

Nederlandse samenvatting

Aanleiding

Alvorens het doel en de aanpak van het promotieonderzoek te schetsen gaan we eerst in op de aanleiding voor het onderzoek. We beschouwen een algemeen probleem in het wiskundeonderwijs en we geven inzicht in wat we bedoelen met klassengesprekken en het werk van de docent daarin.

Wiskunde heeft een bijzondere plek in onze samenleving. Aan de ene kant vinden we het belangrijk dat alle leerlingen rekenen en wiskunde leren op school. Aan de andere kant is het heel normaal om bij het woord “wiskunde” een afwerend gebaar te maken en zoiets te zeggen als: “daar was ik echt heel slecht in” of “dat is niets voor mij”. Kijkend naar deze inconsistentie is het zinvol om je af te vragen wat het overkoepelende doel is van wiskundeonderwijs: waarom willen we dat kinderen wiskunde leren? Om wiskundige concepten en procedures te kennen? Bijvoorbeeld zodat ze weten wat een raaklijn is en hoe je de formule ervan opstelt? Dat hoeven de meeste volwassenen nooit meer te doen in hun leven na school.

Toch is er in het huidige wiskundeonderwijs (zowel in Nederland als in veel andere landen) veel nadruk op het aanleren van procedures, bepaalde manieren om een bepaald soort opgave op te lossen. Leerlingen krijgen een procedure uitgelegd (of lezen het voorbeeld in het boek) en oefenen daarna een heel aantal opgaven waar de procedure gebruikt kan worden. Het lijkt soms wel of het doel van het wiskundeonderwijs is om alle sommen uit het boek te kunnen maken, en er is daardoor sprake van een sterke focus op het vinden van het juiste antwoord. Een resultaat hiervan is dat wiskunde door veel mensen wordt gezien als een set regels en procedures. Als deze regels en procedures zijn geleerd zonder begrip en samenhang, dan is het logisch dat men achteraf zegt: “daar ben ik echt heel slecht in”. Je zou dan immers elke keer door herinnering precies moeten weten welke concepten en procedures je kunt gebruiken bij een vraagstuk.

Volgens velen is het doel van het wiskundeonderwijs dat leerlingen wiskundig leren denken. Wiskundig denken is namelijk iets waar je veel aan hebt in je verdere leven en wat je kan helpen om jezelf goede vragen te stellen, kritisch over informatie te redeneren, en problemen op te lossen. Deze visie zet dus de wiskundige activiteit, het wiskundige denken, centraal in plaats van de wiskundige inhoud. De wiskundige concepten en procedures die kinderen op school leren zijn dan eigenlijk een soort denkgereedschap dat ze kunnen gebruiken in het wiskundig denken en in het leren van wiskundig denken. Het idee dat leerlingen in het wiskundeonderwijs meer moeten leren dan stappenplannen en dat ze juist moeten leren om wiskundig te denken is inmiddels breed gedragen, zeker onder onderzoekers, vakdidactici en curriculumontwerpers. Om meer balans te krijgen

in de aandacht voor wiskundige inhoud en wiskundige processen, zijn een aantal jaar geleden Wiskundige Denkactiviteiten een onderdeel geworden van het Nederlandse wiskundecurriculum voor havo/vwo. Door leerlingen regelmatig aan problemen te laten werken en te laten reflecteren op hun manieren van oplossen is het de bedoeling dat wiskundeleraren het wiskundig denken van hun leerlingen ontwikkelen. Dat blijkt moeilijker dan gedacht en leraren zouden graag meer handvatten hebben om met hun leerlingen aan Wiskundige Denkactiviteiten te werken.

Twee belangrijke activiteiten in het ontwikkelen van wiskundig denken zijn het werken aan problemen en het reflecteren op oplossingsmethoden. Een vraagstuk is een probleem voor leerlingen als er geen oplossingsmethode voor de hand ligt. Dat kan dus ook een gewone opdracht uit het boek zijn: als leerlingen hun boek dicht hebben kunnen ze niet op zoek gaan naar een uitgewerkt voorbeeld dat ze kunnen gebruiken. Bij wiskundige problemen is het vaak, of misschien wel altijd, zo dat er verschillende manieren zijn om er naar te kijken en verschillende manieren om het op te lossen. In het (uitwerkingen) boek staat echter meestal maar één manier. Als we het wiskundig denken van leerlingen willen ontwikkelen dan moeten we niet hun eigen manieren van denken uitwissen en vervangen door een standaard manier, maar dan moeten we juist beginnen bij hun eigen manieren van denken en ze helpen om daar op te reflecteren. Dat de leerling dus leert om zich af te vragen: Waarom leiden die stappen die ik net heb gezet tot een oplossing van het probleem en had het ook anders gekund? En bij onzekerheid hierover: hoe kan ik inzien of mijn redenering juist is? Het werken aan problemen en het reflecteren op het eigen denken komen mooi samen in lessen met wiskundige klassengesprekken.

Wiskundige klassengesprekken

Allereerst: wat bedoelen we met een klassengesprek? Daarmee bedoelen we eigenlijk een bepaalde manier van lesgeven, kort samengevat als: leerlingen krijgen een wiskundig probleem om over na te denken (eerst even alleen en dan in kleine groepjes) en daarna volgt een klassikale uitwisseling van de verschillende ideeën die leerlingen hebben, waarbij leerlingen hun eigen denken expliciteren en elkaars denken proberen te volgen en bediscussiëren. Er kunnen bijvoorbeeld een aantal verschillende oplossingsmethoden worden gepresenteerd en de docent kan leerlingen op elkaars denken laten reageren en ze expliciet verbanden laten leggen tussen verschillende oplossingsmethoden. Zo wordt de samenhang tussen verschillende regels en procedures zichtbaar. In deze manier van lesgeven staan het werken aan problemen en het reflecteren op oplossingsmethoden centraal. Bovendien staat het wiskundig denken van de leerlingen centraal: leerlingen moeten zelf nadenken, hun denken uiten, elkaars denken begrijpen en verbanden leggen tussen de verschillende manieren van denken. Zo is het leerlingdenken het beginpunt en kan het wiskundig denken van de klas gezamenlijk verder worden gebracht. Toch komen zulke klassengesprekken niet vaak voor, ondanks veel aandacht voor klassengesprekken

in onderzoek naar wiskundeonderwijs.

Er zijn verschillende redenen aan te wijzen waarom klassengesprekken niet veel voorkomen in wiskundelessen. We noemen er hier twee. Ten eerste, het werk van de docent in klassengesprekken is zeer complex en arbeidsintensief. Het is bijvoorbeeld aan te raden om voorafgaand aan de les goed na te denken over wiskundige doelen en een geschikt vraagstuk en om te anticiperen op wat leerlingen gaan denken en doen. Ook is het handig om vast te bedenken welke ideeën klassikaal besproken moeten worden en welke wiskundige verbanden gelegd moeten worden. Dit kost uiteraard tijd, iets waar docenten meestal geen overvloed aan hebben. Tijdens de les moet je onder andere zicht hebben op welke ideeën de verschillende leerlingen hebben en bedenken wie er aan het woord moeten komen. Ook vraagt het van je om goed te luisteren en te interpreteren wat leerlingen wiskundig zeggen zodat je daar je reacties op kunt baseren. Bovendien is het belangrijk dat je leerlingen naar elkaar laat luisteren en op elkaar laat reageren. Als je vooral leerlingen aan het woord wil en de les op hun denken wil bouwen ben je afhankelijk van wat de leerlingen zeggen en hoe ze op elkaar reageren, daar moet je constant wat mee. Vergeleken bij een wat meer traditionele les kan het dus voelen alsof je veel minder controle hebt en dat vindt niet iedere docent prettig.

Een tweede belangrijke reden waarom wiskundige klassengesprekken niet vaak voorkomen is dat deze lessen in aanzienlijke mate afwijken van een “traditionele” wiskundeles. Zoals we hierboven al schetsten bestaan veel traditionele lessen uit het voordoen, nadoen en oefenen van nieuwe procedures. Als een opgave klassikaal wordt behandeld dan is over het algemeen de docent of één leerling aan het woord en wordt er één manier van oplossen gedeeld. Wiskunde leren door klassengesprekken is niet alleen voor de docent veel ingewikkelder dan dat, maar van leerlingen wordt ook meer gevraagd. Leerlingen moeten zelf nadenken zonder uitleg hoe het moet, ze moeten zichzelf weten uit te drukken, ze moeten het denken van anderen proberen te volgen en aangeven waar ze het wel of niet mee eens zijn en waarom. De docent heeft in lessen met klassengesprek niet meer zo opvallend de autoriteit van het goede antwoord. Leerlingen kunnen de docent niet meer vragen “hoe het moet”: de wiskundige waarheid moet gezamenlijk gevonden worden op basis van redeneren. Elk moment is daarin anders; het vraagt van alle aanwezigen een versterkt bewustzijn van het moment. De aandacht van ieder is nodig. Wanneer je als ervaren docent begint met het ontwikkelen van klassengesprekken moet er dus veel veranderen voor jezelf, maar ook voor je leerlingen. Dat kan een begrijpelijke reden zijn om er niet mee te beginnen of om er snel weer mee op te houden als het nog niet lukt.

Om de veelzijdigheid van het werk van de docent in wiskundige klassengesprekken wat te ordenen kijken we in dit proefschrift naar drie subpraktijken die gezamenlijk de

essentie van dat werk omvatten: *docent acties*, “*teacher noticing*”, en *het wiskundige werk van de docent*. We lichten deze praktijken kort toe. Met *docent acties* bedoelen we de uitingen van de docent in interactie met leerlingen tijdens het klassengesprek. Dus bijvoorbeeld hoe de docent reageert op leerling uitspraken en welke uitingen de docent gebruikt om leerlingen op elkaar te laten reageren. “*Teacher noticing*” is een begrip dat veel aandacht krijgt in onderzoek naar wiskundeonderwijs. Het houdt in hoe docenten hun aandacht richten en waarop, hoe docenten interpreteren wat leerlingen denken en zeggen en hoe ze vervolgens beslissingen nemen op basis daarvan. *Het wiskundige werk van de docent* betreft het wiskundig handelen van de docent. Dus bijvoorbeeld tijdens voorbereiding van een les zelf een probleem op verschillende manieren oplossen en anticiperen wat leerlingen gaan denken, een leerling uitspraak tijdens het klassengesprek koppelen aan een wiskundig lesdoel of zelf een oplossingsmethode voordoen. De studies in dit proefschrift focussen elk op één of enkele van deze subpraktijken en in de laatste studie (Chapter 5) hebben we in kaart gebracht hoe deze subpraktijken zich ontwikkelen bij docenten met wie we samengewerkt hebben.

Doel en aanpak van dit promotieonderzoek

Het doel van dit promotieonderzoek was om in een DOT (Docenten Ontwikkel Team) samen met docenten lessen te ontwikkelen met klassengesprekken en om te onderzoeken wat dat van ze vraagt. Om bij te dragen aan het verkleinen van de ‘kloof’ tussen onderzoek en praktijk rondom wiskundige klassengesprekken wilden we lessen ontwikkelen samen met docenten volgens twee premissen: 1) docentontwikkeling moet zo dicht mogelijk bij de lespraktijk, en 2) als docenten leren volgens een bepaalde didactiek les te geven aan leerlingen, moeten de docenten het ook via een soortgelijke didactiek leren. We hebben nauw samengewerkt met wiskundedocenten volgens een methodiek gebaseerd op ontwerponderzoek, namelijk in cycli van ontwerp, uitvoering, en evaluatie. In de ontwerpfase wordt een les voorbereid, in de uitvoeringsfase wordt de les gegeven (dat is minder recht toe recht aan dan het misschien klinkt dus misschien zou “uitproberen” een betere term zijn) en in de evaluatiefase wordt, meestal aan de hand van video-opnamen, gereflecteerd op wat er gebeurde in interactie met de leerlingen. In de evaluatiefase wordt ook vooruitgekeken welke inzichten meegenomen worden naar de volgende lessen.

Aan de eerste premisse werd voldaan doordat de docenten steeds een enkele les uit hun gewone programma kozen (bijvoorbeeld paragraaf 6.3) om te veranderen in een les met klassengesprek. Aan de tweede premisse werd vooral voldaan in de DOT in de tweede helft van het project (de derde en vierde studie zijn gebaseerd op die DOT), waar de docenten werden uitgedaagd om zelf na te denken en hun denken met elkaar uit te wisselen. In de DOT zaten vijf docenten en een onderzoeker die elke maand een bijeenkomst hadden en tussen twee bijeenkomsten elk een les met klassengesprek

voorbereidden, uitvoerden, en evalueerden. Zo ontwikkelden zij gaandeweg de praktijk van het wiskunde doceren aan de hand van klassengesprekken. Daarnaast ontwikkelden zij gezamenlijk handreikingen voor klassengesprekken in de wiskundeles. Die handreikingen zijn te vinden in Appendix 5.A.

De studies

Dit proefschrift bevat vier studies rondom het werk van de docent in het ontwikkelen van wiskundige klassengesprekken. In de eerste studie (Chapter 2) volgen we één docent die samen met de onderzoeker vier lessen met klassengesprek heeft ontwikkeld. We ontwikkelden een kader om de acties van de docent en van haar leerlingen in interactie te analyseren. Met dat kader onderzochten we hoe haar rol in het klassengesprek veranderde in die vier lessen. De resultaten laten twee ontwikkelingen zien: ten eerste veranderde de verdeling van de beurten. In het begin was de interactie voornamelijk een heen-en-weer gesprek tussen de docent en één enkele leerling en praatte de docent veruit het meest, maar later gingen leerlingen meer praten en was er meer variatie in leerlingen die bijdroegen aan het gesprek. Ten tweede veranderde de docent in hoe ze op oplossingsmethoden reageerde en werden haar acties over het algemeen steeds minder convergent (sturend op inhoud) en steeds vaker divergent (exploratief op leerlingdenken). In het begin gebruikte ze veel convergente acties waar ze de controle hield over de wiskundige inhoud maar na een aantal lessen gebruikte ze veel divergente acties om het klassengesprek te bouwen op het denken van de leerlingen. De resultaten laten zien dat een docent in een paar lessen belangrijke stappen kan nemen in wiskundige klassengesprekken.

De tweede studie (Chapter 3) gaat over het beslissingsproces van docenten tijdens wiskundige klassengesprekken. Zeven docenten deden mee aan een workshop over klassengesprekken in de wiskundeles en naderhand ging de onderzoeker bij hen allemaal op lesbezoek. Tijdens dat lesbezoek probeerde de docent voor één van de eerste keren een klassengesprek en de onderzoeker filmde het klassengesprek. In een interview na de les keken de onderzoeker en de docent naar die video. De onderzoeker probeerde te achterhalen hoe de docent op bepaalde momenten in het klassengesprek had besloten tot een bepaalde actie. De interviews zijn geanalyseerd aan de hand van een model waarin we kijken hoe de docent beslist tot een bepaalde actie op basis van eigen concepties en op de interpretatie van wat de leerling zegt. We vonden vier patronen van beslissingen en samen laten die zien dat, op kritieke momenten, de interpretatie en de beslissingen van de docenten vooral gebaseerd waren op twee types docentconcepties: 1) concepties rondom de ideeën van “lesdoelen behalen” en zorgen dat leerlingen “het begrijpen” en 2) concepties over de relevante wiskunde, oftewel het wiskundig denken van de docent. De interpretatie van leerlingdenken kwam grotendeels overeen met het herkennen van leerlinguitspraken die pasten bij de oplossingsmethode die de docent zelf in gedachten

had of die gekoppeld konden worden aan het lesdoel dat de docent voor ogen had.

Deze bevindingen leiden tot suggesties voor docenten die willen leren om klassengesprekken te houden en het belangrijk vinden om te bouwen op het wiskundig denken van leerlingen:

- Bespreek met collega's of andere experts wat lesdoelen inhouden, hoe je ze "behaalt" en wat het betekent dat een leerling iets "begrijpt",
- Breid je wiskundig denken uit rondom de wiskunde in de les (bijvoorbeeld door van te voren zoveel mogelijk oplossingsmethoden door te werken),
- Beschouw je eigen wiskundige werk als een activiteit in plaats van als iets dat vaststaat, als "denken" in plaats van als "kennis".

In de derde studie (Chapter 4) onderzochten we de rol die het wiskundig denken van de docent speelt in het interpreteren van wiskundig denken van leerlingen. We deden dat door groepsgesprekken uit de DOT te analyseren waarin vijf docenten gezamenlijk reflecteren op video's van klassengesprekken uit hun eigen lessen. In die gesprekken overlegden de docenten regelmatig over een bepaalde leerlinguitspraak: wat bedoelt en denkt die leerling, en hoe zou je erop kunnen reageren? Als resultaat van onze data analyse zagen we dat de docenten in die gesprekken niet vaak expliciet zijn over hun eigen wiskundig denken. Ook vonden we vijf categorieën die gezamenlijk laten zien dat zowel de inhoud als het proces van wiskundig denken van docenten hen kan ondersteunen of juist kan hinderen in hun interpretatie van leerlingdenken.

- 1) Als een docent *flexibel* kan wisselen tussen verschillende manieren van kijken en denken dan helpt dat bij het interpreteren van leerlingdenken,
- 2) Als een docent echter *vooringenomen* is over een bepaalde oplossingsmanier dan kan dat hinderen in het interpreteren van andere denkrichtingen,
- 3) Als een docent het denken van de leerling *niet begrijpt* dan kan het twee kanten op en hangt het er van af of de docent het eigen onbegrip onderkent en zich inspant om het wel te gaan begrijpen,
- 4) Docenten kunnen hun eigen manier van wiskundig denken als *voorbeeld* en model gebruiken voor wat er van leerlingen verwacht wordt, dat helpt om te herkennen hoe leerlingen al denken en hoe dat verder ontwikkeld kan worden,
- 5) Docenten kunnen echter ook hun eigen manier van denken *projecteren* op leerlingen. Als docenten vergeten hoe groot het verschil is in wiskundige ervaring tussen leerlingen en henzelf dan hindert dat het interpreteren van leerlingdenken.

De bevindingen wijzen erop dat het voor docenten belangrijk is om op twee niveaus na te denken over hun eigen wiskundig denken om het wiskundig denken van leerlingen te kunnen interpreteren. Ten eerste, door de wiskundige inhoud opnieuw uit te pakken en de verbanden expliciet te maken voor zichzelf, kunnen docenten zorgen dat ze *flexibel* kunnen switchen tussen verschillende denkrichtingen van leerlingen. Ten tweede, door zich bewust te zijn van hun eigen proces van wiskundig denken kunnen docenten hun eigen manier van denken gebruiken als *voorbeeld* voor wat ze bij hun leerlingen willen ontwikkelen.

In de laatste studie van dit proefschrift (Chapter 5) kijken we naar het leren van de docenten die deelnamen aan onze DOT. Door analyse van meerdere lagen data, namelijk video opnames van klassengesprekken, audio opnames van groeps gesprekken van de DOT en lesvoorbereidingen en -evaluaties, kregen we inzicht in de leerpaden van twee van de docenten. Die leerpaden laten zien hoe de drie subpraktijken, *docent acties*, “*teacher noticing*” en *wiskundig werk van de docent*, zich ontwikkelden in en tussen de verschillende contexten van lessen, individueel lesontwerp en -evaluatie en de DOT bijeenkomsten. Bij beide docenten leidde hun leren uiteindelijk naar een les waarin het voor het eerst lukte om verschillende oplossingsmethoden te laten bespreken én om leerlingen op elkaar te laten reageren. De leerpaden van de twee docenten zijn echter zeer verschillend. De ene docent ontwikkelde zich voornamelijk in het eigen wiskundige werk. De andere docent deed vanaf het begin al uitgebreid wiskundig werk, door bijvoorbeeld verschillende oplossingsmethoden uit te werken, maar was lang zoekende naar manieren om de leerlingen met elkaar in discussie te brengen. De bevindingen laten zien dat het leren van docenten zeer persoonlijk is en dat het zich in en tussen verschillende contexten beweegt.

Conclusies en implicaties

Het werk van de docent in wiskundige klassengesprekken is veelzijdig. De studies in dit proefschrift dragen bij aan het in kaart brengen van die veelzijdigheid. Klassengesprekken worden vaak terloops genoemd in beleidstukken of op docentworkshops maar het is niet eenduidig wat er mee bedoeld wordt en hoe je het als docent aanpakt. Dit proefschrift laat zien dat het een weerbarstige en complexe praktijk is voor docenten, maar geeft ook aanknopingspunten om iets van die complexiteit te ontwarren. De drie subpraktijken, *docent acties*, “*teacher noticing*” en het wiskundige werk van de docent, zijn wel sterk met elkaar verbonden maar kunnen ook onafhankelijk richting geven aan docenten die zich willen ontwikkelen in klassengesprekken of aan hen die dat willen ondersteunen.

Docenten zouden bijvoorbeeld kunnen focussen op hun acties in interactie en kunnen proberen om zo veel mogelijk de leerlingen aan het woord te laten, tijd te geven om te denken, en op elkaar te laten reageren. Een ander aanknopingspunt kan zijn om voor de

les uitgebreid wiskundig werk te doen door een concept of probleem te onderzoeken en een overzicht te maken van alle wiskunde die er omheen hangt. ‘Teacher noticing’ kan ook als aanknopingspunt gekozen worden. Zo zouden docenten, zoals ook gebeurde in de studies van dit proefschrift, samen met collega’s of andere experts kunnen reflecteren op data uit de klas om zich te ontwikkelen in het 1) aandacht richten op, 2) interpreteren van, en 3) beslissingen nemen op basis van het wiskundig denken van leerlingen. De handreikingen voor klassengesprekken in de wiskundeles die samen met de docenten ontwikkeld zijn kunnen gebruikt worden door docenten en docentopleiders of -coaches om een overzicht te hebben van wat er komt kijken bij een klassengesprek. Het lijkt aan te raden om niet alles tegelijk goed te willen doen, maar per situatie een focus te kiezen van één of enkele handreikingen om aan te werken.

De studies in dit proefschrift geven een inkijk in de eerste stappen in het leren van wiskundige klassengesprekken. Enerzijds leveren de studies een soort existentiebewijs dat het mogelijk is om in redelijk korte tijd significante stappen te zetten in het lesgeven met wiskundige klassengesprekken. Anderzijds laten de studies zien dat het leren van deze docentpraktijk een langdurig proces is en veel vraagt van de docent. De bevindingen wijzen erop dat het leren van docenten plaatsvindt in en tussen verschillende contexten: de les, professionele ontwikkelingscontexten zoals de DOT, maar zeker ook in individuele lesvoorbereiding en -evaluatie. Docenten en degenen die hen ondersteunen kunnen daar rekening mee houden in hun opzet van ontwikkeling.

Samenwerking lijkt cruciaal te zijn in het leren, niet alleen voor leerlingen maar ook voor docenten. Het bedenken van verschillende oplossingen voor een probleem, een belangrijke stap in het voorbereiden van een klassengesprek, gaat vele malen gemakkelijker als je het samen met anderen doet. Meerdere mensen hebben vanzelf verschillende manieren om ergens naar te kijken. Daarom zou het goed zijn als er tijd en middelen beschikbaar komen voor docenten om samen te werken in het ontwikkelen van klassengesprekken. Ook zou het ontwikkelen en houden van klassengesprekken een plek moeten hebben in lerarenopleidingen wiskunde.

Een van de belangrijkste conclusies van dit proefschrift is dat het wiskundig denken, het wiskundige werk, van leraren essentieel is in wiskundige klassengesprekken. Om goed te anticiperen op wat leerlingen gaan denken bij een probleem, om de wiskundige leerdoelen expliciet te maken en uit te pakken, om te luisteren naar leerlingen en te interpreteren wat ze wiskundig denken, om te beslissen wat te doen met een bepaalde denkrichting van een leerling, dat vergt allemaal intensief wiskundig denken van de docent. De wiskundige aspecten van het werk van de docent worden vaak gekaderd als “kennis”. Onze studies wijzen erop dat deze kadering geen recht doet aan de praktijk en zelfs het interpreteren van leerlingdenken in de weg kan zitten. Het zou kunnen

helpen als docenten hun eigen wiskundige werk meer als een activiteit gaan zien, zich bewust zijn van hun wiskundig denken en als ze hun wiskundig denken “aanzetten” in interactie met hun leerlingen. Dit leidt ons tot een nieuwe premisse voor verdere initiatieven: docenten moeten zich bewust zijn van hun wiskundig denken om de ontwikkeling van het wiskundig denken van hun leerlingen te ondersteunen. Deze premisse kan worden opgepakt door docenten, opleiders en onderzoekers, inclusief de auteur van het proefschrift, in verdere projecten rondom het werk van wiskundeleraren.