

### **Een internationaal perspectief op reken- en wiskundeonderwijs, nr.3**

*In de internationale literatuur op het gebied van het reken- en wiskundeonderwijs staat het specifieke karakter van rekenen en wiskunde centraal. Deze literatuur laat zien dat dit vak heel specifieke eisen stelt aan het onderwijs. In deze reeks wil de werkgroep Wiskunde voor Morgen dit internationale perspectief voor het voetlicht brengen aan de hand van toonaangevende internationale artikelen.*

### **Richard Skemp over het begrijpen van wiskunde (1987)**

Bert Zwaneveld, Werkgroep Wiskunde voor Morgen

Richard Skemp (1919-1995) schreef in 1976 een artikel waarin hij het begrijpen van wiskunde analyseert (Skemp, 1976). Hij komt daarbij tot een didactische theorie van dat begrijpen. Het tijdschrift, 'Mathematics Teaching in the Middle School', vond dit artikel zo relevant dat ze het in 2006 nogmaals hebben gepubliceerd.

Skemp begint zijn artikel met de constatering dat de betekenis van woorden afhankelijk is van bijvoorbeeld de taal (het Franse woord voor boekhandel, *libraire*, lijkt wel veel op *library* in het Engels), maar betekent echt iets anders), van de context (*lenen* in een aftrekking is echt iets anders dan *lenen* in het dagelijks spraakgebruik). Ook het omgekeerde komt voor: het verschil in taalgebruik in de wiskunde en in het dagelijks leven, bijvoorbeeld: in het dagelijks leven zeggen we  $\frac{3}{4}$  van 20, terwijl de wiskundige formulering  $\frac{3}{4} \times 20$  is. En in de onderwijspraktijk zullen beide formuleringen door elkaar gebruikt worden. Het verschijnsel van twee woorden die in het Frans en het Engels sterk op elkaar lijken, zoals *history-histoire*, maar ook *library-libraire*, *chief (cook)-chef*, *agreement-agrément*, *doctor-docteur*, *medicine-médecin*, *parent-parent*, maar echt verschillende betekenissen hebben, heten in het Frans *faux amis* (valse vrienden).

Met het woord 'begrijpen' in de wiskunde is ook een voorbeeld van een *faux ami*. Begrijpen betekent voor veel mensen, aanvankelijk ook voor Skemp zelf: zowel weten wat te doen als waarom. Voor dit begrijpen reserveert hij de term *relationeel begrijpen*. Maar bijvoorbeeld voor leerlingen (en soms ook wiskundedocenten) heeft begrijpen vaak de betekenis van 'regels gebruiken zonder reden'. Skemp geeft toe dat hij dit laatste niet echt begrijpen vond, maar hij komt hierop terug zoals later in deze bijdrage uiteen gezet wordt. Voor dit begrijpen gebruikt hij *instrumenteel begrijpen*.

*Voorbeelden van instrumenteel begrijpen:*

- Oppervlakte is lengte maal breedte
- Vermenigvuldigen van twee breuken is de tellers vermenigvuldigen en de noemers vermenigvuldigen
- Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde
- Overbrengen naar de andere kant van het gelijkteken geeft verandering van teken.

*Belang van het onderscheid in relationeel en instrumenteel begrijpen*

Skemp gaat uitvoering in op het onderscheid tussen de twee soorten begrijpen. Zo geeft hij het voorbeeld van een *faux ami* situatie zonder dat er een duidelijke voorkeur voor de ene of de andere betekenis is. Zijn voorbeeld is het volgende. Een team van school A gaat op bezoek bij school B om tegen een team van school B een wedstrijd football te spelen. Maar beide teams weten niet dat er twee soorten football zijn: soccer en rugby. School A speelt soccer, school B rugby. Zo denkt team A dat team B met een misvormde bal speelt en overtredingen bij de vleet maakt. Zolang de teams de

wedstrijd niet stoppen en overleggen met elkaar wat er aan de hand is en hoe het op te lossen, zal de wedstrijd in volstrekte chaos verlopen en zullen de scholen nooit meer tegen elkaar willen spelen. Uiteraard is dit een verzonnen voorbeeld, maar er zijn zeker leerlingen die een dergelijke 'chaos' af en toe in de wiskundeles zullen ervaren. In de wiskundeles zijn twee mismatches mogelijk tussen wat de docent doet en hoe de leerling daarop reageert:

- De leerling is gericht op instrumenteel begrijpen, terwijl de docent wil dat de leerlingen de gepresenteerde wiskunde relationeel begrijpen
- En andersom: op instrumenteel begrijpen gericht onderwijs, terwijl de leerling het relationeel wil begrijpen.

De eerste mismatch zal voor de korte termijn niet veel problemen bij de leerlingen opleveren, hoewel het frustrerend voor de docent is. Zodra de leerlingen merken dat ze de sommetjes correct kunnen maken zijn ze tevreden en laten ze de rest zitten. Voor hen is het betere, begrijpen waarom, de vijand van het goede, begrijpen hoe.

De tweede mismatch is veel erger. De leerling zal over wiskunde gefrustreerd raken, de interesse in wiskunde verliezen en wellicht wiskunde afschrijven.

Vergelijkbare manieren van mismatch zijn mogelijk door de manier waarop de docent diens wiskundeonderwijs inricht en hoe de wiskunde in het gebruikte leerboek wordt gepresenteerd.

### **Wiskunde als *faux ami***

Aanvankelijk dacht Skemp dat de inhoud van het wiskundeonderwijs, de wiskunde die in het basis- en voortgezet onderwijs onderwezen wordt, eenduidig vastligt, maar dat die wiskunde op twee manieren, gericht op relationeel dan wel instrumenteel begrijpen, onderwezen kan worden. Maar langzamerhand kwam hij tot de overtuiging dat er feitelijk twee verschillende onderwerpen onder de naam 'wiskunde' onderwezen worden. Om het verschil duidelijk te maken beschrijft Skemp de volgende analogie met twee soorten muziekonderwijs. De ene soort bestaat erin dat de leerlingen met pen-en-papier een notenbalk te tekenen met vijf evenwijdige horizontale lijnen die van onder naar boven respectievelijk E, G, B, D en F heten, en de vier tussenliggende lege ruimten respectievelijk F, A, C en E. Ze leren dat een open ovaaltje met verticaal lijntje twee keer zo lang duurt als een gesloten ovaaltje met verticaal lijntje en een enkel ovaaltje vier keer zo lang, enz. Misschien kunnen ze na enige tijd eenvoudige problemen oplossen als: in welke maatsoort staat deze muziek, in welke sleutel? Of misschien zelfs: transposeer dit van C groot naar A groot. Deze leerlingen zullen snel gedemotiveerd raken en afhaken. In de andere soort muziekonderwijs wordt de leerlingen geleerd noten met de bolletjes in het muziekschrift te associëren. Na verloop van tijd kunnen ze zich wellicht bij een bolletje een noot kunnen voorstellen, of bij een rijtje bolletjes een melodie. Of zelfs met bij twee boven elkaar staande notenbalken iets over harmonie. Wat de leerlingen hoeven te onthouden is heel beperkt, in tegenstelling tot bij de eerste soort muziekonderwijs.

Deze twee soorten kunnen worden vertaald naar wiskunde. De eerste soort levert instrumentele wiskunde, de tweede relationele wiskunde. En de suggestie is behoorlijk sterk dat relationele wiskunde in onderwijs dat op relationeel begrijpen is gericht de voorkeur heeft. In de volgende paragraaf, advocaat van de duivel, worden de voordelen van beide visies op wiskunde en wiskundeonderwijs, beschreven.

### **Advocaat van de duivel**

Eerst drie voordelen van instrumentele wiskunde.

1. *Instrumentele wiskunde is meestal gemakkelijker te onthouden.* Sommige onderwerpen, zoals vermenigvuldigen van twee negatieve getallen, of delen door een breuk, zijn moeilijk relationeel te begrijpen.
2. *De 'beloning' is er onmiddellijk en is duidelijk.* Een rijtje juiste antwoorden is mooi en men moet het bijbehorende succesgevoel bij de leerlingen niet onderschatten. Het geeft zelfvertrouwen.
3. *Het juiste antwoord kan vaak snel gevonden worden, juist omdat er weinig kennis bij betrokken is.* Het antwoord is dan ook bij instrumenteel begrijpen vaak betrouwbaarder dan bij relationeel begrijpen. Ook professionele wiskundigen gebruiken vaak instrumenteel denken.

En dan nu de vier voordelen van relationele wiskunde.

1. *Relationele wiskunde is meer aanpasbaar bij nieuwe taken.* Veronderstel dat een leerling heeft geleerd om bij gegeven hoeken in een driehoek instrumenteel de derde te berekenen. Als er echter een buitenhoek moet worden gaat het fout. Is de regel voor het berekenen van de derde (binnen)hoek relationeel begrepen, dan is de leerling in staat tot een regel te komen voor een buitenhoek.
2. *Relationele wiskunde is makkelijker te onthouden.* Het is zeker voor leerlingen makkelijker te leren dat de oppervlakte van een driehoek is  $\frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte}$ , dan waarom dit zo is. Maar voor vierhoeken als parallellogrammen, trapezia, rechthoeken, moeten dan aparte regels geleerd worden. Wellicht is het kennen van de afzonderlijke regels wenselijk, want praktisch handig, maar kennis van hoe deze onderling gerelateerd zijn, namelijk als delen van een samenhangend geheel maakt het voor de leerling makkelijker. Er moet weliswaar meer geleerd worden, zowel de verbanden als de afzonderlijke regel, maar het resultaat, de onderlinge samenhang, beklijft langer.
3. *Relationele kennis kan effectief zijn als een doel op zich.* Dit is een resultaat van wetenschappelijke experimenten. Er is nauwelijks behoefte aan 'straffen en belonen', waardoor het motiveren van de leerlingen door de docent veel eenvoudiger is. Dit heeft ook te maken met het vierde voordeel.
4. *Relationele schema's zijn organisch in kwaliteit.* Mensen ervaren voldoening door relationeel begrijpen. Ze zullen niet alleen nieuwe onderwerpen proberen relationeel te begrijpen, maar ook zelf actief op zoek gaan naar nieuwe stof of nieuwe gebieden gaan exploreren.

### **Waarom een individuele docent soms toch voor instrumenteel begrijpen kiest**

Zonder verder commentaar volgen hier een aantal antwoorden op deze vraag van Skemp.

1. Relationeel begrijpen kan teveel tijd kosten, zeker wanneer een bepaalde regel leren gebruiken voldoende is voor de leerlingen.
2. Relationeel begrijpen van een bepaald onderwerp is te moeilijk voor de leerlingen, maar ze hebben het wel nodig voor het examen.
3. Een bepaalde vaardigheid is noodzakelijk voor een ander onderwerp, denk aan differentiëren voor natuurkunde, maar het benodigde schema is nog niet voor handen bij de leerlingen.
4. Een beginnend docent heeft nog niet door dat op de school wiskunde instrumenteel onderwezen wordt.

Een wiskundedocent moet in zijn of haar onderwijs natuurlijk steeds weldoordachte keuzen maken, wat veronderstelt dat hij of zij de wiskunde en de daarbij mogelijke onderwijs- en leerprocessen

relationeel begrepen heeft. Skemp noemt de volgende situationele factoren die een rol spelen bij het maken van die keuzen.

1. *De rol van examens.* Gezien het belang van examens kunnen leerlingen hun toevlucht tot instrumenteel begrijpen nemen.
2. *De leerboeken.* Soms wordt de keuze voor instrumentele wiskunde veroorzaakt door de hoge mate van abstracte presentatie van de wiskundige inhoud. Zeker voor leerlingen kunnen deze, op zich wiskundig correcte formuleringen, afschrikwekkend werken.
3. Het is moeilijk in een klassikale les *uit te vinden welke leerlingen de stof relationeel of instrumenteel hebben begrepen.*
4. Ook docenten zullen hun ideeën of zelfs bestaande *schema's over wiskunde en wiskundeonderwijs wel eens moeten aanpassen* en dat is voor hen psychologisch moeilijk.

### Meer over schema's

Skemps werk (Skemp, 1987) leert dus dat het bij het begrijpen van wiskundige begrippen het erom gaat rond een begrip een netwerk op te bouwen waarin het begrip met andere begrippen, vaardigheden, ervaringen, woorden, ideeën, enzovoorts, wordt verbonden. Skemp noemt dat netwerk een *schema*. De term 'schema' komt overigens al bij Piaget (1954) voor. Nieuwe begrippen worden op twee manieren aan een schema toegevoegd: *assimileren*, dat wil zeggen invoegen van een nieuw begrip in een bestaand schema; of *accommoderen*, dat wil zeggen een bestaand schema zo aanpassen dat een nieuw begrip er een plaats in kan vinden. Bestaat er een schema voor (het oplossen van) eerstegraads vergelijkingen, dan kan het begrip 'tweedegraads vergelijking' van de vorm  $(ax + b)(cx + d) = 0$  en het oplossen ervan in dit schema *geassimileerd* worden. Uiteraard na toevoeging dat een product alleen gelijk aan 0 is, als een van beide factoren 0 is of beide factoren 0 zijn. Bestaat er een schema voor de trigonometrische verhoudingen in driehoeken en moet de sinus als functie op de reële getallen geleerd worden dan moet dat bestaande schema aangepast, *geaccommodeerd*, worden. Het verband tussen de sinus van een hoek en de sinus van een reëel getal moet immers gelegd worden. Ook de termen 'accommoderen' en 'assimileren' komen al bij Piaget (1954) voor.

Het gaat Skemp om het *begrijpen* van begrippen die in een schema worden openomen. Naast de twee hiervoor beschreven soorten begrijpen, instrumenteel en relationeel, voegt hij in zijn boek *The Psychology of Learning Mathematics, Expanded American Edition*, in het hoofdstuk volgend op hoofdstuk 12 over relationeel en instrumenteel begrijpen een derde vorm van begrijpen toe:

*Formeel of logisch* begrijpen: iemand kan een wiskundig symbolisme of notatie verbinden met relevante wiskundige ideeën en deze ideeën combineren in ketens van logisch redeneren.

De term 'formeel' verwijst hier naar de vorm, niet naar formules. De drie soorten begrijpen vormen geen hiërarchie. Relationeel begrijpen vereist geen instrumenteel begrijpen, logisch begrijpen geen instrumenteel of relationeel begrijpen.

Relationeel begrijpen speelt een rol bij het zichzelf overtuigen, bij formeel of logisch begrijpen gaat het erom anderen te overtuigen door een correcte redenering. Het gaat dan niet langer om het verwerven van een nieuw begrip of het construeren van een nieuw schema, maar om het construeren van wat in de wiskunde een 'bewijs' heet, een keten van beweringen waarbij elke implicatie duidelijk is door referenties naar stellingen of axioma's. Uitspraken als 'als van een driehoek twee zijden even lang zijn, dan de aangrenzende hoeken even groot', berusten dan op logische noodzakelijkheid, niet op ervaringen.

## Literatuur

Piaget, J. (1954). *The construction of reality in the child* (M. Crook, trans.). New York: Ballantine Books.

Skemp, R. (1976). Goals of Learning and Qualities of Understanding. *Mathematics teaching, Bulletin of the Association of Teachers of Mathematics*, 88, 44 – 49.

Skemp, R.R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 12(2), 88 – 95.