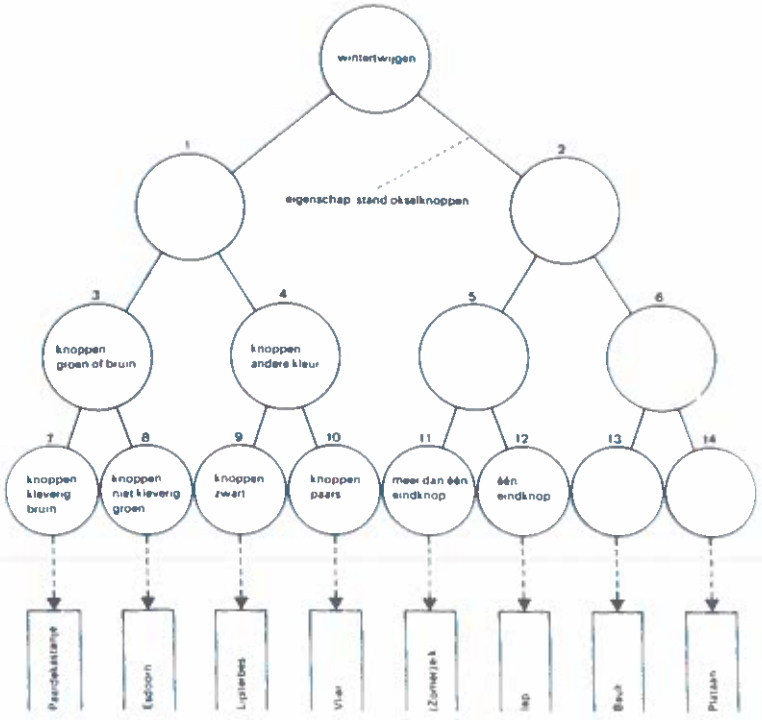
Boomdiagrammen

Een graaf die een bijzondere plaats inneemt, is het boomdiagram. Bij systematisch tellen, maar ook bij het structureren van allerlei verschijnselen. Toepassingen zijn: determinatieschema's in de biologie, organisatiestructuren, computernetwerken. Deze toepassingen zijn vooral kwalitatief, er wordt weinig aan gerekend.

Een voorbeeld - Loofbomen determineren

Hoeveel aanwijzingen heb je nodig om acht bomen te onderscheiden? In het onderstaande boomdiagram is een aantal eigenschappen van wintertwijgen aangegeven. Sommige eigenschappen zijn echter nog niet ingevuld. De volgende eigenschappen ontbreken:

- *knoppen zijn langwerpig,*
- *knoppen zijn driehoekig ovaal,*
- *okselknoppen zijn verspreid,*
- *okselknoppen liggen tegenover elkaar,*
- *de twijgen zijn bijna glad,*
- *de twijgen zijn ruw en knobbelig.*



- *Gebruik de volgende gegevens om de ontbrekende eigenschappen op de juiste plaats in het boomdiagram in te vullen:*
- *Een Paardekastanje heeft kleverige en bruine knoppen, de okselknoppen staan tegenover elkaar.*
- *De okselknoppen van de Iep zijn verspreid, de twijgen ruw en knobbelig en de Iep heeft één eindknop.*
- *De Plataan heeft ook verspreide okselknoppen, maar de twijgen zijn bijna glad en de knoppen zijn driehoekig ovaal.*
- *Welke eigenschappen heeft de beuk?*

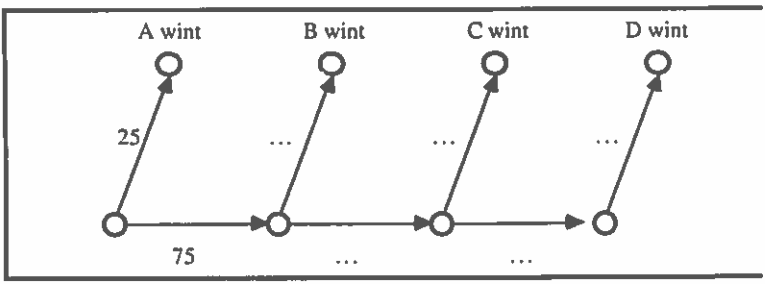
Het boomdiagram is ook geschikt gereedschap om bijvoorbeeld spelletjes te analyseren. De informatie uit een tekst wordt met behulp van een boomdiagram geschematiseerd en vervolgens geanalyseerd.

Voorbeeld - Is dat wel eerlijk?

Vier kinderen verloten een prijs onder elkaar. Daartoe stoppen ze vier lootjes in een hoge hoed. Op een van de lootjes staat het woord 'prijs', op de andere lootjes staat niets. Het eerste kind pakt een lootje, maakt het open en stelt teleurgesteld vast dat zij geen prijs heeft gewonnen. Dan pakt het tweede kind een lootje en zij heeft meer geluk! Op haar lootje staat het woord 'prijs' en vrolijk lachend neemt zij haar prijs in ontvangst. De twee kinderen die nog geen lootje hadden getrokken zijn boos... volgens hun is deze manier van loten niet eerlijk. 'Als je als laatste aan de beurt bent, heb je een veel te grote kans dat de prijs er al uit is', zeggen ze.

Ben je het met deze boze kinderen eens?

In het volgende wordt de loterij met behulp van een boomdiagram nauwkeurig bekeken. De kinderen krijgen voor het gemak de namen A, B, C en D. Stel je eens voor dat de kinderen 100 keer de loterij uitproberen, waarbij A steeds als eerste een lootje mag trekken gevolgd door B, dan C en tenslotte D.

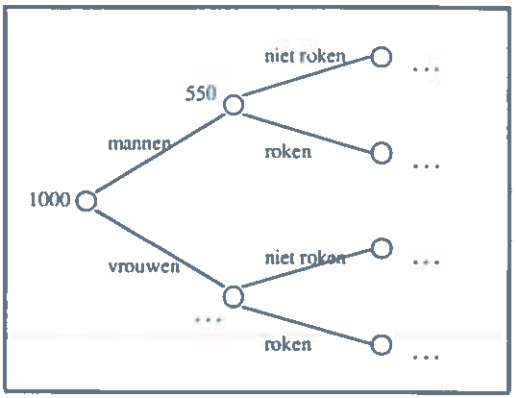


- *In de tekening staat het getal 25 bij de tak naar 'A wint' om aan te geven dat A in 25 van de 100 keer zal winnen. Waarom is dat zo?*
- *In 75 van de 100 gevallen wint A dus niet. Er zitten dan nog drie lootjes in de hoed en B mag trekken. In hoeveel van die 75 gevallen zal B de prijs winnen?*
  En in hoeveel gevallen zal B geen prijs winnen? Waarom is dat zo?
  Schrijf de juiste getallen bij de takken van het boomdiagram.
  Vind je de loterij eerlijk?
- *Je had ook zonder te rekenen of te tekenen kunnen bedenken waarom alle vier de kinderen een even grote kans op de prijs hadden. Probeer, zonder te rekenen en te tekenen maar met behulp van een redenering, uit te leggen waarom alle vier de kinderen even grote kans hebben om te winnen.*

In de praktijk komt het vaak voor dat een object op twee kenmerken wordt bekeken, waarbij die kenmerken elk twee waarden kunnen aannemen. In de statistiek wordt dan gebruik gemaakt van een kruistabel. Een andere mogelijkheid is om te werken met een boomdiagram, waarin de twee tweedelingen successievelijk aanschouwelijk worden gemaakt.

Voorbeeld - Rokers

Het rookgedrag van 1000 mensen is onderzocht. In de groep van 1000 mensen zaten 550 mannen, waarvan er 200 roken. Verder is nog gegeven dat 650 van de 1000 mensen niet roken.



- *Hoeveel niet-rokende vrouwen telt de groep? Gebruik het boomdiagram om je antwoord te vinden en uit te leggen.*

- *In plaats van het boomdiagram had je ook een tabel kunnen gebruiken om een antwoord op de vorige vraag te vinden.*

	rokers	niet-rokers	totaal
mannen	200	...	550
vrouwen	...	...	...
totaal	...	...	1000

- *Vul de gegevens uit het onderzoek over rookgedrag in de tabel in en bereken ook alle andere getallen die op de puntjes moeten staan.*

Het boomdiagram is een krachtig gereedschap om informatie te ordenen en te analyseren. Er zijn dan ook de nodige dwarsverbanden met andere onderwerpen van Informatieverwerking en Statistiek. Het bovenstaande voorbeeld, waarin een boomdiagram in verband gebracht wordt met een kruistabel, laat zo'n dwarsverband zien.

Beschrijvende statistiek

Statistiek wordt wel ingedeeld naar Beschrijvende Statistiek en Wiskundige Statistiek. Bij de Beschrijvende Statistiek gaat het om het verzamelen en verwerken van gegevens, met het oog op het verkrijgen van bepaalde informatie. De Wiskundige Statistiek richt zich op de vraag hoe je op grond van steekproeven uitspraken over populaties kunt doen. In de onderbouw komt alleen de Beschrijvende Statistiek aan bod.

Het vak zal meer aandacht krijgen dan in het oude programma. De basisbegrippen die ook in het oude programma zitten blijven gehandhaafd, maar de sfeer zal anders worden. Vroeger bleef de inhoud van statistiek beperkt tot het inoefenen van enkele elementaire technieken, zoals het bepalen van een gemiddelde of mediaan. In de nieuwe situatie staat het begrip informatie ook in de statistiek centraal. De statistische technieken staan ten dienste van het verkrijgen van informatie uit een serie waarnemingen of gegevens.
Meer concreet betreft de vernieuwing de volgende punten:

- informatie halen uit kengetallen en uit (complexe) grafische voorstellingen,
- kritisch beoordelen van grafieken,
- enkele nieuwe voorstellingswijzen: stambladdiagram en boxplot.

Verder is een meer open benadering gekozen. Leerlingen maken bijvoorbeeld zelf een grafiek bij een (deel van een) tabel, waarbij ze zélf

het type grafiek moeten kiezen.

Basisbegrippen

In de statistiek worden verzamelde gegevens geordend en weergegeven in tabellen, grafieken en diagrammen, kengetallen. De basisbegrippen die hier bij gebruikt worden, zijn tenminste:

- turftabel en frequentietabel,
- staafdiagram, lijndiagram, cirkeldiagram, (histogram),
- gemiddelde, modus, mediaan (de zogenaamde centrummaten).

De basisbegrippen zijn geen einddoel op zich, ze zijn hulpmiddel bij het verkrijgen van informatie uit een serie waarnemingen. Het is van belang om de hier genoemde elementaire grafische voorstellingen te kennen, omdat dat helpt bij het doorgronden van meer complexe grafische voorstellingen. Bij de centrummaten gaat het ook weer om de vraag wat hun informatiegehalte is. Bij een scheve verdeling geeft de mediaan een heel ander beeld van 'het midden' dan het gemiddelde.

Een bekend voorbeeld is de inkomensverdeling van de Nederlandse bevolking, die is scheef naar rechts. In zo'n situatie is het gemiddelde groter dan de mediaan. Wie een rooskleurig beeld wil geven van de Nederlandse situatie, kan dus het beste het gemiddelde inkomen vermelden. Echter, de groep mensen die tenminste het gemiddelde inkomen verdient, is kleiner dan de helft. Daarom geeft de mediaan misschien wel een veel eerlijker beeld.

Informatie halen uit complexe grafische voorstellingen

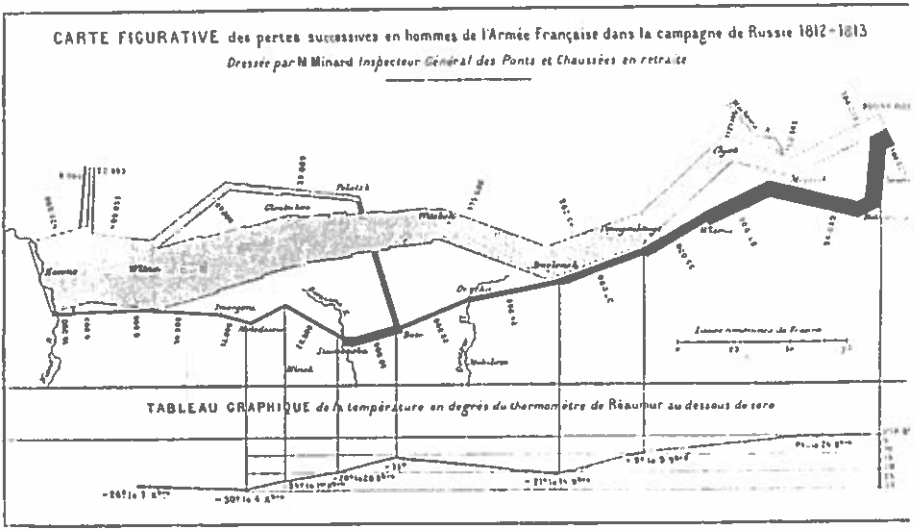
In de praktijk worden allerlei meer of minder fraaie grafische voorstellingen gebruikt. Vaak zijn die terug te voeren op één van de hiervoor genoemde basisgrafieken. Er is echter franje toegevoegd om de grafiek er aantrekkelijk uit te laten zien.

> Tufte[4], autoriteit op het gebied van datavisualisatie, spreekt in dit verband over de gegevens/inkt verhouding. In het slechtste geval is deze verhouding 0, er is wel inkt gebruikt, maar men is de gegevens 'vergeten' in te tekenen! In het beste geval is de verhouding 1, er kan niets uit de figuur weggelaten worden, zonder dat wezenlijke informatie verloren gaat.

Het kan ook zijn dat een grafische voorstelling complex is, omdat geprobeerd is veel variabelen in één figuur onder te brengen. Het vereist de nodige oefening om dat soort plaatjes te kunnen lezen. Statistiek is het vak bij uitstek om deze vaardigheden verder te ontwikkelen. Kranten en tijdschriften leveren een nimmer opdrogende stroom van nieuwe voorbeelden. Contexten in schoolboeken zullen misschien snel verouderen, maar daar staat tegenover dat het actualiseren van de voorbeelden niet al te moeilijk zal zijn.

Behalve de actualiteit, levert ook de geschiedenis soms mooie voorbeelden. Een juweeltje uit de geschiedenis van de grafische verwerking staat hieronder.

Voorbeeld - Napoleon in Rusland



Bekijk de kaart met het oog op twee vragen:

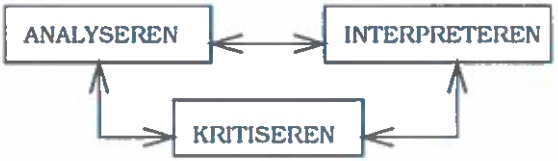
- *Welk verhaal vertelt deze grafiek?*
- *Hoeveel variabelen zijn in beeld gebracht?*

Deze grafiek, in 1861 getekend door Charles Joseph Minard, beschrijft de dramatische tocht van het Franse leger in Rusland. De breedte van de band geeft de omvang van het leger weer. Het leger bereikte Moskou in september 1812. De zwarte band geeft de terugtocht weer en is bovendien verbonden met de grafiek van de temperatuur (de schaal van Réaumur!) onderaan.

Op de kaart zijn zes variabelen weergegeven: de grootte van het leger, de locatie (in twee dimensies), de richting van de beweging en de temperatuur op verschillende data voor de terugtocht. Dit voorbeeld is ontleend aan [4].

Kritisch beoordelen van grafieken

Het is aan te bevelen om het 'kritisch kijken naar grafieken' op ambachtelijke wijze aan te pakken. Voorkomen moet worden, dat het ontwikkelen van een kritische houding slechts een slogan is en verzandt in het lukraak over elke grafiek roepen dat 'er vast niks van deugt'. Het gaat juist om de nuance, wat is er goed aan een grafiek en wat is een minder sterk punt. Je zou het kijken naar een grafiek in een aantal fasen kunnen laten verlopen, die overigens niet strikt van elkaar te scheiden zijn. Het gaat meer om onderscheiden dan om scheiden. Een mogelijke driedeling is:
Analyseren: wat staat er precies?
Interpreteren: welke informatie, welke conclusies?
Kritiseren: klopt het wel? Of, meer samenhangend in beeld gebracht:



Het is een goede oefening om een aantal grafische voorstellingen eens zeer nauwkeurig te beschouwen, een soort 'close reading' van grafieken. Dan zal blijken dat er steeds terugkerende punten zijn, waar je goed op moet letten. Die punten kunnen uitgewerkt en geordend worden in een serie *aandachtspunten voor het kijken naar grafieken*. Een globale uitwerking van mogelijke aandachtspunten is:

Analyse:
- welk verschijnsel brengt de grafiek in beeld?
- welk type grafiek, is die goed af te lezen?
- wat gebeurt er op de assen (o.a.: is er een scheurlijntje)?
- welke controlemogelijkheden zijn er (bijvoorbeeld: tellen percentages op tot 100)?

Interpreteren:
- welke informatie geeft de grafiek?
- welke conclusies kun je eruit trekken?
- is er extra kennis van de context nodig?

Kritiseren:
- is het verschijnsel helder in beeld gebracht?
- zijn er andere grafieken mogelijk?
- is de grafiek correct, begrijpelijk?

We noemen enkele bekende 'fouten' in grafieken waar je als lezer alert op moet zijn:

- Het werken met ruimtelijke effecten (drie dimensies) die het aflezen van een grafiek bemoeilijken.
- Het 'afknippen' van de verticale as zonder dit met behulp van een scheurlijntje te accentueren.
- Een dimensiefout: een ééndimensionaal verschijnsel weergeven in een twee dimensionale figuur. Het effect is dat de figuur suggereert dat de oppervlakte de maat is, terwijl de tekenaar de hoogte als maat heeft genomen.

In het artikel 'Kritisch kijken naar grafieken' (Nieuwe Wiskrant, jrg 1 nr 1, september 1991) zijn deze aandachtspunten aan de hand van voorbeelden nader uitgewerkt.

Enkele nieuwe voorstellingswijzen

Statistiek is geen statisch vak. Voortdurend worden nieuwe methoden en technieken ontwikkeld. Ook op het gebied van grafische verwerking, waar men zoekt naar eenvoudige voorstellingswijzen die veel informatie geven. De Exploratieve Data Analyse (EDA) is een tak van de statistiek die zich hier in het bijzonder mee bezig houdt. Nieuwe vondsten die de moeite waard zijn, duiken dan op zeker moment op allerlei plaatsen op. In het W12-16 curriculum zijn twee nieuwe voorstellingswijzen opgenomen: het steelbladdiagram en de boxplot. Het enige wat steelbladdiagram en boxplot gemeen hebben, is dat ze alle bei nieuwkomer in het programma zijn. Het steelbladdiagram staat vanwege zijn eenvoud aan het begin van de leerstoflijn statistiek. Kenmerkend voor het steelbladdiagram is, dat alle informatie behouden blijft. De boxplot is lastiger te maken en te begrijpen, en daarom een mooi sluitstuk om de essentie van grafische verwerking duidelijk te maken: met weinig inkt veel (globale) informatie weergeven, gebruik van centrum- en spreidingsmaten. Enige extra aandacht voor steelbladdiagram en boxplot is hier op z'n plaats. Dat betekent echter niet, dat de meer traditionele voorstellingswijzen minder belangrijk zijn.

Het steelbladdiagram

Bij het proces van gegevensverwerking is het maken van een turftabel een van de eerste handelingen om losse waarnemingen te ordenen. De volgende stap is het maken van een frequentietabel, waar dan eventueel een histogram bij getekend kan worden. De drietrapsrake turftabel → frequentietabel → histogram kan met behoud van alle informatie vervangen worden door het maken van een steelbladdiagram. Door op handige wijze gebruik te maken van ons positiestelsel ontstaat een tabel waarin alle waarnemingen afzonderlijk nog zijn a

te lezen. De tabel heeft een sterk visueel effect en de omlijning levert het bijbehorende histogram op. Bijzonder aan het steelbladdiagram is, dat het een grafische voorstelling is die is opgebouwd uit z'n eigen data. Deze manier van noteren wordt in het dagelijks leven wel gebruikt voor het vermelden van dienstregelingen bij bushaltes. Uren en minuten zijn precies af te lezen, evenals de frequentie per uur op verschillende uren van de dag.

Voorbeeld - IQ meting

IQ-meting bij een vijftigtal Nederlanders in 1980 leverde de volgende (ongeordende) resultaten:

106	103	117	103	116	96	102	130	83	107
127	118	114	117	108	115	119	147	109	142
99	141	125	88	104	132	124	114	127	136
111	96	108	112	153	136	106	108	111	101
105	110	101	120	101	106	98	118	106	100

Een steelbladdiagram van deze IQ's is:

8	38
9	6689
10	0111233456666678889
11	0112445677889
12	04577
13	0266
14	127
15	3

Links van de verticale streep staan de tientallen. Het getal 12 links van de streep betekent dus 120. Rechts van de streep staan eenheden, voor elke waarneming één. Uit de rij 12 | 04577 van het diagram is af te lezen dat er vijf waarnemingen in de klasse 120-<130 liggen, namelijk 120, 124, 125 en twee keer 127.

Dit voorbeeld is ontleend aan een artikel dat Pieter Terlouw in 1984/85 voor Euclides schreef. Het idee om het steelbladdiagram in het wiskundeprogramma op te nemen, is in Nederland in het Hawex-project (wiskunde A, 4 havo) voor het eerst opgepakt. Gezien de eenvoud van de techniek, past het steelbladdiagram echter meer aan het begin van een leerlijn statistiek.

Een tweede citaat over het steelbladdiagram brengt treffend onder woorden welke weg nieuwe onderwerpen, ook als ze heel eenvoudig zijn, te gaan hebben alvorens ze succesvol in een leerplan opgenomen kunnen worden: 'As more teachers learn about them they are beginning to teach their pupils about them in turn. The level at which they are introduced seems to depend more on the opportunities for teachers to learn about them then the ability of children to under-

stand them!' (Teaching Statistics, najaar 1991)

> Een medewerker van het W12-16 project maakte in 1988 een reis naa Burkina Faso in Afrika. In een arm land als Burkina Faso hebben schole eigenlijk aan alles gebrek. Nauwelijks boeken, veel te weinig schrijfbenc digdheden voor de leerlingen, en zeker geen rijtje relevante vakliteratuu voor de veelal matig opgeleide docenten. Maar een klaslokaal heeft altij wel een groot zwart schoolbord. Ergens op een schoolbord, ver weg van d stad, stond een steelbladdiagram getekend van wat zo te zien proefwerk cijfers van de leerlingen waren.

De Engelse vakterm voor het steelbladdiagram is 'stem-and-leaf-dis play' of 'stem-and-leaf-diagram'. In het Nederlands is een aantal ver schillende vertalingen in omloop. Naast het hier gekozen steelblad diagram ook nog stambladdiagram, stamdiagram en stamgram, z bleek uit het raadplegen van enkele statistiekboeken. In de Duits vakliteratuur spreekt men van 'Stengel-und-Blätter-Schaubild'. Mis schien was 'stengel-en-bladdiagram' eigenlijk wel de beste naam ge weest?

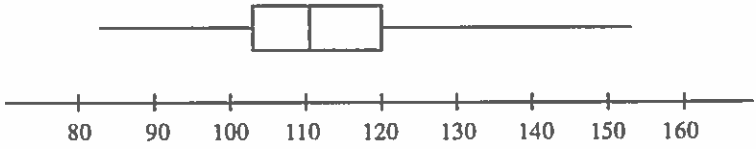
De boxplot

De boxplot is een mooi voorbeeld van hoe je met luttele pennestreke veel informatie kunt weergeven. De figuur komt tot stand door ee serie waarnemingen in vier 25%-intervallen te verdelen. De vijf getal len die hierdoor vastgelegd worden, zijn: laagste waarneming - eerst kwartiel - mediaan - derde kwartiel - hoogste waarneming. Op basi van deze vijf getallen wordt vervolgens de boxplot getekend.

Voorbeeld - Nogmaals IQ's

8	③8
9	6689
10	011123③45666678889
11	0112445677889
12	⓪4577
13	0266
14	127
15	③

In het steelbladdiagram zijn de vijf 'boxplotgetallen' omcirkeld. Om dat het aantal waarnemingen even is, wordt de mediaan het gemid delde van de 25e en 26e waarneming. De vijf getallen zijn: 83 - 103 110,5 - 120 - 153. De boxplot wordt:



Een boxplot is de grafische weergave van een centrummaat (de mediaan) samen met twee spreidingsmaten. De spreidingsmaten zijn de interkwartielafstand (derde kwartiel – eerste kwartiel) en de variatiebreedte (hoogste – laagste waarneming). Verder zijn uit een boxplot de 25%-intervallen makkelijk af te lezen. Een begrip als de mediaan krijgt door de doeltreffende visualisatie die de boxplot is, heel wat meer reliëf.

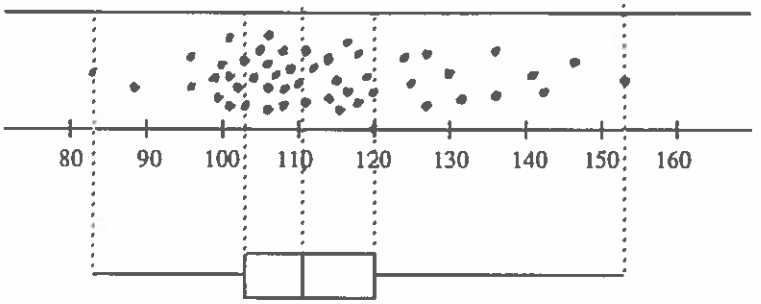
Technische details

Van de vijf boxplotgetallen is de mediaan een oude bekende en de laagste en de hoogste waarde zijn eenvoudig te bepalen. Het nauwkeurig bepalen van eerste en derde kwartiel kan lastiger zijn. Een handzame afspraak is om het eerste kwartiel op te vatten als 'de mediaan van de linker helft' en verder net zo te werk te gaan als bij het bepalen van de mediaan voor alle waarnemingen. De toevoeging om bij een oneven aantal waarnemingen de mediaan zowel tot de linker als tot de rechter helft te rekenen, maakt deze afspraak compleet.

Voorbeeld oneven waarnemingen:
Bepaal 1e en 3e kwartiel van 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Mediaan: 5
Linker helft: 1 2 3 4 5 --> 1e kwartiel: 3
Rechter helft: 5 6 7 8 9 --> 3e kwartiel: 7

Voorbeeld even waarnemingen:
Bepaal 1e en 3e kwartiel van 1 2 3 4 5 6 7 8
Mediaan: (4+5)/2 = 4.5
Linker helft: 1 2 3 4 --> 1e kwartiel: (2+3)/2 = 2.5
Rechter helft: 5 6 7 8 --> 3e kwartiel: ((6+7)/2 = 6.5

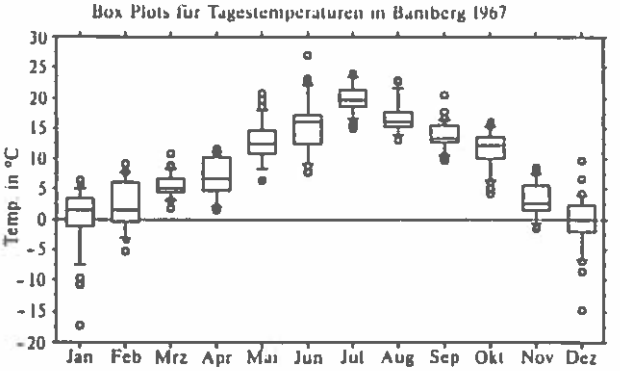
Als de waarnemingen in klassen zijn ingedeeld, is lineaire interpolatie nodig om de mediaan en de kwartielen te bepalen.
De praktijk heeft geleerd dat de boxplot een zorgvuldige didactische opbouw vraagt. In het IQ-voorbeeld van hiervoor is gekozen voor een benadering vanuit het steelbladdiagram. Een andere mogelijkheid, didactisch wellicht aantrekkelijker, is om de figuur te laten ontstaan uit een zogenaamde *puntenband*, waarin alle waarnemingen geplot zijn. De puntenband wordt in vier vakken met elk evenveel waarnemingen verdeeld, waarna de boxplotgetallen afgelezen kunnen worden.



Boxplots zijn in het bijzonder handzaam als het doel is om verschillende groepen met elkaar te vergelijken. Men tekent voor elke groep een boxplot, netjes naast of onder elkaar, en krijgt daarmee een compleet beeld van alle groepen tezamen. Omdat de boxplot zo'n simpele tekening is, die in feite maar één dimensie van het papier benut, lukt het om er een groot aantal in één plaatje te krijgen. Met histogrammen gaat dat bijvoorbeeld veel moeilijker, omdat een histogram echt een tweedimensionaal plaatje is.

Voorbeeld - Temperaturen Bamberg

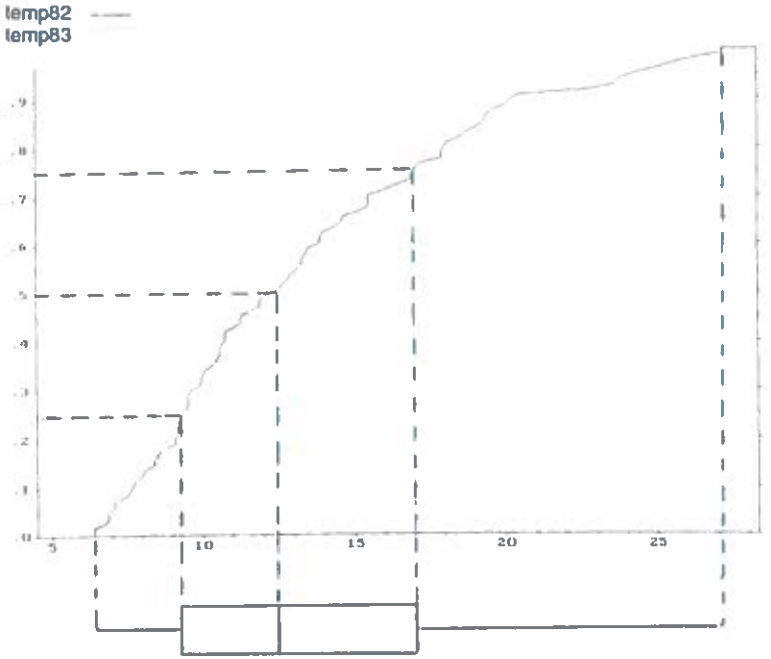
De grafiek hieronder gaat over de temperatuur in Bamberg. Men heeft voor elke maand een boxplot getekend. In deze boxplots lopen de strepen niet helemaal door tot de uiteinden. In plaats daarvan heeft men de drie laagste en de drie hoogste waarnemingen apart met een rondje aangegeven.



Tagestemperaturen in Bamberg 1967
Zusammenfassung nach 12 Monaten: Boxplots

Een grafische voorstelling wordt altijd gekozen met een zeker doel. Men wil bepaalde informatie overbrengen en maakt daarvoor een passend plaatje. Er moeten dan keuzes gemaakt worden. Hoe gedetailleerd moeten gegevens afgelezen kunnen worden? Moet het plaatje in één oogopslag duidelijk zijn of is het toelaatbaar dat de lezer er even op moet studeren?

Voorbeeld - Temperatuur in het voorjaar



Met behulp van deze grafiek kun je de temperaturen van voorjaar 1983 vergelijken met die van voorjaar 1982. Horizontaal is de temperatuur uitgezet, verticaal staan percentages. Wat kun je er zoal uit aflezen?

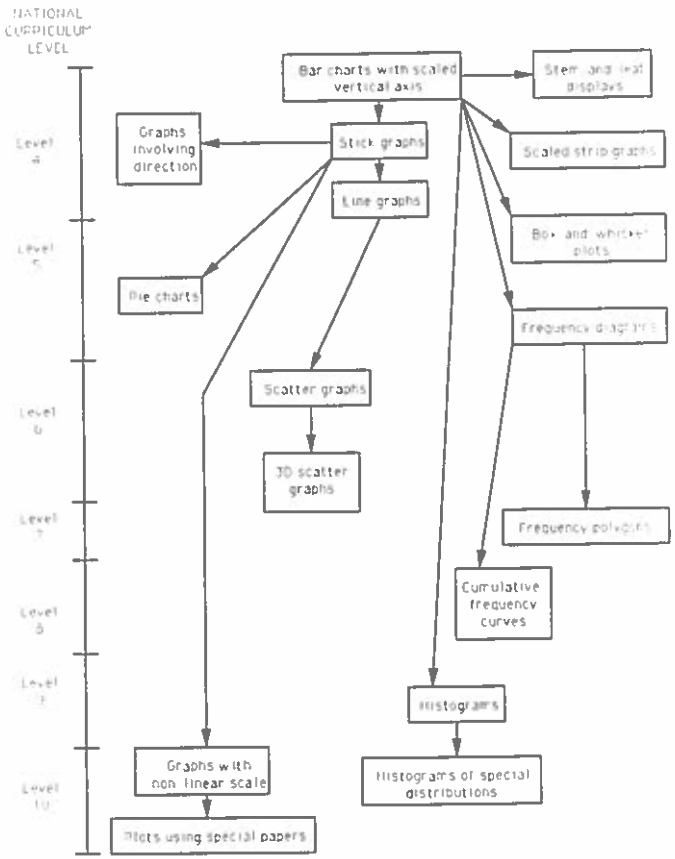
De beide voorjaren kunnen ook met behulp van boxplots met elkaar vergeleken worden. De figuur laat zien hoe je die langs grafische weg kunt construeren. De vergelijking zal noodgedwongen globaler zijn, maar dat globale beeld is dan ook wel in één oogopslag helder. De oorspronkelijke grafiek bevat veel gedetailleerder informatie. Voor leken is die echter moeilijker te doorgronden.

Tenslotte zetten we de belangrijkste argumenten om het boxplot in het leerplan op te nemen nog even op een rijtje:

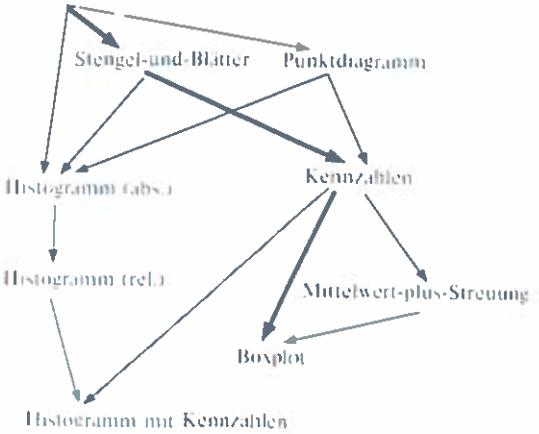
- de boxplot vraagt weinig tekenwerk en geeft toch een goed globaal beeld,
- het begrip mediaan gaat functioneren, in combinatie met de andere kengetallen van de boxplot,
- de boxplot biedt de mogelijkheid om iets aan spreiding te doen, zonder dat daar een lastig begrippenapparaat (zoals bij de standaarddeviatie, de bekendste spreidingsmaat uit de statistiek) voor nodig is.

Internationale tendens

Het is zeker niet zo dat het een louter Nederlands verzinsel is om steelbladdiagram en boxplot in het leerplan op te nemen. Ook in de landen om ons heen is dezelfde tendens waarneembaar. Zo stond in een Engels tijdschrift over statistiek onderwijs (Teaching Statistics, najaar 1991) het volgende schema afgedrukt over een mogelijke leerstofsequentie 'grafische verwerking':



Het steelbladdiagram plaatst men in level 4 en aan de boxplot wordt level 5 toegekend. Deze niveaus horen naar onze maatstaven nog tot het basisonderwijs!
In een themanummer van het Duitse tijdschrift Mathematik Unterricht over Exploratieve Data-analyse (november 1991) geeft men het volgende netwerk om de samenhang tussen de verschillende grafische voorstellingen in beeld te brengen.



Ook hier heeft het steelbladdiagram een plaats boven in het netwerk en de boxplot onderin.

Conclusie

De verschillende voorstellingswijzen kunnen vanuit een statistisch standpunt of vanuit een didactisch standpunt geordend worden. Bovendien moet dan nog onderscheid gemaakt worden naar actief (zelf kunnen maken) en passief gebruik van de verschillende voorstellingen. Ons standpunt is dat het steelbladdiagram zowel didactisch als statistisch aan het begin van de gegevensverwerking staat en door leerlingen actief beheerst moet worden. De boxplot is typisch een eindprodukt van statistische gegevensverwerking. Ook didactisch is het een eindpunt: een mooi voorbeeld van een sober vormgegeven figuur met een hoog informatiegehalte waarin zowel centrum als spreidingsmaten verwerkt zijn. Passief gebruik door de leerlingen staat hier voorop. Het gaat vooral om aflezen en conclusies trekken, in het bijzonder uit een serie boxplots.

Tenslotte

Met deze rondgang langs de verschillende deelgebieden van Informatieverwerking en Statistiek is onze inhoudsbeschrijving ten einde. In

de beschrijving zijn bepaalde accenten gelegd, wat het gevaar met zich meebrengt dat sommige aspecten overbelicht en andere onderbelicht zijn. Zo is bij statistiek nauwelijks ingegaan op de onderwerpen die ook al in het oude leerplan zitten. Dat betekent niet dat die niet belangrijk zijn, het wil alleen maar zegen dat een en ander al bekend verondersteld wordt.

Om de verschillende deelgebieden in hun juiste omvang en volgorde te zien, is het nodig naast deze tekst het Trajectenboek wiskunde 12-16' te raadplegen. Daar staat een opsomming van hoe de leerstof over de verschillende trajecten verdeeld kan worden.

Literatuur

1 Spode Group (1986). *Decision Mathematics*, eds. J. Berry, D. Burghes en I Huntley, Ellis Horwood.

2 Garfunkel, S.A., L.A. Steen en J. Malkevitch (1988). *For all practical purposes introduction to contemporary mathematics*, Comap, USA.

3 Krabbendam, H., G. van den Heuvel, D. Kok en H. Verhage: *Verslag studieda Informatie en Modellen*, 16 mei 1990.

4 Tufte, E.R. (1983). *The visual display of quantitative information*, Graphics Press, Cheshire Connecticut.

HET NIEUWE W12-16-PROGRAMMA OOK GOED VOOR MEISJES

Inleiding

De opdracht aan de COW was om nieuwe examenprogramma's lbo/mavo te maken en daarbij passende leerplannen te ontwikkelen voor lbo en mavo en voor de eerste drie leerjaren van havo en vwo. Nadrukkelijk werd daarbij genoemd dat deze nieuwe examenprogramma's en leerplannen meisjes een grotere kans op succes moeten bieden. In dit deel beschrijven we hoe binnen het team W12-16 rekening is gehouden met deze extra opdracht.

Verschillen tussen jongens en meisjes

Ervaringen

Twaalfjarige leerlingen hebben op de basisschool en daarbuiten al veel kennis en ervaring opgedaan, waar in het voortgezet onderwijs op voortgebouwd zal worden. Er bestaan echter grote verschillen tussen leerlingen. Als je in een dorp bent opgegroeid, zul je andere dingen hebben meegemaakt dan wanneer je je jeugd hebt doorgebracht in een oude stadswijk. Voortdurend in een omgeving verkeren waarin over allerlei onderwerpen wordt gesproken en waarin een gevulde boekenkast normaal is, geeft een andere ondergrond dan een jeugd waarin je alleen de televisie als informatiebron hebt.

Ook tussen jongens en meisjes bestaan al grote verschillen. Je hoeft maar om je heen te kijken op welke wijze jongens en meisjes hun vrije tijd besteden. Het speelgoed dat kinderen van jongsaf aan gebruiken, de spelletjes die ze spelen, de sport die ze eventueel beoefenen, de mate waarin ze binnen en buiten spelen, het materiaal waar ze mee omgaan, de manier waarop ze met techniek te maken hebben, het heeft allemaal een niet te verwaarlozen invloed.

In het onderwijs op de basisschool wordt geen onderscheid gemaakt tussen meisjes en jongens. Alle leerlingen krijgen in principe hetzelfde onderwijs en kunnen daar ook evenveel van opsteken. Maar op de basisschool worden veel meer jongens dan meisjes naar het speciaal onderwijs verwezen. Wat daar precies de oorzaken van zijn, is niet helemaal duidelijk. Ook in het Individueel Beroeps Onderwijs (ibo) zijn de jongens flink in de meerderheid. Stellen we andere eisen aan jongens dan aan meisjes, misschien onbewust? Vertonen jongens meer gedragsproblemen dan meisjes en is dat een reden voor verwijzing?

De uitkomsten van het PPON-onderzoek (Periodieke Peiling Onderwijs Niveau) van 1989 tonen verschillen in rekenvaardigheden tussen meisjes en jongens van twaalf jaar. Jongens blijken het op éénentwintig van de zevenentwintig meetschalen beter te doen dan meisjes. Gemiddeld is het verschil bijna een kwart standaarddeviatie. De onderzoekers zien geen reden de soms aanzienlijke verschillen te verklaren uit vraagpartijdigheid (dat betekent dat groepen zich van elkaar onderscheiden op grond van een kenmerk dat niet van belang is voor de onderzochte vaardigheid). Blijft de vraag wat de oorzaak van de gemeten verschillen dan wèl is. Hangen de gemeten verschillen samen met de verwijzing van grotere groepen jongens naar het speciaal onderwijs? Of zijn de verschillen in schoolse kennis op die leeftijd zo groot? Ook Engels onderzoek heeft aangetoond dat er verschillen in rekenvaardigheden zijn tussen meisjes en jongens van die leeftijd, in het nadeel van meisjes. Er is ook onderzoek bekend waaruit blijkt dat er verschillen zijn in ruimtelijk inzicht. Als je meisjes en jongens ziet opgroeien is dat niet zo verwonderlijk. Jongens krijgen technischer speelgoed, spelen meer buiten en gaan op onderzoek uit en mogen dat ook. Als het zo is dat meisjes een achterstand hebben in ruimtelijke ervaringen, dan zou het voortgezet onderwijs daar rekening mee moeten houden en mogelijkheden aanreiken deze te overbruggen.

Ambivalentie

In de puberteit is het voor jongeren lastig hun weg te vinden. Meisjes hebben dan ook nog te maken met een ambivalente houding van veel opvoeders. Al van heel jong af speelt die ambivalentie tegenover meisjes, maar in de puberteit wordt het moeilijker daarin als meisje een houding te bepalen. Aan de ene kant zeggen opvoeders dat meisjes goed hun best moeten doen op school, maar aan de andere kant wordt ook de eis gesteld dat ze aardig en dienstbaar moeten zijn. Deze dubbele boodschap is voor meisjes lastig om te hanteren, terwijl juist in de pubertijd belangrijke beslissingen genomen moeten worden. Meisjes kiezen eerder dan jongens voor vakken, die ze aankunnen en die ze leuk vinden, terwijl jongens het toekomstperspectief laten meewegen. Moeten we dat als vanzelfsprekend accepteren of moeten we ze meer stimuleren over hun toekomst na te denken? Meisjes denken al gauw dat ze wiskunde niet aan kunnen. Maar zijn hun eigen gedachten hierover wel altijd zo'n betrouwbaar criterium? Het gaat om het doorbreken van hardnekkige, bijna automatische mechanismen, waardoor van meisjes te makkelijk geaccepteerd wordt dat ze niet voor wiskunde kiezen. Doordat velen nog steeds een stereotiep beeld van wiskunde hebben en wiskunde door hen zeker niet als een gewone menselijke activiteit gezien wordt, is het voor meisjes ook moeilijk wiskunde te koppelen aan wat ze voor zichzelf op korte of lange termijn verwachten. Diegenen die een helder toekomstperspectief voor

ogen hebben, kiezen vaak met overtuiging wiskunde. Voor veel anderen is het op jongere leeftijd niet duidelijk wat die wiskunde te maken kan hebben met hun toekomstige leven. Zichtbaar maken dat wiskundige vaardigheden op heel diverse terreinen in het leven gebruikt worden en voor heel diverse beroepen nuttig en nodig zijn, geeft meisjes wellicht een ander beeld en misschien een reden of aanleiding om wel vol te houden. Daarom is binnen W12-16 ook gewerkt aan voorbeelden in die richting.

De deelname van meisjes en jongens aan onderwijs

Hoewel de deelname van meisjes aan onderwijs de laatste jaren sterk is verbeterd, is die nog niet op het niveau van de deelname van jongens. Meisjes verlaten nog steeds gemiddeld op jongere leeftijd het onderwijs, waardoor ze er minder van profiteren. Zij ronden ook minder vaak een beroepsopleiding af. De deelname van meisjes en jongens aan het lbo is zeer ongelijk verdeeld over de verschillende lbo-richtingen. Het lhno wordt nog steeds gedomineerd door meisjes, het lto door jongens. Formeel heeft elk lbo-diploma dezelfde waarde, maar in de praktijk biedt een lto-diploma veel meer kansen en mogelijkheden.

aantallen eindexamenleerlingen in de lbo-richtingen in '90 (bron: CBS)

	totaal	*jongens*	*meisjes*
lto	40981	38491	2490
lhno	21468	1471	19997
lcao	10038	3628	6410
lao	6812	4794	2018
lmo	3395	1902	1493
totaal	82694	50286	32408

Niet alleen op lbo-niveau komt deze onevenwichtige verdeling van jongens en meisjes over schooltypen voor. Ook de deelname-percentages aan de verschillende richtingen in mbo, hbo en wo vertonen dezelfde tendens. Meisjes zijn oververtegenwoordigd in die sectoren die in het verlengde liggen van huishoudelijke en verzorgende taken.

In het voortgezet onderwijs is de situatie globaal gezien als volgt. Meer meisjes dan jongens doen examen op mavo- en havo-niveau. Jongens sluiten vaker af op lbo- of vwo-niveau.

aantallen eindexamenleerlingen in het voortgezet onderwijs in '90 (bron: CBS)

	totaal	*jongens*	*in %*	*meisjes*	*in %*
vwo	38259	19433	51	18816	49
havo	45472	19743	43	25729	57
mavo	66122	30038	45	36084	55
lbo	82694	50286	61	32408	39
totaal	232547	119510		113037	

Uiterst zorgelijk is het gesteld met leerlingen uit etnische groepen; met name Turkse en Marokkaanse leerlingen doen het slecht in ons onderwijs. Zij zijn oververtegenwoordigd in de lagere regionen van het voortgezet onderwijs, het lbo. Voor meisjes is de situatie nog slechter dan voor jongens. Islamitische meisjes staan dikwijls wel ingeschreven op een school, maar het absenteïsme onder hen is groot. Het uiteindelijke opleidingsniveau dat Turkse en Marokkaanse meisjes behalen is laag en ook lager dan dat van jongens. De situatie van Surinaamse en Molukse meisjes is beter, maar nog lang niet vergelijkbaar met die van Nederlandse medeleerlingen.

Deelname aan het vak wiskunde

Bij wiskunde bestaan nog steeds verschillen tussen de percentages jongens en meisjes die dit vak in hun eindexamenpakket opnemen. Niet verder gaan met wiskunde heeft vaak vergaande consequenties, want voor tal van beroepsopleidingen zijn de deuren gesloten zonder een voldoende wiskundige ondergrond, hetzij formeel hetzij door de praktijk van de opleiding.

percentages jongens en meisjes met wiskunde in het eindexamenpakket (bron: CBS)

	'84	'85	'86	'87	'88	'89	'90
vwo							
wiskunde I							
jongens	82	82	83				
meisjes	59	59	61				
wiskunde II							
jongens	26	27	32				
meisjes	5	6	8				
wiskunde A							
jongens				62	61	65	63
meisjes				55	56	58	59
wiskunde B							
jongens				64	63	59	61
meisjes				30	31	29	31
havo							
jongens	72	73	75	76	77	80	81
meisjes	41	42	45	46	44	51	54
mavo							
jongens	79	79	80	80	84	84	85
meisjes	46	46	49	50	54	59	62

Gunstige omstandigheden

Het team W12-16 heeft bij haar werk kunnen profiteren van een aantal gunstige omstandigheden. Maatschappelijk en politiek is er de afgelopen jaren veel aandacht geweest voor emancipatie in relatie tot exacte vakken. Voor het vak rekenen/wiskunde is al veel ontwikkeld in de richting van meer realistische wiskunde. In het basisonderwijs heeft dit al geresulteerd in een toenemend gebruik van vernieuwde methoden. In de bovenbouw van havo en vwo zijn nieuwe vakken geïntroduceerd, wiskunde A en wiskunde B, die meer afgestemd zijn op de wiskundige bagage, die nodig is voor diverse vervolgopleidingen. Ook is het erg belangrijk geweest dat bij alle activiteiten in het W12 - 16-project vrouwen geparticipeerd hebben.

Maatschappelijk en politiek klimaat

Er is de laatste jaren steeds meer aandacht voor de positie van meisjes en vrouwen in de samenleving, waarbij vooral de scheve verhouding tussen mannen en vrouwen op de arbeidsmarkt een rol speelt. De 1990-maatregel is ingevoerd, waardoor meisjes economisch zelfstandig moeten worden. Onderwijs wordt gezien als één van de aangrijpingspunten om de ongelijke situatie te veranderen.

De werkgroep Vrouwen en Wiskunde vraagt al tien jaar aandacht voor de positie van meisjes in het wiskundeonderwijs. De werkgroep heeft steeds benadrukt dat een ander beeld van wiskunde nodig is om het vak aantrekkelijker voor meisjes te maken. De problematiek rond meisjes en exacte vakken kwam grootschalig in het nieuws met de 'Kies Exact'-campagnes van enkele jaren geleden. Recentelijk is in het kader van het project 'Wiskunde en Emancipatie', uitgevoerd door de Hogeschool Holland, materiaal voor nascholing en opleiding ontwikkeld. Dit materiaal vormt een goede aanvulling op het werk van het team W12-16.

Ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs

Er wordt al geruime tijd gewerkt aan de vernieuwing van het reken/wiskundeonderwijs in Nederland. Ideeën die binnen het Wiskobasproject in de jaren zeventig zijn ontwikkeld, hebben inmiddels hun intrede gedaan op de basisschool. Op basisscholen worden in toenemende mate methoden ingevoerd die als realistisch te kenmerken zijn. In de hoogste klassen van havo en vwo zijn nieuwe wiskundevakken ingevoerd. Wiskunde B bereidt leerlingen voor op een vervolgstudie in technische en exacte richting, terwijl wiskunde A meer nadruk legt op het gebruik van wiskunde in andere richtingen, dat wil zeggen dat er meer aandacht is voor modelvorming en de relatie tussen wiskunde en de werkelijkheid. Door het invoeren van deze nieuwe vakken kiest een grotere groep leerlingen wiskunde in het pakket,

zij het dat wiskunde B bij jongens veel meer in trek is dan bij meisjes. Wiskunde wordt meer dan in het verleden een vak voor iedereen; het wordt beschouwd als een noodzakelijk onderdeel van de algemene ontwikkeling.

Vrouwen betrokken bij het project

In de COW zijn vrijwel alle organisaties en instellingen vertegenwoordigd die betrokken zijn bij het wiskundeonderwijs in Nederland; ook de werkgroep Vrouwen en Wiskunde is door twee vrouwen vertegenwoordigd in de COW. In W12-16 is ongeveer een derde van de medewerkers vrouw. Bij het ontwikkelen van de experimentele examens voor de proefscholen is ook steeds een vrouw betrokken geweest. Vanaf de start van het project heeft een resonansgroep bestaande uit vrouwelijke medewerkers (van COW en team W12-16) en enkele leden van de werkgroep Vrouwen en Wiskunde gefunctioneerd. Deze groep gaf regelmatig commentaar en reacties op ontwikkelde ideeën en materialen.

De opdracht om rekening te houden met meisjes bij het ontwikkelen van nieuw wiskundeonderwijs werd door het team W12-16 niet als een lastige handicap beschouwd, maar daarentegen breed onderschreven en geïntegreerd binnen het werk. Het gaat er nu om zichtbaar te maken hoe en met welke concrete resultaten dat gebeurd is.

Uitgangspunten

Een van de belangrijkste uitgangspunten bij het werken aan het nieuwe leerplan is geweest dat het wiskundeonderwijs zich moet afspelen in voor leerlingen herkenbare en inleefbare situaties. Dit uitgangspunt bevat twee aspecten die van belang zijn in verband met het rekening houden met meisjes. De term 'situaties' duidt aan dat het niet alleen om abstracte wiskunde gaat maar dat het werken binnen contexten ruime aandacht krijgt; 'herkenbaar en inleefbaar voor leerlingen' karakteriseert de situatie nader. In de beginfase van het leerproces bieden dergelijke contexten een natuurlijke en motiverende toegang tot een wiskundige vraagstelling, waarbij een beroep gedaan wordt op kennis en ervaringen waar leerlingen al over beschikken. Ook later in het leerproces blijft het werken met toepassingssituaties belangrijk.

Wiskunde voor alle leerlingen

Belangrijk uitgangspunt voor de basisvorming is om leerlingen kennis en vaardigheden te laten verwerven die nodig zijn voor een goed functioneren in de maatschappij. De wiskunde in de basisvorming heeft daarom een breed oriënterend karakter. Voor iedere leerling moet de relevantie ervan duidelijk worden. Dat betekent niet dat elke

leerling op hetzelfde niveau en op dezelfde manier aan dit vak moet werken. Wiskunde voor iedereen betekent juist dat er de gelegenheid moet zijn om op een eigen niveau en eigen wijze wiskunde te doen. Voor sommige leerlingen kan dit bijvoorbeeld betekenen dat zij langere tijd op een concreter niveau werken dan anderen. Door wiskunde te doen kunnen leerlingen zelfvertrouwen ontwikkelen en een goed beeld krijgen van hun vermogen wiskunde te bedrijven. Het is van belang dat elke leerling ook in staat is in overeenstemming daarmee te werken. Wiskundeonderwijs volgens dit uitgangspunt levert tevens een bijdrage aan de persoonlijke vorming van ieder individu. Het kan bijdragen aan het scherpen van het verstand, het bevorderen van een exacte uitdrukkingswijze, het stimuleren van creativiteit en het ontwikkelen van gevoel voor schoonheid.

Contexten

Contexten moeten aan bepaalde criteria voldoen willen ze een bijdrage leveren aan het leerproces. Het is in de eerste plaats van belang dat ze (1) geschikt zijn om wiskunde te leren. Daarnaast moeten ze voor leerlingen, dat wil zeggen (2) voor meisjes én jongens, herkenbaar zijn. Dit betekent niet dat elke context uit de directe belevingswereld van de leerling hoeft te komen. Ze moeten wel voldoende leerling-nabij zijn, een leerling moet zich er iets bij kunnen voorstellen. Een context hoeft ook niet altijd afkomstig te zijn uit de ons omringende werkelijkheid, deze kan ook uit een voor leerlingen vertrouwd gebied van de wiskunde komen. Bij de keuze van geschikte contexten doen zich wel problemen voor. Een context kan nooit zo gekozen worden dat deze aan elke leerling een vanzelfsprekende ingang tot de wiskunde biedt. Daarvoor zijn de verschillen tussen de leerlingen te groot. Juist in de leeftijdscategorie twaalf tot zestien zijn ook de verschillen tussen meisjes en jongens extra groot.

Door de traditie van het wiskundeonderwijs en van de toepassingsgebieden van wiskunde zijn contexten vaak afkomstig uit technische richtingen. Ook de opleiding van docenten en hun belangstelling maakt dat contexten vaak niet uit de volle breedte van het leven komen. De vraag is gerechtvaardigd of bij het gebruik van contexten niet stelselmatig bepaalde groepen leerlingen worden benadeeld, omdat zij met de gekozen contexten te weinig affiniteit hebben.

Er is nog een tweede kritische kanttekening te maken over contexten binnen het wiskundeonderwijs. Leerlingen moeten de gelegenheid krijgen zich in te leven in zo'n context en dat kost tijd. Als een context louter een verpakking is van formele wiskunde functioneert deze niet en bereikt daardoor eerder een tegengesteld effect.
De kwesties die hier aangeroerd worden, zijn zeker geen pleidooi om contextgebruik binnen de wiskunde af te schaffen. Ze zijn wel bedoeld om te wijzen op de mogelijke neveneffecten van contextgebruik.

Voor meisjes, maar ook voor leerlingen uit etnische groepen of uit sociaal lagere milieus kan onzorgvuldig gebruik van contexten extra nadelig uitvallen. Er wordt immers een beroep gedaan op een vorm van algemene ontwikkeling, waarvan verondersteld wordt dat de leerling daarover beschikt. Wanneer een leerling onvoldoende bekend is met de context en als er niet voldoende tijd is om die achterstand weg te werken, zal een context eerder storend gaan werken dan een steunende functie vervullen. Het is van belang dat contexten gekozen worden uit het brede terrein van het leven, ook uit gebieden die nu nog vooral door vrouwen beheerst worden.

Bruikbaarheid in schoolvakken en dagelijks leven

Een ander uitgangspunt is dat het wiskundeonderwijs niet uitsluitend van nut moet zijn voor vervolgopleidingen, maar dat het ook bruikbaar moet zijn in niet-wiskundige situaties, bijvoorbeeld in het dagelijks leven of bij andere schoolvakken. Wiskunde beschouwen als een vak dat van belang is voor allen, betekent dat de nadruk verschuift van wiskunde bedrijven om de wiskunde zelf naar wiskunde leren vanwege de bruikbaarheid in andere vakken en het dagelijks leven. Door deze keuzen te maken zal de vraag 'Waar heb je wiskunde voor nodig?', of 'Wat kan ik ermee?', die nu vaak aan wiskundedocenten gesteld wordt, niet meer zo veel voorkomen. Lange tijd was wiskunde met name een vak, waarop leerlingen geselecteerd werden. De leerstof was afgeleid van hetgeen nodig was voor wiskunde in de bovenbouw of voor technische opleidingen. Er waren weinig raakvlakken met andere vakken en als die er al waren was dat altijd in de exacte hoek. Nu vinden we het van belang dat zoveel mogelijk leerlingen de relevantie van het vak ervaren. Dit betekent dat de nieuwe inhouden en de daarbij behorende lesmaterialen niet meer uitsluitend voorbereiden op technische aspecten van het leven. Er is bewust naar gestreefd ook raakvlakken met andere schoolvakken te bieden zoals aardrijkskunde, (kunst)geschiedenis, tekenen, biologie en beroepsgerichte vakken ook uit andere dan technische richtingen.

Vervolgopleiding en beroep

Er is ook ruime aandacht besteed aan de voorbereiding op vervolgopleidingen. In aansluiting op de basisvorming moeten er voor het vervolgonderwijs noodzakelijke vaardigheden ontwikkeld worden. Bij de invulling van het nieuwe programma wordt rekening gehouden met aansluiting op een breed terrein van vervolgopleidingen. Dit betreft enerzijds de bovenbouw van havo en vwo, waarbij voorbereid moet worden op wiskunde A en B, anderzijds het mbo, met al zijn richtingen. In het 12-16 programma zijn daarom ter oriëntatie voorbeelden te vinden uit dit hele gebied. Met name wat betreft het mbo was er voornamelijk aandacht voor de technische richtingen. Meisjes kiezen

echter zelden voor deze richtingen; zij vonden in de wiskunde weinig aanknopingspunten voor de door hen gekozen vervolgopleidingen. Door ook voorbeelden uit andere dan technische richtingen op te nemen, zoals het mdgo, agrarisch onderwijs, opleiding voor mode en kleding, consumptieve technieken wordt met hen meer rekening gehouden. Er is nog een opmerking te maken in verband met de voorbereidende waarde van wiskunde. Het gaat niet alleen om de aansluiting van wiskunde op wiskunde, maar ook om de aansluiting van wiskunde uit de basisvorming op de beroepsgerichte vakken in de vervolgopleidingen. Uit deze vakken zijn daarom veel voorbeelden gekozen. Behalve uit de vervolgopleidingen komen er voorbeelden uit een breed scala beroepen voor. Dit zorgt voor herkenbaarheid en maakt ook het belang van wiskunde voor diverse beroepen duidelijk.

Wiskunde doen

'Wiskunde moet je doen'; deze uitspraak vormt een belangrijk uitgangspunt voor het werk van het team W12-16. Wiskunde is geen statisch geheel van kennis en regels dat overgedragen wordt. Leerlingen bouwen hun eigen wiskundige kennis en vaardigheden op. Ze worden gestimuleerd hun eigen informele kennis en ervaring te benutten. Dit is een belangrijk middel bij het ontwikkelen van wiskundig inzicht. Er is aandacht voor de proceskant van de wiskunde, voor de wiskunde als menselijke activiteit. Daarmee wordt ingespeeld op de behoefte van veel leerlingen greep te houden op wat ze doen. Het klakkeloos werken met kant en klare regels en recepten is voor een aantal leerlingen een groot probleem. Door inzicht in de achtergronden van de processen, de regels en de formules kunnen leerlingen een beter beeld krijgen van hun vermogen wiskunde te bedrijven.
Bij het actief bezig zijn met wiskunde hoort ook het werken met concreet materiaal. Hier ligt tevens de mogelijkheid rekening te houden met verschillen in ervaringen. Met name op het gebied van meetkunde lijken meisjes een achterstand te hebben wat betreft de ontwikkeling van ruimtelijk inzicht. Het werken met concreet materiaal kan een middel zijn om die achterstand op te vangen.

Sociale aspecten van wiskundeonderwijs

Onderwijs is een sociale activiteit. Wiskundeonderwijs moet daarop geen uitzondering zijn. Samenwerken aan wiskundige problemen laat dit sociale aspect naar voren komen. Het is van belang dat leerlingen ook leren communiceren over de wiskunde, met elkaar en ook met de docent. Samenwerken is een werkwijze die veel leerlingen, met name meisjes, aanspreekt. Ook aandacht voor taalgebruik is daarbij van belang. In het nieuwe programma wordt regelmatig aan leerlingen gevraagd een denkproces te verwoorden, te redeneren in een bepaalde situatie of een keuze te beargumenteren.

Cultureel en historisch perspectief

De huidige wiskunde is het resultaat van eeuwenlang werken van mensen, die bezig zijn geweest om verklaringen te vinden voor verschijnselen, oplossingen voor problemen, en om nieuwe richtingen uit te denken. Produkten van hun arbeid vinden we terug in onze schoolwiskunde. Alleen worden de resultaten dan vaak gepresenteerd als absolute waarheden in plaats van relatieve mogelijkheden. Meestal ook wordt het resultaat als produkt aangeboden zonder de soms moeizame weg te tonen die afgelegd moest worden om tot het resultaat te komen. Naast het tonen van het produkt zou er ook meer zichtbaar moeten worden van het proces, de ontwikkelingsgang, de achtergronden, die tot het voorlopige eindprodukt hebben geleid. Dat is ook een aspect van menselijke wiskunde. Naast aandacht voor wiskunde in historisch perpectief zou er ook aandacht geschonken moeten worden aan wiskunde in cultureel perspectief. Wiskunde is niet alleen produkt van alle tijden, maar ook van alle plaatsen. Afhankelijk van de omgeving waarin mensen leven ontwikkelen ze hun eigen wiskunde. Nu domineert nog te veel de gedachte in ons wiskundeonderwijs dat hier mooie resultaten van de westerse beschaving getoond worden. Juist ook bij wiskunde zijn heel andere aspecten te belichten. Wiskunde is niet statisch, maar een vak in ontwikkeling. Dat toont ook deze leerplanvernieuwing.

Leerstofgebieden

In het nieuwe leerplan worden vijf leerstofgebieden onderscheiden (algebra, meetkunde, rekenen, informatieverwerking en statistiek en geïntegreerde wiskundige activiteiten (gwa)), die elk hun eigen karakter hebben. De manier waarop de uitgangspunten geconcretiseerd kunnen worden zal per leerstofgebied verschillend zijn.

Bij *algebra* wordt in het begin veel aandacht besteed aan grafieken die bepaalde situaties in beeld brengen. Ze beschrijven het verband behorende bij die situatie. De wiskunde en de situatie zijn direct met elkaar verbonden. De keuze van die situaties is tamelijk vrij. Zo kan er voor gezorgd worden dat zoveel mogelijk leerlingen, jongens en meisjes, situaties aantreffen waar ze vertrouwd mee zijn. Dat wil zeggen dat ze niet uitsluitend uit de technische hoek komen. Contexten komen bijvoorbeeld uit de biologie of uit de medische wereld (groeiverloop) of uit het dagelijks leven (energieverbruik, auto's huren). In het mavo/vbo C/D-programma blijven situaties tot het eind toe binnen de algebra een rol spelen. Formules die een verband beschrijven, worden vaak door leerlingen zelf ontdekt en geformuleerd. Leerlingen zijn vrij om eigen variabelen te kiezen. Door woordformules toe te laten hebben zij langer greep op 'waar het over gaat'. Ook

Leerlingen zijn vrij om eigen variabelen te kiezen. Door woordformules toe te laten hebben zij langer greep op 'waar het over gaat'. Ook bij de keuze van situaties waarin formules een rol spelen kan gezorgd worden voor diversiteit: vuistregels uit het dagelijks leven (leesbaarheid van een tekst, omzetten van graden Celsius in Fahrenheit, verband tussen lengte en gewicht, verschillende systemen voor schoenmaten) en formules uit andere schoolvakken en uit het beroepsleven.

Bij de *meetkunde* vormen eigen ervaringen van leerlingen het uitgangspunt voor de meetkunde. De leerling is als het ware zèlf de context. Elke leerling heeft ervaring met kijken of liever gezegd met waarnemen. Die ervaringen hoeven niet voor iedereen hetzelfde te zijn. Door het verschil in ervaringen centraal te stellen kan daar op ingespeeld worden. Bij meetkunde wordt veel gewerkt met concreet materiaal. Leerlingen worden zo in staat gesteld bijvoorbeeld bouwplaatjes te maken, te tekenen met behulp van passer en liniaal, te knippen, te vouwen en te plakken, blokjes te gebruiken om objecten te bouwen, enzovoort. Dit geeft de gelegenheid om mogelijke achterstanden op het gebied van ruimtelijk inzicht weg te werken. Binnen de meetkunde kan aandacht besteed worden aan de esthetische kant van de wiskunde. Dit kan bijvoorbeeld door diverse patronen en ornamenten te onderzoeken. Werken aan meetkunde levert vaak mooie resultaten op, zoals tekeningen, constructies, symmetrische versieringen. Deze esthetische kanten van de wiskunde kunnen op een natuurlijke manier bij meetkunde naar voren komen.

Bij *informatieverwerking en statistiek* is de keuze van situaties waar de gegevens betrekking op hebben, heel vrij. Daardoor kan goed rekening gehouden worden met interesses en ervaringen van leerlingen. De realiteitswaarde van dit soort onderdelen is ook hoog. In het onderdeel kritisch leren omgaan met cijfermatige gegevens kan expliciet aandacht besteed worden aan verschillen tussen meisjes en jongens of mannen en vrouwen. Bijvoorbeeld door gegevens te presenteren over de deelname aan verschillende vormen van onderwijs, vrijetijdsbesteding of participatie op de arbeidsmarkt. Dat zijn aanknopingspunten om in de wiskundeles verschillen tussen jongens en meisjes, mannen en vrouwen aan de orde te stellen.

Wat voor informatieverwerking en statistiek is gezegd, geldt ook voor *rekenen*. Ook daar bestaat een grote vrijheid in keuze van situaties en contexten waarin wordt gerekend. De toepasbaarheid is groot; dit kan motivatieverhogend werken. Door naast het resultaat van berekeningen ook aandacht te besteden aan de manier van rekenen krijgen leerlingen bovendien meer oog voor het rekenproces.

Het onderdeel *geïntegreerde wiskundige activiteiten* leent zich bij uitstek om een aantal van de genoemde uitgangspunten te verwezenlijken: bijvoorbeeld aansluiten bij interesse en ervaringen van leerlingen. De keuze van onderwerpen is geheel vrij. Met het woord 'geïnte-

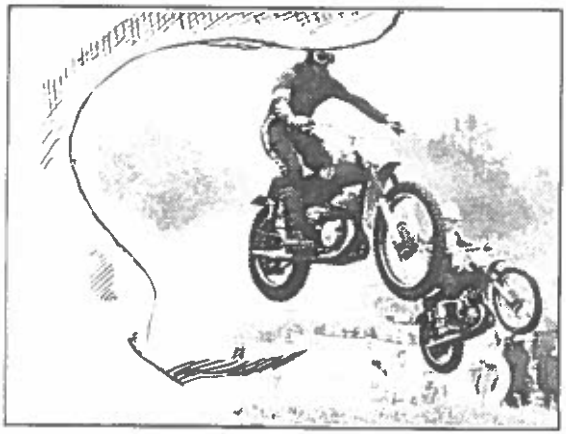
lijkheden het belang van wiskunde duidelijk te maken. Door bij gwa aan te sluiten bij beroepen en beroepskeuze kan op het belang van wiskunde voor vervolgopleiding en beroep gewezen worden. Gwa kan op diverse manieren vormgegeven worden: een enkele les, opdrachten aan tweetallen leerlingen en een project van enkele lessen. Door hiermee te variëren kunnen andere werkvormen aan bod komen. Samenwerken, dat in gewone lessen wel eens als storend wordt ervaren, is hierbij een geschikte werkvorm.

Voorbeelden uit ontwikkelde leerlingmaterialen

In de paragraaf 'Uitgangspunten' is een aantal uitgangspunten beschreven waarmee bij het ontwikkelen van leerlingenmaterialen in W12-16 rekening is gehouden. Deze uitgangspunten zijn voor een deel gebaseerd op de uitgangspunten voor realistisch wiskundeonderwijs en zijn daarmee niet specifiek gericht op het 'rekening houden met meisjes'. Dit type wiskundeonderwijs biedt hiervoor echter wel veel aanknopingspunten. Er worden aspecten van de wiskunde naar voren gehaald die in het oude programma vaak onderbelicht bleven. Hierna laten we enkele voorbeelden zien uit ontwikkelde leerlingenmaterialen waarin die uitgangspunten geconcretiseerd zijn. Het zijn vaak kleine dingen waarin zich dat uit. Uit de voorbeelden blijkt dat rekening houden met meisjes soms in kleine dingen kan zitten. De rol van de docent is belangrijk, als het erom gaat het materiaal te laten functioneren zoals het door de ontwikkelaar bedoeld is. De voorbeelden zijn afkomstig uit diverse pakketten en zijn hier natuurlijk enigszins uit hun verband gelicht. Voor de voorbeelden in hun natuurlijke omgeving verwijzen we naar de W12-16-pakketten en naar schoolboeken.

Interesse

Een van de eerste opdrachten uit het meetkundepakket 'The Drongs' gaat over een plaatje waarop iemand naar een merrie met veulen kijkt. Het had ook dit plaatje kunnen zijn.



De vragen gaan over het blikveld. 'Wat kun je zien, hoe ver kun je opzij van je kijken?' De keuze van wat gezien wordt is vrij. Het onderwerp daarvan is inwisselbaar. Dat betekent dat dit gekozen kan worden op andere dan wiskundige of didactische gronden. In dit geval kan er met verschillende interesses van leerlingen rekening gehouden worden. De paarden spreken meisjes zeer aan, blijkt in de klas. Uit diverse onderzoeken (onder andere naar voorkeur voor onderwerpen bij natuurkunde) is bekend dat meisjes het prettig vinden als er mensen of dieren voorkomen in opgaven. Met dit plaatje is meteen aan het begin hun interesse gewekt. Het pakket vervolgt met een opdracht om je eigen blikveld te meten. Hierdoor worden de leerlingen zelf actief betrokken bij het onderwerp. Ze zijn als het ware zelf de context. Ook hierdoor wordt de betrokkenheid bij de wiskunde vergroot.

Beroepen

In het materiaal van W12-16 komen geregeld voorbeelden uit diverse beroepen voor. Door de beroepen uit een breed scala te kiezen wordt de leerlingen de mogelijkheid geboden zich ermee te identificeren. Er gaat een dubbele boodschap vanuit: enerzijds komt er als vanzelfsprekend naar voren dat elke leerling later een beroep kiest. Voor meisjes was dat lange tijd niet zo vanzelfsprekend. Door de zogenaamde 1990-maatregel is hier echter verandering in gekomen. Het laten voorkomen van beroepen in de wiskundeboeken biedt leerlingen gelegenheid zich ook bij dit vak op hun toekomst te oriënteren. Daarnaast wordt de relevantie van de wiskunde voor verschillende

In het pakket 'Praktisch Rekenen 3' staat het werken met verhoudingen en procenten centraal. Een van de doelstelling is dat leerlingen de relatie tussen breuken, procenten en decimale getallen kennen en kunnen gebruiken. Enkele opgaven hierover hebben als context personeelsadvertenties.

Je kunt de grootte van een part-timebaan op drie manieren aangeven:

- *met een aantal uren*
- *met een percentage*
- *met een breuk.*

Als je die ene manier weet, kun je de andere vinden:

financieel administratief medewerker (m/v)
voor 32 uur per week

$\frac{32}{40}$ deel of wel 0,8
dus een baan van 80%

Bij de volgende banen is steeds op één manier de grootte van de baan aangegeven. Schrijf bij elke baan ook de twee andere manieren op.

① verpleegkundigen m/v
90%

② **boekhoudkundig medewerk(st)er**
(vak.nr. 12403)
voor 30 uur per week

③ **PART-TIME DATATYPISTEN (M/V)**

- 20 uur per week
- 's ochtends 9.00-13.00 uur
- eventueel (in drukke perioden) in overleg ook in de middaguren.

④ **MEDEWERKER BIBLIOTHEEK (M/V)**
voor 16 uur per week tot 1-8-1990.

⑤ **LOGOPEDIST M/V**
met 0,6 weektaak

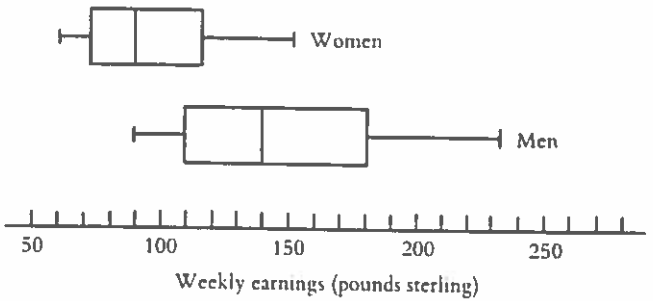
⑥ **Docent informatica**
(0,8 tot 1,0 weektaak)

Het is handig om te weten hoeveel uur je moet werken bij een baan van 80% of bij een baan van 0,3 of een van 5/10. Om uit te rekenen hoeveel je dan verdient, is het nodig om inzicht te hebben in de baanomvang en is het handig als je schattend kunt rekenen. Hiermee wordt een directe relatie gelegd tussen het rekenen, met name het onderwerp procenten, en de arbeidsmarkt. Met dit soort voorbeelden wordt 'zin' gegeven aan de wiskunde.

Beroepen komen ook voor bij de andere leerstofgebieden. Zo kan bijvoorbeeld de verdeling van mannen en vrouwen over de verschillende beroepen, zelf ook onderwerp van de wiskunde zijn. Het volgende voorbeeld dat indirect betrekking heeft op beroepen komt uit een statistiekpakket.

Salarissen

Boxplots worden vooral gebruikt om twee of meer groepen met elkaar te kunnen vergelijken. Bijvoorbeeld de inkomens van werkende mannen en vrouwen in Engeland:



Kijk naar de middelste 50% van beide groepen. Wat zijn de salarisgrenzen van die groepen?

Hieronder staan drie beweringen. Geef op elke bewering commentaar, uitgaande van de boxplots die hierboven gegeven zijn.

a *Bewering A: 'alle vrouwen verdienen in Engeland minder dan de mannen.'*
b *Bewering B: 'vrouwen verdienen in Engeland in het algemeen minder dan mannen.'*
c *Bewering C: 'vrouwen worden slechter betaald dan mannen.'*

Indelingen naar mannen en vrouwen zijn in de statistiek heel gangbaar en komen daardoor niet opdringerig over. Ze geven wel aanleiding tot kritisch te kijken naar informatie, hetgeen een van de doelstellingen van dit leerstofgebied is.

Het is bij de keuze van de voorbeelden belangrijk om vertekeningen te voorkomen. Dat wil zeggen dat er niet geforceerd een eenzijdig beeld moet ontstaan, door bijvoorbeeld alle traditioneel mannelijke beroepen uit te laten voeren door vrouwen of andersom. Het is wenselijk om hierin op allerlei mogelijke manieren te combineren.

Ervaringen gebruiken

Aansluiten bij de eigen ervaringen van leerlingen is erg belangrijk voor het ontwikkelen van inzicht op elk gebied. Het ruimtelijk kijken, diepte aanbrengen en diepte zien in tekeningen, is voor veel leerlingen moeilijk. Bovendien blijken meisjes een achterstand te hebben op het gebied van ruimtelijk inzicht. Eerder werd aangeduid dat dit te maken zou kunnen hebben met een verschil in ervaringen waarin ruimtelijk inzicht een rol speelt. Buiten spelen, voetballen, met blokken bouwen, zijn activiteiten waarbij ruimtelijk inzicht wordt ontwikkeld en gebruikt. Het zijn activiteiten die meer door jongens dan door meisjes worden uitgevoerd.

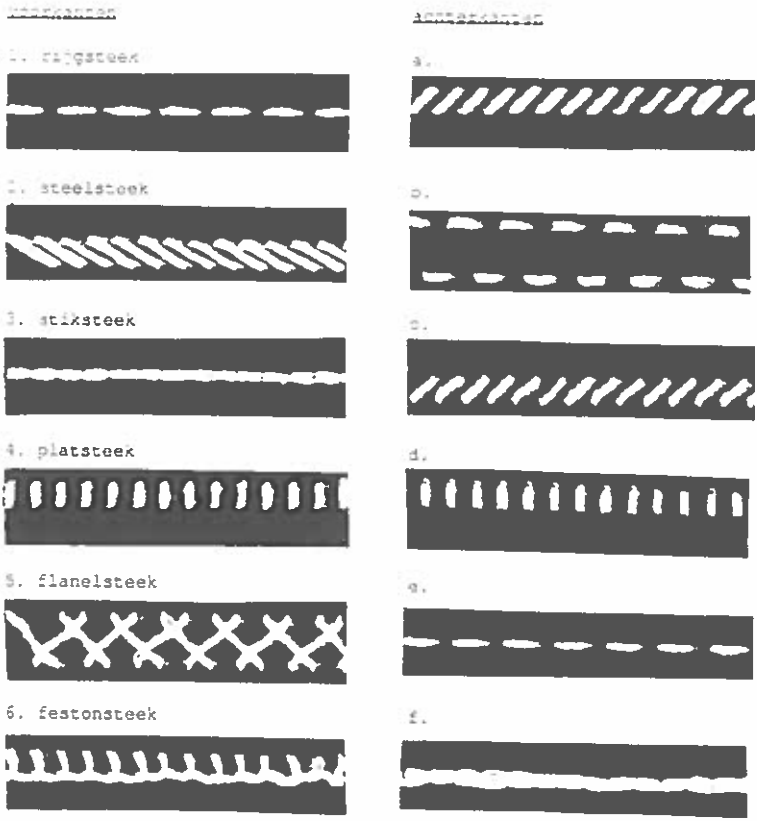
Bij het maken van materiaal met als doel het ontwikkelen van ruimtelijk inzicht is dan ook gezocht naar ervaringen die meisjes hiermee hebben. Bij het werken met make-up, bijvoorbeeld het aanbrengen van oogschaduw of rouge, wordt diepte gesuggereerd. In het pakket 'Kubus make-up' is deze context gekozen als instap. Leerlingen moeten in een tekening van een paar ogen deze boller laten lijken door er 'schaduw' op aan te brengen. Meisjes die ervaring hebben met make-up worden door deze ervaring geholpen bij het maken van de opgave. Het pakket vervolgt onder andere met opgaven waarbij in tekeningen van allerlei voorwerpen (bloempot, gordijnen, huis, kubus) diepte gesuggereerd moet worden. Ook het kunnen lezen en interpreteren van tekeningen van ruimtelijke objecten heeft te maken met eerder opgedane ervaringen. Voorwerpen die je in werkelijkheid goed kent, zul je in een tekening makkelijker herkennen. Door allerlei soorten voorwerpen op te nemen zowel van binnen huis als van buiten, zullen meer leerlingen hun ervaringen kunnen gebruiken.

Een ander voorbeeld waarbij eigen ervaring een rol speelt is te vinden in het algebrapakket 'Trappers'. De ervaring die een leerling heeft met het fietsen helpt hem of haar de relatie te begrijpen tussen het aantal slagen dat je trapt en het aantal omwentelingen dat je wiel maakt en daarmee de afstand die je aflegt.

Een laatste voorbeeld dat we hier noemen komt uit het pakket 'Regelmaat en Symmetrie'. Het gaat daarbij om het verbinden van patronen die bij elkaar horen. Daarbij is onder meer de context van borduursteken gekozen. Bij een van de opgaven is het de bedoeling dat de leerlingen de voor- en achterkant van de patronen die bij bepaalde steken ontstaan bij elkaar zoeken. Ervaring met borduren is hierbij een voordeel. Voor wie die ervaring niet heeft en er niet uitkomt, is een mogelijkheid om de opdracht zelf met behulp van concreet materiaal uit te voeren. We besluiten deze paragraaf met een fragment uit een lesverslag:
We schrijven voorjaar 1988, het project W12-16 is in z'n eerste jaar. Docent Wim Schaafsma, verbonden aan de GSG Greydanus te Zwol-

le, schroomt niet om een hele klas aan het borduren te zetten. Aan leiding is de volgende opgave.

Hieronder zie je nog meer borduursteken.
Welke voor- en achterkanten horen bij elkaar?



Leraar: Sommigen kunnen som 1 misschien uit hun hoofd, maar we gaan het eerst echt doen.
Jongen: Ik snap er niks van.
Leraar: Weet je niet hoe je moet borduren?
Jongen: Nee.
Leraar: Vraag het aan één van de meisjes.
Meisje: Nu nog een koekje erbij en een kopje thee.
Jongen: Ik doe het wel uit m'n hoofd, Meneer.
Leraar: Nee, je moet het eerst echt zelf doen.
Jongen: Het is voor het eerst van m'n leven dat ik borduur.
Meisje: Meneer, moet je ook afhechten?

Jongen: Wat is dat, afhechten?
Jongen: Mag ik het uithalen, anders moet ik de draad weer door de naald doen.
Jongen: Meneer, hoe moet de stiksteek.
Leraar: M (een meisje), hoe moet de stiksteek?
Meisje: Meneer, wanneer gaan we breien?
Meisje: Als z'n vrouw in verwachting is.
Meisje: Ik ben niet zo sterk in babykleertjes, een voorpand en achterpand enzo.
Jongen: Wanneer krijgen we eens koken?
Meisje: Dit is geen wiskunde.
Leraar: Waarom niet?
Meisje: Dit is naailes.
Leraar: Als je een cirkel moet tekenen zeg je toch ook niet dat het tekenles is?
Meisje: Ik vind het wel leuk dit.
Jongen: Ik heb m'n leesbril vergeten.
Jongen: Hoe doe je de stiksteek?
Leraar: A (een meisje), kom even de stiksteek uitleggen.
Meisje: Wat moet je doen als je klaar bent?
Leraar: Ben je al klaar?
Jongen: Uitslover.
Leraar: Het stencil afmaken.
Jongen: Het zijn net boekenleggers.
Leraar: Dit moet je de volgende keer afhebben. Het is het huiswerk.
Jongen: Huiswerk?
Leraar: Als je slim bent, vraag je het aan je moeder.
Jongen: Of aan mijn kleine zusje.
Meisje: Ik zal je moeder wel opbellen, dat zij of je zusje het niet voor je moeten doen.
Jongen: Is dit voor de repetitie?
Meisje: Halen de jongens ook een keer een onvoldoende.
Meisje: Hoe moet de laatste, de festonsteek?
Jongen: De meisjes hebben wel geluk, die hebben heel makkelijk huiswerk.
Jongen: Dat doe je toch niet, borduren onder wiskunde.
Leraar (tegen een meisje): Jij hebt ook niet afgehecht, gewoon een knoop erin gelegd.
Meisje: Ja, maar als je afhecht verpruts je de achterkant.

Eigen inbreng

In de visie op wiskundeonderwijs die ten grondslag ligt aan het W12-16 leerplan is het van belang dat leerlingen ervaren dat wiskunde iets is waar ze zelf een inbreng in hebben en een rol bij spelen. Anders gezegd: leerlingen ervaren dat wiskunde ook over henzelf gaat. Dat be-

tekent dat er rekening moet worden gehouden met wat leerlingen be zighoudt, met zaken die voor henzelf belangrijk zijn, die dichtbij her staan. Elke leraar zal wel ervaring hebben met het feit dat leerlinger bij een vrije keuze van een variabele hun naam, of de eerste letter daarvan, nemen. Bij het werken met computers is meestal het eerste dat wordt ingetypt door een leerling zijn of haar naam. En er zijn nog steeds talloze computergebruikers die als wachtwoord hun eigen naam (of die van een goede vriend of vriendin, hond of kat) kiezen. Bij de software die voor algebra ontwikkeld is, wordt hiermee in zoverre rekening gehouden dat er niet alleen letters als variabele ingevoerd kunnen worden, maar ook hele woorden. Bij experimenten in de klas blijkt inderdaad dat de eigen naam een sterke voorkeur heeft.

Het spreekt vanzelf dat met dergelijke persoonlijke contexten voorzichtig moet worden omgegaan. Zo kan bijvoorbeeld bij statistiek een diagram gemaakt worden van de lichaamslengten van de leerlingen. Maar voor leerlingen die extreem lang of klein zijn kan deze activiteit heel bedreigend zijn. In het W12-16 materiaal is ervoor gekozen dit soort leerling-nabije en daardoor soms gevoelige onderwerpen niet te vermijden. Elke docent zal zelf af kunnen wegen of zo'n onderwerp problemen kan opleveren. Eventueel kan een vraag dan overgeslagen worden. In de kijkmeetkunde, bijvoorbeeld in het eerder genoemde pakket 'The Drongs', ervaren leerlingen dat wiskunde over henzelf gaat, maar ook op andere plaatsen in het materiaal zijn voorbeelden hiervan terug te vinden.

Bij het onderwerp grafen uit de lijn informatieverwerking en statistiek wordt leerlingen gevraagd een gerichte graaf te tekenen van de eigen familiestamboom. In het pakket 'Meten' wordt op diverse plaatsen eigen inbreng van de leerling verwacht. De oude maten die afgeleid zijn van de lichaamsmaten zoals hand, span, duim en voet, moet elke leerling bij zichzelf meten en vergelijken met de standaardmaat die ervoor staat. Even verder wordt de leerlingen gevraagd een plattegrond op schaal van hun eigen kamer te maken. Voor meisjes is de eigen kamer een belangrijk domein. Voor het kunnen schatten van afmetingen is het van belang om over maatkennis te beschikken. Deze maatkennis is vaak persoonlijk. Denk maar aan de al eerder genoemde (oude) lichaamsmaten. Wie meet er niet af en toe door de handspan af te passen of het aantal passen te tellen en dan ervan uit te gaan dat een grote pas ongeveer één meter is. Het opbouwen van een aantal van dit soort persoonlijke referentiepunten maakt deel uit van het pakket meten. Tenslotte nog een voorbeeld uit de statistiek. In een overzicht van tijdsbesteding, kan een leerling zichzelf opzoeken. Daarnaast is er de mogelijkheid om leerlingen bij te laten houden hoe zij zelf hun tijd besteden. Deze gegevens kunnen dan bijvoorbeeld met de klas statistisch verwerkt worden en vergeleken met de gepresenteerde tabel.

Historische, culturele en esthetische aspecten

Er zijn kanten van de wiskunde die in het huidige programma onderbelicht blijven. Dit zijn o.a. het historische, het culturele en het esthetische aspect. Door hieraan meer aandacht te besteden wordt benadrukt dat wiskunde een activiteit is van alle mensen, plaatsen en tijden. Dit maakt het wiskundeonderwijs voor meer leerlingen aantrekkelijk. Het historische aspect krijgt onder meer aandacht bij de meetkunde. Daarin komen oude maten en meetstrategieën voor. Een voorbeeld op het raakvlak van esthetiek en historie is de opdracht waarbij in een schilderij van Saenredam het oogpunt van de schilder moet worden bepaald. De wiskundige kern is inzicht in de methode van perspectief tekenen en het combineren van informatie uit verschillende aanzichten. In het pakket 'Regelmaat en Symmetrie' zijn de drie bovengenoemde aspecten in samenhang met elkaar te vinden in onderstaande opdracht. Fraaie randen vormen daarbij de context voor het onderzoeken van verschillende vormen van symmetrie.

Hieronder staat een aantal randen uit andere landen en andere tijden.

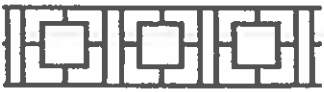
egyptisch
a.

grieks
b.

arabisch
c.

moors
d.

chinees
e.



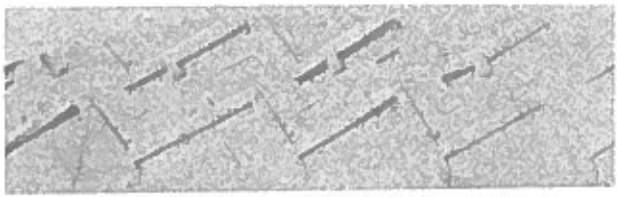
indiaas
f.

Zoek van elke rand het motief, en meet daarvan de lengte (de periode). Welke randen hebben verticale symmetrie-assen?

Dit pakket biedt leerlingen veel gelegenheid om aandacht te besteden aan de vormgeving en afwerking. Er moet veel getekend worden, ook het ontwerpen van patronen komt regelmatig voor. Uit ervaringen op de experimenteerscholen blijkt dat in het bijzonder de meisjes hier veel werk van maken. Dit levert daardoor een positieve beoordeling op. In dit geval maakt het esthetische aspect wel degelijk onderdeel uit van de wiskunde zelf. Dit is wat anders dan meisjes prijzen voor hun nette werk of mooie handschrift.

Een voorbeeld wat misschien niet zo overduidelijk onder dit uitgangspunt valt maar toch de moeite van het vermelden waard is, is het volgende.

Het Kuba-volk in Zaïre (Centraal Afrika) is geboeid door patronen en symmetrie. Elke Kuba-koning moest om te beginnen een nieuw patroon ontwerpen.
Toen een missionaris in 1920 voor het eerst een motorfiets aan de Kuba-koning liet zien, had de koning daarvoor weinig belangstelling. Maar de koning was wel heel geïnteresseerd in het patroon dat de band maakte in het zand. Hij tekende het na en gaf het zijn naam.

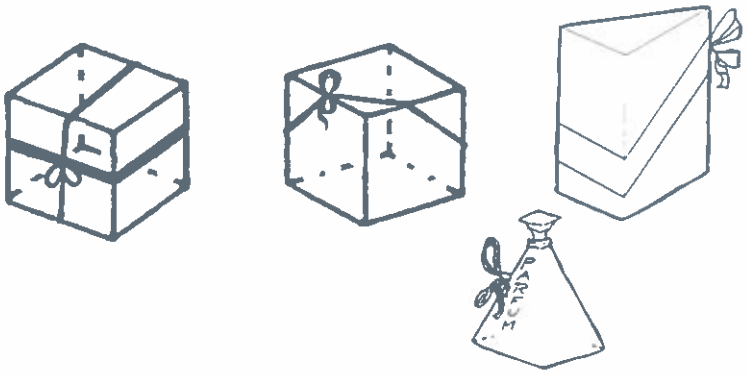


Dit stukje tekst maakt geen onderdeel uit van de opgaven. Toch is het bewust opgenomen in het pakket. Het voegt iets toe, er spreekt uit dat wiskunde ergens over gaat. Het is ook een relativering, in dit geval zou je kunnen zeggen dat er wat van het westers cultuurgoed gerelativeerd wordt. Niet de motorfiets (toch een voorbeeld van een belangrijke technologische ontwikkeling) wordt belangrijk gevonden. De Kuba-koning heeft meer oog voor het patroon van de band. Kijken is subjectief, je ziet dat waar je in geïnteresseerd bent. En ook hier blijkt weer hoe belangrijk de eigen naam gevonden wordt: ook de Kuba-koning geeft zijn naam aan zijn ontdekking.

Integratie

Tot slot nog een voorbeeld waarin we laten zien dat de verschillende uitgangspunten ook samen voor kunnen komen. Een bekend last onderwerp is, het is al eerder gezegd, ruimtelijk zien. Anders dan het oude leerplan wordt er nu al in de onderbouw aan gewerkt. De volgende opgave komt voor in klas 1.

Teken de linten met een rood kleurpotlood en teken de randen als die ontbreken in deze glasdozen.



Deze opgave bereidt onder meer voor op het tekenen van doorsneden in ruimtelijke figuren. In bovenbouwboeken zijn dergelijke opdrachten ook te vinden, maar dan zonder de verpakking van glasdozen en linten. De ervaring leert, dat leerlingen dan veel fouten maken bij het tekenen van doorsneden.

Bij de opgaven in kubus make-up valt dat ondanks het feit dat het hier om eersteklassers gaat erg mee. Enerzijds kan het aanbrengen van een strikje als didactische truc worden beschouwd. Je maakt daarmee je onderwerp wat aantrekkelijker en dat verhoogt de motivatie. Het blijkt echter dat door het simpele toevoegen van een strikje ook de herkenbaarheid en voorstelbaarheid vergroot wordt. Je ziet als het ware het pakje voor je en wie heeft nooit eens gezien hoe een touwtje of strikje om een pakje zit. Hier wordt aangesloten bij ervaringen die veel leerlingen (in dit geval zeker ook veel meisjes) hebben op het gebied van ruimtelijk inzicht. De vraagstelling blijft wiskundig correct, maar meer leerlingen zullen de opdracht in deze vorm goed kunnen oplossen. Daarbij is het met eenvoudige middelen mogelijk de opdracht te concretiseren om zo tot een goed antwoord te komen. Natuurlijk benadrukt het strikje ook het esthetisch aspect. Dat biedt leerlingen die dat willen de gelegenheid er iets moois van te maken.

Het experimentele examen wiskunde lbo/mavo C/D

Bij het maken van de examens is niet expliciet gezocht naar contexten die speciaal voor meisjes geschikt zouden zijn, zo die al te vinden zijn. Toch is er wel een aantal aspecten aan het experimentele examen te noemen die voor meisjes gunstig kunnen uitpakken. We noemen er hier een aantal aan de hand van het experimentele examen van 1991.

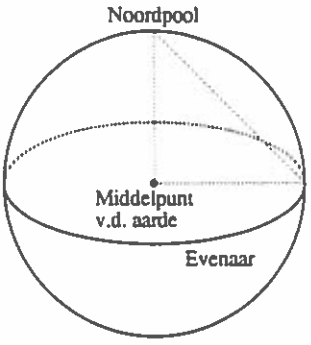
Geen meerkeuzevragen

Er worden geen meerkeuzevragen gesteld. In de analyse van het reguliere lbo/mavo-examen van 1991 is door het CITO bevestigd wat de werkgroep Vrouwen en Wiskunde al eerder beweerde, namelijk dat meerkeuzevragen door meisjes vaak slechter worden gemaakt dan door jongens met dezelfde wiskundige capaciteiten. Uitgangspunt bij de experimentele examens is geweest dat het vooral gaat om de manier waarop het antwoord gegeven wordt. Antwoorden liggen niet eenduidig vast en leerlingen hoeven niet de gedachtengang van iemand anders te volgen. Een door de examenmakers niet voorziene antwoord kan goed zijn op grond van de redenering. In het correctievoorschrift komt dat tot uiting door voorbeelden van mogelijke uitwerkingen op te nemen.

Taal

Bij het stellen van vragen wordt geprobeerd 'commandeertaal' te vermijden. Dus wordt liever niet 'Schrijf op' en 'Bereken' maar waar mogelijk is gewone spreektaal gebruikt. Een voorbeeld uit het C-examen, eerste tijdvak 1991:

De lengte van de evenaar is ongeveer 40 000 km.
Hoeveel km is het ongeveer van de Noordpool tot de evenaar, gemeten over de aarbol?
Stel je voor dat je rechtstreeks door de aarde heen kunt gaan.
Hoeveel km is het dan van de Noordpool tot de evenaar?



Niet: 'Bereken de afstand van de Noordpool tot de evenaar, dwars door de aarde bepaald.' Wel: 'Stel je voor dat je rechtstreeks door de aarde heen kunt gaan. Hoeveel km is het dan van de noordpool tot de evenaar?' De tweede manier heeft als voordeel dat het gebruik van samengestelde zinnen zoveel mogelijk wordt vermeden. Bovendien staat één zin niet volgepropt met informatie. Per zin kunnen leerlingen makkelijk de essentie isoleren. Taalgebruik blijft een punt van grote zorg omdat de druk groot is om te komen tot wiskundig scherpe formuleringen. Bij het opstellen van de examens gaat het telkens om een compromis tussen een formulering die wiskundig juist is en een formulering die voor leerlingen van dit niveau begrijpelijk is. De neiging bestaat om vooral aan de eerste eis tegemoet te komen ten koste van de tweede. Vragen waarbij mocht worden volstaan met een antwoord zonder toelichting waren bij de experimentele examens van 1990 en '91 voorzien van een rondje. Dit is voor leerlingen een eenvoudig en duidelijk signaal, waarbij weinig woorden nodig zijn.

Formulekaart

Leerlingen mogen een formulekaart gebruiken tijdens schoolonderzoeken en examen. Dit versterkt het gevoel van zekerheid: het examen kan niet helemaal misgaan omdat je de noodzakelijke formules niet op het juiste moment kunt produceren.

Tijdsdruk

Er is bewust geprobeerd om ervoor te zorgen dat leerlingen voldoende tijd hebben om het examen te maken. Niemand hoeft in tijdnood te komen. Toch waren ook bij het examen 1991 veel leerlingen tot het einde van de beschikbare tijd bezig. De docenten hadden de indruk dat meisjes vaak minder risico's durven nemen dan jongens en langer bezig blijven met een vraag waar ze niet uitkomen.

Contexten

De contexten zijn uit een zo breed mogelijk interessegebied gekozen. Een overzicht van de contexten uit de mavo/lbo-examens C en D van 1991 (eerste tijdvak):

- Kinderen uit een klas hebben hun hartslag gemeten.
- Welke aardbeienjam is zoeter?
- Waterverbruik per etmaal, gemeten door een waterleidingbedrijf.
- Het logo van de NS.
- De actie: 'Help de Russen de winter door!'
- Een fabrikant maakt betonnen blokken waar later een buis in moet worden aangebracht.
- Wandkleed van patchwork waarop je kubusjes en balken ziet.
- Marianne Muis vestigt twee zwemrecords.
- De marathon in Rotterdam.

- Waarschuwingsbord bij een steile weg.
- Een hele serie parabolen, $y = x^2 + 2x + p$.

In het Examenprogramma (juli 1992) doet de COW een aantal aanbe velingen over de wenselijk geachte stijl en presentatie van het eind examen. Zij beveelt onder meer 'opgaven in de examens te formuleren als herkenbare en inleefbare probleemsituaties' en 'zoveel als moge lijk is normale omgangstaal en andere presentatievormen uit het da gelijks leven te gebruiken en typisch examenjargon te vermijden'.

Checklist voor materialen

In deze paragraaf geven we een aantal aanbevelingen voor het ont wikkelen van lesmateriaal, waarin rekening gehouden wordt met jon gens en meisjes in de klas. Uiteraard zijn deze thema's niet strikt t scheiden. De indeling is slechts bedoeld om enige ordening aan t brengen. Omdat lesmateriaal en didactiek niet zonder elkaar kun nen, zijn er ook aanbevelingen over didactiek en interactie in de kla opgenomen.

Het beeld van wiskunde

1 Laat het maatschappelijk nut van wiskunde zien.
2 Besteed aandacht aan de esthetische kant van wiskunde.
3 Laat de historische en culturele aspecten van wiskunde zien.

Realistisch wiskundeonderwijs

4 Kies contexten gevarieerd en sluit aan bij de belangstellingswerel van jongens en meisjes. Houd hierbij rekening met de leeftijd van d leerlingen.
5 Maak gebruik van concrete materialen, denkmodellen, visualisatie en schema's.
6 Doe een beroep op eigen creativiteit van leerlingen.

Structuur in de leerstof

7 Sluit aan bij wat leerlingen al weten. Biedt leerlingen de gelegenhei hun kennis en vaardigheden op het gewenste beginniveau te brer gen.
8 Bied structuur en overzicht over wat er geleerd moet worden.
9 Ga niet te snel over op abstracte, formele redeneringen, gebruik ve demonstratietaal.
10 Geef aan wat de status van informatie is: accepteren of begrijpen.

Interactie in de klas

11 Besteed niet alleen aandacht aan het produkt van de wiskunde, maa ook aan het proces.

12 Bied open opdrachten aan en waardeer verschillende oplossingsstrategieën.
13 Bied mogelijkheid tot samenwerking en discussie, maar stel bij groepswerk de groepen zorgvuldig samen.
14 Zorg voor een eerlijke verdeling van aandacht over jongens en meisjes; let ook op de manier van vragen stellen.

Taalgebruik en illustraties

15 Zorg dat vrouwen/meisjes en mannen/jongens ongeveer even vaak voorkomen in leerteksten.
16 Zorg voor een goed evenwicht tussen 'rolbevestigende' en 'roldoorbrekende' situaties in tekst en illustraties.

Toetsen

17 Werk met variatie in toetsvormen, zowel schriftelijke, mondelinge als praktische toetsing.
18 Geef zowel toetsen waarbij de tijd beperkt is als toetsen waarbij dat niet zo is.
19 Geen meerkeuzevragen, maar honoreer eigen redeneringen.
20 Geef genoeg tijd, en laat het gebruik van een formulekaart toe.
21 Vermijd commandeertaal.
22 Kies de contexten van de opgaven breed.

Aanbevelingen voor de toekomst

Onderzoek

Er is in Nederland nauwelijks onderzoek gedaan naar de oorzaken van de achterblijvende belangstelling van meisjes voor wiskunde. Hier is echter wel behoefte aan. Het gaat ons dan vooral om kwalitatief onderzoek. Welke factoren zijn wel of niet van invloed?

Lesmateriaal

Bij het maken van materiaal kan de checklist dienst doen om te beoordelen of wel voldoende rekening is gehouden met het feit dat leerlingen jongens én meisjes zijn.

Concrete materialen

In het kader van de leerplanvernieuwing wordt het inrichten van een wiskundewerklokaal en het gebruik van concrete materialen sterk aangemoedigd. Ook bij het kiezen van materialen kan er op gelet worden dat de spullen uit diverse gebieden van het leven komen: bijvoorbeeld melkpakken naast blokken hout, een centimeter (uit de naaidoos) naast een duimstok.

Opleiding

In de opleidingen tot wiskundedocent zou expliciet aandacht besteed moeten worden aan meisjes in het wiskundeonderwijs. De 'Werkmap Wiskunde & Emancipatie' van het project 'Wiskunde en Emancipatie aan de Hogeschool Holland, bevat materiaal om enkele lessen over dit thema te vullen. Verder staan daarin aanknopingspunten voor een emancipatorische opleiding en stage-opdrachten.

Nascholing

In nascholingscursussen over het nieuwe programma en/of de basisvorming zou op een directe of indirecte manier de positie van meisjes in het wiskundeonderwijs ter sprake moeten komen. Het 'Emancipatie-abc voor de wiskundeles' eveneens een uitgave van het project 'Wiskunde en Emancipatie', biedt vooral materiaal om dit op een indirecte manier te doen.

Leerplanontwikkeling

Bij voortgaande leerplanontwikkeling zouden de verworvenheden van het W12-16-project, waarbij ontwikkelaars steeds in gedachten hadden voor meisjes én jongens te werken, gehandhaafd moeten worden.

Examens en toetsen

Niet alleen bij het ontwikkelen van lesmateriaal, maar ook bij het maken van examens, schoolonderzoeken, proefwerken en andere toetsen, kan de checklist gebruikt worden. Ook bij het ontwerpen van toetsen voor de basisvorming waar het CITO een belangrijke rol speelt, verdient het aanbeveling vrouwen te betrekken bij het werk.

Vrouwen en mannen

De meest natuurlijke en wellicht ook de meest efficiënte manier om aan emancipatorische doelstellingen te werken is vrouwen én mannen betrekken bij allerlei activiteiten op het gebied van wiskundeonderwijs. Gericht personeelsbeleid kan daar een bijdrage aan leveren.

PUBLIKATIES VAN EN OVER HET W12-16-PROJECT

Hieronder vindt u een lijst van publikaties, die betrekking hebben o het werk van het W12-16-project.
De lijst is geordend in materialen die door het W12-16-team zijn ge produceerd en in artikelen over het project die zijn verschenen in Eu clides en de Nieuwe Wiskrant gedurende de periode september 198 tot juli 1992.

Leerlingmaterialen van het team W12-16

Pakketten voor klas 1

Formules op maat 1a en 1b
ontwerpers: Aad Goddijn, Juul ten Hove
datum laatste versie: juni 1992
aantal pagina's: 33 (1a); 25 (1b)
docentenhandleiding: geen.
In Formules op maat verbinden leerlingen hun kennis en ervaringe op het gebied van rekensommen met de grammatica van het rekene met formules. Variabelen worden geïntroduceerd op verschillend manieren. Het zoeken naar regelmaat, het vinden van bewerkinge tussen series getallen en het verwoorden van berekeningen in formu letaal neemt een belangrijke plaats in.

Grasmaaien
ontwerper: Martinus Riemersma
datum laatste versie: januari 1992
aantal pagina's: 5
docentenhandleiding: geen.
In dit pakketje gaat het om het nader analyseren van globaal geteker de grafieken. Er moeten opvallende en regelmatig terugkerende ge beurtenissen worden gelokaliseerd en geïnterpreteerd.

Kubus make-up
ontwerper: Jan van den Brink
datum laatste versie: juni 1991
aantal pagina's: 18
docentenhandleiding: apart (23 pag.)
extra's: 18 pag.
toets: 5 pag.

In dit pakket komen aan de orde: ruimtelijke figuren zien in plaatjes, ruimtelijke illusies maken (schaduwwerking) en ruimtelijke figuren (af)tekenen of corrigeren. Dit pakket biedt vooral zwakkere leerlingen steun bij het bekijken en tekenen van ruimtelijke figuren.

Plaats bepalen
ontwerpers: Mieke Abels, Jan van den Brink
datum laatste versie: juli 1990
aantal pagina's: 18
docentenhandleiding: apart (7 pag.)
extra werkbladen: apart (25 pag.)
Dit pakket bevat werkbladen over plaats bepalen in allerlei min of meer dagelijkse en herkenbare situaties.

Meten
ontwerpers: Mieke Abels, Juul ten Hove, Monica Wijers
datum laatste versie: augustus 1991
aantal pagina's: 33
docentenhandleiding: geen.
In dit pakket wordt een basis gelegd voor referentiepunten in de meetkunde, die het schatten ondersteunen. In een practicumles wordt gemeten met verschillende eenheden voor lengte, oppervlakte, inhoud en gewicht.

Werkbladen meetkunde
ontwerpers: Mieke Abels, Marja Meeder
datum laatste versie: maart 1991
aantal pagina's: 18 bladen (+ 6 docentenbladen)
docentenhandleiding: ingevlochten in het pakket.
Op elk werkblad staan opdrachten voor een kort practicum meetkunde. Centrale activiteiten zijn: vouwen, tekenen, construeren en knippen. De onderwerpen die voorkomen betekenen soms een herhaling en soms een verdieping van wat in klas 1 aan de orde is geweest.

Praktisch Rekenen 1a en 1b
ontwerpers: Koeno Gravemeijer, Nanda Querelle
datum laatste versie: 1a: juni 1988; 1b: december 1988
aantal pagina's: 1a: 60; 1b: 64
docentenhandleiding: ingevlochten in het pakket.
In deze pakketten staat het rekenen met 'zoveel per zoveel'-sommen centraal. Verhoudingstabellen dienen als hulpmiddel om dit soort vraagstukken te structureren.
De 'maniertjes' die bij het invullen van de tabellen aan bod komen ondersteunen het handig rekenen. Verder is er regelmatig aandacht

voor schattend rekenen. De docentenhandleiding bevat uitgebreid lesbeschrijvingen.

ZakRekenMachines deel 1
ontwerper: Jan van den Brink
datum laatste versie: juni 1991
aantal pagina's: 37
docentenhandleiding: één handleiding bij alle ZRM-pakketten.
Met behulp van werkbladen onderzoeken de leerlingen het gebruik e de aard van verschillende rekenmachines. Verschillende rekenonde werpen komen bovendien aan bod: positiestelsel, vermenigvuldiger breuken e.d. die met de rekenmachine worden uitgevoerd.

Kaart, graaf en tabel 1
ontwerpers: Rob Bloem, Douwe Kok, Heleen Verhage
datum laatste versie: juni 1991
aantal pagina's: 44
docentenhandleiding: geen.
Veel informatie wordt gepresenteerd in de vorm van een kaart, ee graaf of een tabel. In dit pakket gaat het om het lezen en verwerke van die informatie. Daarnaast komen aan de orde: het maken van ee tabel bij een kaart of graaf, het combineren van twee tabellen, h verwerken van meerdere gegevens tot één graaf. Veel problemen wo den gepresenteerd binnen de context van het openbaar vervoer.

Pakketten voor klas 2

Trappers
ontwerper: Juul ten Hove
datum laatste versie: december 1990
aantal pagina's: 38
docentenhandleiding: apart (17 pag. en bijlagen)
Tijdens het fietsen ondervinden leerlingen aspecten van het verbar tussen de ronddraaiende trappers en de afstand die ze afleggen. A tiviteiten in de context van het fietsen – experimenten, rekenactie tabellen, grafieken en formules – dragen bij tot de ontwikkeling va een kennisnetwerk rond evenredigheden.

Racebanen
ontwerper: Martinus Riemersma
datum laatste versie: mei 1992
aantal pagina's: 9
docentenhandleiding: geen.
Het pakket behandelt globale grafieken die een (vrijwel) periodiek ve loop hebben. Bij het interpreteren is er meer aandacht voor lokale a

pecten, bijvoorbeeld de vraag of een scherpe bocht in de snelheidsgrafiek hoort bij een scherpe bocht in de racebaan. Er komen ook periodieke verschijnselen ter sprake met een wat abstractere grafische voorstelling, zoals lichtsignalen van een vuurtoren. De begrippen periode en frequentie komen in beeld.

Regelmaat en symmetrie
ontwerpers: Marja Meeder, Heleen Verhage
datum laatste versie: augustus 1990
aantal pagina's: 38
docentenhandleiding: apart (47 pag.)
Een pakket met drie hoofdstukken: de eerste twee gaan over regelmaat in patronen, vlakvullingen, spiegel- en draaisymmetrie, het derde over symmetrie in randen en de periode van een rand. Er is veel aandacht voor de culturele en esthetische kanten van de wiskunde.

Vergroten en verkleinen
ontwerper: Aad Goddijn
datum laatste versie: september 1991
aantal pagina's: 46
docentenhandleiding: geen.
Gerekend wordt aan afbeeldingen waarop iets staat waar de ware grootte van bekend is, zoals bijvoorbeeld een fiets. Daarmee wordt de echte grootte van andere dingen (zoals het huis waar de fiets tegenaan staat) bepaald. Schaallijnen komen ter sprake. Gerekend wordt ook met behulp van vergrotingsfactoren. Met schaduw door lamplicht als steunmodel wordt het rekenen met verhoudingen in driehoeken gestart.

Doorsneden
ontwerpers: Monica Wijers, Michiel Doorman
datum laatste versie: mei 1992
aantal pagina's: 28
docentenhandleiding: apart (nog geen nieuwe versie).
Doorsneden van alledaagse produkten zoals een brood, een ei, een boom worden bekeken. Vervolgens wordt met doorsneden in een kubus gewerkt.

Werkbladen meetkunde
ontwerpers: Mieke Abels, Marja Meeder
datum laatste versie: maart 1991
aantal pagina's: 15 bladen
docentenhandleiding: ingevlochten in het pakket.
Op elk werkblad staan opdrachten voor een kort practicum meetkun-

de. Centrale activiteiten zijn: vouwen, tekenen, construeren en knij pen. De onderwerpen die voorkomen betekenen soms een herhalir en soms een verdieping van wat in klas 2 aan de orde is geweest.

Praktisch Rekenen 2a
ontwerper: Mieke Abels
datum laatste versie: september 1991
aantal pagina's: 32
docentenhandleiding: één handleiding bij 2a, 2b en 3.
Dit pakket is een vervolg op Praktisch Rekenen 1a en 1b. De verhou dingstabel neemt een belangrijke plaats in. Verhoudingen worde vergeleken en genormeerd, zodat de stap naar rekenen met procen ten gemaakt kan worden.

Praktisch Rekenen 2b
ontwerper: Mieke Abels
datum laatste versie: juli 1992
aantal pagina's: 38
docentenhandleiding: geen.
In situaties waarbij het percentage gegeven is wordt via de elastiek(procentenmeter de dubbele getallenlijn geïntroduceerd. Er wordt z wel schattend als exact gerekend. In eenvoudige gevallen worden ve houdingen, breuken en percentages met elkaar in verband gebrach

ZakRekenMachines deel 2
ontwerper: Jan van den Brink
datum laatste versie: juni 1991
aantal pagina's: 36
docentenhandleiding: één handleiding bij alle ZRM-pakketten.
Dit zijn werkbladen over verschillende onderwerpen: procenten wo den niet ingevoerd als 'deel van', maar als factor; decimale getall(komen in een aantal realistische situaties voor. Delen met rest, e staartdeling en delen met de rekenmachine leiden tot de vraag: h kun je met een rekenmachine een deling met een rest controlere Veel van de onderwerpen in deze werkbladen sluiten aan bij Pra tisch Rekenen 2.

Systematisch tellen
ontwerper: Heleen Verhage
datum laatste versie: november 1991
aantal pagina's: 19
docentenhandleiding: geen.
Dit pakket vormt een eerste kennismaking met telproblemen en verschillende strategieën die er zijn om die op te lossen. De telman

ren die aan de orde komen zijn: systematisch uitschrijven, een tabel maken, een graaf tekenen, waaronder boomdiagram en wegendiagram, tellen in een rooster. Tevens wordt er een verband gelegd met kansen.

Pakketten voor klas 3

Dubbel op
ontwerper: Pieter van der Zwaart
datum laatste versie: januari 1992
aantal pagina's: 10
docentenhandleiding: apart (7 pag.)
Vanuit een (meestal) meetkundig model worden verschillende formules geconstrueerd, die hetzelfde verhaal beschrijven. De kern van het pakket is het omzetten van formules. Uiteindelijk gebeurt dit op grond van de vorm van de formule. Ondersteuning door tabel, grafiek en eventueel achterliggende situatie blijft echter mogelijk.

Winnende formules
ontwerper: Pieter van der Zwaart
datum laatste versie: juni 1990
aantal pagina's: 11 (+ 18 voor docenten)
docentenhandleiding: ingevlochten in het pakket.
Dit pakket gaat over groei bij blokkenbouwsels, die volgens vaste patronen zijn samengesteld. Deze patronen geven aanleiding tot het opstellen van formules. De kernactiviteit van het pakket is het globaal vergelijken van formules. De leerlingen kunnen daarbij steunen op de meetkundige context en op een computerprogramma.

Hartslag
ontwerper: Martinus Riemersma
datum laatste versie: mei 1992
aantal pagina's: 7
docentenhandleiding: geen.
Hier gaat het om het verband tussen de periode en de frequentie bij periodieke verschijnselen. Via verhoudingstabellen wordt toegewerkt naar een formule-representatie van dit verband. In dit kader komt ook de rekenmachine aan de orde, met name wat betreft het hanteren van de 1/x-toets.

Verschil in groei 3a en 3b
ontwerpers: Juul ten Hove, Martinus Riemersma
datum laatste versie: juni 1992
aantal pagina's: 25 (a); 21 (b)
docentenhandleiding: geen.

Dit pakket gaat over gelijkmatige (lineaire) en exponentiële groeipr cessen. Bij gelijke stappen (meestal tijdsintervallen) horen gelijke ve schillen respectievelijk quotiënten. Er komen veel alledaagse situ ties aan de orde, waarbij uiteindelijk formules moeten worden opg steld die de groeiprocessen beschrijven. Een belangrijk hulpmidd vormen de stroken als visualisatie van getallenrijen. Er wordt met n druk aandacht gevraagd voor het procent-rekenen en enkele specia toetsen op de rekenmachine, zoals de xy-toets. In het vervolgpakk voor de vierde klas (Kijken naar verschillen) zullen kwadratische ve banden behandeld worden.

Grafieken vervormen 3a
ontwerper: Aad Goddijn
datum laatste versie: oktober 1991
aantal pagina's: 41
docentenhandleiding: geen.
Aan de hand van eb- en vloed-beweging komt het verticaal oprekk en verschuiven van grafieken aan bod. Daarna komt optellen v twee grafieken aan de beurt, waarbij ook tabellen en de relaties tu sen kolommen van een tabel een rol spelen. Een en ander wordt o toegepast op lineaire formules, waarbij lineaire vergelijkingen van soort $ax + b = cx + d$ worden opgelost.

Grafieken vervormen 3b
ontwerper: Pieter van der Zwaart e.a.
datum laatste versie: februari 1992
aantal pagina's: 17 + 6 werkbladen
docentenhandleiding: geen.
Bewerkingen op verbanden, zoals parameters wijzigen en optell worden toegepast bij het bepalen van de stopafstand van auto's zich wijzigende situaties. Onderzocht wordt wanneer een deel van formule de baas is over het andere deel.

Ergens ertussen
ontwerper: Aad Goddijn
datum laatste versie: oktober 1991
aantal pagina's: 16
docentenhandleiding: geen.
Oplossen van vergelijkingen door inklemmen wordt geïntroduce met een spelletje en twee meetkundige problemen. Het inklemm wordt uitgevoerd door rekenen met de hand, met de zakrekenmac ne en uiteindelijk met de computer.

The Drongs
ontwerper: Aad Goddijn
datum laatste versie: juli 1991
aantal pagina's: 47
docentenhandleiding: geen.
Twee onderwerpen uit de kijkmeetkunde komen uitvoerig aan de orde: kijkhoeken en aanzichten.
Kijkhoeken (de hoeken waaronder je dingen ziet vanuit het oog) worden op diverse manieren gebruikt, o.a. om richtingen te bepalen ten opzichte van het noorden.
Aanzichten worden eerst precies op hun waarde onderzocht: wat kun je er wél in meten, wat niet. Daarna wordt met behulp van twee zijaanzichten van een object het bovenaanzicht geconstrueerd.

Flight Simulator
ontwerper: Jan van den Brink
datum laatste versie: februari 1991
aantal pagina's: 18
docentenhandleiding: apart (45 pag.)
Een pakket werkbladen bij een flight simulator waarin meters moeten worden afgelezen, het land buiten het vliegtuig in kaart moet worden gebracht en vluchten moeten worden bijgehouden.

Mekka
ontwerpers: Jan van den Brink en Marja Meeder
datum laatste versie: maart 1991
aantal pagina's: 52
docentenhandleiding: apart (25 pag.)
Dit pakket sluit aan op de oude islamitische problematiek om de bidrichting naar Mekka te vinden. Verschillen in richting ontstaan o.a. door het gebruik van wereldbol of platte landkaart. In het pakket komen deze verschillen aan de orde en wordt bolmeetkunde op een intuïtieve wijze behandeld over grootcirkels, tegenpolen, afstanden en richtingen op de bol. Vragen zoals: 'Waarom is de grootcirkel tussen twee plaatsen op aarde de kortste afstand?' en 'Waarom komt deze grootcirkel op het noordelijk halfrond 'boven' de parallelcirkel uit?' kunnen inzichtelijk worden opgelost.

Rekenen in de meetkunde
ontwerper: Mieke Abels, e.a.
datum laatste versie: juni 1992
aantal pagina's: 65
docentenhandleiding: geen.
In vlakke figuren, aanzichten en doorsneden worden hoeken en leng-

tes van lijnstukken berekend. Eerder geleerde technieken en begrippen worden herhaald en uitgebreid met de tangens. Ook krijgen een paar algebraïsche vaardighedem en het gebruik van de zakrekenmachine aandacht.

Praktisch Rekenen 3
ontwerper: Mieke Abels
datum laatste versie: april 1992
aantal pagina's: 34
docentenhandleiding: geen.
De onderwerpen uit klas 2 worden herhaald waarbij de twee modellen verhoudingstabel en dubbele getallenlijn centraal staan. Verkortingen van de rekenstappen worden geëxpliciteerd. Dit leidt onder andere tot het rekenen met percentage als factor in situaties waarin sprake is van afname (korting) of groei (rente).

ZakRekenMachines deel 3
ontwerper: Jan van den Brink
datum laatste versie: juni 1991
aantal pagina's: 18
docentenhandleiding: één handleiding bij alle ZRM-pakketten.
Een verzameling werkbladen over functies en andere algebraïsche mogelijkheden op de rekenmachine. Bijvoorbeeld: grote getallen met o.a. wetenschappelijke notaties in machten van 10, x! en andere functies; over de groei van x! , 10x en x^2, pijlentaal voor functies en hun inversen; sin, cos en tan.

Statistiek
ontwerper: Heleen Verhage
datum laatste versie: juli 1992
aantal pagina's: 45
docentenhandleiding: geen.
Dit pakket gaat over het interpreteren en verwerken van statistische informatie. Er komen enkele complexe voorstellingswijzen aan bod en er wordt gewerkt aan het ontwikkelen van een kritische houding. Verder worden twee nieuwe technieken behandeld: het steelblad-diagram en de boxplot.

Graaf en tabel klas 3
ontwerper: Rob Bloem, Douwe Kok, Heleen Verhage
datum laatste versie: december 1991
aantal pagina's: 25
docentenhandleiding: apart (7 pag.)
Dit pakket is een vervolg op 'Kaart, graaf en tabel 1'. Veel aandach

wordt besteed aan verschillende soorten grafen en tabellen: de directe wegentabel, de verbindingstabel en de overgangstabel komen aan de orde; grafen worden gebruikt om situaties, veranderingen in situaties en onderlinge verbanden in beeld te brengen.

Pakketten voor klas 3 vbo

Rekenen met verhoudingen
ontwerpers: Wilma Verkooijen, Sylvia van der Werf
datum laatste versie: juli 1992
aantal pagina's: 35
docentenhandleiding: 1 pag. toelichting voor de docent.
Dit pakket behandelt verhoudingsproblemen met een opklimmende moeilijkheidsgraad. Er wordt gebruik gemaakt van beroepsgerichte contexten.

Kijken en tekenen
ontwerper: Wilma Verkooijen
datum laatste versie: juli 1992
aantal pagina's: 39
docentenhandleiding: apart (5 pag.)
Op basis van foto's en tekeningen worden aanzichten van concrete voorwerpen en plattegronden getekend. Er worden schaaltekeningen en berekeningen gemaakt aan de hand van een concreet schaalmodel.

Pakketten voor klas 3 havo/vwo

Driehoekje leggen
ontwerpers: Anton Roodhardt, Marian Kollenveld
datum laatste versie: november 1990
aantal pagina's: 23
docentenhandleiding: apart (6 pag. en apart boekje Antwoorden)
De verdeling van een driehoek in een groot aantal driehoekjes van dezelfde vorm maakt een andere behandeling van meetkundige evenredigheden mogelijk. Via telproblemen ontstaat de kwadratische functie, waarvan de eigenschap van de lineaire verschillen wordt uitgebuit. Het pakket laat zien hoe binnen één context zowel op wiskunde A als op wiskunde B voorbereid kan worden.

Verschil in groei a en b, havo/vwo-versie
ontwerper: Martinus Riemersma
datum laatste versie: juli 1992
aantal pagina's: 27 (a); 27 (b)
docentenhandleiding: geen.
Een iets uitgebreidere versie van het CD-pakket. Er is meer aandacht voor formule-manipulatie, waarbij tevens dieper op de betekenis van

de voorkomende formules wordt ingegaan.

Pakketten voor klas 4

Draaiende molens
ontwerpers: Pieter van der Zwaart, Anton Roodhardt
datum laatste versie: november 1991
aantal pagina's: 16
docentenhandleiding: apart (3 pag.)
De formule $P = 0{,}13W^3D^2$ voor berekeningen van het vermogen van windmolens, gegeven de windsnelheid en de rotordiameter, is basis van dit pakket. Voor W of voor D wordt een waarde gekozen. De formules die dan ontstaan worden uiteengelegd in rekenstappen, die worden omgekeerd. In deze techniek wordt routine opgebouwd. Verder is er enige aandacht voor de relatie tussen een verband en zijn inverse.

ZakRekenMachines deel 4
ontwerper: Jan van den Brink
datum laatste versie: juni 1991
aantal pagina's: 54
docentenhandleiding: één handleiding voor alle ZRM-pakketten.
In deze bundel werkbladen wordt het gebruik van de rekenmachine aangewend binnen wiskundige onderwerpen uit verschillende klassen, zoals bij problemen rond gelijkvormigheid, negatieve getallen hoeken en het oplossen van vergelijkingen.

Boomdiagrammen
ontwerpers: Rob Bloem, Douwe Kok, Heleen Verhage
datum laatste versie: mei 1992
aantal pagina's: 26
docentenhandleiding: geen.
Dit pakket is een vervolg op 'Systematisch tellen'. Manieren om tel problemen aan te pakken komen in dit pakket opnieuw aan de orde Met name op het gebruik van boomdiagrammen om structuur aan t brengen en om tel- en rekenproblemen op te lossen wordt dieper in gegaan. Ook wordt verband gelegd tussen boomdiagrammen e kruistabellen. Er wordt, in heel beperkte mate, een aanzet gegeve tot het kansbegrip.

De Berg

ontwerper:	George Schoemaker
datum laatste versie:	november 1991
aantal pagina's:	40
docentenhandleiding:	apart (43 pag.)

Een herhaling van diverse onderwerpen in een context. Aan de orde komen grafieken, cosinus, tangens, hoogtelijnkaartjes en verder veel redeneren, tekenen en rekenen.

De Watertoren

ontwerper:	George Schoemaker
datum laatste versie:	december 1990
aantal pagina's:	20
docentenhandleiding:	ingevlochten in het pakket.

Verschillende aspecten van het wiskundeprogramma komen aan de hand van één context aan de orde. In de docentenhandleiding staan afdrukken van grafieken en andere illustraties, waarvan sheets voor de overheadprojector kunnen worden gemaakt.

Andere leerlingmaterialen

Examenbundel 1990

Deze bundel bevat de schriftelijke examens C/D-niveau (eerste en tweede tijdvak), zoals die op de experimenteerscholen in het voorjaar van 1990 zijn afgenomen. Verder de oefenexamens die gebruikt zijn in klas 4 lbo/mavo tijdens het schooljaar '89-'90. De bundel bevat ook korte uitwerkingen, antwoorden en normen. Delen van de bundel zijn eenvoudig te kopiëren voor gebruik in de klas.

Examenbundel 1991

Deze bundel bevat de schriftelijke examens C/D-niveau (eerste en tweede tijdvak), zoals die op de experimenteerscholen in het voorjaar van 1991 zijn afgenomen. Verder de oefenexamens die gebruikt zijn in klas 4 lbo/mavo tijdens het schooljaar '90-'91. De bundel bevat ook korte uitwerkingen, antwoorden en normen. Delen van de bundel zijn eenvoudig te kopiëren voor gebruik in de klas.

Examenbundel 1992

Deze bundel bevat de schriftelijke examens C/D (eerste en tweede tijdvak) zoals die op de experimenteerscholen in 1991 en 1992 zijn afgenomen. Verder een B-examen dat in 1992 is afgenomen op de experimenteerscholen. De bundel bevat ook antwoorden en normen. Van het examen 1991 is een verslag opgenomen. Delen van de bundel zijn makkelijk te kopiëren voor gebruik in de klas.

De langste dag
ontwerper: Jan van den Brink
datum laatste versie: juli 1989
aantal pagina's: 28
docentenhandleiding: apart (41 pag.)
Aanleiding is de actualiteit: de langste dag. Het pakket geeft sugges ties voor een project door de hele school of voor individuele werkstuk ken. Aan de orde komen het meten van de zonshoogte met behul van de geodriehoek, het gebruik van de zonnebanenkaart, het ver schijnsel midzomernachtzon en tijdzonekaarten.

GWA-klapper
ontwerper: George Schoemaker
datum laatste versie: juli 1992
aantal pagina's: 292
docentenhandleiding: ingevlochten in het pakket.
Een verzameling leerlingwerkbladen en lesideeën voor geïntegreerd wiskundige activiteiten (GWA). Een aantal van deze teksten is herzie na gebruik in de klas. De klapper bevat ook extra informatie voor d docent. De benodigde leerlingwerkbladen kunnen gemakkelijk geko pieerd worden.

Bundel beroepswiskunde
ontwerper: Jan van den Brink
datum laatste versie: maart 1992
aantal pagina's: 47
docentenhandleiding: apart (28 pag.)
In verschillende beroepen bestaan wiskundig getinte problemen d typisch zijn voor de betreffende beroepssituatie. In die beroepen zij ook oplossingen gevonden, die soms (onverwachte) toepassingen zij van meer algemene wiskundige onderwerpen. Er zijn ook enkele pr blemen geënsceneerd in bijbanen die leerlingen kunnen hebben.

Materialen voor docenten van het team W12-16

Nieuwe Wiskrant special 1991
jaargang 11 nr 1; september 1991
Dit themanummer van de Nieuwe Wiskrant is geheel gewijd aan het W12-16 project. Het bevat onder meer artikelen over de stand van zaken van het project, ervaringen van experimenteerscholen, wiskunde en taal, toetsen en examens. Verder is er aandacht voor de leerstofgebieden algebra, meetkunde, informatieverwerking en statistiek.

*Trajecten*boek *Wiskunde 12-16*
juli 1992
Dit boek bevat de leerplannen voor vbo, mavo, havo en vwo, zoals ze door de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (COW) zijn voorgesteld aan de Minister van Onderwijs en Wetenschappen. Het boek bevat een gedetailleerde beschrijving per leerjaar van de verschillende onderwerpen die aan de orde moeten komen. Elk leerstofonderdeel is beschreven in wat leerlingen moeten kunnen en kennen en gekarakteriseerd in 'samenvattende begrippen'.
De leerplannen zijn uitgesplitst in een B-traject voor vbo, een C- en D-traject voor vbo en mavo dat past bij de nieuwe exameneisen, een havo-traject en een vwo-traject. De kerndoelen voor de basisvorming zijn opgenomen met een verwijzing naar leerstof die past bij elk kerndoel. Het boek sluit af met een alfabetische lijst van de samenvattende begrippen.

Examenprogramma wiskunde vbo/mavo C/D-niveau
juli 1992
Dit is het uiteindelijke advies dat door de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (COW) is goedgekeurd en aangeboden aan de Minister van Onderwijs en Wetenschappen. Het boek bevat een uitvoerige inleiding met een korte toelichting op de inhoud, een beschrijving van de verschillen tussen C- en D-niveau en opmerkingen over de inrichting van het examen en schoolonderzoek. Daarna volgt het eigenlijke examenprogreamma uitgesplitst in de onderdelen algebra, meetkunde, rekenen, informatieverwerking en statistiek, geïntegreerde wiskundige activiteiten. Het boek eindigt met een toelichting op de onderdelen uit het examenprogramma.

Wiskunde 12-16, een boek voor docenten
juli 1992
Dit boek wordt in het najaar van 1992 aan alle scholen toegestuurd die met twaalf- tot zestienjarige leerlingen werken en scholen die voor het vbo/mavo-examen opleiden. Het boek geeft een uitvoerige be-

schrijving van het nieuwe leerplan aangevuld met voorbeelden uit leerlingmateriaal en experimentele examens. Verder is aandacht besteed aan de redenen die aanleiding zijn tot wijziging van de bestaande programma's. Er wordt ingegaan op didactische kwesties die samenhangen met dit nieuwe leerplan. Het boek eindigt met een hoofdstuk over allerlei praktische zaken die van belang zijn rond deze leerplanwijziging. Het team W12-16 heeft dit boek geschreven om alle wiskundedocenten een beeld te geven van de veranderingen die het gevolg zijn van het nieuwe leerplan.

Wiskunde een Wereldvak
juli 1992
Goed realistisch wiskundeonderwijs brengt de buitenwereld de les binnen en speelt daarbij professioneel in op de multi-etnische samenstelling van de klas en van de maatschappij.
Dat is in het kort de boodschap van *Wiskunde een Wereldvak*, waarin struikelblokken voor allochtone leerlingen en intercultureel onderwijs centrale thema's zijn.

Achtergronden van het nieuwe leerplan wiskunde 12-16, band 1 en band 2
In deze boeken wordt een verantwoording gegeven voor de inhouden van het nieuwe leerplan. Naast een beschrijving per leerstofgebied is ook het B-programma toegelicht en is beschreven waarom de voorgestelde programma's goed zijn voor meisjes. Tenslotte is een overzicht opgenomen van publikaties van en over het W12-16-project.

Artikelen over W12-16-werk verschenen in Euclides en de Nieuwe Wiskrant

Verschenen in Euclides

G. Schoemaker: *Kolom 1 W12-16*, Euclides 63,9 (1988), p. 276-277.
G. Schoemaker: *Kolom 2 W12-16*, Euclides 64,1 (1988), p. 9.
M.C. van Hoorn: *Over COW en W12-16*, Euclides 64,2 (1988), p. 34-36.
G. Schoemaker: *Kolom 3 W12-16*, Euclides 64,2 (1988), p. 37.
G. Schoemaker: *Kolom 4 W12-16*, Euclides 64,3 (1988), p. 73.
G. Schoemaker: *Kolom 5 W12-16*, Euclides 64,4 (1988), p. 98.
G. Schoemaker: *Kolom 6 W12-16*, Euclides 64,5 (1989), p. 136.
G. Schoemaker: *Kolom 7 W12-16*, Euclides 64,6 (1989), p. 159.
J. ten Hove: *Kolom 8 W12-16*, Euclides 64,7 (1989), p. 190.
H. Krabbendam: *Kolom 9 W12-16*, Euclides 64,8 (1989), p. 222.
G.Schoemaker: *Wiskunde 12-16: zo'n kans krijg je nooit meer*, Euclides 64,9 (1989), p. 254-263.
G. Schoemaker: *Kolom 10 W12-16*, Euclides 65,1 (1989), p. 3.
G. Schoemaker: *Kolom 11 W12-16*, Euclides 65,2 (1989), p. 39.
H.B.Verhage: *Mediageniek wiskundeonderwijs*, Euclides 65,2 (1989), p. 43-54.
G. Schoemaker: *Kolom 12 W12-16*, Euclides 65,3 (1989), p. 66.
G. Schoemaker: *Kolom 13 W12-16*, Euclides 65,4 (1989), p. 98.
G. Schoemaker: *Kolom 14 W12-16*, Euclides 65,5 (1990), p. 132.
Werkbladen, Euclides 65,6 (1990), p. 172-173.
G. Schoemaker: *Kolom 15 W12-16*, Euclides 65,6 (1990), p. 162.
G. Schoemaker: *Kolom 16 W12-16*, Euclides 65,7 (1990), p. 189.
G. van den Heuvel en E. Teunissen: *Op weg naar vernieuwd wiskundeonderwijs*, Euclides 65,8 (1990), p. 239-246.
G. Schoemaker: *Kolom 17 W12-16*, Euclides 65,8 (1990), p. 218.
G. Schoemaker: *Kolom 18 W12-16*, Euclides 65,9 (1990), p. 250.
T. Dekker: *Mavo-examen 1990*, Euclides 66,1 (1990), p. 7-9.
T. Dekker: *Het examen lbo/mavo C/D 1990, experimenteel (1)*, Euclides 66,1 (1990), p. 15-17.
M.C. van Hoorn: *Acceptatie*, Euclides 66,1 (1990), p. 4-6.
T. Dekker: *Het examen lbo/mavo C/D 1990, experimenteel (2)*, Euclides 66,2 (1990), p. 48-50.
T. Dekker: *Het examen lbo/mavo C/D 1990, experimenteel (3)*, Euclides 66,3 (1990), p. 79-81.
T. Dekker: *Het examen lbo/mavo C/D 1990, experimenteel (4)*, Euclides 66,3 (1990), p. 111-113.
A. van Marle: *Wiskunde voor 12 tot 16-jarigen*, Euclides 66,4 (1990), p. 99-100.
T. Dekker: *Het examen lbo/mavo C/D 1990, experimenteel (5)*, Euclides 66,5 (1991), p.143-145.
B. van der Wal: *Wiskunde A voor mavo en lbo?*, Euclides 66,5 (1991), p. 130-131.
T. Dekker: *Het examen lbo/mavo C/D 1990, experimenteel (6)*, Euclides 66,6 (1991), p. 175-177.
B. van der Wal: *Een experimenteel voorbeeldexamen lbo/mavo*, Euclides 66,6 (1991), p. 162-167.
T. Dekker: *Het examen lbo/mavo C/D 1990, experimenteel (7)*, Euclides 66,7 (1991), p. 207-209.
J. van Dormolen en F. Meester: *Een nieuw leerplan*, Euclides 66,7 (1991), p. 211-

214.
T. Dekker: *Het examen lbo/mavo C/D 1990, experimenteel (10)*, Euclides 67, (1991), p.15-17.
F. Meester en J. van Dormolen: *Het nieuwe leerplan 12-16 (3)*, Euclides 67,: (1991), p. 50-52.
Th. Obdeijn: *En Cindy dan?*, Euclides 67,2 (1991), p. 47-49.
J. ten Hove: *Formules bij een piramide*, Euclides 67,3 (1991), p. 80-82.
P. Willems: *Goed gezien, hoe gedacht ?*, Euclides 67,4 (1991), p. 112-114.
W. Schaafsma: *Oude regels met de rekenmachine*, Euclides 67,5 (1991), p. 144 156.
J. Hoffman en P. van Wijk: *Regelmatige figuren*, Euclides 67,6 (1992), p. 175-17.
M.C. van Hoorn: *Reizen en Trekken*, Euclides 67,6 (1992), p. 163-166.
A. Aukema en H. Jansen: *Twee ontwikkelaars geven weerwoord*, Euclides 67,' (1992), p. 193-199.
A. Goddijn en P. van der Zwaart: *Globaal kijken naar grafieken*, Euclides 67,' (1992), p. 208-210.
H. Smid e.a.: *Open brief*, Euclides 67,7 (1992), p. 206-207.
J. de Lange: *Nieuwe curricula 12-16: de basis gevormd*, Euclides 67,9 (1992), p 259-262.
B. van der Wal: *Meetkunde en weerbaarheid*, Euclides 67,9 (1992), p. 263-265.
W. Groen: *Het voorgestelde programma in grote lijnen*, Euclides 67,9 (1992), p. 266 271.
M. van Hoorn: *Aha, algebra!*, Euclides 67,9 (1992), p. 272-274.
N. Olofsen: *Voortgezet rekenen*, Euclides 67,9 (1992), p. 274-280.
B. Zwaneveld: *Informatieverwerking en statistiek*, Euclides 67,9 (1992), p. 281 284.
H.J. Smid: *Overvloed en onbehagen*, Euclides 67,9 (1992), p. 284-288.
K. Hoogland: *Eindoordeel? Beginoordeel*, Euclides 67,9 (1992), p. 289-292.
W. Kuipers, W. Schaafsma en B. Zwaneveld: *Interview met twee experimenteerdc centen*, Euclides 67,9 (1992), p. 293-297.
T. Dekker: *Toetsen bij een ander programma*, Euclides 67,9 (1992), p. 298-300.
A. Verweij: *Nascholing W12-16*, p. 303-311.

Verschenen in de Nieuwe Wiskrant

A. van Streun: *Basisvorming in de ruimte*, Nieuwe Wiskrant 6,4 (1987), p. 7-11.
J. Schreuder: *Een dagje Internationale Schakelklassen*, Nieuwe Wiskrant 9, (1989), p. 45-47.
M. Meeder: *Wiskunde uit de binnenwereld*, Nieuwe Wiskrant 7,3 (1988), p. 10-15
W.M.G. Querelle: *Tien minuten fietsen is ..... minuten lopen*, Nieuwe Wiskrant 7, (1988), p. 8-11.
P. Van der Zwaart: *Ik ben een beetje op hol geslagen - Verslag van een onderzoe naar de diepere betekenis van schaatsgrafieken*, Nieuwe Wiskrant 8,1 (1988 p. 14-18.
W. Verkooyen: *Meerkeuzevragen tegenover korte-antwoord-vragen*, Nieuwe Wis krant 9,2 (1990), p. 19-20.
F.J. van den Brink: *De langste dag - Een voorbeeld van GWA*, Nieuwe Wiskrant 9, (1990), p. 29-35.
G. van den Heuvel en H. Krabbendam: *De introductie van grafen bij twaalfjarige* Nieuwe Wiskrant 9,3 (1990), p. 38-48.
H.B. Verhage: *Zomaar twee lessen uit W12-16*, Nieuwe Wiskrant 9,3 (1990), p. 1: 18.

J. ten Hove: *Het mozaïek dat MBO heet*, Nieuwe Wiskrant 9,4 (1990), p .42-47.
M. Meeder en G. Schoemaker: *Kromme lijnen, twee kernen*, Nieuwe Wiskrant 9,4 (1990), p. 23-24.
M. Abels, F.J. van den Brink, A.J. Goddijn, M.Meeder en G. Schoemaker: *Meetkunde: Ervaringen van leerlingen centraal*, Nieuwe Wiskrant 10,1 (1990), p. 20-27.
M. Abels, F.J. van den Brink, K.P.E. Gravemeijer, E.W.A. de Moor en M. Wijers: *Rekenen in het voortgezet onderwijs*, Nieuwe Wiskrant 10,1 (1990), p. 28-30.
M. Abels, M. Meeder en M. Wijers: *Emancipatorisch wiskundeonderwijs: bestaat dat ?*, Nieuwe Wiskrant 10,1 (1990), p. 52-56.
T. Dekker: *Oefenexamen*, Nieuwe Wiskrant 10,1 (1990), p. 63-65.
A. Goddijn, K. Gravemeijer, T. ten Hove en P. van der Zwaart: *En de variabelen, hoe staat het daarmee ?*, Nieuwe Wiskrant 10,1 (1990), p. 12-19.
F.J. van den Brink : *Kubus Make-up - Een onderwijsleerpakket om platte figuren ruimtelijk te maken*, Nieuwe Wiskrant 10,1 (1990), p. 46-51.
G. van den Heuvel, D. Kok, H. Krabbendam en H.B. Verhage: *Werktitel: Informatie en modellen*, Nieuwe Wiskrant 10,1 (1990), p. 31-35.
D. Kok en H. Staal: *De veranderende rol van de docent -'Blijf ik wel Meester van de Situatie ?'*, Nieuwe Wiskrant 10,1 (1990), p. 42-45.
J. de Lange: *Het laatste gat - Concept examenprogramma in discussie*, Nieuwe Wiskrant 10,1 (1990), p. 36-41.
M. Meeder en G. Schoemaker: *Nieuw Wiskundeonderwijs voor 12-16*, Nieuwe Wiskrant 10,1 (1990), p. 5-11.
Th. Obdeijn, Th. Dalhoeven en C. Johannink: *Schoolonderzoek in Oldenzaal*, Nieuwe Wiskrant 10,1 (1990), p. 66-72.
M.Wijers: *Verhoudingstabellen in de brugklas*, Nieuwe Wiskrant 10,1 (1990), p. 57-60.
F.J. van den Brink: *W12-16 ZakRekenMachines - Een serie experimentele werkbladen*, Nieuwe Wiskrant 10,2 (1990), p. 34-39.
K.P.E. Gravemeijer: *Globaal kijken, een kenmerk van algebraïsche deskundigheid*, Nieuwe Wiskrant 10,2 (1990), p. 29-33.
M. Abels : *Procenten in W12-16*, Nieuwe Wiskrant 10,3 (1991), p. 20-25.
S. van der Werf: *Aandacht voor lbo A/B-leerlingen*, Nieuwe Wiskrant 10,3 (1991), p. 31-36.
P. van der Zwaart : *De weegschaal gewogen en .....*, Nieuwe Wiskrant 10,3 (1991), p. 14-18.
F.J. van den Brink: *Buiten komt een wereld voorbij*, Nieuwe Wiskrant 10,4 (1991), p. 40-43.
Algebragroep W12-16: *Algebra*, Nieuwe Wiskrant 11,1 (1991), p. 29-33.
Algebragroep W12-16 -Formules maken en gebruiken, Nieuwe Wiskrant 11,1 (1991), p.57-63
F.J. van den Brink en M. Meeder: *Mekka*, Nieuwe Wiskrant 11,1 (1991), p. 80-84.
T. Dekker: *Leerlingen kwamen lachend naar buiten .....*, Nieuwe Wiskrant 11,1 (1991), p. 94-95.
L.M. Doorman en M. Wijers : *Doorsneden Doorzien*, Nieuwe Wiskrant 11,1 (1991), p. 43-48.
A.J. Goddijn: *Je kunt niet met een boogje kijken*, Nieuwe Wiskrant 11,1 (1991), p. 20-28.
A.J. Goddijn: *Duizelende rots doorsnijden*, Nieuwe Wiskrant 11,1 (1991), p. 96-97.
S. van der Goot: *Even krijten 26*, Nieuwe Wiskrant 11,1 (1991), p. 64-65.
G. van den Heuvel: *Ontwikkelingen in het lbo: het OWI-project*, Nieuwe Wiskrant 11,1 (1991), p. 85-89.

T. Kayser-de Jong en H. Staal: Proefwerken en het nieuwe leerplan, Nieuwe Wiskrant 11,1 (1991), p. 49-51.

S.L. Kemme: *Wiskunde 12-16 op Greijdanus*, Nieuwe Wiskrant 11,1 (1991), p. 7-15.

M. Kollenveld en A. Roodhardt: *Driehoekje leggen*, Nieuwe Wiskrant 11,1 (1991), p. 66-69.

W. Kuipers: *Aansluiting - een zorg van twee kanten*, Nieuwe Wiskrant 11,1 (1991), p. 34-35.

M. Meeder en G. Schoemaker: *Nieuw wiskundeonderwijs voor alle leerlingen van 12-16 jaar*, Nieuwe Wiskrant 11,1 (1991), p. 4-6.

F. Mulder: *Een uur heen, twee uur terug*, Nieuwe Wiskrant 11,1 (1991), p. 70-75.

A. Roodhardt: *A is het aapje dat eet uit zijn poot*, Nieuwe Wiskrant 11,1 (1991), p. 16-19.

W. Schaafsma: *Over mondelinge tentamens op de GSZ*, Nieuwe Wiskrant 11,1 (1991), p. 76-79.

H.B. Verhage: *Kritisch kijken naar grafieken*, Nieuwe Wiskrant 11,1 (1991), p. 36-42.

F.J. van den Brink: *W12-16 ZakRekenMachines, goede bedoelingen en voorlopige keuzes*, Nieuwe Wiskrant 11,3 (1992), p. 14-21.

N. Verhoef en D. Bos: *Wiskundewerklokaal en de lerarenopleiding te Zwolle*, Nieuwe Wiskrant 11,3 (1992), p. 5-10.

J. ten Hove: *De rollen van formules*, Nieuwe Wiskrant 11,2 (1991), p. 17-24.

F.J. van den Brink: *Beroepswiskunde - beroepen en bijbanen in wiskundig perspectief*, Nieuwe Wiskrant 11,4 (1992), p. 5-9.