



Wiskunde 12-16 **een boek voor docenten**



Wiskunde 12-16

een boek voor docenten

Douwe Kok
Marja Meeder
Monica Wijers
Joop van Dormolen

In de periode augustus 1987 tot augustus 1992 waren werkzaam in het team W12-16:

Mieke Abels
Rob Bloem
Jan van den Brink
Aad Goddijn
Koeno Gravemijer
Gerrit van den Heuvel
Juul ten Hove
Leo Kalmijn
Douwe Kok
Hans Krabbendam
Marja Meeder
Theo Obdeijn
Nanda Querele
Martinus Riemersma
George Schoemaker
Henk Staal
Heleen Verhage
Sylvia van der Werf
Monica Wijers
Pieter van der Zwaard

De administratieve ondersteuning van het project werd verzorgd door:

Sylvia Pieters
Evelien Veltman
Corine van den Boer
Ellen Hanepen

Verder werkten mee:
Truus Dekker
Joop van Dormolen
Ed de Moor
Fred Mulder
Wilma Verkooijen

Omslagontwerp en vormgeving: Ida Rouwenhorst

WOORD VOORAF	1
INLEIDING	3
1 W12-16 EN REALISTISCHE WISKUNDE	5
Het beeld van wiskunde in de maatschappij	5
Realistische wiskunde en het leerplan	6
De voorgeschiedenis	8
Team W12-16 en proefscholen	8
Raadpleging	9
De invoering van het nieuwe leerplan	9
2 LEERSTOFONDERDELEN	11
Algebra	11
Meetkunde	22
Rekenen	39
Informatieverwerking en statistiek	48
Geïntegreerde wiskundige activiteiten	63
3 VERANDEREND WISKUNDEONDERWIJS	69
Inleiding	69
Wiskunde als schoolvak	69
De vormende waarde van wiskunde	70
Didactiek in de nascholing	71
Veranderende doelstellingen	71
Statische wiskunde	72
Dynamische wiskunde	73
Wiskunde als menselijke activiteit	74
Ontwikkelingen in de didactiek	75
Afsluiting	76
4 ENKELE DIDACTISCHE ONDERWERPEN	79
Inleiding	79
Contexten	80
Leren door doen	89
Inzicht en oefenen	93
Redeneren	101
Taal	107
5 HET NIEUWE LEERPLAN EN ...	111
Inleiding	111
Leerlingen	113
Meer leerlingen doen langer wiskunde	113
Meisjes	114
De allochtone leerling	115
Schoolsoorten	118
Het vbo-A/B-niveau	118
I-leerlingen	119
Verskil tussen C- en D-niveau	121

De aansluiting van mavo D op de bovenbouw havo	122
Van havo-onderbouw naar havo-bovenbouw	122
Van vwo-onderbouw naar vwo-bovenbouw	124
Van mavo/vbo naar mbo	126
Volwassenenonderwijs	127
Hulpmiddelen	128
Schoolboeken	128
De zakrekenmachine	129
De computer	131
Wiskundewerklokaal	133
Inrichting van het onderwijs	136
Lessentabel	136
Eindexamen	137
Schoolonderzoek	138
Proefwerken	139
Samenwerken in de sectie	140
Samenwerking met andere secties	141
Nomenclatuur	143
Basisvorming	144
Leerplan, kerndoelen, examenprogramma	144
Goede afstemming	145
Unieke positie wiskunde	146
EINDPUBLIKATIES W12-16	149
ADRESSEN	

WOORD VOORAF

Voor u ligt één van de eindprodukten van het team W12-16. Het vormt één geheel met de andere publikaties van het team, al kan ieder boek afzonderlijk gelezen worden. Bij elkaar geven ze een compleet beeld van het werk van het team W12-16.

In de eerste plaats zijn er de twee officiële publikaties:

- het *Examenprogramma mavo/vbo C/D*.
- het *Trajectenboek Wiskunde 12-16*, waarin de leerplannen beschreven zijn voor alle schooltypen. Een droge opsomming van leerstof uitgesplitst naar B-, C-, D-, havo- en vwo-niveau.

Verder zijn er nog:

- *Wiskunde 12-16, een boek voor docenten*, waarin aandacht wordt besteed aan allerlei aspecten die samenhangen met de leerplanverandering. Verder wordt een globaal overzicht gegeven van de nieuwe inhoud en de visie die ten grondslag ligt aan de keuzen die gemaakt zijn.
- In *Wiskunde een Wereldvak* gaat het om allochtone leerlingen en de rol die taal en cultuur in het wiskundeonderwijs spelen.
- In *Achtergronden bij het nieuwe leerplan wiskunde 12-16* wordt uitvoerig beschreven welke keuzen zijn gemaakt, welke uitgangspunten zijn gehanteerd en welke argumenten een rol hebben gespeeld.

In band 1 staan artikelen over algebra, rekenen, geïntegreerde wiskundige activiteiten en wiskundeonderwijs voor vbo-leerlingen, in band 2 over meetkunde, informatieverwerking en statistiek en meisjes en het nieuwe programma.

Naast deze produkten is er een hele serie leerlingpakketten verschenen en wordt er elk jaar een Examenbundel gepubliceerd met de experimentele eindexamens.

De Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (COW) was verantwoordelijk voor het project waarin gewerkt werd aan vernieuwing van het wiskundeonderwijs voor leerlingen van twaalf tot zestien jaar. Het team W12-16 deed het eigenlijke werk, daarbij soms gesteund door externe deskundigen. Het Examenprogramma en het Trajectenboek zijn als officiële eindprodukten aangeboden aan de staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen.

De COW en het team W12-16 zijn per augustus 1992 opgeheven. Instellingen als SLO en Freudenthal Instituut gaan voort met ontwikkeling en onderzoek op het gebied van wiskundeonderwijs. De Samen-

werkingsgroep Wiskunde 12-16 neemt de taken over vooral wat betreft de invoering van het nieuwe leerplan. Deze groep waarin alle lerarenopleidingen, de experimenteerscholen, Freudenthal instituut, SLO en CITO samenwerken, wordt gecoördineerd door het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum (APS).

Marja Meeder
George Schoemaker

INLEIDING

Dit boek is geschreven om de wiskundeleraars een beeld te geven van de veranderingen die het gevolg zijn van het nieuwe leerplan. Het verschijnt als afsluiting van het project Wiskunde 12-16 en wordt in het najaar van 1992 aan alle scholen voor vbo, mavo, havo en vwo toegestuurd. In de twee voorgaande jaren (najaar 1990 en 1991) is aan alle scholen een special van de Nieuwe Wiskrant toegestuurd. Ook daarvan was het doel de docenten die wiskunde geven te informeren. In dit verband moet ook genoemd worden de Euclidesspecial van juni 1992 die in zijn geheel aan het nieuwe leerplan is gewijd. Nu, aan het eind van het project kan een compleet beeld geschetst worden van het nieuwe leerplan.

In hoofdstuk 2 wordt ingegaan op de inhoud van het nieuwe programma verdeeld over de vijf leerstofgebieden: algebra, meetkunde, rekenen, informaticaverwerking en statistiek en geïntegreerde wiskundige activiteiten.

In hoofdstuk 3 wordt de achtergrond van deze leerplanverandering beschreven en in een historisch kader geplaatst. Hoofdstuk 4 besteedt aandacht aan enkele didactische aspecten. Praktische zaken staan centraal in het laatste hoofdstuk, waarin een aantal vragen over de dagelijkse gang van zaken beantwoord worden.

Hoewel wij van mening zijn dat dit boek een redelijk beeld schetst van veranderingen die samenhangen met de invoering van het nieuwe leerplan en de basisvorming, willen we niet de indruk wekken dat een boek als dit een nascholingscursus kan vervangen. Dit boek biedt een goede voorbereiding om met een behoorlijk rendement aan nascholingscursussen deel te nemen. Daar kan dieper op zaken worden ingegaan, kunnen nog bestaande vragen worden beantwoord en kan vooral het contact en de gedachtenwisseling met andere collega's inspirerend werken. Passend bij dit nieuwe leerplan worden nascholingscursussen aangeboden op diverse plaatsen in het land. De coördinatie daarvan berust bij het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum (APS).

Bij het schrijven van dit boek is door de vier schrijvers in ruime mate gebruik gemaakt van allerlei producten van anderen. Met name het werk van de overige teamleden was daarbij belangrijk, maar ook de wisselwerking met de praktijk op de experimenteerscholen. Agneta Aukema-Schepel, Nora Blom en Frans Bouman danken we voor hun commentaar op voorlopige versies van dit boek.

Wij hopen met dit boek te bereiken dat docenten een idee krijgen van wat ze de komende jaren te wachten staat. Wij hopen natuurlijk

ook dat het nieuwe programma door een flinke groep docenten geaccepteerd en gewaardeerd zal worden. Wij realiseren ons terdege dat deze leerplanveranderingen extra inzet van alle betrokkenen vraagt. Maar we verwachten dat die extra inzet de moeite waard zal zijn.

W12-16 EN REALISTISCHE WISKUNDE

Het beeld van wiskunde in de maatschappij

Wiskunde, wat is dat voor een vak? En mensen die goed zijn in wiskunde, wat zijn dat voor types? De media hebben het niet moeilijk met deze vragen. Op de TV is wiskunde vooral veel abacadabra. Voor gewone mensen niet te vatten. Een vak voor knappe koppen. En kinderen die goed zijn in wiskunde, zijn knappe koppen in de dop.

In de zogenaamde 'comedies' hebben wiskundeleraars het vrijwel altijd moeilijk, want het vak dat ze proberen te onderwijzen wordt maar door een paar leerlingen begrepen. Ook onze televisiesterren vertellen dat ze vroeger van wiskunde niet veel snapten. Dat heeft hen overigens niet verhinderd het behoorlijk ver te schoppen.

Wiskunde is dus een moeilijk vak, volgens de publieke opinie. Toch is het, volgens diezelfde opinie, heel belangrijk om op school je best te doen voor wiskunde. Want met dat vak kun je alle kanten op. Daarom moet je, als het even kan, wiskunde in je pakket houden. En liefst er ook nog een voldoende voor halen. Als je niet alles begrijpt, probeer je er dan maar uit te redden door de regels blindelings toe te passen. Dat alles onder het motto: vraag niet hoe het kan maar profiteer ervan.

Niet iedereen zal de situatie zo ervaren als hierboven is geschetst. Sommigen zullen het zelfs een karikatuur vinden. Maar over één ding kunnen we het eens zijn: de huidige schoolwiskunde is voor veel van onze leerlingen ongeschikt.

In de afgelopen periode is in Nederland bij vele docenten, leraren-opleiders en leerplanontwikkelaars de overtuiging gegroeid dat het mogelijk is zinvolle wiskunde te onderwijzen die geschikt is voor grote groepen leerlingen. Zulk wiskundeonderwijs heeft een aantal kenmerken:

- de leerling ontwikkelt inzicht aan de hand van probleemsituaties;
- die probleemsituaties zijn vaak uit de werkelijkheid afkomstig.
- de aangeboden wiskunde is voor elke leerling zinvol.

Deze visie wordt aangeduid met de term 'realistisch wiskundeonderwijs'.

Veel rekenmethoden voor het basisonderwijs zijn al volgens deze visie geschreven. Hetzelfde geldt voor de nieuwe leerplannen wiskunde voor de bovenbouw van vwo en havo.

Realistische wiskunde en het leerplan

Een persoon die zich in deze wereld wil handhaven, moet kunnen rekenen. Het leven van alledag doet voortdurend een beroep op 'gecijferdheid'. Wat heb je lever: een uitkering ineens of een procentuele loonsverhoging? Welke lening is goedkoper? Hoeveel kost een weekje op de camping? Hoeveel allochtonen wonen er in Nederland tegen het jaar 2000? De ozonlaag wordt dunner: volgens een krant gaat er elke dag 1% af. Wat zou dat betekenen na een jaar?

Er is op de basisschool veel tijd aan rekenen besteed, maar het is nodig dat die rekenvaardigheid onderhouden wordt. Bovendien is er alle aanleiding dat rekenen verder uit te bouwen. Denk aan het rekenen met breuken en met negatieve getallen. Realistisch wiskundeonderwijs betekent in elk geval veel aandacht voor 'praktisch rekenen'.

De kranten staan vol met grafieken. Allerlei beweringen worden onderbouwd met resultaten van statistisch onderzoek. Wiskundeonderwijs dat begint in de werkelijkheid zal dus ook aandacht besteden aan het lezen van die grafieken. Meer algemeen gezegd: statistiek is een vanzelfsprekend onderdeel van realistisch wiskundeonderwijs.

De onderwerpen rekenen en statistiek zijn duidelijk zinvol voor alle leerlingen. Bij deze onderdelen ontwikkelen leerlingen kennis en vaardigheden waarmee ze zich beter in het leven kunnen handhaven. Hoe zit het wat dat betreft met oude en bekende leerstofgebieden als meetkunde en algebra? Eeuwen lang was meetkunde een geheel van stellingen en definities. Menigeen die voor 1968 de middelbare school bezocht, herinnert zich nog de vier congruentiekenmerken (of waren het er vijf?). In die tijd was de meetkunde een hecht systeem, een bolwerk van logica. Maar meetkunde is meer dan strenge logica. Er zijn een heleboel praktische vragen die met meetkunde te maken hebben. Hoe komt het dat ik iets kan zien wat voor mijn buurman onzichtbaar is? Nadenken dus over het kijken. Als ik in de trein zit vliegen de bomen voorbij. Maar de boerderijen op de achtergrond staan stil. Hoe kan dat? Er zijn plannen voor een echte wolkenkrabber in Amsterdam. Hij moet wel 225 meter hoog worden. Is zo'n gevaarte nu een obstakel voor Schiphol? Is het uitzicht voor elke Amsterdammer bedorven? In een realistische benadering van het meetkundeonderwijs is er dan ook veel aandacht voor het je oriënteren in de wereld. En natuurlijk ook voor de meetkundige kennis die bij technische toepassingen een rol speelt.

Algebra is, in de herinnering van veel mensen, rekenen met letters, ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen en functies onderzoeken. Aan het gebruik van deze vaardigheden voor het oplossen van praktische problemen kwamen de meesten nooit toe. Ze waren al afgehaakt en leefden verder met de overtuiging dat algebra nooit een rol van betekenis in hun leven zou spelen. Bij realistisch wiskunde-

onderwijs is ervoor gekozen om vanaf het begin te werken met situaties die de leerling zich kan voorstellen. Het verband tussen waterverbruik en de hoogte van de rekening. Hoe lang duurt het voordat je spaargeld op de bank zich heeft verdubbeld? Bij welk aantal kilometers is het voordeliger van benzine over te schakelen op diesel? Grafieken, tabellen en formules zijn hulpmiddelen om dit soort problemen aan te pakken. De rekenmachine helpt daarbij nog een handje. Al te lastig rekenwerk kan immers met wat verstandig indrukken van knoppen uitgevoerd worden.

Voor welke leerlingen is die wiskunde? Leerlingen die van plan zijn een exacte studie te kiezen na het behalen van hun vwo- of havo-diploma hebben een bepaalde wiskundige bagage nodig. Ze moeten bedreven zijn in de analyse, al of niet toegepast, en ook over een behoorlijk ruimtelijk inzicht beschikken. In het verleden was de hele wiskundeopleiding in het voortgezet onderwijs er op gericht leerlingen deze wiskundige bagage te verschaffen. Natuurlijk gingen lang niet alle leerlingen de exacte kant op. Maar het heeft tot 1990 geduurd voordat zowel op de havo als op het vwo wiskunde werd gedoceerd die voorbereide op een meer sociaal/economische vervolgopleiding.

Het wiskundeleerplanplan voor mavo en lbo van 1968 was afgeleid van dat op havo en vwo, met de bedoeling allerlei vormen van doorstroming mogelijk te maken. Bij de keuze van de wiskunde voor lbo/mavo waren niet de behoeften en mogelijkheden van de leerling het uitgangspunt. Veel meer aandacht was er voor de waarde van wiskunde en wiskundig denken op zich.

Dat resulteerde in een gerichtheid op structuren van de wiskunde, zoals blijkt uit de rol van de verzamelingen die in elk leerplan een plaats kregen. Voor elke groep leerlingen werd de vraag gesteld wat van deze inhoud nog onderwijsbaar was en wat maar beter weggelaten kon worden. De vraag of deze wiskunde voor deze leerlingen zinvol was, legde in die tijd veel minder gewicht in de schaal. In het project W12-16 is voor een andere benadering gekozen: er moet voor alle leerlingen een passende wiskunde komen. Daarbij moet dus rekening gehouden worden met hun voorkennis en hun begaafdheid. De wiskunde moet zinvol zijn en de moeite waard, niet alleen met het oog op de toekomst maar ook op het moment dat het geleerd wordt. De toekomstige rol van de wiskunde kan zich op drie gebieden afspelen:

- in de maatschappij;
- in het beroep;
- in de vervolgopleiding.

Dat betekent dat bij de verschillende schooltypen ook een verschillend soort wiskundeonderwijs hoort.

De voorgeschiedenis

In 1987 werd door de toenmalige staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs ingesteld. De opdracht van de COW was om adviezen te geven voor vernieuwing van het wiskundeonderwijs in de eerste fase van het voortgezet onderwijs. Er werd gevraagd om adviezen voor een nieuw examenprogramma mavo/lbo op C- en D-niveau en leerplannen voor lbo, mavo en eerste drie leerjaren voor havo en vwo. De voorstellen moesten zo zijn dat er een goede afstemming was op basisschool en vervolgonderwijs. Ook moesten de voorstellen meisjes een grotere kans op succes bieden en worden afgestemd op de – overigens steeds veranderende – plannen voor de basisvorming. De COW was ook verantwoordelijk voor het opstellen van de eindtermen wiskunde, die later zijn omgevormd tot 'kerndoelen basisvorming wiskunde'.

De COW, die eerst onder voorzitterschap stond van prof. F. van der Blij en later van prof. J. de Lange was een grote, breed samengestelde commissie. Allerlei instanties en instellingen die betrokken zijn bij het wiskundeonderwijs, waren er in vertegenwoordigd als lid of als waarnemer: de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars (NVvW), de SLO, het CITO, het Freudenthal Instituut, leraren van basisonderwijs, lbo, mavo, havo, vwo en mbo, lerarenopleiders, de onderwijsinspectie en de werkgroep 'vrouwen en wiskunde'.

Team W12-16 en proefscholen

In 1988 is het team W12-16 gevormd, dat het eigenlijke werk ging doen, uiteraard onder verantwoordelijkheid van de COW. In het team wordt samengewerkt door mensen van SLO en het Freudenthal Instituut. In de zomer van 1992 zijn de adviezen ingeleverd bij de staatssecretaris van O&W. Bij het tot stand komen van deze adviezen hebben experimenten op een aantal proefscholen een belangrijke rol gespeeld. Twee scholen hebben vanaf het allereerste begin meegewerkt: de Radboudmavo in Oldenzaal en de prof. dr. Greydanus scholengemeenschap (lbo, mavo, havo, vwo) in Zwolle. Aan deze scholen worden al vanaf 1990 andere examens voor lbo/mavo afgenomen. Inmiddels is er een tiental scholen waar het nieuwe programma wordt uitgetoetst. Het is de bedoeling dat alle scholen in Nederland profijt hebben van de ervaringen van deze scholen.

De volgende scholen zijn als proefscholen betrokken bij de invoering van het nieuwe leerplan Wiskunde 12-16:

- Radboudmavo te Oldenzaal
- Gereformeerde Scholengemeenschap Prof. Dr. S. Greydanus te Zwolle

- Christelijke Scholengemeenschap Revius (lbo, mavo, havo, vwo) te Deventer
- Zernike College (mavo, havo, vwo) te Groningen
- Openbare Scholen Gemeenschap Lelystad te Lelystad
- R.K. College de Klop te Utrecht
- Scholengemeenschap Sancta Maria te Deurne
- Scholengemeenschap Grootstal te Nijmegen
- Sint Oda Mavo te Budel
- Koningin Gerberga Mavo te Meerssen.

In 1994 zal voor het eerst op al deze scholen eindexamen afgenomen worden op grond van het nieuwe leerplan.

Raadpleging

Wij zijn er van overtuigd dat deze leerplanvernieuwing democratisch is verlopen. Omdat daar wel eens sceptisch over gesproken wordt, zetten we wat zaken op een rijtje:

Allereerst is daar de brede samenstelling van de COW.

Verder is het team twee keer op grote schaal met voorlopige plannen naar buiten getreden. Dat gebeurde in het najaar van 1990 en 1991. Beide keren werden deze regionale bijeenkomsten voorafgegaan door speciale uitgaven van de Nieuwe Wiskrant, die aan alle scholen in Nederland zijn toegestuurd. De respons op deze bijeenkomsten heeft steeds geleid tot bezinning op en bijstelling van de plannen.

Ook op bijeenkomsten van het APS, waar de voorlichting over de Basisvorming op de eerste plaats stond en het nieuwe leerplan op de tweede, is een grote groep docenten geïnformeerd. Wij schatten dat bijna driekwart van de docenten die met het nieuwe programma te maken krijgen, op één van de bijeenkomsten is geweest. Belangrijke organisaties als NVvW en VALO (Veld Advisering Leerplan Ontwikkeling) brachten een voorlopig advies uit. Die adviezen waren overwegend positief, ook al werd hier en daar een vraagteken geplaatst.

De invoering van het nieuwe leerplan

Het ontwikkelen van plannen vereist veel zorgvuldigheid. Die eis van zorgvuldigheid geldt bijna nog sterker voor het invoeren van die plannen. Onder verantwoordelijkheid van het APS is een zogenaamde Samenwerkingsgroep Wiskunde 12-16 gevormd. In deze SW12-16 werken de lerarenopleidingen samen met de proefscholen. Daardoor kunnen bij de nascholing profiteren van de ervaringen met het nieuwe leerplan. De ervaringen van de proefscholen worden systematisch verzameld en verwerkt tot bruikbaar materiaal voor de scholen die nog aan de invoering van het nieuwe leerplan moeten beginnen. Zo worden deze gegevens onder andere gebruikt tijdens nascholings-

bijeenkomsten en voorlichtingsdagen die op veel plaatsen in het land gedurende de komende jaren georganiseerd zullen worden.

Het boek dat voor u ligt is een eindprodukt van het ontwikkelwerk van het team W12-16. Tegelijkertijd kan het beschouwd worden als een begin van de invoering van het nieuwe leerplan wiskunde. Het ontwikkelwerk was een heel karwei. De invoering zal zeker niet met minder energie toe kunnen.

LEERSTOFONDERDELEN

Algebra

Inleiding

Het gaat bij het onderdeel algebra in het nieuwe leerplan om het werken aan problemen waarbij verbanden tussen variabelen een rol spelen. De problemen en verbanden komen voort uit situaties uit de werkelijkheid. Dit kunnen allerlei verbanden zijn, niet alleen de in het huidige wiskundeonderwijs zo vaak voorkomende lineaire en kwadratische. Het kan gaan over het verband tussen lichaamslengte en gewicht, tussen datum en hoogte van een zonnebloem of tussen tijdstip van de dag en waterhoogte. Die verbanden worden op verschillende manieren voorgesteld: in taal zoals hierboven, met tabellen, met grafieken of indien mogelijk met formules. Deze voorstellingsvormen zijn belangrijke hulpmiddelen bij het oplossen van problemen rond verbanden.

Daarbij is het van belang om goed te kunnen werken met variabelen. Dat betekent bijvoorbeeld dat je kunt vaststellen wat de variabelen zijn die van belang zijn voor het oplossen van het probleem. Ook betekent het dat je de variabelen een naam kunt geven en dat je kunt beredeneren wat er gebeurt als een van de variabelen verandert. Voor het verband tussen lichaamslengte en gewicht betekent dat bijvoorbeeld dat je weet dat als de lichaamslengte toeneemt het gewicht dan ook toeneemt, maar niet evenredig. Bij het verband tussen tijd en waterhoogte herken je de periodictelt. Behalve het redeneren over veranderingen in de variabelen waarmee globale uitspraken mogelijk zijn, wordt er ook precies gerekend. Dat gebeurt wanneer je voor variabelen waarden invult en zo de waarde van een andere berekent.

Ten slotte zijn er methoden en technieken die gebruikt kunnen worden om de problemen op te lossen. De nadruk in het leerplan ligt op breed toepasbare technieken. Dat wil zeggen technieken die bij verschillende typen verbanden te gebruiken zijn, en niet technieken die bij één functietype horen zoals bijvoorbeeld kwadraat afsplitsen. Er komen niet alleen technieken voor die te gebruiken zijn bij formules, maar ook die horen bij tabellen of grafieken. Interpoleren en extrapoleren zijn daar voorbeelden van.

De inhoud van de algebra komt voor een deel overeen met de inhoud van het oude leerplan. Daar ging het immers ook om het werken met verbanden tussen variabelen. Er worden echter in het nieuwe leerplan andere accenten gelegd. De algebra is nu meer gericht op bruikbaarheid.

Daarmee samenhangend zijn keuzen gemaakt waarop we eerst kort ingaan. Daarna beschrijven we de inhoud van het leerplan waarbij we de volgende indeling hanteren:

- Voorstellingsvormen: taal, tabel, grafiek, formule
- Verschillende verbanden
- Methoden en technieken.

Hoe een en ander uitgewerkt kan worden laten we zien aan de hand van opgaven uit experimentele examens. Ten slotte gaan we in op de verschillende niveaus.

Keuzen

Aansluitend bij de keuze voor realistisch wiskundeonderwijs, zijn bij de invulling van het onderdeel algebra een aantal keuzen gemaakt.

In de eerste plaats zien we de leerlingen als gebruikers van de algebra. De nadruk ligt niet op het bestuderen van algebraïsche systemen en structuren. Het gaat om het gebruiken van algebra in realistische probleemsituaties, zoals die voorkomen in het dagelijks leven, beroepsituaties en het verdere onderwijs. Voor havo- en vwo-niveau is er meer aandacht voor het bestuderen van formele aspecten. Daar worden bijvoorbeeld 'kale' formules bestudeerd en niet alleen formules die verbanden of rekenvoorschriften beschrijven. De nadruk op de gebruikerskant van de algebra betekent niet dat leerlingen klakkeloos allerlei onbegrepen regels toepassen. Integendeel, een goede 'gebruiker' moet zijn methoden kunnen doorzien.

Een tweede keuze die we gemaakt hebben is die voor de nadruk op het interpreteren. In de eerste twee leerjaren gaat het om verken- en aflezen en gebruiken van tabellen, grafieken en formules, om het zien van structuur en om het rekenen. Pas later volgt het manipuleren. Daaronder valt het manipuleren met variabelen in formules. Dus bijvoorbeeld het omzetten van: $a + b = c$ in $a = c - b$ of het buiten haakjes halen van factoren. De nadruk blijft echter voor alle leerjaren en alle niveaus liggen op interpreteren. De mate waarin er aandacht is voor formeel manipuleren verschilt per niveau.

In de derde plaats is er gekozen voor breed toepasbare technieken. Technieken zoals kwadraat afsplitsen en ontbinden in factoren, zijn vaak slechts voor één functietype bruikbaar. Deze technieken bieden wel de mogelijkheid om dieper op bepaalde formele zaken in te gaan en zullen daarom in het havo en vwo een plaats kunnen krijgen.

De vierde en laatste keuze houdt in dat we in de eerste twee leerjaren proberen zo min mogelijk te 'stapelen', zodat leerlingen die even wat missen niet meteen afhaken. Allereel essentiële onderwerpen zoals vergelijkingen oplossen, het bestuderen van verschillende soorten verbanden, komen vanaf klas 1 voor. De behandeling is daar vooral oriënterend. Deze elementen blijven terugkeren en ontwikkelen zich

naar meer complexiteit en een meer formele behandeling. Ook hier geldt weer dat de mate waarin dat gebeurt afhankelijk is van het niveau van de leerling.

Voorstellingsvormen: taal, tabel, grafiek, formule

Vier voorstellings- of beschrijvingsvormen van situaties staan bij algebra centraal: taal, tabel, grafiek en formule. Het onderstaand schema (fig. 1) laat de mogelijke omzettingen zien.

naar van	situatie	tabel	grafiek	formule
situatie	vertaal- vaardigheden			
tabel				
grafiek				
formule				

fig. 1

Het beheersen van deze vertaalvaardigheden is van belang bij het oplossen van problemen. We beschouwen de vier voorstellingsvormen als gelijkwaardig. Elk heeft zijn sterke en zwakke eigenschappen. Met elkaar geven ze een compleet beeld van een verband. Ze vullen elkaar aan en ondersteunen elkaar.

In de eerste twee leerjaren is er vooral aandacht voor tabel en grafiek. Grafieken worden globaal bekeken op aspecten als: (sterker of zwakker) stijgen en dalen, periodiek zijn, hoogste waarde. Deze begrippen zijn gekoppeld aan de situatie waarover het gaat. Later komen deze begrippen op een abstractere manier voor.

Een autocoureur rijdt een aantal rondjes op één of andere racebaan. In de grafiek zie je het verloop van zijn snelheid tijdens deze rit.

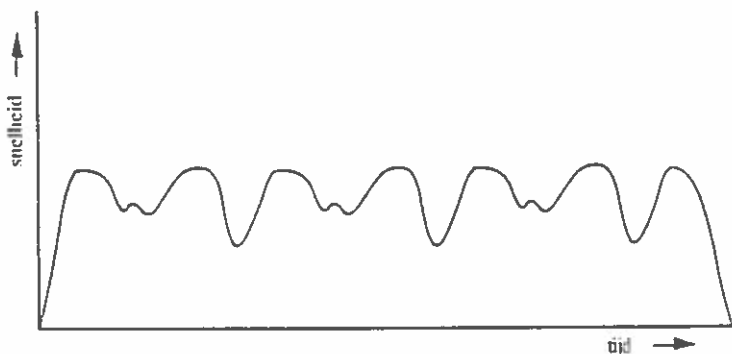


fig. 2

In dit voorbeeld (fig.2) gaat het om het interpreteren van de grafiek van een racende auto. Daarbij zien leerlingen de herhaling: 'Hij rijdt steeds hetzelfde rondje'. Later kan dit met het begrip periode worden verbonden. Het globaal kijken naar grafieken blijft ook in hogere leerjaren een rol spelen.

Uiteraard komt ook het meer in detail werken met een grafiek aan bod, d.w.z. het tekenen van grafieken en het aflezen van precieze waarden uit een grafiek. Daarbij is de relatie tussen grafiek en tabel belangrijk. De tabel blijft ook in het vervolg een belangrijk hulpmiddel om grafieken te tekenen. Het volgende voorbeeld (fig.3) is een opgave afkomstig uit het experimentele examen mavo/vbo D van mei 1992.

Opgave 5 Speciale functies

De tabel in de bijlage gaat over $x^3 + x$ en $\frac{1000}{x}$.

- 11 ☐ Kies voor x de waarden 2, 5 en 8 en vul de tabel in.
- 12 ☐ Reken uit hoeveel verschil er is tussen $x^3 + x$ en $\frac{1000}{x}$ als $x = 100$.
- 13 ☐ Gebruik de getallen uit de tabel en schets in het assenstelsel op de bijlage de grafieken van de functies $x \rightarrow x^3 + x$ en $x \rightarrow \frac{1000}{x}$.
- 14 ☐ Geef een waarde van x waarvoor $x^3 + x$ en $\frac{1000}{x}$ ongeveer aan elkaar gelijk zijn. Bereken hoe groot het verschil dan is.
- 15 ☐ Schrijf op hoe je een x kunt vinden waarvoor het verschil tussen $x^3 + x$ en $\frac{1000}{x}$ kleiner is dan in vraag 14.

fig. 3

De tabel is al gedeeltelijk ingevuld en moet door de leerlingen verder ingevuld worden, waarna de grafiek geschetst moet worden. Bij vraag 14 gaat het erom een waarde van x te vinden waarvoor de functies ongeveer aan elkaar gelijk zijn. De grafiek is dan een zeer geschikt middel. Opzoeken in de grafiek werkt sneller en directer dan het oplossen van een in dit geval lastige vergelijking. De mate van nauwkeurigheid kan vergroot worden door gebruik te maken van de zogenaamde 'inklemmethode'. Daarbij wordt een nauwkeurigere benadering van de x -waarde van het snijpunt gevonden door van twee kanten te benaderen. De grafiek geeft steun doordat je eruit af kunt lezen welke van de twee verbanden in een bepaald interval de hoogste waarde aanneemt.

Over taal en formules hebben we het nog niet gehad. In de eerste twee leerjaren komen formules al voor. Het zijn dan vaak woordformules, waarmee een verband wordt beschreven. Bijvoorbeeld een formule voor de prijs van het huren van een roeiboot:

$$\text{huurprijs} = \text{vastbedrag} + \text{kosten per uur} \cdot \text{aantal uren}.$$

Een formule kan ook opgevat worden als rekenvoorschrift. De formu-

les blijven nog verbonden aan situaties. Later worden formules ook op zichzelf bekeken zoals uit figuur 3 blijkt.

In klas 3 en 4 komt het bewerken van voorstellingsvormen aan de orde. De samenhang tussen veranderingen in de situatie, in de grafiek, in de tabel en in de formule komt aan bod. Het gaat bij grafieken om 'schuiven en oprekken', 'in- en uitzoomen' en 'optellen en aftrekken'.

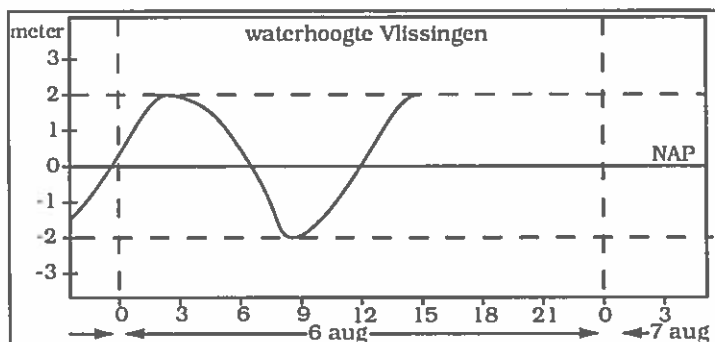


fig. 4

Deze grafiek (fig.4) geeft de waterhoogte in Vlissingen aan, zoals door Rijkswaterstaat voorspeld voor doorsnee omstandigheden. Als de omstandigheden veranderen, verandert ook de grafiek. Een mogelijke verandering in de situatie is het optreden van springvloed. De uitwijkingen zijn dan zo'n 20 procent groter dan normaal. Voor de grafiek betekent dit dat deze in verticale richting wordt opgerekt. Als er een formule bij de grafiek hoort, dan wordt de nieuwe formule 1,2 keer de oude formule. In de tabel worden alle waarden vermenigvuldigd met 1,2.

Verschillende verbanden

In het dagelijks leven komen allerlei verbanden voor, veel meer dan alleen lineaire en kwadratische. Verschillende vormen van groei leiden tot machtsverbanden en exponentiële verbanden. Zo is het verband tussen de toename van de lengte van de ribben van een kubus en de inhoud ervan een derdegraads verband. De groei van kapitaal bij rente op rente is exponentieel, net als de groei van de wereldbevolking. In het dagelijks leven doen zich ook allerlei periodieke verschijnselen voor. Denk maar aan hartslag en aan de getijdenbewegingen.

In het leerplan komt een breed scala van zulke verbanden voor. Dat betekent dat de tweedegraads functie haar dominante plaats is kwijtgeraakt, zij krijgt evenveel aandacht als andere verbanden. Het

lineaire verband krijgt wel een aparte behandeling. Veel verbanden uit het dagelijks leven zijn immers lineair.

Op bladzijde 14 zagen we twee typen verbanden die in het oude leerplan niet voor zouden komen: een derdegraads verband en een verband waarin een omgekeerde evenredigheid tot uitdrukking komt.

Niet alle in het leerplan voorkomende verbanden kunnen beschreven worden met een formule. Dit is ook niet nodig: het kan ook in woorden of met een grafiek. Het volgende voorbeeld uit het experimentele examen vbo/mavo C van mei 1991, gaat in zijn geheel over het globaal omgaan met grafieken (fig.5).

De volgende grafiek geeft aan hoeveel water er in de loop van een etmaal bij een waterleidingbedrijf wordt afgenomen. Zoals je ziet varieert die hoeveelheid water sterk:

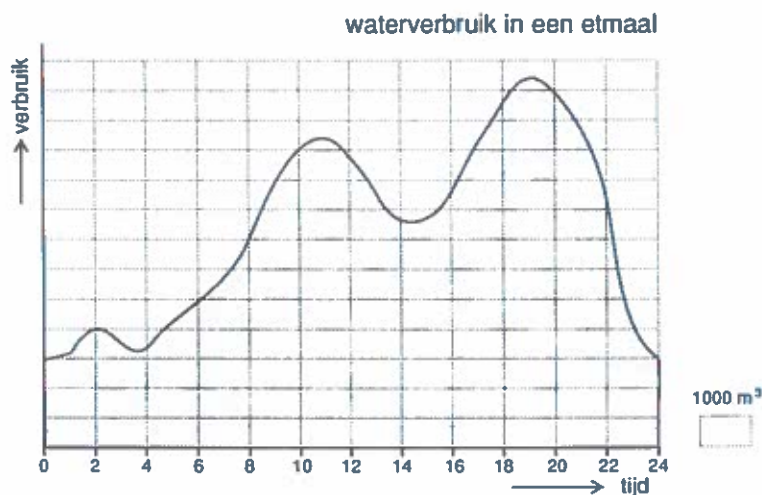


fig. 5

- a Maak met behulp van de grafiek een schatting van het totale verbruik in dat etmaal.

Het waterleidingbedrijf heeft veel liever dat het waterverbruik het hele etmaal door ongeveer gelijk is.

- b Hoe zou in dat geval de grafiek eruitzien? Ga er vanuit dat het totale verbruik niet verandert. Teken in de figuur die grafiek erbij.

Om een gelijkmatiger verbruik te bevorderen voert het waterleidingbedrijf een nachttarief in. Van 's avonds 11.00 tot 's morgens 7.00 uur wordt het water per m³ goedkoper. Nadat het nachttarief een tijdlang is uitgetest, maakt het bedrijf dagelijks een nieuwe grafiek. Hier zie je zo'n grafiek (fig.6).

- c Heeft de maatregel het bedoelde resultaat gehad? Schrijf bij de grafiek:
- of het verbruik regelmatig is geworden
 - of het totale verbruik veranderd is.

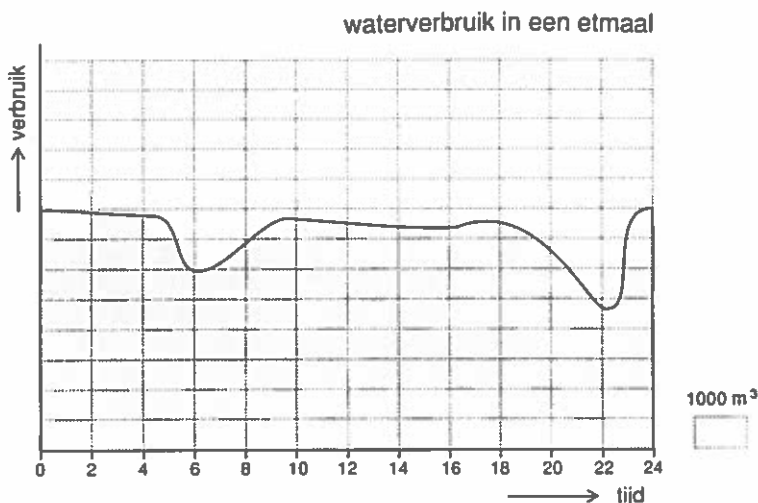


fig. 6

Van een aantal soorten verbanden moeten leerlingen specifieke kenmerken en eigenschappen kennen, herkennen en kunnen gebruiken. Bijvoorbeeld dat een vaste stap hoort bij een lineair verband en een vaste factor bij een exponentieel verband.

Leerlingen van vbo en mavo op D-niveau en havo/vwo moeten weten dat bij een exponentieel verband de formule $y = ab^x$ hoort en omgekeerd.

Een vierkant kun je vergroten door een schuin vierkant eromheen te tekenen (fig.7).



fig. 7

Als je dit een aantal keren achter elkaar doet, komt er een leuke tekening (fig.8). Het kleinste vierkant heeft een oppervlakte van 1 cm².

- a Laat zien dat de oppervlaktes in dit plaatje een exponentiële groei vertonen.
- b Welke formule hoort bij de oppervlakte van het vierkant dat je na n stappen krijgt?

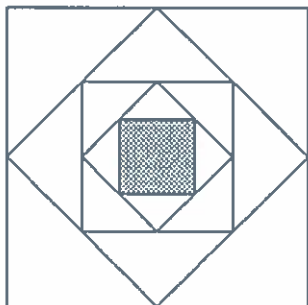


fig. 8

Methoden en technieken

De keuze voor breed toepasbare technieken heeft als consequentie dat een aantal technieken die in het huidige leerplan een belangrijke plaats innemen in het nieuwe leerplan niet of nauwelijks voorkomen. Zo is bijvoorbeeld de abc-formule haar belangrijke plaats kwijt geraakt. Dit hangt ook samen met het feit dat de tweedegraads functie veel minder prominent in het leerplan aanwezig is.

Een variant van deze formule komt nog wel voor op de formulekaart die leerlingen op het eindexamen mogen gebruiken. Ze kunnen deze dan gebruiken om bijvoorbeeld nulpunten uit te rekenen. Deze formule is echter niet per se nodig. In vraag f uit het volgende voorbeeld kan het probleem ook met een redenering bij een tabel worden opgelost.

Deze vragen gaan over vierkanten die volgens een vast patroon op ruitjespapier worden getekend. Hieronder staan drie voorbeelden (fig.9).

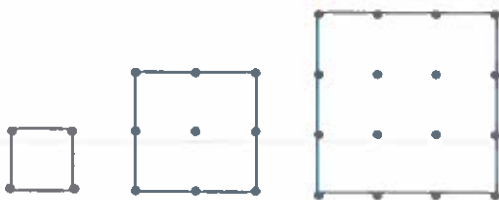


fig. 9

Bij elk vierkant wordt geteld hoeveel roosterpunten er op de rand liggen. Zo ontstaat de volgende tabel:

<i>rangnummer</i>	<i>aantal randpunten</i>	<i>aantal inwendige punten</i>
1	4	0
2	8	1
3	12	4

- a *Vul de tabel aan met de aantallen die horen bij de rangnummers 4 en 5.*
- b *Is er een vierkant met 1991 inwendige punten?*
- c *Is er een vierkant met 1992 randpunten?*
- d *Maak een formule waarmee je voor elk rangnummer het aantal randpunten kunt bepalen.*
- e *Stel ook zo'n formule op voor het aantal inwendige punten.*
- f *Is er een vierkant met evenveel randpunten als inwendige punten?*
- g *Waarvan komen er op den duur het meest: inwendige punten of randpunten?*

Het oplossen van vergelijkingen is niet uit het leerplan verdwenen. Verspreid door het hele leerplan, vanaf klas 1, komen vergelijkingen voor. Echter niet uitsluitend eerstegraads vergelijkingen en niet alleen in formulevorm. Dit heeft gevolgen voor de technieken die je kunt gebruiken bij het oplossen. In het algemeen heeft het werken met tabellen, grafieken en formules een voorkeursrichting: van een (of meer) vrij in te vullen variabele(n) naar een resultaat. Het oplossen van vergelijkingen komt meestal neer op het werken tegen deze voorkeursrichting in. Het zijn 'terugzoekvragen'.

De technieken die je daarbij kunt hanteren zijn vaak van dit terugzoeken afgeleid. Terugzoeken en vergelijken gebeurt niet alleen met formules maar ook met grafieken en tabellen. Leerlingen moeten bijvoorbeeld grafieken van twee of meer verbanden kunnen vergelijken en vaststellen wanneer ze elkaar snijden. Vaak zal grafiek of tabel in combinatie met formule gebruikt worden om oplossingen te vinden. Een illustratie daarvan is eerder gegeven op bladzijde 14.

Het zoeken naar de waarde van x waarvoor beide verbanden ongeveer dezelfde waarde opleveren, gebeurt door terugzoeken in tabel en/of grafiek. Het invullen in de formules is daarbij controlemiddel. De nauwkeurigheid kan vergroot worden met de techniek van het inklemmen. Deze techniek is gebaseerd op terugzoeken en controleren en is breed toepasbaar.

In de hogere leerjaren ligt de nadruk meer op technieken die gebruikt kunnen worden bij het werken met formules. Een voorbeeld van een breed toepasbare techniek is de zogenaamde bordjesmethode.

Een voorbeeld:

Zoek een getal zodat:

$$3 \cdot (\text{getal} - 4)^2 + 7 = 55.$$

We pakken een stuk eruit, dat is het bordje:

$$\boxed{} + 7 = 55$$

$$\boxed{} = 48$$

na weghalen van het bordje zien we:

$$3 \cdot (\text{getal} - 4)^2 = 48.$$

Weer een bordje leggen:

$$3 \cdot \boxed{} = 48$$

$$\boxed{} = 16$$

en dus:

$$\text{getal} - 4)^2 = 16,$$

Dan volgt:

$$\text{getal} - 4) = 4$$

(Of: $(\text{getal} - 4) = -4$, maar dat even terzijde voor later).

Uiteindelijk:

$$\text{getal} = 8.$$

De bordjesmethode eist:

- Het kunnen isoleren van een deel van de formule.
- Het onderweg toepassen van de inverse bewerkingen.

Expliciet is in het algebraleerplan vermeld dat vergelijkingen van het type $ax + b = cx + d$ door leerlingen van vbo/mavo D en havo/vwo opgelost moeten kunnen worden. Hierbij wordt dan een meer specifiek bij dit type horende techniek gebruikt.

Verschillen tussen de trajecten

B-traject

De leerlingen gebruiken wiskundige gereedschappen zoals ze die krijgen aangereikt. Zo is een formule vooral een ding dat je vertelt hoe je gemakkelijk iets uit kunt rekenen, maar omvormen van formules is niet aan de orde. Een grafiek levert informatie over een verband en je legt er informatie in vast, maar bewerkingen op grafieken zijn nauwelijks aan de orde. Voor het B-traject geldt, dat alle activiteiten van leerlingen verbonden blijven met de situatie waarin het oorspronkelijke probleem is gesteld.

De inhoud van het algebra gedeelte van het B-traject is ruwweg te typeren als de inhoud van de eerste twee leerjaren van het C/D-traject.

waarbij een formeel onderwerp als redeneren met negatieve getallen alleen binnen situaties aan de orde komt. Toegevoegd zijn enkele onderwerpen zoals eenvoudige lineaire vergelijkingen.

havo/vwo-traject

In het havo/vwo-traject leren de leerlingen niet alleen de diverse wiskundige gereedschappen te gebruiken. Reflectie op dit gebruik leidt tot redeneren over de achterliggende structuur. Zo is er in het havo/vwo-traject veel aandacht voor het gebruik van de structuur van formules bij het oplossen van vergelijkingen.

Het havo/vwo-traject moet er ook toe leiden dat redeneringen over formules los van een achterliggende situatie gemaakt worden. Een argument om redeneren over structuur meer aan de orde te laten komen is dat leerlingen aan het eind van het havo/vwo-traject een beeld moeten hebben van wiskunde B.

Hier volgt een voorbeeld van een redenering die alle genoemde trekken in zich heeft.

$(x - 5)^4 + 6$ heeft als minimale waarde 6 voor $x = 5$, omdat $(x - 5)^4$ nooit negatief wordt en voor $x = 5$ waarde 0 heeft.

Daarbij wordt afhankelijk van de deelredenering een bordje op $(x - 5)^4$ en op $(x - 5)$ gelegd. De redenering illustreert ook het gebruik van formelere taal en begrippen.

Ook wordt in het havo/vwo-traject het begrip functie expliciet gemaakt en gebruikt. Dit in tegenstelling tot het C-traject, waar het functiebegrip impliciet blijft. Ook de begripsvorming rond getallen is uitgebreider dan in het C-traject: zo moet door havo/vwo-leerlingen $\sqrt{2}$ opgevat kunnen worden als een getal. Voor C/D-leerlingen is het vooral een bewerking die uitgevoerd wordt op het getal 2.

Meetkunde

Inleiding

Net zoals bij de andere leerstofonderdelen heeft de keuze voor realistisch wiskundeonderwijs consequenties voor het onderdeel meetkunde. Er wordt uitgegaan van situaties uit de ruimte om ons heen. Bij het onderzoeken en verkennen daarvan ontmoeten we een aantal problemen.

Zo is er de vraag hoe we ruimtelijke situaties, met behulp van tekeningen kunnen weergeven en welke van die manieren voor de oplossing van een bepaald probleem de meest adequate is. Dit soort vragen heeft geleid tot een deelgebied, dat we kijkmeetkunde hebben genoemd.

Verder ontstaat bij het verkennen en onderzoeken de vraag op welke manieren we plaatsen in de wereld om ons heen kunnen bepalen, verschillende plaatsen van elkaar kunnen onderscheiden en hoe we de onderlinge ligging van plaatsen kunnen vastleggen. Hiervoor is het onderdeel plaatsbepalen ontworpen.

Hebben we met methodieken uit kijkmeetkunde en plaatsbepalen eenmaal allerlei delen van de ruimte vastgelegd, dan kunnen we die delen zelf verder onderzoeken. Dat geeft dikwijls aanleiding tot het onderscheiden van bepaalde vormen en figuren. Ook kunnen we bij het verkennen van de ruimte problemen tegenkomen die via meten en rekenen opgelost kunnen worden.

De leerstof uit de deelgebieden plaatsbepalen, vormen en figuren en meten en rekenen komt in grote trekken overeen met die uit het oude leerplan. Dat is ook begrijpelijk, want er moet immers met wiskundige objecten (figuren, hoeken, lijnstukken, afstanden, lengte, oppervlakte, enz.) gewerkt worden. Alleen de aanleiding om met de objecten aan het werk te gaan is vaak anders dan vroeger. De meetkunde is vooral gericht op praktisch gebruik.

Hieronder zullen we wat verder ingaan op de deelgebieden kijkmeetkunde, vormen en figuren, plaatsbepalen en rekenen en meten.

Vlakke meetkunde en ruimtemeetkunde niet scheiden

Uit het voorgaande zal duidelijk zijn, dat het niet noodzakelijk, zelfs niet wenselijk is een strikte scheiding aan te brengen tussen wat tot nu toe (de) ruimtemeetkunde en (de) vlakke meetkunde is genoemd. Meetkunde die vlak lijkt, komt vaak voort uit het verkennen van de ruimte en andersom kunnen resultaten uit het onderzoek van vlakke figuren weer aanleiding zijn verder in de ruimte te kijken. Dit geldt ook als in de latere leerjaren, vlakke en ruimtelijke figuren van meer abstracte aard los van de reële ruimte onderzocht worden.

Bij het onderzoeken van een ruimtelijk object kan het bijvoorbeeld

nuttig zijn een of meer doorsneden te bestuderen. Zo'n doorsnede is een vlakke figuur. Bij het bekijken van een paar doorsneden kan het idee ontstaan kleine variaties in de vlakke figuur aan te brengen en daarvan te onderzoeken of de veranderde figuur ook weer een doorsnede kan zijn van het oorspronkelijke object. Op deze manier is er een duidelijke relatie tussen ruimtelijke en vlakke figuren.

Werken met concrete materialen

Bij het verkennen van de ruimte is het om verschillende redenen belangrijk dat leerlingen met concrete materialen werken. Een van de redenen is, dat het werken met concreet materiaal voor de meeste leerlingen, zeker in de beginjaren van het voorgezet onderwijs, motiverend is.

Een andere reden is van meer leerpsychologische aard. Doordat leerlingen allerlei ruimtelijke modellen bouwen, bekijken en ermee manipuleren, krijgen ze een uitstekende gelegenheid hun ervaringen in de reële ruimte om te zetten in meer hanteerbare vormen. Niet alle leerlingen hebben op jonge leeftijd dezelfde ervaringen met activiteiten als spelen met blokken, mozaïek, vouwen, knippen, plakken, overtrekken en natekenen. Het ruimtelijk voorstellingsvermogen is bij twaalfjarigen daardoor zeer verschillend. Het is daarom goed alle leerlingen gelegenheid te geven nog een tijd concreet bezig te zijn. Daarbij moeten zij argumenteren, vergelijken, meten, vergroten en verkleinen. En, wat het belangrijkste is, zij moeten zichzelf een voorstelling vormen van wat zij in de reële ruimte ervaren hebben. Dit soort activiteiten moeten zij ook uitvoeren als zij tekeningen maken van ruimtelijke situaties, maar dat is weer een probleem apart. Door het werken met concrete materialen kunnen zij zich veroorloven over ruimtelijke situaties na te denken en zich daar een beeld van te vormen zonder daarbij ook nog na te moeten denken over de manier waarop zij de vlakke tekening moeten maken.

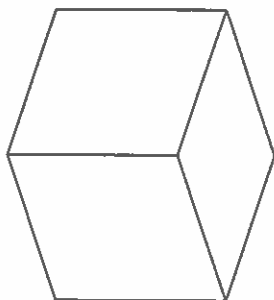


fig. 1

Het ruimtelijk interpreteren van een vlakke tekening is een vaardig-

heid die aangeleerd moet worden. Didactisch gezien is het werken met concrete materialen een tussenstap tussen het maken van (mentale) voorstellingen en het weergeven daarvan in een tekening. Veel mensen vinden het niet eenvoudig zich bij figuur 1 een kubus voor te stellen. Een model van een kubus geeft steun bij het interpreteren van dit soort tekeningen.

Deze concrete activiteiten zijn geen doel op zich. Ze zijn uitgangspunt voor construeren, berekenen en redeneren. Deze motorische activiteiten moeten gepaard gaan met mentale activiteiten, knippen en plakken moeten denkactiviteiten uitlokken. Uiteindelijk gaat het erom dat leerlingen in staat zijn zelf te besluiten of concreet handelen nuttig of nodig is.

Kijkmeetkunde

Onder kijkmeetkunde verstaan we het gebied van de meetkunde dat zich speciaal bezighoudt met de relatie tussen afbeelding en werkelijkheid en de rol van het kijken daarbij. De ruimtelijke werkelijkheid wordt vaak in vlakke tekeningen weergegeven. Kort gezegd gaat het om tekenen wat je ziet en om je kunnen voorstellen wat er is getekend. Dat zijn twee zaken die je als leerling moet leren. Je kunt dat niet vanzelf. Er worden verschillende meetkundige technieken gebruikt, die ook in andere toepassingen van de meetkunde voorkomen. Bijvoorbeeld het maken van verschillende aanzichten en het uitvoeren van bepaalde constructies. De kijkmeetkunde is geen gesloten gebied, maar verweven met de andere meetkundeonderwerpen.

Later en op een meer abstract niveau kan het leiden tot het bestuderen van verschillende projectiemethoden, zoals loodrechte projectie en perspectief.

Om tot een nauwkeuriger afbakening te komen nemen we eerst één typische kijkmeetkunde-opgave onder de loep (fig.2). De opgave bestaat uit een schetsmatige tekening van twee kamers en een tuintje. Er zijn twee personen aanwezig, in elke kamer één.

Gevraagd wordt in welke van de twee kamers de twee personen kunnen zitten. In de terminologie van de opgave: waar kan het roodborstje zitten zodat jij (op de deurmat) en je vriendin (in de rechter kamer) het allebei kunnen zien.

Jij staat op de deurmat, je vriendin zit op de zwarte stoel.

'Kijk, een roodborstje in de tuin', zegt je vriendin. Je kijkt en ziet het ook.

> Waar in de tuin kan het roodborstje dan zitten?

> Kleur dat stuk rood.

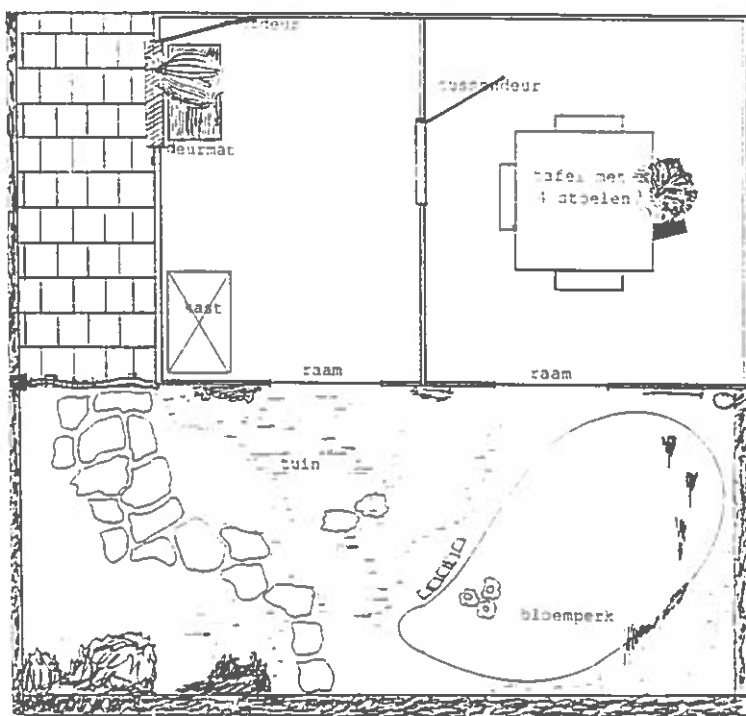


fig. 2

De opgave is gebruikt in een derde klas; de leerlingen hadden al eerder opgaven onder ogen gehad waarbij de oplossing gevonden wordt door lijnen te trekken vanuit een op de tekening aangegeven oogpunt. In figuur 3 is een uitwerking van de opgave te zien.

Het gebied wordt bepaald door rechte lijnen vanuit het oog van de kijkende personen te trekken; de lijnen lopen juist langs de rand van het raam.

Op het eerste gezicht is dat allemaal tamelijk eenvoudig. Er blijkt echter méér achter te zitten dan lijnen trekken alleen. Dat bleek toen gevraagd werd of het roodborstje inderdaad bij X zichtbaar zou zijn. Een leerling zei: 'Nee, want dan zit je onder het raam.'

Volgens een andere leerling kon het wel, want 'misschien is het wel zo'n raam tot op de grond; op zo'n plattegrond is dat niet te zien.'

Ook al is dat niet expliciet in de opgave gesteld, het verband tussen echte ruimte en vlakke afbeelding werd erbij betrokken. Een derde leerling had eerst niet goed uit de tekst bij de opgave begrepen dat ze

zich ook in het standpunt van de vriendin in de rechter kamer moest verplaatsen. Toen ze dat later wel begreep zei ze: 'Oh, en dan moet je dat kruisen.' De essentie van de opgave was daarmee uitstekend onder woorden gebracht: het gaat om een constructie waarbij gegevens vanuit twee standpunten gecombineerd worden.

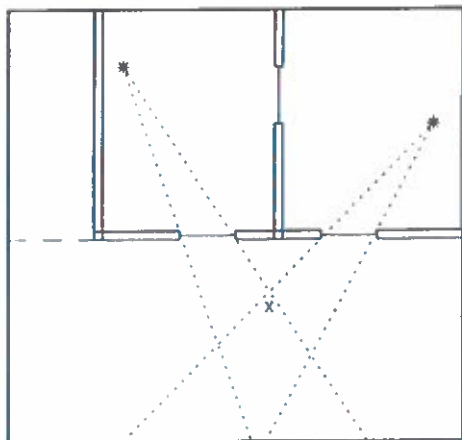


fig. 3

Aan de hand van het voorbeeld geven we nu zes elementen aan die voortdurend in de kijkmeetkunde terugkeren. Enkele ervan corresponderen met wiskundige begrippen, andere meer met meetkundige activiteiten.

De kijklijn

De kern van de constructie in het voorbeeld is het tekenen van een lijn, vanuit een oogpunt. Blijkbaar heeft kijken vanuit een oog langs de vensterrand iets met rechte lijnen te maken. We noemen deze lijnen vanuit het oog voortaan *kijklijnen*.

De rol van het standpunt

In het voorbeeld werd vanuit twee standpunten gekeken: vanaf de deurmat en vanaf een stoel in de rechter kamer. Vanuit verschillende standpunten worden dingen verschillend gezien. Het lijkt een triviale opmerking, maar de precieze uitwerking ervan geeft aanleiding tot rijke meetkunde.

Kijkhoeken

Het zichtbare gebied werd ingeklemd door twee kijklijnen. De *wijde* van zo'n gebied wordt bepaald door de hoek die twee lijnen maken in

het oog. Zo'n hoek heet een kijkhoek. Kijkhoeken hebben ook te maken met hoe groot iets eruitziet; het gaat daarbij om de 'hoek waaronder je iets ziet'.

Aanzichten en verklaringen

In het voorbeeld werd getekend in een bovenaanzicht van de situatie. Vaak zullen ook andere aanzichten een rol spelen. Als er vragen zouden worden gesteld die met de hoogte van het raam te maken hebben, zou een zij aanzicht geschikter zijn. Aanzichten van situaties, maar ook van losse objecten zijn middelen, waarmee verklaringen van verschijnselen rond het kijken worden gegeven. Ze worden ook toegepast om ruimtelijke objecten met vlakke afbeeldingen te beschrijven.

Afbeeldingen in soorten

In het voorbeeld beweerde een leerling: de hoogte van het raam is op de plattegrond niet te zien. Daarmee wordt in feite vastgesteld dat bij het afbeelden van de ruimte op een tekening informatie verloren gaat. Hoe het afbeeldingsproces verloopt, bepaalt wat nog wel en wat niet te zien is. Kijkmeetkunde gaat daarom ook over de relatie tussen ruimte en de afbeelding, over de techniek van het afbeelden zelf en over de soorten afbeeldingen die gebruikelijk zijn.

Constructies

In het voorbeeld werd een gebied bepaald door vier lijnen te tekenen die elk door twee gegeven punten gingen, namelijk een oog en een raamrand. Het is typisch wat in de traditionele meetkunde een constructie wordt genoemd.

Het interessante van kijkmeetkunde is, dat zij op allerlei niveaus van abstractie kan worden uitgevoerd. In bovenstaand voorbeeld werd er van de leerlingen een behoorlijk niveau gevraagd. Ze moesten zich de situatie al helemaal voorstellen en daarbij twee verschillende standpunten aannemen. In het ene geval moesten zij zich voorstellen dat ze vanuit de deurmat of vanuit de stoel naar het roodborstje keken; in het andere geval moesten zij zich voorstellen dat zij zelf, van bovenaf naar de situatie keken.

Bij het beginonderwijs kunnen leerlingen dergelijke ervaringen ook in werkelijkheid meemaken: zelf naar een rijje blokken kijken, zelf van bovenaf naar een medeleerling kijken, die naar blokken kijkt. Op hoger niveau kunnen leerlingen bepaalde aanzichten aangeboden krijgen en zich daarbij een werkelijkheid voorstellen. Of leerlingen kunnen een foto in handen krijgen van een vliegtuig dat laag over de daken schijnt te scheren en er kan gevraagd worden uit te rekenen hoe hoog dat vliegtuig vliegt bij gegeven lengte van het vliegtuig, breedte van de straat, hoogte van de huizen.

Meetkunde over vormen en figuren

Eén van de doelen binnen dit gebied van de meetkunde is het herkennen van verschillende meetkundige vormen in objecten en vlakke figuren en patronen die in de werkelijkheid voorkomen. Het gaat daarbij zowel om ruimtelijke als om vlakke vormen. Redeneren en construeren zijn belangrijke activiteiten in dit onderdeel van de meetkunde. Het esthetische aspect krijgt ook veel aandacht. Voor we apart ingaan op vlakke en ruimtelijke vormen en hun samenhang geven we eerst een voorbeeld uit één van de experimentele examens uit 1991 (fig.4).

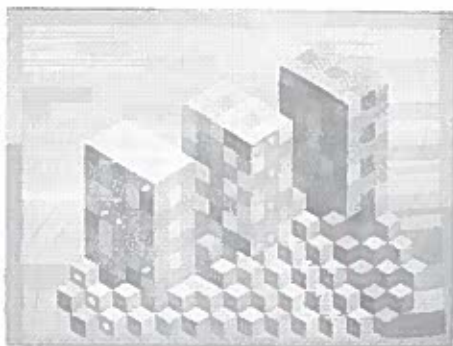


fig. 4

Vlakke vormen

Bij dit onderdeel komen onder meer de volgende activiteiten voor:

- Het in de werkelijkheid kunnen aanwijzen van symmetrieën (spiegelsymmetrie en draaisymmetrie) en herhalingen (periodiciteit).
- Uitspraken doen over verschillende vormen, over eigenschappen, zijden en hoeken.

Hierbij hoort ook het classificeren en benoemen van verschillende vlakke vormen. Daarbij gaat het vaak om op gebruiks niveau te kunnen beschrijven en indelen. In een dergelijke context zijn een vierkant en een rechthoek verschillende vormen.

Bij het werken aan dit onderdeel vinden wij het noodzakelijk dat de leerlingen vanaf de eerste klas de situaties zo aangeboden krijgen dat ze ook beter om zich heen gaan kijken, oog krijgen voor esthetische aspecten bij patronen en ornamenten. Dat ze leren kijken en leren verwoorden wat ze zien: welke vormen, welke regelmatigheden.

Ruimtelijke vormen

Het verkennen van ruimtelijke figuren gebeurt aan de hand van objecten uit het dagelijks leven, bijvoorbeeld verpakkingen, gebruiks-

voorwerpen, objecten in en rond huis en objecten in en buiten de stad. Het is niet de bedoeling dat de voorwerpen alleen getypeerd worden naar vorm; ook aspecten als mooi, stevig en functioneel kunnen er bij betrokken worden.

Hoe kun je van (platte) materialen ruimtelijke voorwerpen of figuren maken? Hoe zitten ruimtelijke voorwerpen of figuren in elkaar? Deze vragen kunnen gesteld worden zowel aan de hand van concreet materiaal als aan de hand van foto's en tekeningen.

Vlakke vormen bij ruimtelijke objecten

Zoals eerder opgemerkt worden het vlak en de ruimte niet apart behandeld. Door afwisselend te werken met plaatjes (tweedimensionaal), ruimtelijke objecten (driedimensionaal) en mogelijke doorsneden (tweedimensionaal) wordt het ruimtelijk voorstellingsvermogen geoefend. Vaak geven ruimtelijke objecten aanleiding tot het bestuderen van vlakke vormen. Eén van de manieren waarop dit gebeurt is door het bekijken van vlakke doorsneden in ruimtelijke vormen. Het werken met doorsneden is een veel toegepaste techniek in andere vakgebieden, zoals biologie, aardrijkskunde, architectuur. Daar worden doorsneden gebruikt om inzicht te krijgen in de structuur van een bepaald object en om te verkennen hoe iets van binnen in elkaar zit. Door te werken met doorsneden komen twee aspecten van de ruimtemeetkunde aan bod:

- Het herkennen van ruimtelijke voorstellingen in platte plaatjes.
- Het zien van (snij)vlakken in ruimtelijke objecten.

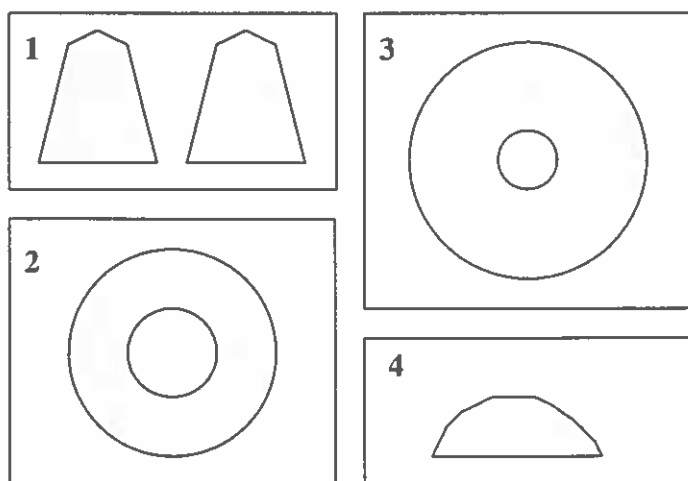


fig. 5

Dit kan aan de hand van twee typen opdrachten:

- Gegeven een voorwerp en een snijrichting, gevraagd de doorsnede op een bepaalde plaats. Hierbij wordt ook aandacht besteed aan loodrecht op elkaar staande doorsneden.

Wat zie je als je een appel door het steeltje doormidden snijdt?

Maak een tekening.

Je kunt een appel ook anders doorsnijden. Bijvoorbeeld loodrecht op de vorige snijrichting. Maak een tekening van zo'n doorsnede door het midden van een appel.

- Gegeven: één of meer doorsneden van een object, bepaal de snijrichting en de plaats waar gesneden is (fig.5).

Hiervoor zie je vier doorsneden van een tulband.

Leg van elke doorsnede uit hoe je die kunt krijgen.

Geef hierbij steeds aan (in woorden of in een plaatje) waar je moet snijden en in welke richting.

In dit verband komen ook parallelle doorsneden voor. Het gaat dan over het al of niet veranderen van de vorm van de doorsneden. Hierop wordt doorgegaan bij het werken met de kubus.

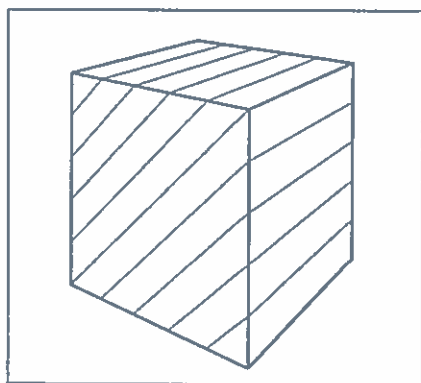


fig. 6

Je ziet hier een kubus (fig.6). De lijnen geven de plaats aan waar de kubus doorgesneden wordt.

Welke vormen krijgen de doorsneden? Teken er een.

Plaatsbepalen

In de dagelijkse praktijk worden plaatsen op allerlei manieren aangeduid. Bijvoorbeeld:

- Neem bus 53 vanaf station Wezerhorst. Stap uit bij halte Oude Aa. Ga de brug over, dan links en de derde straat rechts. Je moet zijn op 312 (derde verdieping).

- Bij de tandarts:
Tweevlaksvulling in 3.6, noodvulling in 2.2. Pas op met kauwen links!
- Adres: van Breestraat 194, 1071 ZZ Amsterdam.
Opzoeken in de zakatlas Amsterdam van Falkplan levert:
Breestraat, Van: 21 A3, d.w.z.: kaartje 21, vak A3.
- Voor wereldreizigers:
Port Louise (Kerguelen, Indische Oceaan) ligt op 49.10° Z, 69.20° O.
- In Nederland staat de zon in juni op zijn hoogst in zuidelijke richting op 61° .

Plaatsbepalen komt veel voor. Er zijn allerlei systemen voor, afhankelijk van de situatie. Soms wordt gebruik gemaakt van tellen (blokken op een kaart), in andere gevallen wordt gewerkt met grootheden zoals afstanden en hoeken. Wij willen ook de praktische kant serieus nemen, omdat het gaat om middelen die iedereen moet kunnen hanteren. De voorbeelden bij het onderdeel plaatsbepalen zijn niet alleen bedoeld als opstapje naar het wiskundige werken met coördinaten, maar zijn ook doel op zich.

Blokken en punten

Plattegronden werken vaak met een alfabetische namenlijst en een blokaanduiding. Er staat bijvoorbeeld C3 achter de straat die je zoekt. De kaart is in blokken verdeeld en langs de rand staan C en 3 tussen lijnen. Het is een voorbeeld van plaatsbepalen met behulp van nummering. Het is een indelingssysteem waar met grove stappen wordt gewerkt, als het blok gevonden is, moet de straat nog gevonden worden. Door met afstanden te werken in plaats van genummerde aanduidingen kan op een kaart precies één punt aangegeven worden. Dan staan de getallen precies op de lijnen.

Het is van belang dat leerlingen beide methoden in geschikte toepassingen tegenkomen en dat ze ze goed van elkaar leren onderscheiden.

Openlijke en verborgen coördinaten

Coördinaten op een kaart zien eruit als een lijnenstelsel. In sommige praktische situaties is zo'n lijnenstelsel er niet en moet er toch een plaats bepaald worden uit twee gegevens. Een voorbeeld daarvan is: Vanaf een schip zie je twee vuurtorens, één in de kompasrichting 90° en de tweede in de richting 200° . Om de plaats van het schip te bepalen moet je zelf op een kaart lijnen trekken vanuit de vuurtorens in de juiste richting. Het snijpunt van die twee lijnen is de positie van het schip.

Globaal en puntsgewijs

Je kunt op twee manieren tegen coördinaten aankijken. Om dat duidelijk

delijk te maken nemen we de aarde als voorbeeld. De eerste manier is dat Noorderbreedte en Oosterlengte opgevat worden als hoeken vanuit het middelpunt van de aarde. De andere, globale manier is kijken naar het netwerk van cirkels op de bol. Bij veel oriëntatieproblemen is juist die globale aanpak nodig. Bij de positiebepaling van het schip hierboven moet je eerst alle punten met kompasrichting 90° tekenen. Op meer elementair niveau: een kaartje voor de plaats in het theater geeft ook eerst 'rij zoveel'. Bij het leren werken met coördinaten moet deze globale benadering niet uit het oog verloren worden. Daarnaast moet er natuurlijk ook aandacht zijn voor het precies bepalen van een punt, zoals dat al gebeurde in het oude leerplan.

Plaatsbepalen vanuit je eigen standpunt

Iemand de weg wijzen is vaak een aaneenschakeling van mededelingen, zoals: loop drie blokken, dan linksaf en weer twee blokken verder. Het gaat hier om relatieve plaatsaanduidingen, steeds afhankelijk van de plaats waar de reiziger zich op een bepaald moment bevindt.

In een klassesituatie zou je een wegwijzer kunnen maken die precies aangeeft waar iedereen woont: in die richting en zó ver. Steeds wordt een positie aangegeven met behulp van afstand en richting. In feite hebben we dan te maken met poolcoördinaten.

Richting en kompas

Aan het begrip richting zitten ook een paar lastige kanten, want wat is eigenlijk 'naar het noorden'? Rondlopen met een kompas in de klas maakt duidelijk dat het niet een plaats vlakbij is. Het is nuttig om apart aandacht te besteden aan de relatie tussen richting en evenwijdigheid. Het volgende experiment kan daarbij helpen.

Als alle leerlingen in de klas naar een plantje in de vensterbank wijzen (fig. 7a), staan de armen zo:

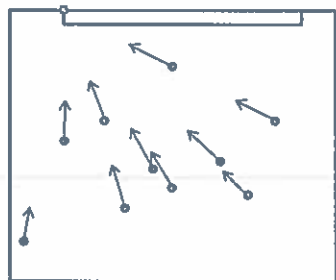


fig. 7a

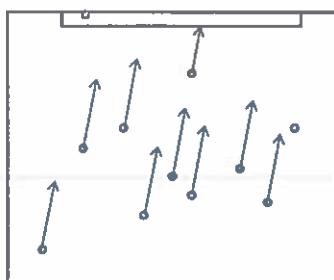


fig. 7b

Als ze allemaal naar een kerktoeren héél ver weg wijzen, zijn de armen bijna evenwijdig (fig.7b).

Richtingen op aarde

Hoe moet je het begrip richting op aarde eigenlijk hanteren? Binnen een klein gebied, zoals een stad, een provincie of Nederland, kun je nog wel spreken van een richting en daarbij aan evenwijdige lijnen denken, maar op de aardbol gaat dat niet meer.

Om dan de richting van plaats A naar plaats B te vinden, moet je te rug naar de vraag: wat is de kortste afstand: van A naar B? Op een globe is die te vinden door een elastiekje van A naar B te spannen. Wiskundig gezien hebben we te maken met het begrip grootcirkel.

In toepassingssituaties speelt de grootcirkel een belangrijke rol bij het uitzetten van koersen voor vliegtuigen en schepen op aarde en voor het vinden van de juiste richting naar Mekka, de richting waarin door Islamieten vijf keer per dag gebeden wordt. Ons wereldbeeld is sterk bepaald door de wereldkaart. Zo zien we makkelijk in dat de kortste weg van Amsterdam naar de Noordpool via de meridiaan loopt. Veel lastiger is het om je voor te stellen dat de kortste vliegroute van Amsterdam naar New York niet via een parallelcirkel loopt en op een wereldkaart dus met een boogje loopt.

Meten en rekenen

Bij dit onderdeel kunnen we twee soorten activiteiten onderscheiden:

- Activiteiten die te maken hebben met het leren kennen en verwerken van maten.
- Activiteiten die te maken hebben met het berekenen van allerlei meetkundige grootheden.

Vanzelfsprekend bestaat een stevig verband tussen beide, denk maar aan het bepalen van de prijs die betaald moet worden om vloerbedekking in een raar gevormde kamer te leggen. Daarbij moeten allerlei verschillende activiteiten worden uitgevoerd: werken met schaal, vormen herkennen, geschikte methode of formule kiezen om oppervlakte te bepalen, omrekenen in andere eenheden, niet alleen metrische (van cm naar vierkante meter), maar ook bijvoorbeeld van oppervlaktematen naar geld.

Meten

Bij maten kunnen we drie soorten activiteiten onderscheiden: het meten zelf, het leren kennen en gebruiken van referentiematen en het leren kennen en gebruiken van standaardmaten. Het gaat niet alleen om het meten met behulp van een centimeter, een litermaat, een gradenboog of welk ander instrument dan ook.

Belangrijk zijn ook het vergelijken van verschillende maten, aflezen van een schaal, interpoleren en het kiezen van de juiste nauwkeurigheid in verband met de context.

Referentiematen zijn nieuw in het leerplan. Ze zijn een logisch gevolg van het zoeken naar praktische en realistische wiskunde. Referentiematen zijn persoonlijke maten. Steeds is er een koppeling van een maat aan een bestaand object of ervaring. Iedereen kent wel een paar van dit soort maten.

Iemand was aan het breien. Op zeker ogenblik vroeg zij zich af hoe ver zij gekomen was. Zij paste een aantal malen haar handpalm langs het breiwerk. Dat ging vier maal en nog een stukje. Zij wist toen dat zij al meer dan 40 cm had gebreid.

'Laten we deze wandeling doen, die is 14 kilometer. Daar doen we dus een uur of drie over.' De persoonlijke maat is hier de ervaring dat je in een uur ongeveer vijf kilometer loopt.

'Je vertelde me hoeveel hectare dat stuk land is. Dat zei me niets, maar toen je erbij vertelde dat dat ongeveer vier voetbalvelden is, kon ik me de grootte goed voorstellen.'

Standaardmaten zijn eenheden, die door mensen onderling afgesproken zijn, zoals meter, kilogram, seconde. Uit de standaardmaten worden andere maten afgeleid en samengesteld.

Bij afgeleide maten denken we aan centimeter, kilometer (afgeleid uit meter), gram, ons, ton (afgeleid uit kilogram), minuut, uur, maand (afgeleid uit seconde). Uit het laatste voorbeeld blijkt al, dat de afleiding in veel gevallen kunstmatig is. Formeel is de seconde de afgesproken standaardmaat. In de praktijk gaan we liever uit van maten zoals een uur of een jaar.

Voorbeelden van samengestelde maten zijn oppervlakte en inhoud. Voor de meetkunde zijn dat de belangrijkste.

Oppervlakte komt in het dagelijks leven veel voor, maar lang niet altijd als 'oppervlakte is lengte keer breedte'. In de praktijk en ook in de wiskunde bestaan er ook andere technieken om de oppervlakte te bepalen, technieken zoals: vervormen van een figuur door samen nemen, verschil nemen, verknippen, verschuiven en combinaties hiervan.

Uit die technieken kunnen oppervlakteformules voor verschillende vormen worden afgeleid. Vaak gaat het niet om een bewijs, maar om het aannemelijk maken van een formule. Soortgelijke opmerkingen gelden voor inhoud.

Door knippen en anders samennemen kan beredeneerd worden, dat de oppervlakte van een driehoek de helft is van de oppervlakte van een rechthoek met dezelfde basis en dezelfde hoogte (fig.8).

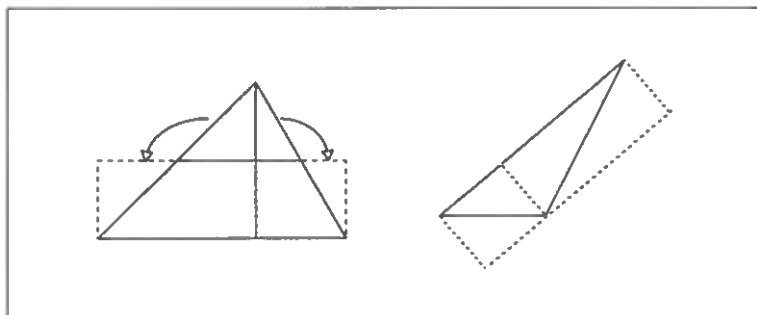


fig. 8

Door een cirkelschijf in een voldoende aantal sectoren te verknippen en die sectoren anders te leggen kan aannemelijk gemaakt worden, dat de oppervlakte van een cirkel even groot is als die van een rechthoek met als zijden: de halve cirkelomtrek en de cirkelstraal (fig.9).

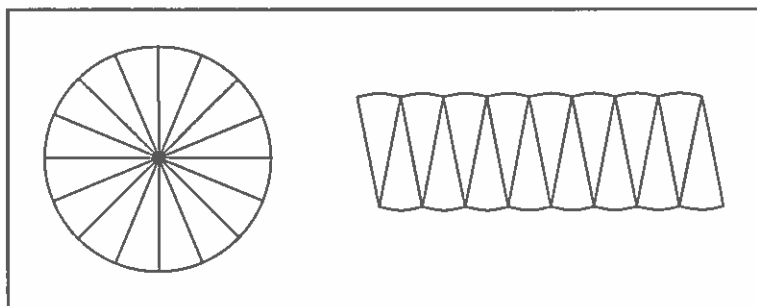


fig. 9

Een cilindervormige doos is volgepakt met lange lucifers om de haarc aan te steken. Als de cilinder vol is, is de inhoud ongeveer even groot als de inhoud van alle lucifers samen.

Elke lucifer is een lang blok, waarvan de inhoudsformule bekend is grondvlak maal hoogte. Het grondvlak van elke lucifer is een klein vierkantje. De cilinder is zowat even hoog als de lucifers en de oppervlakte van het grondvlak is zowat even groot als de totale oppervlakte van

alle grondvlakjes van de lucifers. De inhoudsformule van een cilinder is dus (naar alle waarschijnlijkheid) ook grondvlak maal hoogte (fig. 10).



(Uit: *Exact*, deel 3, Meulenhof Educatief bv, Amsterdam 1989, pag.99.)

fig. 10

Rekenen

In het voorgaande ging het over berekeningen met maten. Berekeningen en redeneringen met behulp van figuren komen ook aan bod. In het bijzonder gaat het om berekeningen met behulp van:

- evenwijdige lijnen om hoeken te berekenen;
- vergroten en verkleinen van figuren om lengten te berekenen;
- stelling van Pythagoras;
- goniometrische verhoudingen;
- andere redeneringen.

We kunnen daar kort over zijn, want de onderwerpen zelf zijn niet nieuw, de aanpak is soms anders.

Bij vergroten en verkleinen spelen verhoudingen een belangrijke rol. Als een figuur door vergroting of verkleining uit een andere figuur is ontstaan, kunnen bij voldoende gegevens andere lengten of hoeken worden berekend. Dat kan met behulp van verhoudingen, maar ook door gebruik te maken van vergrotingsfactor en soms van schaal. Gevorderde leerlingen weten dat het in alle gevallen eigenlijk om hetzelfde gaat. In de leerplannen hebben wij het woord 'gelijkvormig' bewust vermeden. Dat woord kan verwarring wekken, zeker voor de zwakke leerlingen, omdat het zo dicht ligt bij de uitdrukking 'gelijke vorm' uit de dagelijkse taal. Veel leerlingen hebben er moeite mee te begrijpen dat bijvoorbeeld niet alle rechthoeken gelijkvormig zijn. De termen 'vergroten' en 'verkleinen' sluiten veel dichter aan bij het dagelijkse taalgebruik.

Bij berekeningen van hoeken en lengten in rechthoekige driehoeken denken we in de eerste plaats aan de tangens. Voor de D-leerlingen en de leerlingen van havo en vwo denken we ook aan de sinus en de cosinus. In feite gaat het weer om verhoudingen, maar de technieken die erbij worden gebruikt zijn toch anders.

In het leerplan is geen plaats ingeruimd voor de cosinusregel en de sinusregel. Ze komen in de praktijk niet veel voor. Alleen bij bepaalde beroepsvakken kunnen ze handig zijn en in dat geval kunnen studenten van de betrokken beroepsopleidingen ze gemakkelijk erbij leren. Het afleiden van de formules kan een aanleiding zijn tot theoretische verdieping, maar dat hoort meer in de derde of vierde klas vwo thuis. De sinusregel kan dan in verband gebracht worden met de straal van de omgeschreven cirkel van een driehoek en de cosinusregel met de stelling van Pythagoras en de cosinus van stompe hoeken.

Samenhang

Zoals in de Inleiding al opgemerkt, hangen de gebieden kijkmeetkunde, meetkunde van vormen en figuren, plaatsbepalen en meten en rekenen sterk samen en overlappen ze elkaar gedeeltelijk.

In voorgaande beschrijvingen is aan de samenhang geen aandacht besteed. Vaak ligt die zo voor de hand dat de lezer de samenhang gemakkelijk in ziet. Hier willen we toch nog iets van de samenhang illustreren aan de hand van een opgave uit het experimentele examen.

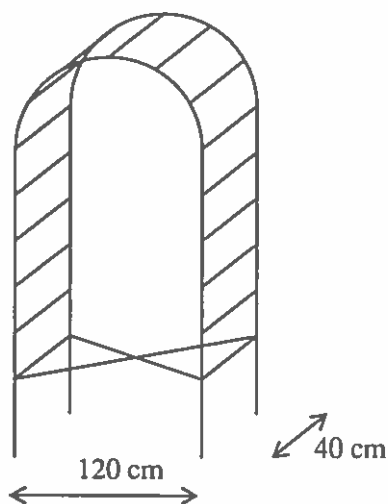


fig. 11



Iemand heeft in een tuin een rozenboog gezien en wil er zelf ook een maken. Zo'n boog wordt gemaakt van staaldraad.

In figuur 11 zie je een schets van zijn boog.

25. Bereken de lengte van de spijlen die gebruikt zijn voor de kruisvormige dwarsverbinding.

In dit voorbeeld komen aspecten van de kijkmeetkunde aan de orde als gevraagd wordt het zijaanzicht te tekenen. Ook gaat het, al is het misschien zijdelings, over vormen en figuren, zeker daar waar de vorm van de rozenboog wordt beschreven. Eigenschappen van de cirkelvorm worden onder meer gebruikt bij het berekenen van de hoogte van spijltje 8. Verder wordt er nog meer gerekend waarbij onder andere ook de stelling van Pythagoras gebruikt wordt (fig. 12).

Op de bijlage is het vooraanzicht van de boog getekend. Het gebogen gedeelte in het vooraanzicht heeft de vorm van een halve cirkel. De spijltjes zijn eerlijk over de boog verdeeld. In het rechte stuk is de afstand tussen de spijltjes steeds 30 cm.

26. Bereken de lengte van de spijlen die gebruikt zijn voor de kruisvormige dwarsverbinding.

27. Op de bijlage zijn de spijltjes genummerd. Bereken hoe hoog spijltje 8 boven de grond is.

28. Hoeveel staaldraad is er voor de hele rozenboog nodig?

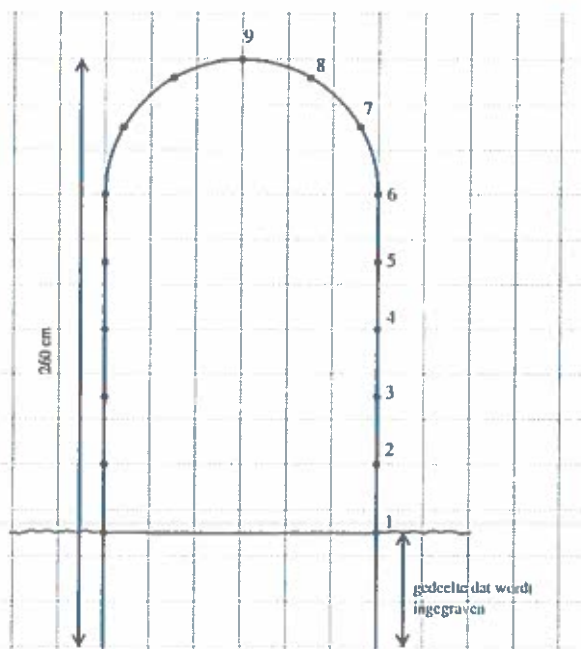


fig. 12

Rekenen

Inleiding

Een van de nieuwe onderdelen van het leerplan wiskunde is het rekenen. We gaan in op de vraag waarom het rekenen weer terug is in het voortgezet onderwijs. Daarna beschouwen we de situatie in het basisonderwijs en de gevolgen die dat heeft voor de inhoud van het rekenen in het nieuwe leerplan. Vervolgens wordt die inhoud kort besproken. Aan de hand van examenopgaven laten we zien op welk manier ze op het eind van mavo/vbo met elkaar samenhangend te rugkeren. Ten slotte beschrijven we verschillen tussen de verschillende niveaus.

Waarom rekenen?

Rekenen is in het nieuwe leerplan voor wiskunde een van de nieuwe leerstofgebieden. Er is een aantal redenen om dit onderdeel op te nemen.

In het dagelijks leven is rekenen een onmisbare vaardigheid. Even nagaan wat een artikel met 25 procent korting kost. Schatten of je genoeg geld bij je hebt om de boodschappen af te rekenen. Uitrekenen hoe lang je reistijd is en plannen hoe laat je dan van huis moet gaan. Iedereen heeft met dergelijke situaties te maken.

Binnen het voortgezet onderwijs zelf zijn ook redenen te vinden om aandacht aan rekenen te besteden. Binnen de wiskunde, maar ook in veel andere schoolvakken is rekenen een veel voorkomende activiteit. Dit geldt ook voor het vervolgonderwijs. In de diverse richtingen van het middelbaar beroepsonderwijs (mbo) komen allerlei rekenactiviteiten voor. Ook in de examenprogramma's van wiskunde A en B van havo en vwo wordt meer dan vroeger een beroep gedaan op de rekenvaardigheid. Dit hangt samen met de veranderingen in de richting van een meer realistische wiskunde.

Situatie in het basisonderwijs

Lang niet alle rekenonderdelen die op de basisschool aan de orde komen, worden aan het eind van groep 8 door alle leerlingen beheerst. Zie onder andere de Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau (PPON) uit 1987. Dat geldt wel voor de basisvaardigheden optellen, aftrekken, delen, vermenigvuldigen en cijferen. Problemen zitten bij het schattingen rekenen en bij de onderwerpen breuken, decimale getallen, verhoudingen en procenten.

De leerlingen die de basisschool verlaten, verschillen niet alleen in niveau, er zijn ook grote verschillen in de manier waarop ze hebben leren rekenen. Sommige leerlingen hebben leren rekenen volgens een mechanistische methode. Meestal betekent dit dat er voor elk typ

probleem een standaardaanpak is geleerd. De opgaven bestaan uit rijtjes 'kale sommen', er komen weinig toepassingen voor.

Er zijn ook leerlingen die met een realistische methode hebben leren rekenen. Daarbij zijn toepassingsproblemen verweven in het onderwijs. Ze vormen zowel het uitgangspunt als het toepassingsgebied ervan. Bij het oplossen van toepassingsproblemen ontwikkelen leerlingen strategieën, deze worden besproken en vergeleken, bijvoorbeeld op efficiëntie. Deze worden vervolgens weer op andere problemen toegepast. Niet elke leerling hanteert dus dezelfde strategie. Bij het realistisch rekenonderwijs op de basisschool is het gebruik van diverse modellen erg belangrijk. Deze modellen helpen het probleem structureren en bieden leerlingen steun bij het rekenen. Belangrijke modellen bij verhoudingsproblemen zijn de verhoudingstabel en de dubbele getallenlijn.

De koers van de Belgische franc (Bf) is 100 Bf voor vijf gulden (fl).

Wat kost een menu van 450 Bf in Nederlands geld?

Met een verhoudingstabel kan dat als volgt (fig. 1).

Bf	100	200	400	50	450
fl	5	10	20	2,50	22,50

fig. 1

Of met een dubbele getallenlijn (fig. 2).



fig. 2

In beide modellen wordt het gezochte bedrag opgebouwd via verdubbelen, halveren en samennemen. Uiteraard is het 10x nemen ook heel belangrijk.

De realistische methoden zijn in het basisonderwijs sterk in opkomst. Voorlopig blijft het belangrijk er rekening mee te houden dat leerlingen sterk verschillen in de methode waarmee ze hebben leren rekenen.

Inhoud

De inhoud van het onderdeel rekenen in het nieuwe leerplan wordt sterk bepaald door de keuze voor realistisch wiskundeonderwijs. In allerlei toepassingssituaties gaat het vaak om verhoudingsproble-

men. Deze vormen, samen met procenten, de rode draad door het programma. De volgende onderdelen komen in het leerplan voor: schattend rekenen, verhoudingen en procenten, breuken, kommagetallen, metrieke eenheden en de zakrekenmachine.

Schattend rekenen

In de praktijk is schattend rekenen veel belangrijker dan cijferen. Soms zijn exacte berekeningen niet te maken omdat exacte gegevens ontbreken. Een voorbeeld:

Een verslaggever geeft een radioverslag van de Tour de France. In de buurt van de finish ziet hij langs de weg de mensen drie rijen dicht staan. Tot de finish is het nog ongeveer 1 km. Hij zegt: 'Er staan hier zeker 50 000 mensen te wachten op de aankomst van de wielrenners. Laat met een berekening zien of dat een redelijke schatting is.'

Hierbij moet een leerling zelf een aanname doen over het aantal mensen dat bijvoorbeeld op een meter kan staan. Het gaat dan om de orde van grootte, niet om het exacte aantal mensen.

Soms hebben exacte berekeningen niet veel zin (fig. 3).

Marianne Muis vestigt twee zwemrecords

BONN (SID) – Marianne Muis deed het goed bij de wereldbekerwedstrijden zwemmen in Bonn, maar zaterdag bleek op de 200 meter vrije slag, waarop zij juist haar zinnen had gezet, de 16-jarige Deense Jacobsen een frac-tie van een seconde sneller.

Het gaf dat Marianne op de eerste honderd meter liet vallen, was niet te groot om overbrugd te worden, al kostte zij met een tijd van 1.57,14 (tegenover de 1.57,08 van Jacobsen) wel illustere voorgangers als wereldkampioene Annemarie Versappien, Conny van Bentum en Enith Brigitha af als nationaal recordhoudster.

tijd 1.57,14 betekent 1 minuut en $57\frac{14}{100}$ seconden.

1. Bereken de gemiddelde snelheid in km/uur van Marianne Muis tijdens de 200 m vrije slag.
- ② Hoeveel honderdsten van een seconde was de Deense Jacobsen sneller?

fig. 3

Hele kilometers per uur is in dit voorbeeld precies genoeg. Schattend rekenen maakt de structuur van het probleem helder. Iemand die rekent met '200 meter in ongeveer 2 minuten' wordt niet gestoord door het ingewikkelde 1.57,14 en zal eerder de verhoudingsstructuur herkennen.

In alle leerjaren zal aandacht aan schattend rekenen moeten worden besteed; niet geïsoleerd, maar geïntegreerd met de overige onderwerpen. Bijvoorbeeld schattend rekenen met procenten, met breuken, maar ook bij informatieverwerking en statistiek. Bij leerlingen bestaat veelal een sterk algoritmische instelling, die doorbroken moet worden. Daarvoor is het nodig dat schattend rekenen af en toe de enige mogelijkheid is. Het helpt daarbij als situaties gekozen worden waarmee de leerlingen vertrouwd zijn en waarin ze als vanzelf met mooie getallen werken. Boodschappen doen, een lijst opstellen van benodigdheden voor een klasseavond, de kosten per persoon tevoren inschatten zijn voorbeelden van dergelijke situaties.

Naast het schattend rekenen zelf kan het nodig zijn aandacht te besteden aan voorkennis en vaardigheden die de leerlingen bij het schatten gebruiken zoals: beheersen van de tafels, rekenen met machten van 10, ontwikkelen van maatkennis.

Verhoudingen en procenten

Veel rekenproblemen uit het dagelijks leven hebben te maken met verhoudingen. Het gaat dan om 'zoveel-per-zoveel': kilometers per uur, mensen per meter, prijs per stuk.

Er zijn vier hoofdtypen te onderscheiden. We noteren ze hier formeel, maar zo komen ze niet in het leerplan aan bod.

- Het vaststellen van een verhoudingsrelatie $?:?$
- Het vergelijken van verhoudingen $a:b \text{ ? } c:d$
- Het maken van gelijkwaardige verhoudingen $a:b = ? : ?$
- Het vinden van de vierde evenredige $a:b = c: \text{? of } a:b = ? : d$

De nadruk heeft vaak gelegen op het laatste type. De overige typen zijn echter net zo belangrijk. Het is niet de bedoeling bij elk type een standaardoplossingsmethode te leren. Het gaat er om de structuur te herkennen en met inzetten van hulpmiddelen als verhoudingstabel of dubbele getallenlijn het vraagstuk op te lossen. Daarbij kan eenvoudig begonnen worden, door bijvoorbeeld in de lagere leerjaren vooral met gehele getallen te werken in een doorzichtige context waarin de verhoudingsstructuur niet teveel verborgen is. Later kan de moeilijkheidsgraad worden opgevoerd.

In figuur 3 herkennen we verhoudingsvragen van type 4. De moeilijkheidsgraad wordt wat verhoogd doordat er ook nog overgegaan moet worden op andere eenheden. Van minuten naar uren, van meters naar kilometers.

In het volgende vraagstuk gaat het om het vergelijken van verhoudingen. Ook hierbij speelt de eenhedenkwestie een rol.

Leg uit welke aardbeienjam zoeter is:

- Jam gemaakt van 400 gram aardbeien en 300 gram suiker of
- Jam gemaakt van 1 kilogram aardbeien en 700 gram suiker.

In onderstaand voorbeeld (fig.4) is de probleemstelling gecompliceerd, waardoor de verhoudingsstructuur niet onmiddellijk duidelijk is.

Opgave 2 Regenwormen



Uit de krant:

„De aarde zou onvruchtbaar zijn als er geen regenwormen waren. Wormen in een halve hectare grond verwerken jaarlijks zo'n duizend ton aarde. Ze doen dit door zich er letterlijk doorheen te vreten, de aarde die er van voren in gaat, komt er aan de andere kant weer uit. Berekend is dat er onder de zoden van één hectare goed grasland wel zo'n 5 miljoen wormen voorkomen.“

1 ha = 10 000 m²

1 ton = 1000 kg

- 4 ☐ Bereken hoeveel aarde één regenworm in één jaar kan verwerken.
- 5 ☐ Bereken hoeveel wormen er gemiddeld onder één vierkante meter grasland zitten.

fig. 4

Procenten worden ingevoerd als bijzondere verhoudingen, die gestandaardiseerd zijn op 100. Uiteindelijk moeten de leerlingen de diverse typen procentenvraagstukken kunnen oplossen. Daarbij worden ook weer middelen als verhoudingstabel en dubbele getallenlijn gebruikt. De samenhang tussen procenten, decimale getallen, breuken en verhoudingen kun je gebruiken om problemen mee op te lossen.

Ten slotte komt voor mavo-D en hoger het verband tussen bijvoorbeeld 15 procent erbij en $\times 1,15$ expliciet aan de orde in verband met exponentiële groei. Deze leerlingen moeten procentuele toe- of afname kunnen zien als voorbeeld van exponentiële groei en ook de groeifactor kunnen vaststellen. In het examen komen procenten vaak voor in vraagstukken over statistiek.

Breuken

In het dagelijks leven en toepassingen komen breuken maar in beperkte mate voor. In het leerplan is er wel tijd voor breuken ingeruimd, maar niet met de bedoeling de hele basisschoolstof nog eens over te doen. We richten ons op de praktijk. Daarbij is de relatie tussen breuken enerzijds en verhoudingen, delingen, 'deel van' en kommagetallen anderzijds van belang, mede met het oog op het gebruik van de zakrekenmachine. Men kan er aan het begin van het voortgezet onderwijs niet van uitgaan dat de breuken volledig beheerst worden. Met name de lbo/mavo-leerlingen scoren zwak zowel op begrip als wat de rekenregels betreft. Af te raden is om opnieuw te starten met blinde algoritmen via kale getallen. De nadruk zou moeten komen te liggen op begrip en vaardigheid naar niveau. Zo zou voor het laagste niveau vooral het toepassingskarakter met eenvoudige breuken benadrukt moeten worden. Terwijl de havo/vwo-leerlingen ook de formele regels onder de knie moeten hebben.

We stellen als doel dat alle leerlingen in contextproblemen met eenvoudige breuken kunnen werken. Daarvoor is het nodig dat ze een goed breukbegrip hebben. Niet zo zeer 'figuraal' ($\frac{1}{4}$ pannekoek), maar getalsmatig: $\frac{1}{4}$ is een deel van de eenheid. De volgende activiteiten komen voor bij het werken aan contextproblemen. Deze krijgen aandacht in het leerplan.

- Een 'deel van' een getal bepalen; zowel schattend als exact.
- Een breuk zien als verhouding en omgekeerd.
- Het omzetten van breuken naar kommagetallen.

Met elementaire breuken ook uit het hoofd (bijvoorbeeld $\frac{1}{4} = 0,25$; $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{3}{4} = 0,75$). Verder met behulp van de zakrekenmachine.

- Gebruik maken van relaties als: $\frac{3}{5} = 3 \times \frac{1}{5}$ en $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$.
- Helen uithalen, vereenvoudigen en compliceren.

Door breuken te binden aan grootheden wordt het meetaspect benadrukt, op deze wijze krijgt onder andere het ordenen een veel zinvollere betekenis. Bijvoorbeeld: 'wat is groter $\frac{3}{4}$ of $\frac{3}{5}$ ', kan opgevat worden als: 'wat is meer $\frac{3}{4}$ van een grootheid of $\frac{3}{5}$ ervan'. Ook optellen en aftrekken kan goed via bemiddelende grootheden verhelderd worden.

$\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$ kan worden vertaald naar:

$\frac{2}{3}$ (van een jaar van 12 maanden) + $\frac{3}{5}$ (jaar van 12 maanden).

Wat het rekenen met formele breuken betreft, dit zal vooral voor de doorstromers naar het havo/vwo-niveau onderhouden moeten worden. We stellen echter voor dit beperkt te houden tot eenvoudige breuken en vooral de nadruk te leggen op het inzicht en de binding met de realiteit (zie het voorgaande) niet uit het oog te verliezen. Ook voor dit onderdeel van het reken-wiskundeonderwijs hoeven we niet meer eindeloos te oefenen omdat ook voor het werken met gewone

breuken thans eenvoudige rekenmachines ter beschikking staan.

Decimale getallen

Decimale getallen komen vooral voor bij het alledaagse meten. Inzicht in en het opereren met decimale getallen kunnen worden bevorderd door grootheden te gebruiken.

Bijvoorbeeld:

Niet $4 : 0,25$ maar $4 \cdot 4 = 16$ (hoeveel kwartjes gaan er in vier gulden).

Daarnaast besteden we aandacht aan het schattend rekenen met decimale getallen. Door een schatting te maken van de uitkomst, kan de orde van grootte en daarmee de plaats van de komma worden bepaald.

Bijvoorbeeld:

$$712,347 + 589,2 + 4,553 = 13091$$

De komma is vergeten, waar moet die komen?

Ruim 700 plus bijna 600 plus 4 zit in de buurt van 1300. Dus het antwoord is 1309,1. Deze aanpak werkt ook bij vermenigvuldigen en delen. Het exacte antwoord kan zo nodig met behulp van een zakrekenmachine bepaald worden. Regels of ezelsbruggetjes over de plaats van de komma in een antwoord zijn zo niet per se nodig.

Ook wat afronden betreft komen de formele regels niet uit de lucht vallen, doordat we vooral met grootheden werken.

3,67 meter is meer dan 3,5 meter, dus afgerond op meters: 4 meter.

Het is van belang dat leerlingen ook kunnen afronden in overeenstemming met de context. Dus bij het bepalen van een benodigde hoeveelheid staaldraad mag het antwoord geen vijf cijfers achter de komma hebben. Hieraan zal in alle leerjaren steeds aandacht moeten worden besteed.

Metriek en meten

In de voorgaande voorbeelden hebben we diverse malen gezien dat de contexten waarin gerekend wordt, maten bevatten. Hieraan wordt in het leerplan veel aandacht besteed. Rekenen in het metriek stelsel komt vooral gebonden aan situaties aan de orde. Het is van belang dat leerlingen zich bij verschillende maten iets kunnen voorstellen. Dit maakt ook het omrekenen gemakkelijker. Als je weet dat 1 liter de inhoud van een melkpak is, zul je niet veel moeite hebben met het kiezen uit 1 cm^3 , 1 dm^3 of 1 m^3 voor 1 liter. Deze koppeling van metrieke maten aan concrete zaken is een onderdeel van het ontwikkelen van maatkennis. Ook in omgekeerde richting komt het voor: van concrete zaken weten welke afmeting ze hebben. Bekende voorbeelden zijn: een deur is 2 meter hoog, de oppervlakte van een hand is ongeveer 1 dm^2 . Ten slotte is maatkennis nog op te vatten als kennis van de wereld: bijvoorbeeld weten dat Nederland ongeveer 15 miljoen

inwoners heeft.

In het volgende voorbeeld (fig.5) moeten leerlingen tweemaal hun maatkennis inzetten.

De eerste keer om te beredeneren dat 974 kubieke meter niet kan kloppen. De tweede keer om te berekenen wat het dan wel moet zijn.

Meer watergebruik

RIJSWIJK, 19 febr.

De waterleidingbedrijven in Nederland hebben vorig jaar in totaal 974 kubieke meter leidingwater geleverd. Dat is meer dan in 1988. De Nederlanders gebruiken steeds meer leidingwater door de toeneming van het aantal kleine huishoudens. Ook neemt het gebruik toe doordat meer mensen vaker douchen en in bad gaan.

In het krantebericht wordt gesproken over 974 kubieke meter leidingwater per jaar. Dat getal is vermoedelijk fout.

1. Stel je eens een betonnen bak voor waarin 974 kubieke meter leidingwater kan worden opgeslagen. De bak is ongeveer drie meter diep. Geef een mogelijkheid voor de lengte en voor de breedte van zo'n bak.
2. Beredeneer dat de hoeveelheid van 974 kubieke meter in het krantebericht fout is.
3. Bij het getal 974 in het krantebericht ontbreekt iets. Kies uit de volgende twee mogelijkheden en verklaar je keuze:
 - er ontbreken drie nullen; in het artikel moet staan: 974 000 kubieke meter
 - het woord miljoen ontbreekt; in het artikel moet staan: 974 miljoen kubieke meter.

fig. 5

Maatkennis die je daarbij gebruikt is het aantal inwoners van Nederland en een concrete voorstelling bij een van de inhoudsmaten.

Verder moet je binnen het metrick stelsel van kubieke maten op vloetbare maten kunnen overgaan.

Maatkennis wordt in de loop van de vier jaar ontwikkeld.

Zakrekenmachine

Uit het voorgaande zal duidelijk zijn dat de zakrekenmachine een plaats in het wiskunde onderwijs heeft.

Leerlingen moeten deze in de eerste plaats leren gebruiken als een hulpmiddel waarmee lastige berekeningen kunnen worden uitgevoerd. Daarvoor is het nodig aandacht te besteden aan de mogelijkheden van de rekenmachine en aan het handig leren gebruik maken hiervan.

Verschillen tussen niveaus

Aangezien het niveau van de leerlingen bij het verlaten van de basisschool erg verschilt, zal niet voor elke leerling dezelfde leerstof in dezelfde tijd aan bod hoeven komen.

Het programma voor het C- en D-niveau bevat in de eerste drie leerjaren aparte rekenonderwerpen. Deze beslaan ongeveer 15 procent van de tijd. In klas 4 komt rekenen alleen nog geïntegreerd binnen de andere leerstofonderdelen voor en als onderdeel van de voorbereiding op het examen. Op het examen zelf komen ook rekenopgaven voor. Voorbeelden hiervan zijn te vinden in de examenbundels.

Voor het B-niveau is in elk van de vier leerjaren tijd voor rekenen gereserveerd. Dit komt neer op ongeveer 20 procent van de lestijd. Doordat het B-niveau uitsluitend op het lbo voorkomt, kan er speciaal aandacht besteed worden aan rekenen in beroepsgerichte toepassingen. Voor de B-leerlingen zijn daartoe apart de onderdelen metrick stelsel en schaal opgenomen. Wat betreft het rekenen met breuken is het belangrijk dat de leerlingen de zakrekenmachine goed weten te gebruiken.

Voor havo- en vwo-leerlingen zal minder tijd nodig zijn om de basisvaardigheden te onderhouden. Dat neemt niet weg dat ook voor deze leerlingen aandacht besteed moet worden aan rekenen. Rekenen wordt uitgebreid naar de meer formele kant. Zo krijgt formeel breukrekenen een plaats in het programma en kan de relatie met algebra nadrukkelijk gelegd worden. Als expliciete voorbereiding op wiskunde A, is een onderdeel rekenen in contexten opgenomen. Vanzelfsprekend zullen de rekenvraagstukken gecompliceerder kunnen zijn dan die op mavo en lbo.

Informatieverwerking en statistiek

Inleiding

In de wereld om ons heen speelt statistiek en informatieverwerking een belangrijke rol. Elke burger krijgt ermee te maken. Daarom is in het nieuwe leerplan voor twaalf- tot zestienjarigen plaats ingeruimd voor het leerstofgebied Informatieverwerking en Statistiek (I&S). Het draagt bij aan een breed en evenwichtig programma voor iedereen. De onderwerpen van I&S zijn afkomstig uit de statistiek, kansrekening, grafentheorie en combinatoriek.

Een aantal overwegingen heeft ertoe geleid I&S in het programma voor twaalf- tot zestienjarigen op te nemen. Elke burger krijgt te maken met informatie. Allerlei beslissingen worden verdedigd met argumenten, ontleend aan statistieken of op basis van cijfers die uit een bepaald model volgen.

Door de opkomst van de computer wordt bepaalde wiskunde veel gebruikt. In de informatica is vooral discrete wiskunde van belang, zoals bijvoorbeeld grafentheorie. Om die reden is er ook iets van die wiskundevakken terug te vinden in de schoolwiskunde.

De eerste algemene doelstelling van het wiskundeonderwijs zoals geformuleerd voor de basismvorming, luidt:

'Een wiskundige werkhouding ontwikkelen, waarbij systematisch werken, generaliseren, kritisch beoordelen van gegevens en uitkomsten en het creatief bedenken van oplossingen aan de orde komen.' Het leerstofgebied I&S is uitstekend geschikt om bij te dragen aan deze algemene doelstellingen van het wiskundeonderwijs. Bij I&S zijn de algemene doelen misschien wel belangrijker dan de specifieke kennisdoelen.

Met betrekking tot de doorstroming naar de bovenbouw van havo en vwo is er het voordeel dat de nogal onnatuurlijke situatie van dit moment, de late start in de bovenbouw van sommige onderwerpen uit wiskunde A, zal verdwijnen. Bovendien krijgen leerlingen die later alleen wiskunde B gaan doen, in het nieuwe programma ook een bredere wiskundige basis.

Wiskundige activiteiten

De activiteiten bij I&S kunnen getypeerd worden als:

- informatie halen uit grafische voorstellingen en tabellen
- modelvorming
- redeneren.

Informatie halen uit grafische voorstellingen en tabellen

Een belangrijke activiteit in I&S is het interpreteren van verschillende grafische voorstellingen. Leerlingen moeten leren om de relevante in-

formatie te halen uit op het eerste gezicht wellicht ingewikkelde of onoverzichtelijke voorstellingsvormen. Dat kunnen kaarten zijn of grafieken, diagrammen of schema's. Om de relevante informatie uit een voorstelling te halen, is het nodig te durven vaststellen wat de hoofdzaken zijn.

Een verwante activiteit is het omvormen van een voorstellingswijze in een andere. Tussen de verschillende representaties kan heen en weer gesprongen worden.

Modelvorming

Een tweede activiteit is het zoeken naar structuur of wiskundig model. Een model is een bepaalde weergave van de werkelijkheid, die gemaakt is met het oog op het vergroten van het inzicht in die werkelijkheid: hoofdzaken worden benadrukt, details weggelaten. Bij modelvorming gaat het vooral om de reductie van werkelijkheid tot schematisch model, het weglaten van niet relevante aspecten van de context. Wat belangrijk genoeg is om in het model op te nemen en wat weggelaten kan worden, zal niet voor iedereen hetzelfde zijn. De conclusies die uit een bepaald model volgen, zullen dan ook niet iedereen overtuigen. Je kunt van mening zijn dat het essentiële factoren waren, die verwaarloosd zijn. In de discussie over de grenzen aan de groei, die de Club van Rome op gang bracht, speelde ook mee of hun model van de wereld wel klopte.

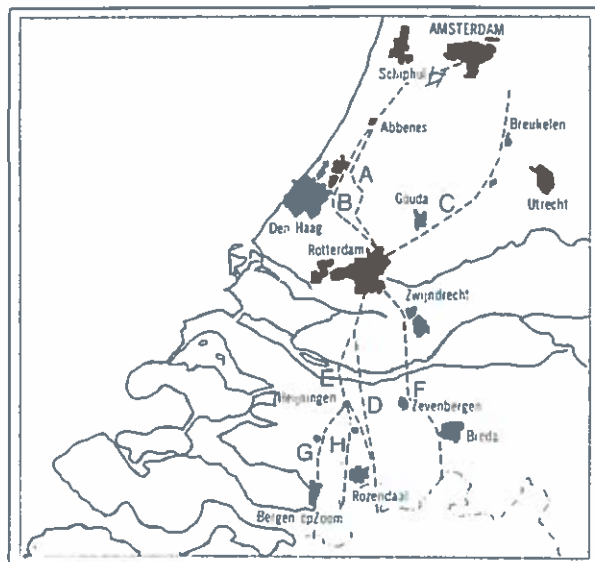
Redeneren

Wanneer de complexe werkelijkheid in kaart is gebracht en gereduceerd tot een bepaald model of een zekere structuur, komt redeneren over die werkelijkheid binnen handbereik. Het redeneren kan plaats vinden binnen het model ('volgens het model groeit de bevolking steeds harder') of over het model ('de beschikbaarheid van voedsel is vergeten, het model kan niet kloppen').

Een aantal onderwerpen binnen I&S leent zich uitstekend voor redeneractiviteiten, bijvoorbeeld systematisch tellen. Daar zit de mogelijkheid niet zozeer in de modelvorming uit de context, maar meer in het vertalen van het probleem naar een geschikte telstructuur en het redeneren daarover. Boomdiagrammen kunnen daarbij een geschikt hulpmiddel zijn.

Een voorbeeld waarin we de drie aspecten van I&S terugvinden is het volgende stukje uit de krant. Het stukje gaat over mogelijke tracés voor de hogesnelheidstrein, waar de Nederlandse overheid een beslissing over moet nemen (fig. 1). Wat betekenen de letters? Volgt uit het feit dat er acht letters nodig waren om tracés aan te duiden ook dat de regering kan kiezen uit acht verschillende mogelijkheden? De praktijk wijst uit dat het geen vanzelfsprekende zaak is dat leerlingen

dit soort kaarten kritisch kunnen lezen. Tegelijk kunnen we vaststellen dat je deze vaardigheid moet bezitten, wil je bijvoorbeeld kunnen meepraten over deze voorstellen.



Traces noordelijk deel
Trace A: Amsterdam, Schiphol, Hoofddorp, Abbenes, richting Leidschendam, Leiden, Hazerswoude, Benthuisen, boven Hillegersberg naar Rotterdam.

Trace B: volgt trace A tot Abbenes, daarna richting Voorschoten, Leidschendam, rechts van Voorburg naar Hillegersberg en Rotterdam.

Trace C: is eigenlijk niet interessant omdat het Schiphol links laat liggen. Zal niet serieus meetellen. Loopt van Rotterdam, onder Gouda, naar Woerden, Harmelen, Breukelen.

Traces zuidelijk deel

Trace D: Rotterdam, Willemsspoortunnel, Hemenoord, Hollands Diep, richting Stampersgat, Roosendaal.

Trace E: Rotterdam, Hemenoord, Hellegat, Heijningen, dan naar rechts bij Oud-Gastel, zie aansluiting D.

Trace F: Rotterdam, Barendrecht, Zwijndrecht, Hollands Diep, Zevenbergen, Breda.

Trace G: volgt trace E tot Heijningen, links naar Steenbergen, Bergen op Zoom.

Trace H: volgt trace F tot Heijningen, links van Stampersgat naar Roosendaal.

fig. 1

De vraag naar het aantal mogelijke spoorlijnen kan beantwoord worden door alle mogelijke routes netjes en systematisch op te schrijven. Een mogelijke route is dan langs AF, de route dus van Amsterdam, via Breukelen naar Rotterdam en dan verder via Breda naar België. Deze vraag kan beter beantwoord worden als de kaart wat verder verschaald wordt. Onderstaand boomdiagram, een speciaal soort graaf, laat dat zien (fig. 2).

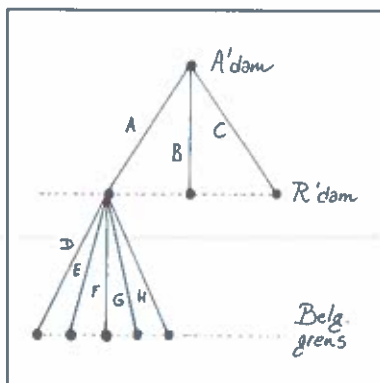


fig. 2

Uit het plaatje is snel af te lezen dat er 15 verschillende routes zijn. Het redeneeraspect komt nog duidelijker naar voren als de situatie wordt weergegeven zoals in onderstaand wegendiagram (fig.3).

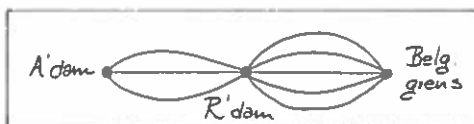


fig. 3

De inhoud

Bij I&S kunnen verschillende deelgebieden onderscheiden worden. We hanteren de volgende indeling:

- kaarten, grafen en tabellen
- systematisch tellen
- beschrijvende statistiek.

Deze driedeling wil niet zeggen dat de gebieden strikt gescheiden zijn. Boomdiagrammen bijvoorbeeld horen zowel bij het eerste als bij het tweede deelgebied. Een kaart met migratiestromen hoort zowel bij het eerste als het derde deelgebied.

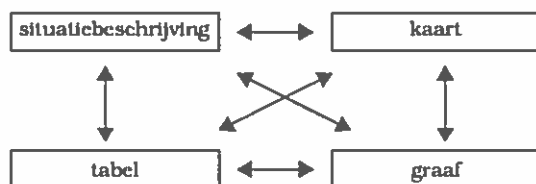
Werken met kaarten, grafen en tabellen

Een eerste doel is het leren lezen van informatie die op bijzondere wijze wordt gepresenteerd. Mogelijke startpunten zijn: een situatiebeschrijving, een kaart, een of ander diagram of schema.

Ook het combineren van informatie uit verschillende bronnen is belangrijk.

De graaf is een speciale manier om informatie weer te geven. Het is een krachtig hulpmiddel om structuur in informatie aan te brengen en relaties tussen objecten zichtbaar te maken. Vandaar de aandacht voor het interpreteren en het tekenen van grafen.

Een ander beschrijvingsmiddel is de tabel. Bij een graaf hoort vaak een tabel en omgekeerd. Zodoende ontstaan er allerlei vertaalactiviteiten:



De leerlingen krijgen geen abstract-theoretische beschouwingen over de graaf aangeboden. Dat neemt niet weg dat er wel enkele eigenschappen van grafen aan bod komen.

Bijvoorbeeld:

Onderzoek of twee grafen aan elkaar gelijk zijn.

Of onder welke voorwaarde is in een graaf een rondwandeling (d.w.z. begin- en eindpunt hetzelfde punt) mogelijk waarbij je alle verbindingen precies één keer gebruikt?

Het verband tussen grafen en tabellen kan afhankelijk van de situatie op veel manieren gelegd worden. Als er getallen bij de verbindingen staan die afstanden voorstellen, is er bij de graaf een afstandstabel te maken.

Voorbeeld - Griekse eilanden

In sommige gevallen is de lengte van de verbinding of het aantal verbindingen tussen twee plaatsen niet van belang. Bij de rondreis langs de Griekse eilanden is het alleen belangrijk te weten of er wel of geen bootverbinding tussen twee eilanden is.

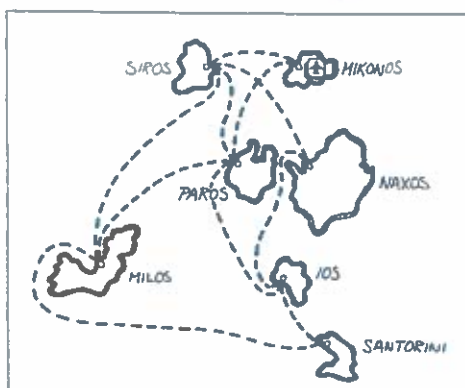


fig. 4

In dit soort gevallen kun je een zogenaamde verbindingstabel maken (fig.4). In zo'n verbindingstabel geef je met een '1' aan dat er wel een verbinding is en met een '0' dat er geen verbinding is tussen twee eilanden.

Door het werken met tabellen, wordt het arsenaal aan vertaalactiviteiten uitgebreid. Leerlingen die naar de bovenbouw havo/vwo met wiskunde A gaan, zijn door het werken met dit soort tabellen goed voorbereid op het werken met matrices.

Toepassingsgebieden

'Kaarten, grafen en tabellen' heeft een flink aantal toepassingsgebieden. We bespreken er twee: verkeer en vervoer, grafen en mensen.

Waarschijnlijk het meest voor de hand liggen contexten op het gebied van verkeer en vervoer. Daar wordt vaak gewerkt met min of

meer geschematiseerde kaartjes. Denk bijvoorbeeld aan de kaart van Nederland met het spoorweginet die op elk station hangt. De ligging van punten en verbindingen is niet meer geheel overeenkomstig de werkelijkheid, maar geeft toch nog een redelijk beeld van de echte situatie. Kaart en graaf liggen dicht bij elkaar en het maken van een graaf bij een kaart is slechts een kleine stap.

Vanwege de makkelijke voorstelbaarheid en hun maatschappelijke relevantie voor iedereen, nemen de toepassingen over verkeer en vervoer een belangrijke plaats in. Het werken met tabellen (bijvoorbeeld voor afstand en/of prijs) is vanzelfsprekend en via eenrichtingsverkeer is het eenvoudig om het begrip gerichte grafen te introduceren.

Een volgend toepassingsgebied van grafen is het onderzoeken van relaties tussen mensen. Dicht bij de klas ligt het maken van een 'belboom', een schema om snel een bericht aan alle leerlingen van een klas door te geven.

Voorbeeld - De belboom

Aan alle leerlingen van de klas moet snel een bericht doorgegeven worden. Het proefwerk wiskunde gaat niet door (fig.5).

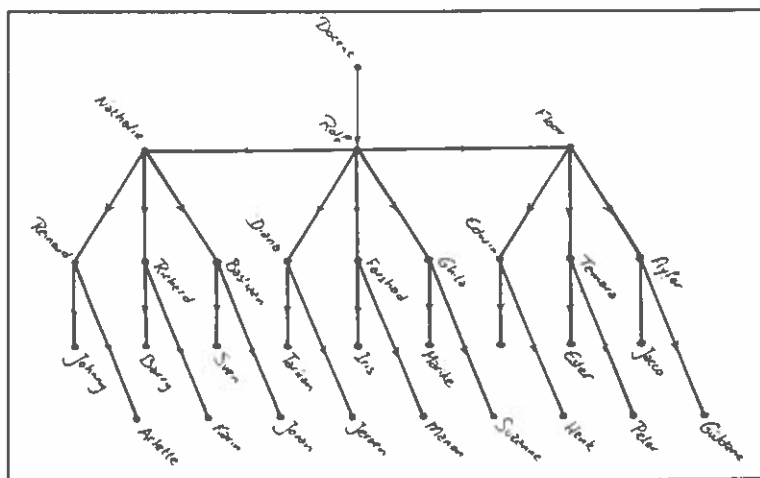


fig. 5

- Hoeveel leerlingen heeft de klas?
- Zoek uit hoeveel telefoontjes er nodig zijn om iedere leerling te waarschuwen.
- Een docent belt om 7 uur 15 naar Rolf met de mededeling dat het eerste lesuur komt te vervallen. Neem aan dat elk telefoongesprek één minuut duurt. Hoe laat krijgt Tamara het bericht uiterlijk door?

Systematisch tellen

Bij sommige toepassingen van grafen komen telproblemen om de hoek kijken. Omgekeerd kunnen bepaalde telproblemen aanschouwelijk gemaakt worden met grafen. Het boomdiagram en het wegendiaqram zijn de grafen waar we dan aan denken.

Een wedstrijdschema voor een sporttoernooi is een mogelijke context voor een eerste kennismaking met systematisch tellen. Dergelijke schema's staan geregeld in de krant. Het volgende schema (fig.6) gaat over het Roland-Garros tennistoernooi van zomer 1991.

Er wordt gespeeld volgens het afvalsysteem. Hoeveel wedstrijden zijn er nodig bij 16 spelers?

- *Probeer een wedstrijdschema te ontwerpen voor 20 spelers.*
- *Hoeveel wedstrijden zijn daarvoor nodig? En hoeveel rondes?*

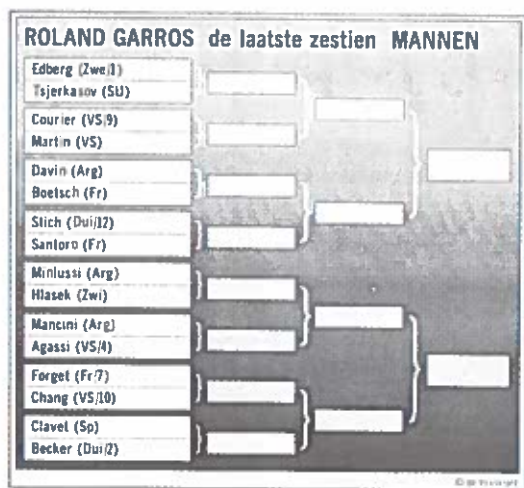


fig. 6

Bij de vraag naar het aantal wedstrijden bij 20 spelers is het een mooie redenering om te zeggen: er zijn 20 spelers, bij elke gespeelde wedstrijd valt er één af, dus zijn er 19 wedstrijden nodig om één winnaar over te houden.

Bij telproblemen is de context vaak niet al te complex. De complexiteit zit veel meer in het vinden van de juiste telstructuur. Maar daar gaat het in de onderbouw niet om. Het is belangrijk dat de opgaven heel concreet en voorstelbaar blijven. Eenvoudige telproblemen vragen geen specifieke voorkennis, en het redeneren krijgt er alle kans. Systematisch tellen kan zeker bijdragen aan het algemene leerdoel 'systematisch en methodisch werken'.

Bij telproblemen zijn vaak heel wat manieren van aanpak mogelijk:

- alle mogelijkheden uitschrijven en tellen,
- een tabel maken en mogelijkheden tellen,
- een graaf tekenen en verbindingen tellen.

Het sluitstuk is het opzetten van een redenering, waar het juiste aantal mogelijkheden rechtstreeks uit volgt. Een redenering kan tot stand komen nadat een van de voorgaande activiteiten is verricht, of als directe vertaling van de probleemstelling.

Bij het oplossen van telproblemen zullen zich zeker niveauverschillen voordoen. Het is verstandig hierop te anticiperen door de opgaven zo te kiezen dat ze op verschillend niveau opgelost kunnen worden.

Voorbeeld - Schaaktoernooi

Zes spelers, spelen een halve competitie. Alle deelnemers spelen dus één keer tegen elkaar. Hoeveel partijen worden er gespeeld? Noem de spelers voor het gemak A, B, C, D, E en F.

Alle hiervoor genoemde aanpakken zijn bij deze opgave mogelijk:

- Alle mogelijkheden uitschrijven en tellen:

AB AC AD AE AF

BC BD BE BF

... enzovoort.

Het antwoord is $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ wedstrijden.

- Een tabel maken en mogelijkheden tellen (fig.7).

	A	B	C	D	E	F
A		X	X	X	X	X
B						
C						
D						
E						
F						

fig. 7

De tabel heeft $6 \times 6 = 36$ hokjes. De hokjes op de diagonaal doen niet mee en verder staat elke wedstrijd er twee keer in. Dus $(36-6)/2 = 15$ wedstrijden.

- Een graaf tekenen en verbindingen tellen (fig.8).

De punten van de graaf stellen de spelers voor, de verbindingen zijn de partijen.

Het totale aantal partijen is gelijk aan het aantal verbindingen in de graaf. Vanuit elk punt vertrekken vijf verbindingen en er zijn zes punten. Op deze manier wordt echter elke verbinding twee keer geteld. Het aantal verbindingen is derhalve $(6 \times 5)/2 = 15$.

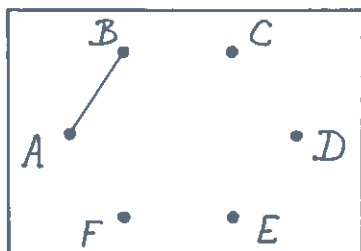


fig. 8

Een rechtstreekse redenering zonder uitschrijven of visualisatie met behulp van graaf of tabel is: er zijn zes deelnemers, die elk vijf tegenstanders zullen ontmoeten. Dat wijst op $6 \times 5 = 30$ wedstrijden, ware het niet dat elke wedstrijd nu twee keer is geteld. Er zijn dus $30/2 = 15$ wedstrijden te spelen.

Boomdiagrammen

Een graaf die een bijzondere plaats inneemt, is het boomdiagram. Bij systematisch tellen, maar ook bij het structureren van allerlei verschijnselen. Toepassingen zijn: determinatieschema's in de biologie, organisatiestructuren en computernetwerken. Deze toepassingen zijn vooral kwalitatief, er wordt weinig aan gerekend.

Voorbeeld - Rokers

Het rookgedrag van 1000 mensen is onderzocht. In de groep van 1000 mensen zaten 550 mannen, waarvan er 200 roken. Verder is nog gegeven dat 650 van de 1000 mensen niet roken (fig.9).

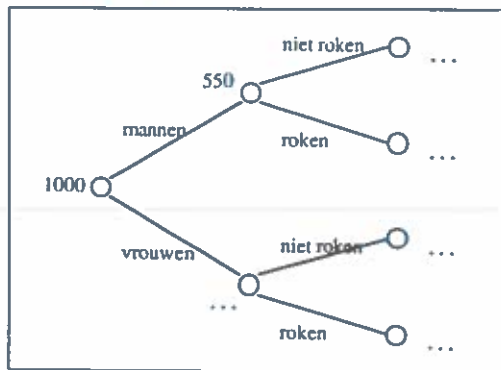


fig. 9

- *Hoeveel niet-rokende vrouwen telt de groep? Gebruik het boomdiagram om je antwoord te vinden en uit te leggen.*
- *In plaats van het boomdiagram had je ook een tabel kunnen gebruiken om een antwoord op opdracht a te vinden (fig.10).*

	rokers	niet-rokers	totaal
mannen	200	...	550
vrouwen	...	...	...
totaal	...	...	1000

fig. 10

- *Vul de gegevens uit het onderzoek over rookgedrag in de tabel in en bereken ook alle andere getallen die op de puntjes moeten staan.*

Het boomdiagram is een krachtig gereedschap om informatie te ordenen en te analyseren. Er zijn dan ook de nodige dwarsverbanden met andere onderwerpen van I&S. Het bovenstaande voorbeeld, waarin een boomdiagram in verband gebracht wordt met een kruistabel, laat zo'n dwarsverband zien.

Statistiek

Statistiek wordt wel ingedeeld naar beschrijvende statistiek en wiskundige statistiek. Bij de beschrijvende statistiek gaat het om het verzamelen en verwerken van gegevens, met het oog op het verkrijgen van bepaalde informatie. De wiskundige statistiek richt zich op de vraag hoe je op grond van steekproeven uitspraken over populaties kunt doen.

In de onderbouw komt alleen de beschrijvende statistiek aan bod. Het vak zal meer aandacht krijgen dan in het oude programma. De basisbegrippen die ook in het oude programma zitten blijven gehandhaafd, maar de sfeer zal anders worden. Vroeger bleef de invulling van statistiek beperkt tot het inoefenen van enkele elementaire technieken, zoals het bepalen van een gemiddelde of mediaan. In de nieuwe situatie staat het begrip informatie ook in de statistiek centraal. De statistische technieken staan ten dienste van het verkrijgen van informatie uit een serie waarnemingen of gegevens.

Meer concreet gaat het om de volgende punten:

- informatie halen uit kengetallen en uit (complexe) grafische voorstellingen;
- kritisch beoordelen van grafieken;
- enkele nieuwe voorstellingswijzen: steelbladdiagram en boxplot.

Verder is een meer open benadering gekozen. Leerlingen krijgen bijvoorbeeld zelf een grafiek bij een (deel van een) tabel, waarbij ze zelf moeten kiezen welk type grafiek ze erbij zullen maken.

Basisbegrippen

In de statistiek worden verzamelde gegevens geordend en weergegeven in tabellen, grafieken en diagrammen, kengetallen. De basisbegrippen die hier bij gebruikt worden, zijn tenminste:

- **turftabel** en frequentietabel;
- staafdiagram (histogram), lijndiagram, cirkeldiagram;
- gemiddelde, modus, mediaan (de zgn. centrummaten).

De basisbegrippen zijn geen doel op zich, ze zijn hulpmiddel bij het verkrijgen van informatie uit een serie waarnemingen. Het is van belang om de hier genoemde elementaire grafische voorstellingen te kennen, omdat dat helpt bij het doorgronden van meer complexe grafische voorstellingen. Bij de centrummaten gaat het ook weer om de vraag wat hun informatiegehalte is. Bij een scheve verdeling geeft de mediaan een heel ander beeld van 'het midden' dan het gemiddelde. Een bekend voorbeeld is de inkomensverdeling van de Nederlandse bevolking; die is schief naar rechts. In zo'n situatie is het gemiddelde groter dan de mediaan. Wie een rooskleurig beeld wil geven van de Nederlandse situatie, kan dus het beste het gemiddelde inkomen vermelden. Echter, de groep mensen die tenminste het gemiddelde inkomen verdient, is kleiner dan de helft. Daarom geeft de mediaan misschien wel een veel eerlijker beeld. En het salaris van 'Jan Modaal' geeft weer andere informatie.

Statistiek is geen statisch vak. Voortdurend worden nieuwe methoden en technieken ontwikkeld. Ook op het gebied van grafische verwerking, waar men zoekt naar eenvoudige voorstellingswijzen die veel informatie geven. In het W12-16 curriculum zijn twee nieuwe voorstellingswijzen opgenomen: het steelbladdiagram en de boxplot. Omdat beide begrippen ook voor veel docenten nog tamelijk onbekend zijn, besteden we er wat extra aandacht aan. Dat betekent echter niet, dat de meer traditionele voorstellingswijzen minder belangrijk zijn.

Het steelbladdiagram

Bij het proces van gegevensverwerking is het maken van een turftabel een van de eerste handelingen om losse waarnemingen te ordenen. De volgende stap is het maken van een frequentietabel, waar dan eventueel een histogram bij getekend kan worden. De combinatie turftabel → frequentietabel → histogram kan met behoud van alle informatie vervangen worden door het maken van een steelbladdiagram. Door op handige wijze gebruik te maken van ons positiestelsel,

ontstaat een diagram waarin alle waarnemingen afzonderlijk nog zijn af te lezen. Het diagram heeft een sterk visueel effect en als omlijning een bijbehorend histogram.

Bijzonder aan het steelbladdiagram is, dat het een grafische voorstelling is die is opgebouwd uit z'n eigen data. Deze manier van noteren wordt in het dagelijks leven wel gebruikt voor het vermelden van dienstregelingen bij bushaltes. Uren en minuten zijn precies af te lezen, evenals de frequentie per uur op verschillende uren van de dag.

Voorbeeld - IQ meting

IQ-meting bij een vijftigtal Nederlanders in 1980 leverde de volgende (ongeordende) resultaten:

106	103	117	103	116	96	102	130	83	107
127	118	114	117	108	115	119	147	109	142
99	141	125	88	104	132	124	114	127	136
111	96	108	112	153	136	106	108	111	101
105	110	101	120	101	106	98	118	106	100

Een steelbladdiagram van deze IQ's is:

8	38
9	6689
10	011123345666678889
11	0112445677889
12	04577
13	0266
14	127
15	3

Links van de verticale streep staan de tientallen. Het getal 12 links van de streep betekent dus 120. Rechts van de streep staan eenheden, voor elke waarneming één. Uit de rij 12 | 04577 van het diagram is af te lezen dat er vijf waarnemingen in de klasse 120- < 130 liggen, namelijk 120, 124, 125 en twee keer 127.

Het boxplot

De boxplot is een mooi voorbeeld van hoe je met luttele pennestreken veel informatie kunt weergeven. De figuur komt tot stand door een serie waarnemingen in vier 25 procent intervallen te verdelen. De vijf getallen die hierdoor vastgelegd worden, zijn:

laagste waarneming - 1e kwartiel - mediaan - 3e kwartiel - hoogste waarneming.

Op basis van deze vijf getallen wordt vervolgens de boxplot getekend.

Voorbeeld - Nogmaals IQ's

8	③ 8
9	6 6 8 9
10	0 1 1 1 2 ③ 3 4 5 6 6 6 6 7 8 8 8 9
11	0 1 1 2 4 4 5 6 7 7 8 8 9
12	④ 4 5 7 7
13	0 2 6 6
14	1 2 7
15	③

In het steelbladdiagram zijn vier 'boxplotgetallen' omcirkeld. Omdat het aantal waarnemingen even is, wordt de mediaan het gemiddelde van de 25e en 26e waarneming. De vijf getallen zijn: 83 - 103 - 110,5 - 120 - 153. De boxplot wordt (fig. 11).

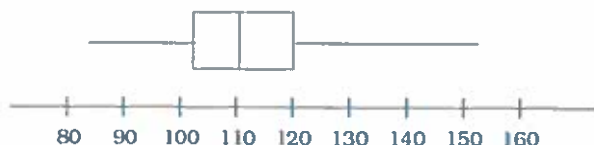
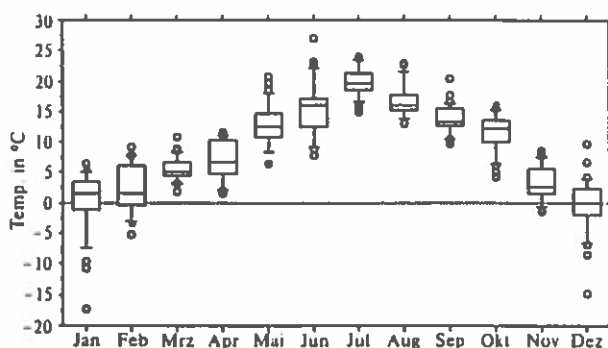


fig. 11

Een boxplot is de grafische weergave van een centrummaat (de mediaan) samen met twee spreidingsmaten. De spreidingsmaten zijn de interkwartielafstand (derde kwartiel - eerste kwartiel) en de variatiebreedte (hoogste - laagste waarneming). Verder zijn uit een boxplot de 25 procent intervallen makkelijk af te lezen. Een begrip als de mediaan krijgt door de doeltreffende visualisatie die de boxplot is, heel wat meer reliëf.

Boxplots zijn in het bijzonder handzaam als het doel is om verschillende groepen met elkaar te vergelijken. Men tekent voor elke groep een boxplot, netjes naast of onder elkaar, en krijgt daarmee een compleet beeld van alle groepen tezamen. Omdat de boxplot zo'n simpele tekening is, die in feite maar één dimensie van het papier benut, lukt het om er een groot aantal in één plaatje te krijgen. Met histogrammen gaat dat bijvoorbeeld veel moeilijker, omdat een histogram een tweedimensionaal plaatje is.

Als illustratie staat hier een grafiek over de temperatuur in Bamberg (fig. 12). Men heeft voor elke maand een boxplot getekend. In deze boxplots lopen de strepen niet helemaal door tot de uiteinden. In plaats daarvan heeft men de drie laagste en de drie hoogste waarnemingen apart met een rondje aangegeven.

Voorbeeld - Temperaturen Bamberg .

Tagestemperaturen in Bamberg 1967
Zusammenfassung nach 12 Monaten: Boxplots

fig. 12

Ten slotte zetten we de belangrijkste argumenten om het boxplot in het leerplan op te nemen nog even op een rijtje:

- de boxplot vraagt weinig tekenwerk en geeft toch een goed globaal beeld;
- het begrip mediaan gaat functioneren, in combinatie met de andere kengetallen van de boxplot;
- de boxplot biedt de mogelijkheid om iets aan spreiding te doen, zonder dat daar een lastig begrippenapparaat (zoals bij de standaarddeviatie, de bekendste spreidingsmaat uit de statistiek) voor nodig is.

Over het gebruik van steelbladdiagram en boxplot

Ons standpunt is dat het steelbladdiagram zowel didactisch als statistisch aan het begin van de gegevensverwerking staat en door leerlingen actief beheerst moet worden. De boxplot is typisch een eindprodukt van statistische gegevensverwerking.

Ook didactisch is het een eindpunt: een mooi voorbeeld van een sober vormgegeven figuur met een hoog informatiegehalte waarin zowel een centrummaat als een spreidingsmaat verwerkt is.

Passief gebruik door de leerlingen staat hier voorop. Het gaat vooral om aflezen en conclusies trekken, in het bijzonder uit een serie boxplots.

Verschillen tussen de trajecten

Het C- en het D-niveau verschillen op een aantal punten.

We noemen: mate van wiskundige abstractie, verschillen in context, verschil in redeneerwijzen.

Er zijn binnen I&S ook duidelijke inhoudelijke verschillen.

Bij het onderwerp statistiek is de boxplot geen onderdeel van het C-examenprogramma. Dat betekent dat vragen over de spreiding van gegevens op dit niveau veel minder aandacht zullen krijgen.

Er is ook een verschil binnen systematisch tellen. Het boomdiagram is daar een belangrijk hulpmiddel. Op het D-niveau is een speciaal onderwerp gewijd aan de diverse mogelijkheden van het boomdiagram. Dit onderwerp behoort niet tot het C-examenprogramma.

Het havo-traject en het vwo-traject

Er zijn twee oorzaken voor een iets andere opzet voor I&S voor deze trajecten, vergeleken met die van het D-traject. Het gaat hier om drie leerjaren in plaats van vier en verder zit er in de wiskunde A-programma's van de bovenbouw veel verwante leerstof.

Aan de orde komen twee onderwerpen: statistiek, inclusief het begrip boxplot, en systematisch tellen. Dit laatste onderwerp kan op dit niveau wat abstracter behandeld worden dan op D-niveau. De contexten kunnen ook zuiver wiskundig zijn. Het is echter niet de bedoeling al tot formules te komen. Een gevolg van deze keuze is dat het onderwerp grafen en tabellen niet verder uitgewerkt wordt.

Ook andere oplossingen zijn denkbaar: er zou voor gekozen kunnen worden juist in klas 3 al aandacht te besteden aan verbindingstabellen en verbindingsgrafien. Zowel voor het een als voor het ander valt iets te zeggen.

Geïntegreerde wiskundige activiteiten

Inleiding

In het nieuwe wiskundeprogramma voor twaalf tot zestien jaar komt een nieuwe afkorting voor: GWA. Deze drie letters staan voor geïntegreerde wiskundige activiteiten. In alle leerjaren is vijf procent van de beschikbare lestijd gereserveerd voor dit nieuwe onderdeel.

Wat zijn geïntegreerde wiskundige activiteiten?

Op één van de experimenteerscholen – Sancta Maria in Deurne – kwam een wiskundeleraar op het idee om de plannen van de gemeente voor heffing van parkeergeld op een plein nader te onderzoeken. De indeling van het parkeerterrein, hoe groot is één parkeerplaats, hoeveel je kwijt bent aan op- en afrit, de bezettingsgraad en de te verwachten inkomsten voor de gemeente worden nader bekeken door de leerlingen. Hoe optimistisch is de wethouder over de opbrengst? Het project krijgt de naam 'Kan ik effe vangen?' Een prima idee. De uitwerking vraagt een stevige voorbereiding en vooral ook een goede planning van de leerlingenactiviteiten.

Uit bovenstaand voorbeeld wordt enigszins duidelijk waar het om te doen is: Leerlingen ervaringen laten opdoen met wiskunde die in de actualiteit en/of in samenhang met andere vakken een belangrijke rol speelt. Leerlingen laten oefenen in het aanspreken en gebruiken van hun wiskundige bagage in levensechte situaties.

Je kunt twee soorten GWA onderscheiden: de actuele en de vooruitgeplande. Bronnen voor de actuele soort zijn: krant, tv, een foto, gebeurtenissen op school. Bij de vooruitgeplande GWA geven we enkele voorbeelden.

Voor de eerste klas een verkenning van de omgeving van de school met opdrachten, zoals het maken van een schatting van de oppervlakte van de vijver in het park, het meten van hoeken en het schatten van de hoogte van een gebouw met behulp van de schaduw, enz. Voor de tweede klas een activiteit samen met andere vakken, bijvoorbeeld 'De reis om de wereld in tachtig dagen'. Voor de derde klas kun je denken aan een statistisch onderzoekje.

Belangrijk is dat er ruimte bestaat in het nieuwe programma voor dit soort activiteiten. De betekenis ervan in het wiskundeonderwijs verschuift van een marginaal onderdeel naar een regelmatig terugkerend en ook te toetsen leerstofgebied.

Het doel van geïntegreerde wiskundige activiteiten

Een voorbeeld: we zijn bezig met ordenen, tellen, grafisch representeren. De herfstbladeren waaien langs het raam. Voor de volgende les allemaal tien herfstbladeren zoeken en opplakken, geordend naar

grootte en kleur. Stellig is er verschil in aanpak en wellicht is er iemand die kiest voor een indeling met twee assen: kleur van licht naar donker en volgens grootte langs de andere as. Komt de grafiek als mogelijke representatie niet uit de klas dan brengt de docent deze mogelijkheid naar voren. De leerlingen zullen dit nog vaak tegen komen, binnen en buiten de wiskunde als grafiek maar ook als n bij m matrix. GWA omvat zeker dit soort spontane invallen voor actueel onderwijs; het biedt ook ruimte voor projectjes zoals 'Kan ik effe vangen?'. De bedoeling is dat er door GWA in het wiskundeonderwijs een volwaardige plaats is voor spontane invallen en projecten, waardoor leerlingen ervaren dat wiskunde een springlevend vak is dat te maken heeft met hun wereld, met hier en nu, met hen zelf.

In het Examenprogramma staat over GWA:

'Geïntegreerde wiskundige activiteiten

Onderzocht wordt of de leerling in staat is een in niet-wiskundige formuleringen opgestelde probleemsituatie met wiskundige middelen te onderzoeken. Daartoe zal de kandidaat de probleemsituatie moeten mathematiseren en vervolgens de verkregen wiskundige voorstellingsvormen zodanig bewerken met vaardigheden uit de onderdelen Rekenen, Algebra, Meetkunde, Informatieverwerking en statistiek, dat conclusies getrokken kunnen worden, die zinvol zijn voor de oorspronkelijke probleemsituatie.'

Deze formulering wijst heel duidelijk in de richting van attitude-doelen: mathematiseren, kennis van buiten de wiskunde en gezond verstand gebruiken, terugkeren naar de vraagstelling na de wiskundige verkenning.

Toetsing van GWA

In het Examenprogramma staat hoe de COW denkt over de toetsing van GWA: 'De COW acht het noodzakelijk dat het onderdeel geïntegreerde wiskundige activiteiten ook als zodanig wordt getoetst. Daarom is het ook als afzonderlijk onderdeel in de voorstellen voor de examenprogramma's opgenomen. Doordat probleemsituaties als hier bedoeld een rijkere inhoud en grotere omvang hebben dan gewoonlijk op een schriftelijk eindexamen mogelijk zal zijn en doordat actualiteit en de lokale situatie veelal een rol spelen in dit onderdeel, beveelt de COW aan het onderdeel in het schoolonderzoek te toetsen en scholen daartoe te verplichten.'

De wiskundesectie van de Radboudmavo te Oldenzaal toetst GWA door de leerlingen een eigen onderzoekje te laten doen. Leerlingen kunnen kiezen uit een lijst van onderwerpen. Enkele voorbeelden daaruit:

Keyboards

Hoe vaak komen letters voor in teksten? Een onderzoek. Een be-

schrijving van zoveel mogelijk verschillende toetsenborden. Zijn ze logisch opgebouwd (overeenkomsten/verschillen)?

Kaarten

Je gaat op zoek naar allerlei soorten kaarten. Hoe zit het met de schaal? Wat is er zo bijzonder aan? Zeekaart, landkaart, hoogtekaart globe. Maak een reistijdenkaart (tijdentabel opvragen bij NS).

Weer naar school

Waarom zijn kruispunten gevaarlijk? Spreek af op welke dingen je zult letten en deel de kruispunten in naar gevaarlijkheid. Doe onder zoek op twee kruispunten en verwerk de gegevens statistisch.

Kalenders

Hoe zit een kalender in elkaar? Zijn er andere kalenders dan jaarkalenders? Maak de kalender van het jaar 2000 en van het jaar 3000.

Meetinstrumenten

Bedenk zoveel mogelijk meetinstrumenten. Deel ze in naar soort. Is elk genoemd instrument wel een meetinstrument? Waarin verschillen de soorten? Doe metingen met drie bijzondere meetinstrumenten

In het Trajectenboek, de uitvoerige leerstofbeschrijving van het nieuwe 12-16-programma staan de volgende voorbeelden van GWA.

- Tijdens een lesuur of een deel ervan inhaken op de actualiteit uit de wereld om ons heen. Bronnen daarvoor zijn: de krant, de televisie e.d.
- De actualiteit op school benutten voor wiskundige activiteiten. Bijvoorbeeld: voor een sportdag toernooischema's opstellen.
- Aansluiten bij een te verwachten actualiteit. Bijvoorbeeld: de langste dag.
- Eén of meer lesuren besteden aan een keuze-onderwerp uit de wiskunde. Bijvoorbeeld: onderwerpen die niet in het programma zijn opgenomen, zoals getaltheorieën, verschillende talsystemen e.d.
- Een project uitvoeren dat aansluit bij een onderwerp dat in de wiskundeles behandeld is. Bijvoorbeeld: een statistisch onderzoekje laten uitvoeren.
- Aansluiten bij wat in andere vakken behandeld wordt. Bijvoorbeeld: aandacht aan geschiedenis van de wiskunde besteden.
- Eén of meer lesuren besteden aan een thema, eventueel geïntegreerd met andere vakken.
- Een wiskundig onderdeel voor een werkweek met school verzorgen.
- Vermoedens opstellen en toetsen. Bijvoorbeeld: van een regelmatig patroon voorspellen hoe dat vermoedelijk voortgezet zal worden en door voorbeelden nagaan of dat vermoeden versterkt kan worden, dan wel moet worden verworpen.

De werkvorm voor deze activiteiten kan zeer divers zijn: te denken valt aan opdrachten aan individuele leerlingen, werken in groepjes, huiswerkopdrachten, werkstukken en presentaties voor medeleerlingen.

GWA: een uitdaging voor docent en leerling

De docent kan bij GWA gebruik maken van eigen sterke punten, zoals specifieke kennis door hobby's. In die situaties is het goed mogelijk leerlingen te laten ervaren hoe wiskunde op tal van terreinen een rol speelt. Bij een GWA-ontwerp is het mogelijk een leerlingentekst te maken die goed past bij de eigen stijl van onderwijzen.

In de zestiger jaren werd dit aspect in de verwachtingen van beleidsmakers en bewindslieden nog wel eens sterk overdreven: er bestond een groot geloof in ontwikkeling van onderop. Wij geloven nog steeds in de kracht van de docent als het om goed wiskundeonderwijs gaat. Maar die kracht is niet onuitputtelijk. We willen docenten ruimte geven om zelf een deel van het leerplan te maken, zij het binnen de grenzen van een examenprogramma. GWA is een stapje in die richting. Als docent kun je zo op een verantwoorde wijze 5 procent van de lestijd nemen voor deze activiteiten. De docent die daar creativiteit en energie voor heeft, kan zo eigen materialen ontwikkelen. Als deze het ene jaar geprobeerd zijn, bij GWA, kunnen ze in sommige gevallen het volgende jaar op een reguliere plek in het leerplan worden opgenomen en er is weer wat ruimte voor een nieuw idee.

Natuurlijk zijn leerlingen gemakkelijk te porren om buiten school wat te meten. Alles wat afwijkt van de dagelijkse lesroutine valt bij leerlingen in goede aarde. Maar dat is een goedkope motivatie. Als er buiten goed moet worden nagedacht, handig georganiseerd, praktische schetsjes moeten worden gemaakt, die binnen moeten worden uitgewerkt, dan valt dit soort motivatie al gauw door de mand. De uitdaging voor leerlingen wordt gemakkelijk vertroebeld door 'het leuke'.

Het is helemaal niet zo gemakkelijk voor een leerling een uitdaging te ontdekken in een opdracht waarbij van te voren niet precies vaststaat wat het eindresultaat zal moeten zijn. Daarom zal er ook een opbouw moeten zijn in het soort opdrachten. Een opbouw vanaf een welomschreven taak naar meer ruimte voor eigen initiatief. Bij zo'n opbouw is het op grond van vorige ervaringen mogelijk dat de leerling de uitdaging aanneemt.

Ervaringen met GWA

Het idee GWA kreeg binnen de experimenteerscholen diverse uitwerkingen. De eerste projecten 'De langste dag' en 'Het weer' werden ontwikkeld in samenwerking met de Radboudmavo. Daarna ontwikkelde de school zelf een aantal activiteiten, zoals de voorbeelden die hier beschreven zijn. Op de GSG Greijdanus bedachten docenten op een

werkweek in de bergen activiteiten over hockmeting. Maar niet alle docenten beschikken over voldoende creativiteit om zelf GWA te ontwikkelen. Goede inspiratiebronnen met bruikbaar materiaal zijn daar ook van groot belang. Na het bekijken van de voorbeelden van GWA was de reactie van docenten van een experimenteerschool: 'Zoietu kunnen we ook zelf. We gaan een eigen projectje maken, afgestemd op onze situatie'. Zo is in Deurne het project met de parkeerplaatsen ontstaan.

De invoering van GWA

Het valt te verwachten dat het onderdeel GWA pas geleidelijk een plaats zal krijgen in de dagelijkse schoolpraktijk. Ook de experimenteerscholen hadden minstens een jaar nodig. Veel hangt af van wat de schoolboeken gaan bieden. In bestaande schoolboeken zijn al voorlopers te vinden van de GWA-gedachte. Zo heeft de Wageningse Methode al sinds jaren de 'binnenkant van de achterkant' en in Wiskundelij staan de 'Snippers', waarin integrerende activiteiten voor leerlingen worden beschreven. In de nieuwe uitgave van *Modern Wiskunde* komen kleine GWA-hoofdstukjes met activiteiten die enigszins aan het seizoen gebonden zijn. In het begin tamelijk veilige werkvormen voor de docent. Verderop komen de meer afwijkende activiteiten aan bod, zoals buiten de school metingen verrichten.

Het is te hopen dat in de schoolboeken de activiteiten zo beschreven worden dat docenten ze naar hun hand kunnen zetten: beschrijven zonder voor te schrijven.

VERANDEREND WISKUNDEONDERWIJS

Inleiding

De COW werd ingesteld omdat veel mensen geloofden dat er iets moest veranderen in het wiskundeonderwijs. Niet omdat het wiskundeonderwijs van nu niet goed zou zijn, maar omdat elke tijd en elke samenleving zijn eigen onderwijs heeft. Als de maatschappij verandert, moet het onderwijs ook veranderen. De manier van denken over wiskunde als schoolvak heeft daar mee te maken.

Wiskunde als schoolvak

Wiskunde heeft met een aantal andere vakken gemeen, dat het op school anders gebruikt en toegepast wordt dan daarbuiten. Binnen de school is het een vak, dat geleerd moet worden. Buiten de school is wiskunde een middel om je beroep op een goede manier te kunnen uitoefenen of om je in het dagelijks leven staande te kunnen houden. Er is ook nog zo iets als de 'vormende waarde' van wiskunde. Als je wiskunde leert, ontwikkel je een manier van denken, waar je in het dagelijks leven voordeel van hebt. Het kan zijn, dat je je daar niet eens bewust van bent. Wat daar dan ook van waar moge zijn, het betekent wel dat scholieren en hun leraren zich richten op de toekomst. Je moet erin geloven dat de moeite die je doet, later beloond zal worden. Dat geldt niet alleen voor de scholier, maar evenzeer voor dien wiskundeleraar.

Hetzelfde geldt in zekere mate voor de inhoud van wat er geleert moet worden. In de schooltijd wordt wiskunde weinig gebruikt, maar later in een voortgezette opleiding of in een beroep zal wel blijken, dat de leerstof nuttig is geweest. Dat niet iedereen in dezelfde voortgezette opleiding of in hetzelfde beroep terecht komt moeten we op de koop toenemen. Dat is nu eenmaal het gevolg van algemeen, dat wil zeggen niet op een bepaald beroep gericht onderwijs.

Samengevat lijkt het of de scholier niet veel anders overblijft dan ijverig en intelligent aan het werk te gaan in de overtuiging en verwachting dat de beloning later zal komen. Natuurlijk is dit een enigszins overdreven voorstelling van zaken. De praktijk is gelukkiger anders. Het leren van nieuwe dingen is op zichzelf ook leuk. Je vraag je bij het leren niet af of het wel van belang is voor je latere leven, of voor het komende proefwerk. Een goed leerboek, een vaardige docent en nog een aantal andere factoren maken dat leren op het moment zelf voldoening kan geven. Op deze manier kunnen vorming en

leren voor de toekomst samengaan. Dit is wellicht een van de belangrijkste redenen dat inhouden via leerplannen zo'n taal bestaan lieden.

De vormende waarde van wiskunde

Door vele mensen is gedurende eeuwen de nadruk gelegd op de vormende waarde van de wiskunde. Er is uitgebreide en belangwekkende literatuur over dit onderwerp. We beperken ons echter tot een citaat van T. Ehrenfest-Afanasjewa in haar Didactische opstellen (Zutphen, 1960) over het aankweken van goede denkgewoonten. Dit betekent voor haar, dat iemand moet leren:

'... naar het essentiële in een gegeven situatie te zoeken (abstractievermogen); zich daarvan rekenschap te geven (wat niet hetzelfde is); te trachten dit scherp te formuleren; een zich aanbiedend antwoord op een vraag met het gehele complex van gegevens te confronteren en nooit de totale situatie uit het oog te verliezen (kritisch vermogen).'

Ook tegenwoordig wordt de nadruk gelegd op het ontwikkelen van kwaliteiten die onder het kopje abstractievermogen en kritisch vermogen kunnen worden gerangschikt. Daarmee is echter nog niets gezegd over de manier waarop deze doelen in het onderwijs kunnen worden nagestreefd. Men kan die in verschillende richtingen zoeken: in de inhoud of in de didactiek. In de jaren vijftig verschenen wiskundemethoden van Bos & Lepoeter en van het echtpaar Van Hiele. Deze auteurs zochten het vooral in de didactiek. De boeken onderscheidden zich van wat tot dan toe gebruikelijk was, doordat de schrijvers niet de leerstof centraal stelden, maar uitgingen van opvattingen over leerprocessen. In 1958 trad een nieuw leerplan in werking voor wat toen nog HBS en Gymnasium heette. Voor het eerst werd in een officieel stuk een didactische uitspraak gedaan: In de eerste klas zou het meetkundeonderwijs moeten beginnen met een intuïtieve inleiding. Al vele jaren daarvoor was er regelmatig gepleit voor een meer leerlinggericht aanpak, onder andere omdat anders het abstractievermogen en het kritisch vermogen niet voldoende ontwikkeld zouden worden. In Euclides verschenen daarover in 1927 al artikelen.

In de jaren zestig kwam sterk de opvatting naar voren, dat de tot dan toe geldende inhouden van het wiskundeonderwijs ongeschikt waren om er de bedoelde vorming mee na te streven. Algebra zou te veel gericht zijn op het aanleren van algoritmen en meetkunde zou te statisch van aard zijn. Leerlingen zouden veel meer moeten leren hoe wiskundige structuren opgebouwd kunnen worden. Daarom moesten onderwerpen uit de verzamelingenleer worden onderwezen, terwijl de tot dan toe onderwezen meetkunde volgens de opbouw van

Euclides vervangen moest worden door transformatiemeeetkunde. Een en ander werd samengevat onder de naam 'moderne wiskunde'. Om leraren bij het middelbaar onderwijs hierover in te lichten organiseerde men op grote schaal heroriënteringscursussen.

Didactiek in de nascholing

In het begin van de jaren zestig was de positie van de didactiek onduidelijk. In officiële kringen – bij de Inspectie en op het ministerie – heerste de mening, dat de staat zich niet met didactiek had te bemoeien. Pogingen om bijvoorbeeld via een gesubsidieerde heroriënteringscursus didactiek te onderwijzen werden beschouwd als een onrechtmatige inbreuk op de persoonlijke vrijheid van de leraar. Er zijn natuurlijk altijd uitstekende wiskundeleraars geweest en er zijn goede leerboeken geschreven. De didactiek bleef echter impliciet. Men deed het goed, maar men sprak er niet over. In het openbaar werd op enkele uitzonderingen na, meer over wiskunde in het onderwijs dan over het onderwijzen van wiskunde gesproken. In de loop van de jaren zeventig kwam geleidelijk verandering in de houding van de overheid ten aanzien van de didactiek. Een belangrijke doorbraak was daarbij het inrichten van nascholingscursussen voor tweede- en derdegraadsleraren. Bij het in werking treden van de mammoetwet moesten zij de moderne wiskunde gaan onderwijzen. Daarvoor hadden zij – in tegenstelling tot de eerstegraadsleraren – geen nascholingscursus gehad. Onder druk van lerarenorganisaties zijn toen nascholingscursussen georganiseerd, waarbij niet alleen de moderne wiskunde werd behandeld, maar ook werd gesproken over de manier waarop die wiskunde onderwezen zou kunnen worden. Verder speelde de komst van het nieuwe schooltype havo een rol. Leraren verkeerden in grote onzekerheid over wat er van hen voor dat nieuwe schooltype verwacht werd.

Ook de opkomst van de Universitaire Lerarenopleidingen en de Nieuwe Leraren Opleidingen bevorderde de ontwikkeling van de didactiek. Er kwamen didactiekcursussen voor leraren. Vooral die van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars hadden grote belangstelling. Ook het Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO) drukte een belangrijke stempel op het denken over het wiskundeonderwijs.

Veranderende doelstellingen

De hier genoemde ontwikkelingen zijn beïnvloed door ideeën over de positie van de leerling als mens in de wereld van nu en diens toekomstige positie als burger in de maatschappij. Bij de democratisering van de maatschappij hoort emancipatie van alle leden van die maatschappij.

schappij. Daardoor kregen gaandeweg ook opvattingen een kans, waarin leerlingen gezien werden als mondige jonge mensen. Daarmee samenhangend werd er aandacht gevraagd voor gevoelens en emoties. Dit had consequenties voor het onderwijs. Bijvoorbeeld, dat het niet goed is leerlingen iets te leren, waar ze nu nog niet zo veel aan hebben en wellicht later ook niet. Er werd gezocht naar inhouden en methoden die scholieren ook nu zullen kunnen gebruiken. Het wiskundeonderwijs moest niet langer uitsluitend gericht zijn op de intellectuele ontwikkeling van de leerlingen en op het voorbereiden op vervolgopleidingen. Volgens deze opvatting moesten we ons richten op wat leerlingen nu motiveert, op wat zij nu aankunnen, op waar zij nu aanleg voor hebben, op wat zij nu kunnen gebruiken buiten de wiskundeles.

Een en ander kwam neer op een verschuiving van structuralistisch wiskundeonderwijs naar realistisch wiskundeonderwijs. Bij structuralistisch wiskundeonderwijs worden waardevol lijkende wiskundige inhouden gekozen. De didactiek in de jaren zeventig zocht naar geschikte manieren om die inhouden zo te onderwijzen, dat daarmee waardevolle doelen kunnen worden nagestreefd. Bij realistisch wiskundeonderwijs kiest men een andere benadering. Er wordt in de eerste plaats gekeken naar waardevol lijkende vormingsdoelen en vervolgens wordt daarbij gezocht naar waardevolle wiskundige inhouden en didactiek, die kunnen helpen die doelen te verwezenlijken.

Statische wiskunde

De keuze van de inhouden op school en de manier waarop onderwijs plaats vindt is onder meer afhankelijk van de visie op wiskunde. Daarbij zijn twee extreme standpunten mogelijk. Aan de ene kant is er het standpunt dat wiskunde bestaat uit een structuur van begrippen en stellingen. Wie die structuur goed leert weet veel van wiskunde. In de omgangstaal komt die opvatting tot uitdrukking door het gebruik van het lidwoord 'de'. Men spreekt dan bijvoorbeeld over: 'In de wiskunde geldt de stelling ...', of: 'In de wiskunde schrijft men dat zo ...'. In deze opvatting is de wiskunde een diamant met vele facetten. Het is de kunst een aantal, zo niet alle facetten te leren kennen. In deze opvatting worden structuren en eigenschappen niet uitgevonden, maar ontdekt. Naast de positieve dingen die over deze opvatting kunnen worden gezegd, dreigt het gevaar dat de wiskunde een statisch geheel wordt, waarin moeilijk progressie plaats vindt. In zijn dogmatische vorm heerst in deze opvatting bijvoorbeeld de mening, dat als eenmaal een bewijs van een bepaalde eigenschap is gevonden er geen ander bewijs meer hoeft te worden gezocht. Neem bijvoorbeeld de stelling van Pythagoras. In het onderwijs wordt de stelling éénmaal bewezen. Dat kan kort door de leraar gebeuren, of langer via

allerlei onderzoeksactiviteiten van de leerlingen. Maar als het bewijs eenmaal geleverd is, speelt het als zodanig geen rol meer bij de opbouw van wiskunde. Dat maakt, dat veel leerlingen zichzelf en hun docent vragen wat de zin is van dat bewijs, omdat ze alleen de formule $a^2 + b^2 = c^2$ hoeven te kennen en te gebruiken.

Een ander gevaar van bovengenoemde statische opvatting over de aard van wiskunde is, dat mensen zo'n ontzag krijgen voor het prachtige bouwwerk, dat zij zichzelf bij voorbaat niet in staat achten iets bij te dragen. Geleerde mensen hebben immers allang uitgeplozen hoe het allemaal in elkaar zit. En om zelf iets van die wiskunde te begrijpen moet je zelf ook een knappe kop zijn. Dit gevoel van ontzag kan in de praktijk remmend werken op de motivatie van leerlingen.

Deze statische beschouwingswijze dreigt vooral op die plaatsen waar wiskunde beschouwd wordt als een hulpmiddel voor het oplossen van technische problemen. Het is dan ook niet verwonderlijk, dat zo'n opvatting juist op school kan heersen. Op school wordt immer bestaande wiskunde onderwezen, met een grote nadruk op het toe passen van eigenschappen en regels. Die nadruk is nodig, omdat wiskunde gebruikt moet worden bij andere vakken, maar er is nog een ander gebied, dat met een beetje goede wil als toepassingsgebied kan worden opgevat. Dat is het gebied van het eindexamen. Ook op het eindexamen moet wiskunde toegepast worden, in dit geval op eindexamenproblemen. Voor een goed resultaat op het eindexamen is het uiterst zinvol wiskunde te zien als een kant-en-klaar en afgerond geheel van regels en eigenschappen.

Dynamische wiskunde

In een andere opvatting wordt wiskunde gezien als een open systeem dat aan verandering onderhevig is. Wiskundig onderzoek bestaat niet uit het ontdekken van structuren en eigenschappen, maar uit het (her)ontwerpen en (her)uitvinden daarvan. De bedoeling van het zoeken van een bewijs is niet in de eerste plaats het verifiëren van de juistheid van een eigenschap. Door het zoeken van een bewijs komt iemand op het spoor van steeds weer nieuwe problemen die met het onderwerp van studie samenhangen. Zo'n probleem is dan bijvoorbeeld een andere stelling, waarvan de juistheid ook weer moet worden nagegaan. Of het is een nieuwe structuur, waarvan het bestaan moet worden geverifieerd. Een bewijs is nooit af. Er zijn steeds weer nieuwe details te onderzoeken, er kan worden nagedacht wat de invloed is van een kleine wijziging in de gegevens of in het gestelde. Neem bijvoorbeeld aan dat de stelling van Pythagoras bewezen wordt met behulp van vierkanten: Laten A , B , en C vierkanten zijn die op de korte zijden, respectievelijk de lange zijde van de rechthoekige driehoek worden gezet. Dan is de oppervlakte van A plus de oppervlakte

van B gelijk aan de oppervlakte van C . Geldt dit ook als de figuren geen vierkanten zijn? Aan welke voorwaarde(n) dienen zulke figuren te voldoen (fig. 1)?

Andere vragen zouden kunnen zijn: wat is er aan de hand als de driehoeken niet rechthoekig zijn? Is er een soortgelijke stelling in de driedimensionale ruimte (bijvoorbeeld met inhouden van kubussen)? Zijn er ook getallen a , b en c zodat $a^n + b^n = c^n$ voor andere waarden van n dan $n = 2$? Zo ja, is dat dan meetkundig uit te beelden? Kan het plusteken in een minteken veranderd worden?

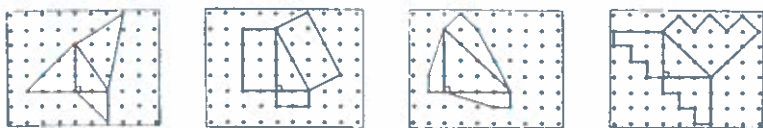


fig. 1

In deze opvatting van wiskunde is het niet langer zinvol om over de wiskunde te spreken. Wiskunde wordt niet ontdekt, maar uitgevonden. Wiskunde is niet een objectief geheel van structuren en stellingen, maar een proces van menselijke activiteit. Niet het eindresultaat van het denken en onderzoeken is wiskunde, maar het proces van het denken en onderzoeken zelf.

Wiskunde als menselijke activiteit

Verschillende schrijvers over wiskundeonderwijs hebben betoogd, dat het niet verstandig is een keuze te doen voor een van de standpunten. Er bestaat al veel wiskunde en het zou dom zijn daar geen kennis van te nemen, maar anderzijds is het ook zinvol zelf te zoeken naar oplossingen van problemen. Het gemeenschappelijke in beide standpunten ligt in het accent op eigenschappen en structuren, zij het dat de werkhouding ten aanzien daarvan verschillend is. In beide opvattingen zijn werkwijzen, algoritmen, logische samenhangen, conventies over notaties, allemaal middelen om wiskunde te onderzoeken of te ontwikkelen. Dit is bijvoorbeeld in het verleden tot uitdrukking gekomen in de formuleringen van leerplannen en examenprogramma's. Daarin werden stellingen, begrippen, structuren beschreven. Andere zaken, zoals algoritmen, notaties, methodieken, heuristieken en dergelijke stonden als middelen in toelichtingen, nomenclatuurrapporten en schoolboeken.

Wij stellen ons op het standpunt dat werkwijzen, algoritmen e.d. geen middelen zijn, maar elementen die essentieel tot wiskunde be-

horen. Wiskunde bestaat in onze visie niet alleen uit theoretische begrippen en eigenschappen, maar heeft verschillende aspecten. Elk van die aspecten dient in het onderwijs als volwaardig onderdeel van wiskunde aan de orde te komen.

Samenvattend: we hebben twee extreme standpunten ten aanzien van de inhoud van wiskunde besproken. In het ene standpunt is wiskunde iets dat al bestaat, maar door mensen nog ontdekt moet worden. Het gedeelte dat al ontdekt is, moet overgedragen worden. Bij het andere is wiskunde een menselijke activiteit, waarbij wiskunde uitgevonden en ontwikkeld wordt. Beide standpunten zijn uit te breiden in de zin, dat men behalve theoretische structuren ook andere aspecten tot wiskunde kan laten behoren, zoals algoritmen, methoden, logische samenhangen en conventies.

Wij stellen ons als team W12-16 op het standpunt van wiskunde als menselijke activiteit, waarbij alle genoemde aspecten tot wiskunde, of liever tot wiskundige activiteit behoren. Voor het onderwijs in de wiskunde betekent dat, dat het leren van wiskunde niet gebeurt volgens een proces van voordoen en nadoen. Aan de hand van probleemsituaties krijgt de leerling de gelegenheid van alles te ontdekken.

Ontwikkelingen in de didactiek

De didactiek is de laatste dertig jaar sterk ontwikkeld. Op het eerste gezicht lijkt het vreemd dat er ook op het gebied van opvattingen over didactiek veranderingen zijn. Het gaat er toch om dat leerlingen de dingen die ze leren, ook begrijpen en kunnen gebruiken? Dat betekent dat ze zodanig onderwijs moeten krijgen, dat dat ook mogelijk wordt. Is er over de manier van onderwijs geven dan verandering in opvatting mogelijk? Er zijn allerlei antwoorden te geven op deze vraag.

Ten eerste vindt er de laatste dertig jaar veel meer onderzoek op het gebied van de didactiek van de wiskunde plaats dan daarvoor. Daaruit zijn nieuwe inzichten ontstaan over leren en onderwijzen. Het is dus inderdaad mogelijk dat opvattingen over de manier van onderwijs geven veranderen.

Ten tweede zijn er ontwikkelingen geweest – en nog gaande – waarbij algemene opvattingen nader uitgewerkt werden en daardoor beter hanteerbaar. Met name kunnen we wijzen op de al eerder aangehaalde ideeën van Ehrenfest-Afanasjewa. De uitgangspunten over abstractievermogen en kritisch vermogen zijn uitstekend, maar de leeraar, de schoolboekauteur en de leerplanontwikkelaar staan voor de vraag hoe zij deze uitgangspunten kunnen verwezenlijken. Daarvoor is meer operationele didactische kennis nodig.

Verder is er de verwevenheid van didactiek met doelstellingen.

Doelstellingen veranderen met de loop van de jaren en daardoor moet de didactiek mee veranderen. Andere doelstellingen vragen gewoonlijk andere vormen van onderwijsleerprocessen.

Afsluiting

We noemen vier invloeden die geleid hebben tot formulering van uitgangspunten van realistisch wiskundeonderwijs. Een van de invloeden is de opvatting dat wiskunde een menselijke activiteit is. Die opvatting is niet een exclusiviteit van realistisch wiskundeonderwijs, maar dat soort onderwijs is wel onverbrekkelijk aan menselijke activiteit gebonden. Verder is er de opvatting over wiskunde als een dynamisch vak, waarbij de nadruk veel meer ligt op ontwikkeling en onderzoek van het vak, dan op het leren van gevestigde structuren en methodieken. Ten derde richt het onderwijs zich niet alleen op de toekomst van de leerling, maar moet het ook op het moment zelf als zinvol ervaren worden. Ten slotte is er de ontwikkeling in de didactiek en de verdieping van inzichten over de manier waarop mensen leren. Daar komen de uitgangspunten van realistisch wiskundeonderwijs uit voort.

Er wordt gewerkt met probleemsituaties, waarbij leerlingen zich iets kunnen voorstellen. De begripsontwikkeling van de leerling gebeurt vanuit diens eigen intuïtie en bewuste kennis en ideeën.

Via confrontatie met een reeks doordachte en didactisch goed geordende problemen krijgt de leerling de gelegenheid bepaalde wiskundige inzichten en technieken te ontwikkelen.

Bij de keuze van de contexten en in de vraagstellingen wordt uitgegaan van het niveau waarop de leerling zich bevindt en het leertempo dat de leerling kan opbrengen. Een geforceerde ontwikkeling kan alleen maar leiden tot het klakkeloos hanteren van allerlei onbegrepen technieken.

Voor de praktijk van het onderwijs betekent dat (onder meer):

- Leerlingen mogen (soms zelfs: moeten) proberen, voordat bepaalde begrippen en methoden verwoord worden.
- Leerlingen mogen (soms zelfs: moeten) proberen, zonder dat zij van tevoren weten op welke manier een bepaald probleem opgelost kan worden.
- Leerlingen mogen (soms zelfs: moeten) omgaan met concreet materiaal en hun eigen lijf gebruiken om begrippen en problemen te verkennen.
- Leerlingen mogen (heel vaak: moeten) met anderen samenwerken.
- Het klasgesprek heeft vooral ten doel leerlingen te stimuleren in daden en denken.

Daarmee komen de woorden van mevrouw Ehrenfest-Afanashewa weer terug. Leerlingen moeten leren:

- naar het essentiële in een situatie te zoeken,
- zich daarvan rekenschap te geven,
- dit (trachten) scherp te formuleren,
- een antwoord met de gegevens te confronteren,
- nooit de totale situatie uit het oog te verliezen.

Mevrouw Ehrenfest schreef dit in de jaren dertig. Het is opmerkelijk dat haar woorden nog steeds actueel zijn.

ENKELE DIDACTISCHE ONDERWERPEN

Inleiding

Een verandering in de dagelijkse gang van zaken zoals het invoeren van een nieuwe methode, het aannemen van een hospitant, en vooral de start van een nieuw leerplan is een goede aanleiding voor docenten (maar natuurlijk ook voor schrijvers van schoolboeken en andere betrokkenen) zich weer eens opnieuw te bezinnen op de didactiek van hun vak. Over die didactiek is al veel bekend, zowel in de dagelijkse leraarspraktijk als in de opleidingen. Op de nascholingsbijeenkomsten zal veel gesproken worden over de consequenties die de nieuwe leerplannen hebben voor de praktijk.

In dit hoofdstuk worden een paar achtergronden van die onderwijspraktijk beschreven. Het gaat hierbij in het bijzonder over manieren waarop mensen leren.

Bij de keuze van de onderwerpen is uitgegaan van wat er nieuw is in het nieuwe leerplan en wat naar aanleiding daarvan op regionale en andere voorlichtingsbijeenkomsten is gezegd en gevraagd. Onderwerpen die steeds weer ter sprake kwamen waren:

- contexten,
- leren door doen,
- inzicht en oefenen,
- redeneren,
- taal.

Natuurlijk kan in een boek als dit niet alles worden gezegd wat er over leren en onderwijzen bekend is. En ook binnen de gekozen onderwerpen moesten we ons beperken.

Het zal de lezer opvallen, dat veel van wat we schrijven over leren en onderwijzen al vele jaren bekend is. Er is ook wat dat betreft niets nieuws onder de zon, maar, zoals gezegd, met de introductie van het nieuwe leerplan is deze problematiek weer actueel.

Het onderwerp taal komt uitgebreid ter sprake in het boek *Wiskunde, een wereldvak*. Daar heeft het vooral betrekking op leerlingen uit niet Nederlands sprekende gezinnen, maar het meeste wat er aan de orde komt heeft algemene waarde. Hier gaat het vooral over de relatie tussen taal en begripsniveau.

Contexten

Mensen leren goed als ze actief bezig kunnen zijn in situaties die zij zich voor kunnen stellen en waarbij ze werken aan problemen die ze zelf ook als zodanig ervaren. Dat is een reden waarom bij het ontwerpen van het leerplan is gekozen voor wiskundeonderwijs dat rekening houdt met de leefwereld van leerlingen. Het werken met contexten is daar onverbrekkelijk mee verbonden.

Het wiskundeonderwijs wordt vormgegeven door het onderzoeken van probleemsituaties die in de gebruikte contexten besloten liggen. Uit zulke situaties komen wiskundige activiteiten voort, waar door de context betekenis aan gegeven wordt. Daardoor is er steeds een zeker verband tussen wiskunde en de situatie waarin wiskunde een rol speelt. Dit vergroot de bruikbaarheid van wat geleerd wordt. Contexten zijn dus niet alleen bedoeld als een motiverende start van een leerproces. Er zitten veel meer aspecten aan een goede context. Een voorbeeld daarvan vinden we bij de oplossing van een vraagstuk uit het experimentele D-examen van 1992, eerste tijdvak (fig. 1).

Opgave 3 Vliegtuiglanding



Een vliegtuig uit Spanje wil hoven Parijs de daling inzetten om op Schiphol te landen.

De vlieghoogte is 10 km en de afstand Parijs - Schiphol 500 km.

- 6 ☐ Bereken onder welke hoek het vliegtuig moet gaan dalen.

Een piloot vliegt op een hoogte van 1 km en daalt gelijkmatig onder een hoek van 10° . Het begin van de landingsbaan is 5 km verder (over de grond gemeten). De landingsbaan is 2 km lang. Het vliegtuig heeft op de landingsbaan 800 meter nodig om tot stilstand te komen.

- 7 ☐ Onderzoek met behulp van een berekening of het vliegtuig op deze manier de landing goed kan uitvoeren.

fig. 1

Bij vraag 7 rekenden de meeste leerlingen uit waar het vliegtuig voor het eerst de baan raakt. Een van de leerlingen gaf de volgende oplossing (fig. 2).

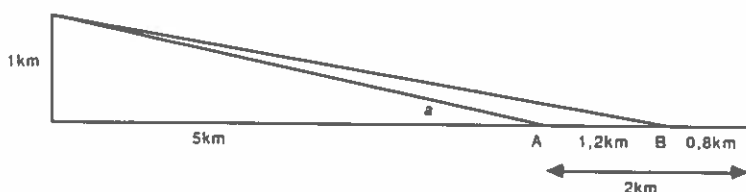


fig. 2.

'Het vliegtuig moet tussen punt A en punt B neerkomen.

Bij punt A hoort een hoek α van 11° , $\tan \alpha = 1 : 5$, α is ongeveer 11°

Bij punt B hoort een hoek α van 9° , $\tan \alpha = 1 : 6,2$, α is ongeveer 9°

Hoek $\alpha = 10^\circ$. Dus het gaat goed.'

Dit is een goed voorbeeld van een context die een leerling geholpen heeft een bepaalde oplossing te vinden. Dit hoofdstuk gaat over de relatie tussen wiskunde en het gebruik van (niet-wiskundige) contexten.

Leerlingnabijheid

Een context moet aansluiten bij de beleavingswereld van de leerlingen. Of, wat op het zelfde neer komt, een context moet voor die leerlingen realistisch zijn. Realistische situaties kunnen echt gebeurd zijn, maar dat hoeft niet. Ze moeten voor leerlingen herkenbaar of voorstelbaar zijn, zodat ze zich in de situaties kunnen inleven. Het kan dan om hele gewone dingen gaan. Zo gaat het bij de kijkmeetkunde om het kijken. Hoe kijk je? Hoe komt het dat je ziet, wat je ziet? De context van het kijken ligt natuurlijk erg dichtbij. Datzelfde zien we bij het ontwikkelen van maatkennis. Hoeveel kilometer fiets jij in een uur? Wat stel jij je voor bij een meter, een liter? Ook hier als context heel gewone dingen en ervaringen.

Er was eens een boer die naar de hoefsmid ging om de hoefijzers van zijn paard te laten vernieuwen. De boer klaagde tegen de smid over de hoge prijzen die hij overal moest betalen.

'Bij mij kun je nog met centen terecht', zei de smid.

'Voor de eerste nagel, die ik voor de nieuwe hoefijzers gebruik, hoef je slechts 1 cent te betalen; voor de tweede nagel 2 cent, voor de derde 4 cent, voor de vierde 8 cent enz. De hoefijzers krijg je zelfs cadeau.'

De boer rekende snel uit dat hij voor de nagels van het eerste hoefijzer maar 31 cent moest betalen.

7 Hoeveel nagels gebruikte de smid voor het eerste hoefijzer?



'Afgesproken', zei de boer en vertrok. Onderweg rekende hij uit hoeveel hij voor de nagels van het tweede hoefijzer moest betalen.

8 Hoeveel was dat?

(Uit: *Exact*, deel 1, Meulenhof Educatief bv, Amsterdam 1986, pag.81.)

fig. 3

De context in figuur 3 is gekozen om het effect van voortgezette verdubbeling duidelijk te maken en een begin te maken met het begrip exponentiële groei.

Het realistische van contexten

Het laatste voorbeeld is een goede aanleiding om een misverstand te bespreken over realistisch wiskundeonderwijs en daarbij passende contexten. Men beweert wel eens dat een realistische situatie echt gebeurd moet (kunnen) zijn. Het voorbeeld van de hoefsmid laat zien dat dat niet het geval is. Het probleem komt niet uit de werkelijkheid, maar is wel voorstelbaar en inleefbaar. Bij een probleem uit de kijkmeetkunde vraagt een docent aan een leerling: 'Stel je voor dat je in de lucht zweeft en naar beneden kijkt. Wat zie je dan?'. Wanneer sprookjes of een fantasiewereld als context gebruikt worden, kunnen we in deze opvatting ook van een realistische context spreken; realistisch in de betekenis van herkenbaar en inleefbaar.

Leerlingen hebben soms wel even tijd nodig om zich in een situatie in te leven. De leerlingentekst en de docent moeten hen daartoe de gelegenheid geven. Bijvoorbeeld door een paar aspecten van de context ter sprake te brengen, die niet direct met de wiskundige inhoud ervan te maken hebben. Soms roept een context emotionele reacties op, die het leerproces belemmeren. Het volgende verhaal is daar een voorbeeld van.

Een docent wilde aannemelijk maken waarom het aftrekken van een negatief getal op hetzelfde neerkomt als het optellen met het tegengestelde. Daarbij werd gebruik gemaakt van een context waarbij straf- en bonuspunten kunnen worden uitgedeeld. In dat verhaal was er iemand die 'negatief stond' met vijf strafpunten. Door goed gedrag werden er drie strafpunten afgetrokken. Leerlingen begrepen allemaal, dat dat op hetzelfde neerkomt als het optellen van drie bonuspunten. Toen vroeg de docent wat er zou gebeuren als je van iemands puntenlijst van vijf strafpunten op zeker moment acht strafpunten zou aftrekken. Een leerling merkte op: 'Dat kan niet, als je maar vijf strafpunten hebt, kun je er niet acht aftrekken.' Zijn buurman kon helpen: 'Strafpunten wegnemen is toch net als bonuspunten geven.' Door de wiskundige termen 'optellen' en 'weghalen' weer in de context te plaatsen met 'geven en wegnemen' werd de emotionele blokkade opgeheven.

Geschikte contexten

Een geschikte context wordt zo gekozen dat het probleem er logisch uit voortvloeit. Dat leidt dan tot wiskunde. Tijdens het oplossen kan de context mee blijven spelen. Daar haalt de leerling aanwijzingen uit voor de voortgang van het oplossingsproces en de begripsvorming. Als de context uit het zicht verdwijnt, kan dat een aanwijzing zijn, dat

de leerling de context niet meer nodig heeft. De leerling heeft een wiskundig model gemaakt en is in staat binnen dat model verder te werken. Dat is niet altijd het geval, zoals blijkt uit de beantwoording van een andere opgave uit het experimenteel examen (fig.4).

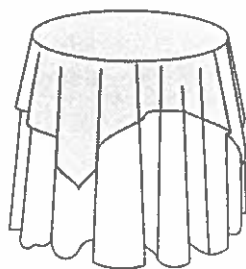
■ Opgave 4 Tafeltje met kleedjes

Tegenwoordig zie je veel bijzettafeltjes met een rond kleed en daaroverheen een vierkant kleed. Zulke kleden kun je zelf maken.

Katoenen stof 90 cm breed
f 14,95 per meter
Katoenen stof 180 cm breed
f 27,95 per meter
Sierband 2 cm breed
f 1,65 per meter

Bij het kopen worden stof en band afgeknipt op lengten van 10 cm. Als je bijvoorbeeld 45 cm wilt, moet je 50 cm kopen.

figuur



Marja heeft ook een rond bijzettafeltje: hoogte 60 cm, diameter blad 50 cm.

Marja gaat stof kopen om zelf een rond kleed te maken. Het kleed moet precies tot op de vloer komen. Het moet gemaakt worden uit één stuk stof en zo voordelig mogelijk. In het kleed moet een zoom komen van 1 cm.

- 8 ☐ Bereken hoeveel stof Marja moet kopen en hoeveel geld ze daarvoor kwijt is.

Marja wil sierband langs de zoom van het ronde kleed naaien.

- 9 ☐ Bereken hoeveel cm sierband ze moet kopen en hoeveel ze daarvoor moet betalen.

Op het ronde tafelkleed hoort een vierkant kleedje te liggen. Zie bovenstaande tekening.

Marja wil zo'n kleedje maken waarbij de vier punten 40 cm boven de vloer komen te hangen.

- 10 ☐ Bereken welke afmetingen het kleedje moet krijgen.

fig. 4

Een leerling gaf bij vraag 9 als antwoord: '110 cm, want het is 50 cm + 60 cm.' Op de vraag, hoe zij aan dat antwoord kwam, zei ze: 'Maar je moet toch elk getal een keer gebruiken'. De context was op de achtergrond geraakt. De leerling was in de wiskunde verdwaald en gebruikte daarom een zelfgemaakte rekenregel, die bovendien nog onjuist was ook. Ook was daardoor de zoom van het kleedje vergeten. Anderen gebruikten juist de context, zoals bij: 'Een zijkant, dat is 60 cm, dan de bovenkant van de tafel, dat is 50 cm erbij en dan de andere kant, nog 60 cm erbij.' Een paar leerlingen verloren toen de context uit het oog en telden nog 1 cm, in plaats van 2 cm bij de 170 cm op.

Het zou interessant zijn te onderzoeken hoe de leerlingen die het goede antwoord gaven, gedacht hebben. Het is heel goed denkbaar, dat een aantal van hen niet het meetkundige model van een cirkel voor ogen hadden, maar geheel vanuit de context redeneerden: '50 cm, aan beide kanten 60 cm plus de zoom van 1 cm erbij, samen 172 cm'. We kunnen ons voorstellen dat zij pas bij vraag 10 op het idee kwamen van het cirkelmodel. Dat is bij die vraag ook pas echt nodig.

Samengevat:

Een geschikte context geeft gelegenheid het probleem op te lossen door zich in die context in te leven. Een context is meer dan alleen een leuke verpakking. Een context moet zo sterk zijn dat hij stand kan houden tijdens het hele oplossingsproces. Waar dit niet gebeurt kunnen makkelijk fouten ontstaan. Dat vasthouden van de context moeten leerlingen ook leren. Bij het inlevingsproces moet gelegenheid zijn eventuele belemmerende emotionele bindingen te vermijden of weg te halen.

De context als kapstok

Een leerling maakte op grond van gegevens uit een tekst de volgende tekening (fig.5).

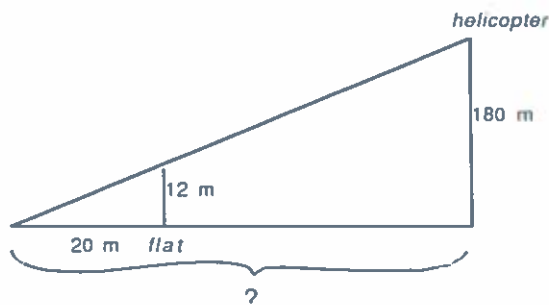


fig. 5

De leerling kon niet verder en zei: 'Ik snap dit niet.', waarop de leraar antwoordde: 'Dit gaat net als met die lamp, pop en schaduw.'

In dit voorbeeld werkte de context 'lamp-pop-schaduw' als een kapstok om het principe van gelijkvormigheid in de herinnering te roepen. Zoets is niets nieuws in het onderwijs. Veel docenten maken gebruik van zulke kapstokken. Zij helpen hun leerlingen met uitdrukkingen als: 'zandlopereigenschap' of 'zoals Marianne het deed'. Het helpt blijkbaar om te verwijzen naar iets wat dichterbij ligt dan een strikt wiskundige formulering. Het verhaal van de hoefsmid kan ook zo werken. 'Het groeit net als bij de hoefsmid.'

De context als aanleiding voor nieuwe begrippen

Bij het vraagstuk over de vliegtuiglanding ging het om het oplossen van een probleem met behulp van wiskundige begrippen die bij de leerling bekend werden verondersteld. Contexten worden ook gebruikt om de leerling nieuwe wiskundige zaken te leren. De volgende context werkt als brug tussen de werkelijkheid en wiskunde. Periodieke verschijnselen worden bestudeerd aan de hand van de getijdengrafiek die te zien is in figuur 6. Hierbij komt aan de orde hoe je de grafiek bij springvloed kan maken uitgaande van de gegeven grafiek van normaal tij. Dat komt neer op het uitrekken van de grafiek in verticale richting.

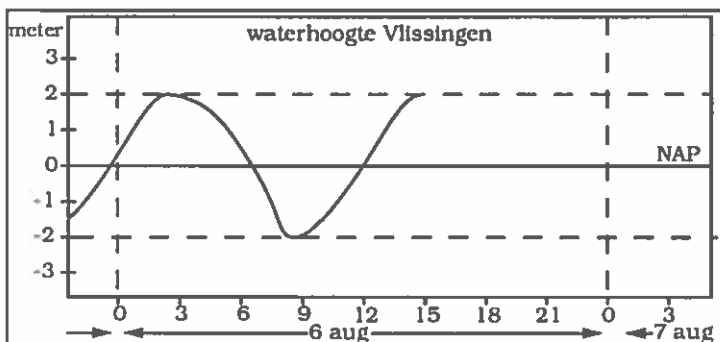


fig. 6

Samengevat: Leerlingen kunnen nieuwe wiskundige begrippen en technieken ontwikkelen aan de hand van contexten. Het is niet zo dat eerst de wiskunde wordt geleerd en dat die daarna op een context wordt toegepast. Deze contexten moeten dan wel wiskundige elementen bevatten.

Meer dan één aanpak mogelijk

Door contexten te kiezen waarbij leerlingen zich iets kunnen voorstellen, waarin ze zich kunnen inleven, wordt het mogelijk aan te sluiten bij (informele) kennis die de leerlingen al hebben.

Ze kunnen het gestelde probleem oplossen met die kennis en dichtbij de context. Een langere band met de realiteit van de context biedt mogelijkheid inzichtelijk te leren. Zo kan een leerling een tijdlang werken aan het oplossen van vergelijkingen waarbij de oplossingsmethode gestuurd wordt door en gebonden blijft aan de situatie. Een voorbeeld:

Anja en Karim sparen allebei. Anja heeft nu f 27,- in haar spaarpot en krijgt elke week f 4,50. Karim heeft f 36,- en krijgt elke week f 3,-. Na hoeveel weken hebben ze allebei evenveel geld gespaard?

Dit probleem kan heel goed opgelost worden door te werken met een tabel. Het kan ook met een redenering. Gebonden aan de situatie redeneren leerlingen bijvoorbeeld als volgt. Anja loopt nu f 9,- achter, maar ze haalt per week f 1,50 in. Dus na zes weken heeft ze haar achterstand weggewerkt.

Op een gegeven moment zal de leerling behoefte krijgen aan verkortingen. Uiteindelijk kan dit leiden tot een zelf ontwikkelde standaard-aanpak. Een voordeel bij deze werkwijze is dat een leerling altijd terug kan naar een minder formeel niveau en eventueel weer naar een situatiegebonden oplossingsprocedure.

De context stuurt het oplossingsproces en biedt gelegenheid bepaalde aanpakken te ontwikkelen. Goede contexten dwingen niet tot één vaste aanpak. De meer formele manier via het opstellen en oplossen van een eerste graads vergelijking is ook mogelijk. Formalisaties worden echter uitgesteld tot het moment waarop de leerling de overstep kan maken.

Vereenvoudiging van contexten

Bij het zoeken naar contexten vindt men vaak interessante problemen, die voor leerlingen te complex zijn. Soms komt dat doordat de wiskunde die ermee verband houdt te complex is. Andere keren doordat er niet-wiskundige begrippen nodig zijn, die nog te moeilijk zijn voor leerlingen. Dit kan ertoe leiden dat contexten vereenvoudigd moeten worden. In veel gevallen is deze vereenvoudiging toelaatbaar omdat het om modelvorming gaat. Zo is in het voorbeeld van de getijdenbeweging de grafiek in werkelijkheid veel grilliger. Het gaat echter om het periodieke karakter, de vereenvoudigde grafiek is daarvoor nog voldoende geloofwaardig als model van de werkelijkheid. Soms kan het gebeuren, dat de vereenvoudiging niet wordt geaccepteerd, omdat het zo niet gaat in de praktijk. De werkelijkheidswaarde is dan te klein geworden. Dat kan ook te maken hebben met emotionele bindingen aan een context.

Ook op andere manieren kan een te ingewikkelde, realistische context geschikt worden gemaakt voor gebruik in het onderwijs, bijvoorbeeld door tekstuele aanpassingen, het weglaten van overbodige informatie, toelichten van niet-wiskundige begrippen, stellen van leesvragen of andere vragen om de aandacht te richten op essentiële elementen uit de context.

Werken met contexten in de klas

Bij het werken met contextrijke wiskunde moet men met een aantal zaken rekening houden. Zo is het belangrijk om stil te staan bij het lezen van de context. Niet alleen bij het lezen op zich, maar meer nog bij het selecteren van relevante informatie, het onderscheiden van hoofd- en bijzaken. Hierbij kan het helpen de leerlingen in eigen

woorden de kern te laten samenvatten. Vaak komt in een context meer informatie voor dan strikt noodzakelijk is voor het oplossen van het probleem.

Het omgekeerde is ook vaak het geval: de informatie die gegeven wordt is onvoldoende om het probleem op te lossen. Er wordt dan van leerlingen verwacht ontbrekende gegevens aan te vullen. Hierbij wordt soms een beroep gedaan op hun maatkennis en algemene ontwikkeling. Het probleem uit het volgende voorbeeld is alleen oplosbaar als je gebruikt maakt van het feit dat Nederland ongeveer 15 miljoen inwoners heeft (fig.7). Dit moet je dan wel weten. Niet alle leerlingen beschikken over dit soort kennis; reden te meer om daar in het onderwijs af en toe aandacht aan te besteden.

De actie 'Help de Russen de winter door!' bracht vorig jaar 20 miljoen gulden op. Van tevoren had minister Bukman afgesproken dat de regering aan elke gulden die werd gegeven, een kwartje zou bijdragen.

17. Neem aan dat dat extra kwartje nog niet bij de opbrengst was meegeteld. Hoeveel moest de minister bijdragen?

18. Neem aan dat dat extra kwartje wél bij de opbrengst was meegeteld. Hoeveel geld heeft de minister dan bijgedragen?

19. Er is 20 miljoen gulden beschikbaar voor de hele Russische bevolking. Hoeveel is er volgens jou dan beschikbaar per inwoner?

Kies uit:

–10 cent per inwoner

–1 gulden per inwoner

–10 gulden per inwoner.

Verklaar je keuze.

fig. 7

Op de tweede plaats is het belangrijk aandacht te besteden aan de overgang van context naar model en terug. Bij het oplossen van een contextprobleem komt het vaak voor dat het probleem wordt vertaald zodat het met wiskundige technieken oplosbaar wordt. Je moet daarbij los komen van de context, maar deze wel in de gaten houden. Dat werd duidelijk in het voorbeeld met het tafelkleed. Vaak moeten de gevonden resultaten van berekeningen of redeneringen weer terugvertaald worden naar de context.

Men moet bedacht zijn op problemen die te maken hebben met denkbeeldige uitbreidingen, die in de werkelijkheid niet zullen voor komen (fig.8).

Om te bepalen wie de beste schutter is, kunnen de verhoudingen vergeleken worden tussen het aantal doelpunten en het aantal wedstrijden van beide spelers. Dit gaat makkelijk door te vergroten. Voor sommige leerlingen is dit een barrière omdat 'de spelers niet echt zoveel doelpunten hebben gemaakt'. In dit verband is het wel een acceptabele methode.

- 1 Van Basten scoorde 5 doelpunten in 4 wedstrijden.
 Bergkamp scoorde 7 doelpunten in 6 wedstrijden.
 >> Wie is de beste doelpuntenmaker?
 Je kunt tabellen maken.

doelpunten	5	
wedstrijden	4	

fig. 8

In het volgende voorbeeld (fig.9) is bezinning aan het eind gewenst. Vandaar dat de laatste vraag is opgenomen.

- Nelli Cooman liep de 60 m in ruim 7 seconden.
 >> Reken met de tabel uit hoeveel dat ongeveer is in 1 minuut.



Het was 60 meter in ruim 7 seconden.
 Als je de snelheid per minuut afrondt op een mooi getal.
 Hoeveel meter loopt Nelli dan in 1 minuut?
 Nelli loopt ongeveer meter per minuut.
 Hoeveel wordt dat per uur?



- Nelli loopt ongeveer km per uur.
 >> Waarom zouden we Nelli Cooman de 3000 m niet laten lopen?

fig. 9

Ten slotte kan een context ook wel eens in het nadeel van bepaalde leerlingen werken. Bijvoorbeeld als de context de leerlingen niet aansprekt of zelfs tegenstaat, of als de context voor hen niet voorstelbaar of inleefbaar is. We gaven al een paar voorbeelden. Andere voorbeelden van dergelijke contexten zijn: de competitiestand bij voetbal, ernstige ziekten, etnische achtergrond, eigen lengte en/of gewicht, gezinssituatie. Het is een belangrijke taak voor schoolboekauteurs er voor te zorgen dat de contexten uit diverse terreinen afkomstig zijn, zodat elke leerling eens een context tegenkomt die extra aansprekt. In de klas kan men proberen dergelijke problemen op te lossen door een context toe te lichten of te bespreken.

Leren door doen

Het principe van leren door doen is in feite al zo oud als de wereld. Je kunt iets nieuws leren door dingen te doen, door erover te praten en door erover na te denken. Vooral als het gaat om het leren van abstracte begrippen hebben veel mensen er baat bij om eerst een tijdje met de handen te werken. En niet alleen de handen, mensen gebruiken hun hele lichaam om dingen te leren.

Werken met concrete materialen is niet iets enkel voor zwakke leerlingen. Ook leerlingen die snel en gemakkelijk leren hebben er vaak plezier in eerst iets concreets te doen. Zelfs mensen die al een behoorlijke denktraining hebben gehad, hebben dikwijls behoefte aan een (korte) start met handelen. Dat blijkt bijvoorbeeld uit het verschijnsel, dat zij een wiskundig probleem eerst overschrijven, voordat ze beginnen met een poging tot oplossen. Iemand geeft zichzelf zo de gelegenheid zich op het probleem te concentreren.

Goed gekozen concrete materialen, met opdrachten die leerlingen stimuleren hun handen te gebruiken, zijn uitstekende hulpmiddelen bij het leren van abstracte begrippen. Ze roepen vragen op en bevorderen daarmee een onderzoekende wiskundige houding.

Het valt niet altijd mee de overgang te maken van het werken met concrete materialen naar het denken in abstracties. Leraren kunnen hun leerlingen daarbij helpen door hen te vragen gebruik te maken van een tussenstadium, waarbij leerlingen zich een bepaalde handeling voorstellen. Dat kan trouwens ook een goede start te zijn bij het leren van begrippen. Er hardop bij praten blijkt ook een belangrijke steun te zijn.

Voordelen van materiaalgebruik

Behalve dat concreet handelen het denken ondersteunt en ontwikkelt, biedt het nog andere voordelen. Zo is er onmiddellijke controle mee mogelijk. Om te bepalen of een uitslag er inderdaad een is van een kubus, werkt het uitknippen en in elkaar vouwen als snel en zeker controlemiddel.

Het volgende vraagstuk (fig. 10) is erg lastig als je het uitsluitend mentaal wilt oplossen.

Je ziet hier het vooraanzicht en het rechterzij aanzicht van een blokkenbouwsel.

Je kunt verschillende bouwsels maken bij deze aanzichten.

Teken een bovenaanzicht van een ervan.

Wat is het grootste aantal blokken waarmee je zo'n bouwsel kunt bouwen?

Wat is het kleinste aantal?



fig. 10

Door met blokjes te bouwen wordt het veel toegankelijker. Het werken met blokjes ondersteunt het redeneren.

Snelle feed-back stimuleert het leerproces. Concreet handelen geeft die feed-back. Je ziet meteen of het klopt of niet. En als het niet klopt krijg je een aanwijzing voor verbetering. Die aanwijzing krijg je niet van een ander, maar je vindt hem zelf. Dat is goed voor de begripsontwikkeling en het zelfvertrouwen.

Concreet handelen bevordert het samenwerken en ook dat heeft een gunstige invloed op leren. Uitsluitend mentaal handelen is voor anderen niet te volgen, je merkt niet hoe het denkproces verloopt, tenzij er hardop wordt gedacht. Als je knipt, plakt of beweegt, zie je niet alleen zelf of het klopt wat je doet. Ook anderen zien dat. Daar kan dan verder over gepraat en gedacht worden.

Ten slotte biedt concreet handelen de mogelijkheid om gesproken of geschreven taal te omzeilen. Het is voor sommige leerlingen heel prettig als ze iets kunnen demonstreren in plaats van het uit te moeten leggen. Vooral voor een nieuw begrip is het dikwijls moeilijk er de geschikte woorden voor te vinden. Doordat je eerst met je handen kunt werken, wordt je geleidelijk in staat gesteld, al dan niet met hulp van anderen, je bedoelingen in taal uit te drukken.

Concreet handelen en het leerplan

In het leerplan is het werken met concrete materialen overal terug te vinden, op alle niveaus en voor alle leerjaren. Om de uitvoering daarvan op school te vergemakkelijken is het belangrijk een wiskunde-werklokaal te hebben. In hoofdstuk 3 is daar meer over te lezen. Ook op schoolonderzoeken en examens moeten leerlingen gelegenheid krijgen concreet te handelen.

De volgende examenopgave uit het experimentele examen van 1992, geeft daar alle aanleiding toe (fig. 11).

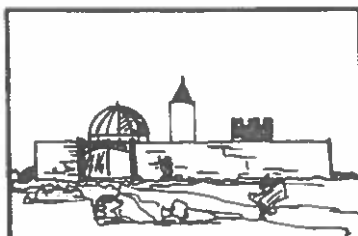
Door de aanzichten uit te knippen en op de juiste plaats rond de plattegrond van het stadje te leggen, kan de plaats van de torens geconstrueerd worden. De aanzichten stonden echter alleen in de opgave en niet op een apart werkblad. Uitknippen was niet mogelijk. Hier was concreet handelen op zijn plaats geweest.

Bepaalde onderwerpen en activiteiten kunnen het beste op de schoolonderzoek getoetst worden. Daar kan een keur aan materialen gebruikt worden, bijvoorbeeld voor het bouwen van modellen.

■ Opgave 6 Het stadje Horn

Graaf Floris is op weg om het stadje Horn te veroveren. Hij wil graag weten hoe de plattegrond eruit ziet. Daarom heeft hij drie spionnen vooruit gestuurd. De spion die vanuit het westen naar Horn keek, maakte deze tekening:

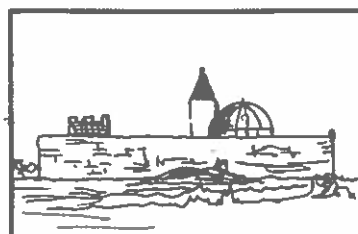
figuur



Horn vanuit het westen

De spion die vanuit het noordoosten keek, tekende:

figuur



Horn vanuit het noordoosten

De derde spion keek vanuit het zuiden, maar die spion is nog niet terug. „Die tekening maak ik dan zelf wel”, zei Floris.

Op de bijlage bij vraag 16 zie je dat de ronde muur van het stadje Horn al getekend is.

- 16 □ Laat met een tekening op de bijlage zien hoe je de juiste plaats van de drie toren van Horn kunt vinden.
Zet een G op de plaats van de gekartelde toren;
zet een B op de plaats van de bolvormige toren;
zet een P op de plaats van de puntige toren.

fig. 11

De computer

Tot slot willen we ingaan op de rol van de computer in verband met leren door doen. De computer kan gebruikt worden als een soort tussenstadium tussen concreet handelen en denken zonder gebruik van materiaal.

Er zijn bijvoorbeeld programma's die de leerlingen gelegenheid bieden te manipuleren met afbeeldingen van ruimtelijke voorwerpen. Voorwerpen kunnen worden gedraaid, vergroot, verkleind en doorsneden. Een bijkomend voordeel is dat de computer processen omkeerbaar maakt. Een kubus die in werkelijkheid wordt doorsneden, kun je niet opnieuw in een andere richting doorsnijden. Dan heb je een nieuwe kubus nodig. Op het scherm kun je een doorsnede weer laten verdwijnen, als je er niet tevreden over bent en het eens anders proberen. De kubussen raken nooit op. Toch blijven het natuurlijk platte afbeeldingen op het scherm. Daarom is het wenselijk voor de ontwikkeling van ruimtelijk inzicht dat leerlingen nog lange tijd naast het programma concrete materialen bij de hand te hebben.

Ook software bij algebra biedt de mogelijkheid op een min of meer concreet niveau bezig te zijn. Zo zijn er grafische programma's waarmee grafieken kunnen worden gemaakt en vervormd. Er kan worden ingezoomd op bepaalde onderdelen. De grafieken zijn zo als het ware concreet manipuleerbaar materiaal geworden. Het is een goede gedachte een van de schoolonderzoeken zo te ontwerpen dat daarbij de computer nodig is.

Inzicht en oefenen

Veel problemen kunnen niet of moeilijk worden opgelost, als leerlingen geen inzicht hebben in de aard van dat probleem en in de daarbij in aanmerking komende wiskundige begrippen en methodieken. Om dat inzicht te bereiken moeten zij noodzakelijk bepaalde handelingen vaardig kunnen uitvoeren. Wie bijvoorbeeld niet goed kan optellen en vermenigvuldigen, zal moeite hebben met schatten. Kun je niet substitueren dan kom je bij het oplossen van sommige vraagstukken in moeilijkheden.

In het onderwijs, ook het onderwijs dat ons bij het nieuwe leerplan voor ogen staat, wordt steeds gezocht naar een goede samenhang tussen kennis, inzicht en vaardigheden. Doordat in gesprekken en publicaties over het nieuwe leerplan zoveel nadruk gelegd wordt op het ontwikkelen van inzicht en op het gebruiken daarvan, vroe een aantal docenten zich bezorgd af hoe het zit met oefenen en het opdoen van vaardigheden. Hoe verhoudt zich dat tot het ontwikkelen van inzicht en het inzichtelijk werken? Worden er nog wel automatismen ontwikkeld?

Dit gedeelte gaat over de samenhang tussen inzicht en automatismen. We willen laten zien, dat het nieuwe leerplan ruim de mogelijkheid geeft tot het ontwikkelen van automatismen, die zinvol zijn en passen in de bedoelingen van het leerplan.

Twée uitersten

Om duidelijk te maken wat we bedoelen stellen we allereerst twee soorten automatismen tegenover elkaar. We willen spreken over vaardigheid als het gaat over een automatisme die met inzicht gebruikt wordt, en over trucs als routine als die klakkeloos toegepast wordt. Hier volgt een voorbeeld uit een brugklas van het vbo (fig. 12)

8. De jong belegen kaas kost 90 cent per 100 gram.

>> Vul de prijzentabel in:

gewicht	100	150	200	250	300	350
prijs		90				

9. De fricandeau kost f 1,25 per 50 gram.

>> Hoeveel moet je betalen voor 350 gram?

Maak een tabel.

gewicht	50					
prijs	125					

fig. 12

Lukresa gaat verdubbelen:

gewicht	50	100	200	400	800		
prijs	125	250	500	1000	2000		

Ze zou de hele tabel hebben volgeschreven als een medeleerling niet had ingegrepen: 'Je hebt veel te veel, je hoeft maar tot 350.' Lukresa kan geroutineerd verdubbelen. Ze toont echter geen inzicht. De regel 'verdubbelen' gebruikt ze als trucmatige routine. Je kunt hier spreken van klakkeleze kennis.

Het is de vraag of Elise met inzicht te werk is gegaan:

gewicht	50	100	150	200	250	300	350
prijs	125	250	375	500	625	750	875

Het kan zijn dat ze klakkeleze de bovenregel van de tabel uit opdracht 8 kopieerde in plaats dat ze met inzicht het gestelde probleem oploste. Het is de vraag of ze ook zo zal handelen als haar gevraagd wordt naar de prijs van 325 gram of 275 gram.

Bij de andere leerlingen denken we dat er sprake is van echte vaardigheid, dat wil zeggen gebaseerd op inzicht. Dat leiden we af uit de wijze van oplossen.

Inge:

gewicht	50	100	200	400	350		
prijs	125	250	500	1000	875		

Kristien:

gewicht	50	100	200	300		350	
prijs	125	250	500	750		875	

Voor alle duidelijkheid: het gaat hier niet over de keuze van de tabel om het probleem op te lossen, want dat is in de opgave voorgeschreven. We letten alleen op de manier waarop de tabel ingevuld werd.

De vraag kan nu gesteld worden waarom we bij de een niet van vaardigheid spreken, bij de tweede twijfelen en bij de anderen vermoeden dat er wel sprake was van vaardigheid. Daarover gaat de volgende paragraaf.

Hoe kunnen we vaardigheid constateren?

Een van de kenmerken van routine is de snelheid waarmee iemand iets doet. Je hebt routine als je een handeling binnen een zekere tijd kunt uitvoeren. Die tijd is minder, liefst aanzienlijk minder dan wanneer je het zonder routine moet doen.

Maar snelheid alleen is niet kenmerkend voor vaardige routine. Daar bleek hierboven bij Lukresa. Er komt ook inzicht aan te pas. Hoe kunnen we zien (of minstens vermoeden) dat er sprake is van inzicht? Het tonen van inzicht heeft de volgende kenmerken:

- iemand handelt in een voor hem/haar betrekkelijk nieuwe situatie,
- hij/zij handelt adequaat,
- hij/zij handelt intentioneel.

Het eerste kenmerk is duidelijk. Bij routinehandelingen wordt inzicht niet getoond. Dat wil helemaal niet zeggen, dat iemand geen inzicht zou hebben, maar bij routinehandelingen blijkt dat niet. Voor alle vier de leerlingen was de fricandeauvraag wel een beetje nieuw, omdat, in tegenstelling tot de vorige opgave, de bovenregel van de tabel niet ingevuld was.

Het tweede kenmerk is ook te begrijpen. Als iemand bij een probleem hulpmiddelen gebruikt, die niet of op een zeer omslachtige manier tot de oplossing leiden, dan handelt zo iemand niet adequaat. In het voorbeeld van de fricandeaau was dat het geval met Lukresa. De anderen handelden wel adequaat.

Het derde kenmerk is ook redelijk. Al handelt een leerling in een nieuwe situatie adequaat, dan nog kan de oplossing toevallig gekozen zijn. Of omdat de leerling denkt dat de docent dat verwacht. Doordat in beide opgaven gevraagd werd naar 350 gram is het mogelijk dat Elise het schema van opgave 8 klakkeloos overnam. In dat geval handelde ze niet intentioneel. Het is natuurlijk ook mogelijk, dat ze wel bewust tot overschrijven besloot, omdat ze inzag dat het schema van vraag 8 bruikbaar is voor vraag 9. In dat geval handelde ze wel intentioneel.

We geloven dat Inge en Kristien intentioneel handelden, maar zekerheid hebben we op grond van de informatie natuurlijk niet.

Onder de kop Contexten gaven we bij het examenvraagstuk van de vliegtuigdaling een voorbeeld dat alledrie de kenmerken van inzicht heeft.

Zone van naaste ontwikkeling

Kunnen constateren of iemand vaardig kan handelen is nodig, maar niet genoeg, althans in het onderwijs. Er moet ook gewerkt worden aan het verwerven van vaardigheden.

Veel leerpsychologen hebben zich daarmee bezig gehouden. Eer ervan is de Russische psycholoog Vigotskij (1986-1934), die het begrip zone van naaste ontwikkeling gebruikte om inzichtelijk leren te beschrijven. We gaan wat dieper op dit begrip in, omdat het niet alleen theoretisch van waarde is, maar ook in de praktijk van het onderwijs kan worden gebruikt.

Vigotskij onderscheidde in feite twee gebieden van kennis. Het ene

gebied bevat kennis waar iemand zich bewust van is. Voorbeelden:

Kristien weet hoe zij bij berekeningen over evenredige verhoudingen een tabel kan gebruiken met verdubbelen en optellen.

Gerard is vergeten hoe hij een zakrekenmachine moet bedienen, maar weet wel waar hij dat kan opzoeken.

Daarnaast bezit iedereen informatie waar hij of zij zich niet bewust van is. Zulke informatie kan alleen naar voren komen met hulp van anderen, bijvoorbeeld een leraar of een boekenschrijver, of door een toevallige waarneming: 'Dat komt me bekend voor, waar heb ik dat meer gezien?' Het geheel van dat soort onbewuste informatie noemde Vigotskiï de zone van naaste ontwikkeling.

De consequentie hiervan voor het onderwijs is tweeledig.

Eenzijds kan een docent gebruik maken van de zone van naaste ontwikkeling door in het onderwijs rekening te houden met wat de leerlingen eigenlijk voor een deel al weten.

De opvatting over realistisch wiskundeonderwijs, dat aangesloten moet worden bij de beleevingswereld van de leerlingen, stemt hiermee overeen.

Anderzijds heeft het onderwijs ook tot taak ervoor te zorgen dat de zone van naaste ontwikkeling gevoeld wordt met nieuwe informatie. Een en ander houdt in dat ontwerpers van onderwijs (leraren, schrijvers, leerplanontwikkelaars) er rekening mee moeten houden dat leerlingen in aanraking komen met zaken waar zij van alles mee moeten doen en waarbij zij ook onbewust kunnen leren. Later in de leerang komen dan activiteiten waarbij die kennis bewust gemaakt wordt. Dit anticiperen op latere leeractiviteiten kunnen we het laden van de zone van naaste ontwikkeling noemen. De nieuwe begrippen worden in de week gelegd. We geven een paar voorbeelden.

- Door in de eerste jaren veel met tabellen, met samenhangende reeksen getallen, met woordvariabelen te werken, allemaal in realistische contexten, worden leerlingen voorbereid op het formele begrip variabele en op formules die geen directe relatie hebben met een niet-wiskundig probleem.
- Het begrip evenredigheid kan worden voorbereid door leerlingen in allerlei situaties te brengen waarbij verschillende hoeveelheden op de een of andere manier toch hetzelfde zijn. ('Iemand betaalde f 8,75 voor 350 gram kaas, een ander betaalde f 2,50 voor 100 gram kaas. Betaalden zij evenveel voor de kaas?' 'Zijn deze twee foto's vergrotingen van hetzelfde negatief?')

Naast de leerlingenpakketten van het team 12-16 zijn momenteel methoden voor het wiskundeonderwijs op de markt waarin bewust aandacht geschonken wordt aan het in de week leggen van begrippen, die leerlingen later zullen gaan leren.

We kunnen hier ook wijzen op de rol van knippen en plakken. Door dit soort activiteiten wordt, uiteraard bij geschikt gekozen opdrachten, de zone van naaste ontwikkeling geladen. Leerlingen leren veel onbewust, waar later gebruikt van kan worden gemaakt. Niet voor niets wordt door de ontwikkelaars van de nieuwe leerplannen zo'n grote waarde gehecht aan het wiskundewerklokaal.

Het idee van de zone van naaste ontwikkeling levert een didactisch nuttige methodiek voor inzichtbevorderend leren. Voor Vigotskiï is er meer aan vast. Volgens hem heeft het onderwijs niet de taak kinderen dingen te onderwijzen, die ze al weten, maar moet het onderwijs steeds aangrijpen op de zone van naaste ontwikkeling; het moet het kind daar helpen waar het de hulp van de volwassenen nodig heeft. Het onderwijs moet op de (cognitieve) ontwikkeling van het kind vooruitlopen en deze stimuleren.

Uit de kenmerken van vaardigheden kunnen we in samenhang met het idee van zone van naaste ontwikkeling afleiden wat een manier kan zijn om leerlingen zover te brengen dat ze geroutineerd en met inzicht de hun aangeboden problemen kunnen oplossen.

- Het kenmerk snelheid geeft aan, dat er veel geoefend moet worden.
- Het kenmerk van de nieuwe situatie houdt in dat die oefeninge-gevarieerd van aard moeten zijn. Veel oefeningen die teveel op elkaar lijken, doen de aandacht voor de bedoeling van de handelen verslappen, waardoor die op den duur vergeten kan worden.
- De kenmerken adequaat en intentioneel betekenen, dat er ook tijdens de oefenperiode regelmatig gesproken en nagedacht moet worden over de vraag of een bepaalde handeling wel het bedoelde resultaat geeft. Variatie in de soort oefening kan daar een goede aanleiding voor zijn.
- Gebruik maken van de zone van naaste ontwikkeling betekent dat allerlei handelingen niet te snel moeten worden aangeleerd. Er moet gelegenheid zijn voor het in de week leggen. Als de zone van naaste ontwikkeling voldoende geladen is, komen leerlingen vanzelf tot bepaalde verkortingen. Hierboven zijn daar al voorbeelden van gegeven.

Een haast klassiek voorbeeld is het begrip exponent. Voor de ontwikkeling van inzichtelijke routine bij het manipuleren met expressies als a^8 , y^3 , $(c-4)^4$ heeft het zijn leerlingen nog een tijd te laten werken met:

$$a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a,$$

$$y \times y \times y,$$

$$(c-4) \times (c-4) \times (c-4) \times (c-4).$$

Bij methoden als deze gaat het erom leerlingen lange tijd de gelegenheid te geven een handeling uit te voeren die op dat moment het beste bij hen past. Op den duur gaat het kind zelf verkortingen uitvoeren, of het reageert positief op een suggestie van de leraar. Deze methode, progressief matematiseren genoemd, resulteert erin, dat leerlingen op den duur inzichtelijke routines verwerven. Op het eerste gezicht lijkt het erop dat het veel langer duurt voordat de leerlingen routine in een bepaald algoritme hebben. Onderzoek over staartdelingen en breukrekenen op de basisschool toont aan dat dat slechts een schijnbaar bezwaar is. Leerlingen die een bepaald algoritme heel snel moeten inoefenen hebben ook zeer veel oefentijd nodig, als was het alleen maar omdat zij het telkens weer vergeten. Of omdat zij bij nieuwe situaties weer moeten leren een al bekend automatisme toe te passen. De methode van progressief matematiseren is ook toegepast in het leren rekenen met formules.

In het begin rekenen leerlingen met vuistregels. Deze zijn sterk context-gebonden. De vuistregels worden vervolgens een beetje geformaliseerd tot formules met woordvariabelen. Bij het werken met woordvariabelen zullen veel leerlingen op den duur behoefte krijgen aan verkortingen. Liever werken met p dan met prijs. Liever met b dan met beginkapitaal. Daardoor ontstaan korte overzichtelijke formules, waarvan de betekenis goed begrepen wordt. De verkortingen worden ingevoerd op het moment dat de leerlingen er aan toe zijn. Of anders gezegd: op het moment, dat bij hen de zone van naaste ontwikkeling zover geladen is, dat de verkorte notatie niet uit de lucht komt vallen. Bij het omgaan met dergelijke formules kan de binding aan de context geleidelijk aan los gelaten worden. Dat leidt dan tot het rekenen met abstracte formules zonder binding aan een of andere context. Dit proces van vuistregel tot abstracte formule kan enkele maanden of enkele jaren beslaan. Dat hangt af van het niveau waarop de leerlingen zelf kunnen werken.

Voor- en nadelen van het leren van vaardigheden

We komen hiermee aan een opsomming van een aantal voordelen van het hebben van vaardigheid.

- Bij vaardigheden handelt iemand met inzicht, dat wil zeggen dat zo iemand in een nieuwe situatie adequaat en intentioneel kan handelen. Daardoor is diens kennis ruimer toepasbaar dan bij trucmatige routine het geval is.
- Bij vaardigheden kan iemand binnen een redelijke tijd tot oplossing van een probleem komen. Wie lang over de oplossing van een probleem moet doen raakt gemakkelijk ontmoedigd en gedemotiveerd. Afgezien nog van het praktische probleem dat huiswerk, het proefwerk, het examen niet bevredigend gemaakt kan worden.
- Men hoeft niet zoveel te onthouden. Hoe meer trucmatige routine

men heeft, hoe meer men voor elke andere situatie afzonderlijk automatismen moet aanleren. Men is niet in staat bepaalde kennis uit andere kennis af te leiden en toe te passen en moet daarvoor meer uit het hoofd leren.

- Men kan zijn kennis ook langer en gemakkelijker onthouden. Het is een bekend feit, dat kennis die op inzicht berust langer en gemakkelijker onthouden kan worden, dan klakkeloze kennis waar bij geen verbanden tussen de verschillende gebieden worden gezien. Veel klachten over leerlingen in het voortgezet onderwijs die 'na de basisschool niet meer kunnen rekenen' en over studenten die 'die na de mavo niets meer van de algebra weten' komen hier uit voort.
- Er is minder kans op fouten. Doordat men adequaat en intentioneel kan handelen loopt men niet de kans bepaalde kennis op een verkeerde manier toe te passen.

Er zitten aan het verwerven van vaardigheden ook nadelen verbonden. Het leren met inzicht, en dus ook het verwerven van een bepaalde vaardigheid neemt meer tijd, dan het leren van een klakkeloze routine. Als iemand voor een bepaalde werkzaamheid weinig of niet gevarieerd hoeft te handelen, kan het doelmatiger zijn zo iemand een truc te leren, dan een vaardigheid. Dit is echter geen doel van het wiskundeonderwijs. Bovendien zouden er in het onderwijs een groot aantal trucs geleerd moeten worden, bij elke truc zou geleerd moeten worden wanneer hij wel en wanneer hij niet gebruikt moet worden en een en ander zou nog heel vaak moeten worden gerepeteerd. Het toelaan aan tijd zou dan wel eens groter uit kunnen vallen dan bij de lange aanloop van het leren met inzicht.

Slotopmerkingen

De hierboven gegeven analyse zal voor de meeste leraren weinig nieuws bevatten. We verwachten dat lezers zullen reageren met opmerkingen als: 'Dat doe ik al in mijn onderwijs.' We hopen dat veel lezers aan hun opmerking iets toe zullen voegen als: 'Maar zo heb ik het nog nooit bekeken en daardoor kan ik nog wat bewuster aan mijn didactiek werken.' Daaruit zal dan blijken dat de zone van naastontwikkeling ook bij hen aanwezig is.

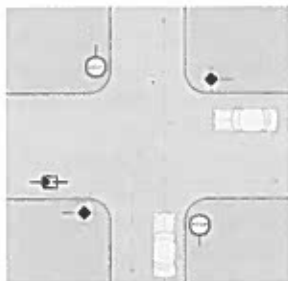
Het ging steeds om elementaire vaardigheden die we allemaal wel kennen, zoals rekenen met verhoudingen, invullen van een tabel, oplossen van vergelijkingsvraagstukken, tekenen van een grafiek, substitueren van getallen voor de variabelen in formules, enzovoort.

Daarnaast zijn er ook andersoortige vaardigheden, die we kunnen karakteriseren als manieren van aanpak: Welke strategie gebruik ik? Maak ik een plaatje? Gebruik ik de formule of is een tabel hier handiger? Welke gegevens zijn nodig en hoe moet ik ze combineren? Kan ik hier een verhoudingstabel gebruiken?

In het verleden werd het aan docenten overgelaten over het onderwijzen van dit soort vaardigheden na te denken. In het nieuwe leerplan wordt er expliciet aandacht aan besteed en dat zal ook gevolgen hebben voor de manier van toetsen en examineren. Er zullen veel minder dan voorheen standaardvragen voorkomen. Het klakkeloos toepassen van standaardalgoritmen levert dan weinig op. Dat betekent dat de leerlingen ook getraind moeten worden in de manieren waarop ze problemen aan kunnen pakken. Dat zijn ook vaardigheden waar op geoefend moet worden.

Redeneren

In het verkeer kan goed redeneren van levensbelang zijn. Wie heeft e voorrang in onderstaande verkeerssituatie (fig.13)?



(Uit: *Exact*, deel 3, Meulenhof Educatief bv, Amsterdam 1989, pag.143.)

fig. 13

Wiskunde is van oudsher onverbrekkelijk verbonden met (logisch) redeneren. In het verleden werd wiskunde wel aanbevolen als school vak omdat men daar logisch van zou leren denken. Ervaring en onderzoek heeft allang aangetoond, dat er niet zonder meer vanuit gegaan mag worden, dat dat van invloed zou zijn op gedrag buiten het vak. Er is geen automatische transfer. Daar moet expliciet aandacht aan worden besteed.

Door de grote aandacht die in het nieuwe programma wordt besteed aan niet-wiskundige contexten is er gelegenheid om special aandacht te besteden aan het buiten de wiskunde leren gebruiken van bepaalde vaardigheden die in het wiskundeonderwijs geleerd worden. Het gebruik van contexten maakt dat veel informeel geredeneerd wordt. Daarmee bedoelen we een soort dagelijks-gebruik-redeneren waarbij, in tegenstelling tot het formeel-logische redeneren

- niet volgens strakke regels wordt geredeneerd,
- niet uitsluitend uitgegaan wordt van vooraf afgesproken vooronderstellingen,
- men zich niet voortdurend bewust is van redeneerregels en vooronderstellingen.

Men kan zich afvragen of door de grote aandacht, die dit dagelijks gebruik-redeneren gaat krijgen, het formeel-logische redeneren (be wijzen) niet op de achtergrond raakt. Deze zorg delen we niet, als e zorgvuldig bij alle schooltypen en alle leerjaren wordt nagegaan i hoeverre het redeneren expliciet aandacht moet krijgen.

Vanuit deze overwegingen maken we hier een paar praktische, didactische opmerkingen over redeneervaardigheden in het wiskunde onderwijs.

Wanneer is er sprake van redeneren?

Redeneren is geen synoniem voor bewijzen. Verstandig argumenteren op grond van voors en tegens is ook redeneren. Jezelf afvragen hoe je, binnen een gegeven context, een probleem het best kunt aanpakken is ook redeneren. Hetzelfde geldt voor het concluderen, dat een bepaalde uitkomst binnen een gegeven context niet zinvol is. Opvallend is hoe vaak er in het dagelijks taalgebruik de uitdrukking 'Dat is toch logisch' gebruikt wordt in situaties waarbij het beslist niet om formeel-logische uitspraken gaat, maar om gevoelsmatige vanzelfsprekendheden.

We zullen daarom het woord redeneren verder gebruiken als een algemene aanduiding van een bepaald soort activiteit. We zullen geen poging doen deze activiteit te definiëren, maar zullen in het volgende door beschrijvingen duidelijk maken wat we bedoelen.

Uitdrukkingen die iets te maken hebben met redeneren treden vooral in paren op:

argumenteren	- deduceren
vermoedens	- stellingen
contextgebonden	- formeel
sociaal	- objectief
toetsen	- aantonen en weerleggen
impliciete aannames	- expliciete declaraties
praktisch (efficiënt)	- theoretisch
emotionele binding	- afstandelijk
visueel	- verbaal
optimaal	- maximaal of minimaal
voorwaarden impliciet	- voorwaarden expliciet
bevredigend binnen de context	- volledig

Deze paren zijn geen tegenstellingen, maar tegenpolen, die bij elkaar horen. We weerstaan de verleiding dit hier verder te analyseren. De lezer wordt aanbevolen bij elk van deze paren een voorbeeld uit eigen (onderwijs)ervaring te bedenken.

De neiging bestaat de begrippen uit de linkerkolom naïef te noemen, begrippen die je bij wiskunde zou moeten afleren. Niets is minder waar. De begrippen uit de rechterkolom hebben een plaats binnen een specifiek wiskundige cultuur, waar ook die uit de linkerkolom een rol blijven spelen. De meerderheid van de leerlingen uit de leeftijdsgroep komt aan de begrippen uit de rechterkolom niet toe.

De activiteiten uit de rechterkolom hebben te maken met een denk-niveau dat abstracter van aard is dan het niveau van de activiteiten in de linkerkolom. Er is wel eens opgemerkt dat het bij de overgang van het ene niveau naar het andere om een glijdende schaal gaat. Was dat maar waar. Dat zou de didactiek van de wiskunde heel wat

gemakkelijker maken (en vermoedelijk het onderwijs veel minder interessant). In werkelijkheid worden de dingen waar het hier om gaat geleerd met sprongen. Men begrijpt, ontdekt, snapt iets in een keer. Begripsontwikkeling vindt veel meer plaats in sprongen, dan langs de weg van geleidelijkheid, veel meer evolutie, dan revolutie.

Wie meer over deze zaken wil weten raden wij de boeken van Fretzenthal en Van Hiele aan, respectievelijk getiteld *Weeding and sowing* (Reidel, Dordrecht 1978) en *Begrip en inzicht* (Muusses, Purmerend 1973).

De praktijk

Wiskundeonderwijs dat leren redeneren hoog in zijn vaandel voert (en welk wiskundeonderwijs zou dat niet?) heeft de begrippen anticiperen en leren reflecteren als sleutelbegrippen.

Leren reflecteren is, in beide betekenissen van het woord 'leren', een activiteit van zowel schrijvers en leraren, als van leerlingen. Fretzenthal noemt reflecteren als een van de vijf kenmerken van een goede wiskundige houding: nadenken over je eigen activiteiten teneinde een hoger niveau te bereiken.

Anticiperen is een activiteit van schrijvers en leraren. We hebben daar al over geschreven in het onderdeel *Inzicht en oefenen* bij de beschrijving van de zone van naaste ontwikkeling. In dit geval betekent het, dat verschillende niveaus van redeneren in de loop van de jaren geleidelijk opgebouwd worden. In die opbouw is in de opdrachten aan leerlingen een verschuiving te zien. Daarbij maken we onderscheid in de volgende vier stadia.

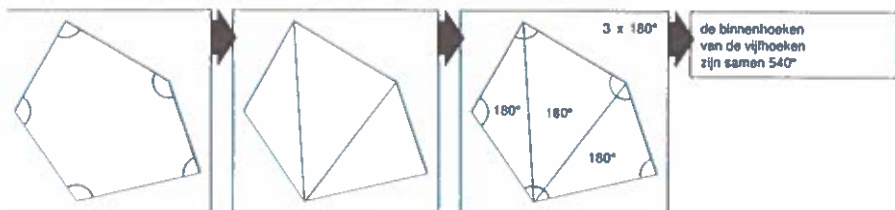
Het stadium van de doe-dit-of-dat-opdrachten

Hier wordt de leerling aan de hand meegenomen. Vooronderstellingen worden soms niet, soms heel duidelijk door de leraar (of het leerboek) vermeld. Hetzelfde geldt voor de conclusies. De docent wil wel graag anticiperen op een meer zelfstandig optreden van de leerlingen. Daarom zullen vooronderstellingen en conclusies ook wel eens besproken worden.

Voorbeeld:

Teken een grote vijfhoek. Hoeveel graden zijn de hoeken samen? Je kunt het antwoord bij deze opdracht vinden door de hoeken te meten. Maar je kunt het antwoord ook te weten komen door te redeneren. Met behulp van onderstaande tekening kun je zo'n redenering bedenken.

Maak een verhaal bij deze tekening (fig. 14). Doe hetzelfde nog eens voor een negenhoek.



(Uit: *Exact*, deel 2, Meulenhof Educatief bv, Amsterdam 1988, pag.2.)

fig. 14

Andere voorbeelden:

In die kubus is driehoek MPQ rechthoekig. Laat met de stelling van Pythagoras zien dat dat zo is.

Op de foto zie je een huis. Neem aan dat het linkerraam 1,45 m hoog is. Hoe hoog is het huis?

Hoeveel combinaties van aan/uit zijn er bij drie lampen? En bij vier lampen? Schrijf je antwoord in een tabel en probeer de regelmaat te ontdekken.

In dit hoofdstuk hebben we je een paar fouten laten zien, die het gevolg zijn van haastige speed. Deze fouten spoor je op door je werk zorgvuldig na te kijken.

Zulke fouten kun je vermijden door bijvoorbeeld

- te controleren of je de vraag eigenlijk wel beantwoord hebt,
- te controleren of je de gegevens goed hebt overgenomen,
- te controleren of een tekening en een berekening wel bij elkaar passen,
- te controleren of het antwoord wel mogelijk is.

Het stadium van de controleopdrachten

Hierbij wordt reflectie gevraagd. De leerling moet onvolledige redeneringen zelf aanvullen, maar hij hoeft nog niet te bedenken wat hij zou kunnen of willen beredeneren. Zo kan er een conclusie meegedeeld worden, en vervolgens wordt er gevraagd naar de vooronderstellingen, naar de voorwaarden waaronder de conclusie is gerechtvaardigd. Of naar motieven voor een bepaald gedrag. Of bij de opgaven over de vijfhoek zoals als:

Welke eigenschap van de driehoek heb je gebruikt?

Zou je deze redenering ook kunnen geven bij een 23-hoek? En bij een 3456-hoek?

Bij dit en het vorige stadium is vooral het linkerrijtje op bladzijde 102 van belang.

Andere voorbeelden:

*Op de foto staat een huis. Schat de hoogte van het huis. Van welk deel van het huis weet je ongeveer de afmetingen?
Welke maat heb je daarbij gebruikt?
Waarom heeft Douwe die hulplijn getrokken?
Zou dat altijd zo zijn?
Waarom is het handig zoiets te doen?
Maak een indeling.
Hoeveel verschillende zijn er?
Is dit ook een rechthoekige driehoek? Wat kun je met dat gegeven doen?
Zou het je helpen als je een tekening op ware grootte maakt?
In dit hoofdstuk hebben we je een paar fouten laten zien, die het gevolg zijn van haastige speed. Deze fouten spoor je op door je werk zorgvuldig na te kijken.
Geef nog een voorbeeld van een fout als gevolg van haastige speed.
Bedenk hoe je deze fouten kunt vermijden.*

Het stadium van de hulp-opdrachten

Dit stadium lijkt erg op het vorige, want er worden gelijksoortige antwoorden van de leerlingen verwacht. De leerling krijgt ook een steuntje in de rug doordat de aandacht erop wordt gevestigd dat er iets te reflecteren valt. Er is echter verschil in de manier van vragen. De vragen zijn wat globaler. Leerlingen worden door de docent (het leerboek) op het spoor gebracht van algemene werkmethoden en algemene redeneerprincipes die niet gebonden zijn aan het bepaalde probleem waar ze op dat moment aan bezig zijn. Bij het probleem van de vijfhoek kan bijvoorbeeld de vraag gesteld worden:

Lukt deze redenering bij elke veelhoek?

Het gaat hier om opdrachten waarbij het belangrijk is na te gaan wat de betekenis is van gegeven begrippen en eigenschappen. Of van gevraagde begrippen en eigenschappen. De nadruk wordt verlegd van het linkerrijtje van bladzijde 102 naar het rechterijtje.

Andere voorbeelden:

*Ben je nu klaar?
Wat vind je van die uitspraak?
Hoe kun je jezelf in zulke gevallen helpen?
Weet je nu zeker dat de bewering waar is?
Wat heb je in dit hoofdstuk geleerd?*

Het stadium van opdrachten zonder aanwijzing

Van de leerlingen wordt verwacht, dat zij uit eigen beweging reflecteren op hun werkwijze. Er wordt een probleem aangeboden, waarb

de leerlingen zelf op het idee moeten komen zichzelf zinvolle vragen over de werkwijze te stellen, over de vooronderstellingen, over de controle van een resultaat, enzovoort

Tot slot

Een paar opmerkingen zijn hier op zijn plaats.

- Opdrachten in de verschillende stadia kunnen veel op elkaar lijken. Ze kunnen zelfs letterlijk dezelfde zijn. Het verschil zit hem dan vooral in de aard van de activiteiten van de leerling. Met name gaat het om de activiteiten uit de beide rijtjes.
- De voorbeelden komen uit verschillende leerjaren, maar de verschillende stadia slaan niet op leerjaren. Het is mogelijk op verschillend abstractieniveau in elk leerjaar verschillende stadia te doorlopen.
- We hebben hier niet gesproken over bewijzen als afzonderlijke vaardigheid. Bewijzen, voor zover dat in de eerste drie leerjaren van het voortgezet onderwijs plaats vindt is ook een redeneervaardigheid die in verschillende stadia geleerd moet worden. Daarvoor kunnen de hier besproken stadia als richtlijn gelden. Bewijzen als begrip op zich is trouwens alleen van belang voor een bepaalde groep leerlingen in een bepaalde fase van hun studie. Verstandig redeneren is, op verschillend niveau, voor alle leerlingen en in alle jaren belangrijk.

Taal

De rol van taal in het wiskundeonderwijs is door de invoering van de nieuwe leerplannen sterker in de belangstelling komen te staan. Concreet maken het vak taliger. Docenten maken zich zorgen over taalvaardigheden van hun toekomstige leerlingen en over hun eigen taalvaardigheden om in hun wiskundeonderwijs met die taalvaardigheid om te gaan.

Aan taal zitten veel aspecten. Het boek *Wiskunde, een wereldval* gaat over diverse ervan, zoals de ingewikkeldheid van zinnen, het gebruik van moeilijke woorden, speciale problemen van leerlingen uit niet-Nederlands sprekende gezinnen, enzovoort. We hoeven dat hier niet allemaal te herhalen.

In dit hoofdstuk gaan we in op dat bepaalde aspect van taal, dat te maken heeft met het stadium waarin iemand verkeert, die bepaalde begrippen bezig is te leren. Diens taalgebruik weerspiegelt dat stadium. Iemand die nog weinig afweet van procenten zal daar op een andere manier over praten, dan iemand voor wie dat onderwerp geen geheimen heeft. De een praat erover met zinnen zoals: 'Procent is als je bijvoorbeeld 15 procent moet uittrekken van 100 gulden. Dan krijg je 15 gulden. Als je tweehonderd gulden neemt, dan krijg je 30 gulden.'

Anderen zullen met de volgende zin weinig moeite hebben: 'a procent van b is hetzelfde als a honderdste van b'. Zo'n zin zal voor de spreker uit de eerste categorie volkomen onbegrijpelijk zijn. Het taalgebruik is een weerspiegeling van het niveau waarop iemand de begrippen kent en er mee omgaat.

Voorbeelden als middel om iets te beschrijven

We bekijken de eerste uitspraak over procenten. Iemand die zo spreekt zal procent-sommetjes foutloos kunnen maken, maar niet kunnen omschrijven wat procenten zijn. Althans niet met een definitie. Wel kan hij het uitleggen door een voorbeeld: 'Procent is als je bijvoorbeeld...'. We kunnen hem allerlei andere voorbeelden vragen en voorleggen. Maar als we vragen: 'Wat is nu eigenlijk percentage?', dan zal hij verbaasd kijken: 'Dat zei ik toch. Dat is als je....'.

De tweede spreker deed een algemene uitspraak waar alle voorbeelden die de eerste zou kunnen bedenken onder vallen. Dat gebeurde door een relatie te leggen tussen een aantal variabelen: 'a% van b = $\frac{a}{100} \times b$ '. Er werden geen voorbeelden gebruikt.

In dit speciale geval gebruikte de spreker lettervariabelen. Relatieve taal zonder lettervariabelen is ook mogelijk.

'De sinus van een scherpe hoek in een rechthoekige driehoek is de verhouding van de lengte van de zijde tegenover die hoek en de lengte van de schuine zijde.'

'De doorsnede van een lichaam met een vlak is de figuur die wordt gevormd door de snijlijnen van dat lichaam met het snijdende vlak.'

Het onderscheid tussen beide taalvormen heeft niet alleen betrekking op omschrijvingen van begrippen. Hier is een voorbeeld van de verschillende manieren waarop een eigenschap beschreven kan worden:

De eerste vorm:

Een leerling tekent een lijntje op papier en wijst dan aan:

'Als je van een lijnstuk de middelloodlijn tekent...'

Zij tekent de middelloodlijn en gaat dan verder:

'... en als je dan een punt neemt...'

Zij wijst een punt aan en tekent een dikke stip:

'... en die afstanden allebei meet...'

Terwijl ze praat trekt zij lijntjes van het punt naar de eindpunten van het lijnstuk en wijst ze aan.

'... dan ligt punt evenver van de uiteinden van het lijnstuk.'

De tweede vorm:

'Elk punt van de middelloodlijn van een lijnstuk ligt evenver van de eindpunten van dat lijnstuk.'

Werkwoorden die actie uitdrukken en werkwoorden die een feit vaststellen

De voorbeelden hierboven laten nog een ander aspect zien van het verschil waarop met de begrippen en eigenschappen omgegaan wordt. In de taalvorm van mensen die voorbeelden gebruiken is meestal ook een activiteit te zien. Er worden werkwoorden gebruikt, die een proces beschrijven.

Bij het procentenvoorbeeld waren dat 'uitrekenen', 'nemen', 'krijgen'.

Bij de middelloodlijn: 'tekenen', 'nemen', 'meten', 'liggen'.

Sprekers of schrijvers die de tweede soort taal gebruiken beschrijven niet een proces, maar een toestand. Het werkwoord 'zijn' wordt als zelfstandig werkwoord gebruikt (niet als hulp- of koppelwerkwoord). Andere werkwoorden van dit type zijn 'bestaan uit', 'liggen op'.

Een ander kenmerk van procesbeschrijvende taal is, dat de handelingen in chronologische volgorde worden uitgesproken. Bij toestandbeschrijvende taal is daar geen sprake van. Wie zulke taal hoort of leest moet zelf beslissen in welke volgorde actie genomen moet worden.

Een paar tussenopmerkingen

Wie een bepaald stadium van leren nog niet heeft bereikt, kan geen toestandbeschrijvende taal gebruiken en ook niet begrijpen. Dit verklaart waarom leerlingen elkaar dikwijls beter iets kunnen uitleggen dan de docent. Een medeleerling gebruikt dan dezelfde taalsoort.

Procesbeschrijvende taal toont vaak meer emotionele binding met de

context dan toestandbeschrijvende taal, die wat meer afstandelijkheid laat zien.

In de praktijk worden beide taalvormen niet zo strikt gescheiden gebruikt. Soms komen beide zelfs in een en dezelfde zin voor. Dat gebeurt dan als er meerdere begrippen worden gebruikt. Bij de begrippen, die die de spreker goed kent en begrijpt wordt toestandbeschrijvende taal gebruikt, bij andere begrippen de andere taalvorm.

In didactische literatuur worden ook wel termen als 'demonstratieve taal' tegenover 'relationele taal' gebruikt, en 'actietaal' tegenover 'feitvaststellende taal'. Deze begrippen overlappen elkaar voor een deel. Het is hier echter niet de plaats om te analyseren in hoeverre en onder welke omstandigheden dat het geval is. Daarom hebben we de voorkeur gegeven aan omschrijvingen die alle kenmerken van de bedoelde taalsoorten omvatten.

Betekenis voor het onderwijs

We bespraken drie kenmerken van taalgebruik, die iets aanduiden over het niveau waarop iemand iets kent en begrijpt.

Procesbeschrijvende taal
gebruik van voorbeelden
gebruik van werkwoorden
die een proces aanduiden
chronologische volgorde

Toestandbeschrijvende taal
gebruik van algemene relaties
werkwoorden die een toestand
beschrijven
geen chronologische volgorde

Voor het onderwijs is niet alleen van belang, dat een docent inziet dat een leerling die de eerste taalvorm gebruikt op dat moment vermoedelijk ook geen andere taalvorm kan gebruiken. Ook is het nuttig in te zien, dat die leerling een andere taalvorm ook niet kan begrijpen. Dit soort bedenkingen zijn de achtergronden van uitspraken als: 'leerlingen in hun eigen taal aanspreken'.

Het gebruiken van procesbeschrijvende taal heeft het voordeel, dat het duidelijk is wat er moet gebeuren, maar het heeft ook een groot nadeel. Het is moeilijk om de begrippen of eigenschappen waar het om gaat verder te ontwikkelen. Een leerling kan wel laten zien dat hij begrijpt wat hij moet doen, maar hij is nog niet in staat het begrip zelf als nieuw object te hanteren.

Een leerling kan uitleggen hoe hij de vergelijking $3x + 2 = 11$ oplost met behulp van een keten van rekenacties: ' $3x + 2 = 11$ betekent iets $\rightarrow$ maal 3 $\rightarrow$ plus 2 $\rightarrow$ 11. Je moet dan terugrekenen:

11 $\rightarrow$ min 2 $\rightarrow$ gedeeld door 3. Zo krijg je $x = 3$.'

De leerling gebruikt hierbij procesbeschrijvende taal. Laten we aan nemen dat deze leerling niet in staat is om dit oplossingsproces in

toestandbeschrijvende taal te beschrijven. (Bijvoorbeeld iets als: '11 is het resultaat van een keten van rekenacties. Het originele getal is de inverse van die keten.'). Dan zal deze leerling een essentieel element van deze werkwijze niet in de gaten hebben, namelijk, dat het hier om een keten gaat. De vergelijking $3x + 2 = x + 11$ kan niet met behulp van een keten van rekenacties opgelost worden. Om deze vergelijking te kunnen oplossen moet het oplossingsproces zelf eerst geanalyseerd worden en op grond van die analyse bijgesteld worden, of zelfs omgewerkt.

Een leerling weet dat, als hij een driehoek uitknipt, daarna de hoeken ervan afscheurt, hij deze gesloten tegen een liniaal aan kan leggen. Maar die kennis is niet voldoende om in een bepaalde situatie, waarbij twee hoeken gegeven zijn de derde hoek uit te rekenen. Daarvoor moet hij eerst kunnen zeggen: 'De drie hoeken van een driehoek zijn samen 180 graden'.

Slotopmerkingen

De overgang van procesbeschrijvende taal, waarbij het volstaat voorbeelden te geven, naar toestandbeschrijvende taal, die meer abstract van aard is weerspiegelt een leerproces. Leerlingen moeten de gelegenheid krijgen dat leerproces te doorlopen. Door het gebruik van contexten krijgen leerlingen die gelegenheid wellicht meer dan in het verleden wel eens het geval was.

Niet alleen weerspiegelt het taalgebruik de mate waarin iemand een begrip kent en begrijpt. Ook wordt begripsvorming bevorderd door het taalgebruik. Dat gebeurt door leerlingen te stimuleren veel te praten over wat ze hebben gedaan of van plan zijn te gaan doen. Dit is een van de redenen waarom reflecteren zo'n belangrijk deel van het leerproces is. In de nieuwe leerplannen wordt daarom reflecteren expliciet benadrukt.

Sommige groepen leerlingen hoeven sommige begrippen en eigenschappen alleen te kennen op een niveau waarbij procesbeschrijvende taal voldoende is. Het is dan zinloos hen te verplichten op een meer abstracte manier over die zaken te spreken. Zij zullen dat opvatten als 'moeilijk doen als het ook makkelijk kan'.

HET NIEUWE LEERPLAN EN ...

Inleiding

Bij veel docenten leeft de gedachte dat met het nieuwe leerplan ook een heel nieuwe manier van lesgeven opgedrongen wordt.

Deze vrees is niet gefundeerd. Er is geen directe koppeling van leerplan en didactiek.

Wat verandert er wel?

Het werken met contexten brengt met zich mee dat 'het echte leven' in de klas komt. Met alle gevolgen vandien. Wiskunde zal meer een 'doe-vak' worden. Concrete materialen zullen vaker nodig zijn dan nu. Er zullen opdrachten in het boek staan die meer dan één goed antwoord hebben. Dat zal in de les gespreksstof opleveren. Leerlingen zullen in het begin onzeker zijn. 'Hoe weet ik nu dat mijn antwoord goed is?' Werken met contexten brengt met zich mee dat leerlingen met elkaar praten. Dat kan gebeuren in een klassegesprek of gewoon in een gesprekje tussen twee leerlingen.

Bij het oude programma kan men zich nog onderwijs voorsteller waarbij de docent uitlegt, de kinderen stilletjes de voorbeelden van het bord overschrijven en veel met sommen oefenen. Dit type onderwijs past slecht bij het nieuwe leerplan. Dan denk je eerder aan onderwijs waarin een klassegesprek belangrijk is en waar leerlingen samen iets uitzoeken. Het is dan ook zeker dat op bepaalde vaardigheden van de docent een groter beroep zal worden gedaan dan in het verleden. Een klassegesprek kunnen voeren is daar een voorbeeld van. Er zal ook vaker dan vroeger een practicumachtige situatie in de klas ontstaan. De docent moet dus, net als collega's natuurkunde of biologie, deze werkvorm beheersen. Dat betekent organisatie, planning, afspraken maken over wie er opruimt.

Het nieuwe leerplan vraagt vaardigheden waarover niet elke docent in voldoende mate beschikt. In de nascholing wordt daarom aan deze zaken veel aandacht besteed. Een docent die over meer alternatieven beschikt is vrijer in de keuze van zijn lesvormen. Dat betekent niet dat de praktijk van de ene dag op de andere essentieel anders wordt. Veranderingen in het onderwijs gaan in kleine stapjes. Anders raken zowel leerlingen als docenten van slag. Wel is het zo dat het nieuwe leerplan de docent mogelijkheden biedt om de dagelijkse praktijk te veranderen. Een beetje meer inspanning kan dan een veel leukere les opleveren.

In dit hoofdstuk willen we kort ingaan op allerlei vragen die worden opgeroepen door de nieuwe leerplanvoorstellen, hoewel ze daar niet

altijd direct mee samenhangen. Het zijn soms ook kwesties die hier met enkele woorden worden afgedaan, terwijl daar eigenlijk een uitvoerige verhandeling aan gewijd zou moeten worden. Voor sommige onderwerpen geldt dat er op andere plaatsen uitvoeriger over geschreven is. In dat geval hebben we verwezen naar andere informatiebronnen. Van andere onderwerpen mag verwacht worden dat er nog over gepubliceerd zal worden in de toekomst.

De indeling van dit hoofdstuk is gebaseerd op vragen die betrekking hebben op:

- leerlingen
- schoolsoorten
- hulpmiddelen
- inrichting van het onderwijs
- basiscvorming.

Leerlingen

Heel lang functioneerde het vak wiskunde als een selectiemiddel. Wie erg goed was in wiskunde kon meestal wel vwo aan en leerlingen voor wie het allemaal wat te hoog gegrepen was, lieten het vak na verloop van tijd vallen. Op het vwo kon dat na klas 4, op de havo na klas 3 en op mavo- en lbo-scholen mocht je vaak al na klas 2 zonder wiskunde verder.

In de afgelopen jaren zijn steeds meer mensen er van overtuigd geraakt dat wiskunde een basisvak is, een vak te vergelijken met Nederlands. Natuurlijk kunnen verschillende leerlingen er op een verschillend niveau mee bezig zijn, maar wiskunde is belangrijk voor iedereen.

Zo ontstond op havo en vwo een nieuw vak, wiskunde A, bedoeld voor die leerlingen die weliswaar niet de beta-kant op zouden gaan maar toch veel met getallen te maken zouden krijgen. Het resultaat is dat op havo en vwo ongeveer 85 procent van de leerlingen wiskunde in het examenpakket heeft.

Toen de staatssecretaris van Onderwijs, mevrouw Ginjaar-Maas, in 1987 de opdracht aan de COW formuleerde, vermeldde zij speciaal dat het nieuwe programma zo moest zijn dat ook meisjes een grotere kans op succes zouden hebben in het wiskundeonderwijs. Dat de overheid zich zorgen maakt over de achterblijvende belangstelling van meisjes voor wiskunde en exacte/technische studies was ook al af te leiden uit een actie als 'Kies Exact'. Nog steeds liggen de percentages van meisjes met wiskunde in het examenpakket lager dan die van jongens, hoewel beide percentages de laatste jaren flink gestegen zijn. In het verlengde hiervan blijft de keuze van meisjes voor meer technische richtingen in vbo en mbo achter vergeleken bij die van jongens.

Als nú, in 1992, een commissie ingesteld zou worden om het wiskundeonderwijs te vernieuwen, zou deze ongetwijfeld extra aandacht moeten besteden aan de mogelijkheden van allochtone leerlingen. Dat is een nieuwe groep van leerlingen, waarover men zich binnen en buiten de scholen zorgen maakt. De kansen die ons onderwijs biedt aan alle leerlingen zijn aan sommigen kennelijk meer besteed dan aan anderen. Waarom maken niet alle leerlingen gebruik van datgene wat hen geboden wordt in ons onderwijs? En wat kan het onderwijs daar aan doen?

Meer leerlingen doen langer wiskunde

Ook voor leerlingen van mavo en vbo geldt dat ze zich moeten kunnen handhaven in een wereld waar getallen, tabellen, grafieken en statistieken belangrijk zijn. Maar juist op mavo en lbo eindigt voor veel leerlingen het wiskundeonderwijs na klas 2. Met het oude leerplan is

dat begrijpelijk. Leerlingen en docenten beseften dat doorgaan met dat vak voor deze leerlingen geen zin had.

Met het nieuwe leerplan verandert deze situatie fundamenteel. Achter het nieuwe leerplan zit de gedachte dat wiskunde een vak is dat de moeite waard moet zijn voor alle leerlingen en niet alleen voor de bollebozen die wiskunde als hulpvak nodig hebben bij hun vervolgonderwijs. Deze gedachte zit ook achter de basisvorming. De kerndoelen duiden een wiskundeprogramma aan dat elke leerling vanaf B-niveau zou moeten kunnen doorlopen. Niet elke leerling heeft daar evenveel tijd voor nodig. De meeste vbo- en mavo-leerlingen zullen zeker drie jaar nodig hebben om hun basisvorming wiskunde te voltooien. Dat betekent dus wiskunde in klas 3 voor alle leerlingen.

Meer leerlingen, hopen wij, doen langer wiskunde om tot een zinvolle afsluiting van de basisvorming te komen. Vanwege de grote keuzevrijheid van de scholen moeten we afwachten of dat ook praktisch zal worden. Daarnaast is er met het nieuwe leerplan naar gestreefd wiskunde op C-niveau haalbaar te maken voor meer leerlingen. Met haalbaar bedoelen we twee dingen:

- Het moet niet nodig zijn en het is in ieder geval geen goede situatie dat 40 procent van de leerlingen het vak wiskunde met een onvoldoende afsluit op het eindexamen.
- Bij wiskunde wordt aan een goede voorbereiding voor een breed scala van beroepsopleidingen en niet eenzijdig aan doorstroming naar technische beroepen.

Men zal zich afvragen waarom er niet voorgesteld is om, naar analogie van vwo en havo, een wiskunde A- (algemeen) en een wiskunde B- (exact, technisch gericht) programma te ontwikkelen. Deze vraag is wel aan de orde geweest binnen het team W12-16 en de COW. Een opsplitsing in wiskunde A en wiskunde B zou het moment van kiezen voor een bepaalde vervolgrichting vervroegen. Deze gedachte is strijdig met wat de Basisvorming voorstaat; daarin is juist sprake van uitstel van het keuzemoment. Schoolorganisatorisch zou een opsplitsing in wiskunde A- en B-programma's beide op C- en D-niveau tot te grote problemen leiden. Een bijkomend argument was dat de collega's van de andere vakken wiskunde dan zouden gaan beschouwen als een leraarlessen-slokop.

Meisjes

Bij het ontwikkelen van lespakketten door het team W12-16 heeft op de achtergrond de gedachte meegespeeld dat dit materiaal zowel jongens als meisjes moest aanspreken. Er is echter niet gewerkt aan het ontwerpen van speciale materialen voor meisjes of voor jongens. Contexten komen uit diverse terreinen van het leven en er is bewust naar

gestreefd vaste rolpatronen tussen mannen en vrouwen zoveel mogelijk te vermijden.

De nieuwe leerstof biedt meer gelegenheid om alle leerlingen wiskunde te laten leren, die bij hun mogelijkheden en toekomstplannen past. Wij verwachten dat meer leerlingen, zowel jongens als meisjes, deze wiskunde ook als relevant voor hun toekomst zullen ervaren. De meer contextrijke wiskunde biedt leerlingen als het ware de gelegenheid om wiskunde te ervaren als een vak dat bij hen past, een vak dat niet uitsluitend formeel en abstract is, maar over het leven gaat; een vak waar niet alles goed of fout is, zwart of wit, maar waarin ook grijs-tinten bestaan; een vak waar je op je eigen manier mag denken en werken.

In de leerstofgebieden (algebra, meetkunde, rekenen, informatieverwerking en statistiek) liggen uiteenlopende mogelijkheden om door keuze van onderwerpen de breedheid van wiskunde te laten zien. Bij algebra kunnen grafieken, tabellen en formules voorkomen over allerlei situaties. De keuze van die situaties is tamelijk vrij, zo kan er voor gezorgd worden dat leerlingen situaties aantreffen waar ze vertrouwd mee zijn. Ook bij het onderdeel rekenen is een grote vrijheid van situaties en contexten. De toepasbaarheid is groot; dat kan motivatieverhogend werken. Informatieverwerking en statistiek is een onderdeel waarin expliciet jongens/meisjes- of man/vrouw-verschillen aan de orde kunnen komen. Bij meetkunde spelen eigen ervaringen van leerlingen een grote rol. We moeten er op bedacht zijn dat er tussen jongens en meisjes verschillen kunnen zijn in buitenschoolse ervaringen, waarop een beroep gedaan wordt in de wiskundelessen.

Of we door deze programmaverandering een bijdrage hebben geleverd aan betere kansen voor meisjes in het wiskundeonderwijs zal de toekomst moeten uitwijzen. Er zijn nog vele andere factoren die daarop van invloed zijn. De docent en de school kunnen ook een niet te onderschatten bijdrage leveren. Dat blijkt wel uit het gegeven dat de keuzepercentages voor wiskunde van school tot school sterk verschillen. Op de proefscholen waar met het nieuwe programma wordt gewerkt, ligt het percentage jongens en meisjes met wiskunde in het pakket relatief hoog.

Meer informatie in:

Achtergronden van het nieuwe leerplan Wiskunde 12-16, band 2, hoofdstuk Het nieuwe W12-16-programma ook goed voor meisjes.

De allochtone leerling

Wiskunde die ergens over gaat, wiskunde waarmee je problemen uit de wereld om je heen kunt aanpakken. Wie zou er tegen zulke wiskunde zijn? Maar zo eenvoudig is het niet. Voor zulke wiskunde heb

Je heel wat woorden nodig en ervaren docenten weten hoe moeilijk het is voor leerlingen om die woorden nauwkeurig te lezen. En bovendien, met de taal haal je de werkelijkheid de klas in. Die werkelijkheid zit vol ongelijkheid, om dat woord ook eens buiten de wiskunde te gebruiken.

Allochtone leerlingen zullen sterk ervaren dat wiskunde een vak is geworden vol woorden, vol cultuur, vol werkelijkheid. Bovendien, niet hun woorden, niet hun cultuur en niet hun werkelijkheid. Sommige docenten zijn bang dat deze leerlingen de dupe zullen worden van het nieuwe leerplan.

Op sommige vbo-scholen in de grote steden is de meerderheid van de leerlingen allochtoon. De sociale klasse waar kinderen uit voortkomen is vaak bepalend voor de schoolsoort waar ze terecht komen. De sociaal-economische status van allochtonen in onze samenleving is dan ook een belangrijke verklaring voor het feit dat hun kinderen zo weinig kansen krijgen in ons onderwijs. Een belangrijke vraag is of het nieuwe leerplan de allochtone leerlingen betere kansen biedt of hun mogelijkheden juist verslechtert.

Het is zeker juist dat het gebruik van taal tijdens de wiskunde een leerling confronteert met zijn eigen taalvermogen. Maar dat is niets bijzonders. Wiskundegebruik buiten school zal ook altijd met veel taal gepaard gaan. En op die realiteit wordt de leerling voorbereid. Ook in wiskundelessen krijgt de leerling ervaring in begrijpend lezen. Daarmee staat wiskunde op één lijn met Nederlands, aardrijkskunde, economie en geschiedenis. Vakken die allochtone leerlingen niet kunnen omzeilen. Het is wel te hopen dat in schoolboeken een taal gebruikt wordt die rekening houdt met de capaciteiten van de gebruiker.

Het gaat natuurlijk niet alleen om het vermijden van moeilijke zinsconstructies en weinig gebruikte woorden. Er moet ook gelet worden op een grote variatie in contexten, zodat meisjes én jongens, allochtoon én autochtoon, arbeiderskind én kind van de fabrieksdirecteur, zich in de aangeboden situaties kunnen verplaatsen. Het moet niet zo zijn dat alleen al een iets beperktere algemene ontwikkeling belemmerend werkt voor het leren van wiskunde. Het is een belangrijke taak voor de docent om in de gaten te houden welke leerlingen bij een bepaalde context problemen kunnen ondervinden. Met een klasgesprek of met wat individuele hulp is daar dan wat aan te doen.

De laatste opmerkingen maken trouwens, wellicht ten overvloede, duidelijk dat nadenken over de specifieke problemen van een bepaalde groep leerlingen vrijwel altijd leidt tot een beter inzicht in de situatie; een inzicht waarvan alle leerlingen kunnen profiteren.

Denken over allochtonen en het nieuwe leerplan legt al gauw te veel nadruk op de problemen. Dat zou ons doen vergeten dat het

nieuwe leerplan ook stimuleert om allochtone én autochtone leerlingen iets extra's te leren in de wiskundeles. De Nederlandse samenleving verandert en de school kan een bijdrage leveren aan wederzijds begrip en respect voor de culturen waaruit de verschillende bevolkingsgroepen afkomstig zijn. In de les kan naar voren komen welke rol bijvoorbeeld Indiase en Arabische wetenschappers hebben gespeeld bij de ontwikkeling van de wiskunde. Je kunt een vraagstuk behandelen als 'hoe weten Moslims overal op de wereld in welke richting Mekka ligt?'. Misschien helpt het de leerlingen om een minder 'Eurocentristisch' wereldbeeld te ontwikkelen. Ook dat kan een gevolg zijn als de wereld de klas in komt.

Meer informatie in:

Allochtonen in het wiskundeonderwijs en intercultureel onderwijs in de wiskundeles, Marja Meeder, Fred Mulder, Jacobien Schreuder, Pieter van der Zwaard, maart 1989

Wiskunde een Wereldvak, Fred Mulder (team W12-16), augustus 1992.

Schoolsoorten

Het nieuwe 12-16-programma sluit beter aan bij wat gaande is op het grootste deel van de basisscholen. Het is gebaseerd op dezelfde ideeën over reken/wiskundeonderwijs. Zo ontstaat er bijvoorbeeld een doorgaande lijn bij rekenen. Ook in het basisonderwijs is sprake van eindtermen, maar deze kunnen geen startpunt zijn voor het vervolgonderwijs omdat veel leerlingen deze doelen niet bereiken. Het zijn nadrukkelijk streefdoelen. Het nieuwe programma biedt wel meer ruimte om aan te sluiten bij het werkelijke niveau dat leerlingen op de basisschool bereikt hebben.

Bij het schrijven van de leerplannen voor twaalf tot zestien jaar is gekozen voor een afstemming tussen schoolsoorten in de eerste twee leerjaren. Daarna zijn de leerplannen uitgewerkt in vijf trajecten, te weten vbo-B, vbo/mavo-C, vbo/mavo-D, havo en vwo. De kerndoelen zijn verwerkt in die trajecten: voor vbo-B in vier jaar, voor vbo/mavo-C/D in drie jaar en voor havo/vwo in twee jaar.

Bij de leerplannen voor C- en D-niveau is gekozen voor een brede oriëntatie op functioneren in de samenleving en voor persoonlijke vorming. Daarbij is in de eerste plaats rekening gehouden met de doorstroom van grote groepen leerlingen naar een breed scala van vervolgopleidingen. Er is niet alleen gedacht aan een vervolg in technische richtingen maar ook aan gebruik van wiskundige basiskennis in economische/administratieve, agrarische en dienstverlenende en gezondheidsrichtingen. De verticale doorstroming van mavo D naar havo heeft op de tweede plaats gestaan.

Het vbo-A/B-niveau

Binnen het lager beroepsonderwijs heeft traditioneel altijd de nadruk gelegen op de beroepsgerichte vakken. De verschillende schooltypen hadden allemaal hun eigen interpretaties van lessentabellen en examenregelingen. Vanaf de invoering van de Mammoetwet (1968) is een harmoniseringsproces ingezet om te komen tot gemeenschappelijke regelingen. Vanaf 1976 kan in het lager beroepsonderwijs examen worden gedaan volgens een A-, B- of C-programma. Sinds 1986 kunnen lbo-leerlingen voor een aantal vakken, waaronder wiskunde, ook examen doen op D-niveau.

Het lbo kent geen officieel erkend en vastgesteld examenprogramma voor de vakken op A- en B-niveau. Iedere school kan daarvoor in principe zelf een wiskundeprogramma samen stellen. Het feit dat op veel scholen leerlingen op B- en C-niveau in één klas zitten, verklaart waarom er in de meeste scholen geen sterk afwijkend B-programma wordt gevolgd. Bovendien willen docenten voor hun leerlingen zo lang mogelijk een afsluiting op C-niveau openhouden.

Er zijn geen landelijk geregelde eindexamens op A- en B-niveau. Een

groot deel van de lbo-scholen maakt gebruik van voorbeeldexamens die worden samengesteld door groepen als 'Apeldoorn' en 'Zuid-West-Nederland'. In 1992 is door het team W12-16 een experimenteel schoolexamen voor lbo B-niveau samengesteld, dat gebruikt is op de proefscholen. Dit voorbeeldexamen past bij de leerstof die in het Trajectenboek beschreven is voor het B-traject. Er is naar gestreefd om het schoolexamen op B-niveau qua karakter af te stemmen op het officiële examen op C/D-niveau.

In het Trajectenboek is geen A-traject beschreven en er zal ook geen experimenteel schoolexamen op A-niveau gepubliceerd worden. Wij zijn van mening dat in het B-traject een minimaal niveau wordt aangegeven van wiskundeonderwijs waarin de kerndoelen van de basisvorming nog tot hun recht komen. Voor leerlingen die dit niveau niet aankunnen moet naar een andere oplossing gezocht worden, die van leerling tot leerling sterk kan verschillen. Belangrijk is naar ons idee om deze leerlingen individueel te benaderen, hun mogelijkheden te ontwikkelen en hun sterke kanten te waarderen. Wellicht bieden 'deelcertificaten' voor onderdelen van de leerstof een honorering voor hun prestaties.

Meer informatie:

Examenbundel 1992 (experimenteel B-examen)

Achtergronden van het nieuwe leerplan wiskunde 12-16, band 1, hoofdstuk 1 Het B-programma voor de hoofdstroom van het vbo.

I-leerlingen

Het project W12-16 heeft, zoals bekend, leerplannen ontwikkeld voor het vbo, voor het mavo en voor de eerste drie jaren van havo en vwo. Terecht is er door docenten opgemerkt dat daarmee niet voor alle leerlingen een geschikt leerplan is gemaakt 'Wat hebben jullie bedacht voor de lbo-leerling?' is hun vraag.

Ook voor deze leerlingen is materiaal ontwikkeld, maar binnen andere projecten; het OWI-project (OWI= Ontwikkeling Wiskundeonderwijs voor lbo-leerlingen) van de SLO en het WIBO-project (WIBO= Wiskunde in het Beroepsonderwijs) van het KPC.

Binnen het OWI-project gaat men uit van het persoonlijk en maatschappelijk functioneren van de leerling. Er is van te voren geen eindniveau vastgelegd. Dit in tegenstelling tot het B-niveau van de COW, waar het doel is dat in elk geval aan de eisen van de basisvorming wordt voldaan. Gemeenschappelijk aan beide benaderingen is dat gaandeweg de beroepsvorming belangrijker wordt bij de keuze van wiskundige inhoud. Gemeenschappelijk is ook dat er gewerkt wordt aan een leerplan dat de inhoud van de basisvorming omvat. Maar het essentiële verschil is, dat er binnen het B-traject naar gestreefd wordt alle leerlingen de leerstof op B-niveau te laten afronden.

Het I-traject van het OWI-project laat verschillende niveaus toe. Dat niveau wordt bepaald door de mogelijkheden van de leerling. Voor sommige I-leerlingen kan dat het B-niveau zijn. Voor anderen is dat een lager niveau. Ook is het mogelijk dat leerlingen alleen een aantal onderdelen op B-niveau afsluiten.

Globaal en over vier jaar bekeken stemmen de inhoud van het I-traject, zoals dat binnen OWI is ontwikkeld, en die van het B-traject binnen W12-16 aardig met elkaar overeen. We noemen een paar verschillen:

- Binnen het I-traject komt het begrip kans expliciet aan de orde. Binnen W12-16 is gekozen voor een impliciete behandeling van dit begrip, gekoppeld aan het systematisch tellen.
- Plaatsbepalen komt wel in het B-traject voor, terwijl dit onderwerp in het I-traject niet apart behandeld wordt.
- Wat het rekenen aangaat is er binnen het I-traject veel aandacht voor de basisbewerkingen en weinig voor breuken en verhoudingen. Het B-traject stelt vanaf het begin het rekenen met verhoudingen centraal.

Al met al zijn de inhoudelijke verschillen niet zo belangrijk. Binnen het I-traject kan meer recht gedaan worden aan de mogelijkheden van een zwakke leerling, op den duur wordt wel duidelijk welk niveau voor die leerling haalbaar is. Binnen het B-traject wordt nog lang de mogelijkheid opgehouden om op C-niveau af te sluiten. Leerlingen worden uitgedaagd het van te voren bepaalde niveau te bereiken.

Hoe dit in de praktijk zal uitwerken, is in belangrijke mate afhankelijk van de organisatie op een school. Een school met een aparte I-afdeling kan meer rekening houden met de zwakste leerlingen dan een school waarbij de leerlingen van het A- tot en met C-, soms zelfs tot en met D-niveau, bij elkaar in de klas zitten.

Het OWI-project heeft niet alleen een leerplan voor het ibo opgeleverd. Er is ook materiaal ontwikkeld dat binnenkort op de markt zal komen.

Ook binnen het WIBO-project is aan materiaal voor ibo/vbo-leerlingen gewerkt. Het betreft hier een samenwerking tussen (Jacob Dijkstra, de uitgever van de methode 'Wiskundelijf' en het Katholiek Pedagogisch Centrum.

Door regelmatig overleg tussen het OWI- en het WIBO-project is een behoorlijke onderlinge afstemming bereikt. Het resultaat is dat bij de invoering van de basisvorming ook voor ibo/vbo-leerlingen bruikbaar lesmateriaal op de markt is.

Meer informatie:

Het I-traject, Wiskunde in de basissvorming (Achtergronden, Inhouden, Voorbeelden), SLO, Enschede 1992.

WIBO-materiaal, Wiskundelijn uitgeverij Jacob Dijkstra, Groningen.

OWT-materiaal, uitgeverij Malmberg, 's Hertogenbosch.

Verschil tussen C- en D-niveau

Zowel in het leerplan als in het Examenprogramma zijn verschillen tussen het C- en D-niveau aan te wijzen. Deze verschillen zijn groter dan in het huidige leerplan. Ze komen tot uiting in de wiskundige inhoud in de keuze van contexten, maar meer in de mate van complexiteit en van wiskundige abstractie.

Inhoud

In het C-programma komt bij informatieverwerking en statistiek de boxplot niet voor. Bij meetkunde ontbreken de sinus en de cosinus. C-leerlingen hoeven minder te weten van exponentiële verbanden. Zo is het niet nodig dat ze de formule $y = ab^x$ koppelen aan het begrip exponentieel verband en omgekeerd. Ook de relatie tussen exponentiële groei en procentuele toe- of afname wordt voor C-leerlingen niet gelegd. Ook hun kennis van periodieke verbanden is minder uitgebreid. Zij hoeven in tegenstelling tot de D-leerlingen, de begrippen periode en amplitude niet te kennen.

Contexten

Voor C-leerlingen zullen de contexten voorstelbaar moeten zijn. Deze kunnen in het vbo bijvoorbeeld afkomstig zijn uit beroepsgerichte vakken. Voor het D-niveau zullen ook vaker strikt wiskundige contexten gebruikt worden. Dit geldt zowel voor het leerplan en dus de schoolboeken, als voor het examen. Op het examen echter zal ook voor D-niveau het aantal opdrachten in een wiskundige context de minderheid uitmaken.

Complexiteit

Het is vanzelfsprekend dat naarmate het niveau van de leerlingen hoger is, de complexiteit van de opdracht toe kan nemen. Zo zullen D-leerlingen vaker dan C-leerlingen zelfstandig moeten kiezen welke gegevens uit de context relevant zijn, of welke variabelen er ingevoerd moeten worden of welke formules opgesteld moet worden of welk model zij het best kunnen gebruiken bij het oplossen van een probleem.

Voor C-leerlingen zal dit, zeker op het examen, meestal aangegeven worden. Dat kan gebeuren door duidelijke aanwijzingen in de opgave of door inleidende vragen en hulpvragen. Probleemstellingen op het examen zullen voor C-leerlingen vaker opgedeeld worden in kleinere stappen.

Verskil in wiskundige abstractie

Het verschil in abstractie komt het duidelijkst naar voren bij de algebra. Op het C-niveau komen minder abstracte algebraïsche vaardigheden voor. Dat betekent bijvoorbeeld dat de formules vaak woordformules zijn, waarin de directe relatie met het gestelde probleem zichtbaar is. Problemen uit de algebra zullen vaak opgelost kunnen worden met behulp van tabel en grafiek, er zal minder een beroep worden gedaan op het kunnen manipuleren met formules.

De aansluiting van mavo D op de bovenbouw havo

Bij het opstellen van het nieuwe programma voor de mavo heeft voorop gestaan dat het een goede basis moet geven aan de leerlingen die doorgaan in het mbo. Pas in de tweede plaats is rekening gehouden met leerlingen die na de mavo doorstromen naar de bovenbouw havo.

Tot en met 1996 zullen leerlingen nog met het oude mavo-programma naar de havo-bovenbouw gaan. Het nieuwe mavo-programma sluit qua karakter veel beter aan op de nieuwe wiskundevakken in de vierde en vijfde klas havo. Het nieuwe wiskunde D-programma biedt een brede oriëntatie op onderwerpen die in de havo-bovenbouw aan de orde komen. De aansluiting van het nieuwe mavo-D-programma op wiskunde A zal een sterke verbetering zijn. De aansluiting op wiskunde B is wat de behandelde onderwerpen betreft niet geheel drempelloos, maar de houding ten opzichte van het vak wiskunde zal wel sterk verbeteren. Wat de meetkunde betreft zullen leerlingen een veel betere voorbereiding krijgen op ruimtemeetkunde, maar bij de algebra zal er iets moeten worden bijgespijkerd, omdat daar in de derde klas havo meer aandacht aan zal worden besteed dan in de mavo-opleiding. De COW en het team W12-16 vinden deze keuzen verantwoord omdat slechts een klein deel van de mavo-leerlingen zal doorgaan naar de havo met wiskunde B. Bovendien zullen dat goede wiskundeleerlingen zijn, gezien de zwaarte van het havo-B-programma.

Doordat ook het havo-onderbouwprogramma verandert, zal er in de havo-opleiding als geheel een verschuiving plaatsvinden. Hoe groot de aansluitingsproblemen precies zullen zijn voor mavo-leerlingen, die in het schooljaar 1997-98 voor het eerst vanuit het nieuwe programma doorstromen naar de havo-bovenbouw, is nu moeilijk te zeggen. Ook daarover zullen de tien experimenteerscholen de komende jaren nog gegevens leveren.

Van havo-onderbouw naar havo-bovenbouw

In 1990 is het nieuwe leerplan voor wiskunde A en wiskunde B voor de havo algemeen ingevoerd. De eerste landelijke eindexamens zijn dus in 1992 afgenomen. Een van de aandachtspunten bij een nieuw leerplan voor de onderbouw was om de aansluiting met de boven-

bouw te verbeteren. Bij een invoering van het nieuwe leerplan voor de onderbouw in 1993 zullen de eerste leerlingen die volgens dat nieuwe leerplan zijn opgeleid in 1996 de bovenbouw van de havo bereiken.

In het cursusjaar 1995/96 zullen docenten de bekende havo 3-problematiek moeten oplossen, maar dan gekoppeld aan het nieuwe leerplan. En dat betekent dus een antwoord vinden op de vraag hoe onderwijs te geven dat aansluit bij leerlingen die:

- in havo 4 geen wiskunde meer volgen, dan wel
- in havo 4 verder gaan met wiskunde A, dan wel
- in havo 4 verder gaan met wiskunde B.

Te verwachten is dat in de boeken voor de bovenbouw een zekere her-schikking van de leerstof zal plaatsvinden. Er is op dit moment geen reden te veronderstellen dat er tussen nu en 1996 belangrijke voorstellen zullen komen voor een ander eindexamen. Voorstellen voor kleinere wijzigingen zijn wel denkbaar.

Verschil tussen wiskunde A en wiskunde B

Het vak wiskunde A is zo opgezet dat het voor iedere havo-leerling te doen moet zijn. Elke havo-leerling hoort over een zekere mate van gecijferdheid te beschikken die overal van pas komt. Vrijwel elke hogere beroepsopleidingen vraagt van zijn studenten vaardigheden op het gebied van statistiek, het lezen van tabellen en grafieken en meer algemeen het omgaan met divers cijfermateriaal. Wiskunde A komt aan die vraag tegemoet.

Bij wiskunde B ligt de situatie heel anders. Voor lang niet elke havo-leerling is dit een geschikt vak. Wiskunde B bereidt voor op een beroepsopleiding met een beta-karakter. Toegespitst op havo 3 betekent dit dat een leerling er in deze klas achter moet komen welke weg hij/zij in wil slaan en wat zijn/haar wiskundige vermogens zijn.

Er zijn in havo 3 voldoende onderwerpen die duidelijk maken of een leerling wiskunde B boeiend vindt en ook of hij/zij de stof aan-kan. We kunnen dan denken aan onderwerpen uit de algebra als 'Opstellen en analyseren van formules' en 'Vervormen van grafieken.' Ook meetkundige onderwerpen als 'Doorsnede en helling' en 'Meten en rekenen' kunnen die rol vervullen.

Selectie is één aspect van het onderwijs in havo 3, minstens zo be-langrijk is de voorbereiding op havo 4. Veel docenten vragen zich af of het nieuwe leerplan een goede voorbereiding garandeert op de be-staande examenprogramma's. Die vraag bestaat uit twee onderdelen.

Voorbereiding op wiskunde A

Een oppervlakkige oriëntatie op het nieuwe leerplan leert al dat de toekomstige wiskunde A-leerling veel beter voorbereid naar de boven-bouw gaat. Onderwerpen als rekenen, statistiek, grafen en tabellen krijgen in de onderbouw nu veel aandacht. Bovendien krijgen de leer-

lingen een flinke oefening in het lezen van contexten. Kortom: het wiskunde A-programma sluit goed aan bij het nieuwe leerplan voor de onderbouw.

Voorbereiding op wiskunde B

De toekomstige wiskunde B-leerling heeft een heel andere basis dan de leerling van dit moment. Op dit moment wordt er in de onderbouw veel tijd besteed aan de ontwikkeling van technische vaardigheden. In havo 3 is men misschien wel de helft van de tijd bezig met allerlei exercities rond kwadratische functies. Het motief voor al dat oefenen is dat leerlingen anders stuk lopen in de bovenbouw.

In het nieuwe leerplan is in dit opzicht een keuze gemaakt: een leerling moet steeds over voldoende techniek beschikken om de problemen van dat moment aan te kunnen. Ingewikkelde algebraïsche vaardigheden worden ontwikkeld op het moment dat ze nodig zijn. De ontwikkeling van inzicht en de ontwikkeling van vaardigheden gaan hand in hand. Deze benadering stoelt op de overtuiging dat een beter ontwikkeld inzicht een wat geringere technische beheersing zal kunnen compenseren. Het kan geen kwaad er in dit verband op te wijzen dat er in havo 3 tamelijk fundamentele zaken aan de orde worden gesteld, die vroeger in het onderbouw-programma niet voorkwamen. Denk maar aan een onderwerpen als 'Werken met formules' en 'Grafieken vervormen.' En er is nog iets. Zonder overdrijving kan gesteld worden dat de analyse in de bovenbouw vooral 'Toegepaste Analyse' is. Dat betekent onder meer dat de wiskundige problemen binnen contexten worden aangeboden. Het is zonder meer duidelijk dat het nieuwe leerplan de leerlingen veel beter voorbereid op het werken met toepassingen.

Voor het andere belangrijke onderdeel van het wiskunde B-programma, de ruimtemeetkunde, is de basis die daarvoor gelegd wordt in de onderbouw veel degelijker. Door een betere voorbereiding is het uitgangspunt een stuk gunstiger geworden dan in de huidige situatie.

Van vwo-onderbouw naar vwo-bovenbouw

Als het nieuwe leerplan in augustus 1993 wordt ingevoerd dan zal deze vernieuwing in 1996 de vierde klas van het vwo bereiken. Men hoort wel eens klagen dat al die vernieuwingen elkaar zo snel opvolgen, maar deze klacht gaat niet op voor het analyse-onderwijs op het vwo. De inhoud van de analyse voor de B-leerling is immers sinds 1968 nauwelijks veranderd. En dat terwijl er sinds die tijd heel wat is gebeurd op het terrein van wiskunde en samenleving. Men kan verwachten dat binnenkort het examenprogramma voor wiskunde B op het vwo weer eens kritisch bekeken wordt.

Het wiskundeonderwijs aan vwo-leerlingen onderscheidt zich van an-

dere schooltypen onder meer door: meer techniek, meer diepgang meer aandacht voor bewijzen.

Bovendien kan er in 3 vwo rustig verder gewerkt worden aan de ontwikkeling van wiskundige kennis en vaardigheden. De keuzeproblematiek, zo kenmerkend voor de derde klas havo, speelt hier pas een jaar later. Over het leerplan voor 3 vwo moet uiteraard nagedacht worden in samenhang met dat voor 4 vwo. En hier wreekt zich de opdracht die de COW van de staatssecretaris kreeg. Daarin is gesproken van 4 vwo. Een van de ongevraagde adviezen aan de staatssecretaris gaat dan ook over het leerplan wiskunde in 4 vwo, waarbij rekening is gehouden met drie soorten leerlingen: leerlingen die in 5 vwo verder gaan met wiskunde A, leerlingen die in 5 vwo verder gaan met wiskunde B, leerlingen die in 5 vwo geen wiskunde meer volgen.

De consequenties van het nieuwe leerplan voor 4 vwo

Er zal een goed evenwicht moeten worden gevonden tussen een benadering die gericht is op toepassingen (wiskunde A) en een meer formele benadering (wiskunde B). Algebra is een gebied dat geschikt is om leerlingen ervaring op te laten doen met de meer formele kant van de wiskunde. In het nieuwe leerplan wordt veel minder aandacht dan nu het geval is, besteed aan de eigenschappen van kwadratische functies. En het is nog maar de vraag of dit in 4 vwo alsnog moet gebeuren. Voor vervolgleerstof hebben dergelijke eigenschappen niet zoveel nut. Wel vormen de tweedegraads functies een geschikt onderwerp om te oefenen in argumenteren en redeneren. Te denken valt dan aan de discriminant, het onderzoek van een familie van kwadratische functies en redeneringen over extreme waarden. Zo'n onderwerp is ook geschikt als voorbereiding op de keuze tussen wiskunde A en wiskunde B. Maar voor een aantal leerlingen is wiskunde van 4 vwo eindonderwijs. Daarom moet er een goede afronding gegeven worden aan maatschappelijk relevante onderdelen als beschrijvende statistiek en eenvoudige kansrekening.

Enkele gedachten over een bijstelling van Wiskunde A

Over een aantal jaren zal de Graphic Calculator gemeengoed zijn. Heel waarschijnlijk beschikt het apparaat dan over nog meer mogelijkheden dan bijvoorbeeld de huidige TI 81. De grafische rekenmachine zou zijn diensten kunnen bewijzen bij het rekenen met matrices en bij diverse statistische berekeningen. Aldus zouden met enige vertraging alsnog de oude idealen van de automatische gegevensverwerking worden gerealiseerd.

Enkele gedachten over een bijstelling van Wiskunde B

De invloed van de grafische rekenmachine zal bij wiskunde B misschien nog sterker zijn. Zeker als we deze ontwikkeling koppelen aan

het verschijnen van computerprogramma's als 'Derive'. Dergelijke programma's kunnen rekenen met variabelen en met formules. Ze geven desgevraagd de afgeleide van een functie in formulevorm! Er zal nagedacht moeten worden wat de opdracht 'onderzoek de functie' betekent in een tijd waarin het indrukken van enkele toetsen voldoende is om alle gewenste gegevens over een functie te weten te komen. Met de computer zijn ook andere wiskundige onderwerpen binnen het bereik van middelbare scholieren gekomen. Het ligt voor de hand meer aandacht te besteden aan numerieke problemen. Ook het onderwerp differentiaalvergelijkingen verdient bijstelling. Deze vergelijkingen spelen een belangrijke rol in allerlei modellen. Vaak zijn het dan differentievergelijkingen. Het doorrekenen van dit soort modellen gebeurt met programma's als VU-dynamo. Dat betekent onder andere dat er meer aandacht kan komen voor het opstellen van modellen.

Een lastig onderwerp is de rol van routinematige vaardigheden in de wiskunde. Hoeveel aandacht moet nog aan de ontwikkeling van die vaardigheden besteed worden? In het tijdperk van de computer-algebra moeten mensen beschikken over een tamelijk nieuwe vaardigheid. Zij moeten antwoorden kunnen 'schatten', ook als het gaat om grafieken en formules. We weten nog niet over hoeveel techniek leerlingen moeten beschikken om wiskunde te bedrijven als zij de beschikking hebben over geavanceerde software. De tijd zal het ons moeten leren.

Van mavo/vbo naar mbo

Het nieuwe programma wil een goede voorbereiding geven op allerlei soorten vervolgonderwijs. Traditiegetrouw werd vooral het technisch vervolgonderwijs bediend. Bij de keuze van inhoud van het nieuwe 12-16-programma is rekening gehouden met heel diverse beroepsopleidingen. Er is moeite gedaan om de vier grote sectoren in het middelbaar beroepsonderwijs – technisch, agrarisch, economisch/administratief en dienstverlenend/gezondheidszorg – goed te informeren over wat er gaande was bij wiskunde in het 12-16-gebied.

Ook in het mbo zijn programma's aan verandering onderhevig. Met name in het mto (middelbaar technisch onderwijs) en het mao (middelbaar agrarisch onderwijs) zijn leerplancommissies actief om de programma's aan de eisen van deze tijd aan te passen. Beide sectoren hebben laten weten waardering te hebben voor de voorgestelde 12-16-leerplannen, zij het dat het mto enkele vraagtekens zet bij een goede aansluiting.

Voor alle mbo-richtingen zal het een verbetering zijn dat het nieuwe W12-16-programma veel praktischer gericht is. Daar komt voor de meer technische richtingen nog bij de ruime aandacht voor meetkunde en het oefenen met allerlei soorten formules. Ook hopen we dat de rekenvaardigheid van leerlingen door het nieuwe programma

beter zal worden. De training in algebraïsche vaardigheden zal minder zijn dan nu het geval is. Daar hebben mto-docenten hun bezorgdheid over uitgesproken. Het is echter onmogelijk aan alle wensen te voldoen. Er zijn dus keuzes gemaakt.

Volwassenenonderwijs

Ook leerlingen in het volwassenenonderwijs doen mavo-examen wiskunde. Vanaf 1997 kunnen waarschijnlijk ook scholen voor volwassenenonderwijs meedoen aan een eindexamen, dat gebaseerd is op het nieuwe programma. De COW heeft de minister aangeraden om scholen in dat jaar ook nog de mogelijkheid te bieden om examens af te nemen gebaseerd op het oude programma. Onduidelijk is nog of daar extra faciliteiten voor zullen komen.

In het schooljaar 1992-'93 is gestart met een experiment op een school voor volwassenen: een driejarige cursus volgens het nieuwe programma. Deze school, het Eindhovens dag- en avondcollege werkt met diverse materialen: oude leerboeken, door het team W12-16 ontwikkelde pakketten en nieuw materiaal. Doel van het experiment is te komen tot indikking van het nieuwe programma zodat het bruikbaar is op scholen voor volwassenenonderwijs. Het is de bedoeling dat deze proef bruikbare leerplannen voor het volwassenenonderwijs oplevert.

Daarnaast wordt gewerkt aan een nieuwe methode voor het volwassenenonderwijs gebaseerd op het nieuwe programma, waarbij rekening wordt gehouden met diverse behoeften van volwassen cursisten. Dat materiaal zal op z'n vroegst in het voorjaar van 1995 beschikbaar zijn voor het volwassenenonderwijs. De coördinatie van deze twee projecten wordt door het APS verzorgd.

Hulpmiddelen

Een schoolboek dat je jaren lang gebruikt, wordt op den duur vertrouwd. Je weet op een bepaald moment precies waar voor leerlingen de problemen zitten. Je verbetert *zwakke* plekken of je slaat ze over en van de sterke gedeelten profiteer je gaandeweg steeds meer. Het voorbereiden van de lessen kost nog maar weinig tijd. En ben je met je sectiegenoten echt ontevreden over de methode dan heb je een keur van mogelijkheden. Nederland is rijk aan alternatieven en elke sectie kan wel een methode van haar gading vinden.

Een leerplanwijziging komt voor heel wat docenten ongelegen. Ze hebben er zelf niet om gevraagd en er zijn altijd details die niet bevalen, al was het alleen maar omdat je van boek moet veranderen. Dat geldt ook in dit geval, de leerplanwijziging W12-16. Andere wiskunde is belangrijker geworden. Maar wat is de kern van de zaak? Om welke wiskunde gaat het eigenlijk? Wat moeten mijn leerlingen weten? Hoe kom ik aan een goed proefwerk? En hoeveel tijd gaat mij het maken en corrigeren van een proefwerk kosten?

En dan zijn er allerlei veranderingen op school die veroorzaakt zijn door technologische ontwikkelingen. Videorecorder en cassette-recorder, overheadprojector en viltstift hebben een plaatsje veroverd naast het vertrouwde schoolbord met bijbehorend krijtje. Belangrijker voor het wiskundeonderwijs is de komst van de rekenmachine en de computer. Toch is het niet eenvoudig deze apparaten een duidelijke plaats te geven in het onderwijs. Wat betreft de rekenmachine zijn we er de afgelopen 25 jaar tenminste niet in geslaagd.

Schoolboeken

In het project W12-16 is regelmatig contact geweest met de uitgevers. In dat overleg waren niet alleen de uitgevers van de huidige schoolboeken betrokken. Een nieuw leerplan is immers een goede gelegenheid de markt open te breken. Naast nieuwe edities van de beproefde methoden als Getal en Ruimte en Moderne Wiskunde zullen er dan ook totaal nieuwe methoden op de markt verschijnen. Inmiddels is duidelijk dat er op tijd boeken zullen zijn. Verschillende uitgevers hebben toegezegd in januari 1993 met nieuwe of vernieuwde brugklasdelen te zullen komen. De ontwikkelaars van het nieuwe wiskundeleerplan wachten met spanning af hoe hun voorstellen in de verschillende methoden worden uitgewerkt. Zijn alle boeken straks geschreven vanuit een realistische visie op wiskundeonderwijs? Wat komt er van al die mooie ideeën in de boeken terecht? Hoe worden contexten gebruikt? Zijn ze echt verweven in het leerproces of hangen ze er maar een beetje bij? Wordt het gebruik van concrete materialen ook in de schoolboeken gestimuleerd? Vind je iets terug van de aandacht voor speciale groepen leerlingen?

Behalve bovenstaande vragen zullen docenten met name vragen hebben over de structuur van het boek. Hoe wordt er rekening gehouden met sterke en zwakke leerlingen? En met tempoverschillen tussen leerlingen?

Hoe is er rekening gehouden met verschillende schooltypen? Is er een boek voor de hele brugklas of een apart deel voor havo/vwo en een apart deel voor mavo/vbo? En hoe zijn die boeken op elkaar afgestemd? Is de methode geschikt voor brede scholengemeenschappen met een heterogene brugperiode?

Waar in de methode zijn alle kerndoelen aan de orde geweest? Hoe kom je daar achter als docent? Helpt het boek bij de voorbereiding van de eindtoets basisvorming?

Hoe oogt het boek? Bevat het boek veel open vragen of juist veel rechttoe-rechtaan-opgaven?

Kunnen alle collega's in de sectie met deze methode uit de voeten of is de methode alleen geschikt voor de superdocenten? Dwingt de methode je in een bepaald keurslijf of kun je als docent je eigen stijl hanteren?

Staan er samenvattingen in het boek? En toetsen?

Dit is nog maar een greep uit de grote serie vragen die je aan een methode kunt stellen. Ongetwijfeld komt er een grote reclame-campagne op gang. Het kan dan geen kwaad als sectie zelf een lijstje aandachtspunten op te stellen. Je kunt dan kritischer lezen en beter uitzoeken welke methode voor jouw school het meest geschikt is.

Het is een goed initiatief van de Samenwerkingsgroep SW12-16 om bijeenkomsten te beleggen over de methodenkeuze. Dat zal gebeuren in januari en februari 1993.

Meer informatie:

Brochure 'Kiezen van een wiskundemethode' (APS, najaar 1992).

De zakrekenmachine

De houding van veel docenten ten opzichte van de rekenmachine is ambivalent gebleven. Aan de ene kant ziet men de rekenmachine als een nuttig instrument, bijvoorbeeld als een handig tabellenboek. Bij het rekenen met sinus, cosinus en tangens wil niemand hem missen. Hetzelfde geldt voor het rekenen met logaritmen en machten van e . Ook bij statistische bewerkingen komt hij goed van pas. Maar verder is men ook bezorgd. Het apparaat bedreigt de rekenvaardigheid van onze leerlingen. Veel docenten willen dan ook de introductie van de rekenmachine uitstellen naar hogere leerjaren. Liever in de eerste klas nog geen rekenmachine. Wij denken daar anders over. De rekenmachine bestaat en het heeft weinig zin dat in de klas te ontdekken of het gebruik van de rekenmachine te verbieden. Door in de klas met het apparaat te werken, wordt het mogelijk goed gebruik te

bevorderen. Bovendien biedt de rekenmachine nieuwe mogelijkheden. Wie de realiteit van de rekenmachine accepteert, heeft overigens nog wel wat te doen. Er zijn een aantal aspecten van de rekenmachine die in de klas aan de orde moeten komen.

De rekenmachine hanteren

Welke knoppen moet je indrukken en in welke volgorde om een bepaalde opgave te maken? Wat voor functie hebben al die knoppen? Hoe reken je bijvoorbeeld -13×-34 uit? Gaat dat met de 'min'-toets of met de $+/-$ toets? Welke volgorde van bewerkingen gebruikt de rekenmachine? Een manier om leerlingen hieraan te laten werken is door hen de opdracht te geven een handleiding voor hun eigen rekenmachine te maken.

Schatten

Hoe maak je een goede schatting om het antwoord van de rekenmachine te kunnen controleren?

Iemand rekent $102,5 : 47,8 =$ uit met de rekenmachine en leest af: 0.2144352. Een schatting om het antwoord te controleren levert:

$100 : 50$, dus ongeveer 2. Er is dus een kommafout gemaakt bij het intoetsen.

Het kunnen schatten van antwoorden wordt een belangrijke vaardigheid in combinatie met de zakrekenmachine, die het precieze werk kan doen.

In welke situaties kun je de rekenmachine gebruiken?

De berekening $11 + 14$ doe je niet met de rekenmachine. Het gaat niet sneller en de kans dat je een fout met intoetsen maakt, is minstens zo groot als de kans op een fout antwoord bij het gewoon uitrekenen. Natuurlijk hangt het van de rekenvaardigheid van de leerling af wanneer de rekenmachine wel ingezet wordt en wanneer niet. Maar duidelijk is wel dat deze vraag in de wiskundeles thuis hoort.

Gevolgen van gebruik van de rekenmachine

Accepteren dat de zakrekenmachine een volwaardige plaats in de wiskundelessen krijgt, betekent wel dat hij ook echt geïntroduceerd moet worden. Er zijn ook consequenties voor de inhoud van het leerplan. We hebben al genoemd dat schatten veel belangrijker wordt.

Het uitgebreid oefenen met herleidingen als $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ zal veel minder gebeuren. Elke leerling maakt ook kennis met het afronden en met het aflezen van de zogenaamde wetenschappelijke notatie. In opgaven kunnen lastiger getallen voorkomen, want de rekenmachine doet het lastige rekenwerk. De rekenmachine biedt ook de mogelijkheid om ondersteunend te werken bij begripsontwikkeling.

Toekomstige ontwikkelingen

Al een paar jaar wordt voorspeld dat de rekenmachine van de toekomst technisch gesproken alles zal kunnen wat we de leerlingen nu met veel moeite bijbrengen. Men wijst dan op de 'Graphic Calculator'. Welke invloed zal zo'n rekenmachine hebben op een toekomstig leerplan voor twaalf- tot zestienjarigen? Met de huidige 'Graphic Calculator' kun je mooie grafieken maken. En het valt te verwachten dat over een jaar of vijf al onze derdeklassers zo'n apparaat bezitten. Maar de leerling moet over een goed variabele-begrip beschikken om vlot overweg te kunnen met zo'n apparaat. Als dat lukt, dan zullen ook vergelijkingen en ongelijkheden met de rekenmachine numeriek opgelost worden. Het huidige leerplan is dan ook een goede voorbereiding op een toekomst waarin de leerlingen krachtige grafische rekenmachines zullen hebben.

Meer informatie:

Achtergronden van het nieuwe leerplan wiskunde 12-16, band 1 hoofdstuk Rekenen.

De computer

In het Examenprogramma mavo/lbo C/D staat:

'Er wordt grote waarde gehecht aan het gebruik van de computer als hulpmiddel bij het oplossen van problemen. In de praktijk zal dat niet of nauwelijks bij het CSE kunnen gebeuren. De COW beveelt dan ook aan de scholen te verplichten tenminste eenmaal een toets in het SC op te nemen, waarbij de computer een onmisbaar hulpmiddel is.'

De computer speelt dus een duidelijke rol; niet al te prominent, maar zeker ook niet te verwaarlozen.

Volgens een voor de hand liggende indeling kun je de computer in het onderwijs op een drietal manieren gebruiken:

- voor het inoefenen van technieken;
- voor het ontwikkelen van begrip en inzicht;
- als een instrument bij het oplossen van problemen.

De computer als handige leverancier en boekhouder van oefensommetjes is nooit erg populair geworden. Ten minste niet binnen de wiskundewereld. Er is dan ook vrijwel geen software geschreven die zich op dit type gebruik richt.

Er is in de loop van de jaren een aantal programma's gemaakt die zich op de ontwikkeling van begrip(pen) richten. Die programma's gaan uit van een bepaalde didactiek, een bepaalde kijk op wiskunde-onderwijs. In Nederland kennen we geen staatsdidactiek, dus zal in officiële stukken deze software nooit worden voorgeschreven. De COW adviseert de computer te gebruiken bij het oplossen van problemen.

Binnen W12-16 zijn enkele programma's gemaakt die nauw aansluiten bij enkele nieuwe onderdelen van de leerstof. Deze programma's zijn bedoeld om leerstof te verkennen, niet om als oefensituaties te functioneren.

We noemen:

- TABEL, een programma waarmee allerlei zaken rond tabel, grafieken en formules in verbinding met contexten kunnen worden verkend.
- RM, een rekenmachine met extra's om de werking van variabelen en formules te exploreren.

TABEL en RM horen bij het ALCOR-pakket. Samen met een programma als VU-Grafiek zijn ze te beschouwen als gereedschap om wiskunde te bedrijven.

In de statistiek wordt onderscheid gemaakt tussen het verwerken van gegevens en het interpreteren van de resultaten. Er zijn diverse programma's waarmee de uitkomsten van bijvoorbeeld een enquête kunnen worden verwerkt. Voorbeelden van zulke programma's zijn: DATASTAT en VUstat. Dit soort programma's geven de mogelijkheid leerlingen kleine onderzoekjes op te laten zetten. Ook een idee voor een Geïntegreerde Wiskundige Activiteit.

We noemden TABEL en VU-grafiek als computerprogramma's die het beste opgevat kunnen worden als instrumenten bij het oplossen van problemen. Maar je kunt VU-grafiek ook gebruiken voor de ontwikkeling van lastige begrippen. Bijvoorbeeld het leren begrijpen van de rol van een parameter in een formule kan met dat programma goed ondersteund worden.

Er zijn ook programma's die speciaal gericht zijn op een bepaald aspect van de wiskunde. Voorbeeld hiervan is Grafiekentaal, bestaande uit *Badkuip* en *Flessenvuller*, nuttige programma's om het globaal bekijken van grafieken te leren. Een soortgelijk programma in de meetkunde is *Doorzien*. Het is binnen W12-16 ontwikkeld en hoort bij het pakketje 'Doorsneden'. Dit programma kan voor leerlingen als een tussenstadium dienen tussen het werken met concreet materiaal en het werken met een tekening. Je kunt met het programma doorsneden maken, maar je kunt bijvoorbeeld ook een doorsnede 'op ware grootte' uit de figuur lichten. Het programma nodigt uit tot verder onderzoek en stimuleert zo de verdere ontwikkeling van het ruimtelijk inzicht.

Met de opkomst van de rekenmachine is het schatten nog belangrijker geworden dan het altijd al was. Behalve het schatten van de uitkomst van een rekenopgave zijn er nog veel meer soorten schatten. Het schatten van een hoeveelheid, het schatten van een tijdsduur, het schatten van de grootte van een hoek, enzovoort. Over deze zaken gaat het programma 'Schatten'. Tijdens een reis die de leerlingen bij

een schat (!!) brengt, moeten ze op een 'adventure'-achtige manier allerlei opdrachten over schatten uitvoeren.

Het nieuwe leerplan zal, mogen we aannemen, wel zo'n tien jaar mee gaan. In die periode zal de computer verder inburgeren. De rekenmachine zal uitgroeien tot een klein, handzaam computertje met beeldscherm en al. Nieuwe media als beeldplaat en CD-I zullen hun intrede doen. Het nieuwe leerplan biedt mogelijkheden en ruimte genoeg om deze ontwikkelingen te volgen. De ontwikkelaars zijn voorzichtig geweest in het voorschrijven van nieuwe technieken. Niet alle mensen hunkeren naar verandering en niet iedere verandering is er een in de goede richting. Waar het om gaat is dat het nieuwe programma ruimte biedt om de computer een volwaardige plaats te geven. Er zijn onderdelen van het programma die als het ware vragen om computergebruik. We noemden ze al: het benaderend oplossen van gecompliceerde vergelijkingen en het verwerken van een enquête. Tegelijk is in het programma rekening gehouden met die scholen en die docenten die (nog) niet zijn ingesteld op een regelmatig gebruik van de computer bij de wiskundeles.

Met andere woorden: die computer komt er wel, maar in kleine stapjes.

Software:

<i>Alcor</i>	A. Goddijn	Freudenthal Instituut, Utrecht
<i>Doorzien</i>	M. Doorman e.a.	idem
<i>VU-grafiek</i>	P. van Blokland e.a.	Wolters Noordhoff, Groningen
<i>Data-stat</i>	S. Kemme e.a.	idem
<i>VU-stat</i>	P. van Blokland	Vrije Universiteit, Amsterdam
<i>Grafiekentaal</i>	H. Krabbendam e.a.	NIB, Zeist

Wiskundewerklokaal

Eén van de uitgangspunten van het nieuwe leerplan wiskunde is dat de wiskunde dicht bij de leerlingen moet staan. Leerlingen leren op verschillende manieren, met verschillende zintuigen. Daarom is het belangrijk dat bij wiskunde allerlei materialen gebruikt worden die het voorstellingsvermogen van de leerlingen prikkelen of het leerproces ondersteunen.

In het begin van het W12-16-project werd met een wiskundewerklokaal een compleet ingericht vaklokaal voor wiskunde bedoeld. Gaandeweg werd de term een symbool om aan te duiden dat materialen en gereedschappen belangrijk zijn bij het uitvoeren van allerlei opdrachten. Waar dat dan gebeurt maakt dan niet zo veel uit: in een gewoon lokaal, in een vaklokaal van bijvoorbeeld handvaardigheid of natuurkunde, maar soms ook buiten op het schoolterrein of thuis. Het zou het mooiste zijn als de wiskundelessen gegeven zouden kunnen worden in goed ingerichte vaklokalen voor wiskunde, maar de

praktijk leert dat dit op veel scholen geen haalbare zaak is. Dit was ook op sommige experimenteerscholen aanleiding om te zoeken naar alternatieven, die resulteerden in de volgende oplossingen:

- Een vaklokaal voor de hele sectie, waarin alle materialen voorhanden zijn.
- In verschillende lokalen een kast met daarin de spullen.
- Een zelf ontworpen kar, die verplaatsbaar is door de school.

Invoering in stappen

Het realiseren van een ruimte met allerlei materialen gaat niet van de ene dag op de andere, ook vanwege het geld. Dit heeft niet alleen nadelen. Na de aanschaf van een soort basisuitrusting kan op een later moment ander materiaal aangeschaft of gemaakt worden. Bij de keuze voor die middelen kunnen dan de opgedane ervaringen een rol spelen. Het verdient wel aanbeveling om er binnen school voor te zorgen dat het, net zoals bij biologie, handvaardigheid en natuurkunde, gebruikelijk wordt dat de sectie wiskunde over een behoorlijk budget kan beschikken. Een uitgebreide lijst van spullen en een voorbeeldbegroting staat in de APS-bundel 'Wiskundewerklokaal'. Een andere kant van het werken met concrete materialen is hoe je een en ander organiseert in de les. Dit kan variëren van een heel strakke organisatie tot een heel vrije, waarbij leerlingen gewoon door de klas lopen om spullen te pakken. Elke werkvorm eist voorbereiding. Het is raadzaam te kiezen voor verandering in kleine stappen, van bekende naar meer experimentele werkvormen.

Verschillend gebruik van materialen

Je kunt concrete materialen op verschillende manieren gebruiken. Hieronder worden er een paar genoemd en toegelicht.

- Middelen die gebruikt worden bij het aanbieden van een probleem. Dit kunnen allerlei voorwerpen zijn, maar ook foto's, dia's of video-opnamen.
- Middelen die gebruikt worden om iets te meten. Hieronder vallen niet alleen de gebruikelijke meetinstrumenten zoals liniaal en goniometer maar ook allerlei andere instrumenten, zoals een kompas, een metermaatje, een weegschaal, een stopwatch, een meetlint, en ook zelfgemaakte meetinstrumenten.
- Middelen die gebruikt worden ter ondersteuning van het voorstellingsvermogen. Dit is vooral belangrijk in driedimensionale situaties. Alleen allerlei ruimtelijke modellen kunnen hiervoor gebruikt worden, bouwplaatjes en verpakkingsmateriaal. Maar ook bijvoorbeeld een kubus van 1 m^3 , gemaakt van latten.
- Middelen waarmee onderzoek gedaan wordt. De materialen die hier bij gebruikt kunnen worden lopen zeer uiteen: Eigenschappen onderzoeken van een vierkant of parallellogram

met behulp van een blaadje papier. Met behulp van klei of ander materiaal vormen maken en doorsneden onderzoeken. Met behulp van lamplicht of zonlicht schaduwen van vlakke en ruimtelijke vormen bestuderen.

- Middelen om *modellen te maken*. Zo'n model kan bijvoorbeeld een plattegrond zijn of een schaalmodel van aarde-zon-maan waar binnen de oplossing gevonden wordt. Zo'n model kan ook een hulpmiddel zijn om een manier te ontdekken om het probleem op te kunnen lossen. Bij het probleem 'Zie je nu meer, minder of precies de helft van dit cilindervormig gebouw?' is een papieren cilinder een hulpmiddel om te komen tot een verklarende doorsnede tekening.
- Middelen gebruiken als '*smaakmaker*'. Allerlei materialen die leerlingen kunnen boeien en uitdagen er iets mee te doen. Hierbij denken we bijvoorbeeld aan:
 - een leesplank met mooie boeken en tijdschriften;
 - een kast met strategie- en denkspelletjes zoals Go, Master Mind, Schaken, Dammen, Knopentouwen, Tangram;
 - leerlingenwerk in het lokaal, zoals tekeningen geconstrueerd met de passer of zelfgemaakte (draad)modellen;
 - een tentoonstelling maken, bijvoorbeeld over de langste dag met instrumenten, verpakkingen, bouwwerken.

Meer informatie:

'Wiskundewerklokaal', Samenwerkingsgroep Wiskunde 12-16, APS
Achtergronden van het nieuwe leerplan wiskunde 12-16, band 1. hoofdstuk Meetkunde.

Inrichting van het onderwijs

Door de invoering van kerndoelen voor alle vakken en een nieuw leerplan wiskunde wordt er heel wat overhoop gehaald. Voor een grote groep leerlingen komt daar voor wiskunde ook nog een ander examen bij. Dat betekent dat alle docenten die aan de leeftijdscategorie twaalf tot zestien jaar les geven, zich opnieuw moeten oriënteren op de inrichting van hun onderwijs. Een belangrijke steun daarbij is natuurlijk een goed schoolboek, waarin de nieuwe leerstofinhouden verwerkt zijn. Ook op andere terreinen hebben deze veranderingen repercussies. Zo zijn op verschillende scholen al discussies gaande over de verdeling van lesuren. Deze kwestie is niet zozeer aan de orde door de invoering van een nieuw leerplan voor wiskunde maar heeft vooral te maken met de basisvorming, die vanaf het schooljaar 1993-94 landelijk wordt ingevoerd.

Een heroriëntatie zal ook nodig zijn wat betreft het eindexamen. Wat verandert er precies? Wat wordt belangrijk gevonden in de nieuwe examens? Hoe bereid ik mijn leerlingen daarop voor? Welke vorm en inhoud wil ik voor mijn schoolonderzoeken kiezen?

Niet alleen examens en schoolonderzoeken veranderen. Er zullen ook proefwerken moeten komen die passen bij het nieuwe programma. Om dit soort veranderingen aan te kunnen lijkt het van groot belang om in de sectie het werk te verdelen en steun te zoeken bij elkaar.

Dan is er nog een belangrijke vraag over de manier waarop wiskundige zaken opgeschreven worden. Welke symbolen moeten leerlingen wel en niet kennen? Als we van leerlingen een redenering vragen, wat mogen we dan wel en niet accepteren? Bij het oude leerplan waren er nomenclatuurafspraken. Ook nu moeten er duidelijke afspraken komen.

Lessentabel

In het Trajectenboek heeft de COW de leerstof beschreven voor alle leerjaren vbo en mavo en voor de eerste drie leerjaren van havo en vwo. Bij elk leerstofonderdeel is aangegeven hoeveel lestijd er voor uitgetrokken is. Dit aantal lesuren moet gelezen worden als een indicatie; er moet zeker geen absoluut gewicht aan toegekend worden. De verijning in uren aantallen is vooral opgenomen om te kunnen controleren of de leerstof haalbaar is in de uitgetrokken lestijd. De nadrukkelijke bedoeling was om een wiskundeprogramma samen te stellen dat niet voortdurend onder tijdsdruk staat.

Bij die beschrijving heeft de COW de volgende lessentabel als uitgangspunt gekozen:

B	4-3-3-3
C	4-3-3-4
D	4-3-3-4
havo	4-3-3
vwo	4-3-3

Deze lessentabel sluit aan bij de adviestabel voor de basisvorming waarin 400 uren worden uitgetrokken voor wiskunde, hetgeen overeenkomt met tien wekelijkse uren verspreid over de leerjaren. Voor mavo, havo en vwo ligt de lessentabel die in het Trajectenboek gehanteerd wordt niet ver af van de huidige praktijk. Voor vbo-scholen/afdelingen is dat anders; daar zijn nogal wat leerlingen die het op dit moment met veel minder moeten doen.

Om in de diverse trajecten op een verantwoorde wijze aan de kern doelen wiskunde en het nieuwe leerplan te werken zal het aantal uren niet aanzienlijk kunnen afwijken van de hierboven genoemde lessentabel. De leerstof in het Trajectenboek is zo geordend dat de kerndoelen voor de basisvorming verwerkt zijn in: twee leerjaren voor het havo/vwo-traject, drie leerjaren voor het vbo/mavo-C/D-traject en vier leerjaren voor het B-traject.

De vrijheid van scholen wat de inrichting van het onderwijs betreft zal de komende tijd groter worden. Lessentabellen zijn slecht adviestabellen of zij nu komen van het ministerie, het procesmanagement basisvorming of verenigingen voor beroepsonderwijs. Iedere school zal zelf keuzen moeten maken. Door het nieuwe programma heeft het vak wiskunde aan alle leerlingen zinvolle inhoud te bieden. Het zal afhangen van de keuzen die op scholen gemaakt worden of alle leerlingen ook de kans krijgen een aantal jaren hun mogelijkheden bij het vak wiskunde te beproeven.

Eindexamen

In 1990, 1991 en 1992 zijn aan enkele scholen experimentele examens vbo/mavo C/D afgenomen. Het examen van 1990 was nog volledig gebaseerd op het oude examenprogramma maar werd wel op een nieuwe manier afgenomen. Dat van 1991 volgens een licht gewijzigd programma en dat van 1992 volgens een nog verder vernieuwd programma. Pas in 1994 wordt op een tiental proefscholen examen gedaan volgens het nieuwe programma. Naar verwachting zullen alle scholen in Nederland in 1997 examens nieuwe stijl afnemen.

De experimentele examens zijn zowel naar vorm als naar inhoud sterk afwijkend van de gebruikelijke examens. Hieronder volgt een aantal karakteristieken van de nieuwe experimentele examens.

- Er worden *geen meerkeuzevragen* gesteld. Dat betekent dat in to taal minder onderwerpen aan bod kunnen komen. Dat is overigens ook bij de wiskunde-examens op havo en vwo al gebruikelijk.
- Er wordt veel aandacht besteed aan toetsing van het *gebruik van*

wiskunde in voor leerlingen herkenbare situaties. Een artikel uit de krant, een toepassing in de beroepssfeer. Leerlingen krijgen minder standaardwerk en moeten een grote diversiteit in vraagstellingen aankunnen.

- Bij het beantwoorden van de vragen ligt de nadruk op het geven van een *goede redenering*. Zo'n redenering mag ook aan de hand van een tekening gemaakt worden. Als de context dat vereist moet bij het antwoord een goede maataanduiding gegeven worden.
- De *normering* van de antwoorden geeft een grotere vrijheid aan de docent omdat deze immers de kwaliteit van de gegeven redenering zal moeten beoordelen.
- Leerlingen mogen tijdens het examen gebruik maken van een *formulekaart*. Er kunnen ook vragen worden gesteld over formules die de leerlingen nooit eerder hebben gezien maar die op het examen worden gegeven en met inleidende vragen toegelicht.
- Tijdens het examen is het *gebruik van andere middelen*, zoals een schaar, e.d. toegestaan. Op de gebruikelijke wijze zullen scholen geïnformeerd worden over welke zaken in de toekomst gebruikt mogen worden op de examens.
- Door *gebruik van plaatjes* wordt vermeden dat leerlingen grote stukken toelichtende tekst moeten lezen.

Elk jaar verschijnt een Examenbundel waarin de experimentele examens van de afgelopen twee jaar zijn opgenomen. Van het voorlaatste examen wordt een examenverslag opgenomen met uitwerkingen van leerlingen.

Meer informatie:

Examenprogramma wiskunde vbo/mavo C/D, juli 1992

Examenbundel 1992.

Schoolonderzoek

Uiteraard worden de schoolonderzoeken door de docenten zelf gemaakt. Daarin kan rekening worden gehouden met wat in de lessen is behandeld. Op de proefscholen is geëxperimenteerd met verschillende vormen van toetsen. Zo is er bijvoorbeeld een mondeling schoolonderzoek afgenomen. Leerlingen kregen vragen over een project dat ze met een groepje leerlingen hadden uitgevoerd of over een werkstuk dat ze hadden gemaakt. Zo'n werkstuk kon ook betrekking hebben op een onderwerp dat niet op het Centraal Schriftelijk Eindexamen (CSE) getoetst wordt.

Sommige onderdelen uit het examenprogramma kunnen niet op het CSE worden getoetst, zoals gebruik van de computer of GWA (geïntegreerde wiskundige activiteiten). De COW beveelt aan om één van de schoolonderzoeken aan dit soort onderdelen te besteden.

Proefwerken

Ervaren docenten (en goed georganiseerde secties) beschikken veelal over een welgevulde klapper met proefwerken. Het samenstellen van een nieuwe toets kost niet zoveel tijd meer en als een proefwerk ingehaald moet worden is er altijd wel een reserve exemplaar in voorraad. Helaas, deze klapper is door de invoering van het nieuwe leerplan waardeloos geworden. Zo'n nieuw leerplan brengt op allerlei terrein extra werk met zich mee. En het zijn niet alleen de nieuwe opgaven waarover je moet nadenken. In de proefwerken zullen meer open vragen voorkomen. Welke antwoorden reken je dan goed, welke half goed en welke fout? En hoeveel opgaven kunnen de leerlingen in een lesuur maken?

Zo verstoort elk nieuw leerplan het evenwicht dat docenten met hun leerlingen gevonden hebben. Ervaren docenten weten wat hun leerlingen kunnen en vaak kunnen zij ook zonder proefwerk vrij nauwkeurig inschatten in hoeverre een leerling de materie heeft begrepen. Maar die vakkennis is met het nieuwe leerplan gedateerd geworden en moet gedeeltelijk opnieuw ontwikkeld worden. Er moeten nieuwe proefwerken komen en dat houdt in: nieuwe opgaven bedenken, nadenken over de benodigde tijd, nadenken over normering, wat is nog voldoende en wat niet en je een idee vormen van het eindexamenniveau.

Gelukkig valt er iets te leren van de leerplanwijzigingen in de bovenbouw van havo en vwo. Omdat ook daar de verandering neerkomt op meer realistisch wiskundeonderwijs is de problematiek met proefwerken vergelijkbaar. Hoe hebben de collega's uit de bovenbouw hun problemen aangepakt?

- Tijdens de nascholing kreeg het maken van proefwerken veel aandacht. Ook werden er op deze cursussen netwerken gevormd van docenten die elkaar van proefwerken voorzagen.
- Er verschenen proefwerkbundels, met proefwerken die op de experimenteerscholen waren gemaakt.
- Gaandeweg kregen ook de uitgevers beter in de gaten waar hun gebruikers behoefte aan hadden. Zij stelden proefwerkbundels samen passend bij de methode.
- De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren stelde een bundel samen met opgaven op examenniveau.

Iets dergelijks zal gebeuren bij de W12-16 leerplanwijziging. Het APS is van plan elk jaar een toetsenbundel te publiceren. De eerste bundel met toetsen uit de experimenteerscholen is in 1991 verschenen. In nascholingsbijeenkomsten zal aandacht besteed worden aan de 'kunst van het maken van proefwerken'.

Methoden zullen op het punt van proefwerken service verlenen aan hun gebruikers.

Er is rond proefwerken nog een misverstand dat snel uit de wereld geholpen kan worden. Het komt voor dat docenten W12-16- leerlin- genmateriaal zien en zich dan bezorgd afvragen hoe je daar een proef- werk bij maakt. Maar de meeste docenten zullen gaan werken met schoolboeken die veel meer structuur bieden. Sommige boeken wer- ken nu al met samenvattingen (Getal en Ruimte, Moderne Wiskunde) of met zogenaamde leerkernen (Wiskundelijfn) en dat zal ook gebeu- ren in de nieuwe edities. Een toets maken bij zo'n leerboek is lang niet zo spannend en vraagt ook lang niet zoveel creativiteit als het maken van een toets bij een W12-16-pakketje.

Meer informatie:

Toetsenbundel klas 1 (APS), najaar 1991

Samenwerken in de sectie

De invoering van het nieuwe leerplan vraagt een aantal beslissingen op sectieniveau. Denk maar aan: het kiezen van een methode, de in- richting van een wiskundewerklokaal, de toetsing van de basisvor- ming; het moment en het niveau van de nascholing; wie gaat erheen en wanneer?

Een sectie kan alleen maar goed functioneren als de school als or- ganisatie en de individuele docenten dat willen. Heel belangrijk is dan een vast tijdstip waarop er door de sectie vergaderd kan worden.

Tijdens de voorlichting basisvorming en de proefuitvoering van de nascholing bleek hoe inspirerend het kan zijn om als sectie ervarin- gen uit te wisselen over didactische vraagstukken. Tegelijk werd dui- delijk dat het voor sommige secties de eerste keer was dat men zich gezamenlijk had gebogen over zo'n vraagstuk. Het blijft een dilemma: samenwerken in de sectie kost tijd en moeite, maar die samenwer- king kan ook heel wat opleveren. Wat zijn in deze tijden van verande- ring de voordelen van een goed draaiende sectie?

In een sectie kun je voorlopers hebben en docenten die liever de kat nog even uit de boom kijken. De voorlopers staan meestal positief tegenover de veranderingen. Het is verstandig dat deze mensen het voortouw nemen. Collega's die liever wat afwachten kunnen dan pro- fiteren van de ervaringen van deze voorlopers. Er moet dan wel plaats en tijd zijn voor de overdracht van die ervaringen. De sectie moet dat organiseren.

Bij de nascholing is het mogelijk een zogenaamd sectie-abonne- ment te nemen. De voorbereidingscursus is opgesplitst in modules. Naar elke module gaan dan twee personen. Per module kan een an- der tweetal aanwezig zijn. Het cursusmateriaal is zo samengesteld dat de inhoud met weinig moeite over te dragen is aan de andere col-

lega's. De voordelen springen in het oog: individueel ben je minder tijd kwijt en de kennis over het nieuwe leerplan wordt verspreid over de sectie. Een voorwaarde is wel dat de sectie redelijk groot is en goed functioneert. Bij de cursus horen bijvoorbeeld praktische oefeningen in de klas. Er moet gelegenheid zijn deze en andere ervaringen samen te bespreken.

Hierboven werd aangeraden voorlopers het voortouw te gunnen in de vernieuwing. Zij willen er tegenaan gaan. Laat die docenten ervaren waar zich de praktische bezwaren bevinden. Hoe werk je met concreet materiaal? Hoe doe je iets aan GWA? Laat hen ook provisorische oplossingen verzinnen. Andere collega's kunnen van hun inspanningen profiteren. Zo kan een goed georganiseerde sectie voor rust zorgen. Je hoeft niet alles alleen te doen, je kunt taken verdelen en alles hoeft ook niet tegelijk te gebeuren. Wel ligt er een gevaar op de loer. Een sectie moet ervoor waken dat het niet steeds de enthousiastelingen zijn die conferenties en cursussen aflopen. Dan groeit de sectie steeds verder uit elkaar. En dan kun je elkaar niet meer inspireren.

Een sectie is ook een machtsfactor binnen een school. En dat aspect wordt belangrijker naarmate een sectie meer noten op haar zang heeft. In vroeger tijden had je als wiskundesectie niet veel meer nodig dan een passer en een geodriehoek. Die tijd is voorbij. Een loyale uitvoering van het nieuwe leerplan vergt heel wat leermiddelen: concrete materialen, overheadprojector, modellen, computer en als het even kan een eigen lokaal. Het sectiebudget komt dan in de buurt te liggen van f 1500,- per jaar. Dergelijke bedragen komen niet zomaar beschikbaar. Een goed georganiseerde sectie is ook daarvoor belangrijk.

Samenwerking met andere secties

Wiskunde is een basismat, waarin leerlingen algemene kennis en vaardigheden opdoen, die nodig zijn bij het leren van andere vakken. Een vak voor alle leerlingen, waar de inhoud en de gekozen zijn dat alle leerlingen er ook zinvol mee bezig kunnen zijn.

Contexten

Door het gebruik van contexten is wiskunde minder streng gescheiden van de andere vakken dan vroeger. Als wiskundeleraar kom je wel sneller op het gebied van een collega die een ander vak onderwijst. In voorkomende gevallen kan het handig zijn bij een collega te rade te gaan om wat meer achtergrondkennis ter beschikking te hebben over een bepaalde situatie.

Ook al raak je aan elkaars vakken, het blijft in de wiskundelessen natuurlijk om de wiskunde gaan. Wat verandert is dat wiskunde meer geleerd wordt aan de hand van goed gekozen situaties, waar de leerlingen zich iets bij kunnen voorstellen. Deze zullen soms gekozen

worden uit een ander vakgebied. Maar als bij wiskunde dezelfde leerstof voorkomt als bij andere vakken, gaat het toch om andere zaken. Bijvoorbeeld een cirkeldiagram: bij wiskunde gaat het om de manier waarop informatie wordt weergegeven, bij aardrijkskunde gaat het om de informatie zelf.

Een ander voorbeeld uit een experimenteel algebrapakkket (fig.1).

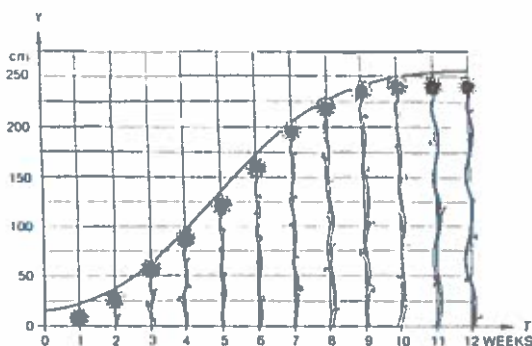


fig. 1

De context van de zonnebloem wordt benut om een bepaalde vorm van verandering aan de orde te stellen. Kennis over de groei van zonnebloemen is middel, geen doel.

Wiskunde wordt taliger

Het vak Nederlands zal ervan profiteren dat ook bij wiskunde geoefend wordt in tekstbegrip. De collega Nederlands kan goede raad geven als zich talige problemen voordoen in de wiskundeles. Maar ook van andere collega's kun je als wiskundeleraar leren hoe je leerlingen helpt bij het lezen van stukjes tekst.

Wiskunde meer een steunvak

Een ander gevolg van het nieuwe leerplan, is dat wiskunde zich meer dan voorheen dienend opstelt ten aanzien van andere vakken. Het netto-effect zal zeker positief zijn voor de collega's van andere vakken, toch zijn er veranderingen waar collega's even aan zullen moeten wennen. Hoewel alle vakverenigingen zijn geïnformeerd over de veranderingen bij wiskunde, is het nodig om collega's te informeren over deze veranderingen.

De natuurkundecollega moet weten:

- Er wordt niet alleen met x-en en y-en gewerkt in de wiskunde, ook met andere lettervariabelen.

- Op intuïtieve manier wordt er met allerlei soorten formules gewerkt, niet alleen met eerste- en tweedegraads.
- Het formeel rekenen met letters/variabelen is naar het tweede en derde leerjaar verschoven, en krijgt wat minder aandacht.
- Er worden andere methoden voor het oplossen van vergelijkingen geleerd.

De economecollega:

- Werken met de verhoudingstabel.
- De aanpak voor rekenen met procenten zal in de meeste schoolsoorten anders zijn.

Nomenclatuur

In mei 1992 is een nomenclatuurcommissie ingesteld door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW).

De commissie heeft de opdracht om op korte termijn nomenclatuurvoorstellen te doen behorend bij het leerplan zoals beschreven in het Trajectenboek.

Er wordt gewerkt aan een rapport met vier soorten van aanwijzingen:

- aanwijzingen bij het examenprogramma, voor de examenmakers
- aanwijzingen voor het examen, voor de leerlingen;
- aanwijzingen voor de docent, over beoordeling van examenwerk;
- aanwijzingen voor taal en gebruik van notatie voor leerlingenteksten.

De commissie maakt eerst een voorlopig rapport. Dit rapport wordt besproken met onder andere auteurs en uitgevers.

De NVvW hoopt het herziene rapport najaar 1992 gereed te hebben. Gestreefd wordt naar publikatie in Uitleg eind 1992.

Het nomenclatuurvoorstel kan worden bijgesteld in de periode tot 1996, ruim een jaar voor het eerste nieuwe landelijke examen. Bijstellingen kunnen dan plaats hebben mede op grond van ervaringen met de proefscholen.

Basisvorming

Toen de COW en het team W12-16 in het schooljaar 1987-'88 aan het werk gingen met de opdracht van de staatssecretaris, stond de basisvorming nog slechts in ruwe schetsen op papier. De vormgeving van de basisvorming en alles wat daarmee samenhangt, was nog aan veel veranderingen onderhevig. Over allerlei belangrijke kwesties moest nog politiek overleg plaats vinden, voordat er knopen konden worden doorgehakt. De opdracht aan de COW was om leerplannen en een examenprogramma mavo/vbo te ontwikkelen en de adviezen daarover in augustus 1992 in te dienen. De adviezen moesten passen bij de basisvorming, zo was de uitdrukkelijke opdracht. Toen voor alle vakken zogenaamde eindtermencommissies werden ingesteld, kreeg de COW als extra opdracht de eindtermen voor wiskunde te formuleren.

Leerplan, kerndoelen, examenprogramma

Leerplannen, kerndoelen, eindtermen, examenprogramma's: zijn dat nu allemaal andere woorden voor hetzelfde of gaat het om echt verschillende zaken? Wat al deze aanduidingen in ieder geval gemeen hebben, is dat ze een beschrijving geven van inhoud die in het onderwijs aan de orde moeten komen. Over de manier waarop dat onderwijs gegeven moet worden, over de schoolorganisatie die erbij hoort, over de daarvoor beschikbare lesuren, over de diepgang of het niveau, is dan nog niets gezegd. Ook is nog niets duidelijk over wie verantwoordelijk is voor het onderwijs in de beschreven inhoud. En er zijn velen die daar invloed op hebben: de docent, de schoolleiding, de schoolboekenschrijver, de inspectie, de examenmakers, de opstellers van 'Toetsen basisvorming', het schoolbestuur, het ministerie van O&W, eventuele subsidiegevers, de ouders, de politiek, het vervolgonderwijs.

Examenprogramma

De opdracht van de staatssecretaris aan de COW om met voorstellen te komen voor een nieuw examenprogramma vbo/mavo C-en D-niveau, is het meest duidelijke verzoek aan de commissie. Dat examenprogramma wordt wettelijk vast gesteld en op basis daarvan worden eindexamens gemaakt. De examenprogramma's en de daarop gebaseerde examens blijven bestaan, ook als straks de basisvorming wordt ingevoerd.

Leerplannen

De staatssecretaris heeft ook gevraagd om bijbehorende leerplannen voor de schooltypen vbo, mavo, havo, vwo te ontwikkelen. Leerplannen spelen een veel minder duidelijke rol in ons onderwijs. Ze hebben

geen wettelijke basis, zoals examenprogramma's. Scholen stellen zelf leerplannen op, deze worden officieel vastgesteld door het schoolbestuur. De inspectie krijgt de leerplannen voor alle leerjaren opgestuurd om zich een indruk te kunnen vormen van het onderwijs op de betreffende school. Toen er nog rijksscholen waren, stelde het ministerie - als schoolbestuur - de leerplannen van die scholen vast. Deze door het ministerie goedgekeurde leerplannen werden door andere scholen vaak als voorbeeld gebruikt. Deze situatie bestaat niet meer.

Toch is het niet vreemd dat de staatssecretaris de COW ook om leerplannen heeft gevraagd. Daarin wordt meer gedetailleerd beschreven welke leerstof in welke leerjaren behandeld kan worden om op een verantwoorde manier bij het eindexamen(-programma) uit te komen. Het examenprogramma markeert een wenselijk eindpunt en dan nog alleen voor die leerlingen, die een vbo/mavo-examen op C- of D-niveau doen. De leerplannen geven een meer compleet beeld van de leerstof in alle leerjaren en over de volle breedte. Bovendien zijn leerplannen van groot belang bij het schrijven van goede leerboeken. Het team W12-16 en de COW hebben een bepaalde vorm gekozen voor het beschrijven van de leerstof voor de diverse schooltypen: het Trajectenboek. Dat boek is als officieel leerplanadvies door de COW aan de staatssecretaris aangeboden. Het Trajectenboek is een nogal dor document. Op elke bladzijde staat een leerstofonderdeel beschreven in: een titel, een aantal lesuren, een omschrijving, een zogenaamde kennen-en-kunnen-lijst en samenvattende begrippen.

Kerdoelen

Kerdoelen en eindtermen zijn een betrekkelijk nieuw fenomeen in ons onderwijs. Wat het voortgezet onderwijs betreft worden ze steeds gebruikt in relatie met de basisvorming. Nieuw is vooral dat leerstofinhouden per vak, die door grote groepen leerlingen bereikt moeten kunnen worden, wettelijk worden vastgelegd. Voor ieder vak is een commissie ingesteld die voorstellen moest doen voor eindtermen. Deze eindtermen zijn door anderen herschreven en veel beknopter en globaler geworden. De aldus omgevormde eindtermen gaan nu onder de naam 'kerndoelen' door het leven. Deze kerndoelen worden per vak samen met de wettelijke regelingen voor basisvorming in de Tweede en Eerste Kamer behandeld en vastgesteld.

Belangrijk is dus dat kerndoelen een wettelijke basis hebben. Ze zijn echter zo globaal beschreven, dat er nog veel ruimte voor interpretatie overblijft.

Goede afstemming

Bij wiskunde is één en dezelfde commissie, de COW, verantwoordelijk geweest voor het opstellen van leerplannen, examenprogramma en

eindtermen. Daardoor was een goede afstemming mogelijk tussen deze drie verschillende beschrijvingen van de inhoud van nieuw wiskundeonderwijs. Deze beschrijvingen zullen voor verschillende doelen gebruikt worden. Immers de ontwerpers van toetsen voor de basisvorming zullen zich oriënteren op de kerndoelen en de makers van eindexamens op het examenprogramma. Schoolboekenschrijvers zullen alle drie de produkten moeten benutten om tot goede schoolboeken te komen. Een boek als dit is, zoals de titel al aangeeft, vooral bedoeld om docenten wegwijs te maken in alle veranderingen die op hen afkomen.

Het **Examenprogramma** (juli 1992) is door de COW aan de staatssecretaris aangeboden en zal na een officiële adviesronde worden vastgesteld. De kern van het examenprogramma zal daarna ongetwijfeld worden gepubliceerd in bladen als *Uitleg*, *Euclides* en de *Nieuwe Wiskrant*.

Het **Trajectenboek** is een beschrijving van leerstof uitwaaiend in vijf trajecten (vbo-B, vbo/mavo-C, vbo/mavo-D, havo, vwo). In de leerstof voor de eerste twee leerjaren is nog sprake van een horizontale afstemming tussen de schooltypen, hoewel ook daar al accenten zijn aangegeven voor de verschillende schooltypen. In het tweede leerjaar worden met name voor havo en vwo al extra onderwerpen aangegeven. In de twee volgende leerjaren (vbo, mavo) en het derde leerjaar (havo, vwo) gaan de trajecten en de daarin beschreven leerstof sterker uiteen lopen. De inhoud is beschreven in termen van wat leerlingen moeten 'kennen en kunnen'.

De kerndoelen wiskunde zijn opgenomen in het **Trajectenboek** en per kerndoel is aangegeven waar aan dit specifieke kerndoel wordt gewerkt. In het **Trajectenboek** is een interpretatie van de kerndoelen vervlochten door de leerstof heen. Het is niet zo dat eerst aan de kerndoelen gewerkt wordt en daarna voor sommige leerlingen aan wat in het **examenprogramma** staat. Anders gezegd: er wordt niet na elkaar aan kerndoelen en examenprogramma gewerkt maar naast elkaar. Dat is althans de manier waarop de leerplannen door de COW en het team zijn uitgewerkt.

Unieke positie wiskunde

Bij de invoering van de basisvorming neemt wiskunde ten opzichte van andere vakken een unieke positie in. Bij wiskunde hebben we te maken met twee operaties die tegelijkertijd plaatsvinden: invoering van een nieuw programma én invoering van de basisvorming. Ook zonder basisvorming zou er naar alle waarschijnlijkheid voor wiskunde een nieuw leerplan zijn ingevoerd. Deze gelijktijdige invoering maakt ook dat de nascholing voor het vak wiskunde veel meer inhoud heeft dan die voor de meeste andere vakken.

Wij zijn ervanuit gegaan dat naast de toetsing van de basisvor-

ming het afsluiten na vier jaar van een schoolloopbaan op B-niveau blijft bestaan. In het nieuwe B-programma is de leerstof die in de kerndoelen is beschreven, verdeeld over vier leerjaren. Voor de proefscholen zijn schoolexamens op B-niveau samengesteld, die passen bij het nieuwe programma. Het ligt in de bedoeling hier ook de komende jaren mee door te gaan. Dan zal ook duidelijk moeten worden hoe het B-examen zich verhoudt tot de toets basisvorming.

Meer informatie:

Examenprogramma vbo/mavo C/D, juli 1992

Trajectenboek Wiskunde 12-16, juli 1992

Op weg naar basisvorming: wiskunde (SLO), 1991.

300 vragen over de basisvorming (APS), 1992.

De toetsing van de basisvorming in het tweede leerjaar (APS), najaar 1992.

EINDPUBLIKATIES W12-16

Trajectenboek, juli 1992

Dit boek bevat de leerplannen voor vbo, mavo, havo en vwo zoals ze door de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (COW) zijn voorgesteld aan de minister van Onderwijs en Wetenschappen. Het boek bevat een gedetailleerde beschrijving per leerjaar van de verschillende onderwerpen die aan de orde moeten komen. Elk leerstof-onderdeel is beschreven in wat leerlingen moeten kunnen en kennen en gekarakteriseerd in 'samenvattende begrippen'. De leerplannen zijn uitgesplitst in een B-traject voor vbo, een C- en D-traject voor vbo en mavo dat past bij de nieuwe exameneisen, een havo-traject en een vwo-traject. De kerndoelen voor de basisvorming zijn opgenomen met een verwijzing naar leerstof die past bij elk kerndoel. Het boek sluit af met een alfabetische lijst van de samenvattende begrippen.

Examenprogramma, juli 1992

Dit is het uiteindelijke advies dat door de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (COW) is aangeboden aan de minister van Onderwijs en Wetenschappen. Het boek bevat een uitvoerige inleiding met een korte toelichting op de inhoud, een beschrijving van de verschillen tussen C- en D-niveau en opmerkingen over de inrichting van het examen en schoolonderzoek. Daarna volgt het eigenlijke examenprogramma uitgesplitst in de onderdelen algebra, meetkunde, rekenen, informatieverwerking en statistiek, geïntegreerde wiskundige activiteiten. Het boek eindigt met een toelichting op de onderdelen uit het examenprogramma.

Achtergronden band 1 en band 2, juli 1992

In deze boeken wordt een uitvoerige verantwoording gegeven voor de inhoud van het nieuwe leerplan. Naast een beschrijving per leerstofgebied en een toelichting van het B-programma is beschreven waarom de voorgestelde programma's ook goed zijn voor meisjes. Tenslotte is een overzicht opgenomen van publikaties van en over het project W12-16.

Wiskunde een Wereldvak, juli 1992

Goed realistisch wiskundeonderwijs brengt de buitenwereld de les binnen, en speelt daarbij professioneel in op de multi-etnische samenstelling van de klas en van de maatschappij. Dat is de boodschap van 'Wiskunde een Wereldvak', waarin struikelblokken voor allochtone leerlingen en intercultureel onderwijs centrale thema's zijn.

ADRESSEN

Freudenthal Instituut
Tiberdreef 4
3561 GG Utrecht
tel.: 030 - 611611

SLO Instituut voor Leerplanontwikkeling
Postbus 2041
7500 CA Enschede
tel.: 053 - 840840

Algemeen Pedagogisch Studiecentrum
Postbus 7888
1008 AB Amsterdam
tel.: 020 - 5481811

U kunt op de hoogte blijven van de ontwikkelingen op het gebied van het wiskundeonderwijs via artikelen in de volgende bladen:

Euclides. Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundelera-
ren

F.F.J. Gailard
Ledenadministratie:
Jorisstraat 43
4834 VC Breda
tel. 076 - 653218

Abonnementen voor niet-leden:
Wolters-Noordhoff BV, afd. Verkoopadministratie
Postbus 567
9700 AN Groningen
tel. 050 - 226886

Nieuwe Wiskrant
Abonnementen:
Freudenthal Instituut
Tiberdreef 4
3561 GG Utrecht

