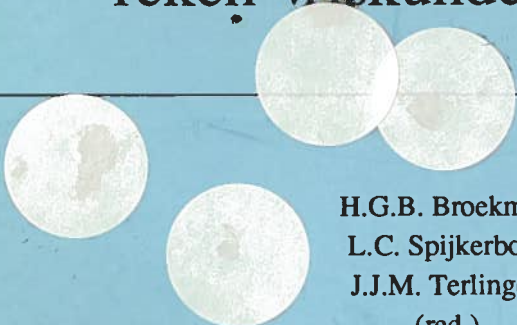


Algoritmen en heuristieken in contextrijk reken-wiskundeonderwijs



H.G.B. Broekman
L.C. Spijkerboer
J.J.M. Terlingen
(red.)



Freudenthal instituut
Archief

OW  OC

vakgroep onderzoek wiskundeonderwijs en onderwijscomputercentrum
rijksuniversiteit utrecht

**Algoritmen en heuristieken
in contextrijk
reken-wiskundeonderwijs**

Algoritmen en heuristieken in contextrijk reken-wiskundeonderwijs

H.G.B. Broekman
L.C. Spijkerboer
J.J.M. Terlingen
(red.)



**vakgroep onderzoek wiskundeonderwijs en onderwijscomputercentrum
rijksuniversiteit utrecht**

Onderzoek wiskundeonderwijs

Publikatie nr 13

Reeds verschenen:

- Nr 1 *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas*
(A. Dekker, H. ter Heege, A. Treffers)
- Nr 2 *Oppervlakte bij Wiskobas en inzichtverwervend handelen*
(A. Dogger)
- Nr 3 *Aanzet tot een nieuwe breukendidactiek volgens Wiskobas*
(L. Streefland)
- Nr 4 *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren*
(H. Freudenthal)
- Nr 5 *Wiskobas in methoden*
(R.A. de Jong)
- Nr 6 *De baas over de computer*
(P. Bergervoet, e.a.)
- Nr 7 *Mathématiques pour tous à l'âge de l'ordinateur*
(J. de Lange Jzn)
- Nr 8 *Mathematics, insight and meaning*
(J. de Lange Jzn)
- Nr 9 *Realistisch breukenonderwijs*
(L. Streefland)
- Nr 10 *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen*
(F.J. van den Brink)
- Nr 11 *Contexts Free Productions. Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education*
(K. Gravemeijer, M. van den Heuvel, L. Streefland)
- Nr 12 *Uitleggen van Wiskunde*
(S. Kemme)

Colofon

Bureauredactie: Jim Terlingen en Betty Dekker

Druk: Technipress, Culemborg

© 1991 vakgroep onderzoek wiskundeonderwijs en onderzoek computercentrum
rijksuniversiteit utrecht

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotocopie, microfilm of op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de houder van het copyright.

Inhoudsopgave

Voorwoord	VII
Algoritmen, heuristieken en contexten	1
Drs. H.G.B. Broekman IVLOS lerarenopleiding en CD- β , RU Utrecht	
Algoritmen in didactisch perspectief	17
Prof.dr. A. Treffers Vakgroep OW & OC en Vakgroep onderwijskunde, RU Utrecht	
Het onderwijs in de know-how van de wiskunde	29
Dr. A. van Streun Vakgroep wiskunde, RU Groningen	
Denkstrategieën toetsen in het wiskundeonderwijs	
Kan dat? En hoe?	47
Dr. L. Streefland Vakgroep OW & OC, RU Utrecht	
Algoritmen, wiskunde en toetsen	75
H. Boertien Cito, Arnhem	
Beeldvorming en schematisering	89
Drs. A. Lagerwerf Algemeen Pedagogisch Studiecentrum, Amsterdam Faculteit Educatieve Opleidingen, HMN Utrecht	
Effecten van computergebruik in de wiskundeles	101
Dr. S.L. Kemme Vakgroep wiskunde, RU Groningen	
Wat hebben leerlingen aan realistisch wiskundeonderwijs?	121
Drs. L.C. Spijkerboer Faculteit Educatieve Opleidingen, HMN Utrecht F. Kalsbeek Scholengemeenschap, Woerden	
Probleemaanpak als onderwerp op de lerarenopleiding	143
Ir. A.I.J.M. Konings Educatieve faculteit, Hogeschool Gelderland, Nijmegen	
Standaardalgoritmen in het W12-16-project	155
Drs. M.M. Wijers W12-16 team, Vakgroep OW & OC, RU Utrecht Vakgroep wiskunde en informatica, Hogeschool Holland, Diemen	

Enkele aspecten van het gebruik van contexten	
Een opsomming met voorbeelden uit havo wiskunde-A	167
A. Roodhardt	
Hawex team, Vakgroep OW & OC, RU Utrecht	
Toegepaste analyse: probleemaanpak en contextgebruik	187
Ir. H. van der Kooij	
Hawex team, Vakgroep OW & OC, RU Utrecht	

Voorwoord

Door veel wiskundeleraren werd aan medewerkers van de secties wiskunde van de Faculteit Educatieve Opleidingen (HMN, Utrecht) en de afdeling lerarenopleiding van het IVLOS (RU Utrecht) de vraag gesteld: 'Welke aandacht besteden jullie eigenlijk aan algoritmen/standaardprocedures in de opleiding?' Achtergrond van deze vraag was - en is - de onduidelijkheid over de rol die toebedacht is aan algoritmen in een zich veranderend wiskundeonderwijs. Meer probleemoplossen, meer heuristieken en vooral meer contextrijk reken-wiskundeonderwijs.

Nadat besloten was de vraag bij te stellen naar 'de rol van algoritmen en heuristieken in contextrijk reken-wiskundeonderwijs', werd deze voorgelegd aan een aantal deskundigen. Dit leidde tot een besloten conferentie in oktober 1990 voor betrokkenen bij de ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs met bijdragen van: Broekman (algehele leiding), Treffers, Spijkerboer, Van Streun, Bakema, Konings, Wijers, Roodhardt en Van der Kooij.

Mede op grond van de gevoerde discussies zijn de bijdragen herschreven en op uitnodiging is een aantal bijdragen toegevoegd over de aspecten 'toetsing' (Boertien) en 'denkstrategieën' (Streefland). Tevens is een kritische kanttekening bij de vraagstelling vanuit het perspectief 'fasen in een leerproces' (Lagerwerf) en een bijdrage over de mogelijke rol van het gebruik van de computer als hulpmiddel (Kemme) opgenomen.

Voor alle duidelijkheid zij vermeld dat de auteur weliswaar verantwoordelijk is voor zijn/haar eigen bijdrage, maar dat de redactie sturend is opgetreden door het 'opleggen' van een beperkte ruimte. Deze opgelegde ruimte betreft niet alleen het aantal beschikbaar gestelde pagina's doch tevens een inperking van de door de auteurs te belichten aspecten.

Door de redactie is besloten de beschrijvende bijdragen bij elkaar te plaatsen en ze als volgt te karakteriseren:

- | | |
|-------------|--|
| Broekman: | Inleiding die aandacht vraagt voor de bestudering en bediscussieering van de onderhavige problematiek. |
| Treffers: | Het algoritmiseringsproces en de plaats van algoritmen in de vier te onderscheiden stromingen van reken-wiskundeonderwijs. |
| Van Streun: | Het belang van aandacht in het onderwijs voor wiskundige know-how. |
| Streefland: | Aspecten van onderwijs in denkstrategieën. |
| Boertien: | De plaats van algoritmen in de wiskunde en toetsing ervan (onder andere het herkennen van het toe te passen algoritme). |
| Lagerwerf: | Centraal staat de vraag naar de rol van contexten in de verschillende fasen van het leren. |
| Kemme: | De mogelijke meerwaarde van computergebruik. |

De bijdragen uit de school, de opleiding en de projectgroepen zijn als volgt gegroepeerd:

- Spijkerboer: Hoe reageren leerlingen op onze 'vernieuwingsdrang'?
- Konings: Een mogelijkheid voor aankomende docenten om zich voor te bereiden op 'probleemaanpak' in de klas.
- Wijers: Een overzicht van de rol van algoritmen in het project W12-16.
- Roodhardt: Een aantal voorbeelden van contextgebruik in het Hawex-project.
- Van der Kooij: Probleemaanpak in de bovenbouw van havo en vwo aan de hand van het leerstofgebied toegepaste analyse.

Door de redactie zijn, waar nodig, wijzigingen aangebracht om zowel taal, vormgeving als inhoud zoveel mogelijk op elkaar af te stemmen.

Met name het waardevolle bureauredactiewerk van Betty Dekker - alsmede de hulp van andere OW & OC-medewerk(st)ers - heeft sterk bijgedragen aan de totstandkoming van dit boek.

Utrecht, mei 1991

Harrie Broekman
Lambrecht Spijkerboer
Jim Terlingen

Algoritmen, heuristieken en contexten

Harrie Broekman

1 Vooraf

De inleider bij een conferentie heeft het voordeel dat hij de mogelijkheid heeft de aandacht van de conferentiegangers en de diverse sprekers te richten door de voorbeelden die hij kiest en de vragen die hij stelt.

Diezelfde inleider is in een geheel andere positie als hij zijn invloed uitgeoefend meent te hebben op de sprekers/auteurs en vervolgens het resultaat van hun werk mag inleiden. Richt hij de aandacht van de lezers op de essenties van de diverse bijdragen, of voegt hij er iets aan toe van zijn eigen ideeën?

Bij een keuze voor het eerste zou de indruk kunnen ontstaan dat de bijdragen op zich niet zonder hulp leesbaar zijn en dat zou een geheel onjuiste indruk zijn.

Bij een keuze voor het tweede zou de indruk kunnen ontstaan dat de redacteuren de auteurs niet genoeg 'gestuurd' hebben en/of dat de auteurs ten onrechte zaken hebben laten liggen. Ook die indruk zou een onjuiste zijn en dient dus vermeden te worden.

Een derde mogelijkheid is dat de inleider een aantal zaken aanstipt - deels door een uitvoerige verwijzing naar relevante literatuur - die mede veroorzaakt hebben dat er en een conferentie en een boek tot stand kwamen. Voor deze derde mogelijkheid heb ik gekozen, met als gevolg dat ik enige aandacht zal schenken aan: algoritmen (§ 2), algoritmen en heuristieken (§ 3), algoritmen, heuristieken en contexten (§ 4) en tot slot aan de socioconstructivistische achtergrondideeën bij veel van het gebodene (§ 5).

2 Algoritmen

'What remains for us to do is, to consider which algorithms we will want to use to free ourselves from thinking, and which can be best used in order to further our thinking and understanding.' (Pearla Nesher, 1986)

Voor wat het leren van wiskunde betreft is het geen goed idee om het leren door 'begrijpen' te stellen tegenover het leren van 'algoritmen'. Eén van de belangrijkste taken van de wetenschap is immers het routine-karakter van enkele van zijn aspecten te herkennen en deze vervolgens als zodanig te presenteren, als algoritmen dus. Veel mensen (waaronder wiskundeleraars en didactici) hebben hier bezwaar tegen omdat routine het tegendeel is van creativiteit. Hierbij moet in aanmerking genomen worden dat het ontwerpen (construeren) van algoritmen voor routinewerk zelf in het geheel geen routinewerk is. Daarenboven is het onzinnig om vooruitgang - ook van leerlingen - te blokkeren door routinewerk niet te laten zijn wat het is, namelijk routinewerk.

Naast het nut en het plezier van het (leren) ontwerpen van algoritmen (Verbruggen, 1984) en het (leren) gebruiken van algoritmen (Maurer, 1984) is er in het onderwijs altijd plaats voor het doorgronden van door anderen ontworpen algoritmen.

Een aansprekend voorbeeld hiervan is voor mij het aftrek/optelalgoritme uit het Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs (zie bijlage 1). Ook het constructie-algoritme voor een parabool (Ciotti, 1974) en de regel van Horner (Maurer, 1984; Eggermont, 1985) zijn - althans in mijn opvatting - mooie voorbeelden. Voor meetkundig ingestelden is de stelling van Stewart ook altijd nog een mogelijkheid.

In al deze gevallen blijft het mogelijk en wenselijk de volgende vragen te stellen:

1. 'Waarom dit algoritme en niet een ander, of in het geheel geen?' (*doel*)
2. 'Waarom via het gekozen leerproces (zie bijvoorbeeld bijlage 2) en niet een ander leerproces?' (*wijze van verwerven*)
3. 'Waarom deze manier van noteren en niet een andere notatiewijze?'

Vergelijk wat dit laatste betreft bijvoorbeeld de in bijlage 3 weergegeven algoritmen voor het oplossen van vergelijkingen.

Een voor de toepassing van algoritmen belangrijke extra vraag is - zeker bij het gebruik van hulpmiddelen:

4. 'Is een gekozen algoritme *efficiënt* ten aanzien van het benodigde aantal geheugenplaatsen en de benodigde uitvoeringstijd?'

Soms dient daar de *ingewikkeldheid* aan toegevoegd te worden, dat wil zeggen de kans op het maken van fouten bij toepassing van het algoritme.

In het geval van het onderwijs komen er vragen bij van de soort:

5. 'Sluit het aan bij de reeds aanwezige kennis?'
6. 'Bereidt het voor op latere uitbreiding?'
7. 'Is het in overeenstemming met de gekozen doelstellingen?' (Van Dormolen 1974, 1982)

Ook de volgende, door Hilton en Pedersen (1983) gestelde vraag mag niet vergeten worden:

8. 'How does it reflect natural processes?'

Gezien de opmars van vele hulpmiddelen, zoals de zakrekenmachine, graphic calculator en computer, kan hier nog aan toegevoegd worden:

9. 'Maakt het algoritme gebruik van eerder 'bewerkte' hulpmiddelen?' en
10. 'Stimuleert het algoritme het gebruik van hulpmiddelen?'

De tien hiervoor gestelde en enkele andere vragen komen in de volgende hoofdstukken aan bod, zo niet expliciet dan toch zeker impliciet. Ze zijn door de diverse auteurs gekoppeld aan vragen rond en vanuit de onderwerpen die de laatste jaren de aandacht opeisen: het leren probleemoplossen (ook wel aangeduid met 'heuristisch onderwijs') en vooral ook het gebruik van contexten. Tijdens de conferentie werd daar door Bakema - en in deze bundel door Kemme - een vraag aan toegevoegd omtrent het mogelijke effect van computergebruik in de wiskundes.

Bij de verschuiving in belangstelling onder wiskundendidactici - op de weg van kale algoritmen naar algoritmisering, heuristieken en contextgebruik - speelt het benadrukken van andere doelstellingen van wiskundeonderwijs een rol. Deze andere doelstellingen kunnen gekarakteriseerd worden door de termen 'gebruiks-wiskundig' (Kemme, 1985) en 'wiskundige redzaamheid' (Broekman en Van Dormolen, 1989). De verschuiving kan tevens aangeduid worden door het spreken over 'wiskundig bezig zijn' in plaats van over 'bezig zijn met wiskunde'. Freudenthal (1963) drukte dit als volgt uit:

'What humans have to learn is not mathematics as a closed system, but rather as an activity, the process of mathematizing reality and if possible even that of the mathematizing mathematics.' (pag. 7)

3 Algoritmen en heuristieken

'In mathematical practice it is not always possible to bring to the same level of awareness all the intermediate operations. Acquisition of correct reflexes must therefore be a matter of learning.' (Servais, 1975)

In het reken-wiskundeonderwijs is een duidelijk aanwijsbare verschuiving te zien met betrekking tot de rol van algoritmen (zie de bijdrage van Treffers), de (grotere) aandacht voor heuristieken (Van Streun) en oplosstrategieën (Streefland).

Er wordt veelal verwezen naar de resultaten van onderzoek die aangeven dat het lukt mensen te leren problemen op te lossen als men er in slaagt ze algoritmen c.q. heuristieken bij te brengen (te laten verwerven?). Of men kiest voor algoritmen dan wel heuristieken, is veelal afhankelijk van de aard van de problemen waarop men zijn onderwijs richt (Van Parreren, 1975).

Een aandachtspunt hierbij is met name het door vele auteurs (zie bijvoorbeeld Stanic en Lester, 1989) genoemde verschijnsel dat leerlingen met andere - en soms betere - oplossingsmethoden komen in zogenaamde 'really real world' situaties dan bij 'real world textbook problems'. Als belangrijkste argument wordt wel vermeld dat het veel eenvoudiger is '...to make sense out of everyday situations than schoollike situations'.

Lave (1988) stelt dat hiervoor een vijftal oorzaken is aan te wijzen die te maken hebben met de eigen taal die gebruikt kan worden en de eigen - bekende - situatie waarin een probleem zich voordoet. Daarbij komt dat het doel dat nagestreefd wordt (de oplossing van het probleem) meestal dichtbij is.

De houding ten aanzien van het oplossen van problemen in de wiskundeles is één van de aspecten waar Spijkerboer en Van Streun in hun bijdrage aandacht aan besteden. Spijkerboer spreekt daarbij zijn zorg uit over de attitude van zijn leerlingen, die vooral gericht lijken op trucjes en 'snelle' antwoorden. Van Streun zoekt in zijn bijdrage aansluiting bij het begrip 'mathematical know-how'. Dit door Polya veelvuldig gebruikte begrip werd door Kilpatrick (1987) als volgt omschreven:

'In Polya's view, knowledge in any field consists of information plus know-how, and teachers need to impact both. Mathematical know-how is primarily the ability to formulate, solve, and critically reflect on problems. It is more art than skill because of the heavy premium it places on creativity and independent thought.' (pag. 87)

In feite is de attitude van de door Spijkerboer beschreven leerlingen dezelfde als die waar Thijssen in 1929 in 'De Examenidiot of De kinderexamens van 1928' tegen ageerde.

Alleen...ageerde Thijssen niet tegen de attitude van de leerlingen en de leerkrachten, maar tegen de opstellers van de toelatingsexamens voor hbs en gymnasium:

'A en B bezitten samen 160 gulden. A geeft aan B zooveel als B heeft. Daarna geeft B zooveel aan A als deze had overgehouden. Nu hebben zij evenveel. Hoeveel had elk eerst?

Deze laatste som is het aardige voorbeeld van een 'zuivere denksom'; het eigenlijke 'rekenen' dat er aan zit, is de moeite niet waard. Maar er is geen sprake van, dat het vraagstuk dienen kan om te 'testen', of het kind het vermogen heeft, zich de beschreven situatie in te denken: het kind zou, wanneer het dat ging doen, om sommen op te lossen, vastlopen; het kind denkt dan niet, begint er niet aan, zich iets voor te stellen, het probeert zich te herinneren: 'Hoe moest zo'n som ook weer?'. Knoeit dan op z'n herinnering af, wat met de getalletjes, totdat het 'uitkomt'; komt het niet uit, dan knoeit het kind, weer op z'n herinnering af, 'n beetje anders - en zo voort - totdat het wel 'uitkomt'. En de arme 'opleider' zorgt in vredesnaam maar voor 'n genoegzaam aantal sommen, die 't kind al 'gehad' heeft - je reinste dressuur als zelf-doel.

A, B en C kunnen samen een werk in 4 dagen voltooien. A doet per dag 2 maal zooveel als B, terwijl C evenveel doet als A en B samen. In hoeveel dagen kan ieder het werk alleen doen?

Er is geen sprake van, dat een kind, dat niet vooraf gedresseerd is in malle sommen over gekke abstracties 'werk' met gealfabetiseerde werkers van de grilligst-uitlopende prestaties, zulk een som maakt. En wie zulke sommen als test gebruikt, die onderzoekt: in hoeverre is dit kind te dressereren in onwerkelijke malligheden. En alleen wie er heilig van overtuigd is, dat de taak van het kind op de middelbare school zal zijn: malligheden en nog eens malligheden uit te halen - alleen die kan in de uitzoekerij door middel van zulke 'rekenopgaven' iets doelmatigs zien.'

4 Algoritmen, heuristieken en contexten

In het citaat van Thijssen wordt gesproken over het vermogen om zich de beschreven situatie in te denken; een revolutionaire gedachte in 1929?

In 1988 gebruikte Baaij voor een artikel in Willem Bartjens de titel 'Contexten als bron en toepassingsgebied' en benadrukte daarin eveneens het belang van het zich in kunnen leven in de te onderzoeken situaties. Ook in de brochure van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) 'Instappen en Toepassen' (Van Dormolen en Zwaneveld, 1979) en in de bundel 'Instapproblemen'

(Broekman en Pouw, 1985) wordt dit aspect benadrukt. Het inleven en/of het kunnen indenken is echter beslist niet het enige aspect dat bij contextgebruik een belangrijk aandachtspunt dient te zijn (zie de bijdragen van Lagerwerf, Spijkerboer, Roodhardt en Van der Kooij).

Wat in dit kader echter wel steeds voor ogen dient te worden gehouden is, dat ook de meest zorgvuldig gekozen context niet kan verhinderen dat veel van de leerlingen behoefte hebben aan de houvast van duidelijke, liefst éénduidige, regels. Als ze die niet krijgen maken ze die zelf wel (Goffree, 1984) of haken af (zie de uitgebreide literatuur over voortijdige schoolverlaters).

Die behoefte aan houvast - ook wel aangeduid als een voorkeur voor 'algorithmic-mechanical frames' (Voigt, 1985) - kan door de docent echter wel beïnvloed worden, immers:

'Adults point the way to the world, and in adopting cultural points of view children have opportunities of acquiring competencies of all kinds.' (Elbers, 1988, pag. 118-119)

Het wijzen van deze weg komt met name tot uiting in de keuze van de meer of minder rijke contexten (zie bijvoorbeeld de bijdragen van Weijers en Van der Kooij), maar eveneens in de wijze waarop eigen produkties van de leerlingen een rol kunnen spelen.

Hoeveel nullen krijg je op papier als je de printer van je computer alle natuurlijke getallen van 1 t/m 9999 laat uitprinten?

5 Achtergrondideeën

De visie op leren die in veel van de bijdragen in deze bundel impliciet of expliciet doorklinkt is er één die door Cobb e.a. (1991) aangeduid wordt met de term *socioconstructivistisch perspectief*.

Beschouwd vanuit een constructivistische visie op leren, bestaat het leren van wiskunde niet uit een proces van internaliseren van zorgvuldig opgebouwde pakketjes kennis, maar is het een reorganisatie-activiteit. Hierbij wordt activiteit breed opgevat en omvat het ook denk-activiteiten.

Deze opvatting ontkent beslist niet de zeer belangrijke rol die gespeeld wordt door representatiesystemen in het leren van wiskunde, zowel conventionele notatiesystemen (schema's, tabellen, grafieken, variabelen, enzovoort) als materiaal dat speciaal ontworpen is voor het bereiken van onderwijsdoelen. Steeds geldt echter, dat het startpunt voor het leren de door de leerlingen ervaren (experimentele) realiteit is en niet de formele wiskunde (Von Glasersfeld, 1991; Piaget, 1980). Dit betekent onder meer dat de leerplanontwikkelaar en de leraar onderscheid moeten maken tussen de betekenis die een leerling toekent aan representatiesystemen op grond van zijn/haar huidige kennis en de wiskundige structuur die het systeem in zich bergt voor volwassenen die wiskundig geschoold zijn. De Miranda (1962) en Van Hiele (1973) spreken in dit verband over 'de kloof van onverstaanbaarheid'.

Naast de cognitieve aspecten van het leren van wiskunde is eveneens aandacht nodig voor niet-cognitieve factoren als: attitudes en emoties ten aanzien van wiskunde, vooronderstellingen ten aanzien van wiskunde en het leren ervan en bovendien een aantal socio-culturele aspecten. Als uiting van het socio-culturele aspect dient zich met name de overtuiging aan dat het leren van wiskunde zowel een interactieve, als een individuele, constructieve activiteit is (Dekker e.a., 1985; Yackel e.a., 1990).

‘Gelegenheid om wiskundige kennis te construeren komt bijvoorbeeld voort uit pogingen om conflictuerende gezichtspunten tot elkaar te brengen, uit pogingen om wiskundige ideeën of oplossingen te reconstrueren of te verbaliseren en meer algemeen, uit pogingen om een consensus-domein te construeren waarbinnen wiskundige activiteiten gecoördineerd kunnen worden met die van anderen.’ (Cobb e.a., 1991)

Op grond van het voorgaande idee stellen Cobb (en anderen) dat het leren van wiskunde beschouwd kan worden als een proces van zowel ‘acculturation’ als dat van ‘individual construction’.

Als gevolg van deze opvatting wordt het als essentieel gezien dat:

- a. voorkomen wordt dat het schoolrekenen en de schoolwiskunde door de leerlingen ervaren wordt als voornamelijk bestaande uit willekeurige regels en gewoonten (afspraken);
- b. aandacht besteed wordt aan de machtsverhouding tussen leraar en leerling als ze bezig zijn met wiskunde (leraar als langer-lerende, leerling als korter-lerende (De Miranda 1962));
- c. er een klasseklimaat geschapen wordt met sociale normen en waarden die van belang zijn voor de realisering en handhaving van een onderzoeksgerichte houding.

Hoewel geen van de auteurs van de hierna volgende bijdragen de term ‘socioconstructivistisch perspectief’ gebruikt, meen ik desondanks te mogen stellen dat het wel één van de gemeenschappelijke elementen is van deze bijdragen; de stellingen van de auteurs worden grotendeels onderbouwd door de constructivistische visie op het leren van wiskunde.

6 Tot slot

Dit boek heeft - zeker gezien de aangesneden problematiek - een beperkte omvang. Een aantal aspecten blijft daardoor noodzakelijkerwijs onderbelicht. Bij verder doordenken van ons wiskundeonderwijs zullen zij echter niet vergeten mogen worden. Te denken valt daarbij aan:

- Kunnen we het algoritmisch denken aan bod laten komen, bijvoorbeeld door het programmeren van de computer? (Petosa, 1985)
- Welke rol speelt het vertaal-aspect van context naar wiskundemodel (Van Barneveld e.a., 1983) bij de keuze van de aan te leren algoritmen en heuristieken?

- In hoeverre moet er tijd ingeruimd worden voor het (leren) kennen van de context als we deze als context willen benutten in het wiskundeonderwijs? (Broekman en Van der Valk, 1990)
- Is een kopie van het veralgemeniseren van het algoritmiseringsproces, zoals het door Treffers (1982) voor de basisschool is beschreven, ook voor oudere leerlingen bruikbaar?
- In hoeverre kunnen we in het onderwijs aandacht besteden aan: proberen (Clemens, 1984), een schetsje maken, teruguit werken (Schaaf, 1984), enzovoort, zonder deze strategieën tot ingetrainde trucjes te laten verworden?
- Is het überhaupt zinvol aandacht te besteden aan het gebruik van ‘general problem-solving strategies’? (Lawson, 1991; Seller, 1991)
- In hoeverre is het mogelijk in het onderwijs meer aandacht te besteden aan het aanleren en onderhouden van een onderzoekende houding? Zie het prachtige voorbeeld uit Wiskunde Lijn in bijlage 4.
- Kunnen we het verschil verkleinen tussen de ‘leefwereld’ van wiskundigen en niet-wiskundigen? School- en thuissituaties? (zie bijlage 5).

Mijns inziens kan een inleiding als deze het best ‘open’ afgesloten worden met een opgave van Polya die zich er goed voor leent om in gezamenlijk overleg aan-gepakt te worden.

Let $t(n)$ denote the number of trapeziodal representations of the positive integer n , that is, the number of representations of n as sum of consecutive positive integers. For example:

$$\begin{array}{cccccccc} n & = & 1 & 2 & 3 & 6 & 15 & 81 & 105 & \dots \\ t(n) & = & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 5 & 8 & \dots \end{array}$$

Find a ‘simple expression’ for $t(n)$ by appropriate observation followed, if possible, by a proof.

‘Indeed it is the marvellous power of mathematics to eliminate the context, and to put the remainder into a mathematical form in which it can be used time and again.’ (Freudenthal, 1968, pag. 5)

Literatuur

- Baaij, Jos: 'De realiteit is zowel bron als toepassingsgebied', *Willem Bartjens* 8 (1988-'89), 136-138.
- Barneveld, G. van, e.a.: *In verband met.... een introductie op functies via verbanden*, SLO, Enschede 1983.
- Broekman, H.G.B. en H. Pouw: *Instapproblemen*, Vereniging de Samenwerkende Landelijke Pedagogische Centra, 1985.
- Broekman, H.G.B. en J. van Dormolen: *Basisvorming Wiskunde*, Stenfort Kroese/Martinus Nijhoff, Leiden 1989.
- Broekman, H.G.B. en A.E. van der Valk: Contexten in β -onderwijs, in: Lijnse P.L. en W. de Vos (eds.), *Didactiek in Perspectief*, CD- β , Utrecht 1990.
- Buxton, Laurie: 'Algorithms, problems and investigations', in: Buxton, Laurie (eds.), *Mathematics for Everyman*.
- Ciotti, Joseph E.: 'Some methods for constructing the parabola', *Mathematics Teacher* 67 (1974), 428-431.
- Clemens, Stanley R.: 'Systematic Experimentation - a Frequently Used Problem-Solving Strategy', *Mathematics Teacher* 77 (1984), 171-177.
- Cobb, Paul, Terry Wood e.a.: 'Assessment of a problem - centered second-grade mathematics project', *Journal for Research in Mathematics Education* 22 (1991), 3-29.
- Dekker, R., P. Herfs en J. Terwel: 'Contexten en begripsontwikkeling bij wiskunde 12-16', T.D.- β . 3 (1985), 169-183.
- Dormolen, J. van: *Didactiek van de Wiskunde*, Oosthoek, Utrecht 1974.
- Dormolen, J. van en B. Zwaneveld: *Instappen en Toepassen*, IOWO, Utrecht 1979.
- Dormolen, J. van: *Aandachtspunten*, Oosthoek, Utrecht 1982.
- Eggermont, Hilde: 'Een proef op de regel van Horner', *Wiskunde en Onderwijs* 11 (1985), 175-179.
- Elbers, Ed: *Social context and the child's construction of knowledge*, Utrecht 1988 (dissertatie).
- Freudenthal, H.: 'Why to teach mathematics so as to be useful', *Educational Studies of Mathematics* 1 (1968), 3-8.
- Glaserfeld, E. von: *Constructivism in mathematics Education*, Reidel, Dordrecht 1991.
- Goffree, F.: *Benny, een zaak voor de Pabo*, SLO, Enschede 1984.
- Goffree, F.: *Wiskunde en Didactiek*, Wolters-Noordhoff, Groningen 1985.
- Hiele, P.M. van: *Begrip en Inzicht*, Muusses, Purmerend 1973.
- Hilton, Peter en Jean Pedersen: *Fear no more*, Addison-Wesley Publishing Company, Londen 1983.
- Johnson, J.A.: 'An Illustration of Limits', *Mathematics Teacher* 79 (1986), 722-724.
- Kemme, S.L.: 'Gebruikswiskundig en toegepast wiskundig', *Nieuwe Wiskrant* 4 (1985), 11-16.
- Kilpatrick, J.: 'Is Teaching Teachable? George Polya's Views on the Training of Mathematics Teachers', in: Curcio, Frances R. (ed.): *Teaching and Learning A Problem-solving Focus*, NCTM, Reston, Virginia 1987.
- Lave, Jean: *Cognition in Practice: Mind, Mathematics and Culture in Everyday Life*, Cambridge University Press, Cambridge 1988.
- Lawson, Michael J.: 'The Case for Instruction in the Use of General Problem-Solving Strategies in Mathematics Teaching: A comment on Owen en Sweller', *Journal for Research in Mathematics Education* 21 (1990), 403-411.
- Maurer, Stephen B.: 'Two Meanings of Algorithmic Mathematics', *Mathematics Teacher* 77 (1984), 430-436.
- Miranda, J. de, m.m.v. P. van Hiele: 'De structuur van de onderwijssituatie als basis voor de opbouw van de didactiek', *Pedagogische Studiën* 39 (1962), 532-558.

- Nesher, Pearl: 'Are Mathematical Understanding and Algorithmic Performance Related', *For the Learning of Mathematics* 6 (1986), 2-10.
- Parreren, C.F. van: 'Algoritmen en heuristieken in het onderwijs', *Pedagogische Studiën* 52 (1975), 394-405.
- Petosa, Rita L.: 'The Benefits of Computer Programming in Developing Algorithmic Thinking', *Mathematics Teacher* 78 (1985), 128-131.
- Piaget, J.: *To Understand is to invent, The Future of Education*, Penguin Books (reprint), 1990.
- Schaaf, Oscar F.: 'Teaching problem-solving skills', *Mathematics Teacher* 77 (1984), 694-700.
- Servais, W.: Continental traditions and reforms, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 6 (1975), 37-58.
- Stanic, George M.A. en Frank K. Lester jr.: 'Mathematical Problem Solving in and out of school', *Arithmetic Teacher* 37 (1989), 33-36.
- Sweller, John: 'On the Limited Evidence for the Effectiveness of Teaching General Problem-Solving Strategies', *Journal for Research in Mathematics Education* 21 (1990), 411-416.
- Thijssen, Theo: *De Examenidoot of De Kinderexamens van 1928*, Bondsdrukkerij 'De Volharding', Amsterdam 1929.
- Treffers, A., 'Basisalgoritmen in het wiskundeonderwijs op de basisschool', *Pedagogische Studiën* 59 (1982), 471-483.
- Verbruggen, I.: 'Het ontwerpen van algoritmen', *Wiskunde en Onderwijs* 37 (1984), 189-197.
- Voigt, J.: 'Patterns and Routines in classroom interaction', *Recherches en didactiques des Mathématiques*, 1985.
- Yackel E., P. Cobb, T. Wood, G. Wheatly and G. Merkel: 'The importance of social interactions in children's construction of mathematical knowledges', in: T. Cooney (ed.) *Yearbook of the NCTM*, 1990.

Bijlage 1 Aftrek/optelalgoritme

Optellen is makkelijker dan aftrekken:

$$\begin{array}{r} 531 \\ 398 \\ \hline \end{array} - \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 531 \\ 601 \\ \hline 1132 \end{array} + \quad \longrightarrow \quad 133$$

Om even te proberen:

$$\begin{array}{r} 973 \\ 184 \\ \hline \end{array} - \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 973 \\ \dots \\ \hline \end{array} + \quad \longrightarrow \quad \dots$$

$$\begin{array}{r} 878 \\ 300 \\ \hline \end{array} - \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 878 \\ \dots \\ \hline \end{array} + \quad \longrightarrow \quad \dots$$

$$\begin{array}{r} 352 \\ 99 \\ \hline \end{array} - \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 352 \\ \dots \\ \hline \end{array} + \quad \longrightarrow \quad \dots$$

$$\begin{array}{r} 876 \\ 990 \\ \hline \end{array} - \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 876 \\ \dots \\ \hline \end{array} + \quad \longrightarrow \quad \dots$$

Hoe luidt het algoritme?

Gaat het altijd op?

Hoe zou je het onderwijzen?

(Panama Praktijktip nummer 8, uit: Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, september 1986)

Bijlage 2 Reflectie op het leerproces

‘Het leerproces ter verwerving van een algoritme wordt gekenmerkt door een aantal essentiële elementen. We noemen er enkele. Illustreer ze zoveel mogelijk met een eigen ervaring.

- De materiële handeling in de eerste fase geschiedt aanvankelijk op basis van *trial-and-error* (gissen en missen).
- Een belangrijke niveauperhoging ontstaat als het materiële handelen *systematisch* gaat geschieden.
- De toegepaste systematiek moet bewust gemaakt worden. Het *verwoorden* van de systematiek laat enerzijds zien hoe bewust men handelde, en biedt anderzijds de mogelijkheid om de schematische en later de mentale fase te bereiken.
- In de schematische fase is een *toenemende schematisering* te onderkennen.
- Het *notatieschema* geeft belangrijke steun aan het denken, omdat het *werkgeheugen* minder belast wordt dan bij het hoofdrekenen.
- Het optreden van nullen in het antwoord vraagt om een doordenking op een lager niveau (eerdere fase).
- De systematiek, die aan de *verkortingen* ten grondslag ligt, is nauw verwant aan de positionele schrijfwijze van de getallen.
- Het doorrekenen *achter de komma* vraagt om nieuwe doordenking van het algoritme. Soms geschiedt dat op een lager niveau.
- Voor het leren van het worteltrekalgoritme moet men beschikken over slechts enkele *basisvaardigheden*.

In bovenstaande reflectie op het eigen leerproces en dat van andere studenten, hebben we de essentie van het leren van rekenalgoritmen gekarakteriseerd.

De vraag, wat een algoritme nu precies is, is nog niet beantwoord. Het antwoord is, na bovenstaande doordenking van het leren, niet moeilijk.’

(Uit: Goffree (1985))

Bijlage 3 Oplossen van eerstegraadsvergelijkingen

'Bij het oplossen van *eerstegraadsvergelijkingen* breng je de termen met x naar links en de rest naar rechts, maar werk je eerst zonnodig de haakjes en de breuken weg.

Voorbeeld:

$$\text{Los op } \frac{1}{2}(x-3) = 1\frac{1}{3}(2x+7)$$

Uitwerking:

$$\frac{1}{2}(x-3) = 1\frac{1}{3}(2x+7)$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = \frac{8}{3}x + \frac{28}{3}$$

$$3x - 9 = 16x + 56$$

$$-13x = 65$$

$$x = -5$$

haakjes wegwerken

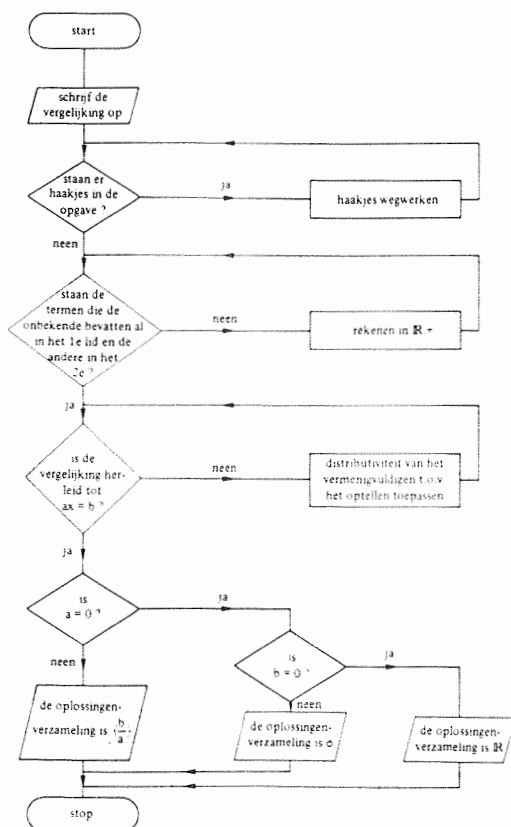
links en rechts met 6 vermenigvuldigen

termen met x naar links, rest naar rechts

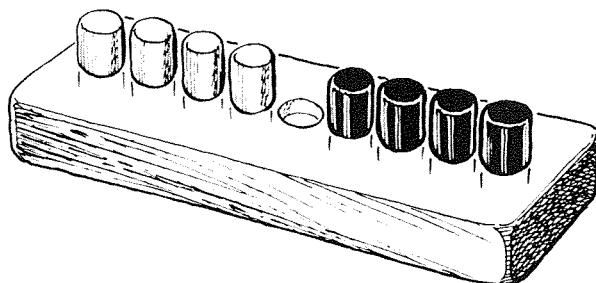
links en rechts delen door -13

(Uit: Getal en Ruimte 4/5 H-B₁, Educaboeck, Culemborg 1990)

Stroomdiagram voor het oplossen van een vergelijking van de eerste graad met één onbekende.



Bijlage 4 Onderzoek



Een spel Het spel bestaat uit een plankje met een rij van negen gaten, zoals in de figuur is aangegeven. Vier zwarte pionnen worden aan één kant in de gaatjes geplaatst, vier witte aan de andere kant. Er is een leeg gat in het midden. Het doel van het spel is om de posities van de groep zwarte en van de groep witte pionnen te verwisselen. Een pion kan verplaatst worden naar een leeg gat. Een pion mag daarbij naar het naastgelegen gat worden verplaatst of over maximaal een pion heen springen.

Wat is het minimale aantal zetten?

Probeer het eerst maar eens, een minuut of vijf.



Vereenvoudigen Waarschijnlijk is het jullie voor 4 paar pionnen (4 x 1 witte en 1 zwarte) niet direct gelukt om het minimale aantal zetten (24) volgens een duidelijke strategie op te sporen. Een goede probleemaanpak is vaak het vereenvoudigen van een probleem, om daarna vanuit de oplossing van dat vereenvoudigde probleem het meer ingewikkelde probleem te kunnen aanpakken. Dat vereenvoudigen kan hier gemakkelijk. Neem 1 paar pionnen, dan 2 paar pionnen, dan 3 paar pionnen, totdat je weer bij vier paar pionnen bent uitgekomen.



Generaliseren In plaats van te vereenvoudigen kun je een probleem ook algemener maken. Je kunt je bijvoorbeeld afvragen of je kunt voorspellen wat het minimale aantal zetten wordt bij een groter aantal pionnen dan vier paar.

Wat is het minimale aantal zetten bij zeven paar pionnen?



Formule Het ligt in de wiskunde voor de hand om nu de algemene formule op te sporen voor het minimale aantal zetten bij n paar pionnen. Je hebt al een tabel.

aantal pionnenparen n	0	1	2	3	4	7	n
aantal zetten $f(n)$					24		?

Een formule ligt niet voor het grijpen.

Grafiek Uit de vorm van de grafiek krijg je wellicht een vermoeden van het type functie waar je mee te maken hebt. Van zo'n functie ken je de algemene vorm $f(n)$ en een groot aantal waarden. Substitutie moet $f(n)$ opleveren.

Bepaal $f(n)$.

Bijlage 5 Laat ons huilen, maar ook glimlachen

- wiskundige: Veronderstel dat je twee paar sokken hebt, een rood en een blauw paar. Je pakt 's morgens zonder goed te kijken twee van de vier sokken. Wat is de kans dat de twee sokken dezelfde kleur hebben.
- buurman: Van twee kleuren evenveel dus het zal wel de helft zijn?
Maar dan had u het waarschijnlijk niet gevraagd.
- wiskundige: Het is inderdaad geen half maar een derde.
- buurman: ???
- wiskundige: Je stelt gewoon dat je x sokken hebt van elke kleur. Nadat je er één gepakt hebt zijn er nog $2x - 1$ over, waarvan $x - 1$ van de kleur die je al hebt. De kans op twee van dezelfde kleur is dus $\frac{x-1}{2x-1}$.
Voor $x = 2$ is dat dus $\frac{1}{3}$.
- buurman: O.k.
- wiskundige: Maar als je oneindig veel sokken hebt kom je wel op die half van jou.
- buurman: Nou ja, van mij...
- wiskundige: Dan is het alleen nog een kwestie van gewoon uitrekenen van $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{2x-1}$ en dat levert $\frac{1}{2}$ op.

(vrij bewerkt naar Jerry A. Johnson, 1986)

$\begin{array}{r} 2 \overline{) 286} \\ \underline{2} \\ 8 \\ \underline{8} \\ 6 \\ \underline{6} \\ 0 \end{array}$	$286 \overline{) 143}$ 2 op de 2 gaat 1 × 8 bijhalen 8 op de 8 gaat 4 × 6 bijhalen 2 op de 6 gaat 3 ×
---	--

- juf: Snap je dat?
leerling: Ja.

's avonds thuis:

- vader: Hoe ging het op school vandaag?
dochter: We hebben staartdelingen gedaan, grotere.
vader: Zoiets als: $23 \overline{) 7352} \dots$?
dochter: Nee: $3 \overline{) 396} \dots$
vader: En hoe doe je dat?
dochter: Nou, gewoon. Je hebt 3 op de 396, dat is ..eh.. 132,
dat schrijf je er achter en dan maak je de staart.
Kijk zo: $3 \overline{) 396} \overline{) 132}$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 396} \overline{) 132} \\ \underline{3} \\ 9 \\ \underline{9} \\ 0 \end{array} \quad \dots \text{ en zo verder.}$$

Algoritmen in didactisch perspectief

Adri Treffers

1 Inleiding

In deze bijdrage worden algoritmen in didactisch perspectief geplaatst en wel speciaal met betrekking tot het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Voor de analyse van algoritmen vanuit de wiskunde en de research rond kunstmatige intelligentie verwijs ik naar de bestseller van Penrose 'The Emperor's New Mind' (1989).

Het woord 'algoritme' is afgeleid van de Perzische wiskundige al-Khowarism (negende eeuw). Vroeger sprak men wel van 'algorisme', wat op zich correcter was. Minder correct is de schrijfwijze 'algorithme', voortkomend uit het Engels waar het geassocieerd werd met 'arithmetic'. Ook minder juist is de aanduiding '*het* algoritme'. Maar omdat dit lidwoord thans vrijwel algemeen ingang heeft gevonden moeten we 'het' daar nu maar op houden. Voor een nadere uiteenzetting over deze kwestie verwijzen we naar Van Wijngaarden, Brandt Corstius en anderen in de 'Panama Post'.¹

Een algoritme is een mechanische procedure, zeg een rekenwijze waar een computerprogramma voor kan worden geschreven. Bekende algoritmen in het rekenonderwijs zijn: de cijferprocedures voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen 'onder elkaar', het opereren met breuken, het berekenen van de vierde evenredige, het algoritme van Euclides voor het bepalen van de grootste gemene deler en talloze andere rekenregels, voorschriften en systematische procedures die verder nog in het reken-wiskundeonderwijs worden gebruikt. Niet zelden worden daarnaast nog allerlei voorschriften in het onderwijs aan de kinderen opgelegd. Dat zijn regels, oplossingsmethoden die de onderwijsgevende voorschrijft, zeg 'methodische' algoritmen.

Denkend over 'algoritmen in didactisch perspectief' stuiten we dus niet alleen op de kwestie op welke wijzen algoritmen het beste aangeleerd kunnen worden, maar uiteraard daarmee ook op het probleem van die 'methodische' standaardprocedures.

Eerst wordt aan de hand van voorbeelden getoond dat vele algoritmen aanzienlijke problemen opleveren (§ 1).

Daarna volgt een analyse van die problemen met het oog op het onderwijs, speciaal de verbetering van het onderwijs (§ 2).

Dan wordt het leren van algoritmen beschouwd in het kader van vier didactieken die in het reken-wiskundeonderwijs gangbaar zijn (§ 3).

En ten slotte volgt een nadere uitwerking van het onderwijzen van algoritmen voor de realistische onderwijsaanpak in de basisschool (§ 4).

2 Enkele gegevens over algoritmen

Cijferprocedures zijn moeilijk: een kwart van de leerlingen beheerst aan het einde van de basisschool het cijferend aftrekken niet volledig en de helft het staartdelen niet (zo blijkt uit nationale en internationale gegevens).²

Verhoudingsvraagstukken waarbij (eenvoudige) breuken te pas komen, kunnen slechts door een kleine minderheid correct worden opgelost: één op de vijf kan bijvoorbeeld bij een vergroting, waarin 8 cm overgaat in 12 cm, bepalen waar 9 cm in wordt omgezet.

Het optellen en aftrekken van ongelijknamige breuken lukt slechts de helft van de leerlingen aan het einde van de basisschool.

Het vermenigvuldigen van gelijknamige breuken blijkt moeilijker te lukken dan met ongelijknamige. De reden daarvan laat zich niet moeilijk raden: verwarring met de regels voor het optellen en aftrekken.

Ongeveer één op de drie leerlingen heeft problemen met vermenigvuldigen en delen van breuken: een beter resultaat dus dan bij optellen en aftrekken. En ook de oorzaak daarvan laat zich raden.

Relatief elementaire opgaven over kommagetallen - zoals de onderstaande - leveren in alle gevallen voor (veel) meer dan de helft van de twaalfjarigen onoverkomelijke problemen op:

orden naar grootte: 0,3 0,13 0,42 0,135

$$5,6 \times 0,1 =$$

$$0,4 \times 0,2 =$$

$$5 : 0,1 =$$

$$5 : 100 =$$

De moeilijkheid van deze opgaven blijkt gelegen te zijn in de a-symmetrie van de komma. Neem het laatste voorbeeld: $5 : 100 = 0,005$ is hier de meest voorkomende fout.

Links van de komma staan de eenheden en rechts de tienden. De leerlingen lezen de tien echter als (nieuwe) eenheid en gaan daardoor dus in de fout. Zou het echter de gewoonte zijn om bijvoorbeeld 87,15 als 8715 te noteren dan zou de symmetrie tussen tienden en tienden, enzovoort, gewaarborgd en beter zichtbaar zijn. Het zou overigens ook voor de nieuwslezers van de NOS gemakkelijker zijn: deze week werd 3,15 tot twee keer toe uitgesproken als '*...drie vijftienden...*'.

Over a-symmetrie gesproken: bij procenten zijn de operaties optellen en aftrekken niet 'symmetrisch': van honderd naar tachtig is een daling van twintig procent, maar van tachtig naar honderd geen stijging van twintig procent. Blijkbaar ligt hier de moeilijkheid in het relatieve van de gestandaardiseerde verhoudingsmaat *procent*: de eenheid, oftewel wat honderd procent is, wisselt. Vanuit dat inzicht is het dan ook niet verwonderlijk dat steeds weer dezelfde fouten opduiken

bij procentrekenen ('de daling van de leden van de communistische partij in Tsjechoslowakije van zeventienhonderdduizend naar zevenhonderdenzestigduizend is meer dan honderd procent' schrijft de NRC). De goedscores bij delingsproblemen, bijvoorbeeld, komen bij twaalfjarigen niet boven de tien procent uit! Kortom, op alle belangrijke gebieden van het basisonderwijs leveren de betreffende algoritmen nogal wat moeilijkheden op. Het is dus alleszins de moeite waard ze eens wat nader in didactisch perspectief te bezien.

3 Een eerste didactische analyse

De moeilijkheden bij het leren van algoritmen kunnen in de *complexiteit* van de procedure liggen. Zo is bijvoorbeeld de staartdeling complexer dan het delen van breuken. Ook kunnen algoritmen door elkaar gehaald worden omdat ze op elkaar lijken: bijvoorbeeld bij breuken en verhoudingen.

Bij bijna alle algoritmen constateren we problemen bij het toepassen: bij de cijferalgoritmen in het herkennen van de betreffende basisoperaties, bij verhoudingen in het doorzien van de (niet-additieve) relatie, bij procenten in het vaststellen van de maat voor honderd procent, enzovoort.

Deze toepasbaarheid hangt samen met het inzicht dat men in het algoritme heeft. Doorziet men bijvoorbeeld in het delingsalgoritme de samenhang tussen enerzijds delen en herhaald aftrekken en anderzijds vermenigvuldigen, dan is het mogelijk via informele aanpakken van herhaald aftrekken en 'op-vermenigvuldigen' tot het toepassen van het algoritme te komen. Inzicht in de structuur van het algoritme is tevens bevorderlijk voor het leren van het algoritme op zich en de mogelijkheid om controle te kunnen houden op de correcte uitvoering ervan.

Voorts nemen we bij het aanleren van algoritmen in overweging of ze perspectief hebben, dus of ze in de toekomst hun waarde blijven houden.

Ook de tijdsinvestering voor het aanleren - afgemeten aan het belang van het algoritme - wordt in de didactische afweging betrokken.

En niet te vergeten: ook de invloed die het leren van procedures, regels en voorschriften kan hebben op de vorming van een (a-)wiskundige attitude, speelt mee. Al de hiervoor genoemde gezichtspunten zullen in de didactische beschouwing worden meegenomen.

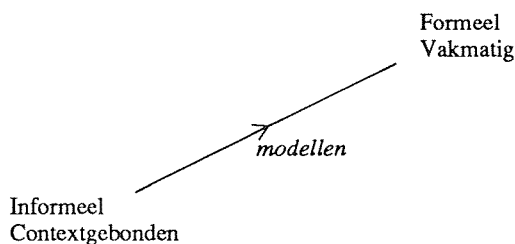
4 Vier visies op wiskundeonderwijs

Voor we echter overgaan tot een didactische standpuntbepaling ten aanzien van het leren en onderwijzen van algoritmen, zal eerst een korte schets worden gegeven van vier ideaaltypen van wiskundeonderwijs. Vier ideaaltypen die zowel in de onderwijstheorie als in de onderwijspraktijk aangetroffen worden in alle mogelijke mengvormen, maar soms ook in pure gedaante.

Aan de hand van figuur 1 bespreken we achtereenvolgens kort de didactiek van het *empirisme*, het *realisme*, het *structuralisme* en het *mechanisme*.

De *empiristen* starten bij hun onderwijs op het informele contextgebonden niveau, dus bij wat kinderen kennen, kunnen en willen. Empiristisch onderwijs is

er echter niet strak op gericht om via het aanbieden van modellen, modelsituaties, schema's en symbolen tot het formeel vakmatige niveau te komen. Dat blijkt vooral uit de houding van de empiristen ten opzichte van algoritmen: ze leggen weinig nadruk op gememoriseerde kennis (onder meer de tafels), op het aanleren van de cijferalgoritmen en op het leren van regels voor het opereren met breuken. Het accent komt te liggen op 'problem-solving', meten, hoofdrekenen en het ontwikkelen van verkorte eigen rekenwijzen.



Figuur 1: Van informeel naar formeel?

Evenals de empiristen zijn de *realisten* van mening dat leren eerst en vooral construeren is. Dat wil zeggen dat leren niet primair plaatsvindt door overdracht van denkbeelden, maar door de constructieve activiteit van de lerende zelf, dus niet van buiten-af maar van binnen-uit geschiedt. Vandaar dat beide didactieken starten op het informele, contextgebonden niveau. In tegenstelling tot de empiristen maken de realisten echter wel gebruik van modellen en schema's om de leerlingen te helpen de kloof tussen het informele, contextgebonden niveau en het formele, vakmatige niveau te overbruggen. Kortom de realisten huldigen de opvatting dat er werkelijk hulp kan worden geboden via het aanreiken van passende modellen, dat het de moeite loont om gericht concrete leerdoelen na te streven, dat er lijn in het onderwijs kan (of moet) worden aangebracht, dat er niveaus in het onderwijs-leerproces te onderscheiden zijn, dat ... allemaal 'datten' die de empiristen niet in deze vorm zullen onderschrijven. Realisten staan dan ook niet afwijzend tegenover het aanleren van algoritmen. Alleen streeft men er naar die standaardprocedures geleidelijk aan door de leerlingen zelf te laten ontwikkelen, dus via de aangeduide ontwerplijn lopend van informeel-contextgebonden naar formeel-vakmatig opererend. Over hoe dit algoritmiseringsproces verloopt straks meer.

Aan de hand van het schema van figuur 1 zijn eveneens enkele opmerkingen te maken over de *mechanistische* en *structuralistische* didactiek.

Bij deze aanpakken ligt het begin bij het onderwijs op het formele, vakmatige niveau. Alleen concretiseren de structuralisten het rekenen met behulp van structuurmateriaal teneinde het formele niet formalistisch te laten zijn; een gevaar dat bij een start op zo'n hoog niveau niet denkbeeldig is! Anders gezegd, de structuralisten doen er vanuit hun conceptie van alles aan om het vaksysteem inzicht-

lijk en constructief te benaderen, ook het leren van algoritmen, al verschilt de concrete oriënteringsbasis daarbij van die bij de realisten.

Eén en ander kan niet van de mechanisten worden beweerd: zij dwingen de kinderen van meet af aan in het formele keurslijf. Maar inzicht op dat startniveau is alleen voor de allerbesten weggelegd. Vandaar dat er in de regel binnen deze aanpak niet veel anders opzit dan oefenen en nog eens oefenen van standaard-oplossingsmethoden enalgoritmen.

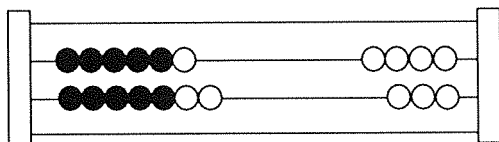
Kortom in alle vier genoemde didactische richtingen verschillen zowel de processen als (ten dele) ook de produkten van het algoritmiseren. In het volgende bepalen we ons voornamelijk tot het algoritmiseren in realistisch perspectief.

5 Algoritmen in het realistisch reken-wiskundeonderwijs

Algoritmiseren in het realisme kenmerkt zich door:³

- de geleidelijke ontwikkeling van de standaardprocedures;
- het terugdringen van de door de onderwijsgevende opgelegde ‘methodische’ algoritmen;
- de nauwgezette afweging van plaats en tijd in de totale leergang in verband met het perspectief van het verdere leren.

Bij het *rekenen tot twintig* bijvoorbeeld worden kinderen niet gedwongen het methodisch onderwijsconcept van het ‘eerst splitsen bij tien’ te volgen ($6 + 7 = 6 + 4 + 3 = 10 + 3 = 13$), maar mogen ze ook informelere strategieën volgen, bijvoorbeeld van het verdubbelen ($6 + 6 = 12$, dus $6 + 7 = 13$) of het werken met vijven ($6 = 5 + 1$, $7 = 5 + 2$, dus $6 + 7 = 10 + 3$). Maar er gebeurt meer: de kinderen krijgen ook een leermiddel aangeboden dat deze informele strategieën stimuleert en ondersteunt. Namelijk een oud telraam met vijfstructuur, dat echter op een nieuwe ‘afwijkende’ manier wordt gebruikt (figuur 2).



Figuur 2: $6 + 7$ op het rekenrek

Zie hier een eerste voorbeeld hoe een model het informele rekenen ondersteunt en kinderen helpt bij het memoriseren van optellen en aftrekken tot twintig, geheel conform de geschetste ‘onderwijstheorie’.

Ook bij de empiristische aanpak krijgen de kinderen gelegenheid informele methoden toe te passen. Maar deze worden niet ondersteund met een model als het rekenrek of iets dergelijks. (Natuurlijk mogen ze wel hun handen gebruiken, maar het werken daarmee is niet zo makkelijk als met de gestileerde ‘handen’ van het rekenrek.)

De mechanisten en de structuralisten daarentegen laten de kinderen splitsen bij tien, al dan niet inzichtelijk ondersteund met positiemateriaal in casu tien-staven en losse blokken.

Dit positiemateriaal kan tevens worden gebruikt bij het *rekenen tot honderd*. En ook nu weer werken de mechanisten en structuralisten met strikte onderwijsvoorschriften.

Een opgave als $87 - 39$ bijvoorbeeld moet dan, indien de getallen naast elkaar staan, als volgt worden berekend:

$$87 \xrightarrow{-30} 57 \xrightarrow{-9} 48$$

En 'onder elkaar' genoteerd volgens de cijfermethode:

$$\begin{array}{r} 71 \\ 87 \\ 39 \\ \hline 48 \end{array} -$$

(Er zijn ook andere standaard-methoden voor het naast elkaar rekenen; we geven hier echter maar één voorbeeld.)

Voor ieder geval wordt dus één methode voorgeschreven, al dan niet ondersteund met positiemateriaal. Uit onderzoek blijkt echter dat kinderen aftrekopgaven vaak heel verschillend oplossen.

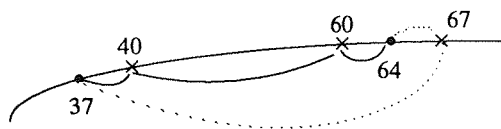
Een boek heeft 64 bladzijden.

Ik heb 37 bladzijden gelezen.

Hoeveel bladzijden moet ik nog lezen?

Kinderen van een jaar of acht blijken tientallen verschillende methoden te gebruiken - weliswaar één per kind, maar zeer divers per groep.

In de realistische didactiek wordt die diversiteit aan oplossingsmethoden benut om kinderen tot verkort, handig rekenen in casu hoofdrekenen te brengen. Daarbij wordt positiemateriaal benut, waaronder geld, maar ook de zogenoemde lege getallenlijn (figuur 3).



Figuur 3: Lege getallenlijn

Op deze getallenlijn kunnen de lange of meer verkorte rekenwijzen worden afgebeeld. Het model kan ook benut worden om het rekenen verder te verkorten.

Bij het rekenen onder elkaar wordt door de realisten echter niet direct op het verkorte cijferen aangestuurd. Dat wil zeggen dat ook de volgende informele oplossingen als voorgangers voor het standaard-cijferen aan bod komen:

$$\begin{array}{r} 64 \\ 37 \\ \hline 34 - 7 = 27 \end{array}$$

of

$$\begin{array}{r} 64 \\ 37 \\ \hline 30 - 3 = 27 \end{array}$$

of

$$\begin{array}{r} 64 = 50 + 14 \\ 37 = 30 + 7 \\ \hline 20 + 7 = 27 \end{array}$$

Eén en ander wordt ondersteund met positiemateriaal en allerlei andere methoden (bijvoorbeeld het overbruggen van de afstand tussen 37 en 64 met de lege getallenlijn).

In de realistische optiek wordt het optellen en aftrekken tot honderd dus niet (meteen) gealgoritmiseerd, maar wordt er ruimte gelaten voor allerlei gevarieerde strategieën van handig (hoofd-)rekenen.

Later wordt het hoofdrekenen benut om de *cijferprocedures* aan te leren. Als voorbeeld van deze werkwijze nemen we de staartdeling. Als startprobleem voor de staartdeling dient bijvoorbeeld:

*Er worden 1128 soldaten vervoerd in bussen met 36 zitplaatsen.
Hoeveel bussen zijn nodig?*

De leergang die de kinderen doorlopen kan met de volgende drie oplossingen worden gekenschetst (figuur 4).

36 / 1128 \	36 / 1128 \	36 / 1128 \
<u>360</u> 10 bussen	<u>720</u> 20	<u>1080</u> 30
<u>768</u>	<u>408</u>	<u>48</u>
<u>360</u> 10 bussen	<u>360</u> 10	<u>36</u> 1
<u>408</u>	<u>48</u>	<u>12</u> (1)
<u>360</u> 10 bussen	<u>36</u> 1	
<u>48</u>	<u>12</u> (1)	
<u>36</u> 1 bus		
<u>12</u> (1 bus)		
(a)	(b)	(c)

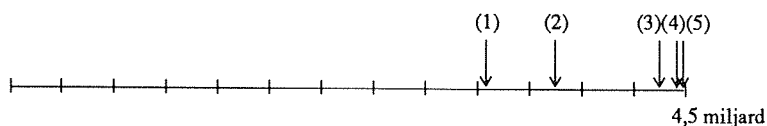
Figuur 4: Drie mogelijke oplossingen (a, b en c)

Merk op hoezeer een dergelijk algoritmiseringsproces verschilt van de werkwijze in de andere richtingen: de empiristen algorithmeren niet, en de structuralis-

ten en mechanisten kiezen de eindprocedure tot startpunt, te beginnen met eenvoudige getallen en gevallen, los van toepassingsopgaven, al dan niet met gebruik van positiemateriaal. In de realistische opzet wordt weliswaar naar de eindvorm van (c) gestreefd, maar ook indien die niet door alle kinderen wordt gehaald is er nog geen leerling overboord. Want ook met de wat uitgebreidere rekenwijzen kan het probleem worden opgelost.

Het meest kenmerkende van de realistische aanpak van *verhoudingen* is, dat niet rechtstreeks op de zogenoemde regel-van-drie bij het uitrekenen van de vierde evenredige wordt aangestuurd, ook nu weer niet.⁴

Eerst worden verhoudingen visueel benaderd, dus gebonden aan de kijkwereld. Tekeningen op schaal, modellen, kortom allerlei afbeeldingen 'naar verhouding' worden gebruikt om problemen te stellen of te verduidelijken. Of ruimer: verhoudingen worden benut om getallen en relaties tussen getallen uit te beelden. Neem bijvoorbeeld de uitbeelding van het ontstaan van leven op aarde, de totale evolutie oftewel 4,5 miljard jaar gecomprimeerd tot één jaar. De ééncelligen (1) verschijnen begin september, de gewervelde dieren (2) half november, de zoogdieren (3) half december, de primaten (4) tweede kerstdag en de mens pas enkele minuten voor twaalf op ... 31 december. Op deze wijze wordt het moeilijk voorstelbare voorstelbaar gemaakt - je kunt er desgewenst nog een plaatje bij tekenen (figuur 5).



Figuur 5: De evolutie in één jaar

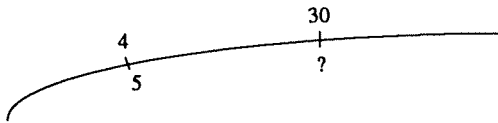
Een plaatje in de vorm van een dubbele getallenlijn - dubbel in die zin dat aan de boven- en onderkant benoemde getallen naar verhouding aan elkaar zijn gekoppeld. In het bovenstaande geval zijn dit twee tijdmaten, maar afstand-tijd en allerlei andere grootheden kunnen op dezelfde wijze gekoppeld op zo'n lijn worden afgebeeld.

En hiermee hebben we tevens een belangrijk model voor de numerieke behandeling van verhoudingen aan de orde gesteld. Een model dat kan helpen bij het oplossen van vier categorieën verhoudingsopgaven namelijk bij:

- het vaststellen van de verhoudingsrelatie $?:?$
- het vergelijken van gelijkwaardige verhoudingen $a:b \text{ ? } c:d$
- het maken van gelijkwaardige verhoudingen $a:b = ? : ?$
- het bepalen van de vierde evenredige $a:b = c : ?$

De dubbele getallenlijn wordt in principe leeg aangeboden, opdat de leerlingen hem zelf kunnen vullen, eerst uitgebreid, later slechts schaars omdat dan met ver-

korte methoden wordt gerekend. Anders gezegd: het model van de lege dubbele getallenlijn functioneert zowel dicht bij het informele, contextgebonden niveau als later ook in de buurt van het formele, vakmatige rekenen en kan meer concreet maar ook abstracter worden benut. Kortom, de geleidelijke algoritmisering kan ermee worden bewerkstelligd. Hoe dat precies gaat laat zich indenken aan de hand van de volgende opgave:



*Een wiel legt in 4 omwentelingen 5 meter af.
Hoeveel meter legt het af in 30 omwentelingen?*

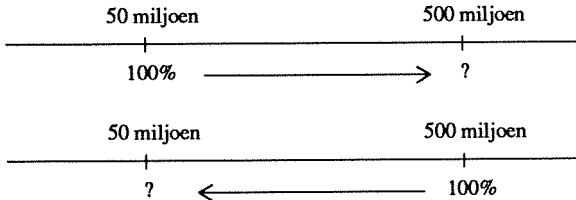
Het synchroon ‘afrollen’ van de tafels van vier en van vijf, stap-voor-stap is een mogelijkheid, of het verkorte rekenen via zeven maal vier en vijf en via acht maal vier en vijf, of direct via zeveneneenhalf maal vier en vijf, of door de relatie tussen de getallen boven en onder vast te stellen op $\frac{5}{4} \times$, of door terug te gaan op één aan de bovenkant en dan naar dertig te springen, of ...- al met al een zekere progressie naar toepassing van de regel-van-drie. Met de lege dubbele getallenlijn kan desgewenst het werken met de verhoudingstabel en ‘machientjes’ worden verbonden.

Zo zien we ook hier weer een geleidelijke algoritmisering aan de hand van een krachtig en veelzijdig model - eerst een ‘model van’ later een ‘model voor’ verhoudingen in de vorm van de lege dubbele getallenlijn. Dit model is ook zeer goed bruikbaar voor de gestandaardiseerde verhoudingsmaat *procent*, dat spreekt voor zichzelf.

Een voorbeeld uit de krant:

‘De wapenverkoop van Tsjechoslowakije is teruggelopen van 500 miljoen in 1985 naar 50 miljoen gulden in 1990 - dat is een teruggang van negenhonderd procent.’

Het is interessant is om te achterhalen waar die negenhonderd vandaan komt (figuur 6)!



Figuur 6: Procenten op de dubbele getallenlijn

Ten slotte nog enkele opmerkingen over het geleidelijk algoritmiseren van het opereren met *breuken*.

In recente denkbeelden over een realistische didactiek met betrekking tot het breukenonderwijs worden breuken aanvankelijk alleen gebruikt bij benoemde getallen en grootheden. Dit komt ook in de notatie tot uitdrukking. Er wordt dus bijvoorbeeld gewerkt met:

$\frac{1}{2}$ m (m is meter)

$\frac{1}{4}$ u (u is uur)

$\frac{3}{4}$ d (d staat bijvoorbeeld voor een dag oftewel 24 uur)

$\frac{5}{6}$ d (d staat voor dozijn)

$\frac{2}{3}$ a (a staat voor een lijnstuk met een zelf te kiezen lengte)

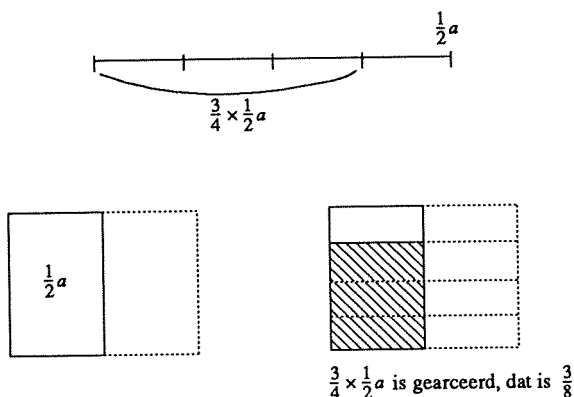
$\frac{2}{3}$ r (r staat voor een reep met bijvoorbeeld drie stukjes)

Het vergelijken van breuken kan nu gebeuren door over te stappen op een andere maateenheid. Bijvoorbeeld: $\frac{2}{3}$ uur is kleiner dan $\frac{7}{10}$ uur, want $\frac{2}{3}$ uur is veertig minuten en $\frac{7}{10}$ uur is 42 minuten. Preciezer, het verschil is twee minuten oftewel $\frac{2}{60}$ uur. Optellen en aftrekken van breuken kan via eenzelfde overstap $\frac{2}{3}$ u + $\frac{7}{10}$ u = 82 min = $1\frac{22}{60}$ u. (Alleen gaat het in de leergang natuurlijk niet zo abrupt en wordt aanvankelijk eerst met $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ enzovoort geopereerd.) Eerst kan het antwoord nog in die andere maat worden gegeven en genoteerd zonder breuken, later volgt het terugvertalen naar de oorspronkelijke maat en verschijnen ook breuken in de uitkomst. Steeds worden de natuurlijk benoemde breuken ook benoemd genoteerd. Later kan ook de benoeming op een handige manier worden ingevuld: bijvoorbeeld $\frac{1}{2}$ a + $\frac{1}{3}$ a kan handig worden uitgerekend door voor a een dag te nemen (24 uur) of een dozijn, of een lengte van zes eenheden: $\frac{1}{2}$ a = drie eenheden, $\frac{1}{3}$ a = twee eenheden, samen vijf eenheden dus $\frac{5}{6}$ a, maar goed, dan zijn wij al een eind in de leergang gevorderd. In dit gevorderde stadium kan ook de relatie tussen breuken enerzijds en decimale breuken en procenten anderzijds worden gelegd door bijvoorbeeld uit te gaan van meetgetallen als $\frac{5}{8}$ m, de uitkomst te vertalen naar cm en de stap terug met een kommagetal te schrijven (of via mm), dus weer aan te sluiten op het begin van de leergang waarin breuken worden vergeleken.

Het vermenigvuldigen van breuken geschiedt op een vergelijkbare wijze met benoemde breuken. Aanvankelijk wordt nog geen maal-teken gebruikt, maar is de notatie: $\frac{3}{4}$ deel van $\frac{1}{2}$ a, later te schrijven als $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ a. Voor het oplossen van dergelijke problemen kan ook weer de strategie van de maatverandering worden benut. Maar naast de getallenlijn kan nu ook het rechthoeksmodel (de reep) als model fungeren (figuur 7).

Het delen van breuken verloopt ook via maatverfijning. Bijvoorbeeld $\frac{3}{4}$ a : $\frac{1}{2}$ a wordt gelezen als 'hoeveel keer past $\frac{1}{2}$ a in $\frac{3}{4}$ a'. Neem voor a bijvoorbeeld 100 (m) of 60 (uur) of 24 (dag) of 12 (dozijn) of 4 (zelf gekozen) dan komt die $1\frac{1}{2}$ er

vanzelf uit. Op den duur vindt geleidelijk aan verkorting plaats. Kortom, de rekenregels worden langzamerhand door de kinderen als uiterste verkorting ontwikkeld. Maar gebeurt dit niet, dan nog kunnen kinderen met breuken opereren en allerlei toepassingen maken, net zoals dus bij verhoudingen, cijferen en hoofdrekenen.



Figuur 7: Modellen voor $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} a$

Dit is in vogelvlucht de onderwijsaanpak van de realistische didactiek met betrekking tot het algoritmiseren.

6 Algemene conclusie

De realistische didactiek met betrekking tot algoritmen wordt gekarakteriseerd door:

- het inzichtelijke verloop van het proces van geleidelijk algoritmiseren;
- het gebruik van modellen ter overbrugging van de kloof tussen het vrije, informele rekenen en het gebonden standaardrekenen;
- de toepasbaarheid die in de beschouwing van de algoritmen en het algoritmiseren wordt betrokken;
- het brede perspectief waarin algoritmen worden beschouwd, met name wat betreft het leerproces op langere termijn;
- het verwerpen van de vele ‘methodische’ algoritmen, die in het onderwijs als standaardoplossingsmethoden, regels en voorschriften gehanteerd worden;
- de gedifferentieerde einddoelen die nagestreefd worden.

De realistische opvatting over algoritmiseren verschilt van de empiristische, de structuralistische en de mechanistische. Evenals de structuralistische aanpak staat de realistische tussen de uitersten van het mechanisme (alleen maar algoritmen leren) en het empirisme (vrijwel geen standaardprocedures aanleren) in die zin dat deze stromingen algoritmen een passende plaats geven.

Maar daarmee houdt de overeenkomst op; zie de zojuist genoemde punten die niet bij het structuralisme passen.

Het is echter ook reëel te beseffen dat algoritmen in realistisch perspectief in de onderwijspraktijk in allerlei mengvormen voorkomen, dus soms ook zeker mechanistische en structuralistische trekken zullen vertonen - dat is nu eenmaal inherent aan onderwijs naar menselijke maat, maar dan vanuit de leraar bekeken. Dit neemt echter niet weg dat in het realistisch ideaaltipe algoritmen een geheel eigen gezicht hebben.

Hoe het beeld ten aanzien van het algoritmiseren er in het voortgezette wiskundeonderwijs uitziet heb ik hier buiten beschouwing moeten laten. Het is overigens de vraag of dit beeld een generalisatie van het geschetste basisonderwijs kan of moet zijn. De informele laag van de oudere leerlingen bevat immers al zoveel formele kennis en vaardigheden waarop kan worden voortgebouwd, dat veralgemenisering van het hiervoor betoogde uiterst hachelijk, zo niet didactisch onverantwoord genoemd moet worden.

Met deze prudente algemene conclusie sluit ik af.

Noten

1. Zie: Feijs en De Moor (1986).
2. Zie: Wijnstra (1988), Padberg (1980), APU (1980) en Carpenter (1981).
3. Zie: Treffers e.a. (1989, 1990) en de bijdrage van Streefland elders in deze bundel.
4. Zie de artikelenserie in het *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs* vanaf jaargang 1990 van de hand van Streefland, De Moor en Treffers.

Literatuur

- APU: *Mathematical Development*, HMSO, Londen 1980.
- Carpenter, T.P. e.a.: *Results from the Second Mathematics Assessment of Educational Progress*, NCTM, Reston 1981.
- Feijs, E. en E. de Moor: 'De of het algoritme', *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs* 5 (1986), 24-27.
- Padberg, F: *Didaktik der Arithmetik*, Wissenschaftsverlag, Mannheim 1986.
- Penrose, R: *The Emperor's New Mind*, Oxford Univ. Press, Oxford 1989.
- Treffers, A; E. de Moor en E. Feijs: *Proeve van een Nationaal Programma voor Reken-Wiskunde op de basisschool (deel 1)*, Zwijsen, Tilburg 1989.
- Treffers, A; E. de Moor en E. Feijs: *Proeve van een Nationaal Programma voor Reken-Wiskunde op de basisschool (deel 2)*, Zwijsen, Tilburg 1990.
- Wijnstra, J.M. (red): *Balans van het rekenonderwijs in de basisschool*, Cito, Arnhem 1988.

Het onderwijs in de know-how van de wiskunde

Anne van Streun

1 Het denken bevorderen

Vanaf het moment in 1964 dat ik begon met wiskunde aan leerlingen van een hbs te onderwijzen, frappeerden de grote verschillen in leeropbrengst bij het vak vlakke meetkunde mij. Sommige leerlingen 'zagen' onmiddellijk welke eerste stap moest worden uitgevoerd of welke hulplijn er moest worden getrokken, terwijl andere leerlingen wanhopig naar een blank papier bleven staren. Later bleek mij dat hier sprake was van een algemeen gesignaleerd verschijnsel. De Russische psycholoog Landa beschrijft dit en vermeldt het gangbare commentaar van docenten: 'Je kunt denken of je kunt het niet'.

Net zomin als Landa accepteerde ik indertijd die 'oplossing'. Met hulp van het werk van Polya, gestimuleerd door oude publikaties van Bos in Euclides en door ideeën uit de leerboeken van Bos en Lepoeter, ben ik begonnen met name mijn meetkunde-onderwijs te richten op het verwerven van een goede probleemaanpak, waarbij vooral de probleemanalyse centraal stond. Wat is er gegeven? Waar moet je naar toe? Wat is het verschil tussen beide? Welke kennis, die wellicht van pas kan komen, heb je in huis? (De hoge correlatie met de leerprestaties in het klassieke grammaticaalonderwijs deed mij vermoeden dat daar sprake was van hetzelfde type probleemanalyse.) Indertijd was ik ervan overtuigd dat die probleemaanpak werkte en ook nu nog denk ik dat leerlingen op die manier beter leerden een redenering op te zetten of een meetkundeprobleem aan te pakken. Naar de algebra was er geen transfer, maar wel naar de analytische meetkunde en de bewijzen in de goniometrie. Maar hoeveel van mijn leerlingen leerden beter denken? Hoe ver gaat de transfer van denkmethoden?

In het voorwoord van het ICME-congres in Berkeley stelt Polya (1983) in één van zijn laatste publikaties (hij was op dat moment 93 jaar, zijn eerste boek over heuristisch wiskundeonderwijs kwam uit in 1946 toen hij 59 jaar was, tijd voor de VUT) nogmaals dat wiskundeonderwijs bij uitstek geschikt is om het denken te stimuleren, mits het goed wordt gegeven. (Wat hij 'goed' noemt, heeft hij in een reeks boeken helder genoeg uitgewerkt.) Hij staat in die stellingname natuurlijk niet alleen. Ehrenfest (1960) wees in Nederland op het leren leveren van goede argumentaties, op het leren abstraheren van essenties uit een veelheid van gegevens, op de ontwikkeling van het kritisch denken door 'goed' wiskundeonderwijs. Onderwijsdoelen, die ook bij de invoering van Hewet en Hawex werden genoemd. In mijn ogen heeft Bos in zijn artikelen in Euclides (1955) heel helder beredeneerd waar het in eerste instantie om gaat. Mijn eerste stelling ontleen ik dan ook graag aan hem.

Stelling 1

De leerling moet ervaren dat over een opgave of probleemsituatie kan worden nagedacht, dat het mogelijk en de moeite waard is om jezelf systematisch vragen te stellen naar betekenissen, naar middelen en gevolgen.

Sinds Polya en Bos & Lepoeter zijn we intussen heel wat verder gekomen in het onderzoek naar probleemoplossingsmethoden en het bevorderen van het denken door middel van wiskundeonderwijs.

We weten dat transfer van denkmethoden naar andere probleemsituaties dan die waarin ze zijn onderwezen, niet zo gemakkelijk gaat.

We weten dat gangbaar wiskundeonderwijs (veel oefensommen maken via imiteren van voorbeelden) niet de gewenste attitude bevordert en tot weinig flexibel toe te passen wiskundige kennis leidt.

We weten nog veel meer over hoe oplossingsprocessen verlopen en over de rol van al opgeslagen kennis en de soorten van kennis.

Maar wat weten we eigenlijk over de *effecten* van probleemgestuurd onderwijs, ontdekkend leren en contextrijk wiskundeonderwijs?

Misschien valt er wat te leren van het vele onderzoek dat gedaan is naar de componenten van onderwijs die van invloed zijn op de leereffecten bij leerlingen.

2 De kijk van leerlingen op het schoolvak wiskunde

Stelling 2

Volgens veel leerlingen gaat het bij wiskunde niet om het denken, maar om het onthouden van regels en toepassen van regels in sommen. Dat beeld van wiskunde leren is het voornaamste obstakel op de weg naar zinvol wiskundeonderwijs voor iedereen.

De empirische onderbouwing van de eerste helft van deze stelling kan iedereen wel terugvinden in publikaties van Davis, Schoenfeld, Hart, Grouws, enzovoort. Voor mij weegt het zwaarst, dat wij kennelijk in reken- en wiskundelessen veel angst en gebrek aan vertrouwen kweken.

- Tien jaar lang gaf ik in het kader van een parttime-opleiding Pedagogiek MO-A statistiek aan volwassenen (voor het merendeel onderwijzers, maatschappelijk werkers en kleuterleidsters), die mij het eerste lesuur met holle angstogen aanstaarden.

Uit de eerste lesactiviteit (het ontwerpen en in groepjes invullen van een angstschaal) bleek hoe diep die angst en dat gebrek aan vertrouwen zat. Voor velen ging het bij wiskunde om het onthouden van onbegrijpelijke regels en het op goed geluk toepassen van die regels in sommen.

- Ik denk aan Joon (4-vwo, zeventien jaar), die ik drie maanden lang ruim een uur per week in het kader van mijn zoektocht naar werkzame heuristieken heb geholpen met zijn wiskunde, waar hij het laatste jaar nooit hoger dan een drie op had gescoord. (Hij is nu geschiedenisleraar, net als zijn vader.)

Hij was zich er volledig van bewust, dat hij allerhande wiskunde was vergeten of nooit had gekend. Het duurde weken voordat hij uit zichzelf maar een eerste stap probeerde. Bij elke volgende stap in een oplossingsmethode keek hij vragend op: 'Is dit wel goed?' Na bijna vier jaar wiskundeonderwijs had hij er nog geen notie van, dat hij zelf kon controleren of eigenschappen kon reconstrueren.

Als ik nu mijn protocollen nalees, dan lijkt het wel of ik niets anders heb gedaan dan hem bevestigen: 'Probeer het dan maar eens. Wat kun je wel? Doe het dan', enzovoort.

Zo tegen Pasen kwam hij melden dat hij mij niet meer nodig had. Hij had de boodschap begrepen, kon zichzelf redden en scoorde een zeven op het rapport voor het derde kwartaal.

- Ik denk aan dat meisje bij de kassa van de Gammamarkt, dat met grote schrikogen weigerde om samen met mij de prijs van drie meter regenpijp (vier meter kostte f 19,-) te schatten, toen de calculator het liet afweten.

- Dan hadden die twee jongens van een jaar of negentien bij MacDonald beter begrepen waar het in het wiskundeonderwijs om zou moeten gaan.

Zij legden hun geld op tafel om uit te rekenen of ze elk een BigMac en een Cola konden kopen. Dat probleem was hen te complex. Daarom splitsten ze het op in twee eenvoudiger deelproblemen en losten het op een concreet niveau van handelen in een tweestappenschema op.

De één ging met al hun geld naar voren en haalde twee BigMacs. Daarna legden ze het geld weer op tafel, concludeerden dat er genoeg was voor twee Cola's (los het eenvoudiger probleem op), waarna de ander (denk om het gezichtsverlies!) de twee Cola's haalde.

Wordt het beeld uit mijn tweede stelling bevestigd door onderzoek of is het beeld genuanceerder?

Tijdens mijn onderzoek in 4-vwo (Van Streun, 1989) hebben de leerlingen aan het eind van het schooljaar in een leerverslag gerapporteerd over het ondervonden nut van een aantal methoden, die als heuristisch zijn te kwalificeren.

De negentien uitspraken zijn onder te verdelen in:

- | | |
|---|-----|
| – een schetsje helpt | +++ |
| – achteraf controleren is van belang | + |
| – getallenvoorbeelden helpen | + |
| – het is niet een kwestie van 'zien' of 'niet zien' | + |
| – logisch denken helpt | ++ |
| – regels zelf ontdekken werkt beter | – |

Alleen de stelling van veel didactici en auteurs dat het zelf ontdekken van regels beter werkt bij het leren en vasthouden van wiskundige kennis of methoden vindt geen bijval. Een schetsje maken en logisch denken staan hoog aangeschreven.

De leerlingen gaven in het leerverslag ook hun mening over het karakter van de wiskunde, toegespitst op het verschil tussen het oplossen van problemen en het verwerven en gebruiken van feitelijke kennis:

- | | |
|---|----|
| – het gaat vooral om regels en formules | – |
| – je moet je er iets bij voorstellen | + |
| – waardering van toepassingen | 0 |
| – waardering van kale sommen | – |
| – waardering van het probleemoplossen | ++ |
| – meerdere oplossingsmethoden | + |

Deze leerlingen hadden drie leerjaren gewerkt met een ‘kale’ en technische aanpak van wiskundeonderwijs, waarna zij in 4-vwo een heel anders getint programma met veel toepassingen moesten volgen. Zij beaamden wel dat wiskunde alles te maken had met probleemoplossen, maar over de rol van toepassingen en ‘kale’ sommen waren de meningen nogal verdeeld.

Deze leerlingen van 4-vwo hebben een genuanceerd beeld van wiskunde, dat niet spoort met het algemene beeld van de kijk op wiskunde, zoals dat uit de literatuur naar voren komt. De voor de hand liggende verklaring is dat zij een positieve selectie zijn uit de gehele populatie van leeftijdsgenoten. Zelf geven ze ook aan dat zij vertrouwen hebben in hun eigen mogelijkheden, wat betreft wiskunde. Wij vonden in ons onderzoek daarenboven dat deze houdingsaspecten, evenals die van de belevingsschaal van het Cito, sterk samenhangen met de docent/klas en minder met het leerboek. Voor het schoolvak natuurkunde zijn overigens vergelijkbare resultaten bekend.

Resumerend vonden wij dat de leerling(e) (4-vwo) die met plezier aan wiskunde werkt, het vak niet erg moeilijk en wel relevant vindt, heuristische methoden positief waardeert, het probleemkarakter van wiskunde benadrukt en redelijk veel succes bij het oplossen van problemen ervaart.

3 Het gegeven onderwijs bepaalt de visie van leerlingen op wiskunde

Stelling 3

Het regel- en imitatieleren past uitstekend bij de algemene schoolcultuur.

Als we naar een accentverschuiving toe willen in het leren en onderwijzen van wiskunde, dan moeten we wel onderkennen waarom in nagenoeg alle schoolvakken het regel- en imitatieleren zo sterk verankerd is. Docenten kiezen voor dit leermodel, omdat het past in het schoolse patroon van leren en extrinsieke motivatie. De leerling(e) als ‘homo economicus’ probeert zo snel mogelijk op bevredigende wijze van de schooltaak af te komen. Een snelle liquidatie van rijtjes opgeven past beter in dat beeld dan het intensief peinzen over onduidelijke problemen. Ouders en leerlingen zijn beloningsgericht en zien graag duidelijke en snelle resultaten na geleverde inspanning, wat het korte-termijn-denken en handelen in de hand werkt. Een duidelijke structuur van kleine, overzichtelijke op-

drachten met een garantie op succes bevordert een veilig onderwijsklimaat, wat zeker voor de leeftijdsgroep van twaalf tot zestien jaar (van ibo tot en met vwo) een noodzakelijke leerconditie is. Daarbij komt dat deze vorm van leren gemakkelijk door een docent is te hanteren. Ik herinner mij nog die rustige algebraleringen in 2-hbs, waarin leerlingen, na twee voorbeelden, rijtjes van analoge herleidingen van wortelvormen zoals $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ gingen maken.

De argumentatie voor andere vormen van leren moet bijzonder sterk zijn, om dit patroon te kunnen doorbreken. Een veilig onderwijsklimaat is ook bij probleemgericht wiskundeonderwijs essentieel; succes (anders gedefinieerd wellicht) moet verzekerd zijn; het kan niet zonder extrinsieke motivatie in de meeste van onze scholen; leerlingen en ouders kunnen niet uitsluitend met lange termijn streefdoelen zoet gehouden worden.

Wij staan nog maar aan het begin van een optimale vormgeving van realistisch wiskundeonderwijs voor twaalf- tot zestienjarigen, dat niet zwaar leunt op het imitatieleren. 'Optimaal' houdt ook in dat het voor een doorsnee wiskundedocent met een zware taakbelasting goed te hanteren is. Al met al een hele klus. Je vraagt je dan ook af waarom we zo nodig aan dit beproefde leermodel willen sleutelen? Met autorijles werkt het toch ook?

4 Het leerdoel legt de optimale onderwijsstrategie vast

Stelling 4

Het flexibel leren gebruiken van wiskundige kennis en methoden in verschillende contexten vereist een sterke samenhang in het cognitieve schema en (omvang) rijke chunks. Training op geïsoleerde rijtjes analoge opgaven versterkt de verbrokkeling in het lange termijn geheugen.

Enige bezinning op de doelen van algemeen vormend wiskundeonderwijs leidt redelijkerwijs tot de conclusie, dat de te verwerven wiskundige bekwaamheid zeker ook het kunnen gebruiken van wiskunde in realistische situaties en in andere vakgebieden moet omvatten. (In het leerplan van 1968 hebben we daartegen zwaar gezondigd en nog is in veel landen deze conclusie geen gemeengoed.)

De keuze van het wiskundig gereedschap (de wiskundige methoden) wordt dan mede bepaald door het toepassingsbereik. Daarom valt in een algemeen programma voor twaalf- tot zestienjarigen de algebraïsche techniek voor het oplossen van een tweedegraadsvergelijking (ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen) moeilijk te verdedigen op het moment dat, dankzij calculators en computers, veel algemenere werkwijzen voor allerlei typen functies (numeriek benaderen, plotten, spreadsheets) beschikbaar komen en in de praktijk worden gebruikt.

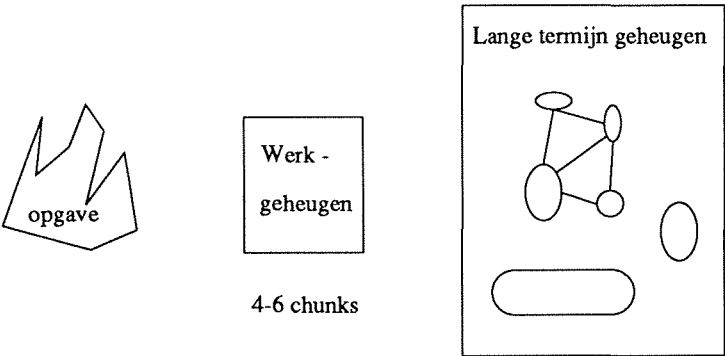
Het flexibel leren gebruiken van wiskundig gereedschap vereist een samenhang in het geheugen (het cognitieve schema), dat moeilijk met behulp van imitatieleren kan worden bereikt. Gezien het belang van de opbouw en de functie van het geheugen bij het oplossen van een probleem zal ik daar nu eerst iets over zeggen.

Het experiment met het onthouden van schaakstellingen, voor het eerst uitgevoerd door De Groot in zijn studie naar het denken van de schaker (1946) en daarna tientallen keren herhaald voor allerlei vakgebieden, is nog altijd bijzonder verhelderend. Grootmeesters en zwakke schakers krijgen enkele seconden een partijstelling met ongeveer 25 stukken voorgelegd, waarna zij die stelling op een leeg bord moeten reconstrueren. Grootmeesters doen dat bijna feilloos, zwakke schakers komen niet verder dan zo'n zes goed geplaatste stukken. Het experiment wordt vervolgens herhaald met een zinloze opstelling van 25 schaakstukken, waarvan ook de grootmeesters maar een zestal posities weten te reconstrueren.

De algemeen aanvaarde verklaring van de resultaten van dergelijke experimenten (ook uitgevoerd met het classificeren van wiskundige en natuurkundige opgaven) is gebaseerd op de veronderstelde organisatie van het lange termijn geheugen en het werkgeheugen (figuur 1).

Het werkgeheugen omvat alles waar een oplosser tegelijkertijd aandacht voor kan hebben. Dat werkgeheugen is beperkt van omvang en kan hooguit vier tot zes kenniseenheden (chunks genoemd) bevatten. De kennis in het lange termijn geheugen is in de vorm van netwerken georganiseerd met samenhangende kenniseenheden en geïsoleerde kennisbrokken.

Een belangrijk verschil tussen experts en beginners ligt in die organisatie van het lange termijn geheugen. De grootmeester kijkt naar de partijstelling, herkent bepaalde configuraties uit andere partijen (bijvoorbeeld een koningsfianchetto van zes stukken), ziet verbanden tussen de posities van verschillende stukken en kan op die basis de zinvolle partijstelling reconstrueren. De vier tot zes chunks in het werkgeheugen bestaan bij de grootmeester uit veel grotere zinvolle kenniseenheden dan bij de zwakke speler, die in zijn lange termijn geheugen dergelijke samenhangende kennisbrokken mist.



Figuur 1: Model van de werking van het geheugen

Een eerste inspectie van een eenvoudige wiskundige opgave of een rijke context moet in het werkgeheugen een koppeling tot stand brengen tussen de waargenomen kenmerken van de situatie en relevante kennisnetwerken of brokjes kennis. Het schijnsucces van training op rijtjes analoge opgaven gevolgd door een toets is gemakkelijk te verklaren. De eerste inspectie van de opgave leidt onmiddellijk tot de koppeling met het actuele kennisbrokje en tot liquidatie van de taak. Dit model verklaart ook waarom op langere termijn de training op kunstmatig geïsoleerde typen opgaven zo weinig succes heeft. Door die eenzijdige training wordt de verbrokkeling van het lange termijn geheugen versterkt, kan de leerling het bij de opgave passende kennisbrokje niet meer vinden en lijkt het alsof zijn lange termijn geheugen ‘at random’ oplossingsmethoden genereert. We kennen allemaal de leerling van 4-mavo, die tot op het examen geen ‘inzicht’ heeft in de samenhang tussen de geïsoleerd verworven kennisbrokjes over vergelijkingen, grafieken, substitueren en functies.

Aan de andere kant maakt de beperkte omvang van het werkgeheugen het noodzakelijk om belangrijke algoritmen en technieken als één geheel (chunk) beschikbaar te hebben, om het werkgeheugen te kunnen ontlasten. Bekend in dit verband is bijvoorbeeld de kennis van de tafels, noodzakelijk om vlot te kunnen cijferen of schatten. Een leerling, die met het tekenverloop van de afgeleide probeert een functie te onderzoeken, moet niet teveel aandacht nodig hebben voor het invullen van het tekenschema, anders raakt het werkgeheugen overbelast en verliest hij het overzicht op de gehele probleemsituatie. Voor die gewenste verkorte opslag van een algoritme in het geheugen moet een leerling wel eerst de gehele route van de uitgebreide opbouw, de oefenfase en de verkorting hebben doorlopen.

Freudenthal (1983) noemde in zijn plenaire rede op de vierde ICME-conferentie terecht het open houden van de bronnen van inzicht tijdens het oefenen één van de voornaamste problemen, die in de didactiek van het wiskundeonderwijs moeten worden opgelost. Steeds weer dreigt het gevaar van fixatie door het maken van rijtjes analoge vergelijkingen, of van opgaven met analoge contexten (allemaal functies van de tijd?), of oefeningen met de verhoudingstabel. Het reflecteren door leerlingen op de eigen concrete, mentale en wiskundige activiteiten werd door Freudenthal het aangewezen wapen tegen het (klakkeloos) steunen en leunen op regels genoemd. Reflectie die door de docent en het leerboek kan worden gestimuleerd.

Naast dat nadenken over en verwoorden van wat je eigenlijk aan het doen bent, is mijns inziens ook de ordening in de tijd van de wiskundige methoden heel belangrijk.

Stelling 5

Start met de meest algemene werkwijzen en pas daarbij later de meer specifieke methoden aan. Eerst de heuristische methoden, daarna eventueel algoritmische.

Het is slecht voor de flexibiliteit van de kennis om snel een specifiek algoritme voor eerstegraads vergelijkingen aan te leren, voordat het hele idee van (het oplossen van) vergelijkingen intuïtief, heuristisch, al proberend met tabellen en ingebed in contexten, eigendom van leerlingen is geworden. Het is slecht om in wiskunde-A (vwo) het begrip afgeleide alleen met natuurkundige snelheden en functies van de tijd op te bouwen, als later een breder toepassingsbereik wordt nagestreefd. Het is slecht om uitgebreid met verhoudingstabellen te oefenen, voordat allerlei typen tabellen op hun patronen en eigenschappen zijn onderzocht. Het is slecht om hoofdstukken lang vergelijkingen op te lossen, zonder grafieken en functies (verbanden) erbij te betrekken. Bij functies (verbanden) zijn de grafiek en de tabel de meest algemene beschrijvingsmethoden, waarna de formulevorm (in woorden en analytisch) kan volgen. Een verband in formulevorm beschreven kan met tabellen en grafieken worden onderzocht. Daarna wordt het voor sommige leerlingen tijd om voor bijzondere functies algebraïsche herleidingen te oefenen. Bij iedere specifieke methode (een algebraïsche techniek of algoritme) moeten de leerlingen een algemene methode (numeriek benaderen, plotten, een grafiek schetsen, substitueren en controleren) achter de hand hebben om op terug te kunnen vallen.

Algemeen wordt aanvaard dat de volgorde en de samenhang van (leer-)ervaringen in hoge mate de structuur van het cognitieve schema bepaalt. Dat geldt ook voor de zogenaamde niet-cognitieve of voor irrelevante aspecten van (leer-)ervaringen. ('Emil und die Detektive' doet mij onmiddellijk denken aan bijzonder vermakelijke en luidruchtige lessen Duits in 2-hbs.) Tal van leerlingen verlaten de basisschool met een bijna liefelijke afkeer van breuken, ingebed in hun lange termijn geheugen.

Als bij wiskunde de opbouw van een cognitief netwerk inderdaad grotendeels afhangt van de organisatie van (leer-)ervaringen, dan legt dat een grote verantwoordelijkheid bij ontwikkelaars en leerboekenauteurs. Streven we er in wiskundeonderwijs naar om aansluiting te vinden bij reële contexten en probleemsituaties, dan moet de opbouw van het cognitieve schema daar ook mee beginnen. Een realistische 'instap', dichtbij al aanwezige netwerken aan kennis en ervaring, gekoppeld aan een oriëntatie op wat de essenties van een onderwerp zijn, is ook daarom belangrijk.

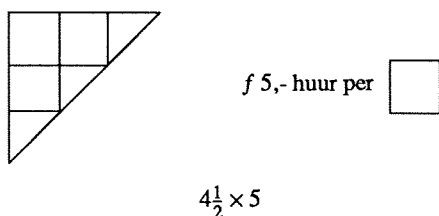
Tussenopmerking: uiteraard realiseerde ik mij terdege dat het beeld dat ik schets van het huidige onderwijs wellicht een eenzijdig gekleurd beeld is. Het helpt mij - en hopelijk de lezer - om verbeteringen helderder voor ogen te krijgen.

5 Probleemgestuurd onderwijs en mathematisch-didactische kernen

Stelling 6

Het banen van een leerweg door middel van een geschikte rij van problemen/taken/opdrachten is een optimale onderwijsstrategie, mits we erin slagen de mathematisch-didactische kernen op te sporen.

Met een mathematisch-didactische kern van een gebied wordt de didactische kern van een mathematisch onderwerp, begrip of methode bedoeld. Daar moet het om draaien bij de ontwikkeling van het cognitieve schema; dat moeten leerlingen vasthouden om niet op dwaalwegen terecht te komen; daar ligt ook het criterium voor slagen of falen van (realistisch) wiskundeonderwijs. Bekijken we eerst een voorbeeld van Freudenthal (1983).



Figuur 2: Wat is de mathematisch-didactische kern?

Freudenthal vermeldde dat veel meer leerlingen de vraag naar de huurprijs van het driehoekig stukje moestuin goed konden beantwoorden dan de vermenigvuldiging correct uitvoeren. Hij vroeg het ICME-congres waar het nu eigenlijk om ging bij deze opgaven. Wat is de mathematisch-didactische kern? Waarop moet je je hier vooral richten in je onderwijs? Voor mij is die mathematisch-didactische kern de vertaling van de formeel-symbolische vermenigvuldiging naar de visuele context. Leerlingen, die zo'n concretisering op allerlei terreinen kunnen uitvoeren, hebben wendbare kennis verworven en behoeven niet meer te steunen op het zich herinneren van regels.

Wat is bijvoorbeeld de mathematisch-didactische kern bij het begin van de toegepaste analyse in 4-vwo of 4-havo? In het oude programma vóór Hewet en Hawex herkenden alleen heel slimme leerlingen het verband tussen de afgeleide, de gemiddelde snelheid, de steilheid van een grafiek, de natuurkundige snelheid en de marginale kosten bij economie. Die herkenning is een kenmerk van intelligentie, want intelligente mensen 'zien' als vanzelf verbanden en generalisaties, die niet expliciet zijn aangegeven. Onderwijs dient ervoor dat dergelijke essentiële relaties voor iedereen helder worden en als mathematisch-didactische kern van het op te bouwen cognitieve netwerk gaan functioneren. Daarom moet er eerst geruime tijd gewerkt worden aan dat kwalitatieve en veelzijdige begrip 'afgeleide', waarbij direct alle verschijningsvormen met elkaar in verband worden gebracht. Tenminste als het onderwijsdoel is om het wiskundige begrip 'afgeleide' te leren gebruiken in allerlei verschillende mathematische en toegepaste situaties.

Eénzelfde soort verschuiving in de mathematisch-didactische kern als bij het begin van de differentiaalrekening zien we bij de ombouw van de wiskundige exponentiële functie naar de meer toegepaste exponentiële groei. Bij de exponen-

tiële functie draaide het bij de start om het netjes definiëren van de machten, van het domein en van het bereik. Bij de exponentiële groei in allerlei groeicontexten lijkt dat minder dominant. Maar wat is in dat toepassingsbereik eigenlijk de mathematisch-didactische kern waar wij de aandacht van leerlingen op moeten concentreren?

$$(0,9)^n < 0,5$$

rente, afschrijving, groei, verval

Het zal ergens in 1983 geweest zijn dat wij voor 4-vwo in het kader van mijn onderzoek opnieuw minder bevredigende ervaringen met verschillende versies van het experimentele lesmateriaal over groefuncties evalueerden. Veel leerlingen zagen de analogie in opgaven over samengestelde rente, bacteriëngroei enzovoort niet. En ze bleven maar optellen in plaats van vermenigvuldigen, ondanks de nadruk die de teksten en docenten legden op de vermenigvuldigings- of groeifactor. Volgens ons was en is dat opsporen van de vermenigvuldigingsfactor de mathematisch-didactische kern van exponentiële groeiproblemen, maar aan de didactiek (hoe laat je leerlingen dat inzien?) mankeerde nog van alles. Gewoon zeggen dat het daar om draait, hielp en helpt niet!

HOUTKACHEL

f 2100,- exclusief BTW

25 procent korting eraf

19 procent BTW erbij

Maakt de volgorde wat uit?

In die tijd stapte ik een toonzaal van een bouwbedrijf in Oldekerk binnen om een houtkachel te kopen. Het model in de toonzaal stond mij wel aan en ik kreeg 25 procent korting. Terwijl de verkoper zijn berekening uitvoerde, stond ik op het punt te protesteren: 'Tel nu eerst die BTW erbij, dan is mijn korting groter.' Ook bij mij was het additieve model (Treffers) weer dominant ondanks het eerste (analoge) probleem uit het boekje van Mason 'Thinking Mathematically' (1982). Een prachtige instap op het centraal stellen van de vermenigvuldigingsfactor. Een docent, die daar wat mee wil doen, kan er een mooie show met de klas van maken, zoals ik Treffers eens heb zien doen voor een groep onderwijskundigen. De reflectie achteraf geeft een mooie kans voor een oriëntatie van leerlingen op de mathematisch-didactische kern.

REFLECTIE

25 procent eraf is $\times 0,75$

19 procent erbij is $\times 1,19$

$$2100 \times 0,75 \times 1,19 = 2100 \times 1,19 \times 0,75$$

Versterking van deze oriënteringsbasis met een serie berekeningen over opslag-percentages en BTW, gevolgd door geschikte groeiproblemen (n groot), ligt na zo'n instap voor de hand. Leerlingen ervaren dat het handiger is om eerst te zoeken naar de vermenigvuldigingsfactor, wat hen tegelijk dwingt tot een probleem-analyse.

Haalt zo'n meer expliciete aandacht voor deze mathematisch-didactische kern, zoals bijvoorbeeld in het Hewet-boekje 'Exponentiële Groei' het geval was, iets uit bij de leerresultaten op langere termijn? En hoe verhoudt zich dat tot het leerresultaat van de klassieke opbouw WEDT, eerst de wiskundige aspecten van de exponentiële functie en dan pas groeiproblemen? In het vergelijkend onderwijs-experiment met ruim vierhonderd leerlingen 4-vwo kwamen in de eindtoets twee groeiproblemen voor. De algemene conclusie, statistisch berekend door middel van regressie-analyse en rekening houdend met beginverschillen in wiskundige bekwaamheden (de Hewet-groep had een betere beginsituatie) was, dat het inderdaad wat uitmaakte. We bekijken nu in detail de resultaten op beide toetsvragen, zonder dat we voor dit specifieke onderwerp met beginverschillen rekening kunnen houden (tabel 1).

Stuitballetje				Kredietregeling			
Exp. var.	goed	formule	tabel	Exp. var.	goed	formule	tabel
HWO	93%	43%	50%	HWO	36%	35%	1%
HEWET	80%	34%	46%	HEWET	27%	26%	1%
WEDT	58%	26%	32%	WEDT	31%	30%	1%

HWO = Heuristisch Wiskunde Onderwijs
HEWET = Herverkaveling Wiskunde Eén en Twee
HEDT = Wiskunde Eerst Dan Toepassingen

Tabel 1: Resultaten op de toetsvragen

De opgaven waren:

Een stuitballetje van rubber bereikt na elke aanraking met de stenen vloer een hoogte, die gelijk is aan $\frac{3}{4}$ deel van de hoogte voor de botsing met de grond. Het balletje wordt van 2 meter hoogte losgelaten. Na hoeveel keer stuiteren is de grootste hoogte minder dan 10 centimeter?

Een postorderbedrijf geeft haar klanten de gelegenheid om goederen te bestellen zonder dat zij direct behoeven te betalen. Aan het eind van elke periode van 4 weken vermeerderd de firma de schuld van de klant met een rentevergoeding van 1,85% over de schuld van dat moment. Een bank biedt haar klanten de mogelijkheid van een 'doorlopend krediet'. Een financiële reserve die gebruikt kan worden voor onvoorziene uitgaven of

voor andere bestedingen. Over de feitelijke schuld wordt een rentevergoeding in rekening gebracht, die neerkomt op een effectief kredietvergoedingspercentage van 13,4% op jaarbasis.

De ene kredietregeling geeft het percentage rentevergoeding per 4 weken (rente-op-rente per 4 weken), de andere kredietregeling geeft het percentage op jaarbasis (rente op rente per jaar).

Bereken het renteverskil van beide regelingen in procenten als je een jaar lang niets zou afbetalen en aan het eind van dat jaar alle rente ineens zou moeten voldoen.

De oplossingsmethode met de formule maakt gebruik van de vermenigvuldigingsfactor, terwijl de tabelmethode stap voor stap optellend of aftrekkend tot het doel leidt. In de opgave met het stuitballetje is er in alle varianten een lichte voorkeur voor het gewoon, via aftrekken, uitrekenen van het aantal keren. De opgave met de kredietregeling leent zich door het vele rekenwerk slecht voor de optelmethode, zodat alleen het kunnen gebruiken van de vermenigvuldigingsfactor wordt getoetst. Door de grotere complexiteit van deze context, daalt het met succes gebruiken van de formulevorm, behalve bij de WEDT-groep.

Dit deelresultaat spoort helemaal met de algehele conclusie. De geringere expliciete aandacht voor het opstellen en gebruiken van 'formules' in de gebruikte Hewet-boekjes van 4-vwo (de mathematisch-didactische kern bij groeiproblemen) leidt tot een relatief slechtere prestatie bij het oplossen van de voorgelegde problemen, die (ook) met de 'formulevorm' kunnen worden opgelost. De WEDT-groep daarentegen doet het zwakker bij andere methoden, zoals hier de numerieke tabelmethode. Het repertoire van de HWO-groep blijkt het breedst inzetbaar te zijn.

6 De mentale voorstelling van de (probleem-)situatie

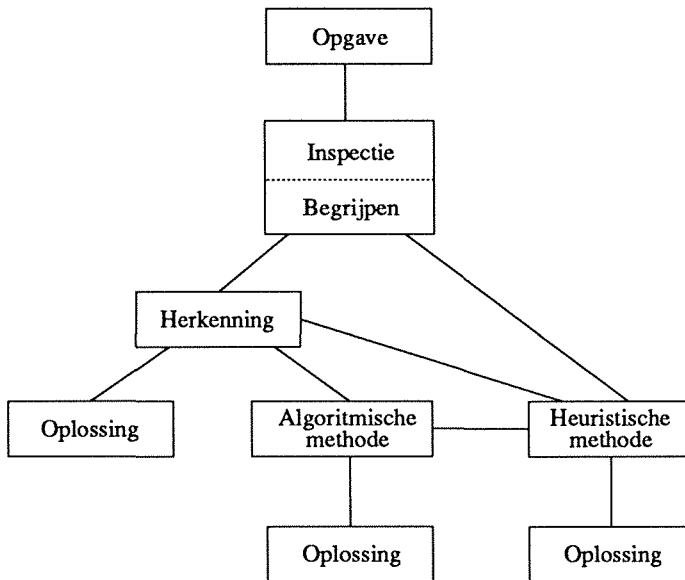
Stelling 7

Het denken in termen van een zich ontwikkelende mentale voorstelling van een (probleem-)situatie is didactisch bijzonder vruchtbaar. Blokkades in die ontwikkeling zijn goede aanknopingspunten voor onderwijs in probleem oplossen.

In de (cognitieve) psychologie werkt men al lange tijd met het begrip *interne mentale representatie*, waar men het geheel aan ideeën van de oplosser onder verstaat. Didactici en ontwikkelaars die weinig heil zien in het uitsluitend kijken naar antwoorden, maar juist geïnteresseerd zijn in oplossingsprocessen, vinden hier een geschikte terminologie om die te beschrijven. De rationele analyse van alle relevante elementen en fasen van een oplossingsproces (figuur 3) kan zo naast de analyse van het waargenomen oplossingsproces worden gelegd om na te gaan hoe de mentale voorstelling van de oplosser is samengesteld.

Een veel voorkomende observatie is, dat een snelle goede oplossing wegens de verkorting vaak weinig informatie geeft over de samenstelling van de mentale voorstelling van zowel het probleem als van het oplossingsproces.

Didactische hulp bij blokkades in de voortgang geeft daarentegen vaak een goed inzicht in het ontwikkelingsstadium van de mentale voorstelling. Een blokkade kan al in de eerste fase optreden als de gebruikte termen, notaties en begrippen niet duidelijk zijn, bijvoorbeeld omdat de aanwezig veronderstelde vakkennis niet actueel beschikbaar is. Ook de gegevens of het gevraagde kunnen onduidelijk zijn voor de oplosser. Het heuristisch verkennen van de probleemsituatie kan de probleemanalyse bevorderen en een meer adequate mentale voorstelling ontwikkelen. De didactische hulp bij blokkades moet dan ook gericht zijn op algemene werkwijzen, waar de leerling in de toekomst zelf naar kan grijpen om methoden, eigenschappen en regels te kunnen reconstrueren.



Figuur 3: Schema van een oplossingsproces

7 Niveaus van herkenning

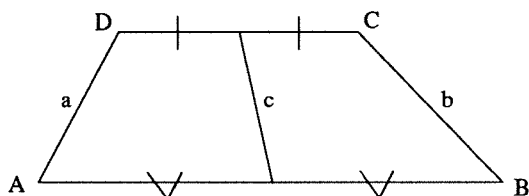
Stelling 8

De rol van de herkenning op basis van al aanwezige kennis bij het oplossen van problemen is groot. Met heuristische overzichten en methoden kan bewust naar die herkenning worden toegewerkt.

Experts bouwen binnen hun vakgebied voort op een enorme basis aan vakkennis, net zoals wiskundeleraars dat doen bij wiskundeonderwijs, dat zij al vaak hebben gegeven. Een eerste inspectie van een opgave leidt op het laagste niveau van herkenning onmiddellijk tot het 'routinematig oproepen' van een geschikte oplossingsmethode. Het imitatieleren maakt gebruik van dat type herkenning. Die koppeling tussen opgave en methode gaat niet meer zo vlot als er een methode

moet worden gekozen bij de zogenaamde ‘gemengde’ opgaven. Naarmate er meer geïsoleerde kennisbrokjes in aanmerking komen wordt het steeds lastiger om die koppeling tot stand te brengen. Er is behoefte aan een zoekprocedure in het lange termijn geheugen en aan systematische overzichten van beschikbare kennis. Heuristische methoden zijn zoekmethoden, waarbij het plaatje van de probleemsituatie zich geleidelijk verder kan ontwikkelen. Soms leidt zo’n zoekmethode direct tot een oplossing, soms wordt op die manier een bekende oplossingsmethode geactualiseerd.

Voor we verder ingaan op de verschillende niveaus van herkenning, is het goed om te wijzen op de beperkte waarde voor het onderwijs van de geniale ‘sprongen’ in oplossingsprocessen. In de eerste plaats zijn ze vaak niet zo geniaal, maar berusten ze gewoon op een herkenning van het type probleem. Neem bijvoorbeeld de volgende meetkunde-opgave uit een Belgische wiskunde-olympiade, die ik, onder andere, wel eens aan jongere en oudere collega’s heb voorgelegd.



Gegeven is het trapezium ABCD.

Het lijnstuk c verbindt de middens van de evenwijdige zijden AB en CD.

$AD = a$ en $BC = b$.

Bewijs dat $2c < a + b$.

Oudere collega’s begonnen al snel ‘geniaal’ hulplijntjes te trekken, terwijl jongere collega’s ongelovig naar het te bewijzen staarden. Oude kennis over hoe je zulke problemen ook al weer aanpakte, wordt snel voor een ‘geniale inval’ aangezien. Natuurlijk bestaan die geniale invallen wel. Kijk maar eens naar de volgende opgave uit de voor- en eindtoets van het onderzoeksproject in 4-vwo.

Het maximale aantal snijpunten bij drie elkaar snijdende lijnen is 3.

Bij vier lijnen is het maximale aantal snijpunten 6.

Wat is het maximale aantal snijpunten bij n lijnen?

In 4-vwo komen dergelijke problemen niet voor, er wordt niet op geoefend. De bedoeling van deze herhaalde opgave was te onderzoeken of met het toenemen van de wiskundige bekwaamheid (vooral in de toegepaste analyse), ook verbetering zou optreden in het leveren van een sterk aan deze specifieke situatie gebonden oplossingsmethode. Dat was niet het geval, de opgave werd na 4-vwo even slecht gemaakt als na 3-vwo. Alleen waren er nu veel meer leerlingen, die uit een

tabel van waarden probeerden een formule te vinden. (Een heuristische methode, die hier juist niet zo handig is!) Van de 425 leerlingen had er één een geniale inval. Hij zag de overeenkomst met combinatorische problemen en schreef direct, compleet met faculteiten, de formule op.

Is een dergelijke verre transfer te onderwijzen? Hoe dan?

In het pre-doctorale college 'Leren en onderwijzen' schreef ik de volgende klas-sieke kranen- en arbeidsom op het bord. Het ging mij erom dat veel leerlingen de gemeenschappelijke kern in deze analoge contexten niet zagen, zodat school-meesters leerlingen gingen trainen op typen sommen (kranensommen, arbeid-sommen). Net als in de Sovjet-Unie, bij een veelheid van 'denksommen', werd het beoogde denken vervangen door reproductie met behulp van imitatieleren.

Kranensom:

Een kraan kan een tank vullen in 15 minuten, een andere kraan kan dat in 20 minuten, een derde kraan in 30 minuten.

Als alle drie kranen open staan, hoe lang duurt het dan om de lege tank te vullen?

Arbeidsom:

Ton kan een karwei in 3 uren afmaken, Dik in 4 uren en Harry in 6 uren.

Hoeveel tijd doen ze over het karwei, als ze het samen doen?

Mijn ervaring is dat ook bijna afgestudeerde wiskundigen moeite hebben om voor de eerste opgave een goede aanpak te vinden. Daarna gaat de tweede van-zelf. De laatste keer mompelde Bart op de voorste rij onmiddellijk: 'Oh, parallelle weerstanden.' Niemand van de studenten begreep waar hij het over had, zodat het college verliep zoals gepland. Achteraf vroegen wij aan Bart hoe hij die opgaven onmiddellijk verbond met parallelle weerstanden. Geen idee, hij 'zag' dat gewoon. Is dat te onderwijzen?

In de honderden lessen, die ik in 4-vwo heb geobserveerd, kwamen die sprongen van 'slimme' leerlingen herhaaldelijk voor. Steeds weer bleek het onmogelijk om van die sprongen gebruik te maken ten behoeve van andere leerlingen. De klas vindt het wel knap, maar tevens onbegrijpelijk. De weg van de probleem-analyse, het herleiden tot wat je al weet en het besnuffelen van de probleemsitua-tie met heuristische methoden is de brede begaanbare weg voor de grote groep. Systematische overzichten, operationeel gericht op het gebruik van die kennis bij het oplossen van problemen, functioneren als heuristische zoekprocedures.

8 Effecten van zelfontdekkend en probleemgestuurd onderwijs

Stelling 9

Optimalisering van contextrijk wiskundeonderwijs is niet gebaat bij algemene uitspraken over onderwijseffecten, maar vereist nauwgezette analyse van leer-processen en effecten in onderwerpgebonden onderzoek.

In de psychologische en onderwijskundige literatuur kom je regelmatig de waarschuwing tegen dat op zelf-ontdekken gericht onderwijs de intelligente leerlingen bevoordeelt, terwijl de leeropbrengst van de middelmatige en zwakke leerlingen sterk tegenvalt. Ook in de discussie over de veronderstelde (meer-)opbrengst van realistisch rekenonderwijs speelt de veronderstelde rol van intelligentiefactoren steeds mee. Worden de leerlingen intelligenter van realistisch rekenonderwijs of kiezen alleen docenten met intelligente leerlingen voor een realistische rekenmethode?

Een gezaghebbend psycholoog als Elshout identificeert zelfontdekkend onderwijs (leren door trial-and-error) met 'maar aan rotzooien' en 'enorm veel tijd verspillen'. Krutetskii (1976) wijst er op dat de herkenning van overeenkomsten en wiskundige essenties in analoge problemen een belangrijk aspect is van wiskundige bekwaamheid. Janvier (1981) waarschuwt dat die herkenning van de gemeenschappelijke kern in verschillende contexten niet vanzelf gaat en een sterk beroep doet op abstraherend vermogen.

Kortom, kiezen we voor probleemgestuurd en contextrijk onderwijs, dan moeten er duidelijke leerwegen worden gebaad, zoals Van Parreren al herhaaldelijk heeft bepleit. We moeten veel werk maken van de sequentie en structuur in de leerlingenteksten en van de hiërarchie van de denkmethoden. Auteurs moeten veel zorg besteden aan de structuur van het kennisschema, dat bij leerlingen moet worden opgebouwd en aan de identificatie van de mathematisch-didactische kernen. Blokkades in oplossingsprocessen moeten worden gebruikt om het nut van en de behoefte aan een systematische probleemaanpak te wekken.

De vakinhoudelijke kennis en de methoden voor een probleemaanpak (de probleemanalyse centraal, de heuristische methoden achter de hand) moeten duidelijk worden geëxpliciteerd. Dat is een heel programma, per onderwerp en type leerlingen uit te werken en in de praktijk te evalueren. Dat type onderzoek (schoolgericht en onderwerpgericht) hebben we nodig. Algemene propaganda-praat leidt niet tot onderwijsverbetering.

9 De uitdaging voor wiskundendidactici, lerarenopleiders en ontwikkelaars

Stelling 10

Het wordt hoog tijd dat wij ons meer gaan concentreren op wat er feitelijk in de klas gebeurt en minder op het schrijven van creatieve leerstofpakketjes.

Hier kan ik kort over zijn. Steeds weer blijkt bij serieuze evaluaties van projecten voor onderwijsvernieuwing, dat de uitwerking in de praktijk van het lesgeven tegenvalt. Veel vooraanstaande onderzoekers riepen tijdens het AERA-congres (1989) op om meer te kijken naar wat er feitelijk binnen de muren van een klaslokaal gebeurt en dat te beschrijven, samen met de directe omgevingsfactoren. Ook in het onderzoek naar realistisch rekenonderwijs is de aandacht nu verschoven van materiaalontwikkeling naar de wijze waarop docenten het lesmateriaal

in de klas gebruiken. Wij staan in het kader van het project 12-16 voor een grote onderwijsvernieuingsoperatie, die mijns inziens groot gevaar loopt te veranderen tot een marginale aanpassing van de leerstof.

Zoals ik al in Euclides heb gesteld (Van Streun, 1990), moet een effectieve docent(e) duidelijke leerdoelen hebben en een overzicht van de kernpunten van het programma. Niet alleen in termen van leerstof, maar ook in termen van mathematische activiteiten, attitudevorming en probleemaanpak. Daar ontbreekt het nog aan, daar moet onze aandacht zich op richten. En niet door vanaf de zijlijn beschouwingen te schrijven of adviezen te roepen, maar door zelf de klas in te gaan bij gewone docenten en met hen de achterliggende streefdoelen van het nieuwe programma handen en voeten te geven.

Literatuur

- AERA: 'Verslag van het AERA-congres 1989 te San Francisco', *Pedagogische Studiën* **66** (1989), 442-458.
- Bos, W.J.: 'Het aanvangsonderwijs in de meetkunde', *Euclides* **31** (1955), 57-70.
- Ehrenfest-Afanassjewa, T.: *Didactische opstellen*, Thieme, Zutphen 1960.
- Freudenthal, H.: 'Major Problems of Mathematical Education', in: Zweng, M., T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak and M. Suydam: *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*, Birkenhäuser, Boston 1983.
- Groot, A.D. de: *Het denken van de schaker*, Noord-Hollandse Uitgeversmaatschappij, Amsterdam 1946.
- Janvier, C.: 'Use of Situations in Mathematical Education', *Educational Studies in Mathematics* **12** (1981), 113-122.
- Krutetskii, V.A., *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*, University of Chicago Press, Chicago 1976.
- Mason, J., L. Burton and K. Stacey: *Thinking Mathematically*, Addison-Wesley, Londen 1982.
- Polya, G.: 'Mathematics Improves the Mind', in: Zweng, M., T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak and M. Suydam: *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*, Birkenhäuser, Boston 1983.
- Streun, A. van: *Heuristisch wiskundeonderwijs*, Groningen 1989 (dissertatie).
- Streun, A. van, 'Wishful thinking en nieuwe leerplannen', *Euclides* **65** (1990), 186-189.

Denkstrategieën toetsen in het wiskundeonderwijs

Kan dat? En hoe?

Leen Streefland

1 Overzicht en voorschot

1.1 Overzicht

De vragen in de titel van deze bijdrage roepen nieuwe op. ‘Toetsen’ verwijst naar de doelen van het onderwijs, terwijl ‘denkstrategieën’ tot de voorrechten van de leerling behoort. Hoe hangen deze twee samen? Door deze vraag te stellen roepen we de complexe problematiek van de evaluatie van (wiskunde-)onderwijs over ons af. Het denken daarover is in beweging (Mislevy, 1989). Daarbij is het niet genoeg dat we in staat zijn denkstrategieën te identificeren; wanneer ze het waard zijn onderwezen te worden, zullen ze moeten worden gerechtvaardigd door de algemene doelen die men voor het wiskundeonderwijs nastreeft en er zullen gereedschappen moeten worden ontwikkeld om ze te diagnostiseren en te meten.

Om welke algemene doelen gaat het dan en welke denkstrategieën hebben we op het oog? Algemene doelen geven de aard van het beoogde wiskundeonderwijs wel een beetje prijs, maar niet voldoende en zullen nader geconcretiseerd moeten worden.

Op bovenstaande vragen zullen (provisorische) antwoorden worden gegeven, waarbij ervan wordt uitgegaan dat onderwijzen en leren hecht met elkaar verbonden (dienen te) zijn.

In een voorschot op het vervolg (§ 1.2) zullen twee voorbeelden bekeken worden op het soort denkstrategieën dat we op het oog hebben. Daarna (§ 2.1) richten we ons op algemene doelen, in het bijzonder op de ontwikkelingen in Nederland (Proeve van een nationaal programma), in de marge vergeleken met de ‘Standards’ (VS) en het ‘National Curriculum’ (GB).

Er blijkt zich een omslag te voltrekken van een reproductie-didactiek naar een (re-)constructie-didactiek. De voorgestelde algemene doelen in genoemde documenten mikken op het ontwikkelen van (denk-)strategieën en andere meer algemene, wiskundige bekwaamheden. In paragraaf 2.2 worden (denk-)strategieën nader beschouwd, uitmondend in een definitie van wat onder heuristisch wiskundeonderwijs verstaan zal worden. Dergelijk onderwijs schept de voorwaarden voor het ontwikkelen van strategieën door de leerlingen zelf.

In paragraaf 3 wordt uiteengezet wat onder realistisch wiskundeonderwijs verstaan wordt en hoe dit getoetst kan worden, in het bijzonder wat de denkstrategieën aangaat.

Hierbij zal ik mij noodgedwongen moeten beperken. Immers, waar het gaat om het toetsen van de effecten van de nagestreefde algemene doelen die het *gehele* wiskundeonderwijs *voortdurend* als *zuurdesem* zullen (moeten) doortrekken,

kan niet anders dan volstaan worden met het tonen van het topje van een mogelijke *toets*-berg en dan nog nauwelijks geordend. In paragraaf 3.1 vindt de lezer echter ontvouwd wat men zich kan voorstellen bij het deel ervan dat zich onder de oppervlakte bevindt. Enkele adviezen voor onderzoek (§ 4) ronden het geheel op een besluit (§ 5) na af.

1.2 Voorschot

Welke denkstrategieën, welk wiskundeonderwijs?

Een eerste voorbeeld

'Realistisch breukenonderwijs' in twee-en-een-half jaar ontwikkelingsonderzoek werd afgesloten met een vergelijkende toets (Streefland, 1988a). De bedoeling hiervan was tweeledig, namelijk:

- de leereffecten van het ontwikkelde *prototype* van een nieuwe leergang vergelijken met de leereffecten van bestaande leergangen, en
- het kritisch (her-)overwegen van de leergang en deze zo nodig reviseren.

In de toets kwam het volgende vraagstuk voor (pag. 382):

3 zuurstokken worden eerlijk verdeeld over een groep van 4 kinderen.

7 zuurstokken worden eerlijk verdeeld over een groep van 10 kinderen.

Vergelijk: in welk groepje krijgt een kind meer, in het groepje van 4 kinderen of in het groepje van 10 kinderen?

Hoeveel meer?

Vijftien procent van de leerlingen (circa tweehonderd) in de controlegroep die met alternatieve leergangen voor breuken onderwezen waren, deelde vier door drie en tien door zeven. Daarmee werden uitkomsten voortgebracht die varieerden van 'zoveel derden, zevenden en één-en-twintigsten' tot zelfs hetgeen wat in figuur 1 te zien is (pag. 386).

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{) 4} \quad 1,333 \\
 \underline{3} \\
 10 \\
 \underline{9} \\
 10 \\
 \underline{9} \\
 10 \\
 \underline{9} \\
 10
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 7 \overline{) 10,0} \quad 1,428571 \\
 \underline{7} \\
 30 \\
 \underline{28} \\
 20 \\
 \underline{14} \\
 60 \\
 \underline{56} \\
 40 \\
 \underline{35} \\
 50 \\
 \underline{49} \\
 10 \\
 \underline{7} \\
 3
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1,428571 \\
 \underline{1,333333} \\
 0,095238
 \end{array}$$

Figuur 1: Algoritmische ontsporing

Wat is hier aan de hand?

De *wiskundige context* van het probleem wordt door de betrokken leerlingen niet *correct* *gevat*, of anders gezegd, niet *geïdentificeerd*. Een blind-algoritmische instelling is er de oorzaak van. Hieraan ligt vrijwel zeker langdurige ervaring met solistische sommenmakerij ten grondslag, kenmerk van mechanistisch rekenonderwijs met zijn geval-na-geval sleur van exercities met standaardrecepten en algoritmen.¹

De impliciete samenhangen in het vraagstuk, die op zichzelf nogal voor de hand liggen, worden omgezet in onjuiste wiskundige representaties, symptoom van een defecte kijk op de operatie delen.² Het 'toegepaste' (staart-)delen past niet als gereedschap.

Is dit vraagstuk daarom ongeschikt voor het toetsen van denkstrategieën? In dit geval bestond de opbrengst van de betrokken groep kinderen slechts uit schijnoplossingen.

Zonder de vraag te hoeven beantwoorden blijkt duidelijk: het gegeven onderwijs weerspiegelt zich in de vergaarde oplossingen. Ze brengen een rigide attitude naar buiten, gericht op handelen volgens recept en het navolgen van regels.

Hiermee is langs indirecte weg 'het identificeren van de wiskundige context' als een belangrijk kenmerk van het wiskundig bezig zijn aan het licht gebracht.

Dat het ook anders kan blijkt uit de oplossingen van twee kinderen uit de experimentele groep (figuur 2) (pag. 384).

$$\begin{array}{r|l} 24 & 3 \\ \hline 4 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 6 & 9 \\ \hline 8 & 12 \end{array} \quad - \frac{1\frac{1}{2}}{2} = \frac{7\frac{1}{2}}{10}$$

3 zuurst. : $14k = \frac{3}{4} \frac{15}{20} \frac{30}{40}$ ← Hier krijg je $2/40$ meer!

7 zuurst. : $10 = \frac{7}{10} \frac{14}{20} \frac{28}{40}$

Figuur 2: Tabellenoplossing

Nu is in beide gevallen 'verhouding' als wiskundige context vastgesteld en de verhoudingstabel als passend werktuig ingezet. In één geval is ook nog met de breuk $\frac{2}{40}$ het relatieve verschil beslist.

Wanneer reacties op éénzelfde probleem zo uiteenlopend kunnen zijn, zijn denkstrategieën dan nog wel door toetsen achterhaalbaar? Op deze manier is men immers nooit zeker!

De diverse oplossingen laten in ieder geval onmiskenbaar zien dat het wiskundeonderwijs kennelijk opbrengt wat gezaaid is.³ Dat geeft weer enig houvast maar ondergraaft de veronderstelde complexiteit van de samenhang van eerst. Of is wellicht het achterhalen en *éénduidig* aan het licht brengen van deze samenhang complex, maar het verband zelf evident?

Op grond van het voorgaande meen ik te mogen stellen: Wil men denkstrategieën toetsen dan zullen ze in ieder geval in het wiskundeonderwijs ontwikkeld moeten worden. Voordat we hierop doorgaan, volgt nu eerst een voorbeeld.

Een tweede voorbeeld

Het thema ‘graankorrels op het schaakbord’⁴ gaat over de uitvinding van het schaakspel. Volgens een aloude legende kreeg de schaakmeester er van zijn vorst een beloning voor.⁵ Hij wenste zich de volgende hoeveelheid graan:

één graankorrel op het eerste veld van het schaakbord, twee korrels op het tweede veld, vier op het derde, acht op het vierde en zo door, dus telkens voor het volgende veld het aantal van het bereikte veld verdubbeld tot en met het 64ste veld. ‘Is dat alles?’, zo geringschatte de koning ‘s meesters wens. Eén zak graan moest volgens hem voldoende zijn.

Wat vinden de leerlingen ervan?

Tijdens de verwerking van dit thema met leerlingen uit groep acht van de basisschool groeide op het bord aanvankelijk het volgende overzicht snel, vrucht van gezamenlijk inspanning:

Veld nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Aantal korrels	1	2	4	8	16	32	64	128	...	...

Toen gaf een leerling dit schot voor de boeg: ‘Je hoeft maar tot het 32ste veld te gaan. Daarna hoeft je voor het hele bord alleen nog maar te verdubbelen.’

De leraar legde deze redenering aan de hele groep voor. Een storm van pro’s dreigde de contra’s te overstemmen. Eén afwijzing kwam er echter bovenuit:

‘Ik denk dat het niet goed is, want op het vierde veld bijvoorbeeld, liggen acht korrels, de helft van vier is twee, maar op het tweede veld liggen geen vier korrels.’

Iedereen was overtuigd door deze redenering. Naar de toegepaste wiskundige middelen beschouwd, gebeurt hier nauwelijks iets verrassends. Deze leerling maakt ‘domweg’ gebruik van wat er al in de tabel op het bord staat. De wijze van redeneren is echter des te opmerkelijker, want de geciteerde leerling:

- *keert* de beschouwde redenering *om*; vanuit de gegevens op het bord *redeneert* hij *terug*;
- *vereenvoudigt* de kwestie sterk;
- *neemt* de gemaakte fout als juist *over*, *redeneert* er *op door*, of beter *terug*, en laat zien dat het zo op een *tegenspraak* met wat gegeven is uitloopt; de oorspronkelijke redenering wordt ermee ontkracht.

Samen met het identificeren van de (juiste) wiskundige context, vormen deze trekken van oplossingsprocessen een eerste indicatie naar welke denkstrategieën we op zoek moeten gaan.

Dergelijke denkstrategieën - althans de beschouwde uitingen daarvan - zullen we globaal beschouwen vanuit het gezichtspunt van algemene doelstellingen voor wiskundeonderwijs (§ 2).

Het wiskundeonderwijs dat we op het oog hebben kwam in de voorbeelden al enigszins aan de oppervlakte. Het gaat om realistisch wiskundeonderwijs. Op de leerlingen wordt een beroep gedaan te komen tot produktieve inbreng via eigen constructies. Om dit mogelijk te maken zullen zij moeten kunnen beschikken over het nodige wiskundige gereedschap.

Ook gaat het om onderwijs dat in hoge mate interactief is en waarin duidelijke samenhangen worden nagestreefd met het oog op de structurering van de voort te brengen wiskunde, zoals het verstrengelen van verhoudingen en breuken.⁶

2 Algemene doelen van (realistisch) wiskundeonderwijs en denkstrategieën

2.1 Algemene doelen

Het wiskundeonderwijs is in beweging, zeker in de westerse, geïndustrialiseerde landen. Het heeft weinig zin om voor de zoveelste keer te gaan herhalen dat 'mathematics counts', dat het gaat om 'kies exact' en dat er dus een 'agenda for action' moet zijn.

Inmiddels is de ontwikkeling al weer een stap verder. De diverse 'agenda's' zijn vertaald in 'Standards' (VS), in een 'National Curriculum' (GB), in een 'Proeve van een nationaal programma' (Nederland) en wat dies meer zij.

Deze weerspiegelen duidelijk de zorg waaruit ze zijn ontstaan, namelijk dat het op reproductie ingestelde, traditionele reken- en wiskundeonderwijs niet meer voldoet.⁰

In de veranderde (algemene) doelen komt dit tot uitdrukking. Het realiseren van allerlei algemene kwaliteiten wordt bepleit.

In de 'Proeve van een nationaal programma' (Treffers e.a., 1989) komen we in dit verband het volgende tegen (pag. 32 e.v.):

- het kunnen verbinden van vraagstukken uit de realiteit met het vaksysteem;
- het opsporen van verbanden, regels en patronen;
- het gebruiken en verwoorden van onderzoeks- en redeneerstrategieën, bijvoorbeeld het belang leren inzien van proberen, experimenteren, simplificeren, observeren, overdrijven, schatten en veralgemeniseren.

Daarnaast worden allerlei attitude-kenmerken genoemd, zoals (pag. 35-37):⁷

- het ontwikkelen van een goed wiskundig aanpakgedrag;
- het toepassen van allerlei strategieën en methoden;
- het interpreteren van wiskundige uitkomsten in de oorspronkelijke (reële) context;
- het (actief) ontwikkelen van een wiskunde taal, en
- het (leren) reflecteren op de eigen wiskundige activiteit (en op die van anderen).

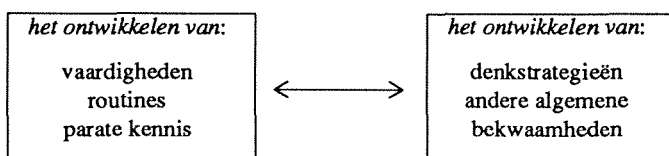
In genoemde publikaties wordt echter over het leren van algoritmen voor bijvoorbeeld de vier hoofdbewerkingen verschillend gedacht.⁸ Wat de basisvaardigheden en het schatten aangaat zijn de standpunten tamelijk eensluidend.

In alle gevallen geldt dat de te verwerven vaardigheden op den duur het karakter van reproduceerbare kennis kunnen krijgen, vergelijkbaar met de effecten van het traditionele onderwijs, overigens afgezien van de eis van de toepasbaarheid die nu sterk benadrukt wordt. Wat dit vaardigheidsaspect betreft zullen op reproductie gerichte toetsen hun bruikbaarheid dus wel blijven behouden.

De genoemde algemene doelen bieden echter aangrijpingspunten om, met het nagaan of en hoe ze gerealiseerd zijn, boven het niveau van het afvragen van vaardigheden uit te stijgen; aangrijpingspunten dus voor andere, betere toetsen. Naar mate het leren zich echter op een hoger niveau beweegt - en hiermee wordt niet bedoeld *verder gevorderd in de wiskunde*, dus aan leeftijd gebonden niveau - zullen de effecten van het onderwijs waarin zich dit leren voltrekt, moeilijker zijn na te gaan, dus minder eenvoudig toetsbaar. De redenen hiervoor zijn duidelijk. Er wordt in de geciteerde algemene doelaspecten - vergeleken met de traditie - een omslag bepleit van reproducerend naar (re-)construerend leren.

Allerlei gebruikte termen zoals 'kunnen verbinden', 'opsporen', 'gebruiken en verwoorden', 'proberen', 'experimenteren' enzovoort verwijzen hiernaar. Het gaat dus duidelijk om na te streven *proces*-doelen. Voor alle activiteiten die in voorgaande termen vervat zijn zal wiskundeonderwijs dat daarbij past dus ruimte moeten scheppen voor de leerlingen om ervaring in het voltrekken ervan op te doen. Een onvermijdelijk gevolg hiervan is de grotere openheid van vraagstellingen naar de leerlingen toe. Bijgevolg zullen de leer- en dus ook de toetsresultaten minder gemakkelijk voorspelbaar zijn.

Het leren van wiskunde zal zich afspelen tussen twee uitersten, te weten:



Een dergelijk breed spectrum zal door het wiskundeonderwijs moeten worden bestreken. Dan pas zal het echt zin hebben bijvoorbeeld toetsen te maken die mikken op het aan het licht brengen van denkstrategieën en een wiskundige grondhouding. Het ontwikkelen van die wiskundige houding, met alle uitingsvormen van dien, zal een blijvend en intenser kenmerk van de wiskundige activiteiten van de leerlingen worden.

Dit betekent dat allerlei organiserende en structurerende activiteiten, zoals in de algemene doelen vermeld staan en die kenmerkend zijn voor het *mathematiseren*, aan de leerlingen worden overgelaten (zie ook § 3.2).

De beoogde algemene doelen zullen permanent nagestreefd moeten worden. De manier waarop dit gebeurt (of zou moeten gebeuren) kan men kenbaar maken door deze exemplarisch te illustreren door de didactische context, waarmee de doelen kunnen worden bereikt.⁹ Het gaat dus om effecten van het wiskundeonderwijs op de lange termijn. In paragraaf 1 zijn daarvan enkele voorbeelden gegeven.

In de volgende paragraaf zal op deze en andere voorbeelden nader worden ingegaan.

2.2 Denkstrategieën ontwikkelen

Verkenning

Denkstrategieën kan men verwerven doordat ze verteld worden. Bijvoorbeeld een vraagstuk algebraïsch oplossen door de onbekenden x en y te noemen en vervolgens hun verbanden vast te stellen. Het fijne kneepje van het oplossingsproces is hiermee onthuld, herhaalde oefening maakt het tot een algoritme. Zoiets kan ook op een heuristische manier gebeuren. In plaats van hen de methode voor te doen worden de leerlingen dan begeleid bij het zelf (re-)construeren ervan. Het onderwijs richt er zich dan voortdurend op dat de leerlingen een instelling verwerven van zelf zoeken, zelf ontwikkelen en zelf construeren. Daarop hebben heuristieken betrekking; de manier waarop de dingen in het onderwijs plaats vinden. (Denk-)strategieën kan men los van het onderwijs observeren. Wil men ze in het onderwijs benutten dan zullen ze daar moeten (kunnen) worden vastgesteld, bewust gemaakt en verder geëxploiteerd.

In de Amerikaanse literatuur spreekt men van 'higher order thinking skills', terminologie met een taxonomische waardering. Net zoals bijvoorbeeld de kwalificaties 'analyse', 'synthese' en 'evaluatie' in de classificatie van Bloom (1956).¹⁰ Ook spreekt men wel van het opdoen van 'mathematical power' of het verwerven van een 'mathematical point of view'.¹¹

Voor ons doel is een dergelijke gewaardeerde classificatie echter nog te prematuur. Wat we willen is: proceskenmerken van wiskundige activiteiten achterhalen. Later kan daarin dan eventueel een indeling naar typen of klassen worden aangebracht.

In de wiskundige activiteit worden de denkstrategieën voorbereid, althans er moet een grondslag voor zijn. Het handelen krijgt in het denken een vervolg; wordt mentaal voortgezet.

'Denkstrategieën' is overigens een wat dubieuze term, omdat iemands wiskundige bekwaamheid ook op een onbewuste manier werkzaam kan zijn, zoals Hadamard (1945) zo prachtig en treffend heeft beschreven.¹²

Dergelijke denkstrategieën, dus eerst onwillekeurig toegepast, veranderen in tactiek wanneer ze bewust worden aangewend.¹³

Er vindt dus *leren* plaats. En dat betekent in meer dan één opzicht verandering. Niet alleen ontstaan hierdoor nieuwe inzichten en worden bestaande uitgebreid

of verdiept, ook iemands grondhouding ten aanzien van nieuwe problemen kan er door veranderen, een kwestie van niveauverhoging dus.

Men kan proberen dergelijk leren te forceren door de (denk-)strategieën in de leerlingen in te voeren, alsof het om het programmeren van een computer zou gaan. Zoiets functioneert niet omdat de leerlingen dan geen deel hebben gehad aan het voortbrengen van de strategieën zelf. Deze zullen uit hen zelf moeten voortkomen, onder leiding van de leraar, via een proces van geleide (her-)ontdekking. Bijvoorbeeld:

- het leren vermenigvuldigen onder elkaar of staartdelen volgens strategieën van schatten en handig rekenen, op den duur stollend tot (persoonlijke) algoritmen;¹⁴
- het handig leren vergelijken, ordenen en samenstellen van equivalente verdelingsituaties met hun uitkomsten, allengs de gedaante aannemend van het bepalen van het relatieve verschil van (twee) verhoudingen en het aftrekken en optellen van ongelijknamige breuken volgens *kgv*-recept;¹⁵ of meer algemeen:
- het doen van (lokale) vondsten en ontdekkingen die later verkort worden tot standaardmaniertjes of trucs; en
- het ontwikkelen van (onbewuste) denkstrategieën tot (bewuste) tactieken.

Telkens gaat het om een verhoging in niveau, vooral waar het de voortgang binnen de wiskunde betreft. Op zeker moment is een verworven niveau echter zó vertrouwd voor de leerlingen, dat hierop weer met nieuwe, hogere niveaus kan worden voortgebouwd. Voor de leerlingen betekent dit dat zij het gerealiseerde niveau als het ware herwaarderden.

In verband hiermee bekijken we - in vogelvlucht - eens een voorbeeld uit een leergang voor breuken:

*4 kinderen verdelen 3 repen.
Hoeveel krijgt ieder?*

Er kan op verschillende manieren verdeeld worden: eerst twee repen, ieder krijgt een halve reep, en dan de derde met ieder nog een kwart reep; òf reep na reep, ieder krijgt een kwart reep, drie keer in successie, enzovoort.

De (denkbeeldige) repen en hun partjes, dat is de inhoud waarop geopereerd wordt (verdelen en toewijzen). Van breuken is nog geen sprake (ondanks de taal). Dit verandert zodra het verdelen zelf en de onderlinge relaties tussen de beschreven parten onderwerp van beschouwing worden.

Op een nog hoger niveau opereren de leerlingen op de betrekkingen zelf zoals ze zijn voortgekomen uit het verdelen. Dit kan bijvoorbeeld gebeuren in vrije productie-opdrachten in de vorm van zogenoemde monografietjes (figuur 3).

De methoden waarmee dergelijke monografieën worden geproduceerd (equivalentie, eigenschappen als commutativiteit e.d.) voeren tot het algebraïseren van het voortgebrachte systeem van de breuken door de leerlingen zelf.¹⁶

'...the operational matter of the lower level becomes a subject matter on the next level.' (Freudenthal, 1973, pag. 125)

Zo lang het kind niet in staat is op zijn eigen activiteit te reflecteren zal het moeilijk worden tot een hoger niveau te komen, waardoor herwaardering eveneens uitblijft.

$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	;	$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$	;	$= \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$	;
$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$	;		;	$= \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8}$	;
$= 3 \times \frac{1}{4}$	;	$= \frac{1}{4} \times 3$	;	$= 3 \times \frac{2}{8}$	;
$= 1 - \frac{1}{4}$	;		;	$= 1 - \frac{2}{8}$	; enzovoort

Figuur 3: Monografietje voor $\frac{3}{4}$

We keren terug naar de benadering van paragraaf 1.2. Daar kwamen vier trekken van oplossingsprocessen aan het licht, namelijk 'probleem omkeren', 'probleem drastisch vereenvoudigen', doordenken op foutieve redeneringen en het identificeren van de wiskundige context.

Dergelijke kenmerken van oplossingsprocessen zullen we voorlopig aanduiden met de term *strategieën*.

Aspecten van probleemoplossen

Belangrijk zijn de voorwaarden en omstandigheden waaronder denkstrategieën zich voordoen of worden uitgelokt. Probleemoplossen is één van de brede terreinen die gedomineerd worden door denkstrategieën, ook bekend als heuristieken. Polya was de eerste die ze op grote schaal en systematisch bestudeerde. Zijn verhalen hierover worden ondersteund door ontelbare voorbeelden.

Polya neemt zijn lezers als het ware bij de hand en staat hen bij het oplossen van wiskundige problemen bij. Hij spant zich in om hen zijn trant van denken op de voet te laten volgen. Zijn suggesties voor het doen van ontdekkingen (en uitvindingen) betreffen aanpakken als:¹⁷

- bekijk een speciaal geval van het probleem in kwestie;
- zoek een geschikt, verwant probleem;
- werk in omgekeerde volgorde door aan te nemen dat de oplossing er al is;
- maak een tekening;
- enzovoort.

Polya typeerde dergelijke strategieën dus zowel naar hun vorm als naar hun inhoud, bijvoorbeeld het omkeren van het probleem tegenover het maken van een tekening.

Een omvangrijke bloemlezing heeft hij gemaakt van strategieën, vuistregels, know-how, enzovoort.

Om er vat op te krijgen heeft Polya behalve zichzelf als probleemoplosser ook de historische ontwikkeling van de wiskunde als bron gebruikt. Zo benadrukt hij bijvoorbeeld dat in de deductief gesystematiseerde meetkunde van Euclides de gevoerde argumenten zonder uitzondering in dezelfde richting werkten: hetzij gegeven - te construeren - constructie, hetzij veronderstelling - te bewijzen - bewijs; consequente systeemdwang dus. Polya tekent hiertegen bezwaar aan. De volgorde in de argumentatie is precies tegengesteld aan 'de natuurlijke volgorde tijdens het uitdenken'. De (ontstaans-)geschiedenis verschilde dus van wat Euclides opschreef.

Van Pappus, historisch wat jonger dan Euclides, vermeldt Polya zijn beschouwingen over de zogenoemde heuristiek of analyse (waarbij ervan wordt uitgegaan dat het gezochte al gevonden is en het te bewijzen al bewezen). Met dit 'van achter naar voren oplossen' of 'regressief redeneren' beschouwt Pappus ook het omgekeerde, de synthese of het 'constructief oplossen' of 'progressief redeneren'.

Voor een meetkundig constructieprobleem adviseert Pappus, volgens de traditie van de Griekse landmeetkunde, de methode van de analyse te volgen: 'Veronderstel hetgeen gedaan moet worden als reeds gedaan' en 'Maak een hypothetische figuur waarin ervan uitgegaan wordt dat aan alle in het probleem gestelde voorwaarden voldaan is'.¹⁸

Overigens werden in leerboeken - ook vóór Polya - meetkundige constructieproblemen heuristisch benaderd. Het was gebruikelijk dergelijke kwesties te beginnen met een analysefiguur in de geest van Pappus' hypothetische figuur. Bij bewijsproblemen bleef de heuristische benadering echter achterwege.

Blikwisseling

Krutetskii (1976) spreekt in dit verband over 'the ability to switch rapidly from a direct to a reverse train of thought'.¹⁹

Freudenthal gebruikt 'change of sight' en 'change of perspective' en onderscheidt verschillende vormen van 'shifting'.²⁰ Uit zijn definitie blijkt dat het om een klasse van aanpakken gaat.

'Change of sight, a complex field of strategies with the common feature that the position of data and unknowns in a problem or field of knowledge is - partially - interchanged; including the recognition of wrong changes of sight.'²¹

Tot een dergelijk 'field of strategies' binnen de context van de meetkunde behoren bijvoorbeeld:

- zichzelf letterlijk op ander standpunt stellen (zie § 3.1);
- gegevens tegen wat gevraagd wordt uitwisselen;
- de volgorde van de stappen in een constructie omkeren;
- enzovoort.

Behalve deze noemt Freudenthal nog een viertal grote strategieën die betrekking hebben op:

- de *ontwikkeling* (niet het afdwingen of opleggen!) van wiskundetaal op het niveau van conventionele symbolen en functionele beschrijving, uitstijgend boven de niveaus van het demonstratieve en het linguïstisch relatieve taalgebruik;
- de graad van precisie vatten, passend bij het probleem in kwestie;
- de wiskundige context van een (reëel) probleem identificeren;
- de eigen wiskundige activiteit tot onderwerp van beschouwing maken met het oog op het realiseren van verhoging in niveau.

Proces versus produkt

Vanuit ons gezichtspunt zijn er enige bezwaren in te brengen tegen het werk van Polya, hoe prachtig en baanbrekend dit op zichzelf ook (geweest) is.

Het voornaamste bezwaar, genoemd door Freudenthal (1983, pag. 41), maar wat men een boekenschrijver niet kan aanrekenen is, dat '...hij niet meedenkt met zijn lezer - immers dat kan niet'.

En dat is, waarop het aankomt, zowel in het wiskundeonderwijs als bij het toetsen van hogere bekwaamheden daarin: '*meedenken met de leerlingen*'.

De vraag naar de herkomst van strategieën, naar hun ontstaan, is in dit verband natuurlijk belangrijk. Welnu, in de schriftelijke neerslag van het historische leerproces is veel 'gladgestreken' en 'op z'n kop gezet' door reorganiseren, vereenvoudigen, herstructureren, herdefiniëren, abstraheren, veralgemeniseren, unifiseren enzovoort. Merk op dat al deze werkwoorden in algemene zin verwijzen naar strategieën die de (vooruit)gang in het historische leerproces gehouden hebben.

Polya onderkende het bezwaar van het leren van 'gladgestreken' wiskunde.

De oorspronkelijkheid van de historische ontwikkeling was er uit weggewist. Deze voltrok zich namelijk:

'...heuristically, by searching, at random and intentionally, by finding by serendipity or systematically. This then, is heuristics: the scribblings, as opposed to the clean copy as it is printed.' (Freudenthal, 1983, pag. 40)

Nu zijn we waar we wezen moeten. Want in de 'scribblings', zoals Freudenthal het zo mooi uitdrukt, weerspiegelt zich de aard van de wiskundige activiteit van de probleemoplosser. De kenmerken of symptomen ervan komen daar aan de oppervlakte.

Het zijn gedragsuitingen van de gevoerde denkstrategieën; vormkenmerken van iemands wiskundige activiteit noemde ik ze eerder (Streefland, 1980).

Ze staan niet op zichzelf; er is inhoud, er zijn de gebruikte wiskundige werktuigen en gereedschappen daarbij, voertuigen voor de voortgang van het denken. Ten slotte is er een (individueel) leerproces en een persoonlijke leergeschiedenis.²²

Lijsten met strategieën hebben bezwaren. Vraagt zo'n lijst er niet om van buiten geleerd te worden? Of om in te voeren in een computer bij een bepaald onderwerp, veronderstellende dat ze zo ook in de leerling kunnen worden ingevoerd. Zou men immers niet al te gemakkelijk kunnen veronderstellen dat men hiermee probleemoplossers kweekt?

Hoewel anderen in navolging van Polya overzichten van strategieën hebben opgesteld waren ze niet bedoeld om van buiten te leren (Davis e.a., 1983, pag. 286). Schoenfeld, één van hen, stelde bijvoorbeeld dat het erom gaat:

'...to create a microcosm of mathematical culture. Mathematics was the medium of exchange. We talked about mathematics, explained it to each other, shared the false starts, enjoyed the interaction of personalities. In short, we became mathematical people.'²³

Dit dan met het oog op het opdoen van mathematical power' en het verwerven van een 'mathematical point of view'.

Op grond van het voorgaande voegen we daaraan toe:

- de kladblaadjes tegenover het schoonschrift; de (mentale) kladjes van de leerlingen wel te verstaan, want die maken:
- het meedenken met de leerlingen mogelijk, maar ook
- het bewustmaken van de toegepaste strategieën in hun wiskundige activiteit (Freudenthal, 1991).

Zo stilletjes aan is de aandacht verlegd van het leren naar het onderwijzen. Van denkstrategieën kwamen we bij de uitingen ervan, symptomen in oplossingsprocessen. Echter niet om ze als checklist bij het wiskunde leren te benutten, maar met het oog op heuristisch wiskundeonderwijs.

In dit onderwijs schept de leraar ruimte om met zijn leerlingen mee te denken. Op deze manier is de wiskunde in het onderwijs dus heel wat meer dan een 'objective body of knowledge and techniques' zoals zij in sommige publikaties nog wel wordt opgevat.²⁴

We komen nu toe aan de kwestie van het realistische wiskundeonderwijs en hoe hierin de algemene doelen (enigszins) getoetst kunnen worden

3 Het toetsen van realistisch wiskundeonderwijs

3.1 Realistisch wiskundeonderwijs

Dé grote strategie om het onderwijzen en leren van wiskunde zoveel mogelijk op elkaar af te stemmen, of in verband met elkaar te leren zien en begrijpen, is het gedurig veranderen van standpunt, zowel in het onderwijs zelf als in ontwikkelings- en evaluatieonderzoek. Het zich stellen op het standpunt van de leerlingen zo hebben we laten zien, betekent:

- proberen hun denken naar buiten te brengen, openbaar te maken, zodat
- er met hen meegedacht kan worden, en
- zij hun strategieën, hun manieren van doen en denken kunnen uiten om hen hiervan bewust te kunnen maken.

Hoe bereikt men zoiets en wat betekent dit voor het onderwijs? Wat er zou moeten gebeuren is, dat het toetsen, het meten van effecten binnen het onderwijsleerproces zelf plaatsvindt, er onlosmakelijk deel van uitmaakt.²⁵

Wij gaan in verband hiermee in op de grondstellingen van realistisch wiskunde-onderwijs volgens Wiskobas en baseren ons daarbij onder andere op Treffers.²⁶

Construeren door concretiseren

Neem bijvoorbeeld de volgende kwestie: Wat komt er uit de deling $6394 : 12$? Een rechtstreekse vraag. Men kan er echter ook de uitkomst nog bijgeven. Uit deze deling komt 532; 533; 532 rest 10; 532,84 rest 4; 532,833333; ongeveer 530, en hierbij de vraag stellen: Bedenk voor elk van de uitkomsten een passend verhaaltje bij de deling.

Delen wordt pas echt toepasbaar wanneer verschillende uitkomsten die mogelijk zijn, samen met de bijbehorende opgave, van een passende context kunnen worden voorzien. Dat zoiets echt geleerd moet worden blijkt uit onderzoeksgegevens die uitwijzen dat leerlingen zelfs in geval van rechtstreekse contextopgaven met de rest geen raad weten.²⁷

In het Nieuw Media-project van de Vakgroep OW & OC is een beeldplaat met courseware voor de heroriëntering van leraren basisonderwijs gemaakt (Dolk, 1989). Hierop staat een lesmodel, waarin kinderen van acht à negen jaar oplossen construeren voor twee vraagstukken over delen, terwijl zij nog geen procedure voor deze bewerking beschikbaar hebben. Het gaat om de volgende vraagstukken:

*Op een ouderavond verwacht de lerares 81 bezoekers.
Hoeveel tafels van 6 personen moet zij klaar zetten?*



Figuur 4: Ouderavond voor 81 mensen

*Zij maakt tevoren kannen met koffie gereed.
Uit één kan gaan 7 kopjes.
Hoeveel kannen moet de lerares klaarmaken?*

Op uiteenlopende afstand tot deze werkelijkheid construeren de kinderen al schematiserend hun oplossingen. Deze bevatten de bouwstenen voor een methode voor het (staart)delen op de lange termijn. Al doende leren de kinderen direct betekenis te geven aan de rest binnen deze context: voor de overblijvende ouders is nog een tafel nodig (figuur 4). Voor het koffieschenken hebben de kinderen soortgelijke overwegingen.

Net als in het geval van de ouderavond krijgen de leerlingen in realistisch wiskundeonderwijs voortdurend de gelegenheid zelf hun wiskunde voort te brengen door middel van eigen constructies:

- zelf nagaan wat er gebeurt bij de bushalte met in- en uitstappende passagiers in verband met het leren optellen en aftrekken en zelf onderzoeken hoe de gebeurtenissen bij de halte genoteerd kunnen worden;
- zelf in het experiment van kopen en verkopen het wisselgeld en de prijzen bepalen;
- zelf verdelingen in verdeelsituaties voltrekken, de uitkomsten ervan beschrijven, situaties vergelijken, situaties bedenken bij parten;
- zelf methoden voor bewerkingen als delen leren ontwikkelen en aldoende leren rekenen met resten;
- zelf uitkomsten leren voorzien van passende verhalen;
- zelf het proces van afstand nemen en verschrallen bij het schaalbegrip leren voltrekken, enzovoort.

De voorwaarde waaraan het onderwijs moet voldoen, wil aan dit constructiebeginsel recht worden gedaan, is duidelijk. De activiteiten van de leerlingen zijn zonder uitzondering ingebed in concrete situaties, in contexten. Dit gebeurt niet zo maar. De geschetste activiteiten verwijzen naar het optellen en aftrekken met natuurlijke getallen, naar equivalente breuken en verhoudingen, het vergelijken ervan en hun bewerkingen, enzovoort. Vanuit reële situaties worden verbindingen gelegd met de wiskunde, de wiskunde ontspringt er als het ware aan.

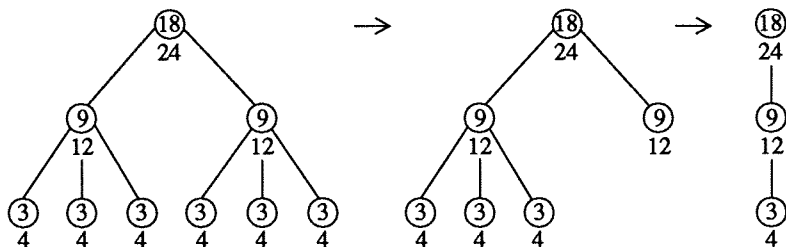
Het delen met rest staat er model voor dat ook het omgekeerde dient te gebeuren (zie § 3.2). En zo hoort het ook. Want bij het mathematiseren van reële situaties past ook het (zich) realiseren van gemathematiseerde situaties, dat is het interpreteren en verklaren van de vrucht van het verwiskundigen binnen een passende context.

Het gaat dus niet zomaar om construeren. Er worden namelijk werkelijkheden gekozen die bron zijn voor de wiskundige begrippen, operaties en structuren. Begint dergelijk wiskundig materiaal eenmaal mentaal handen en voeten te krijgen dan nog wordt de realiteit niet de rug toegekeerd. Deze kan immers als *toepassingsgebied* nog blijvende diensten bewijzen.

Van concreet naar abstract

De afstand van reële problemen tot de wiskunde die ermee in verband gebracht kan worden is voor de leerlingen meestal (te) groot. Voor het overbruggen van deze afstand is wiskundig gereedschap nodig. Wat ligt er meer voor de hand dan dergelijk gereedschap te ontwikkelen in het mathematiseringsproces zelf, waarin het abstracte uit het concrete wordt voortgebracht. Bijvoorbeeld:

- de leerlingen zelf een schema voor het tafelschikken laten ontwikkelen om grote verdeel- en andere situaties, zoals ‘18 repen verdelen met 24 kinderen’ tot meer beheersbare proporties terug te brengen; zelf hierin verkortingen laten ontwikkelen bij het progressief schematiseren, bijvoorbeeld (figuur 5).



Figuur 5: ‘Tafelschikken’ geschematiseerd

- leerlingen veelvuldig gelegenheid geven om zelf verhoudingssituaties te leren vergelijken, ordenen en hun relatieve verschillen bepalen; daarbij de verhoudingstabel als schema inzetten en al schematiserend het proces van vergelijken geleidelijk aan verkorten tot de standaardmethode (§ 1.2);
- enzovoort.

Vanzelfsprekend richt de aandacht zich niet op schematiseringsmiddelen alleen. Het betreft alle gereedschappen en werktuigen: symbolen, schema’s, (visuele) modellen, notatievormen, enzovoort.

Bij het tafelschikken - de 24 kinderen van figuur 5 aan één tafel met de 18 repen erop, of aan twee tafels met de repen navenant verdeeld, enzovoort - gaat het hoofdzakelijk om de constructie van een symbool (voor een tafeltje), dat verwijst naar de verdelers *om* de tafel en de eetwaar *erop*. Op de achtergrond van het schematiseren functioneert het verhaal van het tafelschikken. Deze context-situatie modelleert het schematiseren met het apart gecreëerde symbool zo krachtig dat van modelsituatie gesproken kan worden, sterker nog, de context zelf functioneert hier als model, als *situatiemodel*.²⁸

Ondanks deze summiere beschouwing is duidelijk dat het gaat om de niveauverhoging, van concreet naar abstract. Hieraan ligt een andere fundering van niveaus ten grondslag dan de klassieke Bruneriaanse drieslag.

In plaats van handelen met concreet materiaal, aan plaatjes en op mentaal niveau,

betekent niveaus hier de afstand (of nabijheid) tot de reële situatie. Via eigen informele aanpakken en strategieën bewegen de leerlingen zich (onder leiding van de leraar!) naar de formele procedures en inzichten van de vaksystematiek. De te ontwikkelen hulpmiddelen en gereedschappen zijn vooral bedoeld om los te komen van het concrete en om het tussenniveau te stofferen. Daar ondergaat het aan de context ontleende materiaal allerlei bewerkingen (verkorten, stroomlijnen, omzetten in regels en formules enzovoort). Op die manier worden de nagestreefde abstracties voorbereid en uiteindelijk gerealiseerd.

Naarmate het leerproces vordert vindt een herwaardering van bereikte niveaus plaats. Wat bijvoorbeeld eerst abstracte kennis van natuurlijke getallen is, wordt later concrete bron voor de algebra.²⁹

Het maken van vrije produkties om te reflecteren

Een bezinning op het eigen leerproces kan worden uitgelokt door het geven van vrije productieopdrachten. Dit gebeurt niet zomaar als doel in zichzelf, maar met een speciaal oogmerk. Bijvoorbeeld:

- het maken van een rekenboek voor de volgende groep kinderen met gemakkelijke, gemiddelde en moeilijke opgaven³⁰, of
- het bedenken van een proefwerk bij een bepaald onderwerp of thema.³¹

Dergelijk productieopdrachten brengen niet alleen de stand van zaken in individuele leerprocessen naar buiten maar weerspiegelen ook het gegeven onderwijs. Ze kunnen in sterke mate niveauverhogend werken, zoals ontwikkelingsonderzoek uitwijst. Dat wil zeggen: er kan een anticiperende werking van uitgaan.

Dat hier goede mogelijkheden liggen om de hogere doelen te realiseren en dus ook om de effecten ervan na te gaan, is duidelijk.

Interactief onderwijs voor het leren als sociale activiteit

De open, realistische benadering maakt nogal wat los bij de leerlingen. De realiteit als bron en toepassingsgebied maakt de problemen concreet, voorstelbaar. Iedereen kan er instappen. Velerlei reacties van uiteenlopende kwaliteit en niveau zijn er het gevolg van.

Door het gezamenlijk ontwikkelen van een wiskundig instrumentarium kunnen de leerlingen op één lijn komen. Het aantal vrijheidsgraden is dan echter nog legio door de constructie- en produktieruimte die er nog overblijft, door de verschillende niveaus van schematiseren die er zijn enzovoort.

Er kan in ieder geval voldoende ruimte zijn voor persoonlijke inbreng in de les door alle leerlingen. Het gevolg is dat oplossingen worden vergeleken, ideeën uitgewisseld, aanpakken op verschillend niveau van schematisering beschouwd en vergeleken, redeneringen gekritiseerd, weerlegd en verbeterd of ondersteund en dat er wordt onderhandeld over de beste manier om het leerproces te vervolgen. Dit alles vormt de bron van keuzemomenten voor de leraar waarmee hij zijn voorbereide onderwijs als gedachte-experiment tot werkelijkheid kan maken.

Kortom, het gaat dan om interactief onderwijs in optima forma.

Dit vergt van de leerling dat hij voortdurend van zijn eigen ervaring en standpunt zal moeten overstappen naar wat anderen in dit opzicht inbrengen om te kunnen vergelijken, beoordelen, conclusies te trekken, te kiezen voor een efficiëntere aanpak, enzovoort.

Op deze manier worden de interactieve delen van de les dus in hoge mate reflectief en kunnen als zodanig bijdragen aan niveauverhogingen, zowel in individuele leerprocessen als in dat van de gehele groep. Het is de enige manier om tot werkelijk geïndividualiseerd onderwijs te komen.

Het korte lesmoment in 'Graankorrels' was in dit verband illustratief. De redenering van de enkeling had voldoende bewijskracht om velen de onjuistheid van hun zienswijze te doen inzien.

Op deze manier ontstaat door interactie een werkelijk sociale leeromgeving waarin de ideeën van kinderen en hun informele strategieën en procedures niet alleen worden geaccepteerd, maar zelfs aangemoedigd en geëxploiteerd in dienst van het voortgaand mathematiseren van elk en van de gehele groep.

Leerlijnen verstrengelen om het wiskundige materiaal te (kunnen) structureren

Bij deze grondstelling gaan we weer exemplarisch te werk.

Het eerlijk verdelen is zo oud als de breuken zelf. In het traditionele onderwijs echter worden de breuken gegrondvest op een verschrompelde vorm van het eerlijk verdelen (verdelen binnen de eenheid). Met dit materiaal koerst men daarna zo snel mogelijk op de rekenregels voor breuken af.

De overstap op verdeelsituaties met meer objecten (en verdelers) verrijkt de instap al aanzienlijk. In plaats van de aandacht direct op het verdelen te richten kan men ook het gezelschap van verdelers in het oog vatten en tot handzamer omvang terugbrengen, zoals we hebben laten zien met het tafelschikken.

Tijdens het verdelen en het tafelschikken construeren de leerlingen voortdurend de relaties tussen porties, parten en verdelers die uiteindelijk de mentale objecten breuk en verhouding teweeg brengen.

Door deze omslag van objecten naar verdelers worden verhoudingen en breuken vervlochten. Zo kunnen verdeelsituaties bij het vergelijken geordend worden op grond van redeneringen met verhoudingen: '6 repen met 8 kinderen' is *hetzelfde* als '3 met 4', dus ieder krijgt evenveel.

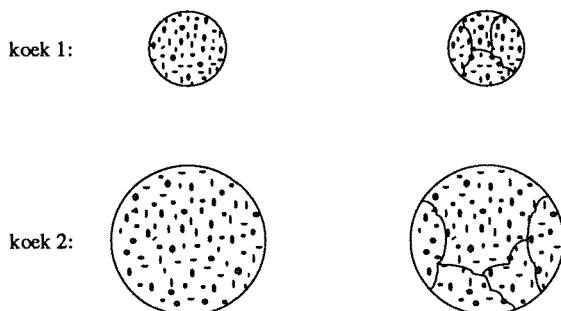
Het schema voor het tafelschikken is een instrument voor het genereren van gelijkwaardige tafeltjes (verhouding als equivalentieklasse).

Op overeenkomstige wijze kan men het tellen van grote hoeveelheden vanaf het begin in verband brengen met oppervlakte (figuur 6).

Op deze manier worden de leerlijnen voor het tellen van grote hoeveelheden en het meten van oppervlakte vanaf het begin nauw verweven (Streefland, 1985). Deze verstrengeling heeft tot gevolg dat de leerlingen al vroeg leren zich op het standpunt van dichtheid te stellen. Merk op hoe in dit voorbeeld twee gezichts-

punten om de voorrang strijden, namelijk het uitgaan van absolute aantallen en van dichtheid. Het behoort tot de taak van de leraar de leerlingen van dit dilemma bewust te maken. Pas dan kan afdoende met het conflict worden afgerekend.

- a. *Op welke boterkoek zitten de meeste stukjes gember?*
- b. *Welke boterkoek smaakt het meest naar gember?*



Figuur 6: Boterkoeken met gember

Op deze manier werpen allerlei natuurlijke verbanden hun schaduw vooruit op de wiskundige samenhangen die uiteindelijk worden nagestreefd. De structurering van de beoogde wiskundige kennis ligt dus vanaf het begin in de contexten en wiskundige activiteiten voorgetekend.

Door de verstrengeling van de werkelijkheid met de wiskunde en van passende onderdelen daarbinnen wordt de toepasbaarheid van het geleerde optimaal gewaarborgd.

Horizontaal- en verticaal mathematiseren

In de ene variant van de realistische richting zal men een bepaalde categorie van leerlingen meer begeleiden dan een andere. Men kan bijvoorbeeld sterk op algoritmen ingestelde leerlingen met alle beschikbare middelen dwingen om steeds weer verbindingen tussen de realiteit en de wiskunde te leggen (horizontaal mathematiseren) en anderzijds leerlingen die voor algoritmen niet of minder begaafd zijn zelf leren verticaal te mathematiseren, dat wil zeggen voortgang maken binnen de wiskunde zelf.

De lezer realiseer zich dat het hier gaat om een bepaalde opvatting over realistisch wiskundeonderwijs, namelijk die volgens Wiskobas. Het accent ligt op het mathematiseren in een proces van geleide zelfontdekking.

Zoiets geeft over de mate van vrijheid voor de leerlingen nog geen uitsluitel en kan nogal variëren, zowel ten aanzien van de horizontale als van de verticale component.

3.2 Het toetsen van realistisch wiskundeonderwijs

De algemene doelen, de ontvouwde fundamenteën van realistisch wiskundeonderwijs en het toepassen van heuristieken als didactische strategie bevatten aanwijzingen voor het ontwerpen van betere toetsen dan de bestaande. In het More-project is nagedacht over toetsen die verder reiken dan het afvragen van reproduceerbare kennis.³² Aan dergelijke toetsen werden de volgende eisen gesteld:

- ze moeten een bijdrage leveren aan het leren;
- ze moeten de leerlingen gelegenheid geven te laten zien wat zij weten en kunnen (dus ook oplossingsprocessen en denkstrategieën);
- ze moeten dekkend zijn ten aanzien van het programma;
(Opm: Dit betekent dat niet de objectieve scorebaarheid een eerste vereiste is, zoals de klassieke toetscultuur het graag wil, of beter, eist, maar de *inhoud!*)
- ze moeten gemakkelijk uitvoerbaar zijn in de klas.

Het is mogelijk gebleken dergelijke *schriftelijke* toetsen, die aan deze eisen voldoen, te ontwikkelen, zelfs voor jonge kinderen, die nog maar net met het rekenwiskundeonderwijs zijn begonnen.

Naar verwachting hebben de gestelde eisen ook geleid tot vraagstukken die de hogere bekwaamheden aan het licht (kunnen) brengen. Dat deze in de geest zijn van wat in het voorgaande geanalyseerd werd zal niemand verbazen.

Voorbeelden van soorten vraagstukken en opdrachten

1. Een 'kladje' geven bij een vraagstuk (figuur 7a).

Tim en Mieke speelden samen een spel en schreven hun punten op.

Wat is de eindstand? Reken dit uit.

Schrijf je antwoord in de lege hokjes.

Wanneer je dit wilt mag je het kladblaadje gebruiken om uit te rekenen hoeveel punten zij hebben gehaald.

2. Constructieopdrachten, bijvoorbeeld het verdelen van repen voordat met de breukenleergang is begonnen (figuur 7b).

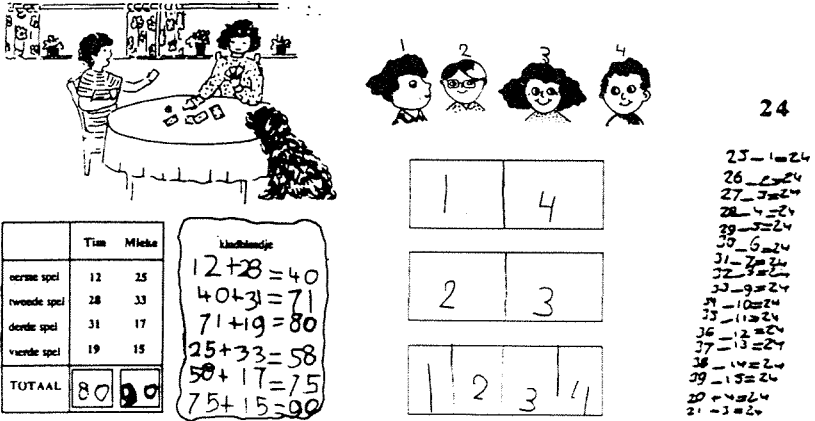
In het algemeen betreft het opdrachten die sterk uitnodigen tot organiserende en structurerende activiteiten met een beroep op het ontwikkelen van strategieën. Bijvoorbeeld het tellen van (ongeordende) grote hoeveelheden (§ 3.1) vraagt om groepjes maken, dat dan als vanzelf het herhaald optellen met zich meesleept en dus vooruitgrijpt op het vermenigvuldigen met de tafels daarvoor.

Men kan dit zelfs verheffen tot algemeen principe. (Denk-)strategieën brengt men aan het licht door anticiperende activiteiten.

Ook meetkundig kan dit. Bijvoorbeeld bij de verkenning van de kubus de vraag stellen hoeveel ribben in een keer gezien kunnen worden. Dit dwingt een structurerende af.

3. Vrije productieopdrachten (zie figuur 7c).

Maak zoveel mogelijk sommen waar 24 uitkomt.



Figuur 7: Kladje (a), repen (b) en rij (c)

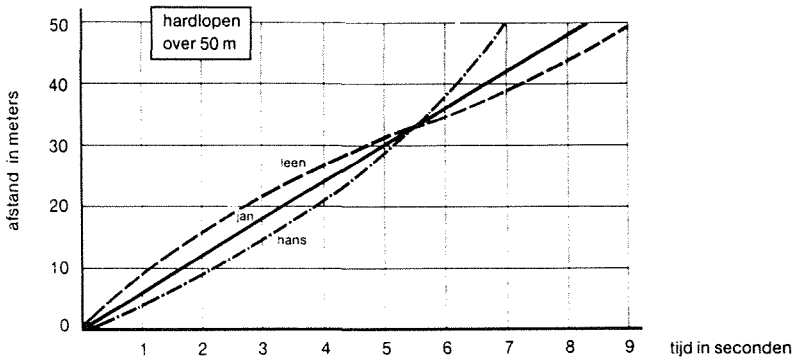
4. Verhalen waarbij de vraagstelling nog bedacht moet worden, bijvoorbeeld:

Een automobilist reed van Amsterdam naar Parijs. Nadat hij ongeveer tweederde deel van de afstand had afgelegd zag hij dat zijn brandstoftank nog voor een kwart gevuld was.

5. Vraagstukken die het aanvullen met ontbrekende informatie uitlokken, bijvoorbeeld:

Volgens de radio staat er bij de Velzertunnel een file van 5 kilometer. Hoeveel auto's denk je dat er in deze file zullen staan?

6. Kwesties die een cognitief conflict (kunnen) bevatten, bijvoorbeeld bij deze afstand-tijd-grafiek over een hardloepwedstrijd (figuur 8) de volgende vragen stellen:



Figuur 8: Botsende lopers?

Kwamen de lopers met elkaar in botsing? (Een vraag die verwijst naar de neiging van een deel der leerlingen om aanvankelijk weg-duur grafieken met de werkelijke weg te vereenzelvigen.)

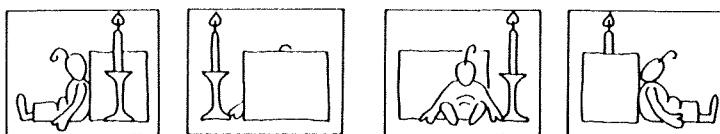
Na welke afstand/tijd haalden de lopers elkaar in? (Deze vraag staat mede in dienst van het beantwoorden van de vorige).

Omdat de kwestie van de mis-interpretatie van dergelijke grafieken later bij snelheid-tijd-grafieken nog kan doorwerken, kan opnieuw op deze kwestie worden ingegaan.³³

Standpuntveranderingen alom. Vooral met (informele) meetkundige activiteiten kan dit worden uitgelokt door middel van:

7. Kwesties waarbij de leerling letterlijk gedwongen wordt buiten zichzelf te treden (figuur 9):

Kunnen dit foto's zijn van dezelfde situatie?



Figuur 9: Dezelfde situatie?

Zo kan men ook denken aan:

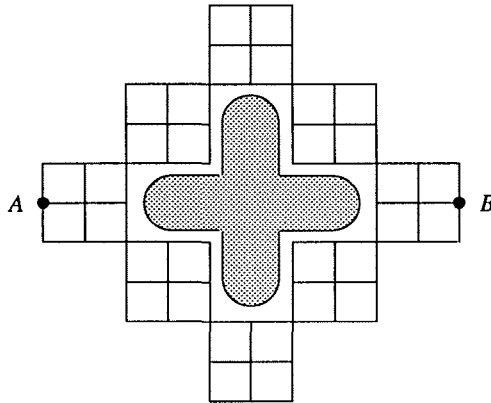
8. Vraagstellingen waarbij de leerlingen een bepaald verschijnsel moeten uitleggen, bijvoorbeeld:

Jan denkt dat $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$. Wat vind jij? Heeft hij gelijk of niet? Waarom? Kun je uitleggen hoe Jan gedacht heeft?

9. Multiple-choice vragen waarbij de juiste uitkomst ontbreekt, zonder dat dit als alternatief vermeld staat.
10. Het zelf bedenken van multiple-choice vragen met de nodige plausibele alternatieven voor de uitkomst.
11. Het doen van schattingen in combinatie met handig rekenen.
12. Opdrachten waarbij leerlingen informatiebronnen moeten raadplegen.
13. Adventure-achtige opdrachten.

In veel gevallen betreft het opdrachten en vraagstukken die voor de leerlingen nieuw kunnen zijn. Zulke vraagstukken kunnen ook ontworpen worden door bepaalde activiteiten uit het voorafgaande onderwijs te combineren.

14. Een voorbeeld van zo'n combinatievraagstuk is het volgende (figuur 10).



Figuur 10: Plattegrond

In de figuur zie je een plattegrond van paden rond een kruisvormige vijver. Een route van A naar B moet zo kort mogelijk zijn en mag niet buiten de paden leiden.

Bereken het aantal verschillende routes van A naar B.

Een dergelijk vraagstuk kan bij de leerlingen een beroep doen op zowel hun ervaringen met roosters en de driehoek van Pascal als met het wegenmodel.

In deze combinatievorm is het dan toch nog een (betrekkelijk) nieuw vraagstuk (Van der Kooij, 1989).

In het algemeen zijn opdrachten waarin van de leerlingen gevraagd wordt twee zaken met elkaar te vergelijken, heel geschikt. Dit kan ook zijn het vergelijken van hun eigen kennis en zienswijzen met een gegeven situatie. Geschikte vorm hiervoor is bijvoorbeeld.

15. Denkverhaaltjes in de vorm van rekengrappen, zoals:

Op een boot hangt een touwladder overboord. Deze raakt net het water. Wanneer het vloed wordt stijgt het water 20 cm per uur. De sporten van de touwladder zitten 30 cm van elkaar.

Hoeveel sporten van de ladder zullen na 5 uur onder zijn?

Een laatste belangrijke categorie ten slotte is:

16. Vraagstukken die bewust ontworpen zijn om oplossingen op verschillend niveau toe te laten, zie het volgende voorbeeld uit het More-project (figuur 11):

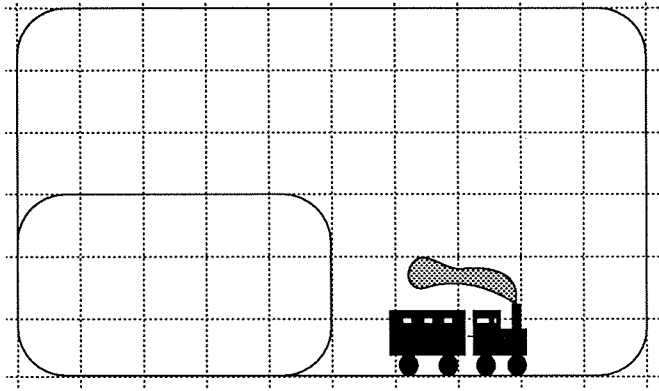
In het pretpark loopt een treintje. De korte rit duurt 10 minuten.

Hoe lang, denk je, duurt de lange rit?

Voor het overige verwijzen we naar alle voorbeelden die tot dusverre gegeven zijn.

Behalve aan schriftelijke toetsen kan men aan nog andere evaluatievormen denken. De Lange (1987) heeft onderzoek verricht naar het gebruik van tweetrapstoetsen. Hij liet op een klassiek proefwerk op tijd - na correctie met kanttekeningen en teruggave - een nieuwe opdracht volgen, namelijk: maak er nu thuis eens 'iets moois' van. De leerlingen kregen daarvoor drie weken. Het ingeleverde werk na de 'tweede trap' liet zien dat de leerlingen de wiskundige modellen die in het gewone proefwerk aan de orde waren geweest, nu kritisch beschouwd en geanalyseerd hadden.

De reductie die zo'n model op het realistische probleem aanbracht, werd, indien te grof bevonden, opgeheven door het model (het ging om Leslie-matrices) aan te passen. Meestal veroorzaakte de tweede trap - als in dit geval - niveauverhoging door reflectie.



Figuur 11: Treintje

Ten slotte noemen we nog als mogelijkheden het laten bijhouden van een logboek door de leerlingen, zoals overigens ook in de 'Standards' geadviseerd wordt en het geven van een essay-opdracht bij een onderwerp of thema.

4 Adviezen voor onderzoek

Over deze kwestie kunnen we kort zijn.

De kunstmatige scheiding tussen ontwikkeling en onderzoek dient te worden opgeheven.³⁴ De aandacht zal verlegd moeten worden naar ontwikkelingsonderzoek. Zulk onderzoek richt zich op:

- de ontwikkeling van prototypen van provisorische leergangen, en
- theorievorming aangaande het onderwijzen en leren van de inhoud van de prototypen.

De methoden die daarbij worden toegepast zijn:

- het onderwijsexperiment (over lange termijn) en verschillende vormen van het (klinische) interview.³⁵

Deze werkzaamheden, die plaatsvinden in het kader van ontwikkelingsonderzoek, worden verricht met het oog op het observeren van de leerprocessen van leerlingen, leerkrachten en ontwikkelingsonderzoekers.

In het kader van het ontwikkelingsonderzoek wordt de provisorische leergang gebruikt om een gepland onderwijsexperiment 'volgens het boekje' uit te voeren. Het observeren van de leerprocessen van de leerlingen moet vervolgens het materiaal opleveren voor de keuzen die onderweg gedaan kunnen worden. De leerprocessen van leerkrachten en ontwikkelingsonderzoekers vormen de bron voor verdere theorievorming en voor de aanpassing van het prototype.

(Nieuwe leerkrachten en nieuwe groepen leerlingen kunnen later met van het prototype afgeleide en geïmplementeerde leergangen het beoogde onderwijs(experiment) reconstrueren.³⁶⁾

Hoe op deze manier maximale inbreng van de leerlingen gewaarborgd kan worden hebben we laten zien in de ontvouwde grondstellingen voor realistisch wiskundeonderwijs.

Onderzoek in de Verenigde Staten als dat van Carpenter e.a. en Cobb e.a. vormen een eerste stap op weg naar een ontwikkeling, zoals deze zich in Nederland in de voorbije twee decennia heeft voltrokken.³⁷ Tevens laten deze onderzoeken de vruchtbaarheid van het in deze bijdrage ingenomen standpunt zien, al is er nog een lange weg te gaan.

Ook het Milwaukee-project van de Universiteit van Madison Wisconsin, uitgevoerd in samenwerking met medewerkers van de RUU en gefundeerd op dezelfde *realistische theorie*, ondersteunt de ontvouwde stellingname.

Op deze ingeslagen weg voortgaan betekent doorgaan met het bewust voltrekken van een aantal standpuntveranderingen, namelijk het accent verleggen:

- van onderwijzen naar leren;
- van reproduceren naar reconstrueren;
- van het opleggen van de structuur van de wiskunde naar het mathematisch-didactisch analyseren van realiteiten met het oog op het voortbrengen van wiskunde;³⁸
- van evaluatieonderzoek naar ontwikkelingsonderzoek;
- van de objectieve scorbaarheid van toetsen naar de inhoud;
- van een niveautheorie volgens Bruner naar een niveautheorie volgens Van Hiele;
- enzovoort.

5 Besluit

Wie hogere bekwaamheden wil oogsten als effecten van wiskundeonderwijs zal ze eerst moeten zaaien en onderhouden. Aan iets dergelijks stelt het wiskundeonderwijs specifieke voorwaarden zoals in het voorgaande is aangetoond. Het moet realistisch zijn en in overeenstemming met het historische leerproces van de mensheid; niet naar de letter maar naar de geest, een 'rationele reconstructie'

ervan, zoals Lakatos het noemde. Vele anderen hebben hiervoor eveneens gepleit.³⁹ Om dergelijke reconstructies bij leerlingen te doen plaatsvinden dient de leraar zijn onderwijs te construeren op basis van de inbreng van diezelfde leerlingen, dat wil zeggen mede met hun constructies en producties. Op deze manier wordt onderwijzen heuristisch, wordt het zelf een leerproces. En is dat niet de essentie van 'mathematics education', namelijk het realiseren van: '....learning and teaching as a process' ? (Freudenthal, 1983, pag. 48)

Noten

1. Lohman (1987) spreekt in dit verband over 'achievement' and 'crystalized ability'. Schoenfeld (1989) spreekt van 'endless stream of disconnected learning' (pag. 100). Zie voor een beschouwing over richtingen in het wiskundeonderwijs: Treffers (1987a).
2. Zie in verband hiermee bijvoorbeeld: Bell e.a (1981) en Hart (1981).
3. Lohman (1989, pag. 9): '....you get out of a program what you put into it.'
4. Zie Treffers (1987a).
5. Zie Streefland (1980, hfdst. 2).
6. Zie Treffers (1987a) of Streefland (1989).
Zie voor een nadere typering van de interactie in de geest van realistisch wiskundeonderwijs bijvoorbeeld Cobb (1988) en Cobb (1989, pag. 6-7).
7. Overeenkomstige doelen zijn ook geformuleerd voor de VS en de GB. Zie in verband hiermee bijvoorbeeld: National Curriculum Council (1989a, pp 8-9 e.v.), National Curriculum Council (1989b, pag. 4-5 e.v.) en Commission on Standards For School Mathematics of the NCTM (1988, pag. 19-31).
8. Van afschaffen (GB) via bezuinigen (VS) tot handhaven, mits ontwikkeld in mathematiseringsprocessen van progressieve schematisering (Nederland).
9. Zie voor het beschouwen van de didactische context als dimensie in de doelformulering: Treffers (1987a). Streefland (1988a) geeft een impressie van de didactische context van een onderwijsleerproces van ruim twee jaar voor breuken en verhoudingen.
10. Zie voor een kritische beschouwing: Freudenthal (1978a, hfdst. 3).
11. Zie in dit verband Kaplan (1989) en Schoenfeld (1989).
12. Hadamard (1945) heeft het voornamelijk over de rol van het onbewuste bij grote wiskundige ontdekkingen in het historische leerproces volgens de fasering: preparatie-incubatie-illuminatie.
13. Zie in dit verband: Freudenthal (1983b).
14. Zie in dit verband: Treffers (1987b).
15. Zie de Engelse versie van Streefland (1988a).
16. Zie Streefland (1987).
17. Zie Polya (1945) en andere publikaties van deze auteur over wiskundige ontdekkingen en plausibel redeneren.
18. Polya (1945, pag. 131, 158 en 163).
19. Verder observeerde Krutetskii aanpakken als generaliseren, verkorten, flexibiliteit in de uitvoering van mentale processen, enzovoort.
20. Freudenthal (1978a), Freudenthal (1979) en Freudenthal (1991).
21. Freudenthal (1978b, pag. 7) en Freudenthal (1978a).
22. Deze persoonlijke leergeschiedenis wordt in de rapportage van onderzoek nogal eens genegeerd. Meestal werkt dergelijke hyperobjectiviteit dan als een boemerang waar het gaat om de onderwijskundige waarde van zulk onderzoek.

23. Schoenfeld (1987, pag. 213) en Schoenfeld (1989 pag. 87).
24. Zie in dit verband bijvoorbeeld: Resnick (1989).
25. Deze opvatting over 'assessment' als onlosmakelijk onderdeel van het onderwijsleerproces komt men de laatste tijd steeds vaker in publikaties tegen. Zie in dit verband bijvoorbeeld de 'Standards', Carpenter (1989) en ook Cobb e.a. (1989).
26. Zie voor een uitvoerige beschouwing hiervan: Treffers (1987a) en Gravemeijer e.a. (1990). Deze laatste publikatie bevat de artikelen die gepresenteerd werden op een mini-symposium over realistisch wiskundeonderwijs op PME-NA XI te New Brunswick in 1989.
27. Zie in dit verband bijvoorbeeld Carpenter e.a. (1989). Zie voor commentaar hierop Schoenfeld (1989, pag. 100).
28. Zie Treffers (1987a) en Streefland (1988a).
29. Zie Streefland (1987).
30. Zie Van den Brink (1985).
31. Zie (de vertaling van) Streefland (1988a).
32. Zie Gravemeijer e.a. (1990).
33. Dit gebeurt bijvoorbeeld in het Hawex-pakket 'Tabellen, Grafieken, Formules 2' (pag. 12).
34. De manier waarop in Nederland het onderzoekscircuit (inclusief de subsidie-instansities), met een beroep op de Wet op de Verzorgingsstructuur, angstvallig ontwikkelingen uit de weg gaat, maakt niet alleen een benepen indruk, maar staat tevens de kwaliteitsverbetering van het onderwijs in de weg.
35. In ontwikkelingsonderzoek kan het (klinische) interview dienstbaar gemaakt worden aan zowel ontwerp (van het leergang-prototype in ontwikkeling) als aan onderzoek van individuele leerprocessen. In principe kunnen er vier vormen onderscheiden worden. Zie (de vertaling van) Streefland (1988a). Zie voor de participatie van de geïnterviewde in zogenaamde wederzijdse observaties Van den Brink (1989).
36. Zie in dit verband Streefland (1988b).
37. Zie Treffers (1987a).
38. Zie Freudenthal (1983a).
39. In 1962 keerden 75 vooraanstaande wiskundigen in de Verenigde Staten en Canada in een memorandum in 'The Mathematics Teacher' zich tegen de nog maar kort daarvoor in gang gezette ontwikkeling van de 'New Math'. Zij - onder wie Courant, Coxeter, Kline, Polya en Sawyer - formuleerden hun bezwaren aldus: 'The best way to guide the mental development of the individual is to let him retrace the mental development of the race - retrace its great lines, of course, and not the thousand errors of detail.' (The Mathematics Teacher, maart 1962, pag. 192.)

Literatuur

- Bell, A., e.a.: 'Choice of operation in verbal problems with decimal numbers', *Educational Studies in Mathematics* 12 (1981), 399-421;
- Bloom, B.S., e.a.: *Taxonomy of Educational Objectives. The Classification of Educational Goals. Handbook I: Cognitive Domain*, New York 1956, many editions.
- Brink, F.J. van den: 'Classical Arithmetic Books', *Proceedings of the Seventh Annual Meeting of PME-NA*, Columbus 1985, pp. 282-286.
- Brink, F.J. van den: *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen*, OW & OC, Utrecht 1989 (dissertatie).
- Carpenter T.P., M.M. Lindquist, W. Matthews and E.A. Silver: 'Results of the Third NAEP Mathematics Assessment: Secondary School', *Mathematics Teacher* 76 (1983), 652-659.
- Carpenter, T.P. en E. Fennema: *Building on the knowledge of students and teachers*, paper, Madison Wisconsin 1989.

- Cobb, P., T. Wood and E. Yackel: *Coping with the complexity of Classroom Life*, paper, Purdue University, Indiana 1988.
- Cobb, P., e.a.: *Assessment of a Problem-Centered Second Grade Mathematics Project*, paper, Purdue University, Indiana 1989.
- Commission on Standards For School Mathematics of the NCTM: *Curriculum and Evaluation Standards For School Mathematics*, October 1988.
- Davis, P.J. en R. Hersh: *The Mathematical Experience*, Pelican Books, 1983.
- Dolk, M., en W. Uittenbogaard: 'De ouderavond', *Willem Bartjens* 9 (1989), 14-20.
- Freudenthal, H.: *Mathematics as an Educational Task*, Reidel, Dordrecht 1973.
- Freudenthal, H.: *Weeding and Sowing: Preface to a Science of Mathematical Education*, Reidel, Dordrecht 1978a.
- Freudenthal, H.: *What is a mathematical attitude?*, paper, 1978b.
- Freudenthal, H.: 'How does reflective thinking develop?', *Proceedings of the third International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Warwick 1979.
- Freudenthal, H.: *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel, Dordrecht 1983.
- Freudenthal, H.: 'Is heuristics a singular or a plural', R. Hershkowitz (ed.), *Proceedings of the seventh international conference for the Psychology of Mathematics Education*, Rehovot Israel 1983, pp. 38-50.
- Freudenthal, H.: *Revisiting Mathematics Education*, 1991 (in press).
- Gravemeijer, K., M van den Heuvel-Panhuizen en L. Streefland: *Contexts Free Productions; Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education*, OW & OC, Utrecht 1990.
- Hadamard, J.: *The psychology of invention in the mathematical field*, Dover Publ. Inc., 1945.
- Hart, K.M. (ed.): *Children's Understanding of Mathematics: 11 - 16*, London 1981.
- Kaplan, R.G., T. Yamamoto en H.G. Ginsberg: 'Teaching Mathematics Concepts', in: L. Resnick (ed.): *Toward the Thinking Curriculum: Current cognitive research*, ASCD Yearbook, 1989, pp. 59-81.
- Kooij, H., van der: 'Het eerste HAWEX-amen', *Nieuwe Wiskrant* 9 (1989), 5-14.
- Krutetskii, V.A.: *Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*, University of Chicago Press, 1976.
- Lange Jzn., J. de: *Mathematics Insight and Meaning*, Utrecht 1987.
- Lohman, D.L.: *Two Implications of Cognitive Psychology for Educational Measurement*, paper, Utrecht 1987.
- Mislevy, R.J.: 'Foundations of a New Test Theory', paper, 1989, to appear in N. Frederiksen, R. Mislevy and I. Bejar (eds.): *Test Theory for a New Generation of Tests*, Lawrence Erlbaum and Associates.
- National Curriculum Council: *Non-Statutory Guidance*, Bradford 1989a.
- National Curriculum Council: *Mathematics in the National Curriculum*, London 1989b.
- Polya, G.: *How to solve it*, Princeton University Press, Princeton 1945.
- Resnick, L. (ed.): *Toward the Thinking Curriculum: Current cognitive research*, ASCD Yearbook, 1989.
- Schoenfeld, A.H.: *Cognitive Science and Mathematics Education*, London 1987.
- Schoenfeld, A.H.: 'Teaching Mathematical Thinking and Problem Solving', L. Resnick (ed.), *Toward the Thinking Curriculum: Current cognitive research*, ASCD Yearbook, 1989, pp. 83-103.
- Streefland, L.: *Makro-structurele Verkenningen voor het Wiskundeonderwijs*, IOWO, Utrecht 1980.
- Streefland, L.: 'Search for the Roots of Ratio: Some Thoughts on the Long Term Learning Process (Towards...a Theory) Part II: The Outline of the Long Term Learning Process', *Educational Studies in Mathematics* 16 (1985), 75-94.

- Streefland, L.: 'Free production of fraction monographs', in: J.C. Bergeron e.a. (eds.), *Psychology of Mathematics Education*, PME-XI, vol. I, Montréal 1987, pp. 405-410.
- Streefland, L.: *Realistisch breukenonderwijs*, OW & OC, Utrecht 1988a. Engelse vertaling: 'Fractions in Realistic Mathematics Education; A Paradigm for Developmental Research', 1991 (in press).
- Streefland, L.: 'Reconstructive Learning', in: A. Borbas (ed.), *Proceedings of the Twelfth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Veszprém Hongarije 1988b, pp. 75-92.
- Streefland, L.: 'Realistic Mathematics Education. What does it mean?', paper presented at the *PME-NA-XI*, New Brunswick 1989.
- Treffers, A.: *Three Dimensions. A model of goal and theory description in Mathematics Instruction - The Wiskobas Project*, Reidel, Dordrecht 1987a.
- Treffers, A.: 'Integrated Column Arithmetic According to Progressive Schematisation', *Educational Studies in Mathematics* 18 (1987b), 125-145.
- Treffers, A. e.a.: *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel I: Overzicht einddoelen*, Zwijssen, Tilburg 1989.

Algoritmen, wiskunde en toetsen

Harm Boertien

1 Algemeen

Het is vanzelfsprekend dat bij discussies over algoritmen het vak wiskunde genoemd wordt. Maar het maakt de discussie vaak niet eenvoudiger. De relatie tussen algoritmen en wiskunde roept dan ook tegenstrijdige reacties op. Om misverstanden te voorkomen zal begonnen worden met aan te geven wat in deze bijdrage onder algoritmen verstaan zal worden.

Algoritmen zijn nuttige recepten om bepaalde goed omschreven soorten problemen op te lossen. Anders gezegd: algoritmen zijn mechanisch te gebruiken oplossingsregels voor standaardproblemen. Een algoritme is ook te zien als een formeel vastgelegd oplossingsplan, dat is ontstaan als verkorting van een door middel van creativiteit gevonden oplossingsweg voor een bepaald probleem. Deze gevolgde oplossingsweg moet dan wel breder toepasbaar zijn dan het probleem waarbij het gevonden is. Het gedrag dat bij het gebruiken van algoritmen in een oplossingsplan hoort, kan men algoritmisch gedrag noemen. Zodra dit oplossingsplan zeer algemeen wordt krijgen algoritmen het karakter van vuistregels (heuristieken).

Het algoritmisch gedrag ontstaat uit het streven naar efficiëntie en garandeert meestal een snelle oplossingsweg. Een kenmerk van algoritmisch gedrag is verder dat het in de vorm van computerprogramma's te beschrijven is, wat vooral in onze tijd van automatisering een grote toepasbaarheid garandeert.

Als zodanig heeft ieder waardering voor het (leren) gebruiken van algoritmen. Toch hebben veel wiskundigen daarbij bedenkingen. Ze zijn samen te vatten in de vraag of het leren gebruiken van algoritmen het aanleren van wiskunde in het algemeen en het creatief leren denken in het bijzonder in de weg kan staan. Wiskunde en algoritmen vormen alleen daardoor al een dankbaar discussie-onderwerp.

Een bijkomende complicerende factor is dat de meningen vaak verdeeld zijn over wat wiskunde is en hoe deze aangeleerd moet worden. Ook over de rol die algoritmen in de wiskunde spelen, zijn de meningen divers: soms tautologisch, soms tegenstrijdig. Zo heb ik eens in een uitgebreide discussie over algoritmen en wiskunde één en dezelfde persoon horen zeggen dat:

- wiskunde moeilijk is voor hen die wiskunde moeilijk vinden;
- wiskunde creatief bezig zijn betekent;
- algoritmen vormen van ingeblikte creativiteit zijn;
- (standaard-)algoritmen het hart van de wiskunde vormen.

Dergelijke ontboezemingen zijn in discussies niet ongevoelen. Over moeilijke onderwerpen worden wel vaker triviale en tegenstrijdige beweringen gedaan, waarin zogeheten ‘kernen van waarheid’ zitten. Deze bijdrage gaat over zulke kernen van waarheid, over de relatie tussen algoritmen en wiskunde en over de daarbij horende consequenties voor de toetsing.

2 Wat is kenmerkend voor (echte) wiskundigen?

De uitdrukking ‘kern van waarheid’ duikt altijd op bij het bespreken van een complex begrip met diverse aspecten. ‘Wiskunde bedrijven’ is zo’n begrip. Daar wordt in het algemeen mee bedoeld dat men methodisch-systematisch en met gebruikmaking van wiskundige hulpmiddelen met het oplossen van een probleem bezig is. Maar dit kan op zeer veel manieren. Vandaar dan ook dat een wiskundige aanpak en methode van werken voor niet-wiskundigen in de loop der eeuwen vele gezichten heeft gehad. Het antwoord op de vraag ‘Wat is wiskunde?’ wordt daarom mede bepaald door de manier waarop wiskundigen met problemen omgaan. Afhankelijk van welk aspect daarbij het sterkst naar voren komt, krijgt het begrip wiskunde bedrijven voor de buitenstaander een andere inhoud.

In de tijd van de Romeinen waren de wiskundigen vooral bekend doordat zij bij uitstek in staat waren ingewikkelde horoscopen voor toekomstvoorspellingen te berekenen. Wiskunde en astrologie waren tot aan Kepler onderling sterk verbonden. Wiskundig bezig zijn was in belangrijke mate zich bezig houden met voorspellingen. Niet elke wiskundige wist echter tot de juiste voorspellingen te komen. Vandaar dat er op een Romeins kerkhof het grafschrift ‘Vervloekt zijn alle wiskundigen’ te vinden is. Het verwijst naar een ervaring van de overledene met een wiskundige die faalde. Ter vergoelijkking van onze oudere vakgenoot is op te merken dat ook nu nog de combinatie van ingewikkelde berekeningen en voorspellingen gemakkelijk tot ‘fouten’ leidt. Evenals in de Romeinse tijd gebruikt men nu bij de sociaal-economische planbureaus ook veel wiskunde voor het opstellen van prognoses, die dikwijls niet uitkomen.

In latere eeuwen is vooral benadrukt dat een wiskundige die zijn werk goed doet, niet kan falen, in de zin van fouten maken. Toegegeven, een probleem kan voor hem onoplosbaar zijn. Ook kan het oplossingsresultaat stochastisch van aard zijn. Maar in dergelijke gevallen wordt hij geacht de onoplosbaarheid toe te lichten of een inschatting te maken van de te verwachten afwijkingen. Het beeld van het bedrijven van wiskunde is dan veel meer dat van een logica-fabriek die wel eens onbruikbare, maar geen foutieve producten kan produceren.

Pas in de laatste decennia is er weer ruimte voor mogelijk falende wiskundigen. In ‘Proofs and refutations’ van Lakatos komt een wiskundige aan het woord, die anders dan met pure deductie werkt. Daarbij hoort ook een andere opvatting over wat bedrijven van wiskunde is. In die opvatting komt de inrichting van het totale probleemoplossingsproces in het blikveld van het doelgericht-technisch (mentaal) handelen. Hierna zullen we steeds deze visie op wiskunde hanteren.

3 Een wiskundig verantwoord oplossingsproces

3.1 Methodiek en plan

Men spreekt dikwijls van een wiskundig verantwoord oplossingsproces. Een wiskundige dient de manier waarop hij een probleem gaat oplossen op een geëigende manier te verantwoorden. Allereerst natuurlijk het resultaat: als dat goed is, hoeft er volgens sommige niet-wiskundigen zelfs helemaal niets verantwoord te worden. Verder moet ook de oplossingsmethode volgens welke het resultaat bereikt is, verantwoord worden en ten slotte de manier waarop men het probleem aanpakt en tot een oplossingsplan komt. De vraag rijst waaruit deze verantwoordingen bestaan.

De wiskundige verantwoording van een oplossingsmethode bestaat altijd daaruit dat er een juiste systematiek en methodiek gevolgd is. Mede daardoor is deze oplossingsmethode en soms ook het resultaat voor een algemene klasse van problemen bruikbaar. Zonder deze eis van algemeenheid kan er blijkbaar geen sprake zijn van wiskundig handelen. Het antwoord is daarbij van secundair belang. De (abstracte) manier van werken staat voorop.

Leerlingen hebben het hier vaak heel moeilijk mee. Het levert soms bijna traumatische ervaringen op. Velen weten zich jaren later nog te herinneren dat een volledig goed antwoord, dat via een foute of zeer onvolledige oplossingsmethode (bijvoorbeeld een achteraf gelukkige gok) gevonden was, nul punten opleverde bij wiskunde. Op zich is deze verbazing bij de leerlingen wel begrijpelijk. Immers elders in de maatschappij worden vrijwel nergens zulke strenge eisen aan te verkrijgen resultaten gesteld. Maar daar gebeuren wel meer niet te verantwoorden dingen.

De verantwoording van het wiskundig handelen kent verschillende vormen, afhankelijk van het stadium in het oplossingsproces.

Bij de probleemaanpak is het volkomen verantwoord via enkele ogenschijnlijk willekeurige handelingen enig zicht te krijgen op het probleem. Het is volkomen acceptabel dat men zomaar enkele conclusies trekt, de beschikbare informatie gaat ordenen en/of deze in een schema, figuur of grafiek overzichtelijk gaat weergeven. De volgorde van deze activiteiten is van tevoren niet te voorzien. Maar hoewel dat niet direct zo lijkt, passen dergelijke handelingen toch in een algemeen plan, dat is aan te geven met de heuristiek: 'Doe alles wat je kunt doen om zo snel mogelijk een goed overzicht te krijgen op de probleemsituatie, op de vraagstelling en op een mogelijke oplossing.' Zodra men vindt, dat men voldoende overzicht heeft gekregen, dient men hiermee te stoppen. Dit moment is aanbroken als men de vraagstelling binnen een kader van gegevens goed heeft kunnen formuleren.

Leerlingen vinden dit in het algemeen het moeilijkste deel van het oplossingsproces. Ze begrijpen dikwijls niet dat de probleemoriëntatie dient om doelgericht te proberen een herformulering van de vraagstelling van het probleem te vinden.

Daarom ook gaan ze soms heel lang door met tamelijk willekeurige bewerkingen op gegevens uit te voeren zonder naar de juiste probleemstelling te zoeken.

Opmerkelijk is dat de algemene regel: 'Streef naar overzicht', geen pasklare oplossing garandeert, ja, soms zelfs overbodige handelingen kan impliceren.

Het meest opvallende is wel dat het directe nut van deze serie handelingen pas later ingezien wordt. De volgorde is daarbij niet van belang, wel de diversiteit van dergelijke 'snelle verkenningen' en ook het aantal. Hoe beter het raamwerk van heuristische verkenningmogelijkheden dat iemand gebruikt, des te beter is namelijk het wiskundig vermogen problemen juist aan te pakken. Want zonder een dergelijk gereedschap is nog minder succes te garanderen.

De verantwoording voor het vinden van een oplossingsplan en voor de uitwerking en uitvoering hiervan, is vooral gelegen in een wiskundig juiste argumentatie en manier van werken. Echter een wiskundig juiste manier van werken is niet altijd adequaat te noemen.

Stel eens dat een leerling eind 3-vwo de vergelijking $43x = 31x + 17$ als volgt gaat oplossen:

eerst heuristisch het probleem verkennen:

- stel er is een oplossing x_0 ; het is zinvol te gaan zoeken hoe groot zo'n oplossing kan zijn;
- 0 voldoet niet, 1 bijna en 2 is teveel:
 voor $x = 0$ geldt dat $43x$ precies 17 kleiner is dan $31x + 17$,
 voor $x = 1$ geldt dat $43x$ precies 5 kleiner is dan $31x + 17$,
 voor $x = 2$ geldt dat $43x$ precies 7 groter is dan $31x + 17$;
- voor positieve x -waarden neemt $43x$ veel sterker toe dan $31x$; dus zijn er geen oplossingen die groter of gelijk aan 2 zijn;
- voor negatieve x -waarden daalt $43x$ veel sterker dan $31x$, dus zijn er geen oplossingen kleiner dan 0;
- het verschil 'rechterlid - linkerlid' zal kleiner worden als x groter wordt.

dan de situatie in een schema samenvatten:

	linkerlid	rechterlid	verschil rechts - links
	$43x$	$31x + 17$	
$x = 0$	0	17	17
$x = 1$	43	48	5
$x = 2$	86	79	-7

vervolgens de conclusies trekken:

- x moet vanaf 1 zoveel groter worden dat ‘rechterlid – linkerlid’ 5 kleiner wordt;
- als x vanaf 1 toeneemt met 1, neemt het linkerlid toe met 43 en het rechterlid met 31, dus neemt ‘rechterlid – linkerlid’ dan af met 12 (zie ook de tabel);
- de afname van dit verschil is recht evenredig met de toename van x ;
- voor een afname van 5 is dus een toename van $\frac{5}{12}$ van x nodig.

en ten slotte de oplossingsmethode bedenken en de oplossing berekenen:

- de oplossing is dus $1 + \frac{5}{12} = 1\frac{5}{12}$.

Het kan niet ontkend worden dat deze oplossing voor een 3-vwo-er zeer creatief genoemd mag worden. De leerling is creatief verkennend bezig geweest om in het probleem zijn weg te zoeken. Toch kan men zijn twijfels hebben over de wiskundige ondergrond van deze leerling. Het gebruik van het bekende algoritme voor het oplossen van een eerstegraads vergelijking met één variabele is veel efficiënter. Bovendien ligt het meer voor de hand om hiervan gebruik te maken omdat deze oplossingsmethode in de eerste twee leerjaren van het vwo al onderwezen is.

3.2 Creativiteit en efficiëntie

Er is overigens niets vermoeiender dan dergelijke oplossingsprocessen te moeten narekenen als er een reeds behandeld algoritme voorhanden is, waarmee de oplossing in twee regels op te schrijven is. Stelt u zich maar eens voor wat het voor een docent betekent als een klas van 25 leerlingen bij een schriftelijke overhoring van vijf eerstegraads vergelijkingen deze volgens de bovenstaande oplossingsmethoden gaan uitwerken. De docent moet van 125 van dergelijke uitwerkingen nagaan of ze goed zijn. Met de daarbij behorende kleine rekenfouten, waarmee doorgerekend moet worden, is dit een hele klus. Het belangrijkste bezwaar van de docent zal echter niet de hoeveelheid werk zijn, maar meer dat uit het ingeleverde werk niet blijkt dat deze leerlingen iets van zijn voorgaande lessen over het vlot oplossen van dergelijke vergelijkingen begrepen hebben.

Via deze fictieve situatie zien we dat een belangrijk element in een wiskundig verantwoorde oplossing efficiënt werken is. Dit geldt niet alleen in het onderwijs. Ook in de dagelijkse praktijk van de toegepaste wiskunde wordt *overbodige* creativiteit niet op prijs gesteld. De vraag naar efficiency beheerst het leven. Efficiënt werken betekent echter ook standaardoplossingen, dat wil zeggen algoritmen, gebruiken. Als men op een realistische manier wiskunde wil gebruiken, dan hoort daar dus bij dat men zo mogelijk algoritmisch gedrag vertoont.

Hoe realistisch zo’n opvatting is, blijkt ook uit de bestudering van het gedrag van dieren. In de levende natuur met zijn harde bestaanswetten van eten en gegeten worden, is energiezuinig gedrag een kwestie van al dan niet overleven. De wet tot behoud van zijn energie leert dieren algoritmisch gedrag te vertonen. Zo lossen hommels het verkrijgen van voldoende nectar en stuifmeel op door een algo-

ritme te volgen bij de keuze welke bloemen ze gaan bezoeken. Daarbij wordt via een op ervaring gebaseerde afweging tevens op één of andere manier rekening gehouden met de daarvoor relevante factoren. Ze moeten dan onderscheid kunnen maken:

- tussen bloemen die veel nectar of veel stuifmeel bezitten;
- tussen bloemen waar deze nectar gemakkelijk of minder gemakkelijk is te verkrijgen;
- tussen bloemen die al dan niet in groten getale op een klein oppervlak plegen te groeien.

Een wiskundige die vindt dat men altijd creatief gedrag moet nastreven, gaat dus tegen de natuur en realiteit in. Onderwijs dat hierop gebaseerd is, zou je onrealistisch onderwijs moeten noemen. Hieruit volgt dat de wiskundedocent leerlingen ook moet leren dat algoritmisch gedrag voordelen biedt en dat hij hen de veelvuldig te gebruiken algoritmen goed moet aanleren. In het wiskundeonderwijs moet er aandacht zijn voor het aanleren creatief te denken en voor het aanleren van algoritmisch gedrag, te onderscheiden in heuristieken en gebruik van algoritmen. Bij dit laatste komt dus in het leerproces het ontwikkelen van creativiteit tijdelijk op de tweede plaats.

3.3 Afweging creatief versus algoritmisch gedrag

Het lijkt alsof creativiteit en algoritmisch gedrag elkaars concurrenten zijn. Echter de belangrijke factoren in het leerproces beconcurreren elkaar in het algemeen niet, maar vullen elkaar aan. Zo is creativiteit het vertrekpunt van waaruit men begint met het oplossen van een probleem, terwijl algoritmisch gedrag een afgeleide of uitwerking ervan vormt in bepaalde nauw omschreven situaties.

Het hebben van voldoende creativiteit is een onberekenbare factor. Creativiteit biedt geen garanties en leidt ook vaak tot inefficiëntere oplossingswegen dan die, welke men via herkenning van standaardproblemen vindt. Daarom is het plichtsgetrouw handelen vanuit expertise in veel gevallen beter. Het is juist dit iets minder spectaculaire hand- en hoofdwerk dat in de praktijk van het dagelijkse leven zo belangrijk is. Kortom: het is gewenst daar waar men een algoritme kan gebruiken en waar creativiteit niet direct nodig is of niet veel voordelen biedt, algoritmisch te werken. Dit houdt wel in dat men steeds, voordat men een algoritme toepast, eerst moet beoordelen of men al dan niet creatief moet proberen te zijn.

Voor het leerproces is het van ondergeschikt belang dat creativiteit niet af te dwingen is. Ditzelfde geldt bijvoorbeeld ook voor een andere belangrijke factor in het leerproces: plezier in wiskunde. Ondanks het feit dat beide factoren (plezier in wiskunde en creativiteit) moeilijk te controleren zijn, is het toch vanzelfsprekend dat men beide moet nastreven. In elk vak, dus ook in het vak wiskunde, dient men de leerling erop te wijzen dat met creativiteit soms veel sneller of beter een oplossing van een probleem gevonden kan worden.

Het is gezien het voorgaande op realistische gronden niet juist om creatief wiskundig denken tegenover algoritmen te stellen. Wanneer de situatie dat toelaat of vereist zal mechanisch toepassen van regels de voorkeur verdienen boven gebruik van een onbegrensde creativiteit. Van een aantal problemen behoort men de oplossing niet te hoeven zoeken, maar moet men die gewoon weten. Een wiskundige moet daarom allereerst bij een probleem beoordelen of de oplossing ervan creativiteit vergt of niet. Indien niet, dan dient hij bij voorkeur een algoritme te gebruiken. Een vuistregel voor deze beoordeling is de volgende: Zodra men zegt: 'Als wiskundige doe je dat zo', dan heeft algoritmisch gedrag de voorkeur. Het expertgedrag vereist dat de wiskundige zijn verworven kennis en vaardigheden waar mogelijk gebruikt.

De verantwoording van het werk van een wiskundige betreft dus ook het adequaat gebruiken van wiskundige hulpmiddelen. En daarbij komen we bij het volgende gezicht van de wiskunde. De wiskundige ziet het probleem, herkent het en weet hoe (volgens welke algoritmen) hij het moet oplossen. Deze twee aspecten van wiskunde bedrijven - het kunnen uitvoeren van een algoritme en het kunnen herkennen van de situaties waarin het algoritme toegepast kan worden - komen uiteraard bij het aanleren en toetsen van wiskunde aan de orde. Hierbij hoort ook dat men moet weten wat de karakteristieke kenmerken van de probleemstellingen zijn waarin een algoritme toegepast mag worden.

Dikwijls komt de herkenning of een algoritme gebruikt kan worden pas na een probleemverkenning. Soms doet een wiskundige deze verkenning echter uit het hoofd en begint zo maar met het presenteren van een oplossing van het probleem. Voor de buitenstaander is het alsof deze het probleem kent in plaats van herkent. Bij het aanleren van algoritmen kan zo bij leerlingen de misvatting ontstaan dat dit de juiste wiskundige aanpak is. Bovendien zien ze hun wiskundeleraar steeds op deze manier de opgaven oplossen. Als ze dan nog energiezuinig de opgaven willen oplossen, dan is al snel de verkeerde instelling ten opzichte van wat wiskunde bedrijven is ingeslepen. Deze is te formuleren als:

- probeer te weten wat voor soort opgave je voor je hebt;
- ga na in je geheugen volgens welk recept zo'n opgave in vorige lessen werd opgelost;
- los de opgave volgens dit recept op;
- als je hierbij ergens vastloopt, vraag je je leraar hoe de opgave ook al weer moet.

Het is nodig in de wiskundelessen regelmatig op deze misvatting, die tot regelgericht leren leidt, te wijzen en te bespreken wat het juiste alternatief is. In het wiskundeonderwijs dient steeds naast een nadruk op algoritmen de probleemaanpak centraal te staan. Bij een dergelijk onderwijs zullen de leerlingen bijvoorbeeld de vergelijking $(x - 3)^2 - 4 = 0$ niet oplossen via de uitwerking van de haakjes, gevolgd door het gebruik van de *abc*-formule.

Een laatste aspect van de verantwoording van een wiskundige is dat hij de oplossingsweg in een heldere verslaggeving voor derden rapporteert. Ook deze niet zo creatieve activiteit zullen de leerlingen goed moeten leren beheersen.

Algoritmen komen voort uit het streven naar efficiëntie bij probleemoplossen. Het zijn verkortingen van creatieve oplossingswegen voor klassen problemen in de vorm van recepten. Leerlingen kunnen een algoritme daarom ook alleen goed begrijpen als ze het oplossingsplan zelf samengevat hebben tot een bijbehorend algoritme. Ze moeten dit plan onder woorden kunnen brengen of in nieuwe, nog niet eerder behandelde situaties kunnen herkennen en gebruiken. Het leerproces dient deze verkortingen te volgen; het oplossingsplan eerst laten verwoorden of toepassen en pas later daarvoor een abstracte notatie gebruiken.

Deze laatste vorm dient slechts voor een handig gebruik van het algoritme. Als leerlingen op deze wijze algoritmen aanleren, dan zullen ze tevens ontdekken dat ze keuzes moeten maken. Allereerst of ze al dan niet een algoritme of hun creativiteit zullen gaan gebruiken. In de tweede plaats welk algoritme ze zullen toepassen als er meer dan één algoritme gebruikt kan worden. Dit laatste komt vooral in een realistisch probleem nogal eens voor. In de derde plaats welke notatie ze zullen hanteren, bijvoorbeeld of ze al dan niet variabelen zullen invoeren of dat ze 'woordformules' gaan gebruiken.

Samengevat

Een probleem wiskundig goed oplossen betekent zo efficiënt mogelijk die handelingen verrichten die het probleem vereist. Wiskunde bedrijven betekent daarom creatief zijn in samenhang met het vertonen van algoritmisch gedrag. In het wiskundeonderwijs dient dus een evenwicht te zijn in aandacht voor waardevolle inefficiënte methoden en algoritmen (vgl. het nut van hoofdrekenen, cijferen, rekenen met de zakrekenmachine). Ten slotte mag de verslaggeving van welke oplossingsweg men gevolgd heeft niet ontbreken.

4 Toetsen van algoritmen

De manier waarop beheersing van wiskunde getoetst moet worden, is gekenschetst door de slagzin: 'Wiskunde moet blijken'. Daarmee bedoelen we dat uit het antwoord moet blijken welk wiskundig verantwoord oplossingsplan gevolgd is. Voor de beoordeling hiervan is uitsluitend van belang, hoever de leerling met de uitvoering van dit plan gekomen is.

Een extra probleem is dat creativiteit bij toetsing ongrijpbaar is. Zo is bijvoorbeeld aan de uitkomst van een opgave in het algemeen niet te zien of daarbij al dan niet een creatieve oplossingsmethode gebruikt is.

Bij algoritmen zijn volgens het voorgaande twee dingen van belang:

- herkennen wanneer een algoritme toegepast kan worden;
- het foutloos toepassen van het algoritme.

De notatie en het verwoorden van het algoritme speelt hierbij slechts zijdelings

een rol. Het toetsen van een algoritme kent daarom feitelijk drie soorten opgaven, namelijk opgaven waarin één van deze twee aspecten van belang zijn en opgaven waarin beide aspecten tegelijk aan de orde komen.

Een complicerende factor bij de toetsing van algoritmen is dat een leerling een algoritme omzeilt door een creatief oplossingsplan te produceren. In dat geval kan men hem niet op beheersing van dit algoritme beoordelen. De beste opgaven om algoritmen te toetsen zijn daarom die waarbij het moeilijk is alternatieve oplossingswegen te vinden.

Men kan bij leerlingen toetsen of ze herkennen wanneer ze een algoritme kunnen gebruiken door van tevoren vast te stellen welke kenmerken voor toepassing ze dienen te herkennen.

Voor het toetsen of leerlingen algoritmen foutloos kunnen uitvoeren, moet men hen in de gelegenheid stellen maximaal veel voorkomende fouten te maken. Rekening houdend met deze uitgangspunten voor toetsing zal hierna bij enkele algoritmen nagegaan worden hoe ze getoetst kunnen worden.

5 Voorbeelden

5.1 Het algoritme 'oplossen van een eerstegraads vergelijking met één variabele'

Dit algoritme is wel het meest bekend met de volgende standaardopgavevormen:

- los op: $f(x) = 0$
- los op: $f(x) = c$
- los op: $f(x) = g(x)$.

Hierin zijn $f(x)$ en $g(x)$ twee lineaire algebraïsche expressies in één variabele die men soms in contexten kan herkennen. Voor het foutloos uitvoeren zijn vooral van belang:

- tekenfouten bij het herleiden van de vergelijkingen;
- deelfouten bij het herleiden van de vergelijkingen.

Voorbeelden:

1 Los op: $17x + 13 = 0$.

2 Los op: $17x = 13$.

3 Los op: $17x + 34 = 23x - 12$.

- 4 Als je naar Parijs gaat, moet je bij een bank Franse francs kopen.
Anders kun je in de Franse winkels niet betalen en dus niets kopen.
Bij de bank betaal je per 100 francs de koerswaarde van de dag plus een vast bedrag aan administratiekosten.
Op zekere dag is de koerswaarde f 33,65 en rekent de bank f 3,-- als administratiekosten.
Voor 1500 francs betaal je dan: $15 \times f 33,65 + f 3,-- = f 507,75$.
Hoeveel francs krijg je voor f 200,--?

- 5 *Als je naar Parijs gaat, moet je bij een bank Franse francs kopen.
Anders kun je in de Franse winkels niet betalen en dus niets kopen.
Bij de bank betaal je per 100 francs de koerswaarde van de dag plus een vast
bedrag aan administratiekosten.
Op zekere dag is de koerswaarde f 33,65 en rekent de bank f 3,-- als admi-
nistratiekosten.
Hoeveel francs krijg je voor f 200,--?*
- 6 *Een getalraadsel begint met:
Neem een getal in je gedachten;
tel er 15 bij op;
vermenigvuldig deze uitkomst met 7;
trek hiervan weer 45 af.
Mariska krijgt 186 als uitkomst.
Welk getal nam Mariska in haar gedachten?*
- 7 *Boetiek 77 geeft in de uitverkoop 35% korting.
Een leuk bloesje kost nu nog maar f 80,--.
Hoeveel kostte dat bloesje voordat de uitverkoop begon?*

Wat bij deze voorbeelden opvalt is dat het gebruik van het algoritme 'oplossen van een eerstegraads vergelijking in één variabele' eigenlijk slechts voor de hand ligt bij de voorbeelden 1 tot en met 5. Bij de voorbeelden 6 en 7 kan men ook andere algoritmen handig gebruiken.

Bij de voorbeelden 1 tot en met 3 behoeven de leerlingen slechts standaardvormen van het type eerstegraads vergelijking te herkennen. De fouten die ze kunnen maken, zijn herleidingsfouten: 'tekenfouten' en 'verkeerd delen'.

Bij de voorbeelden 4 en 5 is het herkennen van een eerstegraads verband met één variabele de sleutel tot de oplossing. Deze herkenning is in voorbeeld 4 het eenvoudigst.

Bij voorbeeld 6 is het terugrekenen ('een inverse functie gebruiken') minstens zo eenvoudig als het gebruiken van het bedoelde algoritme.

Bij voorbeeld 7 is het standaardalgoritme 'rekenen met procenten' wellicht zelfs gebruikelijker.

Deze laatste twee, overigens goede, opgaven zijn daarom niet geschikt om te gebruiken voor het toetsen of een leerling eerstegraads vergelijkingen in één variabele met het bekende bijbehorende algoritme kan oplossen. Immers de antwoorden geven zonder voldoende uitleg van de leerling hoe deze het antwoord gevonden heeft, geen enkele garantie dat inderdaad dit algoritme (goed) gebruikt is. En als uit de uitleg blijkt dat een andere oplossingsweg of een ander algoritme gebruikt is, dan levert dit niet de gewenste informatie op. Het is wiskundig gezien tegennatuurlijk dergelijke alternatieve oplossingen met nul punten te honoreren, alleen omdat de leerling een andere oplossingsweg heeft gevolgd dan door de

toetser bedoeld was. Als men dit zou ondervangen door de leerling uitdrukkelijk te vragen het bedoelde algoritme te gebruiken, dan is zo'n opgave duidelijk minder fraai omdat de scoringsregels dan creativiteit afstraffen.

5.2 Het algoritme 'stapsgewijs benaderen van het doel'

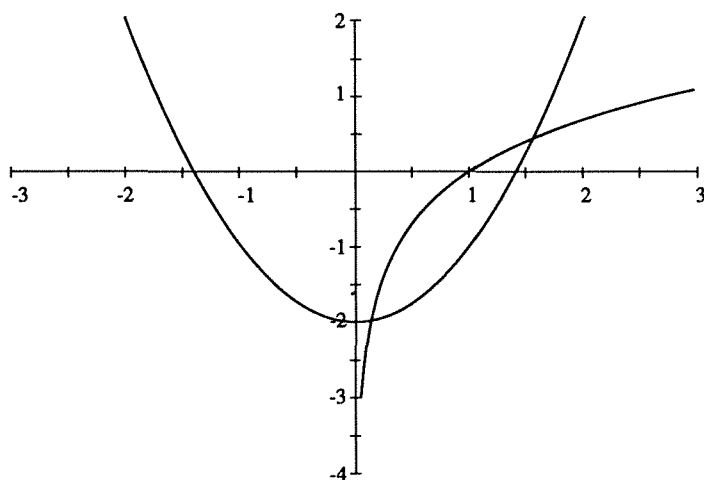
Dit algoritme wordt vaak gebruikt bij het oplossen van vergelijkingen of bij het bepalen van een extreme waarde. Er zijn grofweg twee varianten, hier aan te duiden met iteratie en het stapsgewijs doorrekenen tot je bij het doel bent. Beide varianten vragen dikwijls een rekenapparaat of een computer.

Leerlingen vinden de iteratie meestal heel erg moeilijk, maar een eenvoudige vorm hiervan ligt binnen hun bereik. Het domweg stapsgewijs doorrekenen tot men bij het doel is aangekomen is voor hen zeker te begrijpen.

Het formuleren van wat iteratie is, is ook veel moeilijker dan het formuleren van het recht toe recht aan doorrekenen tot het gewenste eindresultaat. Ter verduidelijking drie voorbeelden. Omdat bij voorbeeld 1 niet duidelijk is welke soort iteratie bedoeld is, wordt daarvan ook de oplossing weergegeven.

Voorondersteld is dat deze iteratievormen in de les behandeld zijn. Bij de voorbeelden 2 en 3 is zonder meer duidelijk welke oplossingsmethoden bedoeld zijn.

1. *Vind en benader een oplossing van $\ln x = x^2 - 2$.*



Figuur 1: Grafieken van $\ln x$ en $x^2 - 2$

Oplossing via iteratie

Allereerst een grafiek van de functies $x \rightarrow \ln x$ en $x \rightarrow x^2 - 2$ schetsen (figuur 1). Deze schets laat zien dat er twee oplossingen zijn, namelijk een oplossing tussen 0 en 1 en een oplossing tussen 1 en 2. Om aan de opdracht te voldoen is het voldoende ons te beperken tot de oplossing die tussen 1 en 2 ligt.

Een eerste schatting van x is 1,5. De volgende schattingen zijn uitgevoerd met behulp van een spreadsheet volgens het handmatig systematisch verhogen en verlagen van x volgens twee 'inklemmethodes', een alternerende (tabel 1) en een van links naar de oplossing toelopende (tabel 2).

aantal stappen	x_{laag}	stap- grootte	x_{hoog}	evaluatiefunctie		
				$y =$ $\ln x - x^2 + 2$	$y + k =$ $\ln(x + h) - (x + h)^2 + 2$	wissel
0	1,5	0,1	1,6	0,1555	- 0,09	1
1	1,6	- 0,01	1,59	- 0,09	- 0,064	0
2	1,59	- 0,01	1,58	- 0,064	- 0,039	0
3	1,58	- 0,01	1,57	- 0,039	- 0,014	0
4	1,57	- 0,01	1,56	- 0,014	0,0111	1
5	1,56	0,001	1,561	0,0111	0,0086	0
6	1,561	0,001	1,562	0,0086	0,0061	0
7	1,562	0,001	1,563	0,0061	0,0036	0
8	1,563	0,001	1,564	0,0036	0,0012	0
9	1,564	0,001	1,565	0,0012	- 0,001	1
10	1,565	- 0,0001	1,5649	- 0,001	- 0,001	0

In de kolom van 'wissel' staat: $\begin{cases} 1, & \text{als } y(y+k) < 0 \\ 0, & \text{als } y(y+k) \geq 0 \end{cases}$

In de kolom van x staat onder de startwaarde de vorige waarde van $x + h$

In de kolom van h staat onder de startwaarde: $\begin{cases} 0,1 \times \text{vorige } h, & \text{als vorige wissel} = 1 \\ \text{vorige } h, & \text{als vorige wissel} = 0 \end{cases}$

Tabel 1: Alternierende inklemmethode

2. Als je f 5000,-- op een spaarrekening van 8% op de bank zet, dan betekent dit dat er 1 jaar later f 5000,-- + 8% van f 5000,-- = f 5400,-- op je spaarrekening komt te staan.

Je kunt dan kiezen of je dit bedrag opneemt of laat staan.

Als je het bedrag laat staan en de rente blijft 8%, dan geldt 1 jaar later dat het bedrag is aangegroeid tot f 5400,-- + 8% van f 5400,-- = f 5832,--, enzovoort.

Tot welk bedrag zal de f 5000,-- na 10 jaar aangegroeid zijn?

3. In de natuur komt water in drie soorten voor:

- gewoon water,
- zwaar water, ook wel Deuterium genoemd en
- extra zwaar water, ook wel Triterium genoemd.

aantal stappen	x_{laag}	stap- grootte	x_{hoog}	evaluatiefunctie		
				$y =$ $\ln x - x^2 + 2$	$y + k =$ $\ln(x + h) - (x + h)^2 + 2$	wissel
0	1,5	0,1	1,6	0,1555	- 0,09	1
1	1,5	0,01	1,51	0,1555	0,132	0
2	1,51	0,01	1,52	0,132	0,1083	0
3	1,52	0,01	1,53	0,1083	0,0844	0
4	1,53	0,01	1,54	0,0844	0,0602	0
5	1,54	0,01	1,55	0,0602	0,0358	0
6	1,55	0,01	1,56	0,0358	0,0111	0
7	1,56	0,01	1,57	0,0111	- 0,014	1
8	1,56	0,001	1,561	0,0111	0,0086	0
9	1,561	0,001	1,562	0,0086	0,0061	0
10	1,562	0,001	1,563	0,0061	0,0036	0
11	1,563	0,001	1,564	0,0036	0,0012	0
12	1,564	0,001	1,565	0,0012	- 0,001	1
13	1,564	0,0001	1,5641	0,0012	0,0009	0

In de kolom van 'wissel' staat: $\begin{cases} 1, & \text{als } y(y+k) < 0 \\ 0, & \text{als } y(y+k) \geq 0 \end{cases}$
In de kolom van x staat onder de startwaarde: $\begin{cases} \text{de vorige waarde van } x, & \text{als vorige wissel} = 1 \\ \text{de vorige waarde van } x + h, & \text{als vorige wissel} = 0 \end{cases}$
In de kolom van h staat onder de startwaarde: $\begin{cases} 0,1 \times \text{vorige } h, & \text{als vorige wissel} = 1 \\ \text{vorige } h, & \text{als vorige wissel} = 0 \end{cases}$

Tabel 2: Van links naar de oplossing toelopende inklemmethode

Het gewone water en Deuterium blijven in de loop van de tijd onveranderd van samenstelling. Deze stoffen heten stabiel.

Triterium echter verandert geleidelijk via een radio-actieve reactie in Deuterium. Triterium heet daarom radio-actief.

Deze verandering gebeurt heel geleidelijk. Van een hoeveelheid Triterium is 12 jaar later nog de helft over.

- Hoeveel gram Triterium is er na 108 jaar nog over van 1 kg Triterium? Van elke beginhoeveelheid Triterium blijft er na een aantal jaren een zeker percentage over, de rest is Deuterium geworden. Na 12 jaar is het percentage Triterium dat nog over is dus 50%. Met dit gegeven is voor elk aantal jaren uit te rekenen hoeveel Triterium van een bepaalde beginhoeveelheid nog over is.*
- Hoeveel gram Triterium is er na 6 jaar nog over van 1 kg Triterium?*
- Hoeveel gram Triterium is er na 1 jaar nog over van 1 kg Triterium?*

Deze drie opgaven zijn op te lossen via het stapsgewijs benaderen van het eindresultaat. Daartoe dient men een aantal malen een set bij elkaar behorende rekenstappen uit te voeren met behulp van een zakrekenmachine of computer.

De opgaven 3b en 3c zijn op te lossen met de onder opgave 1 weergegeven methoden, maar laten behalve dat, een veel eenvoudiger oplossing toe, die gevonden kan worden door even na te denken. Deze oplossingen zijn verdichtingen van het algemene algoritme.

Ook hier weer is het herkennen van een toepassingsmogelijkheid van het algoritme bij de formele vergelijking (voorbeeld 1) het eenvoudigst. In de meer realistisch gekleurde opgaven is het nodig eerst een mogelijkheid tot stapsgewijs naderen tot het antwoord te herkennen. Deze herkenning begint met een relatie tussen de uitgangssituatie en een te bereiken eerstvolgende situatie met 'betere eigenschappen' ten opzichte van het gewenste eindresultaat.

6 Conclusie

Algoritmen zijn efficiënte oplossingsmethoden voor bepaalde klassen van problemen. Het zijn vormen van expertgedrag. Van groot belang is ze op de juiste manier - dat is creatief - te gebruiken. In dat geval vormen ze een welkome aanvulling van iemands mogelijkheden problemen op te lossen.

Om te toetsen in hoeverre iemand een algoritme kan hanteren, zijn opgaven nodig waarbij het nodig is het algoritme abstract te gebruiken en opgaven waarbij herkennen van, en toepassen van het algoritme beide aan de orde gesteld worden.

Beeldvorming en schematisering

Bram Lagerwerf

1 Inleiding

In deze bundel is een van de belangrijke vragen: 'Waar gaat het in het wiskundeonderwijs nu eigenlijk om? Zijn algoritmen nog wel zo nodig, of kunnen we ons beter richten op heuristieken in contextrijk wiskundeonderwijs?'. Ik vind dat niet zo'n handige vraagstelling en zal proberen duidelijk te maken waarom.

Een kernpunt van de huidige vernieuwing is dat de leerlingen *bruikbare wiskunde leren*. Van Parreren (1975) geeft in 'Leren op School' al enkele decennia lang, als basis voor *inzichtbevorderend leren* de trits: begrippen en regels, algoritmen, en heuristieken. Bruikbaar en inzichtbevorderend betekenen hier beide onder meer: ondersteunend voor het structureren van probleemsituaties. Beschikken over een ruime voorraad degelijke begrippen en regels, is de basis voor het vaardig kunnen toepassen van allerlei algoritmen en het creatief gebruiken van heuristieken. Alle drie zijn nodig.

Op basis van de Gestaltpsychologie heeft Van Hiele (1973) al vroeg gepleit voor een duidelijke fasering in het onderwijzen van deze zaken. Ook anderen hebben zich daarmee beziggehouden. Eén van de kernen daarin is dat onderwijzen moet aansluiten bij wat de leerling al tot zijn beschikking heeft. Daarbij gaat het niet alleen om reeds aanwezige *cognitieve* schema's. Ook allerlei daarmee samenhangende ervaringen spelen een rol. Dat pleit voor het gebruik van contexten uit de werkelijkheid van de leerling.

De vraag is dus niet: 'Moeten algoritmen wijken voor heuristieken in contextrijk wiskundeonderwijs?', maar: 'Welke rol spelen algoritmen, heuristieken en contexten, in onderwijs dat voor de leerlingen moet leiden tot bruikbare wiskunde?'. Een begin van het antwoord is: 'Contexten zijn een belangrijk middel bij de ontwikkeling van cognitieve schema's die rijk zijn aan degelijke begrippen en regels, en goed toepasbare algoritmen, en de ontwikkeling van het vermogen heuristieken op een creatieve manier te gebruiken'.

In deze bijdrage ga ik verder in op de vraag hoe contexten helpen, en hoe schema's zich ontwikkelen. Ik spreek daarbij niet meer over niveaus in het denken of argumenteren, over taalniveaus, of over niveaus van zekerheid, maar over een *fasering*, over *stappen in het leren*. Doch niet alleen de terminologie is nieuw, ik geef een duidelijker beschrijving van de stappen, en introduceer het begrip 'structureren' in dit verband.

2 Voorbeelden

Kern van de zaak is dat, wil je de leerlingen *bruikbare* wiskunde onderwijzen, je rekening zult moeten houden met stappen, of fasen, in hun leren.

In eerste instantie onderscheid ik er drie:

1. *Beeldvorming.*
2. *Schematisering.*
3. *Theorievorming.*

Daar wil ik eerst een aantal voorbeelden bij geven, en er dan preciezer op ingaan. Ik begin met het prototype, de rechthoek; daarna komen er ook allerlei andere aan de orde.

2.1 Voorbeeld 1: Rechthoek

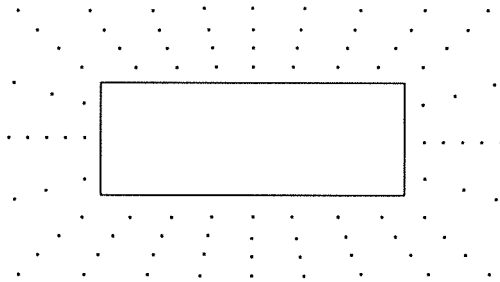
Beeldvorming

De rechthoek is in onze cultuur wel de meest voorkomende vorm. Wanneer je niet in de vrije natuur bent zie je er talloze om je heen.

Uit de rechthoekige deur, de rechthoekige tafel, het rechthoekige schilderij, het rechthoekige papier, de rechthoekige ramen, enzovoort, ontstaat langzamerhand de abstractie 'rechthoek'.

Als een kind gaat tekenen, wordt de vorm van een rechthoek een beetje geëxpliciteerd: niet krom en niet scheef, maar recht. Daar worden verder geen woorden aan vuil gemaakt. Impliciet is een rechthoek de combinatie van twee horizontale en twee verticale lijnstukken. Daar zit het begrip hoek nog nauwelijks in. In het dagelijks leven hebben veel mensen niet eens een woord voor het begrip rechthoek. Freudenthal (1978) gebruikt hier de term *aanwijzend taalgebruik*.¹

Zo bekeken is de rechthoek een tamelijk kaal en leeg begrip. Maar deze schijn bedriegt. Het bruikbare begrip rechthoek staat bol van de associaties met de werkelijkheid. Het is uit die werkelijkheid losgemaakt, maar blijft erin gefundeerd (figuur 1).



Figuur 1: Rechthoek, beeldvorming

Schematisering

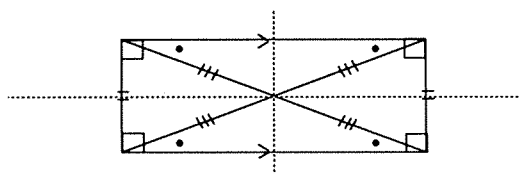
In het dagelijks leven kun je met dit beeld in het algemeen wel uit de voeten, maar soms zijn er situaties die uitnodigen tot meer.

Je maakt een schilderijlijstje. Je moet dan weten dat de vier stukken die je gebruikt twee aan twee even lang moeten zijn. En om te zorgen dat het niet scheef maar recht in elkaar komt, meet je de diagonalen even op. Je kunt natuurlijk ook

de hoeken controleren; en wanneer je daar geen hulpmiddel voor bij de hand hebt, vouw je bijvoorbeeld een blad papier twee keer dubbel. Maar daarvoor is natuurlijk wel nodig dat je een beeld hebt van het begrip rechte hoek.

Op school trek je de symmetrieassen en je vergelijkt links en rechts, net zoals je met een vlinder doet. We draaien en keren de rechthoek en we zien allerlei gelijke lijnstukken. We vergelijken de lengten van de lijnstukken door meten of door vouwen. We bouwen een beeld op van het begrip 'hoek' en zien dat nogal wat hoeken in de figuur gelijk zijn.

Bij het schematiseren gaat het dus niet meer zozeer om de praktijksituaties maar om de rechthoek in het algemeen. Er komen namen voor onderdelen van de figuur: zijden, hoekpunten. Er komen ook nieuwe begrippen: hoeken, diagonalen, symmetrieassen. Daar hoort *beschrijvend taalgebruik* bij. Voor de opbouw van de nieuwe begrippen is weer een goede beeldvorming nodig. Ze moeten daarom vanuit de werkelijkheid worden opgetrokken. En langzamerhand ontstaat dan het beeld van figuur 2.



Figuur 2: Rechthoek, schematisering

Naast deze inwendige structuur behoort tot de schematisering ook een uitwendige: De rechthoek als zijvlak van rechte prisma's, de rechthoek als vlakvuller, de rechthoek als bijzondere vierhoek, enzovoort.

Theorievorming

Theoretici willen meer: definities en stellingen en bewijzen, en *formeel taalgebruik*. Ik wil niet ingaan op hoe dat kan worden geleerd en onderwezen. Het resultaat is geen figuur meer, maar een lijstje dat de logische samenhang weergeeft van wat bij de schematisering is gevonden. Figuur 3 bijvoorbeeld.

Definitie: Een rechthoek is een vierhoek met drie rechte hoeken.

Stellingen:

Een vierhoek waarvan de overstaande hoeken twee aan twee gelijk zijn, en een hoek recht is, is een rechthoek.

Een vierhoek waarvan de diagonalen gelijk zijn, en elkaar middendoor delen is een rechthoek.

In een rechthoek zijn de diagonalen gelijk, en delen elkaar middendoor.

Enzovoort.

Figuur 3: Rechthoek, theorievorming

De structuur die in dit voorbeeld is te zien kan als volgt worden beschreven:

- uit vele ervaringen ontstaat een *globaal beeld*, waarin al die ervaringen worden samengebald;
- pas verder gaan als dat goed ontwikkeld is;
- dan dat globale beeld schematiseren.

De theorievorming speelt op school steeds minder een rol, die laat ik in deze bijdrage verder rusten.

2.2 Voorbeeld 2: Getallen

Beeldvorming

3 boterhammen, 4 eendjes, 5 blokken, 2 oren, 1 neus, 1 jas, 2 wanten, je woont op nummer 10, om 6 uur eten, om half 8 naar bed, 5 jaar, vader moeder zus broer en ik dus 5 borden op tafel, enzovoort.

2 borden, 2 wanten, 2 stoelen, 2 boterhammen, enzovoort, worden langzamerhand het losse getal 2.

Zo ontstaat het beeld van de getallen 1, 2, 3, 4, 5, ...

- los van de werkelijkheid;
- ondenkbaar zonder die werkelijkheid daarin gefundeerd.

Je kunt er hoeveelheden mee tellen, of nummeren. Als je schoolrijp bent, ken je de telrij een stukje en kun je echt tellen.

Schematisering

Eindeloos doortellen, getalsysteem.

Sommen maken, optellen bijvoorbeeld. Voor de beeldvorming daarvan moet je terug naar de werkelijkheid:

2 mensen en 3 mensen, samen nemen, dat zijn 5 mensen.

Niet: huis nummer 2 en huis nummer 3, samen nemen, dat is huis nummer 5.

Wel: huis nummer 2, 3 huizen verder, dat is huis nummer 5.

Enzovoort.

Zo ontstaat het kale sommetje $2 + 3 = 5$.

Om los te komen van de dagelijkse werkelijkheid zijn op den duur min of meer gekunstelde oefensituaties nuttig. Het rekenrek bijvoorbeeld om in de tien-structuur ook de vijfstructuur te leren zien. Maar je hebt natuurlijk ook je vingers bij de hand. De schematisering is iets dat zich geleidelijk voltrekt, en niet overhaast moet worden.

2.3 Voorbeeld 3: Oppervlakte

Beeldvorming

Zoveel als je met een pot verf kan verven, vloerbedekking, gazon zaaien en maaien, behang, koeien in een weiland, ruimte nodig om een huis op te kunnen bouwen. Ruimte die je in je kamer hebt om dingen neer te zetten, vloerruimte per leerling in de klas, groter of kleiner, enzovoort.

Voor welke muur heb je meer behang nodig? Voor welk veld meer graszaad? Op welk dak meer pannen? Voor welke kubus meer verf?

Hoe krijg je een antwoord op zulke vragen? Langzamerhand ontstaat uit de benodigde hoeveelheden verf, behang, zaad, dakpannen, enzovoort, het kale begrip oppervlakte.

Als het rechthoekig is doe je lengte maal breedte, maar ook een cirkel heeft een oppervlakte, en Nederland, en een driehoek. De oppervlakte van de wereld. Hoeveel huid heeft een mens?

Vierkante meters behang, verf, gras, ruimte voor een leerling, enzovoort, worden langzamerhand kale vierkante meters.

Het beeld dat zo ontstaat is moeilijk te omschrijven. We hebben er een woord voor, dat past in het rijtje: lengte, oppervlakte, inhoud. Het gaat om de grootte van iets plats, waarbij we verder niet op de dikte of de hoogte letten.

Schematisering

Oppervlakken systematisch met vierkantjes bedekken en tellen.

Bij rechthoeken gaat dat alleen gemakkelijk als lengte en breedte gehele getallen zijn, maar dat mag geen probleem zijn. Voor de beeldvorming van oppervlaktematen keren we weer terug naar de werkelijkheid, en dan pas gaan we systeem brengen in het omrekenen. Een cirkel in taartpunten verdelen en die om en om naast elkaar leggen; zo zie je dat de oppervlakte inderdaad πr^2 is. Enzovoort.

2.4 Voorbeeld 4: Schatten

Beeldvorming

Verwarring met kostbaarheden en lieve mensen oplossen.

Door allerlei nog niet zo gestructureerde oefeningen, in voor de leerlingen concrete situaties, ontstaat het globale beeld van figuur 4.

Schatten van lengten, hoeveelheden afstanden, bedragen, uitkomsten, berekeningen, tijden, ... Schatten doe je wanneer het niet zo precies hoeft of kan. Schatten is beter dan gokken en niet zo precies als uitrekenen of meten.
--

Figuur 4: Schatten, beeldvorming

Twee opmerkingen dienen bij dit globale beeld gemaakt te worden:

1. Dit beeld omvat meer dan de kale woorden die hier te lezen zijn. Schatten moet voor de leerlingen ook een *belangrijke* en *vanzelfsprekende* mogelijkheid worden naast rekenen en meten.
2. Het is voor een docent belangrijk zo'n globaal beeld voor zichzelf te schetsen, om bij de leerlingen beter te kunnen zien waar het aan schort en waar dus nog verdere oefening nodig is. Pas als het globale beeld in orde is kun je serieus verder.

Schematisering

Dit betekent weer: meer weten, preciezer weten, en beter zien hoe het werkt.

Veel eigen produkties en creatieve actie van de leerlingen zijn daarvoor nodig.

- een rijtje sommen zo snel mogelijk, maximaal tien procent afwijking is nog goed;
- hoe hoog zou deze flat zijn?
- hoeveel mensen zouden erin wonen?
- opmeten van deuren, etagehoogten, tafelhoogten, en andere eenheidsmaten.

Veel expliciete aandacht voor de schematisering en het verwoorden is hierbij gewenst. Het resultaat ziet er ongeveer uit als in figuur 5.

Handig rekenen. Afrondingen, verdubbelen/halveren, e.d.
Maatkennis. Van veel voorkomende voorwerpen de afmetingen of het gewicht kennen, e.d.
Schattechnieken. Vergelijken met bekende afmeting. In stukjes verdelen, één stukje precies, vermenigvuldigen met? aantal stukjes; e.d. Ook: zelf kunnen bepalen welke nauwkeurigheid je wilt.

Figuur 5: Schatten, schematisering

2.5 Voorbeeld 5: Functies

Beeldvorming

Eerst gaat het om het zien van samenhangende verschijnselen:

- duw je de fietspomp omlaag dan gaat dat hoe langer hoe moeilijker;
- als je ouder wordt, word je ook langer, tot je uitgegroeid bent; en als je erg oud wordt, word je weer korter;
- hoe groter het gazon, des te langer duurt het maaien;
- temperatuurschommelingen in de loop van de dag, maand, jaar;
- hoe meer hoeken in een veelhoek, hoe meer diagonalen;
- je leeftijd nu, is afhankelijk van je geboortjaar.

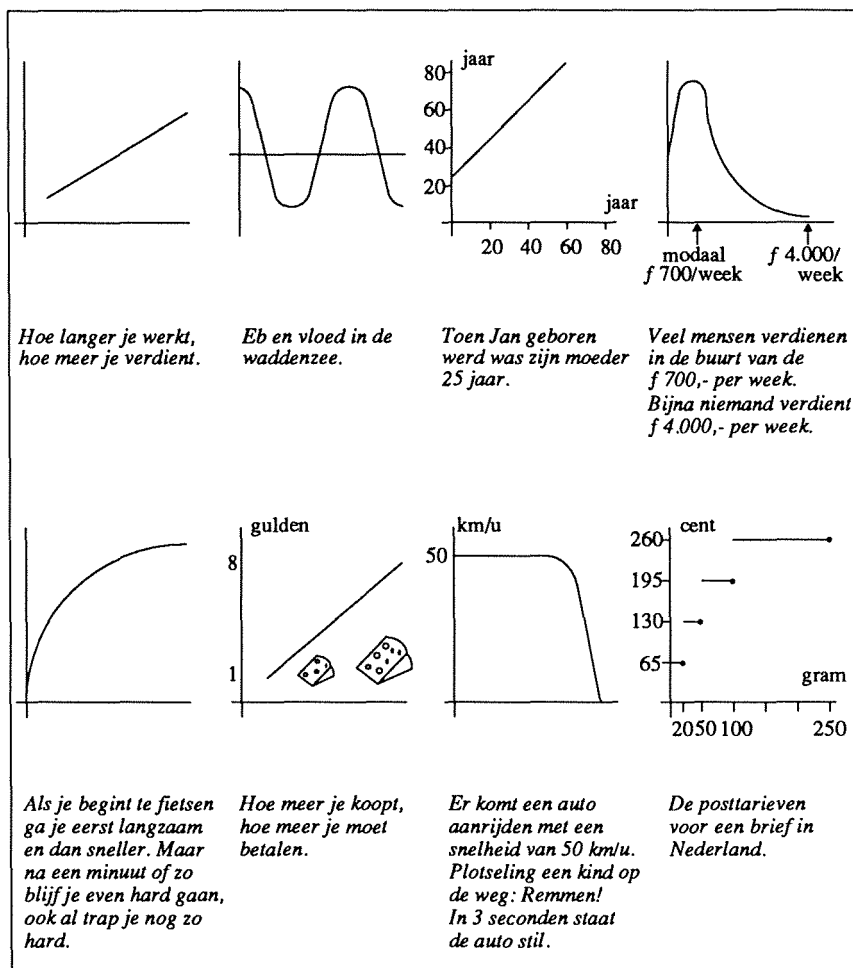
Het hoeveelheidsaspect wordt door de woorden meer, minder, korter, langer, en dergelijke, op een wel erg vage manier beschreven.

Grafieken kunnen helpen, zie figuur 6 (uit: Lagerwerf (1982)).

Het is nodig dat de leerling zelf onder woorden leert brengen, welke twee grootheden 'eruit springen' (dus wat er precies bij de assen komt te staan) en welk verband er te zien is. Dat is een moeilijkheid die nog vaak wordt onderschat.

Veel voorbeelden en veel eigen produkties van de leerlingen, en een veelzijdige benadering zijn nodig.

Langzamerhand ontwikkelt zich het globale beeld van waar het om gaat (figuur 7).



Figuur 6: Verschillende grafieken

Twee verschijnselen uit alles wat je om je heen ziet 'springen eruit'. Dat komt door de samenhang die je tussen die twee ziet. Van die samenhang bekijk je het hoeveelheidsaspect, eerst via groter of kleiner, meer of minder, en later ook door getallen te gebruiken. Verhaaltjes zijn belangrijk, grafieken kunnen helpen, en tabellen.

Figuur 7: Functies, beeldvorming

Schematiseren

Hier ziet het werk er anders uit dan bij de beeldvorming. Het gaat nu om het invullen van de details, om het onderscheiden van soorten, om het leggen van verbanden. Voorbeelden en opdrachten die de leerling ertoe brengen verder door te dringen in dit gebied zijn nodig. Daarbij is het goed om de leerling te vragen uit te leggen wat zij of hij doet, en waarom dat goed is.

Het taalgebruik is hierbij belangrijk: actietaal, woorden die bij de leerling beelden oproepen. Vaktaal en formules doen ook hun intrede, enzovoort. Voorbeeldmateriaal van het hier genoemde is al genoeg voor handen in onder andere SLO- en OW & OC-pakketjes.

Figuur 8 geeft een indruk van het resultaat van de schematisering.

Bij elke waarde van de variabele vind je een functiewaarde, via tabellen, via een voorschrift (al of niet in formulevorm), via een grafiek. Je kunt de waarde van de variabele niet willekeurig kiezen, daar zijn grenzen aan. Soms kun je binnen die grenzen willekeurig kiezen, een andere keer doen bijvoorbeeld alleen de gehele getallen mee. Voor functiewaarden geldt iets dergelijks. Stijgen en dalen, snel of langzaam stijgen of dalen, en hoe je dat in de grafiek herkent. Minimum en maximum, dalen en bergen in de grafiek. Eenheden langs de assen: sommige conclusies uit de grafiek zijn alleen juist, wanneer je langs beide assen dezelfde eenheid neemt, maar dat maakt de grafiek dan vaak weer onduidelijk. Een begin van periodiciteit en limieten. Bij alle punten van deze opsomming horen plaatjes.
--

Figuur 8: Functies, schematisering

3 Structureren

Wat is er in deze voorbeelden te zien?

In de *beeldvorming* is er steeds sprake van allerlei reële situaties waar de leerling een beeld uit moet destilleren. Een uitgekleed beeld, dat alleen nog de bedoelde essenties heeft. Dat beeld ontleent zijn kracht uit:

- het kale, uitgeklede en
- de veelzijdige fundering in de werkelijkheid.

Bij het *schematiseren* wordt dat beeld ingevuld met nieuwe begrippen en nieuwe namen, het komt steeds meer los te staan van de werkelijkheid, het wordt steeds meer geschematiseerd, en het gaat een eigen leven leiden.

Om dit preciezer te kunnen bekijken ga ik in op de vraag hoe bij de beeldvorming dat globale beeld ontstaat.

Dat beeld is een *afgreksel* van de werkelijkheid: uit de vele indrukken van de alledaagse situatie worden steeds de typische kenmerken van bijvoorbeeld een rechthoek herkend en geïsoleerd.

Daarvoor is het nodig dat die rechthoek er uit springt, als het ware oplicht, en de rest een beetje naar de achtergrond verdringt. Dat oplichten gebeurt natuurlijk niet in de werkelijkheid, dat doe je zelf. Je maakt zelf die rechthoek een beetje los van de rest, je geeft die extra aandacht.

Op die manier breng je een soort reliëf aan in je omgeving. Aan het één geef je wat meer aandacht, en aan het ander wat minder. We noemen dat het *structureren* van wat je waarneemt.

Structureren is een fundamenteel menselijke bezigheid die meestal heel impliciet gebeurt. Iedereen is voortdurend bezig met:

- de keuze van ‘Wat is in deze situatie belangrijk genoeg om op te letten?’
- de vraag ‘Hoe gaat dat in z’n werk?’, ‘Wat is de functie van het een en ander?’
- de vraag ‘Wat moet ik hier doen?’

Kijk bijvoorbeeld naar leerlingen in een boeiende les. Er is van alles te zien en te horen, maar ze richten hun aandacht vooral op datgene wat met de les te maken heeft. Al het andere is nu even minder belangrijk, al kan dat natuurlijk gemakkelijk veranderen. Ze proberen te begrijpen wat er wordt gezegd, en dat te vergelijken met hun eigen ideeën. Wat ze horen, combineren ze met wat ze zien. Zo gaat dat in z’n werk.

De manier waarop mensen structureren, is afhankelijk van het *doel* dat zij hebben. Komen er mensen in het lokaal met *bouwkundige* interesse, dan worden de muren ineens belangrijk, en het plafond, en de deuren en de ramen. Die dienen allemaal om de ruimte af te schermen van storende geluiden daarbuiten, en van de kou en de wind, en dergelijke. Deuren en ramen hebben daarin weer een andere functie dan muren en plafonds.

Bekijken we de ruimte echter *wiskundig* dan worden de vormen belangrijk. De muren en de plafonds, en de ramen en de deuren, en de bouwstenen, zijn allemaal rechthoeken. De functie daarvan is dat je rechthoeken aaneen kunt sluiten zonder kieren. En dat je er balkvormige ruimten van kunt maken, die je dan weer zonder tussenruimten kunt stapelen terwijl de vloeren horizontaal blijven.

Structuur aanbrengen in een situatie, of in een probleem, heeft drie aspecten:

1. Waar let ik op? (*aandacht*)
2. Hoe zit dat in elkaar? (*begrijpen*)
3. Wat doe ik daarmee? (*actie*)

Bij de *beeldvorming* gaat het om structurering van de werkelijkheid van de leerlingen. Als dat structureren niet goed gebeurt, zien ze niet dat er steeds hetzelfde te zien, of aan de hand is. En dan kan er van beeldvorming dus geen sprake zijn. De docent kan daarbij helpen. Door te vertellen hoe zij of hij de situatie structureert, of door gerichte vragen naar aandacht, begrijpen, of actie. Daarbij is echter een waarschuwing op zijn plaats. Bij de beeldvorming schieten woorden vaak te kort. Beeldvorming heeft te maken met doen, met ervaren. Woorden kunnen niet

de ervaring vervangen, ze kunnen wel helpen de ervaring te structureren. Belangrijk daarbij is ook het actieve taalgebruik van de leerlingen te stimuleren: Vertel eens wat je ziet. Wat is er in dit probleem aan de hand? Hoe heet zo'n ding eigenlijk? Wat is er hetzelfde als in het vorige probleem (of in het vorige voorbeeld)? Noem ook eens een paar verschillen. Hoe hebben we dat andere probleem opgelost, kan zoiets hier ook?

Bij de *schematisering* heeft de structurering een ander karakter. Er zijn beelden gevormd, en die hebben een naam gekregen. Wanneer de leraar die naam noemt, roept dat bij de leerlingen het beeld weer op, als het goed is. Er kan nu dus gemakkelijker over de inhoud gepraat worden en niet alleen over het structureren. Ook hier is een waarschuwing op zijn plaats. Bij het schematiseren moeten de leerlingen ervan overtuigd raken, dat het goed is wat ze hier doen en denken. Logische redeneringen, door een ander voorgeschoteld, overtuigen niet in dit stadium. Overtuiging is meer het resultaat van doen, van beelden, van eigen activiteit. Die activiteit kan best wat laboratoriumachtig worden, gekunsteld lijken en toch functioneel zijn. Denk bijvoorbeeld aan het afscheuren en naast elkaar plakken van de hoeken van een uitgeknipte driehoek, om te zien dat die samen een gestrekte hoek vormen.

Bij de beeldvorming ging het om opdrachten die de werkelijkheid van de leerling konden helpen structureren, zodat het globale beeld er steeds beter 'uitsprong'. Nu gaat het om de structurering van werksituaties die langzamerhand steeds verder van de werkelijkheid gekozen kunnen worden. Door de structurering van werksituaties moet het globale beeld worden geschematiseerd. Die schema's zijn in werkelijkheid niet te zien; in gedachten kun je op deuren en ramen de invulling van figuur 2 aanbrengen. De schema's zitten in het geheugen en helpen nieuwe situaties effectiever te structureren.

Concrete voorbeelden spelen dus aanvankelijk een grote rol, maar die kan al eens minder worden. Wanneer echter de schematisering niet gefundeerd blijft in de werkelijkheid van de leerling, zal het geschematiseerde beeld onbruikbaar blijken in nieuwe situaties. Eigen produkties van de leerlingen, creatieve oplossingen voor meer of minder ingewikkelde problemen, blijven van het grootste belang. En natuurlijk het verwoorden van doen en denken.

Ik vat het resultaat samen.

Beeldvorming

- Doordat steeds dezelfde structuur wordt herkend, ontstaat uit vele alledaagse ervaringen een globaal beeld, waarin al die ervaringen zijn samengebald.
- Het gaat vaak al doende, tussen de bedrijven door, vanuit een vanzelfsprekende betrokkenheid.
- Woorden schieten vaak te kort, het is heel beeldend, concreet. Uitleggen heeft niet zo'n zin. Wat helpt is actief demonstratief taalgebruik van de leerling en hulp bij het structureren.

Schematiseren

- Schematiseren van het globale beeld dat is ontstaan. De werkelijkheid is niet meer de hoofdzaak, maar ondersteuning vanuit de werkelijkheid blijft onmisbaar.
- De leerling moet overtuigd raken van de juistheid van wat hij weet en doet. Overtuigen is niet hetzelfde als bewijzen.
- De leerling bouwt een eigen systeem van zekerheid op, en is daarbij niet meer zo afhankelijk van de leraar.
- De leerling kan op zijn manier uitleggen wat hij doet, zegt, of denkt, en waarom dat correct is. Beschrijvende taal.
- De leerling bouwt ook een ‘alarmsysteem’ op, waardoor ‘dingen die niet kunnen’ sneller opvallen.

4 Enkele belangrijke aanvullende opmerkingen

- Voor een nadere uiteenzetting van een aantal zaken verwijs ik naar ‘Niveaus van zekerheid’ (Lagerwerf, 1983). De eigen zekerheid die de leerling opbouwt, het alarmsysteem dat zich ontwikkelt, overtuigen versus bewijzen, voorbeelden van opdrachten die schematisering bevorderen (tussenniveau), en de theorievorming (bewijsniveau).
- Structureren is voor veel leerlingen niet hun sterkste kant.
 - Dat heeft enerzijds te maken met een onduidelijkheid in de doelen. Leerlingen zitten nu eenmaal vaak met heel andere doelen in de school dan de leraren wensen; en een onduidelijk doel bevordert nu eenmaal niet een effectieve structurering. Daarbij komt dat de ene leerling veel gemakkelijker dan de andere de doelen van de leraar overneemt. Een gesprek zo nu en dan over de bedoeling van het schoolwerk, kan dus zinvol zijn.
 - Anderzijds gaan leerlingen vaak niet handig om met de drie structureringsvragen (naar aandacht, begrijpen, en actie). Ze reageren dan bijvoorbeeld vooral associatief, en komen onvoldoende toe aan de vraag: ‘Wat is hier belangrijk?’. Of ze verwaarlozen de vraag naar begrijpen en zetten alles op ‘Wat moet ik doen?’. Het is duidelijk dat dit veel te maken heeft met de schema’s die de leerlingen tot hun beschikking hebben.
- Leerlingen die niet zo goed zijn in structureren, zijn voor het welslagen van hun werk afhankelijk van de structuur die de opgave als het ware zelf aanbiedt. Of van de structuur die de docent aanbrengt. Dat heet *veldafhankelijkheid*.
- Een plaatje als figuur 2 (de geschematiseerde rechthoek) is voor out-siders niet overzichtelijk. Veel dingen trekken de aandacht, zonder dat duidelijk is hoe en wat. Je kunt dat verduidelijken door te vertellen hoe het plaatje is opgebouwd: ‘Ik heb eerst de rechthoek getekend met twee horizontale en twee verticale lijnstukken, toen die verticale stippellijn door het midden, dan kun je zien dat de linkerhelft en de rechterhelft gelijk zijn. Door de horizontale stippellijn te trekken zie je ook dat de onderste en de bovenste helft hetzelfde zijn...’ Enzovoort.

Zo'n manier van beschrijven noem je 'actietaal', of deftiger 'dynamisch taalgebruik'. Het is een onmisbaar hulpmiddel in gesprekken met leerlingen die nog niet over voldoende geschematiseerde beelden beschikken.

- Ik heb hierboven een aantal malen de term 'de werkelijkheid van de leerling' gebruikt. Daarmee bedoel ik in eerste instantie de concrete tastbare wereld waarin de leerling leeft. Maar er behoort meer toe dan dat. Getallen bijvoorbeeld (een schematisering van die werkelijkheid) zijn zo vanzelfsprekend geworden, dat ze tot de concrete werkelijkheid van de leerling zijn gaan behoren. Dat is iets wat vaker voorkomt: Je schematiseert de werkelijkheid, en die schematisering wordt zo vertrouwd dat je je bijna niet meer kunt voorstellen dat het vroeger anders geweest is. Voor veel leerlingen geldt dat voor de geschematiseerde rechthoek, maar lang niet voor allemaal.

Dit verschijnsel is er vaak de oorzaak van dat leraren in de ogen van leerlingen 'zo moeilijk doen' en leerlingen in de ogen van docenten 'nooit meteen snappen wat je zegt'. De docent stelt hoge eisen aan de leerlingen over iets wat voor hem vanzelfsprekend is, maar wat zij nog aan het schematiseren zijn. Pas als die vanzelfsprekendheid ook voor de leerlingen geldt, is de schematisering ten volle bruikbaar.

5 Slot

Bij leerproblemen gaat het vaak om onvoldoende beeldvorming. Schematisering is dan onbegonnen werk, dat blijkt uit deze bijdrage.

Woorden schieten dikwijls te kort. Het beste is in veel gevallen, radicaal terug te gaan naar opdrachten die gericht zijn op de vorming van het globale beeld.

En, ook, voldoende aandacht hebben voor structureringsproblemen.

Noten

1. Zie ook Van Dormolen (1982, pag. 233-242).

Literatuur

Dormolen, J. van: *Aandachtspunten*, Oosthoek, Utrecht 1982.

Freudenthal, H.: *Weeding and Sowing*, Reidel, Dordrecht 1978.

Hiele, P. van: *Begrip en Inzicht*, Muuses, Purmerend 1973.

Lagerwerf, B., *Wiskundeonderwijs nu*, Wolters-Noordhoff, Groningen 1982.

Lagerwerf, B., Niveaus van zekerheid, *Nieuwe Wiskrant* 3 (1983), 16-26.

Parreren, C.F. van: *Leren op School*, Wolters-Noordhoff, Groningen 1975.

Effecten van computergebruik in de wiskundeles

Sieb Kemme

1 Inleiding en samenvatting

Door de ontwikkeling van steeds meer software ten behoeve van het wiskunde-onderwijs, begint de computer de status van een regulier onderwijsmiddel te krij-gen. Afhankelijk van het welbevinden van docenten en leerlingen zal de compu-ter haar eigen plaats wel vinden binnen deze ontwikkeling. Men kan zich echter afvragen wat nu precies de waarde is van het gebruik van de computer in het wis-kundeonderwijs. Dat vraagt om een objectief gefundeerd *effect*-onderzoek, waarbij op een systematische en doorzichtige manier wordt geanalyseerd wat het effect is geweest van het gebruik van de computer binnen een klassesituatie. In deze bijdrage wordt allereerst een beschrijving en een analyse gegeven van be-staand onderzoek naar effecten van computergebruik. In deze onderzoeken is ge-keken naar effecten van onderwijs waarin doelbewust is gestreefd naar een ver-betering ten opzichte van bestaand onderwijs. Hoe komt het dat in sommige on-derzoeken wél een positief effect wordt gevonden, terwijl dat in andere onderzoeken niét kan worden aangetoond? Ligt het onderwijs met de computer misschien te dicht bij het bestaande onderwijs zodat er ook geen duidelijke meer-waarde van de computer kan zijn? Of is het effect er wel, maar wordt het niet ach-terhaald door de methode van onderzoek? Deze vragen staan centraal bij de ana-lyse van deze onderzoeken. Met name wordt er naar een verklaring gezocht voor de grote verschillen in resultaten tussen de onderzoeken. Op basis van deze ana-lyse wordt bekeken wat de mogelijkheden zijn van het computer algebra systeem Derive voor een mogelijke verbetering van het onderwijs van algebraïsche algo-rithmen.

2 Onderzoek naar effecten van computergebruik

In deze paragraaf wordt een aantal onderzoeken naar effecten van het gebruik van de computer in het reken- en wiskundeonderwijs geanalyseerd. Er wordt ge-zocht naar een verklaring voor de grote verschillen in resultaten tussen die on-derzoeken.

2.1 Logo en het leren denken

Het boek van Papert (1980) heeft hoge verwachtingen gewekt omtrent het ge-bruik van de programmeertaal Logo als stimulans van het creatief en systema-tisch leren denken. Sinds het verschijnen van dit boek is in een grote verschei-denheid van onderwijssituaties met Logo geëxperimenteerd. Veel van deze ex-perimenten worden begeleid door wetenschappelijk onderzoek naar het daadwerkelijke effect.

Over het algemeen zijn de resultaten nogal teleurstellend: Logo heeft niet die impact op de ontwikkeling van het denken zoals Papert zich had voorgesteld.

De Corte e.a. (1990) gaan uitvoerig in op een aantal van deze onderzoeken. Ze schrijven het uitblijven van significante effecten bij de andere onderzoeken vooral toe aan de korte duur van de instructieperiode en aan de aard van het gegeven onderwijs. Ze vatten het bereiken van een positief leereffect daarbij op als een transferprobleem: de ervaringen die zijn opgedaan bij Logo moeten kunnen worden overgedragen op bredere terreinen. Op basis van een literatuurstudie van vroegere Logo-ervaringen en op basis van recent leerpsychologisch onderzoek over transfer gaan ze ervan uit, dat voor het bereiken van die transfer de volgende drie voorwaarden van belang zijn:

1. De leerlingen hebben voldoende kennis van de domeinspecifieke basisbegrippen van de Logo-taal verworven.
2. Ze beheersen de meer algemene denkvaardigheden (binnen de contexten) van het programmeren.
3. Ze hebben geleerd de in de Logo-omgeving verworven denkvaardigheden ook in minstens één ander inhoudsdomein toe te passen.

Meer specifiek worden in het onderzoek de volgende hypothesen in verband met transfer van denkvaardigheden geformuleerd en getoetst:

- a. Indien de eerste twee voorwaarden vervuld zijn, treedt er transfer op.
- b. Indien daarenboven ook aan de derde voorwaarde voldaan is, levert dit een bijkomend significant transfereffect op (De Corte e.a. 1990, pag. 45).

Deze hypothesen leiden tot een onderzoeksopzet met drie groepen:

- een experimentele groep die het hele jaar door een namiddag per week bezig is met het verwerven van basisbegrippen uit Logo en het leren beheersen van de beoogde denkvaardigheden (voorwaarden 1 en 2);
- een experimentele groep als boven maar waarbij bovendien de leerlingen leren complexe rekenvaardigheden te analyseren en op te lossen met behulp van de denkvaardigheden die in Logo centraal hebben gestaan (voorwaarden 1, 2 en 3);
- een controlegroep die geen Logo-onderwijs heeft meegemaakt maar wel aan alle toetsen meedoet.

In de Logo-cursus wordt de leerlingen een programmeerstrategie aangeboden waarmee ze op systematische wijze de gestelde tekenopdrachten kunnen uitvoeren. De gevraagde tekening wordt daarbij vooraf ontleed in onderdelen. De samenhang tussen die onderdelen wordt in een boomdiagram weergegeven. Van ieder onderdeel worden aparte programma's gemaakt die volgens de structuur van het boomdiagram tot een totaalprogramma worden samengevoegd. Voor het opstellen van het boomdiagram maken de leerlingen gebruik van een speciaal voor dit doel ontwikkeld programma.

Het idee van boomdiagrammen wordt door de tweede experimenteelgroep gebruikt om rekenvraagstukken te leren 'ontleden' in deelproblemen. Het boom-

diagram kan voor de leerlingen functioneren als een externe representatie van de gestelde problemen.

Met behulp van 'criteriumtoetsen' wordt geconstateerd of de leerlingen van de twee experimentele groepen de vereiste kennis en vaardigheden op voldoende niveau beheersen. Zo nodig worden remedial-activiteiten toegepast. Het transfereffect wordt gemeten aan de hand van 'transfertoetsen' voor de drie groepen in voor- en na-meting. Deze toetsen hebben betrekking op een ander terrein. Het gaat om het vinden van wegen in een doolhof en om het detecteren van fouten. De toetsen richten zich op transfer van het plannen, het uitvoeren/controleren, de probleemdecompositie en het verwerven van een externe representatie.

Uit de resultaten op de criteriumtoetsen blijkt, na enige remediëring, dat de leerlingen voldoen aan de gestelde voorwaarden 1 en 2. Met betrekking tot voorwaarde 3 verschillen de resultaten op de criteriumtoetsen. Leerlingen kunnen wel uit twee boomdiagrammen de beste kiezen en zijn ook in staat om aan de hand van een gegeven boomdiagram een oplossing te berekenen, maar zijn slecht in staat om zelf een boomdiagram te construeren bij een gegeven rekenvraagstuk.

Door middel van multivariantie-analyse is nagegaan of er significante effecten in transfer optraden in de transfertoetsen. Voor 'planvaardigheid' (dat is: 'het vermogen om een probleem te analyseren alvorens met de uitvoering te beginnen', pag. 43) werden geen significante verschillen vastgesteld tussen de eerste experimentele groep en de controle-groep. Voor wat betreft decompositie, externe representatie en 'debuggen' waren er wel significante verschillen. De effecten tussen de twee experimentele groepen onderling voor wat betreft de transfer, waren precies het omgekeerde van wat men zou verwachten. De tweede groep deed het slechter voor wat betreft decompositie, externe representatie en 'debuggen'. Voor wat betreft het plannen was er geen verschil te constateren tussen beide groepen.

Wat is nu de waarde van de gevonden resultaten met betrekking tot het vaststellen van het effect van het gebruik van de computer in het wiskundeonderwijs? Het gaat in het onderzoek over effectmeting van transfer van Logo-ervaringen naar andere gebieden. Een dergelijk gebied zou de wiskunde kunnen zijn. Omdat de transfermeting plaatsvindt aan de hand van wiskunde-achtige puzzels, zou het onderzoek dus een mogelijk antwoord kunnen geven op de vraag naar transfer van Logo-ervaringen naar wiskunde. Wat opvalt is dat er alleen een transfer valt te constateren op 'korte termijn'-vaardigheden die direct aansluiten bij de gestelde taken. Voor de meer algemene vaardigheid 'plannen', een vaardigheid die juist als een algemeen en essentieel onderdeel wordt gezien van probleemoplossende vaardigheden, valt er geen transfer te constateren. In deze zin weet het onderzoek de hooggespannen verwachtingen ten aanzien van het gebruik van Logo flink te relativeren.

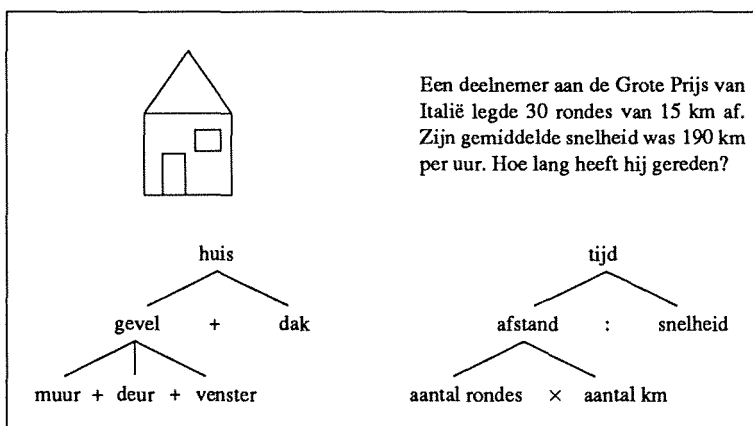
Betekent dit dat die transfer ten aanzien van het 'plannen' er ook niet is? En nog sterker: dat deze ook niet te realiseren valt met behulp van Logo?

Uiteraard is daar vanuit de negatieve resultaten van het onderzoek niets over te concluderen. Maar ook als er wél een positieve transfer was geconstateerd, dan nog was het twijfelachtig of dit ook zou betekenen dat er sprake was van een positieve transfer in het 'plannen' als onderdeel van probleemoplossende vaardigheden binnen de wiskunde. Er dient namelijk eerst een aantal terminologische en methodologische kwesties verduidelijkt te worden. Het gaat daarbij in eerste instantie om de vraag wat we precies verstaan onder het 'plannen van een oplossingsproces in de wiskunde' en in tweede instantie hoe we dat kunnen constateren.

De onderzoekers definiëren de planfase in een oplossingsproces als die fase waarbij 'de oorspronkelijke probleemrepresentatie zodanig getransformeerd wordt dat er een nieuwe representatie ontstaat die geen probleemkarakter meer heeft, doordat er een vertrouwde opgave in herkend wordt' (De Corte e.a. 1990, pag. 22). In het onderzoek is dit geconcretiseerd door de eis dat 'de leerlingen telkens een plan moesten kunnen voorleggen voordat ze aan de oplossing van een probleem (in casu het schrijven van een programma) mochten beginnen' (pag. 44).

Hoe wordt nu die planvaardigheid in het onderzoek waargenomen? De leerling wordt gevraagd een gegeven tekening in onderdelen te ontleden en het resultaat daarvan weer te geven in een boomdiagram (een grafische representatie). Hetzelfde geldt voor de rekenproblemen, die zijn voorgelegd aan de tweede experimentele groep. Na 25 lessen Logo blijkt, dat de leerlingen in de tweede experimentele groep de planvaardigheden op voldoende niveau beheersen. Op deze lessen volgen vijf lessen waarin rekenproblemen op een analoge manier worden aangepakt als de tekenproblemen in de Logo-lessen.

Ten aanzien van de planvaardigheid is er duidelijk sprake van eenzelfde taak.



Figuur 1: Boomdiagrammen bij een tekening en een rekenprobleem

Het rekenprobleem wordt met behulp van een computerprogramma omgezet in een boomdiagram, dat de essentiële onderdelen in samenhang weergeeft en dat direct tot een oplossing leidt. Het blijkt dat de leerlingen in deze situatie de planvaardigheid niet meer in voldoende mate beheersen. Ondanks de grote overeenstemming in taakuitvoering tussen beide situaties, blijkt er geen spontane transfer op te treden. Kennelijk is het verschil in inhoud een essentiële belemmering voor het optreden van deze transfer.

In figuur 1 zijn twee boomdiagrammen, bij een tekening en een rekenprobleem, naast elkaar gezet. Hieruit blijkt duidelijk wat dat verschil in de relatie tussen probleem en boomdiagram is. In het boomdiagram van de tekening laten de verschillende onderdelen zich met de hand in de tekening aanwijzen. De relatie is daarmee heel direct visueel. Voor het rekenprobleem is dat direct visuele volledig verloren gegaan. De onderdelen 'totale prijs', 'prijs grondverf', enzovoort, zijn niet direct in het gestelde probleem terug te vinden en daar dus ook niet direct uit te construeren. Het opstellen van een boomdiagram van een tekening vraagt om een visuele analyse van figuren waarin de kernonderdelen al vooraf zichtbaar aanwezig zijn. Het opstellen van een boomdiagram bij een rekenprobleem vraagt echter om een semantische constructie van kernbegrippen die niet vooraf zijn gegeven. Afgezien van het (essentiële) verschil tussen een visuele en verbale presentatie van het probleem, is dit een heel andere, veel complexere taak.

Daarnaast speelt het gegeven dat de leerlingen waarschijnlijk gewend zijn deze rekenproblemen op een totaal andere manier aan te pakken. Misschien door gewoon proberen. Misschien door een algoritmische aanpak die succesvol is gebleken bij analoge problemen. Het tekenen van figuren met de computer is waarschijnlijk helemaal nieuw voor de leerlingen. De aangereikte oplossingsstrategie is dan eenvoudigweg de enige strategie waarover zij beschikken. Deze hoeft dan niet te concurreren met reeds bestaande strategieën. Dat kan ook een verklaring zijn voor de gesignaleerde weerstand die de leerlingen hadden tegen het gebruik van boomdiagrammen bij de rekenproblemen.

Samengevat

- de onderzoekers verwachten een positief effect in algemene planvaardigheden van leerlingen door het bedrijven van Logo onder bepaalde condities;
- dat effect treedt niet op;
- het achterwege blijven van dat effect kan verklaard worden door essentiële verschillen in betekenis van taakuitvoering in de verschillende condities.

2.2 Gonio leren met de computer

In tegenstelling tot het Belgische Logo-onderzoek, is bij het gonio-project aan de Technische Universiteit Delft geen bestaand softwarepakket het uitgangspunt, maar de vraag: 'Welke software is geschikt ter ondersteuning van het bestaande onderwijs in de goniometrie?'.

Van enkele onderdelen uit de goniometrie zijn knelpunten geanalyseerd door middel van doelstellingenonderzoek en protocol-analyses. Deze analyse leidde tot een lijst van aanbevelingen voor nader te ontwikkelen software (Jochems e.a., 1987a). Op basis hiervan zijn specificaties voor een computerprogramma gemaakt, is het programma geschreven en uitgetest (Jochems e.a., 1987b). Ten slotte zijn de effecten van het gonio-onderwijs met computerondersteuning vergeleken met het onderwijs zonder computer (Smid e.a., 1989).

In het evaluatie-onderzoek (Smid e.a., 1989) worden de resultaten van het onderwijs zonder computer vergeleken met die van het onderwijs met computer. Daartoe werden de leerresultaten vergeleken van drie klassen 4-vwo uit het schooljaar 1985-'86 (zonder computer) met die van drie klassen 4-vwo uit het schooljaar 1986-'87 (met computer). Allereerst werd een voortoets afgenomen om na te gaan of de groepen vergelijkbaar waren bij het begin van de lessenserie. Vervolgens werden de leerprestaties op twee momenten vastgesteld. Eén keer halverwege de lessenserie, de zogenaamde tussentoets, en één keer aan het eind ervan, de eindtoets. Deze toetsen hadden de vorm van standaardproefwerken. Ze weken niet af van de 'gewone' wiskunde-proefwerken. Inhoudelijk stemden ze overeen met de van tevoren opgestelde doelstellingen. De voor- en eindtoets waren voor alle klassen hetzelfde. Voor de tussentoets moest een kleine aanpassing gemaakt worden. Daarbij is een sterke inhoudelijke overeenstemming tussen de toetsen bewaard gebleven.

Bij de verwerking van de resultaten is allereerst gekeken naar significante verschillen in de totaalscores tussen de verschillende jaargangen en de verschillende toetsen. Vervolgens zijn per toets de percentielscores van de verschillende jaargangen per vraag met elkaar vergeleken. Daarmee is een inventarisatie gemaakt van relatief moeilijke en relatief gemakkelijke vragen bij de voortoets en van vragen die beter en die slechter gemaakt zijn in 1987 bij de tussentoets en de eindtoets.

Uit de globale analyses van de resultaten blijkt de jaargang 1987 op de voortoets iets hoger te scoren dan de jaargang 1986, op de tussentoets blijkt deze groep significant beter te scoren dan de groep van het voorgaande jaar. Op de eindtoets blijkt er geen significant verschil te zijn.

Vergelijking per vraag levert voor de voortoets bij beide groepen hetzelfde beeld op. Een hoge score op een vraag in de ene jaargroep correspondeert met een hoge score op dezelfde vraag in de andere groep. Hetzelfde geldt voor lage scores. Uit het gegeven dat de gemiddelde score van de 1987-groep hoger is dan die van de 1986-groep, volgt dat de scores van de 1987-groep over de hele linie hoger zijn dan die van de 1986-groep.

De 1987-groep scoort op de tussentoets hoger dan de 1986-groep. Met name voor een aantal specifieke opgaven zijn grote verschillen aanwezig. Slechts op één vraag valt een achteruitgang te constateren. De onderzoekers concluderen dat de betere resultaten waarschijnlijk het gevolg zijn van het nieuwe lesmateriaal.

De geconstateerde verschillen op de tussentoets zijn bij de eindtoets praktisch verdwenen. Er zijn wel verschillen, maar deze zijn veel kleiner en zitten in beide richtingen.

In het project is er naar gestreefd om software te ontwikkelen die zo goed mogelijk aansluit bij het leerboek, die zo weinig mogelijk organisatorische problemen met zich mee brengt en die tegemoetkomt aan geconstateerde knelpunten in het onderwijs zonder computer.

Uit het onderzoek blijkt dat de ontwikkelaars geslaagd zijn in hun opzet COO te maken die op een eenvoudige wijze is in te passen in het bestaande onderwijs. Helaas moet worden geconstateerd dat de software nauwelijks tegemoet komt aan de gesignaleerde knelpunten. Uit de eindtoets in het vooronderzoek worden twee knelpunten gesignaleerd (Jochems e.a., 1987a, pag. 20):

- het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden;
 - het omgaan met de twee transformaties van een grafiek in de x - of y -richting.
- Deze twee knelpunten worden getoetst in de opgaven 3 en 5 van de eindtoets. Uit de resultaten van deze opgaven blijkt dat de leerlingen in 1987 even slecht of zelfs slechter scoren dan in 1986 (Smid e.a., 1989, tabel 21, pag. 65).

Dit resultaat is ronduit teleurstellend. Juist door de grafische meerwaarde van het gebruik van de computer zou je verwachten dat leerlingen beter inzicht krijgen in het omgaan met transformaties van grafieken. Iets dergelijks zou ook kunnen gelden voor het inzicht in het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden, hoewel hier formeel analytische aspecten wellicht een dominerende rol zouden kunnen spelen. Om het uitblijven van een dergelijk effect te kunnen verklaren is het nodig het computerprogramma in relatie met de leerstof te analyseren.

Opvallend kenmerk van het pakket is, dat het oplossen van de gestelde problemen volgens een vast patroon verloopt, dat door het programma wordt aangeboden. De oplossingsmethode krijgt daardoor een algoritmisch karakter.

Een tweede kenmerk is dat de didactische mogelijkheden van het tekenen met de computer nauwelijks benut worden. De leerlingen tekenen niet zelf op het scherm (zoals bij Logo) en kunnen geen opdracht geven om de computer te laten tekenen. De computer tekent ongevraagd grafieken bij een bepaalde stap in het oplossingsproces. Daarmee krijgen de getoonde grafieken binnen de uitleg de didactische betekenis van snelle en correcte illustraties.

Het programma is oorspronkelijk geschreven bij hoofdstuk 3 van Sigma 4AB (Doove e.a., 1984) voor klas 4-vwo. Hoewel het programma zodanig is geschreven dat het ook zonder deze tekst gebruikt kan worden, is er een sterke inhoudelijke en didactische overeenkomst met de tekst. Programma en hoofdstuk behandelen dezelfde onderwerpen en bieden die op dezelfde wijze aan. Steeds wordt begonnen met een voorbeeld waarin een algoritmisch oplossingsproces wordt gepresenteerd, gevolgd door een aantal opgaven. De didactische meerwaarde ten opzichte van het boek is, dat er in het programma meer grafieken worden aangeboden, de grafieken altijd op een passend ogenblik worden aangeboden en de leerlingen kunnen zien op welke wijze ze ontstaan.

Bekijken we de resultaten vanuit deze relatie tussen boek en programma dan zien we dat de geboden didactische meerwaarde niet voldoende is om duidelijke verschillen in effect te constateren. Het programma blijft kennelijk 'te dicht' in de buurt van het boek, opdat er sprake kan zijn van een duidelijk zichtbaar effect. Voor een verbetering in het onderwijzen van oplossingsalgoritmen van goniometrische gelijkheden en ongelijkheden is het niet voldoende om meer en eerder grafieken aan te bieden.

Daarnaast moeten we constateren dat er in het onderzoek niet gezocht is naar andere mogelijke effecten. Het is bijvoorbeeld denkbaar dat de leerlingen door de systematische presentatie van dynamische grafieken (dat wil zeggen: grafieken in wording) een ander dynamisch mentaal beeld van transformaties hebben gekregen. Ze kunnen dan in gedachten de ene grafiek in de andere zien overgaan. Dit is een theoretische mogelijkheid die direct voortvloeit uit een didactische analyse van het programma zoals het zich voordoet. Maar nogmaals: naar dit mogelijke effect is door de onderzoekers niet gezocht.

Samengevat

- in het gonio-onderzoek is geprobeerd het bestaande onderwijs in de gonio-metrie door gebruik van de computer te verbeteren;
 - daartoe zijn de resultaten op de proefwerken met elkaar vergeleken;
 - dit heeft niet tot significante verbeteringen geleid op de onderzochte gebieden.
- Het achterwege blijven van dit positieve effect laat zich verklaren uit het feit dat het computerprogramma zeer dicht aansluit bij de inhoud en didactiek van het boek en dat niet gezocht is naar andere mogelijke effecten die uit het gebruik van het programma zouden kunnen voortvloeien.

2.3 Ander onderzoek

Rondom het rekenonderwijs op de basisschool zijn diverse computerprogramma's ontwikkeld met de bedoeling de resultaten van dit onderwijs te verbeteren. Inmiddels is door diverse onderzoekers onderzocht wat het effect is van dergelijke programma's en zijn deze in effectiviteit met elkaar vergeleken.

Van Bezouw en Hoogendijk (1987) vergeleken een drill-and-practice-programma (D&P) met een programma dat naast de oefening ook hulpstrategieën aan de leerlingen aanbiedt (Pion). Er blijkt dat met het Pion-programma voor ito-leerlingen die de tafels van vermenigvuldiging slecht beheersen, na een relatief korte periode van oefenen meer vooruitgang in beheersing bereikt is dan met het D&P-programma. Dit geldt met name voor de moeilijke tafels van zes, zeven, acht en negen. Van vijf leerlingen is bekeken op welke wijze ze gebruik maken van de aangeboden steunsommen. Daarvan werd 26 procent fout opgelost en werd 21 procent niet binnen tien seconden opgelost. Dat zou betekenen dat het betere resultaat van het Pion-programma niet direct kan worden toegeschreven aan deze vorm van steun.

Willemsen (1987) vergelijkt de resultaten van twee experimentele groepen en een controlegroep met betrekking tot het automatiseren van tafels van vermenigvuldiging. Het betreft 24 moeilijk lerende kinderen die in drie groepen werden verdeeld. Bij de tweede experimentele groep was er sprake van extra feedback die aangaf in hoeverre de leerling was gevorderd met een bepaalde serie trainingsopgaven. Willemsen vindt aanzienlijke verschillen tussen beide experimentele groepen enerzijds en de controlegroep anderzijds. Doordat er echter geen verslag wordt gedaan van de activiteiten van de controlegroep, is het onmogelijk om aan te geven of deze positieve effecten ook het gevolg zijn van het gebruik van de computer.

Weges (1990) probeerde te achterhalen wat het verschil in effect is van leerling-gestuurde versus programmagestuurde software in relatie tot de wiskundige capaciteiten van leerlingen. Bij programmagestuurde software wordt de volgorde van de onderdelen volledig bepaald door het programma. Bij leerlinggestuurde programmatuur kan de leerling zelf onderdelen van het programma kiezen. De hypothese is dat zwakkere leerlingen meer baat hebben bij een programmagestuurde opzet en dat de verschillende opzetten voor betere leerlingen geen significant verschil in resultaten oplevert. Het onderzoek van Weges heeft betrekking op twee versies van een programma over vectoren voor dertig derdeklassers van een categoriale mavo. In voor- en natoetsen worden de resultaten van de vier groepen en een controlegroep met elkaar vergeleken. Weges vindt geen significante verschillen tussen de twee verschillende opzetten in relatie met de capaciteiten van de leerlingen. Zwakke leerlingen boeken evenveel vooruitgang in de ene als in de andere opzet. Hetzelfde geldt voor de betere leerlingen.

Over de gebruikte programmatuur geeft Weges weinig informatie. De indruk bestaat dat de twee programma's inhoudelijk niet zoveel van elkaar verschilden. In de leerlinggestuurde versie bepaalt de leerling zelf op welk niveau hij wil werken, wanneer en hoe vaak hij een hulpfunctie wil aanroepen, welke feedback hij noodzakelijk acht, hoeveel opgaven hij op een bepaald niveau wil oefenen, wanneer hij wil wisselen van niveau en of hij niveaus wil overslaan of niet. De opgavenverzameling is voor beide versies hetzelfde. Niet duidelijk is of de leerling binnen een opgave ook eigen initiatief kan tonen of dat er sprake is van gesloten opdrachten waarop slechts één goed antwoord mogelijk is.

2.4 Analyse-onderwijs per computer

De door David Tall ontwikkelde computerprogramma's 'Graphic Calculus' zijn ontworpen als:

'...generic organisers that could be used flexibly in a variety of ways and provide a basis for later developments in standard and non-standard analysis. Even so, their acceptance is by no means guaranteed, especially as there are elements in the approach (such as the idea of magnification) which are currently absent from the culture.' (Tall, 1986, pag. 59)

Tall geeft daarbij aan dat het gebruik van de computer mogelijkheden biedt buiten het traditionele onderwijs in de analyse. Dat betreft zowel een andere didactische aanpak ('generic organisers') als een andere inhoud (het inzoomen op een detail van een grafiek). Hij verstaat onder een 'generic organiser' een microwereld waarin de leerling voorbeelden van specifieke wiskundige begrippen of verwante systemen van begrippen kan manipuleren. De uitdrukking 'generic' betekent dat de aandacht van de leerling wordt gericht op bepaalde aspecten van de voorbeelden die de meer abstracte begrippen belichamen.

Een computerprogramma kan de uitwerking hebben van een dergelijke 'generic organiser'. Het biedt de mogelijkheid tot een dynamische en grafische weergave van wiskundige begrippen die evenwel volledig onder de controle van de gebruiker blijven. Een dergelijk programma biedt geen algemeen begrip aan, maar geeft een speciaal voorbeeld van dat begrip in actie. Doordat de aandacht van de leerling op specifieke generieke (generic) kenmerken van dat voorbeeld wordt gericht, wordt informatie verschaft die een potentiële betekenis heeft voor het kunnen abstraheren van het algemene begrip.

Als voorbeeld van een generic organiser noemt Tall het programma 'Gradient'. Door een fragment van een grafiek voldoende uit te vergroten, wordt zichtbaar dat deze lokaal benaderd wordt door een recht lijnstukje. De helling van dit lijnstukje is dan de helling van de grafiek in een bepaald punt. Daarna volgt de uitdrukking van het differentiequotiënt, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, als een formule voor de helling van het lijnstukje. De computer kan deze formule voor een willekeurige plaats van de grafiek uitrekenen en kan tegelijkertijd de raaklijn in dat punt tekenen en de helling in een nieuwe grafiek uitzetten. Door x te variëren over een waardeverzameling ontstaat een film waarin een punt over de x -as 'wandelt' en tegelijkertijd raaklijn en helling meeveranderen. Het lokale aspect van de grafiek werkt als een 'generic organiser' van waaruit zich de verdere formele begripsvorming van het begrip afgeleide kan ontwikkelen.

De meerwaarde van het gebruik van de computer zit vooral in de mogelijkheid van snelle grafische en numerieke presentaties. Een fragment van een grafiek lijkt tot willekeurige proporties te kunnen worden uitvergroot. Al na enkele stappen wordt zichtbaar of de grafiek zich in een punt lokaal door een lijnstukje laat benaderen. Uitvergroten van de grafiek van de functie $\sin(x)$ in $x = 0$ laat iedere keer zien dat de hoek aanwezig blijft. Terwijl uitvergroting van de grafiek van $\sin(\frac{1}{x})$ in één van scherpe maxima al snel een recht lijnstukje oplevert. De kracht van deze opbouw van het begrip differentieerbaarheid is, volgens Tall, dat die gelijkwaardig van toepassing is voor zowel functies met 'gladde' als 'geknikte' grafieken. De leerling leert niet alleen wat differentieerbaarheid betekent, maar ook wat niet-differentieerbaarheid is.

Bij de klassieke benadering, volgens een limietproces, leert de leerling alleen maar wat differentieerbaarheid is. Het limietproces is immers alleen maar van toepassing op functies met gladde grafieken. De voorbeelden waaraan de defini-

tie wordt gedemonstreerd zijn dan ook altijd ‘gladde’ voorbeelden. Niet-differentieerbaarheid is daarbij de ontkenning van het begrip. Uitleggen wat niet-differentieerbaar is, is dan een uitleg van de soort dat iets-wat-niet-het-geval-kan-zijn (Kempe (1990)). Het begrip ‘niet-differentieerbaar’ verwijst niet naar een positieve verificatie (dat is: laten zien dat aan een eigenschap is voldaan), maar naar een ontkenning. Hoewel dit een gebruikelijke redenering is binnen de wiskunde (vergelijk de definitie van irrationale getallen), levert deze voor leerlingen bij eerste kennismaking toch veel problemen op. Confrontatie met geknikte grafieken levert dan ook bij de klassieke aanpak, vaak allerlei ad hoc redeneringen op.

In de uitleg van Tall verwijzen zowel differentieerbaarheid als niet-differentieerbaarheid naar positieve verificaties. Het gemakkelijkst is dit in te zien als men deze woorden vervangt door de woorden ‘glad’ respectievelijk ‘geknikt’. De grafiek van een functie is in een punt glad of in een punt geknikt.

Tall heeft onderzocht wat het effect kan zijn van het gebruik van ‘Graphic calculus’ ten opzichte van onderwijs zonder computer. Aan de hand van voor- en na-toetsen is een experimentele groep vergeleken met een controle-groep. De na-toets is een uitbreiding van de voortoets. Hier zijn vragen toegevoegd over aspecten van de analyse waarvan verwacht mag worden dat ze zijn beïnvloed door het gebruik van de computer. Tall heeft de antwoorden op de open vragen geanalyseerd op de gebruikte argumenten. Daartoe heeft hij de mogelijke antwoorden verdeeld in categorieën en geturfd of er een verschil tussen de groepen bestond in de gehanteerde argumenten. De leerlingen uit de experimentele groep scoren op de volgende aspecten significant beter dan de controle-leerlingen:

- het schetsen van de afgeleide van een gegeven grafiek;
- het herkennen van een afgeleide;
- het aangeven van een niet-differentieerbare functie;
- het vaker beantwoorden van vragen die bij hen de globale ‘gestalt’ van helling oproepen;
- het vaker hanteren van dynamische antwoorden op open vragen over differentiatie vanuit grondbeginselen, de helling van een grafiek en de raaklijn aan een grafiek in een punt;
- het relateren van afgeleide aan helling en hellingfunctie.

Op meer traditionele opgaven was er geen significant verschil tussen beide groepen:

- differentiatie vanuit de definitie;
- formele differentiatie van polynomen en functies met een gebroken exponent.

Het verschil in resultaten is maar ten dele te wijten aan de computer als ‘generic organiser’. Volgens Tall is de rol van de docent, als ‘organising agent’, van doorslaggevende betekenis. In zijn experimenten komen de leerlingen zelf nauwelijks achter de computer. De docent demonstreert de ideeën klassikaal met be-

hulp van de computer. De leerlingen kunnen daarbij natuurlijk wel actief reageren op de docent en op elkaar.

Tall voorspelde dat de leerlingen uit de experimentele groep coherent en consistent zouden antwoorden op vragen over helling, afgeleide en raaklijn in een punt waar de grafiek een knik vertoont. Van de controle-leerlingen was daarentegen te verwachten dat ze inconsistente ad hoc oplossingen zouden geven. Deze hypothese van Tall wordt overtuigend bevestigd door de empirische resultaten.

2.5 Lineaire vergelijkingen en grafieken

Met het door Tall ontwikkelde computerprogramma heeft Blackett (1987) geprobeerd het onderwijs in lineaire grafieken te verbeteren. In een voortoets is bij zes groepen leerlingen geïnventariseerd wat de problemen zijn bij het interpreteren van grafieken van lineaire verbanden. Het gaat hier om vragen over de helling of de steilheid van een lijn en het bepalen van de bijpassende formule. Geconstateerd is, dat de meeste leerlingen een gebrekkig begrip hebben van de relatie tussen coördinaten van punten van de lijn en de vergelijking.

Op basis van de resultaten is, in overleg met de betrokken docenten, een viertal actiepunten opgesteld die tot een oplossing van de geconstateerde knelpunten zou moeten leiden. Dat wil zeggen dat aan het eind van het gegeven onderwijs de leerling begrijpt:

1. Wat een lineaire vergelijking is, en dat een lineaire vergelijking een verband weergeeft tussen de x - en y -coördinaten van het oneindige aantal punten waaruit de lijn is opgebouwd.
2. Wat de betekenis is van de coëfficiënt van x in de lineaire vergelijking $y = mx + c$ als weergave van de helling van de lijn en wat de betekenis is van de waarde van c in deze vergelijking als weergave van het snijpunt met de y -as.
3. Wat een helling is en wat het effect is als de schaal op de y -as, de x -as of beide wordt veranderd.
4. Hoe problemen die aanleiding geven tot lineaire vergelijkingen, kunnen worden voorgesteld door lineaire grafieken en wat het nut is van discrete of continue gebieden om speciale problemen te kunnen weergeven.

Deze doelen worden zowel door de experimentele als de controle-groepen nagestreefd. Aan het einde van de lessenserie wordt een natoets afgenomen die gelijkwaardig is met de voortoets. Bij de vergelijking van beide toetsen is natuurlijk vooral van belang, hoe de groepen onderling scoren op de knelpunten.

In het algemeen scoren de experimentele groepen significant beter dan de controlegroepen. Opvallend is vooral dat de leerlingen uit de experimentele groepen een ander begrip hebben verworven van lijngrafieken. Op de vraag: 'Hoeveel paren voldoen aan de vergelijking $y = x - 4$ ' geeft 60.7 procent van de leerlingen uit de experimentele groep een goed antwoord op de natoets, tegenover 34.2 procent van de controle-leerlingen. Op de voortoets waren die percentages 22 respectievelijk 17.3 procent.

Het onderzoek bevat nauwkeurige beschrijvingen van de gegeven computerlessen. Blackett benadrukt de andere interactie-patronen in de klas. Door de computer worden de intuïties van leerlingen direct bevestigd of weerlegd. Bovendien toont de computer geen enkele afkeur of ongenoegen als een intuïtieve reactie van een leerling niet correct blijkt te zijn. Deze autoriteit van de computer in het verstrekken van overtuigende evidenties of bewijzen - zonder te beoordelen - lijkt één van de sterke kanten te zijn. Leerlingen worden actief betrokken in het proces van vermoedens en weerleggingen.

3 Een vergelijking tussen de onderzoeken

De opzet en de resultaten van het onderzoek van Tall en Blackett zijn zeer interessant, zeker als men die vergelijkt met de overige onderzoeken.

In hun onderzoeken staat de ontwikkeling van wiskundige begrippen voorop. We zien bij beide onderzoekers een grondige didactische analyse van de wiskundige inhoud en een expliciete keuze van doelstellingen. Ze proberen daarbij een aantal specifieke mogelijkheden van de computer te benutten om tot een andere (betere) begripsvorming te komen.

Bij andere onderzoeken is er veelal sprake van een kale vergelijking van twee situaties. Er is niet naar gestreefd tot een andere wijze van begripsvorming te komen waarbij de specifieke voordelen van de computer benut worden. Men probeert de bestaande doelstellingen met de daarin gedefinieerde begrippen op een efficiëntere wijze te realiseren. Efficiënt heeft hierin de betekenis: in een kortere tijd, met minder inspanning en, waar mogelijk, met een beter resultaat. De opbrengst van een dergelijke aanpak is teleurstellend. Over het algemeen is geen duidelijk effect te constateren van het gebruik van de computer. Soms is er weliswaar een positief effect gevonden, maar dit is veelal moeilijk terug te voeren naar het gebruik van de computer.

Tall en Blackett tonen met hun onderzoek aan dat die efficiëntie wel kan worden gerealiseerd door een ander proces van betekenisverwerving op gang te brengen. Tall geeft met het idee van het lokaal uitvergroten een consistente visuele en mentale basis voor het begrip differentieerbaarheid. Dit begrip heeft daarmee een andere betekenis gekregen dan het traditionele, op basis van een limietproces van koorden of hellingen. Blackett weet het begrip lijngrafiek op een ander niveau te brengen door de mogelijkheid van het verschuiven en roteren van lijnen op het scherm. Bij de traditionele aanpak is een lijn star gekoppeld aan een vergelijking. Een lijn wordt getekend door twee puntenparen op te sporen die aan de vergelijking voldoen en vervolgens die punten te verbinden door een lijnstuk. In het programma van Blackett kunnen leerlingen de vergelijkingen veranderen en zien wat de gevolgen zijn voor de bijbehorende lijn. De leerling krijgt daarmee de beheersing over de wereld van lijnen in het platte vlak via de parameters van de vergelijking. Een lijn is niet langer een starre verzameling punten, het is ook een object dat gemanipuleerd kan worden met behulp van de vergelijking. In deze betekenis blijft de relatie tussen visuele en analytische voorstelling intact.

4 Het uitleggen van algebraïsche algoritmen

In de besproken onderzoeken op het terrein van het reken- en gonio-onderwijs was sprake van een poging tot verbetering van algoritmische vaardigheden van leerlingen. Die verbetering werd vooral gezocht in het aanbieden van een betere visuele ondersteuning en van de mogelijkheid tot hulp via het toetsenbord. Deze aanvulling op de traditionele aanpak leidde niet significant tot de gewenste verbeteringen. Uit de onderzoeken van Tall en Blackett kunnen we afleiden dat voor een dergelijke verbetering een andere begripsmatige doordenking vereist is.

Wat zijn nu de consequenties van een dergelijke doordenking voor het aanleren van algoritmen?

Een algoritme is een reeks van voorgeschreven handelingen die tot een gewenst einddoel leiden. Een uitleg van een algoritme is een uitleg hoe-je-iets-moet-doen. Een dergelijke uitleg leidt gemakkelijk tot imitatie-leren. De docent doet voor, de leerling volgt. Het gevaar bestaat dat de leerling wordt opgescheept met een handeling die niet echt is eigen gemaakt. Dat heeft tot gevolg dat de handeling niet kan worden geïntegreerd binnen een breder scala van handelingen. De handeling kan alleen worden uitgevoerd als deze door een specifieke opdracht in gang wordt gezet.

Voor een adequaat functioneren van een algoritme binnen uiteenlopende situaties in de wiskunde is het nodig, dat er transfer kan optreden van de toepassing van het algoritme naar nieuwe situaties. Een mogelijkheid daartoe is het aanbieden van deze verschillende situaties na het aanleren van het algoritme. Er kan dan een proces van veralgemenisering optreden, van het specifieke probleem naar een grotere klasse van problemen, die met het algoritme opgelost kunnen worden. Over het algemeen zijn de ervaringen met deze aanpak zeer negatief. Slechts enkele leerlingen kunnen deze generaliserende stap maken.

Geleidelijk aan groeit het besef dat naast het aanbieden van het kale algoritme ook het aanbieden van een set van *heuristische* regels van belang is. Daarmee kan een leerling onderzoeken of het algoritme van toepassing is op een gesteld probleem. Bij het uitleggen van kwadraat-afsplitsen bijvoorbeeld, wordt dan ook vermeld in welke situaties het kwadraat-afsplitsen een geschikt algoritme is. Deze algemene heuristische regels hebben het karakter van een doel-middel analyse (Van Streun (1989)). Deze regels kunnen een brug slaan van de aangeleerde naar nieuwe situaties en kunnen daarmee de gewenste transfer bewerkstelligen. Daarnaast lijkt het voor een actieve beheersing van algoritmen noodzakelijk, dat er tijdens het leerproces voldoende ruimte is voor *eigen constructies* van leerlingen.

Uit onderzoek naar effecten van realistisch rekenonderwijs blijkt dat veel leerlingen reken-algoritmen op een persoonlijke manier met succes hebben geïnterpreteerd. Ze lijken daarmee een actievere beheersing te hebben verkregen over het algoritme.

In de uitleg van een wiskundig algoritme spelen dus drie zaken een belangrijke rol: de *handeling zelf*, de *heuristische regels* en de *ruimte voor de eigen constructies*. Welke rol kan een computer spelen binnen deze opvatting van het onderwijzen van wiskundige algoritmen?

In het rekenonderwijs beperken de meeste drill-and-practice programma's zich tot het verifiëren van feitenkennis van tafels van vermenigvuldiging. Ze komen aan het algoritme van vermenigvuldiging niet toe.

Een uitzondering hierop vormt het programma 'Wereld rond tafels' (Klep, 1987). Daarin kan een leerling zijn eigen hulp kiezen uit een ruim aanbod van mogelijkheden. Op deze wijze is het denkbaar dat een leerling tot een eigen constructie komt voor het uitrekenen van moeilijke vermenigvuldigingen. Het is niet bekend of dit tot een positief effect leidt.

Voor het voortgezet onderwijs is een remediërend programma 'Breuken' (1988) ontwikkeld. Hierin worden algoritmen voor het rekenen met breuken aangeboden. Het programma bevat uitleg van de handelingen die visueel wordt ondersteund door het verdelen van rechthoeken en het werken op de getallenlijn. De uitleg heeft typisch het karakter van een uitleg hoe-je-iets-moet-doen. De meerwaarde van de computer zit vooral in de mogelijkheid dat de leerlingen het programma zelfstandig kunnen doorwerken. De computer geeft directe en zakelijke terugkoppeling over de resultaten. Een leerling kan op deze manier proberen zijn persoonlijke achterstand weg te werken. Begripsmatig levert het programma geen meerwaarde.

Het Logo-onderzoek van De Corte e.a. (1990) richtte zich expliciet op de heuristische transfer naar het rekenonderwijs. Uit de analyse (§ 2) bleek dat die transfer waarschijnlijk niet tot stand kwam door het ontbreken van een inhoudelijke overeenstemming tussen de Logo - en de rekensituatie.

De vraag naar de rol van de computer - en met name de te leveren meerwaarde bij het rekenonderwijs - lijkt hiermee niet erg veelbelovend.

5 Derive en het aanleren van algebraïsche vaardigheden

Het programma Derive (1989) is een computeralgebrasysteem dat gebruikt kan worden op MS-DOS machines die in het voortgezet onderwijs voorhanden zijn. Daarmee krijgen leerlingen en docenten de beschikking over een machinale bewerking van formules. Derive is in staat om formeel te rekenen: vergelijkingen oplossen, substitueren, ontbinden in factoren, haakjes verdrijven, differentiëren, integreren, enzovoort. Derive kan alle formele algebraïsche algoritmen van het voortgezet onderwijs uitvoeren.

Waarom zouden we leerlingen nog lastigvallen met het aanleren van deze algoritmen? Kunnen we ze niet veel beter leren omgaan met een pakket als Derive? Soortgelijke vragen zijn gesteld bij de introductie van de zakrekenmachine. Ook hier gaat het om het leren beheersen van een aantal standaardalgoritmen die door een apparaat snel en feilloos kunnen worden uitgevoerd. Hoewel de zakrekenma-

chine niet expliciet in de onderwijsprogramma's is opgenomen en de aanwezigheid in de klas zelfs door menig docent in het voortgezet onderwijs wordt verboden, kunnen we stellen dat de zakrekenmachine haar eigen weg heeft gevonden in het onderwijs. Bijna iedere leerling beschikt vanaf het tweede leerjaar in het voortgezet onderwijs over een zakrekenmachine en gebruikt deze waar het hem of haar het beste uitkomt. Als de leerlingen de zakrekenmachine gaan gebruiken, beschikken ze meestal al over een voldoende begrip van de basisalgoritmen. Ze weten wat optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen betekent. De kennis van regels en feiten schiet soms tekort, maar er is een fundamenteel begrip van de basisvaardigheden vooraf aanwezig. Vanuit die basiskennis kunnen ze min of meer succesvol de zakrekenmachine hanteren. Deze functioneert dan vooral in die situaties waarin de kennis van de feiten en de regels het bij de leerling af laat weten of waarin er behoefte is om veel, snel en nauwkeurig te rekenen.

Voor Derive is eenzelfde gang van zaken denkbaar. Het pakket kan zijn eigen weg vinden binnen het onderwijs. Maar dat zal dan vooral in het hoger onderwijs zijn. Daar immers beschikken de studenten over voldoende basiskennis om met het pakket te kunnen omgaan en is de noodzaak aanwezig van formele algebraïsche manipulaties.

Voor het voortgezet onderwijs is de vraag van belang of Derive een rol zou kunnen spelen bij het aanvankelijk algebra-onderwijs. Daar gaat het om het verwerven van basis-begrippen en -vaardigheden van de algebra. Wat is een vergelijking? Wat moet je je voorstellen bij het oplossen van een vergelijking? Wat stelt een letter voor in een formule? Wat is haakjes wegwerken, in factoren ontbinden, substitueren? Het zijn allemaal basis-begrippen en -vaardigheden waar Derive moeiteloos mee omgaat en waarvan de leerlingen nog nauwelijks gehoord hebben. Bij het verwerven van deze elementaire basiskennis zou een computer-algebra-systeem in principe een rol kunnen spelen, zoals blijkt uit het volgende voorbeeld:

*Van een rechthoek is de lengte 1 groter dan de breedte.
De oppervlakte is 30. Bepaal de lengte en de breedte.*

In Derive kan de volgende formule worden ingevoerd:

$$\text{Oppervlakte} = \text{lengte} \times \text{breedte}.$$

Voor 'lengte' kan 'breedte + 1' worden ingevuld. Daarmee ontstaat de formule:

$$\text{Oppervlakte} = (\text{breedte} + 1) \times \text{breedte}.$$

Vervolgens wordt voor 'Oppervlakte' de waarde 30 gekozen. De vergelijking

$$30 = (\text{breedte} + 1) \times \text{breedte}$$

wordt dan met 'SoLve' opgelost en de beide oplossingen worden geïnterpreteerd. (Helaas vraagt deze aanpak nogal wat knoppenacrobatiek binnen de huidige opzet van Derive. Waarschijnlijk wordt daarmee het voorgestelde voorbeeld praktisch onuitvoerbaar.)

Een dergelijke opzet zou een brugklasleerling een eerste idee kunnen geven van wat een vergelijking eigenlijk is en wat de oplossing van een dergelijke vergelijking is, zonder dat hij of zij weet hoe je de oplossing bepaalt.

Het voordeel van deze introductie van vergelijkingen en oplossingen is, dat de leerlingen een globaal begrip kunnen opbouwen vóórdat ze met procedures voor het oplossingsproces worden geconfronteerd. Er vindt een duidelijke scheiding plaats tussen declaratieve en procedurele kennis. Vanuit een vollediger begrip van vergelijkingen zou vervolgens gewerkt kunnen worden aan het oplossen van vergelijkingen. In de traditionele aanpak wordt in het algemeen zeer snel met het oplossen begonnen. Het risico bestaat dan, dat de truc van het oplossen zo dominant is, dat een goed zicht op fundamentele begrippen verloren gaat.

Bij het leren van algoritmen zijn drie elementen genoemd: de handeling zelf, de heuristische regels en de ruimte voor eigen constructies. Uit het voorbeeld blijkt dat Derive bij het aanvankelijk algebra-onderwijs een rol kan spelen bij het verwerven van kennis van feiten en regels. Dat is dan niet de algoritmische handeling zelf, maar wel de achtergrondkennis waarbinnen die handeling plaats kan vinden. Derive kan daarbij een rol spelen bij het verschaffen van een volledige oriënteringsbasis.

6 Derive en het uitrekenen van integralen

Dat Derive ook bij het verwerven van heuristische elementen van belang kan zijn, mag blijken uit de volgende ervaringen bij een werkcollege analyse van eerstejaars studenten wiskunde en informatica aan de universiteit.

Als afsluiting van een serie werkcolleges wordt een vrijblijvende demonstratie gegeven van de mogelijkheden van Derive voor het integreren. In de voorgaande werkcolleges hebben studenten zich beziggehouden met het integreren van functies door middel van breuksplitsing. Ze hebben al uitgebreid geoefend met partiële integratie en integratie door middel van een geschikte substitutie. De bewering is: 'alles wat jullie nu geleerd hebben, kan Derive ook.'

Aan de orde is de opgave:

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1}$$

Een strategie ligt niet direct voor de hand. Ontbinden lijkt op het eerste gezicht onmogelijk. Substitutie lijkt problematisch vanwege de vierde graad in x .

Derive geeft een zeer ingewikkeld antwoord dat doet denken aan een procedure met een breuksplitsing. Hoe komt Derive daaraan? Kun je $x^4 + 1$ soms toch ontbinden? Ja, schrijf het maar als: $x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2$, dat is weer gelijk aan $(x^2 + 1)^2 - 2x^2$ en dat is te zien als het verschil tussen twee kwadraten en dus te ontbinden in: $(x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x)$.

Dit blijkt de sleutel tot het antwoord. Verder rekenen hoeft niet, de studenten zien nu hoe de oplossing in elkaar zit en zouden dat zelf kunnen uitvoeren.

De volgende som is:

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx$$

Standaard is hier de substitutie: $x = \tan(t)$. Herkenning van deze substitutie leidt tot een berekening 'met de hand'. Bij stug doorwerken, zonder rekenfouten en een tweede substitutie, komen de studenten op de integraal:

$$\int \frac{du}{(1 - u^2)^2}$$

Deze kan weer met breuksplitsing worden aangepakt. Op dit punt geloven de meeste studenten het wel. Het probleem is in principe opgelost, maar de weg is lang en ingewikkeld. Zou Derive het ook zo moeilijk doen?

Derive geeft een oplossing met de volgende term als onderdeel:

$$\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 1}$$

Hoe komt Derive daaraan? Partiële integratie misschien? Proberen!

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = x \sqrt{x^2 + 1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

Echt veel mooier wordt het er niet van, maar de gewenste term is in ieder geval aanwezig. Door de volgende stap krijg je de oorspronkelijke integraal weer terug:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

De eerste integraal van dit tweetal is de oorspronkelijke integraal. Maar met een min-teken ervoor. Die kun je dan naar links brengen. Door in de laatste stap alles door twee te delen los je dat weer op. Dat verklaart dan ook de factor $\frac{1}{2}$ in het antwoord. De laatste integraal is een 'standaardintegraal' met:

$$\ln \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right)$$

in het antwoord. En dat antwoord geeft Derive ook. Zou Derive ook met standaardintegralen werken? Duidelijk is hier dat de methode van oplossen belangrijker is dan de oplossing zelf. De studenten worden door Derive uitgedaagd om het handiger en sneller te doen. De techniek is daarna een gevolg van de gekozen oplossingsmethode. Een aanvankelijke trial-and-error methode, wordt al snel vervangen door een betere keuze op basis van een analyse van de opgave en de door Derive gevonden uitkomst. Op deze manier worden de accenten anders ge-

legd dan tot nu gebruikelijk was bij het leren integreren. In de handmatige aanpak is één oplossing voldoende, is de gekozen methode zelden de uitkomst van een weloverwogen keuze en speelt de rekentechniek een overheersende rol. Een aanpak met Derive legt het accent vooral op een handige keuze van de methode en op de manier waarop je die uit de situatie kunt afleiden. De techniek is ondergeschikt geworden.

Kijken we bij dit voorbeeld terug naar de drie elementen uit de vorige paragraaf waaraan het leren van een algoritme dient te voldoen (kennis van feiten en regels, heuristische regels, mogelijkheid tot eigen constructies) dan constateren we dat Derive een feilloze kennis bezit van feiten en regels maar volledig in gebreke blijft voor wat de resterende twee elementen betreft. Gebruik van Derive bij het algebra-onderwijs zal dus altijd voldoende aanvullingen vereisen voor die andere twee elementen. Aan de andere kant maakt de feilloze kennis van Derive ook een vanzelfsprekende scheiding tussen die elementen. De benodigde aandacht kan mede daardoor nadrukkelijk worden besteed aan heuristische methoden en eigen constructies. Een student/leerling hoeft zich over de formele techniek geen zorgen te maken en kan al zijn/haar aandacht richten op de manier waarop een probleem wordt aangepakt.

Het moet mogelijk zijn om op deze manier andere doelen in het 'leren-integreren-onderwijs' te realiseren dan tot nu toe gebruikelijk was. Vanuit een basisvaardigheid aan formele rekentechnieken, kan een student een beter idee krijgen van de manier waarop je een oplossingsmethode kunt vinden. Misschien gaat dit uiteindelijk ten koste van enige rekenvaardigheid, maar dat wordt gecompenseerd door Derive zelf. Dit zou de meerwaarde van Derive kunnen zijn in de ontwikkeling van het algoritmisch werken bij het oplossen van integralen.

Een dergelijke voorspelling kan getoetst worden door het aanbieden van een royaal aantal verschillende integralen waarbij gevraagd wordt om bij iedere integraal één of meer oplossingsmethoden aan te geven en bij iedere methode te vermelden waarom daarvoor is gekozen. In de beoordeling kan dan aan iedere goede methode punten worden toegekend. In vergelijking met een controlegroep zou de Derive-groep hierop beter moeten scoren. Het is de moeite van het proberen en onderzoeken waard.

7 Tot slot

Uit de literatuurstudie in paragraaf 2 blijken opvallende verschillen te bestaan in effect-onderzoek van computergebruik. Aan de ene kant is er onderzoek gedaan naar situaties waarin men probeert het bestaande onderwijs efficiënter te laten verlopen. Aan de andere kant is er onderzoek naar situaties waarin men probeert een betere begripsvorming na te streven vanuit een begripsmatige analyse van de mogelijkheden van een computerprogramma. In dat laatste geval blijkt er een overtuigend positief effect van het computergebruik op te treden. De conclusie lijkt gerechtvaardigd dat een verbetering van het onderwijs met behulp van de computer, alleen maar gerealiseerd kan worden als in dat onderwijs heel zorg-

vuldig gebruik wordt gemaakt van de begripsmatige meerwaarde die het computerprogramma biedt.

Naar analogie van de succesvolle onderzoeken van Tall en Blackett, is vanuit een didactische doordenking van het aanleren van algoritmen, voor Derive nagegaan wat die meerwaarde van het pakket kan zijn voor de algebraïsche vaardigheden. In het bijzonder zijn twee opgaven geanalyseerd uit een werkcollege analyse voor eerstejaars studenten wiskunde en informatica.

De verwachting is dat de meerwaarde in die situatie vooral tot uiting komt in het beter kunnen kiezen van de geschikte oplossingsmethode. Onderzoek naar de effecten van Derive zou zich op dit aspect kunnen richten.

Literatuur

- Bezouw, J. van en K. Hoogendijk: 'Het Pion-programma bekeken, en vergeleken met een Drill-and-practice Programma', in: Beishuizen, M. en D. de Jong: *Rekenonderwijs en computer*, Swets & Zeitlinger, Lisse 1987.
- Blackett, N.: *Computer Graphics and Children's Understanding of Linear and Locally Linear Graphs*, The University of Warwick, Warwick 1987.
- Breuker, Educaboek, Culemborg 1988.
- Corte, E. de, L. Verschaffel, H. Schrooten, R. Indemans en E. Hoedemaekers: *Logo als springplank voor het verwerven van denkvaardigheden bij zesdeklassers*, Acco, Leuven/Amersfoort 1990.
- Derive, Soft Warehouse, Hawaii 1989.
- Doove, F.M.W., W.H.H. van der Maaten, J.N. Schilder en K.J.L. Rogier: *Sigma 4AB*, Wolters-Noordhoff, Groningen 1984.
- Handleiding Software-pakket Goniometrie, Faculteit Technische Wiskunde en Informatica, TU Delft.
- Jochems, W.M.G., C.A.P.G. van der Mast, H.J. Smid, J. Vastenhout en A. Verweij: *De sinus- en cosinusfunctie voor 4-vwo; een verkenning van mogelijke knelpunten*, rapport 87-72, Faculteit Technische Wiskunde en Informatica, TU Delft, 1987a.
- Jochems, W.M.G., C.A.P.G. van der Mast, H.J. Smid, J. Vastenhout, G. Verveld, A. Verweij en F.R. van der Vlugt: *Ontwerp en ontwikkeling van courseware voor goniometrie*, rapport 87-73, Faculteit Technische Wiskunde en Informatica, TU Delft, 1987b.
- Kok, D en M. Pranger: 'Zoek het functievoorschrift met de computer, *Euclides* 63 (1987), 102-107.
- Kok, D.: 'Functies en Grafieken', in: *Lesgeven met de computer*, Modulereeks Wiskunde, NIB, Zeist 1989.
- Klep, J.: *Een wereld rond tafels*, NIB, Zeist 1987.
- Papert, S.: *Mindstorms*, The Harvester Press, Sussex 1980.
- Kemme, S.L.: *Uitleggen van wiskunde*, Groningen/Utrecht 1990 (dissertatie).
- Smid, H.J., J. Vastenhout en A. Verweij: *Uitvoering en evaluatie van C.O.O. bij goniometrie*, rapport 89-79, Faculteit Technische Wiskunde en Informatica, TU Delft, 1989.
- Streun, A. van: *Heuristisch wiskundeonderwijs*, Groningen 1989 (dissertatie).
- Tall, D.: *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using Interactive Computer Graphics*, The University of Warwick, Warwick 1986.
- Weges, H.G.: *Effecten van sturing en capaciteit binnen een COO-programma 'vectoren'*, Stageverslag Vakgroep Onderwijskunde, Rijksuniversiteit Groningen, Groningen 1990.
- Willemsen, R.J.G.: 'Onderzoek naar feedbackvormen bij een programma gericht op automatiseren', in: Beishuizen, M. en D. de Jong: *Rekenonderwijs en computer*, Swets & Zeitlinger, Lisse 1987.

Wat hebben leerlingen aan realistisch wiskundeonderwijs?

Lambrecht Spijkerboer

1 Inleiding

Aan de hand van enkele voorbeelden van het functioneren van contexten uit de dagelijkse lespraktijk kom ik tot het stellen van een aantal vragen. Ik zal me hoofdzakelijk richten op de bijdrage, die contextrijk wiskundeonderwijs aan het bevorderen van probleemoplossend gedrag kan leveren. Bij deze voorbeelden richt ik me dan ook in eerste instantie op de leerlingen, die geconfronteerd worden met buiten-wiskundige contexten. Het betreft leerlingen, die niet uit zijn op het adequaat en intentioneel (dat is met inzicht) oplossen van problemen (Van Dormolen, 1981), maar gewoon uit zijn op een voldoende voor wiskunde op hun rapport. Leerlingen, die de verhaaltjes om de wiskundige kernen heen eerder lastig dan leuk vinden en liever direct een pasklare oplossing krijgen voorgeschoteld dan zelf alles maar te moeten uitzoeken.

De leerlingen, waar ik het over heb zitten (bijna allemaal) op de F. Kalsbeek-scholengemeenschap in Woerden, een grote mavo-havo-vwo scholengemeenschap (1350 leerlingen) met een heterogene brugperiode. Sinds 1987 wordt van onderaf de methode 'Moderne Wiskunde' ingevoerd. Deze heeft in de onderbouw 'Denken, Doen en Begrijpen' (DDB) verdreven en verdrijft nu in de bovenbouw 'Getal en Ruimte' (wiskunde-B) en de Hewet-boekjes (wiskunde-A). Als ik in deze bijdrage spreek over 'mijn ervaringen met leerlingen', zullen dat meestal ervaringen met wiskunde-A leerlingen betreffen, die in de onderbouw DDB hebben gehad, in 4-vwo 'Getal en Ruimte' en daarna Hewet-boekjes.

2 Contexten

Voor leerlingen is de meest opvallende verandering in het nieuwe wiskundeonderwijs (dat hen te wachten staat) het werken met contexten. Het is een uiterlijk kenmerk, maar dat is het wat de leerlingen zien. Andere doelstellingen, andere inhouden en vaardigheden vallen veel minder op. Aangezien ik het over de leerlingen heb, wil ik vanuit het werken met contexten kijken naar de mogelijkheden voor het leren van probleemoplossen.

Als ik het woord context gebruik, bedoel ik situatiebeschrijvingen uit de voorstelbare ervarings-, belevings- of fantasiewereld van de leerlingen. De vragen, die aan de hand van zo'n situatiebeschrijving worden gesteld nodigen uit of leiden tot een wiskundige activiteit (Dolmans e.a., 1984).

Een situatiebeschrijving kan geschieden door tekst, foto's, modellen, (video)film en dergelijke (zie ook de bijdrage van Roodhardt).

Een wiskundige activiteit kan zijn: het oplossen van een eerstegraads vergelij-

king, het tekenen van een grafiek, maar ook het opstellen van een vergelijking vanuit de gegevens of het maken van een formule met zelfgekozen variabelen. Kortom, ook het vertalen van de situatiebeschrijving naar een situatie, waarbij met wiskundige middelen naar een oplossing kan worden gezocht, reken ik tot een wiskundige activiteit.

Contexten kunnen op drie verschillende manieren worden aangeboden:

- Vooraf, om als *bron* voor het ontwikkelen van wiskundige concepten te dienen. Men spreekt dan van instapproblemen.
- Achteraf, om *toepassings*mogelijkheden voor wiskundige concepten te bieden.
- Voortdurend, om een *model* te bieden voor het sturen van de ontwikkeling van een goed cognitief schema.

De wijze, waarop de context aan de leerling wordt aangeboden hangt natuurlijk sterk af van de functie, die de context vervult in de leerstof. Dat kunnen er verschillende zijn, te weten (De Lange, 1987):

- a. Vorming van concepten vanuit een natuurlijke vraagstelling (motivatieverhogend).
- b. Modelvorming (leren op basis van inzicht).
- c. Toepassing (wiskunde dient ergens voor, is nuttig).
- d. Oefening (een veelheid van oefensituaties, waarin wiskunde gebruikt kan worden, verhoogt de vaardigheden).

3 In de praktijk

In het onderstaande wil ik nagaan hoe contexten met de hierboven genoemde verschillende functies (a tot en met d) in de klas functioneren. Gaandeweg zal dan aandacht besteed worden aan de rol die algoritmen spelen bij het bevorderen van probleemoplossend gedrag.

3.1 Wiskunde in verband met de realiteit

Als leraar wil ik graag van de vraag af: 'Waar heb je dat nou voor nodig?'. Ik dacht dit te kunnen bereiken door veel contexten te gebruiken en te werken met een vraagstelling, die zich als het ware vanuit de context opdringt, waardoor de motivatie voor het vak min of meer automatisch wordt verhoogd. Veel leerlingen zien dat anders, ze blijven komen met: 'Waar heb ik dat nou voor nodig?' Bijvoorbeeld als je met goniometrie bezig bent en het wordt een beetje moeilijker. Als je dan werkt met een opgave, waarbij de hoogte van een kerktoeren met behulp van wat goniometrie is te bepalen, levert dat al gauw de opmerking op: 'Maar ik ga nooit de hoogte van een kerktoeren bepalen!' In feite treedt hier een verschuiving op van een heel algemene doelstellingsvraag naar een nuttigheidsvraag ten aanzien van een concrete activiteit.

Vroeger heb ik de nuttigheidsvraag wel beantwoord met zoiets als 'Het leren van merkwaardige produkten in de tweede klas is belangrijk, omdat je dat in de loop

van je opleiding op verschillende plaatsen nodig zult hebben'. Hoewel dergelijke argumenten natuurlijk nog steeds gelden, heb ik die niet meer zo vaak nodig, omdat leerlingen bij het gebruik van contexten duidelijk zien dat er situaties of beroepen zijn, waarbij mensen nuttig gebruik kunnen maken van wiskundige technieken (punt c). De nuttigheidsvraag komt gewoon niet meer zo vaak naar voren. De acceptatie van het vak wordt door het werken met contexten verhoogd. Dat wiskunde nuttig is, is eigenlijk wel duidelijk, maar 'Waarom moet *ik* dat leren?' vraagt de leerling zich nog wel af (punt a).

3.2 De context als model

De modelvormende functie van een context levert een didactisch argument voor het gebruik van contexten. Er wordt daarbij vanuit gegaan, dat leerlingen door de aangeboden modelvormende contexten een goed cognitief schema ontwikkelen. Modellen leveren als het ware de basis, waar de leerlingen op terug kunnen vallen als zij het spoor even bijster zijn. Er wordt daardoor beoogd, dat een leerling meer op basis van inzicht leert en minder trucmatig.

Als de context de functie van modelvorming vervult, dan ligt hier voor leerlingen en hun leraren de grootste bijdrage van contexten aan de verbetering van hun onderwijs!

Een voorbeeld van zo'n modelvormende context wil ik nu nader bekijken en dan met name letten op de rol, die het algoritme daarin speelt.

In bijlage 1 staan enkele bladzijden uit het Hewet-boekje 'Groei' (6-vwo) (Kindt en De Lange, 1986b).

Er wordt begonnen met: Logaritme is een *tijd*. Immers ${}^2\log 10$ is het tijdstip (de tijd vanaf $t = 0$), waarop er 10 m^2 planten zijn gevormd, bij een groeifactor 2 (en beginnend met 1 m^2). Na wat opgaven wordt de context als model gebruikt: ${}^2\log 4 + {}^2\log 5 = {}^2\log 20$ wordt duidelijk vanuit het idee dat ${}^2\log 4$ de tijd is, die nodig is om een verviervoudiging te krijgen bij een proces, dat zich per tijdseenheid verdubbelt en dat ${}^2\log 5$ de tijd is, nodig voor een vervijfvoudiging. Dan is het logisch dat, als je eerst wacht totdat het geheel zich heeft verviervoudigd en daarna nog wacht totdat het geheel zich heeft vervijfvoudigd, het aantal dan twintig maal zoveel geworden is, hetgeen de betekenis is van ${}^2\log 20$.

Het wordt al moeilijker als $g^{{}^8\log a}$ moet worden verklaard, maar het kan nog. Leerlingen willen al bijna niet meer mee, want het begint een notatiespelletje te worden: ${}^2\log 7$ is de tijd nodig voor een verzevenvoudiging bij een groeifactor van 2, dus de oplossing van de vraag, voor welke x geldt $2^x = 7$.

Daarom is $2^{{}^2\log 7} = 7$ (!)

Dan volgt:

$${}^p\log g \cdot {}^8\log a = {}^p\log a \quad \text{of} \quad {}^8\log a = \frac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$$

Som 71 wil nog een uitleg bieden, maar van het model 'logaritme is een tijd' is ineens niets meer terug te vinden. Wat moet ik mij immers voorstellen bij $tijd \times tijd = tijd$? Toch maken mijn leerlingen hier geen problemen over, want het regeltje helpt hen verder. Daarop zijn veel leerlingen als het ware gefixeerd.

Welk beeld houden de leerlingen na zo'n stukje over van hun eigen kunnen met betrekking tot probleemoplossen?

Aanvankelijk is logaritme een tijd. Als het moeilijker wordt (met $g^{\log a} = a$), dan wordt teruggegrepen op het tijd-model. De leerlingen wordt de ervaring aangereikt, dat je met het begrip tijd er wel uit kunt komen. Even later echter, moet het ineens met die venijnige 'als-dan' redeneringen.

Som 71 lijkt uitleg te geven; het boek wil zoiets als in figuur 1 te zien is.

$$\begin{array}{lcl}
 {}^{10}\log 2 = x \Rightarrow 10^x = 2 & & \\
 {}^2\log 3 = y \Rightarrow 2^y = 3 & \left. \vphantom{\begin{array}{l} {}^{10}\log 2 = x \\ {}^2\log 3 = y \end{array}} \right\} & (10^x)^y = 2^y = 3 \Leftrightarrow \\
 {}^{10}\log 3 = z \Rightarrow & & 10^{xy} = 3 \\
 & & 10^z = 3 \left. \vphantom{10^z = 3} \right\} 10^{xy} = 10^z \Rightarrow \\
 & & xy = z \Leftrightarrow \\
 & & {}^{10}\log 2 \cdot {}^2\log 3 = {}^{10}\log 3
 \end{array}$$

Figuur 1: Oplossing volgens het boek

Dus de aanvankelijke aanpak van het teruggrijpen op het tijd-model leidt soms tot iets, soms tot niets. Is het dan verwonderlijk, dat mijn leerlingen liever de regeltjes leren als blijkt dat het daar, na een aardig verhaaltje, toch op neer komt? Vertrouwen in hun eigen manier van problemen oplossen krijgen ze zo niet, wel in de 'regeltjes'.

Op deze manier wordt niet gewerkt aan het leren adequaat te handelen, immers van een betrouwbare oplossingsstrategie is nu geen sprake. Intentioneel handelen? Kan het de leerlingen uitgelegd worden *waarom* zij bij de overgang van som 70 naar som 71 van model moeten veranderen, zodat ze gaandeweg dat soort stappen zelf zullen kunnen maken? Zo ja, dan hadden de leerlingen toch moeten (leren) zien dat ${}^2\log 4 + {}^2\log 5 = {}^2\log 20$ óók kan volgens een andere manier (figuur 2).

Dit had een betrouwbare oplossingsstrategie kunnen opleveren, maar nee ik heb - het boek volgend - bij deze regel liever gebruik gemaakt van de zo mooie modelvormende waarde van de context.

Had ik dan niet vanuit leerpsychologische motieven moeten kiezen voor een werkwijze, die tot het eind toe bruikbaar blijft? Een algoritme, zo u wilt? Of heeft het ontwikkelen van het inzicht, dat zo'n model zijn beperkingen heeft, z'n waar-

de? Is dat misschien bij het onderwijzen van heuristieken het geval (Van Streun, 1989)? In ieder geval hebben leerlingen dan liever een (wellicht ondoorzichtig) algoritme.

Het bovenstaande is een voorbeeld van een modelvormende context, waarbij de leerlingen geen problemen maken als hen plotseling een algoritme (trucje) wordt geboden. Het helpt hen immers verder bij de veelheid van opgaven, die erna nog volgen. Het trucje wordt met beide handen aangegrepen.

$$\begin{array}{rcl}
 {}^2\log 4 = x & \Rightarrow & 2^x = 4 \\
 {}^2\log 5 = y & \Rightarrow & 2^y = 5 \\
 {}^2\log 20 = z & \Rightarrow &
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2^x = 4 \\ 2^y = 5 \end{array}} \right\} 2^x \cdot 2^y = 4 \cdot 5 = 20 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcl}
 2^{xy} = 20 & & \\
 2^z = 20 & &
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2^{xy} = 20 \\ 2^z = 20 \end{array}} \right\} 2^{x+y} = 2^z \Rightarrow$$

$$x + y = z \quad \Leftrightarrow$$

$${}^2\log 4 \cdot {}^2\log 5 = {}^2\log 20$$

Figuur 2: Andere oplossingsmethode

3.3 Oefening baart kunst?

In het volgende voorbeeld van een context met een oefenfunctie, speelt het algoritme een heel andere rol, dan in het voorgaande voorbeeld.

Laten we eens kijken hoe Lize, mijn bijlesleerlinge, ermee uit de voeten kan.

Lize werkt met 'Getal en Ruimte' (2hv1). Ze heeft morgen een proefwerk over het oplossen van eerstegraads vergelijkingen. Het (kale) algoritme is erin gestampt en ze doet haar leraar na. Hoewel ze nogal wat vergissingen maakt, beheerst ze het algoritme redelijk.

(L = Lize, l = leraar)

$$\begin{array}{rcl}
 \text{L: (schrijft)} & 5x + 7 & = 3x - 5 \\
 & 5x - 3x & = -7 - 5 \\
 & \frac{2x}{2} & = \frac{-12}{2} \\
 & x & = -6
 \end{array}$$

(3x en 7 wisselen van plaats!)
(de 2-en worden er later onder gezet)

l : Wat is de betekenis van die -6?

L: ?????

l : Wat hebben we nu berekend?

L: De som is nu klaar, we hebben x uitgerekend.

l : Wat is er zo speciaal aan deze x?
Kun je ook bekijken of deze x goed is?

L: ??????

l : Kijk, je kunt jezelf controleren,
want vul voor x maar eens -6 in.

(ik neem nu het heft in
handen om houvast te bieden)

L: (hardop) 30 eh $-30 + 7$ is -23 en
 3 keer 6 is 18 dus $-18 - 5$
is... -13 .

(de rekenfoutjes komen altijd
op een lastig moment)

l : Hoeveel is $-18 - 5$? Denk maar aan
de getallenlijn.

L: O ja, -23 .

l : Zie je wel, als je voor x -6 neemt
komt er links en rechts hetzelfde uit.
Je hebt nu dus een getal gevonden
dat voor x genomen kan worden,
zodat er links en rechts hetzelfde
uitkomt.
Dat heb je dus uitgerekend!

L: Kun je jezelf zo altijd controleren?

l : Ja.

Nu doen we nog zo'n som als deze:

Chantal heeft f25,-- en krijgt per week f 5,-- zakgeld.

Natascha heeft f 15,-- en krijgt per week f 7,-- zakgeld.

*Als Chantal en Natascha niets uitgeven, na hoeveel weken
hebben ze dan evenveel geld?*

Dit soort context-opgaven komen in 'Getal en Ruimte' aan het eind van het hoofdstuk vaker voor. Het is niet zo'n rijke context en van modelvorming is ook geen sprake, maar de opgave heeft meer een toepassingsfunctie. Het vertalen van de werkelijkheid naar een wiskundige vraagstelling (mathematiseren) zit er wel in. De Lange noemt dit een context van de tweede soort, in tegenstelling tot de context over de groei van waterplanten, die hij dan een context van de derde soort noemt (De Lange, 1979).

Ik help Lize met het opstellen van een vergelijking.

l : Hoeveel geld heeft Chantal op
dit moment?

L: f 25,--

l : Goed, en na 1 week?

L: f 30,--

l : Hoe kom je daar aan?

L: f 25,-- + f 5,--

(hier rekent ze vanuit de
startsituatie met f 25,--)

l : Ja, na een week heeft ze er
f 5,-- zakgeld bijgekregen, hè?

L: Ja.

l : Hoeveel geld heeft Chantal na
10 weken?

L: f 25,-- + f 50,-- = f 75,--

l : En na 17 weken?

L: Eh, $17 \times 5 = 85$ (zrm) en dan
nog 25 is 110 (zrm)

(merk op, dat zij eerst uitrekt
hoeveel zakgeld erbij komt!)

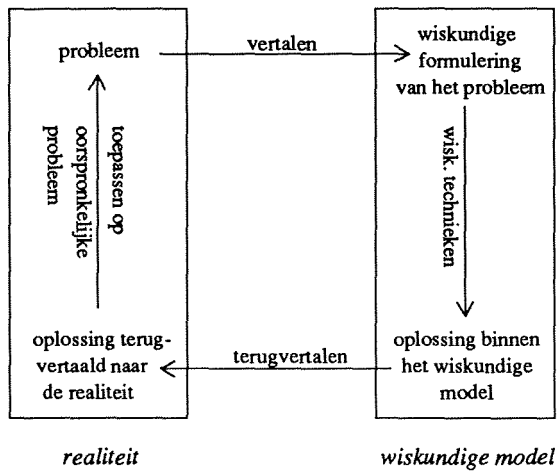
- l : Je kunt het dus steeds uitrekenen.
 Als ik jou vraag hoeveel geld ze heeft na zoveel weken, dan kun jij dat uitrekenen?
- L : Gewoon steeds keer 5 en die f 25,-- van het begin erbij. (het vergelijking-opstellen is nu verwoord.)
- l : Hoe schrijf je dat wiskundig op?
- L : f 25,-- + $x \cdot 5$ (nu valt ze toch weer terug op haar oorspronkelijke rekenwijze; vanuit die f 25,--)
- l : O.K. En met Natascha's geld, hoe zit het daarmee?
- L : f 15,-- + $x \cdot 7$
- l : Prima. Na x weken hebben ze allebei evenveel, dus is het geld van Chantal gelijk aan het geld van Natascha. Dan schrijf je dus op, schrijf maar: $25 + x \cdot 5 = 15 + x \cdot 7$
- L : (schrijft)
- l : Goed, kun je nu uitrekenen hoe veel x is?
- L : Na 1 week: $30 = 22$... nee!
- na 2 weken $35 = 29$ nee!
- O, veel meer.
- na 10 weken $75 = 85$ uuhm...
- teveel.
- na 9 weken $70 = 78$
- na 8 weken $65 = 71$... nee!
- na 6 weken $55 = 57$
- na 5 weken $50 = 50$ Ja!
- (Lize rekent hardop voor dat ze voor x in de vergelijking nu 1 substitueert)

Hier zien we een context, waarbij het geleerde algoritme zou moeten functioneren binnen de oplossingsstrategie. Dat is althans de bedoeling van het leerboek, maar wat zien we bij Lize gebeuren? Zij heeft ten eerste problemen met het vertalen van de oplossing $x = -6$ naar de oorspronkelijke vraagstelling. Ten tweede heeft ze problemen met mathematiseren, maar met wat hulp herkent ze de variabele in het verhaal en komt toch tot het opstellen van een vergelijking. Merk overigens op, dat daar de behoefte van Lize helemaal niet ligt. Ze doet dat, omdat de leraar haar heel erg op die weg stuurt. Let maar op haar oplossing. Lize weet nu precies wat de vraag is en kan er ook een adequaat antwoord voor vinden (intentioneel handelend). Het aangeleerde algoritme functioneert als 'trucje voor de repetitie'.

In paragraaf 3.2 en 3.3 zijn twee voorbeelden besproken, waarbij binnen contexten met verschillende functies algoritmen een rol spelen. Eén waarbij het trucje dankbaar werd aanvaard en één waarbij het geleerde trucje (algoritme) geen enkele functie vervulde (of het zou voor een voldoende op de repetitie moeten zijn).

Voor het trekken van conclusies met betrekking tot de vraag ‘algoritmen of heuristieken?’ is het echter nog te vroeg. Immers in de bovenstaande voorbeelden vervullen algoritmen een twijfelachtige functie. Er zijn natuurlijk ook voorbeelden te geven, waarbij het algoritme een betere functie vervult.

4 Algoritmen of heuristieken bij het bevorderen van probleemoplossend gedrag
De activiteiten die van de leerlingen bij het omgaan met contexten worden verwacht zijn in het volgende schema samengevat (figuur 3).



Figuur 3: Schema mathematiseren

Willen we probleemoplossen tot leerstof verheffen, dan moeten we de leerlingen leren vertalen van de praktijksituaties naar de wiskundige vraagstellingen en omgekeerd van de wiskundige antwoorden naar de praktijksituaties. Dit is dus extra ten opzicht van de ‘oude’ leerstof, waarbij het leren van wiskundige technieken centraal stond. Binnen realistisch wiskundeonderwijs is het zo, dat de wiskundige technieken ten dienste staan van de probleemoplosser. Mijns inziens is het alléén daarom te verdedigen, dat leerlingen algoritmen aanleren als die hen in de praktijk van het oplossen van problemen ook werkelijk verder helpen. Anders heeft dat geen zin en kun je de leerlingen beter alleen bruikbare heuristieken leren.

Een vraag, die hierbij opkomt is: ‘Staan wij leerlingen toe dat zij hun eigen oplossingsstrategieën ontwikkelen?’.

Enerzijds ja, immers bij het gebruik van situaties uit hun beleavings-, ervarings- of fantasiewereld sta je toe - stimuleer je zelfs - dat leerlingen hun eigen kennen en kunnen op zo’n gebied in de strijd werpen (bijvoorbeeld bij groepswerk en onderwijsleergesprek). Hun verhaal kan dan een deel van het oplossingsproces en zelfs de uitkomst ervan bepalen.

Ikzelf wil bijvoorbeeld de eigen inbreng van leerlingen stimuleren, om de vertaalvaardigheden te ontwikkelen en te ondersteunen. In principe sta ik dus toe dat Lize haar eigen oplossingsstrategie hanteert om tot een oplossing te komen. Anderzijds wil ik toch ook oplossingsmethoden die breed toepasbaar zijn overdragen. Een algemenere oplossingsstrategie (het algoritme) kan Lize in soortgelijke situaties en met veel ingewikkelder getallen toch ook uit de brand helpen? Lize had eerst het probleem moeten leren kennen, veel context-sommen moeten maken, waarbij duidelijk werd dat het steeds om 'éénzelfde' probleem gaat. Dan ontstaat ook eerder de behoefte aan het alles oplossende algoritme.

Een voorbeeld, uit het rekenonderwijs, waarbij het bovenstaande een duidelijke rol speelt is het volgende:

*26 personen willen naar de bioscoop. In één auto kunnen 4 personen.
Hoeveel auto's heb je dan nodig?*

Verschillende kinderen geven verschillende antwoorden, te weten:

A: $6\frac{1}{2}$ B: 7 C: 9 D: 2 E: 1

Wat zeggen we dan?

Laten we de leerlingen maar eens aan het woord laten:

- A heeft gedaan $26 : 4 = 6\frac{1}{2}$ en maakt geen vertaalslag meer.
- B heeft de personen als volgt verdeeld:

iiii 1 auto	iiii 5 auto's
iiii 2 auto's	iiii 6 auto's
iiii 3 auto's	ii 7 auto's
iiii 4 auto's	
- C zegt: 'de chauffeur van de taxi telt niet mee' dus per auto 3 naar de bioscoop, dat is dus 9 auto's, want in 9 auto's zijn dan $9 \times 3 = 27$ plaatsen.
- D weet te vertellen dat in het 'Guiness Book of Records' staat dat er maximaal 13 mensen in een 'eend' kunnen en dus twee auto's genoeg zijn.
- E ten slotte, heeft een zuinige oplossing voor dit probleem en laat gewoon één auto een aantal keren op en neer rijden.

Alle leerlingen hebben hun eigen ervaringen in de strijd geworpen. Het zijn stuk voor stuk doordachte oplossingen. Moeten wij daar dan met een algoritmische methode overheen walsen? Is de conclusie nu gerechtvaardigd, dat we het zonder algoritmen moeten proberen?

5 Zonder algoritmen?

In het volgende voorbeeld wordt het algoritme bewust omzeild en wordt geprobeerd gebruik te maken van de rijkheid van de context.

Zie in bijlage 2 enkele bladzijden uit het Hewet-boekje 'Differentiëren 3' (6-vwo) (Kindt en De Lange, 1986a).

- som 16: Wat instapvraagjes om het probleem te leren kennen.
- som 17: De $Z(A)$ -functie en de $Z(t)$ -functie worden geïntroduceerd.
- som 18: Interpretieren van de gegevens (mathematiseren). De $P(t)$ -functie doet zijn intrede. Neem een t , zoek een A en lees af P (combineren van figuren 12 en 13). Hier worden de begrippen klaar gelegd, die moeten leiden tot de kettingregel.
- som 19: a. De $A(t)$ - functie ten slotte. Nu komt het erop aan: 'Wat is de betekenis van $\frac{dA}{dt} = -300$ respectievelijk 1200 en 300?' $\frac{dA}{dt}$ is de aantallen toe- of afname *per dag*.
 b. Is voorbereidend op opgave 21 en in dit verband niet belangrijk.
- som 20: Leren op basis van inzicht. Namelijk personen-verandering per dag $\times$ produktie-verandering per persoon = produktie-verandering per dag. Dit is voorstelbaar, dus hoop je hier te oogsten wat in het voorafgaande is voorbereid.

Na opgaven 20b en 20c mag je dan hopen dat de leerlingen zien wat ze doen, omdat

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dA}{dt} \times \frac{dP}{dA}$$

een wiskundige formulering van het bovenstaande is. Maar nee, in het schrift van de leerling staat:

$$\frac{dP}{dt} = \cancel{\frac{dA}{dt}} \times \frac{dP}{\cancel{dA}}$$

Als ik mijn 6-vwo leerlingen erop wijs, dat dat toch juist uit 't voorgaande blijkt, dan geven ze dat ook wel toe, snappen dat ook wel, maar bij opgave 20d hadden ze dat verhaal toch helemaal niet nodig, want dat

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dA}{dt} \times \frac{dP}{dA}$$

'wisten' ze al. 'Het is toch gewoon wegstrepen, meneer. Dat kan toch altijd? Waarom al die verhaaltjes erom heen?' Bovendien herkennen de 6-vwo-leerlingen hierin absoluut niet de kettingregel, die bovendien altijd precies 'andersom' wordt geformuleerd:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dA} \times \frac{dA}{dt}$$

Zijn de leerlingen dan echt altijd alleen maar uit op het trucje zonder zich te bekommeren om de achterliggende inzichten?

Uit het bovenstaande blijkt, dat het wegstrepen van teller en noemer in de breuk een regeltje is, dat zich hier dermate opdringt, dat daardoor het inzicht wordt verdrongen. Moeten we dan niet juist op zoek naar een context, die een minder voor de hand liggende uitkomst kan verklaren en daarmee het inzicht verhoogt?

Nog een voorbeeld uit de bovenbouw-stof.

Neem de produktregel $\Phi(x) = f(x) \times g(x)$. Waarom is $\Phi'(x)$ niet $f'(x) \times g'(x)$ maar $f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$?

In bijlage 3 staan enkele bladzijden uit het Hewet-boekje 'Differentiëren 2' (5-vwo) (Kindt en De Lange, 1985).

Een vierkant met zijde x wordt met een penseelstreek vergroot.

som 58: $\Delta A = 2x\Delta x$ Twee ribben met dikte Δx plus een klein vierkantje met zijde Δx .

De gemiddelde groei is de halve omtrek.

pag. 140: (onderaan) $\frac{dA}{dx} = 4x$; de halve omtrek is $3x$.

De gemiddelde groei is nu weer de halve omtrek? Niet dus!

pag. 141: De rechthoek moet in verhouding worden vergroot en dan volgt de produktregel.

Frank zegt: 'O, zeg dat dan meteen, de produktregel kende ik al uit 5-havo, als ik geweten had dat het daar op uitdraaide had ik dit allemaal niet hoeven over te nemen. Waar is dat nou voor nodig?'

Is de conclusie, dat we de leerlingen tegemoet moeten komen en ze toch maar gewoon de kale regeltjes en algoritmen moeten leren? Veel van hen zijn immers toch alleen uit op het met succes kunnen maken van de sommetjes en hebben geen boodschap aan al die contexten, die de regeltjes onderbouwen of aannemelijk maken!

5 Een aantal vragen

Wat hebben bovenstaande ervaringen met leerlingen ons te zeggen in het licht van het probleemoplossen, contextgebruik, heuristieken en/of algoritmen?

Probleemoplossen vereist nogal wat vaardigheden.

Om er een paar te noemen:

- adequate handelwijzen ontwikkelen;
- meer algemene technieken na aanleren kunnen hanteren;
- ontdekken dat een probleem behoort tot een klasse van soortgelijke problemen;
- mathematiseren;
- reflecteren;
- durven;
- ... enzovoort.

Daarom heb ik een aantal vragen.

1. *Wanneer - in welk stadium - kom je met algoritmen?*

Zouden we niet moeten beginnen met veel contexten? Dit dient punt a en punt d. Het effect van de uitleg van de produktregel met de verfstreepjes is toch volkomen weg als je de produktregel al hebt leren kennen als een vertrouwd instrument om sommen mee op te lossen?

Het gaat mij niet om het effect, maar om een onderwijsvorm, waarbij je mikt op inzicht. Adequaat en intentioneel handelen verankert de concepten veel steviger dan algoritmen sec. Natuurlijk moet er veel tijd worden gestoken in oefening om tot vaardig oplossen te komen. Mijn vraag is nu, wannéér je met de algoritmen moet komen. Kunnen we daarvoor een moment aanwijzen in het proces van probleemoplossend leren?

2. *Hoe ver reikt de waarde van heuristieken voor de kwaliteit van probleemoplossend gedrag?*

Natuurlijk ondersteunen heuristieken het leren mathematiseren (punt d). Belangrijk is, dat leerlingen bij een nieuw probleem eerst aan de slag gaan: plaatjes maken, wat verschillende vragen oplossen, die het probleem van verschillende kanten belichten, eigen ervaringen erbij betrekken, en dergelijke. *Doen* gaat vooraf aan het *denken*. Een goede strategie volgens de Sovjet leerpsychologen.

Dit alles kan leiden tot het herkennen van overeenkomsten met aanverwante problemen (punt c). Maar de vraag is hoelang je hiermee moet doorgaan. Moet je sommige leerlingen niet gewoon op een bepaald moment laten zien (vertellen) hoe de vork in de steel zit door middel van algoritmen, in plaats van hen dit voortdurend zelf te laten ontdekken door middel van de onderwezen heuristieken?

3. *Welke leerlingen kun je niet meer leren reflecteren?*

Voor het ontwikkelen van inzichtelijk probleemoplossen is het kunnen reflecteren op de eigen oplossingsweg een vereiste. Dan ontdekken leerlingen, dat een oplossingsmethode, die tot een goed resultaat leidde in aanverwante situaties bruikbaar is (punt c). Dit reflectievermogen hebben de leerlingen niet zomaar, maar misschien moeten we dat juist in het voortgezet onderwijs gaan accentueren.

Kun je bijvoorbeeld van ibo/lbo-leerlingen verwachten, dat ze op hun eigen niveau dit vermogen tot reflectie ontwikkelen? Welke leerlingen zijn 'leerbaar' op dit punt en welke niet?

4. *Moet er niet veel systematischer gewerkt worden aan het ontwikkelen van een houding bij leerlingen, dat je pas tevreden mag zijn als je intentioneel handelt?*

Enerzijds is dit een moeilijke opgave, want we werken - in het bovenstaande zijn daar voorbeelden van te vinden - tegen de korte-termijn belangen van leerlingen in. Anderzijds is het type leerling van tegenwoordig steeds mondig(er) en er dus wel ontvankelijk voor. Het wordt toch niet zomaar aanvaard dat

wanneer de leraar zegt dat het zo moet, dat het dan goed is. Natuurlijk kan het ontwikkelen van zo'n houding alleen kans van slagen hebben als we bij de toetsing en beoordeling daar zelf ook werkelijk werk van willen maken.

7 Slot

Bij de ontwikkelingen van het nieuwe leerplan voor twaalf- tot zestienjarigen wordt speciale aandacht gegeven aan zwakke leerlingen, goede leerlingen, meisjes en allochtonen. Speciale aandacht dus voor speciale groepen.

Bij het gebruik van contexten - en die zullen we in het nieuwe wiskundeonderwijs toch zeker veel tegenkomen - wordt van de leerlingen veel leeswerk gevraagd. Hoe moet dat met de leerlingen, die dyslectische problemen hebben? Voor dyslexie is weliswaar veel meer algemene aandacht te bespeuren, maar hoe zit dat binnen het wiskundeonderwijs? Leerlingen, die het Nederlands niet makkelijk lezen vinden we ook veel onder allochtonen, vooral vanwege het Nederlands als tweede taal. Betekent dat, dat de didactiek van het werken met contexten aan hen niet besteed is? Dat we hen moeten bedienen met kale algoritmen? Mijn ervaring is dat deze leerlingen wel erg ontvankelijk zijn voor de kale algoritmen. Bovendien zijn contexten die deze speciale groep aanspreken, door hun niet-allochtone leraren soms erg moeilijk te bedenken. Weliswaar een probleem van een heel andere orde, maar niet een om zomaar onder de tafel te schuiven.

Ten slotte vraag ik aandacht voor de leerkracht.

Bij het werken met nieuwe leerstof merk ik, dat dit mij noopt tot het ontwikkelen van een andere didactiek. Dat is leuk, een nieuwe uitdaging. Het werken met heteroögen samengestelde groepjes leerlingen bijvoorbeeld, stelt weer heel andere eisen aan mij en doet een beroep op andere didactische vaardigheden dan de puur klassikale werkvorm.

Wat ik wel merk is, dat het ambachtelijke van mijn vak er een beetje afgaat. Ik ben onder andere leraar geworden omdat ik het leuk vind om uit te leggen. Het kunnen bespelen en hanteren van zo'n groep van dertig leerlingen geeft een flink stuk arbeidsvreugde. Nu komt mijn werk veel meer neer op het begeleiden van probleemoplossende activiteiten en mag ik niet meer gewoon eens even voor het bord lekker twintig minuten lang uitleggen. Mijn rol als leraar is in de klas dus aan flink wat veranderingen onderhevig en dat is ondanks alles eigenlijk maar goed ook, want dat betekent dat het onderwijs in ieder geval geen statisch bedrijf is.

Literatuur

- Dolmans, F., e.a.: *Situatiebeschrijvingen in wiskundeteksten*, SLO, Enschede 1984.
Dormolen, J. van: *Vaardigheden*, OW & OC, Utrecht 1981.
Kindt, M. en J. de Lange: *Differentiëren 2*, Educaboek, Culemborg 1985.
Kindt, M. en J. de Lange: *Differentiëren 3*, Educaboek, Culemborg 1986a.
Kindt, M. en J. de Lange: *Groei*, Educaboek, Culemborg 1986b.
Lange, J. de: 'Contextuele problemen', *Euclides* 55 (1979), 50-60.
Lange, J. de: *Mathematics: insight and meaning*, OW & OC, Utrecht 1987.
Streun, A. van: *Heuristisch wiskundeonderwijs*, Groningen 1989 (dissertatie).

Bijlage 1 Logaritmische functies

Opgaven

- 54 Schat aan de hand van de grafiek na hoeveel *dagen* er ongeveer 20 m^2 planten waren.
- 55 Na hoeveel dagen ligt er 40 m^2 planten? (Zonder grafiek oplossen). En 80 m^2 ? En 10 m^2 ? Controleer het laatste antwoord grafisch.
- 56 Het verband tussen oppervlakte en tijd (weken) kun je vastleggen in een tabel:

oppervlakte	5	10	20	40	80
tijd in weken					

- 57 Bepaal de tijdstip waarop er 48 m^2 planten zijn (in weken, één decimaal nauwkeurig).
Vul daarna, zonder grafiek, de tabel in:

oppervlakte	3	6	12	24	48	96
tijd in weken						

De functie die aan de oppervlakte de tijd toevoegt heet:
logaritmische functie.

Of:

oppervlakte

 $\xrightarrow[\text{functie}]{\text{logaritmische}}$

tijd

terwijl:

tijd

 $\xrightarrow[\text{functie}]{\text{exponentiële}}$

oppervlakte

Omdat de groeifactor bij bovenstaand voorbeeld 2 was, wordt dat in de notatie van de logaritmische functie als volgt tot uiting gebracht:

$$x \rightarrow {}^2\log x$$

VOORBEELD $10 \rightarrow {}^2\log 10$

${}^2\log 10$ is het tijdstip waarop er 10 m^2 planten zijn gevormd, bij groeifactor 2 (en beginnend met 1 m^2).

Opgaven

- 58 Verklaar: ${}^2\log 16 = 4$ Ook: ${}^3\log 27 = 3$ En: ${}^5\log 25 = 2$

- 59 Bepaal aan de hand van de eerder gemaakte tabellen *ongeveer* en waar mogelijk *precies* de grootte van:

${}^2\log 1$	${}^2\log 4$	${}^2\log 8$	${}^2\log 16$
${}^2\log 2$	${}^2\log 5$	${}^2\log 10$	${}^2\log 20$
${}^2\log 3$	${}^2\log 6$	${}^2\log 12$	${}^2\log 24$

- 60 Bereken:

$${}^2\log \frac{1}{2} \quad {}^2\log \frac{1}{4} \quad {}^2\log \frac{1}{8} \quad {}^2\log \frac{1}{16}$$

- 61 a Teken de grafieken van:

$x \rightarrow 2^x$ en $x \rightarrow {}^2\log x$ in één tekening.

b Welke as van symmetrie heeft dit paar grafieken en waarom?

c Geef van beide functies het domein, bereik en asymptoot.

- 62 Verklaar waarom:

$${}^2\log 3 + 1 = {}^2\log 6$$

$${}^2\log 7 + 1 = {}^2\log 14$$

$${}^2\log 6 + {}^2\log 2 = {}^2\log 12$$

- 63 $f(x) = {}^2\log x$

Welk verband bestaat er tussen $f(4)$, $f(5)$ en $f(20)$?

- 64 a Teken in één figuur de grafieken van: $f(x) = 2^x$ en $g(x) = (\frac{1}{2})^x$

b Laat zien: ${}^2\log 3 = {}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{3}$

c Ook: ${}^2\log 7 = {}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{7}$

- 65 Vul in: ${}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{12} = {}^2\log \dots$ Analoo: ${}^5\log \frac{1}{3} = {}^{\frac{1}{5}}\log \dots$

$${}^{\frac{1}{3}}\log 23 = {}^3\log \dots$$

Bekijk fig. 15.

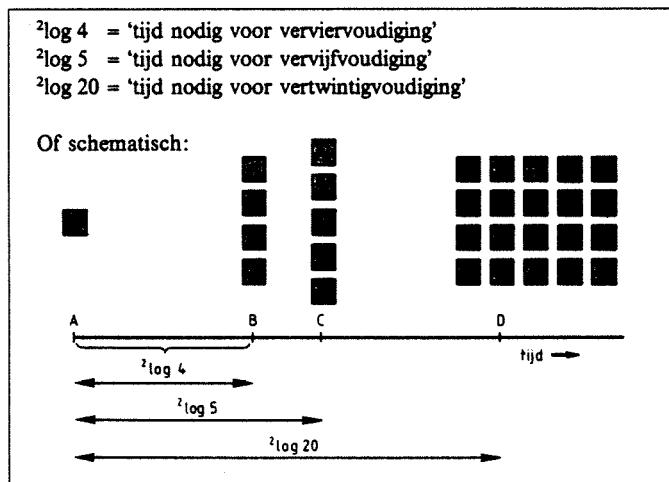


Fig. 15

Opgave

- 66 Zie figuur 15. Verklaar ${}^2\log 4 + {}^2\log 5 = {}^2\log 20$ (of: $BD = {}^2\log 5$).

De opgave hiervóór was niets anders dan een 'bewijs' van de *hoofdeigenschap* van de logaritmische functies:

$${}^s\log ab = {}^s\log a + {}^s\log b$$

$$\text{Of: als } F(x) = {}^s\log x \text{ dan is } F(ab) = F(a) + F(b)$$

Gebruik makend van deze hoofdeigenschap zijn de volgende logaritmische vergelijkingen op te lossen ($x \in \mathbb{R}^+$).

Opgaven

- 67 ${}^2\log x = {}^2\log 5 + {}^2\log \frac{1}{3}$ ${}^3\log(2x + 1) = 1 + {}^3\log 2$
 ${}^3\log x = {}^3\log 2 + {}^{\frac{1}{3}}\log 7$ ${}^7\log x + {}^7\log 5 = -1$
 ${}^5\log 3x + {}^5\log \frac{1}{3} = {}^5\log 3$ ${}^{\frac{1}{3}}\log x + {}^5\log \frac{1}{2} = 2$
- 68 ${}^{10}\log x = 1 + {}^{\frac{1}{10}}\log \frac{1}{5}$ ${}^{\frac{1}{3}}\log x = {}^{\frac{1}{3}}\log 3 + {}^{\frac{1}{3}}\log \frac{3}{2}$

${}^2\log 7$ is het moment waarop er 7 m² kroos is, bij groeifactor 2.
 Dus ${}^2\log 7$ is de oplossing van $2^x = 7$.
 Of, weer anders gezegd: $2^{{}^2\log 7} = 7$.

Opgaven

- 69 a Van welke vergelijking is ${}^2\log 5$ een oplossing?
 En ${}^5\log 2$?
 b En ${}^2\log 8$?
 c Ook: ${}^5\log 125$; ${}^{\frac{1}{3}}\log 27$; ${}^{10}\log 1000$; ${}^3\log 3^p$.
 d Tevens: ${}^{0,2}\log 5$; ${}^{0,2}\log 1$; ${}^{0,2}\log 0,2$.
- 70 Van welke vergelijking is ${}^s\log a$ een oplossing?
 (Bij geschikte keuze van g en a).

Samenvattend:

$${}^s\log a = x \Leftrightarrow g^x \quad \text{of:} \quad g^{s\log a} = a$$

Opgave

- 71 Toon aan dat $^{10}\log 2 \cdot {}^2\log 3 = ^{10}\log 3$.
 Noem daartoe $^{10}\log 2 = x$; ${}^2\log 3 = y$ en $^{10}\log 3 = z$,
 en toon aan: $x \cdot y = z$.

De vorige opgave luidt in algemene termen:

$$\boxed{{}^p\log g \cdot {}^s\log a = {}^p\log a} \quad \text{of:} \quad \boxed{{}^s\log a = \frac{{}^p\log a}{{}^p\log g}}$$

Deze eigenschap geeft je de mogelijkheid om van grondtal te veranderen hetgeen o.a. belangrijk is als je logaritmen op de rekenmachine wilt berekenen. Als je een rekenmachine hebt die alleen logaritmen berekent met grondtal (groefactor) 10 zou je ${}^3\log 5$ niet in kunnen toetsen.

Maar omdat: ${}^3\log 5 = \frac{{}^{10}\log 5}{{}^{10}\log 3}$

kun je ${}^3\log 5$ toch met je rekenmachine berekenen.

Opmerking 1: Als het grondtal 10 is, wordt het vaak weggelaten.
 Dus $^{10}\log 3$ wordt geschreven als $\log 3$.

Opmerking 2: Als het grondtal e is wordt het weggelaten en wordt er ln in plaats van log geschreven.
 Dus ${}^e\log 3$ wordt geschreven als $\ln 3$.
 Men spreekt wel van de 'natuurlijke logaritme'.

Opgaven

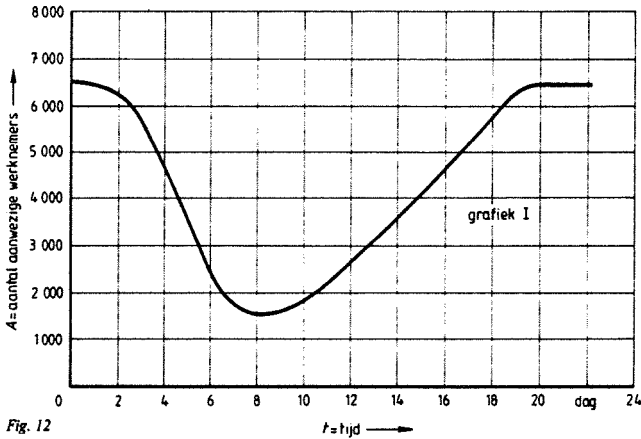
- 72 Bereken: ${}^3\log 5$; ${}^5\log 3$; ${}^7\log 10$; $\log 7$; $\ln 5$; ${}^5\log e$.
 73 Verklaar: $e^{\ln 2} = 2$.
 74 De coli-bacterie verdubbelt iedere 20 minuten in gewicht.
 Hoe lang duurt het voor het gewicht is toegenomen met een factor e?

VOORBEELD

Los op: ${}^3\log x = \frac{1}{2}$.

Oplossing: ${}^3\log x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2}} = x$, dus $x = \sqrt{3}$.

Bijlage 2 De griepgolf



Opgaven

- 16 Een groot bedrijf wordt eveneens getroffen door een hevige griepgolf. Toen de epidemie zijn top bereikte, was zo'n 80% van het totale werknemersbestand geveld door de griep.
- In fig. 12 zie je de grafiek van het aantal aanwezige werknemers (A) als functie van de tijd in dagen (t) in de dagen na het uitbreken van de epidemie.
- Hoeveel werknemers telt het bedrijf ongeveer?
 - Wanneer was het ziekteverzuim het grootst?
 - Wanneer nam het ziekteverzuim het sterkst toe?
- 17 In die 22 dagen na het uitbreken van de epidemie was griep de hoofdoorzaak van afwezigheid op het werk. Andere oorzaken van absentie vielen hierbij volkomen in het niet.
- Het aantal zieke werknemers per dag noemen we Z .
- Teken een grafiek van het verband tussen Z en A .
 - Z is ook een functie van t . Teken de grafiek van deze functie.

De bedrijfsleider was de eerste dagen nauwelijks verontrust door het ziekteverzuim. Hij beschikte namelijk over de gegevens betreffende de productie ($= P$) als functie van het aantal werknemers (zie fig. 13).

Opgaven

- 18
- Verklaar waarom de bedrijfsleider de eerste dagen nog niet zo somber gestemd was.
 - Hoeveel dagen na het uitbreken van de epidemie bereikte de productie een maximum?
 - Schets de grafiek van P als functie van t (voor de desbetreffende periode van 22 dagen).

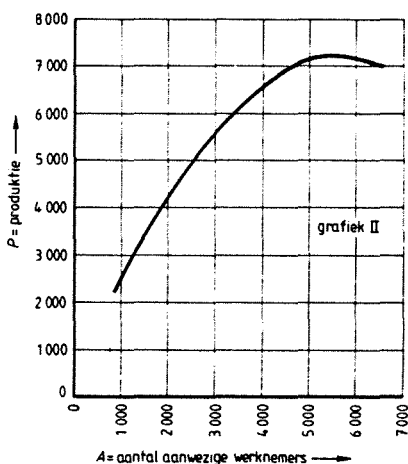


Fig. 13

19 Terug naar het verband tussen A en t (grafiek I, fig. 12).

In drie punten is de helling gemeten (zie tabel hiernaast).

a Wat is de betekenis van de getallen -300 , -1200 , 300 in dit verband?

b Wat is de waarde van $\frac{dZ}{dt}$ op de momenten $t = 2, 4, 10$?

(Z = het aantal zieke werknemers).

A	P	$\frac{dP}{dA}$
2	6200	-300
4	4500	-1200
10	1800	300

20 In de vorige opgave was er sprake van drie 'momentopnamen' van het bedrijf ten tijde van de griepgolf.

Op diezelfde momenten kunnen we ook de verandering van productie t.o.v. het aantal werknemers bekijken:

a Beredeneer dat op het tijdstip $t = 4$ de productie afnam met 720 stuks per dag.

b Op het tijdstip $t = 10$ nam de productie weer toe.

In welke mate?

c Nam de productie op het tijdstip $t = 2$ toe of af?

In welke mate?

d Welk verband bestaat er, denk je, tussen $\frac{dP}{dt}$, $\frac{dA}{dt}$ en $\frac{dP}{dA}$?

A	P	$\frac{dP}{dA}$
6200	7190	$-0,1$
4500	6750	$0,6$
1800	3670	$1,7$

21 Ga na of er een dergelijk verband bestaat tussen $\frac{dZ}{dt}$, $\frac{dA}{dt}$ en $\frac{dZ}{dA}$.

Bijlage 3 Produktregel

- 55 Wat weet je van de aangroeiing van x in het geval $\Delta x = 1$ en $\Delta A = 105$?
- 56 Wat weet je van ΔA als x groeit van n tot $n + 1$? (n is een of ander natuurlijk getal).
- 57 Maak ook een tabelletje van ΔA als x sprongsgewijs toeneemt met $\Delta x = \frac{1}{2}$.
- Vind je eenzelfde regelmaat als in de ΔA -kolom bij opgave 54? Hoe kun je dat in bovenstaande tekening zien?
 - Wat weet je van ΔA als x groeit van n tot $n + \frac{1}{2}$?

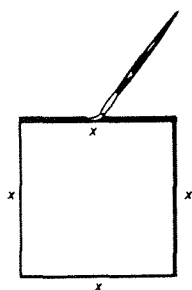


Fig. 37

In theorie kunnen we het vierkant in plaats van sprongsgewijs ook 'continu' laten groeien. Zo'n continue groei is niet eenvoudig voor te stellen. In eerste instantie kun je denken aan een groei waarbij de sprongetjes Δx zeer klein zijn (het 'tekenfilmprincipe').

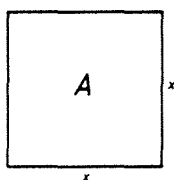
Met een penseelstreek (dikte Δx) vergroten we het vierkant (fig. 37).

Opgave

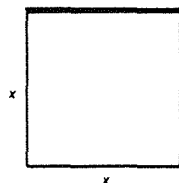
- 58 De groeisprong ΔA is bij benadering gelijk aan $2x \cdot \Delta x$. Verklaar. Waarom staat er 'bij benadering'?

De 'gemiddelde groei' van de oppervlakte $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ is bij benadering dus gelijk aan $2x$. Die benadering is nauwkeuriger naarmate de penseel fijner is. Bij continue groei nemen we Δx als het ware 'oneindig klein'.

En zo komen we tot: $\frac{dA}{dx} = 2x$, waarbij $\frac{dA}{dx}$ de 'groeisnelheid' is van A ten opzichte van x (zie ook fig. 38).



$$A = x^2$$



$$\frac{dA}{dx} = 2x$$

Fig. 38

Een soortgelijk verhaal kunnen we houden bij de groei van een kubus (met ribbe x en volume V). Door drie vlakken van de kubus te verven bewerkstelligen we een kleine volumegroei.

Als de dikte van de verflaag gelijk is aan Δx , is de groeisprong ΔV bij benadering gelijk aan $3x^2 \cdot \Delta x$.

Gevolg:

$\frac{\Delta V}{\Delta x} \approx 3x^2$ en dus $\frac{dV}{dx} = 3x^2$ (= de groeisnelheid van V t.o.v. x , zie ook fig. 39).

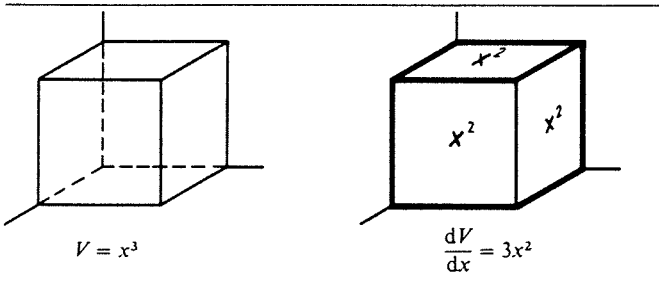


Fig. 39

Op blz. 35 heb je gezien dat, als je een vierkant in twee richtingen laat groeien, de groeisnelheid van de oppervlakte ten opzichte van de zijde gelijk is aan de halve omtrek.

Geldt dit ook voor een rechthoek?

Laten we een rechthoek bekijken waarvan de lengte tweemaal de breedte is (fig. 40): $b = x$, $l = 2x$.

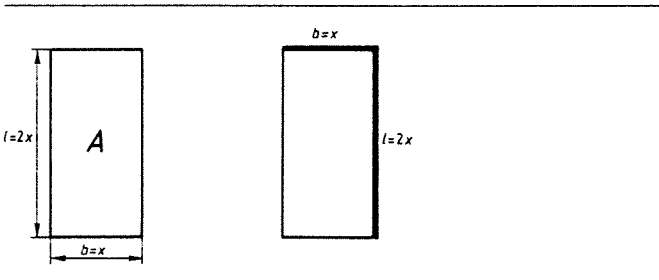


Fig. 40

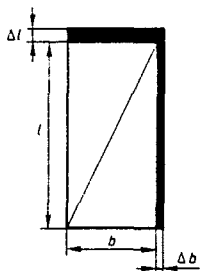
$A = l \cdot b = 2x^2$. Dus volgens de regels van het differentiëren geldt:

$$\frac{dA}{dx} = 4x$$

maar voor de halve omtrek geldt:

$$l + b = 2x + x = 3x$$

Niet dus.



$$\Delta b = \Delta x \quad \Delta l = 2 \cdot \Delta x$$

En:

$$\Delta A \approx b \cdot \Delta l + l \cdot \Delta b$$

Fig. 41

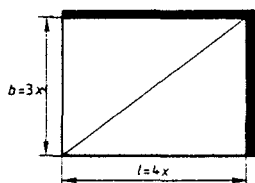


Fig. 42

Het verschil met het vierkant zit hier in, dat de 'penseelstreek' aan de korte zijde twee keer zo dik moet zijn, wil je tenminste weer een goede lengte-breedte-verhouding hebben (fig. 41).

Opgaven

59

Leid uit het voorgaande af: $\frac{\Delta A}{\Delta x} \approx 4x$.

(Dit resultaat is wel in overeenstemming met de regels van het differentiëren).

60

Bekijk de groei van een rechthoek met breedte-lengteverhouding 3 : 4 ($b = 3x$, $l = 4x$) en oppervlakte A , zie ook fig. 42.

a Laat x groeien met Δx .

Hoe groot is Δl resp. Δb uitgedrukt in Δx ?

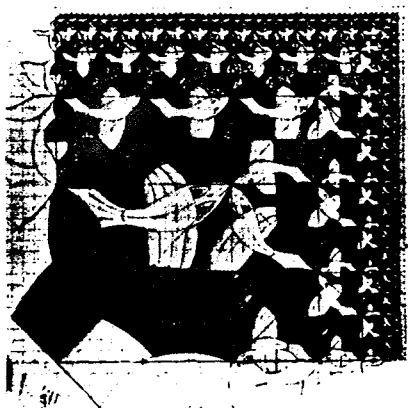
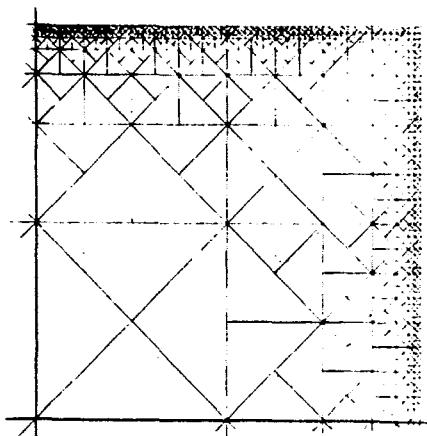
b Druk ΔA uit in x en Δx .

c Ga na dat geldt:

$$\frac{dA}{dx} = l \cdot \frac{db}{dx} + b \cdot \frac{dl}{dx}$$

De formule genoemd in opgave 60c staat bekend onder de naam *produktregel*.

Studies voor de houtsnede 'Vierkantlimiet' 1964 van M. C. Escher. De uiteindelijke houtsnede is op bladzijde 61 geplaatst.



Probleemaanpak als onderwerp op de lerarenopleiding

Ton Konings

1 Inleiding

Deze bijdrage gaat over de cursus 'Probleemoplossen', die door de wiskunde-studenten van de lerarenopleiding van de Hogeschool Gelderland in Nijmegen gevolgd wordt.¹

De cursus gaat al zo'n tien jaar mee en is samengesteld op basis van 'Heuristiek en Wiskunde' van Polya (1975) en op cursussen van andere lerarenopleidingen in ons land. De cursus is in de loop der jaren aangepast op grond van ervaringen van studenten en docenten, veranderingen in de randvoorwaarden van het instituut en ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs (Hewet, Hawex en W12-16).

2 Opzet en inhoud van de cursus 'Probleemoplossen'

Om een indruk te geven van de opzet en de inhoud van de cursus is als bijlage 1 de inhoudsopgave van het cursusboek opgenomen.

De cursus bestaat uit twee delen.

Het eerste deel gaat vooral over probleemoplossen op studentenniveau. Het bevat vele geïsoleerde problemen, waarvoor de benodigde vakkennis al beheerst wordt. Contexten spelen hierbij nauwelijks een rol. Dit deel heeft een studiebelasting van veertig uur, waarvan elf lessen van anderhalf uur met begeleiding en wordt afgesloten met een toets.

In het tweede deel staat het begeleiden van leerlingen bij het oplossen van een contextrijk probleem centraal. De studenten zijn daarbij twee volle dagen bezig. Dit deel wordt afgesloten met een verslag.

Enige jaren geleden is het eerste deel becommentarieerd door de NLO-SLO-werkgroep. Het tweede deel van de cursus is ontstaan in opdracht van de SLO bij het ontwikkelen van (na-)scholing in het kader van het project W12-16.

Het doel van de cursus is dat studenten zelf beter leren problemen op te lossen, zicht krijgen op processen die daarbij een rol spelen en leren om leerlingen bij het oplossen van problemen te helpen.

Ter illustratie is als bijlage 2 de lijst van vragen opgenomen die tijdens de cursus met de studenten wordt opgebouwd. Deze lijst geeft globaal de inhoud van de cursus weer.

Voor alle duidelijkheid zij vermeld dat de cursus dus niet gaat over heuristisch wiskundeonderwijs, waar begripsvorming en het leren gebruiken van wiskundig gereedschap een grote rol spelen, maar sec over het 'probleemoplossen'.

3 Tien stellingen

In de volgende stellingen wil ik iets zeggen over waarom deze cursus zo is ingericht, soms zal ik daarbij verwijzen naar voorbeelden uit het cursusboek.

Stelling 1

- Studenten leren met betrekking tot probleemoplossen het meest van de wijze waarop in vaklessen met wiskunde problemen wordt omgegaan.
- In vaklessen hebben studenten weinig oog voor reflecties op het proces van oplossen doordat ze vaak erg gericht zijn op het tentamen.
- Het reflecteren op de probleemaanpak is gemakkelijker als de benodigde vakkennis beheerst wordt.

In verband met het bovenstaande is er voor gekozen de cursus apart van de 'puur-wiskunde' vakken aan te bieden.

Stelling 2

- Een leerlingprobleem zonder pen en papier oplossen brengt de student/leerkracht dichter bij de problemen van de leerling.
- Een probleem zonder pen en papier oplossen verhoogt levendig/heuristisch doordenken van het probleem in tegenstelling tot doodsb/algorithmisch handelen.

Om dit te oefenen wordt elke bijeenkomst gestart met een 'binnenkomer' zoals bijvoorbeeld:

Los het volgende probleem uit het hoofd op:

Om de evenaar (neem 40.000 km) wordt ijzerdraad gespannen.

Vervolgens wordt dit ijzerdraad 1 meter langer gemaakt en overal even ver van de aarde gehouden.

Hoeveel is dat?

Kan er een vlieg onderdoor?

Stelling 3

- Studenten zijn sterk produktgericht bezig met het oplossen van een probleem. Controle ontbreekt meestal en het is niet eenvoudig om ze achteraf nog tot reflecteren aan te zetten.
- Nadenken over het proces kan worden gearrangeerd via een eenvoudige 'boekhoudkundige truc' van twee kolommen.

Bijvoorbeeld:

opmerkingen over het proces	de uitgewerkte oplossing	en	leerkracht	leerling

Ook bij het observeren helpt zo'n structuur:

begeleider	oplosser	en	vragen/hints	oplossing
------------	----------	----	--------------	-----------

Stelling 4

- Een leerkracht moet in zijn/haar studie voldoende ervaring hebben opgedaan met het zelfstandig oplossen van problemen.
- Persoonlijke feedback is nodig om de kracht van hints te ervaren.
- Studenten moeten gedwongen worden nette en volledige uitwerkingen te maken. Afhaakgedrag wordt zo sterk verminderd.
- Nette uitwerkingen verhogen de mogelijkheid tot reflectie.

De cursus wordt gegeven aan jongens die veelal de combinatie wiskunde/natuurkunde (wi/na) hebben en aan meisjes met veelal de combinatie wiskunde/biologie (wi/bi). De ervaringen met deze verschillende groepen brengt mij tot de volgende stellingname.

Stelling 5

- De wi/na-jongens zijn sneller, flitsender en meer resultaatgericht.
Ze werken slordig.
- De wi/bi-meisjes werken langzamer, preciezer en netter.
Ze hebben meer belangstelling voor het proces.
- De jongens moeten tot meer netheid, volledigheid en reflectie worden aangespoord. De meisjes tot meer effectief probeergedrag; ze moeten met name meer lef ontwikkelen.

Stelling 6

Studenten leren door middel van een rollenspel veel houdingszaken kennen met betrekking tot probleemoplossen, zoals: nieuwsgierigheid, irritatie, vastbijten in het probleem, frustratie, triomf, geduld, enzovoort.

Hierbij wordt dan ook duidelijk dat het frustrerend kan zijn te worden afgebroken of erg sterk te worden gestuurd, en dat probleemoplossen veel tijd kost en geduld van de leerkracht eist, immers de leerling moet het werk doen en de leerkracht moet volgen.

Stelling 7

Een vast stramien bij elke bijeenkomst is nodig om de student enige vaardigheid te geven en door de bomen het bos te blijven zien.

Dit vaste stramien (van Polya) wordt in de tiende bijeenkomst nog eens expliciet aan de orde gesteld en vergeleken met andere. Zie hiervoor bijlage 3.

Stelling 8

De externe motivatie van een toets zorgt ervoor dat de studenten alles nog eens op een rijtje zetten.

Als bijlage 4 is een toets opgenomen.

Stelling 9

In de huidige omstandigheden van toenemende werkdruk en weer grotere aantallen studenten is het sterk structureren van een cursus een middel om toch een hoog rendement te behalen.

Dientengevolge is er gekozen voor een nogal gesloten cursus.

Stelling 10

- a. Het eerste deel van de cursus dient 'contextarm' te blijven omdat je vaardigheden moet isoleren als er sprake is van een complex probleemveld.
- b. Het tweede deel van de cursus vraagt om uitbreiding, nu in het voortgezet onderwijs steeds meer problemen gepresenteerd worden in contexten.

4 Probleemoplossen in het voortgezet onderwijs

Eén van de doelen van de cursus is natuurlijk dat de opgeleide leraren uiteindelijk in de onderwijspraktijk de juiste vragen weten te stellen om leerlingen aan te zetten tot een adequate houding bij het oplossen van problemen.

Na een inventarisatie aan de hand van huidige schoolboeken voor de onderbouw en SLO-pakketten van de functie-lijn kwam ik tot de volgende lijst met tips en vragen, waarmee in het voortgezet onderwijs aandacht kan worden besteed aan het probleemoplossen van leerlingen.

- I. Algemene regels met betrekking tot probleemaanpak
 - lees de tekst nogeens rustig door (vooraf, tussendoor, achteraf);
 - zeg het eens in je eigen woorden;
 - herinner je je een soortgelijk probleem?
 - probeer eens wat;
 - maak een plan;
 - bekijk de zaak van diverse kanten;
 - controleer je zelf;
 - denk (achteraf) na over je oplossingsweg.
- II. Specifieke vaardigheden/heuristieken
 - a. Vertaalvaardigheden, probleem begrijpen, mathematiseren:
 - wat zijn de gegevens?
 - wat zijn de belangrijkste gegevens?
 - wat zijn hoofd-, wat bijzaken?
 - zeg het probleem eens op een andere manier;

- kies een handige manier om de gegevens weer te geven;
- maak een plaatje, tekening, tabel of grafiek;
- kies een (handige) notatie.
- b. Een plan maken:
 - maak eens een schatting/gokje en controleer je antwoord;
 - probeer eens een vermoeden uit te spreken;
 - zoek systematisch. Zie je misschien een regelmaat?
 - werk van achteren naar voren;
 - neem een (getal-)voorbeeld. Neem er meerdere;
 - kun je het probleem eenvoudiger maken? Kun je het probleem opsplitsen in deelproblemen en die eerst oplossen?
 - overdrijf eens.

Categorie I en II.a zouden in de onderbouw aan bod moeten komen door de vragen expliciet te formuleren, terwijl zaken die spelen bij het maken van een oplossingsplan (II.b) waarschijnlijk meer in de bovenbouw aan bod kunnen komen. Door de juiste vragen te stellen ontwikkel je bij leerlingen een wiskundige houding, die zich kenmerkt door:

- niet slechts antwoord gericht zijn;
- systematisch willen werken;
- zichzelf (waarom-)vragen stellen;
- behoefte hebben om vermoedens te bevestigen;
- op zoek gaan naar generalisaties;
- willen nadenken over de eigen aanpak;
- het echt willen begrijpen;
- de kracht van een bewijsvoering ervaren.

Het zal duidelijk zijn dat het bovenstaande met name in het tweede deel van de cursus aan de orde komt, als de studenten een contextrijk probleem voorleggen aan een 3-havo leerling.

Er is daarbij gezocht naar een probleem uit een schoolboek (ter legitimering naar studenten en leerlingen), waar voldoende probleemoplossende vaardigheden bij aan bod kunnen komen.

Dat het niet eenvoudig was zo'n probleem te vinden, relateert ook meteen een directe vertaling van het geleerde uit het eerste deel van de cursus naar de onderwijspraktijk.

Ten aanzien van het leren begeleiden van leerlingen bij contextrijke opgaven is er dan ook nog veel werk aan de lerarenopleidingwinkel.

In hoeverre de cursus haar doel bereikt is moeilijk te beoordelen. Er wordt gewerkt aan doelen, die pas in een veel langer proces haalbaar zijn en in een hele opleiding nagestreefd dienen te worden. Verder verschilt de opbrengst nogal van student tot student. Uit mondelinge evaluaties en informele gesprekken blijkt dat de cursus door de studenten zeer gewaardeerd wordt.

Noten

1. Voor belangstellenden bestaat de mogelijkheid het cursusmateriaal te bestellen bij Ton Konings, Hogeschool Gelderland, tel. 080-459973

Literatuur

Mason, J., L. Burton and K. Stacey: *Thinking Mathematically*, Addison-Wesley, Londen 1982.

Polya, G.: *Heuristiek en wiskunde, een andere kijk op de werkwijze van wiskunde*, Malmberg, 1975.

Streun, A. van: *Heuristisch wiskundeonderwijs*, Groningen 1989 (dissertatie).

Bijlage 4.1 Inhoudsopgave cursus ‘Probleemoplossen’

DEEL 1

Cursusbeschrijving van deel 1

Inleiding

Binnenkomer: Band om de aarde

Kegelprobleem

Rollenspel Band om de aarde (reserve)

De band om de aarde in een schoolboek

Huiswerk: - Probleemoplossen in de klas

- Oplossing kegelprobleem

- Inleverprobleem 1: Hekkenprobleem

Probleemaanpak / vier fasen van probleemoplossen

Binnenkomer: Kortingsprobleem

Slijpsteenprobleem

Rollenspel: Tapijtprobleem

Palindromen

Problemen uit de Wageningse methode: - rijexamen

- ... en de oudste ...

- talenpakket

Huiswerk: - Hoofdafdelingen en sleutelvragen (Polya)

- Wijnvatenprobleem

- De maximale oppervlakte

- Inleverprobleem 2: Afgeknotte kegel

Meer manieren / niveaus om een probleem op te lossen

Binnenkomer: Passpiegel

De achtervolging van de Bismarck

Huiswerk: - Inleverprobleem 3: Driehoek met max. opp.

- Nog een keer vier fasen van probleemaanpak (tekst)

Elkaar helpen / blikwisselingen / een plan ontwerpen

Binnenkomer: De petjes

Help de ander een stapje verder (rollenspel)

Probleem van de forens

Negen-punten-probleem

Blikwisselingen

Huiswerk: - Vragen- en hinten-lijst

- Inleverprobleem 4: Het wijnprobleem

- Diverse opgaven uit schoolboeken

Vragen stellen

Binnenkomer: één vraag

Juf is dit goed? $a + a = a^2$?

Huiswerk: - Zwaartepunt viervlek, getallenpuzzel, guldens,
stompe driehoek
- Inleverprobleem 5: Knipprobleem

Heuristieken

Binnenkomer: Luciferspel

Slotcollege

Een andere indeling in fasen van probleemaanpak

Huiswerk: - Werkschrift op orde brengen
- Inleverprobleem 6: 'Geen les-lessen'

Toets

De toets van 1989

DEEL 2

Cursusbeschrijving van deel 2

Programma voor de cursus

Problemen - De weg van Drachten naar Groningen ...
- Te hard gereden

Situaties, wiskunde en vragen stellen

Vragen stellen: Fasen van probleemoplossen, mathematiseren,
mate van structurering

Lesopdracht

Verwerkingsopdracht

Rechte lijnen (Hoofdstuk uit Wageningse Methode, voorkennis)

Bijlage 4.2 Vragen stellen

Fasen van probleemoplossen

Wat is het probleem?

- lees de tekst nog eens door
- wat is onbelangrijk
- wat wordt gevraagd
- wat weet je
- wat wil je
- maak een plaatje
- voer notaties in
-
-

Wat ga je doen?

- heb je vaker zoiets gezien
- kun je een deel doen
- hoe kun je het aanpakken
- kun je het vereenvoudigen
- bekijk het eens van een andere kant
- probeer eens wat
-
-

Doe 't

Wat deed je precies?

- kun je jezelf controleren
- kan het anders
- waarom ...
- wat betekent ...

Mathematiseren van context

Van situatie naar wiskunde

- wat zijn de gegevens
- wat zijn hoofd-, wat bijzaken
- zeg het probleem anders
- kies handige manier om de gegevens weer te geven
- maak plaatje/tabel/grafiek/tekening
- welke aannames doe je
- welke grootheden zijn er
- kies notaties
-

Wiskunde/probl. opl.

(zie linker kolom)

Van wiskunde naar situatie

- wat betekent de gevonden oplossing in de situatie
- wat als ...

Mate van structurering

Eerst open, dan gesloten inzoomen en uitzoomen

- ↑ open
- Algemene/open/globale vragen
 - hoe zou je dat aanpakken
 - heb je zoiets vaker gezien
 - hoe zou je dat controleren/anders doen
 - wat wordt gevraagd
 -

Meer specifieke (nog vrij open) vragen

- heb je ... al geprobeerd
- heb je al een plaatje gemaakt
- kun je het probleem vereenvoudigen
-

Hints in vraagvorm

- hoe ziet de vergelijking van een tweedegr. functie eruit
-

Hints in opdrachtvorm

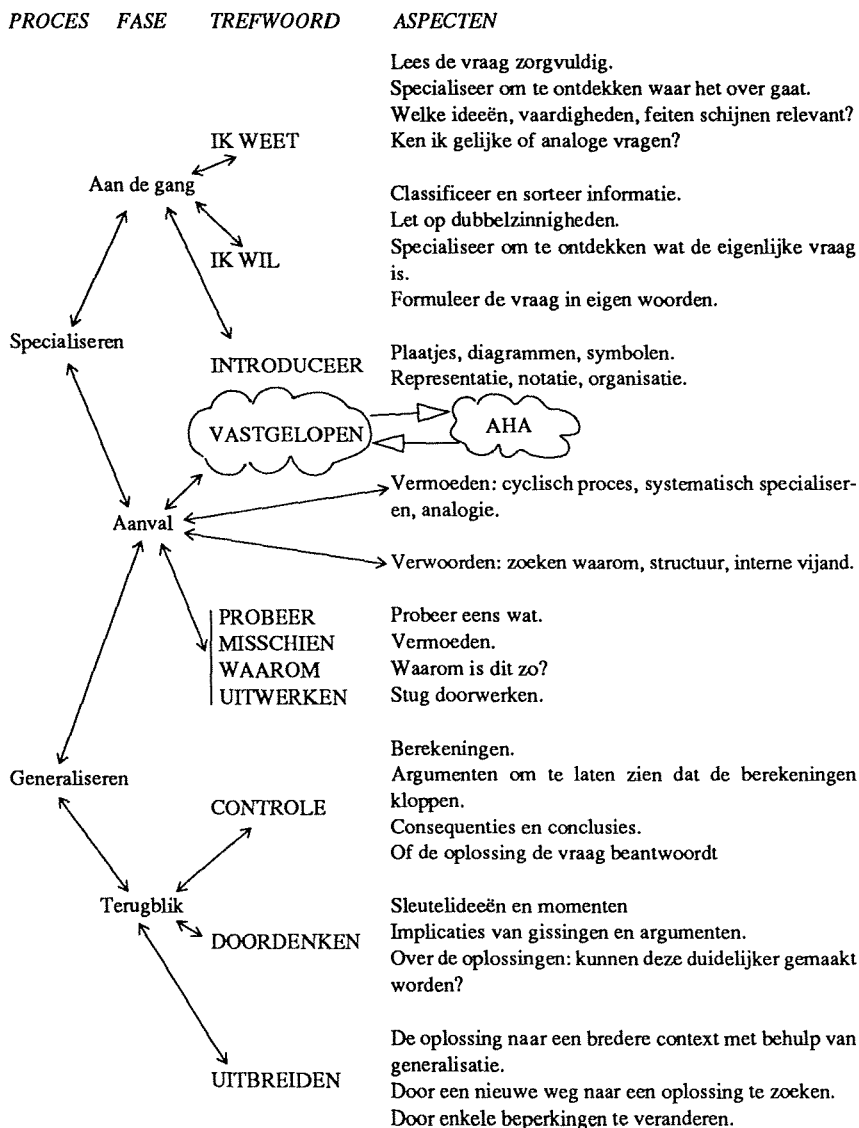
- teken een assenstelsel en zet de tijd bij de x -as

Hints in mededelingvorm

- je vindt de gevraagde x nu door ...
- ↓ gesloten

Bijlage 4.3 Een andere indeling in fasen van probleemaanpak

Iedere indeling van een probleemoplossingsproces is in zekere zin kunstmatig, heeft een speciale bedoeling en ook zekere beperkingen. In het voorgaande is vooral nadruk gelegd op de indeling van Polya die overzichtelijk is en veel belang hecht aan het maken van een plan. De indeling hieronder (uit: Mason (1982)) sluit wat meer aan bij een natuurlijk verlopend proces van probleemoplossen, waarbij de fasen van Polya meer verweven zijn.



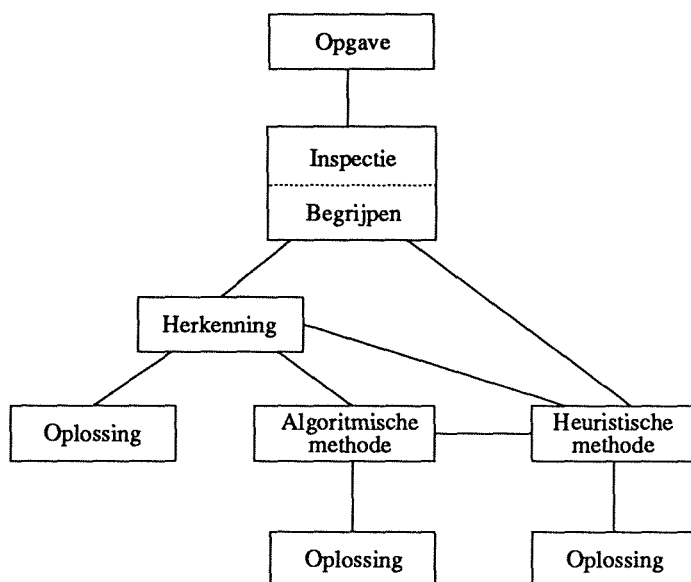
Het volgende schema (uit: Van Streun (1989)) geeft weer dat bij het oplossen van problemen veelal òn heuristische òn algoritmische methoden worden gebruikt.

Leerlingen verschillen sterk in de mate waarin een opgave herkend wordt als:

- een opgave die tot een zeker kennisgebied hoort en oplosbaar is met geleerde standaardalgoritmen;
- een opgave die via een geleerde heuristische methode oplosbaar is;
- een opgave die wiskundig sterk lijkt op andere opgaven.

Zonder die herkenning is men aangewezen op heuristische methoden.

Tijdens een oplossingsproces vindt vaak alsnog één van bovenstaande herkenningen plaats en gaat men alsnog over op algoritmische methoden.



Schematische weergave van het oplossingsproces

Bijlage 4.4 Toets probleemoplossen

1. Hekkenprobleem

Gegeven zijn 5 wegen met breedtes 2.90, 3.00, 2.00, 2.60 en x meter.

- Hoe lang moeten de hekken zijn opdat telkens twee hekken een weg kunnen afsluiten als verder gegeven is dat $x = 3.20$ meter.
- Voor welke waarden van x is het probleem oplosbaar?



2. Badkuipprobleem

Boven een badkuip zitten drie verschillende kranen A, B en C.

Draait men de kranen A en B open dan is de badkuip in precies 4 minuten vol.

De kranen A en C vullen de badkuip in precies 5 minuten, terwijl de kranen B en C dat in precies 6 minuten doen.

In hoeveel minuten is het bad vol als drie de kranen tegelijk worden opengedraaid?

3. Ontbinden in factoren

Een leerling vraagt jou: ' $3q^2 - 6q^2 = 3(p - q)^2$, is dat goed?'

- Geef minstens drie algemene/open vragen, die je de leerling zou kunnen stellen.
- Geef minstens drie specifieke/gesloten vragen, die je de leerling zou kunnen stellen

4. Diagonalenprobleem

Gegeven is een regelmatige n -hoek.

Het aantal diagonalen van deze n -hoek ligt tussen 3100 en 3200.

Bereken n .

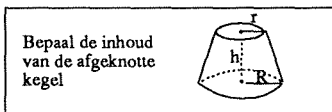
Los dit probleem op zoals je dat gedaan hebt bij de inleverproblemen: in de rechterkolom de uitwerking van het oplossingsproces, in de linkerkolom opmerkingen over het oplossingsproces, de fases in het proces

5. Controle

Een student geeft als oplossing van nevenstaand probleem:

$$V = \frac{1}{2}\pi(R^2 + Rr + 2r)$$

- Controleer deze oplossing op zoveel mogelijk manieren (en niet door deze formule van tevoren af aan af te leiden).
- Wat is volgens jou de goede oplossing? (op grond van vraag a, dus niet door het helemaal te berekenen)



Bonus

6. Getalprobleem

Welk getal van vier cijfers wordt vier maal zo groot als je de volgorde van de cijfers omkeert?

Standaardalgoritmen in het W12-16-project

Monica Wijers

1 Inleiding

Een verhaal met bovenstaande titel vraagt allereerst om een verduidelijking van de terminologie. Het project W12-16 is in 1988 gestart met als belangrijkste doel het ontwikkelen van een nieuw wiskundeprogramma voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs (lbo/mavo/havo/vwo), en een nieuw examenprogramma voor mavo en lbo. Over dit project zijn verschillende artikelen gepubliceerd, onder andere in een special van de 'Nieuwe Wiskrant' (september 1990). Op de vergaderingen die het team W12-16 regelmatig houdt, is het onderwerp 'standaardalgoritmen' nooit als agendapunt aan de orde geweest. Dat wil niet zeggen dat er niets over de combinatie 'standaardalgoritmen' en 'project W12-16' op te merken is. Dan zal echter wel eerst de volgende vraag beantwoord moeten worden: Wat is een (standaard-)algoritme?

2 Wat is een (standaard-)algoritme?

Om antwoord op bovenstaande vraag te krijgen heb ik allerlei bronnen geraadpleegd: woordenboeken, artikelen en boeken over wiskunde(onderwijs), materiaal voor informatica, informatiekunde, gegevensverwerking en wiskundeschoolboeken. In de daar gegeven omschrijvingen komen de volgende karakteristieken regelmatig voor: een algoritme is mechanisch, heeft een vast schema, vereist geen eigen vindingrijkheid, is in principe programmeerbaar en leidt zeker tot het antwoord. Andere termen die voorkomen zijn: voorschrift, schema, werkwijze, recept en techniek. De genoemde karakteristieken houd ik in het achterhoofd als ik op zoek ga naar de (plaats van) (standaard-)algoritmen in W12-16. Een precieze definitie laat ik in het vage, in het vervolg zal ik de termen: algoritme, schema, techniek door elkaar voor hetzelfde gebruiken.

3 Algoritmen en W12-16

Het project W12-16 is halverwege en verkeert nu in een fase waarin veel zaken geëxpliciteerd worden. De lange lijnen van de leerstof worden duidelijker en daarin past ook het nadenken over vragen als: hoe passen algoritmen of algoritmische kennis binnen de uitgangspunten van het project, welke plaats moeten algoritmen in het nieuwe programma krijgen, welke algoritmen moeten er zeker in, en - heel belangrijk - hoe willen we dan dat leerlingen die algoritmen leren? Ik kan op deze vragen geen eindantwoorden geven, wel zal ik de stand van zaken op dit moment beschrijven. Ik ga eerst in op de plaats van de algoritmen binnen de uitgangspunten van het project, daarna zal ik per leerstofonderdeel een voorbeeld geven van de manier waarop er met algoritmen wordt omgegaan.

4 Uitgangspunten en algoritmen

Het nieuwe programma wordt ontwikkeld aansluitend bij de uitgangspunten van realistisch wiskundeonderwijs. Die uitgangspunten zijn vaak beschreven en komen in allerlei vormen voor. Ik beperk me hier tot het noemen van die uitgangspunten, die voor mijn verhaal het meest relevant zijn. Deze zijn:

- wiskunde leren door wiskunde te doen;
- het wiskundig bouwwerk mee te opbouwen;
- gebruik maken van realistische situaties om wiskunde te leren en toe te passen.

Deze uitgangspunten lijken weinig ruimte te bieden voor het ontwikkelen van (standaard-)algoritmen. Die ruimte is er echter wel, al vereist het een bepaalde manier van omgaan met algoritmen. Er dient hierbij onderscheid gemaakt te worden in de gehanteerde didactiek. Een algoritme hoeft namelijk niet algoritmisch aangeleerd te worden, dat wil zeggen dat de leraar of het leerboek het voordoet en de leerling hetzelfde nadoet. Een algoritme kan ook door de leerlingen mee ontwikkeld worden.

Een voorbeeld uit het basisonderwijs is het leren van het standaardalgoritme voor staartdelen. Dit kan gebeuren op de voordoen-nadoen methode waarbij elke leerling het algoritme in dezelfde (verkorte) vorm leert. Het kan echter ook op een andere manier. De leerling begint dan met een niet te eenvoudig deelvraagstuk en lost dit op door bijvoorbeeld herhaald aftrekken. In deze werkwijze brengt de leerling dan, met behulp van de leerkracht, verkortingen aan, die uiteindelijk het algoritme in de bekende standaardvorm (kunnen) opleveren. Niet elke leerling zal het algoritme in dezelfde standaardvorm hanteren. De leerling houdt bij deze werkwijze overzicht over wat hij of zij doet. In het materiaal van W12-16 worden algoritmen, vaardigheden en technieken meestal inzichtelijk aangeleerd, doordat de leerlingen ze mee 'opbouwen'.

5 Algoritmen in de rekenlijn

Bij het rekenen op de basisschool leren de leerlingen heel wat rekentechnieken, die voor een groot deel na verloop van tijd algoritmisch van aard zijn. Het uitvoeren van bijvoorbeeld een staartdeling of het cijferend onder elkaar vermenigvuldigen, verloopt dan volgens een vast schema en vereist geen eigen vindingrijkheid meer.

Veel leerlingen in het voortgezet onderwijs blijken met rekenen problemen te hebben. Die liggen vooral op het terrein van breuken, verhoudingen en procenten. In het project W12-16 is ervoor gekozen om met name de zwakke rekenaars te leren om in de veel voorkomende verhoudingsproblemen structuur te herkennen. In de pakkettenserie 'Praktisch rekenen' is de verhoudingstabel gekozen als middel om verhoudingsproblemen te structureren. Daarbij ontdekken de leerlingen handige 'maniertjes' om in die tabellen te rekenen, hierbij is weinig rekenkennis nodig (figuur 1). De juistheid van die maniertjes wordt niet bewezen, maar volgt vanzelfsprekend uit de context waarin met guldens en kwartjes wordt gerekend.

De maniertjes vormen een soort deelalgoritmen, waaruit de leerling zelf kan kiezen. Ze functioneren binnen het werken met de verhoudingstabel. Die tabel vormt een vast schema.

Het gaat echter niet om het werken met de verhoudingstabel als doel; de tabel is een middel om verhoudingsproblemen te structureren. Dit structureren van het probleem is allerminst algoritmisch van aard, het vereist inzicht en enige mate van vindingrijkheid van de leerling.

<table><tr><td>10</td><td>4</td><td>14</td></tr><tr><td>250</td><td>100</td><td>350</td></tr></table>	10	4	14	250	100	350	samennemen
10	4	14					
250	100	350					
<table><tr><td>7</td><td>14</td></tr><tr><td>105</td><td>210</td></tr></table>	7	14	105	210	verdubbelen		
7	14						
105	210						
<table><tr><td>1</td><td>15</td></tr><tr><td>5</td><td>75</td></tr></table>	1	15	5	75	vermenigvuldigen		
1	15						
5	75						
<table><tr><td>50</td><td>25</td></tr><tr><td>1000</td><td>500</td></tr></table>	50	25	1000	500	halveren		
50	25						
1000	500						
<table><tr><td>20</td><td>3</td><td>17</td></tr><tr><td>300</td><td>45</td><td>255</td></tr></table>	20	3	17	300	45	255	erafhalen
20	3	17					
300	45	255					

Figuur 1: Handige 'maniertjes'

Als eenmaal het verhoudingsprobleem zo gestructureerd is dat het in de tabel past, fungeert de tabel met maniertjes als een soort algoritme. De maniertjes kunnen gezien worden als stappen in de richting van een verkorte eindvorm waarbij steeds dezelfde werkwijze (hetzelfde algoritme) wordt gevolgd, die in één of twee stappen het juiste antwoord oplevert.

De leerlingen hanteren, zeker in het begin, die verkorte manier nog niet. Ze bepalen zelf welke maniertjes voor hen bij het gegeven vraagstuk het handigst zijn. De leerlingen bouwen de techniek mee op en hebben daardoor steeds de mogelijkheid om terug te vallen op een eerdere (primitievere?) vorm. In tegenstelling tot een echt (eind-)algoritme blijft er hier ruimte voor eigen inbreng en creativiteit van de leerlingen. De sterke kant, met name voor zwakke rekenaars, is juist dat er allerlei manieren zijn om tot het antwoord te komen en dat de leerlingen blijven zien en begrijpen wat ze doen.

Het bereiken van zo'n korte eindvorm kan wel het uiteindelijke doel zijn, maar zal niet door alle leerlingen bereikt worden. Het volgende voorbeeld laat zien hoe leerlingen werken met de tabel.

Fricandeaau kost f 1,25 per 50 gram.
Hoeveel moet je betalen voor 350 gram?
Maak een tabel.

gewicht	50						
prijs	125						

Dit vraagstuk lost een goede rekenaar bijvoorbeeld op door iets te bedenken als: '350 gram is 7 keer 50 gram en dat kost dus 7 keer fl 1,25 dus fl 8,75'. Een zwakke rekenaar weet niet dat 350 gram 7 keer 50 gram is en weet vermoedelijk ook niet dat hij of zij dat nodig heeft. Drie leerlingen hebben dit vraagstuk met een tabel opgelost.

gewicht	50	100	150	200	250	300	350
prijs	125	250	375	500	625	750	875

Dit is weliswaar een wat omslachtige manier, maar de leerling vindt wel een antwoord.

gewicht	50	100	200	400	350		
prijs	125	250	500	1000	875		

Zo kan het ook. Van de 400 één keer 50 afhalen en van de 1000 gaat dan één keer 125 af.

gewicht	50	100	200	400	350		
prijs	125	250	500	1000	875		

En natuurlijk gaat er weleens wat fout. Deze leerling blijft vastzitten in het verdubbelen en ziet helemaal niet meer waar ze naar toe moet. Ze denkt wellicht dat verdubbelen altijd tot het gewenste antwoord leidt. In onze termen uitgedrukt: ze beschouwt verdubbelen als een algoritme. Er zal in de lessen dan ook zeker aandacht besteed moeten worden aan het feit dat je meerdere maniertjes nodig hebt.

De tabel is een middel, dat wil zeggen dat het prettig is als deze makkelijk te gebruiken is. De eerste leerling uit het voorbeeld zal op haar eigen manier wel erg lang bezig zijn om een antwoord te vinden. De vraag die opkomt is, in hoeverre je er naar moet streven dat alle leerlingen verkortingen gaan aanbrengen en komen tot een meer algoritmische (standaard-)aanpak. Daarover zijn de meningen verdeeld. Het antwoord op de vraag hangt onder andere sterk af van de haalbaar-

heid. Je kunt wel willen dat alle leerlingen de kortste methode hanteren, maar het is de vraag of dat wel realiseerbaar is. Het model biedt wel de mogelijkheid voor een meer gestandaardiseerde algoritmische aanpak. Het volgende voorbeeld laat zien hoe er in het pakket aangestuurd wordt op verkorting, door te werken via één en het inzetten van de zakrekenmachine.

OP DE 1

*Een manier om zoveel per zoveel sommen te vergelijken is:
 reken om naar 1 op de zoveel of zoveel per 1
 Je krijgt dan altijd een kolom met een 1 in de tabel.
 Je mag een rekenmachine gebruiken.*

*Welke schriftjes zijn goedkoper?
 10 schriftjes voor f 12,25 of 12 schriftjes voor f 14,10*

<i>aantal</i>	<i>10</i>	<i>1</i>		<i>aantal</i>		<i>1</i>
<i>prijs</i>	<i>12,25</i>			<i>prijs</i>		

Deze manier is tamelijk algoritmisch van aard. Het blijft echter inzichtelijker dan het werken met bijvoorbeeld kruisprodukten, waarbij leerlingen na verloop van tijd vaak niet méér weten dan dat er een kruis bij hoorde en dat je moest vermenigvuldigen en delen; maar wat, hoe en waarom is vergeten en niet meer te achterhalen. Dat bezwaar heeft de verhoudingstabel minder, zelfs als er wat meer volgens een standaardroute of algoritme gewerkt wordt.

6 Algoritmen in de algebraliijn

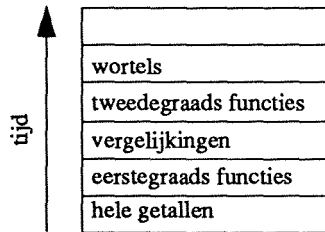
Algoritmen in de algebraliijn functioneren voor een deel als de maniertjes bij het rekenen. Er zijn gebieden die eindalgoritmen kennen, maar daarbinnen functioneren allerhande deelalgoritmen. De eindalgoritmen worden niet in die vorm aangeboden, maar via deelalgoritmen door leerlingen mee opgebouwd.

Algoritmen en algebra lijkt een voor de hand liggende combinatie (niet alleen omdat de woorden zo op elkaar lijken). Misschien omdat het zo makkelijk lijkt is het juist zo lastig. Het grootste probleem bij de algebra is het vinden van een vorm, zodat het enerzijds interessant, zinvol, leuk en nuttig is voor de leerlingen en anderzijds voldoende mogelijkheden biedt om in wiskundige zin op voort te bouwen. Traditioneel gezien is de algebra opgebouwd volgens figuur 2. Er is een ordening naar complexiteit van functietypen en de objecten (getallen) waarmee je werkt. Je kiest voor één functietype tegelijk en doet er allerlei wiskundig mee.

Binnen W12-16 is gekozen om te werken met een gekanteld model. De richting van de tijd wordt gedraaid. Het uitgangpunt van de algebraliijn is een ordening naar complexiteit van technieken. Je kiest voor een breed scala functies tegelijk en doet er eerst iets wiskundig eenvoudigs mee, gebruikt eenvoudige technieken,

en pas later doe je met hetzelfde scala iets abstracters. Je kunt dan beginnen met eenvoudige technieken zonder je daarbij te beperken tot bijvoorbeeld alleen eerstegraads vergelijkingen met natuurlijke getallen.

Het oplossen van: 'Zoek een getal zodat $\text{getal} * \text{getal} * \text{getal} = 8$ ' is niet veel lastiger dan 'Los op: $3x - 7 = x + 5$ '. Dat blijft zo ook als je de eerste vergelijking formuleert als 'Los op: $x^3 = 8$ '.



Figuur 2: Traditionele opbouw van de algebra

De technieken die gehanteerd worden staan in dienst van het werken met verbanden en zijn niet bedoeld om allerlei algebraïsche systemen op zich te bestuderen. Ze worden opgebouwd van eenvoudig naar complex.

Een voorbeeld: In de bijdrage van Spijkerboer aan de conferentie kwam het volgende probleem voor: een leerling kreeg een vraagstuk voorgelegd over zakgeld. Het vraagstuk was geformuleerd in de vorm van een verhaaltje:

Anneke begint met 15 gulden en krijgt per week 7 gulden erbij.

Patrick begint met 25 gulden en krijgt er per week 5 gulden bij.

Na hoeveel weken hebben ze evenveel?

Dit vraagstuk moest worden opgelost door er een vergelijking van te maken en die dan volgens de regels op te lossen. De leerling uit het voorbeeld had met dat oplossen nogal wat moeite. De tussenvergelijkingen hadden geen betekenis en het terugvertalen van de oplossing naar de context bleek lastig. In de algebra van W12-16 zou zo'n vraagstuk ook kunnen voorkomen. Daar staat het leerlingen in beginsel vrij om verschillende oplossingstechnieken te hanteren. Dit vraagstuk zou bijvoorbeeld met een tabel opgelost kunnen worden, of met een grafiek. Een andere veel gehanteerde techniek is redeneren op basis van de structuur van de (lineaire) verbanden. In dit geval is de redenering dan als volgt:

Anneke begint met een achterstand van 10 gulden, zij loopt per week 2 gulden in en heeft die achterstand dus na 5 weken weggewerkt.

Dit is een hele eenvoudige redenering, die in dit soort situaties altijd werkt. Natuurlijk kan iedereen nu voorbeelden bedenken waarbij de techniek niet werkt, maar dat kan bij elke techniek, dat is nooit een argument om bepaalde oplossingsmethoden niet toe te staan.

Ook binnen de algebra is het de tendens om niet meteen een eindalgoritme of

techniek te ontwikkelen die in 'alle' gevallen een oplossing biedt. Er wordt gewerkt met verschillende 'deel'-technieken die vaak in een beperkt aantal gevallen toepasbaar zijn. Het streven daarbij is te werken met technieken die, zoals eerder gezegd, op verschillende functietypen van toepassing zijn.

Voorbeelden van dergelijke technieken zijn:

- werken met een tabel (onder andere: inzoomen, interpoleren, differenties bepalen);
- werken met grafieken (inhalen, inzoomen-uitzoomen);
- omkeren van actieketens;
- werken met structuur van de vergelijking.

Van dit laatste is een voorbeeld opgenomen in het concept examenprogramma (1990):

'De expressies $2r^3$ en $r(r^2 + 9)$ kunnen bijvoorbeeld vergeleken worden door als volgt te herschrijven en te veranderen:

$2r^3$	en	$r(r^2 + 9)$	zijn gelijk als
$r \times 2r^2$	en	$r \times (r^2 + 9)$	gelijk zijn; dat is zo als
$2r^2$	en	$r^2 + 9$	gelijk zijn; dat is zo als
$r^2 + r^2$	en	$r^2 + 9$	gelijk zijn; dat is zo als
r^2	en	9	gelijk zijn; enzovoort.'

Voor het oplossen van allerlei vergelijkingen wordt aansluitend bij de werkwijze binnen de algebralin in het kader van het Print-project gewerkt aan het ontwerpen van een zogenaamde frame-editor. Daarbij kunnen delen van vergelijkingen afgedekt worden met een 'frame' en vervangen worden door een getal waardoor een nieuwe eenvoudigere vergelijking ontstaat. Door herhaald toepassen van deze methode ontstaat uiteindelijk een eenvoudige vergelijking die in één stap opgelost kan worden. Het volgende voorbeeld toont deze werkwijze. De exacte lay-out van de frame-editor is nog niet bekend, maar de bedoeling wordt wel duidelijk:

De opdracht luidt: *Los op:* $2 \times (\text{getal} - 7) = 24$

$2 \times (\text{getal} - 7) = 24$ wordt $2 \times \boxed{} = 24$ dus $\boxed{} = 12$

$\text{getal} - 7 = 12$ wordt $\boxed{} - 7 = 12$ dus $\boxed{} = 19$

$\text{getal} = 19$

In sommige schoolboeken wordt deze 'bordjesmethode' ook gehanteerd, meestal bij het oplossen van bepaalde lineaire vergelijkingen.

De opeenvolgende stappen liggen niet bij elke vergelijking vast. Per probleem kunnen er soms verschillende mogelijkheden zijn. Per stap ligt echter algoritmisch vast wat je moet doen. Zo moet je in de tweede stap van het genoemde voorbeeld 24 door 2 delen om te vinden waaraan de uitdrukking in het frame gelijk moet zijn. Je kunt ervoor kiezen de computer dit rekenwerk te laten doen, zo-

dat de leerling zich op het proces kan richten. Dit is afhankelijk van de doelstellingen. Veel complexere vergelijkingen kunnen ook met deze methode opgelost worden. Zo zal de opgave:

$$2 \times \left(\frac{1}{\sin(\text{getal} + 3)} - 7 \right) = 24$$

in het begin dezelfde uitwerking te zien geven als vorig voorbeeld, namelijk:

$$2 \times \boxed{} = 24$$

De reeks stappen wordt echter langer. De enige voorwaarde die aan de vergelijking moet worden gesteld is, dat de onbekende slechts op één plaats mag voorkomen. De software kan ondersteuning bieden bij het kiezen van geschikte stukken vergelijking die afgedekt moeten worden, bovendien kan, indien wenselijk, het rekenwerk deels uit handen van de leerling genomen worden, waardoor de leerling zich meer kan richten op de structuur van het probleem en het oplossingsproces.

Welke bewerkingen de computer uiteindelijk doet en welke de leerling, staat op dit moment nog niet vast. Het is overigens niet de bedoeling dat de algebra computerafhankelijk wordt, de software heeft een ondersteunende functie. Deze techniek van het opbreken van vergelijkingen werkt onder andere voorbereidend op het goed splitsen van samengestelde functies bij het differentiëren met behulp van de kettingregel.

7 Algoritmen in de meetkundelijn

De meetkundelijn zoals die binnen het project W12-16 wordt ontwikkeld bevat een kwalitatieve component, de zogenaamde *kijkmeetkunde*. Die kant wordt naar buiten toe vaak het sterkst benadrukt, het is immers die kant van de meetkunde die nu (weer) nieuw is binnen de meetkunde in het voortgezet onderwijs. Het is echter niet zo dat het de enige meetkunde is die op het programma staat. Er blijven ook meer rekenachtige zaken. Zo verdwijnt de stelling van Pythagoras niet, er wordt gewerkt met evenredigheden en ook de formules voor het berekenen van oppervlakte en inhoud blijven in het programma. Er is een duidelijk verband tussen de verschillende kanten van de meetkunde en ook tussen meetkunde en andere lijnen. Zo kan bijvoorbeeld het onderwerp evenredigheden gestart worden door aan te sluiten bij het werken met schaduwen en kan later, bij de meer rekenachtige kant, de verhoudingstabel gebruikt worden.

Zijn er ook algoritmen binnen de kijkmeetkunde? In eerste instantie lijkt het waarschijnlijk dat die uitsluitend betrekking zullen hebben op de rekenkant van de meetkunde. Dat is echter niet het geval. Ook binnen de kijkmeetkunde komen technieken voor die goed te beschouwen zijn als algoritmische werkwijzen. Net als bij het rekenen en algebra wordt een algoritme of techniek (ik gebruik hier beide termen door elkaar) niet meteen in zijn eindvorm aangeboden.

Ook hier is het de bedoeling dat leerlingen stapsgewijs een techniek mee opbouwen en inzicht blijven houden in wat ze doen.

Ik behandel hier één voorbeeld, over perspectief tekenen, uit het pakket 'De Drongs'. Dit meetkundepakket voor klas drie bevat nog meer voorbeelden van verwante algoritmische technieken uit de meetkunde, bijvoorbeeld het bepalen van de plaats van iets, aan de hand van twee, uit verschillende richtingen genomen foto's. Het voorbeeld staat in bijlage 1.

Deze techniek is gebaseerd op de volgende deeltechnieken:

- werken met boven- en zij-aanzicht;
- tekenen van kijklijnen in beide aanzichten;
- vinden van het doorgangspunt van de kijklijnen op het kijkscherf;
- combineren van het boven- en zij-aanzicht voor het vinden van het vooraanzicht.

Eerder hebben de leerlingen geoefend met de afzonderlijke componenten van deze techniek. Hier worden ze in een groter geheel, in een meer omvattende techniek/algoritme, samengebracht.

De techniek is algoritmisch van aard, hoewel er niet gerekend wordt; er is een vast schema en eigen vindingrijkheid is niet nodig. Door het inzichtelijk opbouwen van de techniek, via deelalgoritmen, is deze door leerlingen ook toe te passen op andere situaties waarin voorwerpen in perspectief moeten worden getekend.

8 Algoritmen in de informatie- en modellenlijn

Toe nu toe hebben de algoritmen steeds als techniek of gereedschap onderdeel van het programma uitgemaakt. In het leerstofonderdeel 'Informatie en modellen' komen we een andere benadering van algoritmen tegen: hier vormen ze onderwerp van onderzoek.

Het volgende citaat komt uit de docementekst bij het experimentele pakket 'Routeproblemen'^{4z} voor klas drie/vier.

'Wiskundige inhoud en leerdoelen

(...)

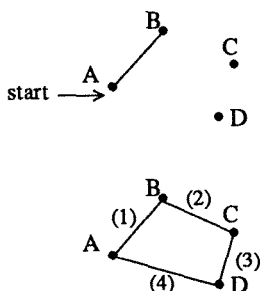
Van alles rond algoritmen:

- het formaliseren van intuïtieve oplossingen tot een algoritme
- optimale oplossingen en redelijke oplossingen
- overwegingen van zuinigheid bij algoritmen
- verwerking van algoritmen door een computer.'

Hier wordt duidelijk verband gelegd tussen computers en algoritmen. Een deel van dit pakket gaat over het handelsreizigersprobleem. Dit probleem vraagt naar de kortst mogelijke rondreis tussen een aantal plaatsen. Er is een computerprogramma (De handelsreiziger) dat volgens verschillende methoden de kortste route bepaalt. Leerlingen formuleren eerst zelf bij elke methode hoe deze werkt. Daarna wordt het voorschrift in stapvorm gegeven.

'Het voorschrift van de Buurmethode

- stap 1: neem een beginpunt
- stap 2: ga van het punt waar je zit naar het dichtstbijzijnde punt (het buurpunt) dat je nog niet gehad hebt
- stap 3: herhaal stap 2 totdat je alle punten gehad hebt
- stap 4: verbind ten slotte het laatste punt weer met het beginpunt.



Om de Dichtste-buur benadering toe te kunnen passen, is het nodig de onderlinge afstanden tussen de punten (plaatsen) te weten.'

Zo komen de 'buur-methode' en de 'grootste-hoek-methode' aan bod, deze methoden zijn algoritmisch van aard, maar zijn in strikte zin geen algoritmen. Ze leveren namelijk niet in alle gevallen zeker het gevraagde antwoord, namelijk de kortste route. Behalve het verwoorden van de voorschriften moeten de leerlingen ze ook zelf, met de hand, uitvoeren. Hierbij worden vragen gesteld over beperkingen van de betreffende methode.

Kun je een voorbeeld bedenken waarbij de Buurmethode zeker de kortste rondreis zal geven? Hoe zouden de plaatsen dan moeten liggen?

Waarom geeft de Buurmethode soms een slecht resultaat? Kun je daar een voorbeeld van geven?

De Buurmethode wordt wel een 'gulzige' methode genoemd. Wat zou daarmee bedoeld worden?

Daarna vergelijken ze de resultaten met die van de computer, die naast beide genoemde methodes ook nog de exacte methode heeft, die zeker de kortste route geeft, maar daar wel lang over doet. Dan volgt de fase van reflectie:

Vergelijk de buur- en grootste-hoek-methode.

Welke vind je beter en waarom?

Welke is het makkelijkst om uit te voeren?

9 Slot

Met voorgaande voorbeelden heb ik laten zien dat ook binnen het nieuwe programma W12-16, dat volgens realistische uitgangspunten ontwikkeld wordt, algoritmen een plaats hebben. Ze worden echter niet algoritmisch aangeleerd en vormen geen einddoel van het onderwijs.

Literatuur

- Team W12-16: *Concept examenprogramma*, SLO, Enschede 1990.
Team W12-16: *Praktisch rekenen*, serie, SLO, Enschede 1990.
Team W12-16: *Routeproblemen*, SLO, Enschede 1990.
Team W12-16: *De Drongs*, SLO, Enschede 1990.
W12-16 special, *Nieuwe Wiskrant* 10 (sept.1990).

Bijlage 9.1 Perspectief tekenen

negen tegels in twee aanzichten

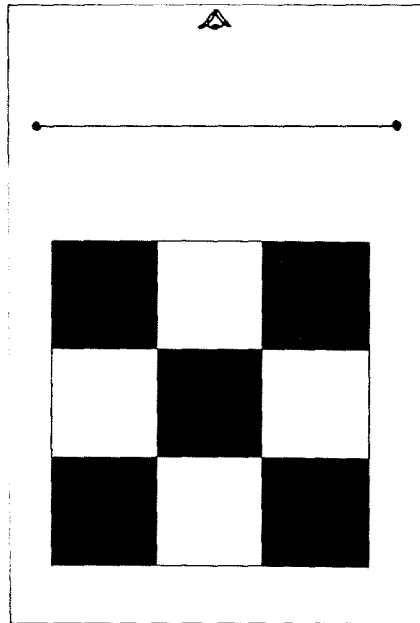
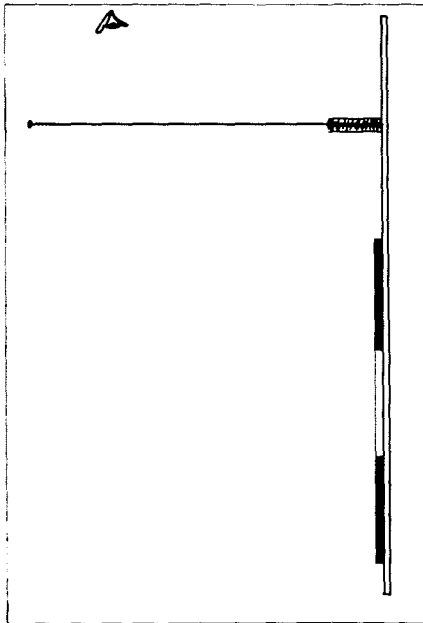
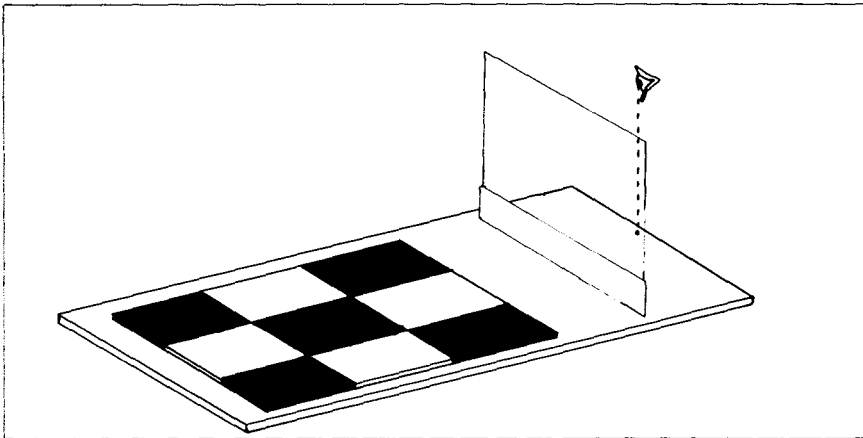
117 >> Deze drie plaatjes horen bij elkaar. Je ziet negen tegels.

Zet bij het goede plaatje :

bovenaanzicht.

overzicht

zijaanzicht



wat is te zien op het scherm?

We gaan de negen tegels op het **doorkijkscherm** tekenen.

118 >> Trek kijklijnen naar de hoeken van de tegels. Doe dat in het bovenaanzicht en in het zijaanzicht.

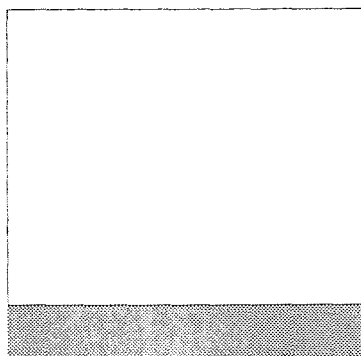
119 >> Met de kijklijnen van het zijaanzicht vind je de **schijnbare hoogtes** op het doorkijkscherm.

Wat voor **schijnbare** dingen vind je met het bovenaanzicht?

120 >> Je kunt nu precies de **doorgangspunten** van de kijklijnen aangeven op deze tekening van het **doorkijkscherm**.

Doe het maar. Werk zo precies mogelijk, dan wordt je tekening mooier.

121 >> Tot slot: zwart-wit inkleuren natuurlijk.



Enkele aspecten van het gebruik van contexten

Een opsomming met voorbeelden uit havo wiskunde-A

Anton Roodhardt

1 Inleiding

Contexten lijken niet te passen in een conferentie over algoritmen. Misschien vond de organisatie het niet verantwoord de deelnemers volledig gealgoritmiiseerd huiswaarts te laten keren? Waarschijnlijker is de overweging dat contexten mee een antwoord geven op de vraag naar de plaats van algoritmen in het wiskundeonderwijs.

Je zou de beschouwingen aan twee vragen kunnen ophangen:

1. Wat zijn nou precies contexten?
2. Hoe gebruik je contexten?

In deze bijdrage wordt onevenredig veel aandacht geschonken aan de tweede vraag. Dit komt overigens overeen met de aandacht voor deze vraag in bijvoorbeeld de vele bijdragen over het Hawex-project in de 'Nieuwe Wiskrant'.

Vraag 1 werd ook gesteld over algoritmen. Niemand bleek het antwoord te weten. Bij contexten was de ontwikkeling al verder. Iedereen had een antwoord en wist ook waarom de antwoorden van de anderen niet deugden.

Aangezien het hier niet om een wetenschappelijke studie gaat, hebben we onbekommerd de al ergens liggende etiketjes 'context' gebruikt. Daarop mag best iets anders staan. Ieder kiese voor zichzelf een naam die de hierna gegeven voorbeelden dekt. Het verslag leest prettiger als die naam ook met een 'c' begint.

Wat betreft de tweede vraag: ik laat enkele voorbeelden laten zien van contexten, welke rol ze spelen, welke overwegingen we daarbij hebben en voor welke problemen en onzekerheden we nog staan.

Er is een grote verscheidenheid aan onderwerpen die soms wel en soms niet met elkaar samenhangen. Daarnaast is er een grote afwisseling aan voorbeelden en commentaren. De ingrediënten voor een dwaaltocht zijn dus volop aanwezig. Om de realisatie daarvan enigszins te beperken beginnen wij met het noemen van enkele, in het Hawex-project veelvuldig besproken en gesignaleerde, aspecten van het gebruik van contexten bij wiskundeonderwijs. Volledigheid wordt daarbij niet nagestreefd.

Opmerking: bij de keuze van de voorbeelden hebben we ons beperkt tot opgaven uit de Hawex-produkties: 'Tabellen, Grafieken en Formules 1, 2, 3 en 4'.

De volgende aspecten van contextgebruik zullen de revue passeren:

- Het verschil in gebruik van contexten bij wiskunde-A en -B (§ 2).
- De invloed van contexten op de keuze van programmaonderwerpen (§ 3).
- De functie van contexten (§ 4):

- opbouw (aanleiding tot en ontwikkeling van begrippen en dergelijke);
- toepassing;
- verlevendiging;
- algemene ontwikkeling.
- De algemene ontwikkeling (§ 5):
 - kennismaken met werkwijzen in andere vakgebieden (onder andere theorievorming);
 - kritische zin oefenen;
 - zien van de soms ondergeschikte rol van de wiskunde (wiskunde in context);
 - begrip krijgen voor het werken met onzekerheden (toekomstige maatschappelijke ontwikkelingen).
- De presentatie van contexten (§ 6):
 - geschreven tekst;
 - gesproken tekst;
 - video;
 - ingevulde formulieren.
- De band met de werkelijkheid (§ 7):
 - bronnengebruik (fragmenten, herschrijving);
 - reconstructie van een historische ontwikkeling;
 - nodig en voldoende verhaal;
 - uitbreken (bijvoorbeeld naar formeel handelen);
 - geconstrueerde context met interne logica.
- De invloed op de leerling (§ 8):
 - inbreken in gedachtengang;
 - betrokkenheid;
 - tegenzin;
 - de waarde van verdubbeling;
 - zelfvertrouwen door controleerbaarheid;
 - rol van de intuïtie en de ontwikkeling van de intuïtie;
 - metaforisch denken;
 - (be-)grijpbaarheid.
- Wat moet er nog voor de leraar gedaan worden? (§ 9).

2 Het verschil in gebruik van contexten bij wiskunde-A en -B

De aard van het onderwerp en de daarbij benodigde wiskundekennis zijn natuurlijk van belang bij de keuze van de context. Maar bij dezelfde context zullen de vragen voor wiskunde-A ook deels een ander karakter hebben dan voor wiskunde-B. Bij een verschijnsel waarvan de grafiek een buigpunt heeft, zal bij wiskunde-A eerder gevraagd worden hoe je uit de omstandigheden kunt verklaren dat er een buigpunt optreedt, terwijl bij wiskunde-B de praktische vragen meer tot een nader onderzoek van de lokatie van dat punt zullen voeren. De reflectie op de gebruikte methode en het behandelen van bijzondere gevallen is ook

meer op zijn plaats bij wiskunde-B dan bij wiskunde-A. ‘Welke invloed heeft de verandering van de waarde van een parameter op de plaats van het buigpunt?’ is een B-achtige vraag. ‘Welke invloed heeft de verandering in de situatie op het proces en daarmee op de plaats van het buigpunt?’ is een A-achtige vraag. Het gebruik van de termen A- en B-achtig geeft ook al aan dat we het verschil niet altijd absoluut moeten nemen. Wat overdreven voorgesteld zouden we kunnen zeggen: bij wiskunde-A zijn de vragen die de context oproept belangrijker dan de zuiver wiskundige vragen. Bij wiskunde-B ligt de nadruk meer op de zuiver wiskundige vragen. Of nog sterker: bij wiskunde-A is de wiskundige vorm aanleiding tot vragen naar achterliggende praktische problemen. Bij wiskunde-B is de context aanleiding tot wiskundige vragen, waarvan de antwoorden echter vaak wel weer worden toegepast in praktische situaties.

Het kiezen van een geschikte presentatie van de feiten voor een breder publiek, behoort tot het wiskunde-A-werk. Daarom is bijvoorbeeld vraag c opgenomen in de opgave ‘De mierenleeuw’ (bijlage 1).

3 De invloed van contexten op de keuze van programma-onderwerpen

Voor het begin van het havo-experiment bestond het programma uit enkele grote lijnen. Al doende is daar een invulling voor gegeven. De leidende gedachte daarbij is geweest: Welke wiskundige zaken komen in de praktijk veel voor? Een traditioneel onderwerp als de kwadratische functie vond in de wiskunde-A-sfeer amper toepassing. Wèl het algemene geval $y = a \cdot x^b$.

Aan de andere kant schoot de inhoud van de schoolwiskunde duidelijk te kort. Daarom werden enkele nieuwe onderwerpen toegevoegd. We noemen ‘functies van meer variabelen’, ‘het lezen van bijbehorende grafieken’ en ‘het aflezen van logaritmische schalen’. Zie in bijlage 2 de opgave ‘Voetbalvelden’.

4 De functie van contexten

Opbouw

Een context kan gebruikt worden om een onderwerp te introduceren en technieken te motiveren. Een aantal van deze gebruiksmogelijkheden is te zien in bijlage 3. Het bevat fragmenten uit een inleidend hoofdstuk over formules (wiskunde-A!). Via allerlei vragen en opdrachten wordt onder andere de structuur van een formule ontrafeld.

Toepassing, verlevendiging

Hoe belangrijk toepassingen in dit programma zijn blijkt wel uit de voorbeelden. Ter illustratie van het niveau van de vragen bij directe toepassing van de leerstof is het vraagstuk ‘Stadsontwikkeling’ uit het onderdeel ‘exponentiële functies’ in bijlage 4 opgenomen. Dat contexten kunnen bijdragen aan de verlevendiging van het wiskundeonderwijs, is ook niet nieuw. Volgens het programma moet wiskunde-A tevens een algemeen vormend karakter hebben. Enkele ideeën daarover zijn in de volgende paragraaf te vinden.

5 De algemene ontwikkeling

Het bezig zijn met contexten op zich is al nuttig voor de algemene vorming van de leerling (en de leraar), maar er zijn verdergaande mogelijkheden. Wij noemen er enkele in het besef dat hiervan nog veel studie moet worden gemaakt.¹ Deze mogelijkheden zijn niet altijd duidelijk van elkaar te scheiden.

Kennismaken met de werkwijzen in andere vakgebieden

Welke soorten vragen worden daar gesteld?

Hoe wordt een theorie opgebouwd met behulp van de wiskunde?

Wat is de waarde van een theorie?

Zie in bijlage 5 de opgave 'Groepsgrootte in de prehistorie'.

Kritische zin oefenen

Het gaat niet alleen om het 'narekenen' van een betoog, maar ook om het opsporen van verzwegen vooronderstellingen en het wegen van de redelijkheid van aannamen. Zie, in bijlage 6, de opgave 'Fietspaden: wel of niet?'.

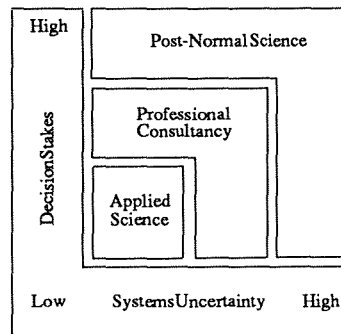
Dit geeft aanleiding tot de vraag waar die raadselachtige grenzen van de gebieden in de grafische voorstelling vandaan komen.

De ondergeschikte rol van de wiskunde

De resultaten van wiskundig onderzoek gaan naar een 'hogere instantie', die ze samen met geheel andere elementen weegt om tot een beslissing te komen. Wie niet bang is voor een beetje maatschappijleer kan hier zelfs ethische problemen aan de orde stellen.

'The trouble is that on the basis of uncertain inputs, decisions must be made, under conditions of some urgency.'

three kinds of scientific advice
- applied science, professional consultancy, post-normal science - measured by the uncertainties about the system on which advice must be given, and the magnitude of the public issues in the decision.



Figuur 1: Onzekerheden

Het werken met onzekerheden

Onderzoeksresultaten zijn geen absolute waarheden. Veel dingen weten wij niet precies en we moeten toch tot een verstandige actie komen. Bescheidenheid is een deugd, die de moeite van het beoefenen waard is. Een zeer lezenswaardig ar-

tikel over de toekomstige maatschappelijke ontwikkelingen die hiermee verband houden is te vinden in de 'Scientific European' (oktober 1990) hieruit enkele kreten (figuur 1).

Zie in bijlage 7 een voorbeeld waarbij verschillende soorten onzekerheden voorkomen.

6 De presentatie van contexten

De meest gebruikte vorm is de geschreven tekst (daarover meer in paragraaf 7). Daarnaast zou een gesproken tekst in de vorm van een verslag of een interview misschien ook mogelijkheden bieden. Een interessant onderzoeksgebied lijkt ons het werken met video-presentaties. Ook het teruggaan naar de bron zou wat meer aandacht moeten krijgen. Denk bijvoorbeeld aan ingevulde enquêteformulieren waaruit de leerling de bruikbare gegevens moet destilleren.

Nog een stap verder gaat het raadplegend gebruik van tabellen en dergelijke. Er is bijvoorbeeld onderzoek gedaan naar de leeftijdsopbouw van een kopend publiek. De opdracht luidt een vernieuwingsplan voor een winkelcentrum te maken. De gegevens maken het mogelijk, sterk aan te sluiten op de behoeften (versterking van het bestand), maar ook om gaten in de markt te ontdekken (werkelijke verandering). En heel mooi zou het zijn als de leerling zelf bepaalt, welke aanvullende gegevens nodig zijn.

Ook dit zijn zomaar wat losse gedachten, die in de jaren dat wij bewuster met contexten gingen werken, bij ons op kwamen. Ze zouden op zijn minst eens op zinnigheid moeten worden bekeken. Als die aanwezig blijkt, is er meteen een mogelijkheid om verstarring in de te gebruiken niet-wiskundige contexten te voorkomen.

7 De band met de werkelijkheid²

Bronnengebruik

Zeer realistisch zijn de tekstfragmenten uit boeken en tijdschriften. Maar kunnen die zo worden gebruikt of moeten zij herschreven worden? Als je let op wat de leerling bij verdere studie of werk zal tegenkomen, verdient de echtheid de voorkeur. Een probleem voor het leerboek kan dan het verschil in taalniveau tussen leertekst en citaat zijn. De voorkeur gaat uit naar een zo snel mogelijk naar de taal van de volwassenen gaan. Maar of dat altijd verantwoord is dient nader onderzocht te worden samen met de vraag, hoe die taal-'sprong' of '-overstap' gestimuleerd dient te worden.

Reconstructie van een historische ontwikkeling

Dit is een voorbeeld van een iets lossere band met de werkelijkheid. Vanuit de lerende gezien kan het 'zelf doormaken van een wiskundige ontwikkeling - gestuurd door leraar en leermateriaal - door deze ontwikkeling versneld over te doen' heel stimulerend werken. De opgave over de prehistorie kan als illustratie dienen van het hier bedoelde (bijlage 5).

Een nodig en voldoende verhaal

Het is vanuit de zuivere wiskunde gebruikelijk slechts de nodige gegevens beschikbaar te stellen. Het opschonen van een context door de irrelevante informatie weg te zuiveren, draagt niet bij aan de verlevendiging van de situatie. Veel erger is, dat de leerling de kans om informatie te wegen volledig wordt ontnomen. Dat lijkt ons in te gaan tegen het karakter van wiskunde-A. Moet het verhaal voldoende gegevens bevatten? De opmerkingen in paragraaf 5 geven al aan, dat daarvan weleens kan worden afgeweken.

Uitbreken

De context kan wel eens even worden verlaten om bijvoorbeeld een techniek te leren en te oefenen. In bijlage 3 komt zo de oplossing van vergelijkingen aan de orde. Onze ervaring is, dat dit door de leerling niet als een breuk wordt ervaren. De context vraagt erom en maakt het formeel handelen kennelijk veel doorzichtiger dan bij alleen maar kale opgaven het geval is. Het gebruik van het gezonde verstand wordt natuurlijker gevonden dan het louter toepassen van formele regels. We mogen er wel aan toevoegen dat de leerling hierbij een grotere vindingrijkheid liet zien dan wij gedacht hadden.

Geconstrueerde contexten

Er is niet voor elke wiskundige handeling of elk wiskundig begrip, een in het geheel passende niet-wiskundige context voorhanden. Wij zijn van mening dat ondanks het streven naar het gebruiken van zo veel mogelijk niet-wiskundige zogenoemde realistische of 'echte' contexten ook wiskundige en/of niet 'echte' contexten een plaats moeten kunnen hebben in het onderwijs. Spelletjes zijn ook niet echt. Toch spelen mensen graag. Daarom hebben ook wij wel eens zeer onechte contexten geconstrueerd. Dat werd door de leerlingen niet als bezwaar gezien, als de te leren elementen maar duidelijk naar voren kwamen. Zeer belangrijk voor de acceptatie van de context door de leerlingen is wel de interne logica ervan. Over dit punt is ons inziens het laatste woord nog lang niet gezegd. Daarom een voorbeeld ter verduidelijking van ons standpunt (bijlage 8).

8 De invloed op de leerling

De welwillende lezer, die er in geslaagd is uit het voorgaande enkele heldere gedachten te isoleren, krijgt het nu moeilijk. Het onderwerp 'de invloed van de contexten op de leerling' wekt bij ons associaties op met een welhaast ondoordringbaar oerwoud. Er zijn weliswaar hier en daar enkele lichtplekken, maar er is zoveel geloof nodig om daar te komen! Voor de schoolboek-auteur en voor de leraar is dit een uitermate belangrijk gebied. Maar het ontbreekt aan systematische kennis. De kennis die wel aanwezig is, is vaak moeilijk toegankelijk. En als de zoeker ergens iets veelbelovends heeft gevonden, dan blijft dikwijls de vraag, hoe deze wijsheid in de praktijk is toe te passen. Om enig idee te geven waar wij in ons werk tegenaanlopen geven wij een primitieve kretenlijst:

- Zoals in elk onderwijsproces ben je bezig in te breken in de gedachtengang van de leerling. Hoe doe je dat efficiënt?
- Hoe zit het met de betrokkenheid van de leerling? En de keerzijde, de tegenzin? De emotionaliteit blijkt bijvoorbeeld uit de woede van een leerling bij een vraagstuk over het kappen van bomen voor de aanleg van een verkeersweg. Dat had hier een positieve invloed op het maken van de som (zie bijlage 9). Een op zichzelf vrij saai tabelletje bleek voor sommige leerlingen bij een ongewoon contextgebruik zeer inspirerend te zijn:
- Een opgave wordt eigenlijk twee keer gemaakt, in de context en in het wiskundig model. Wat is de waarde van deze verdubbeling?
- De context biedt de mogelijkheid de wiskundige handelingen te controleren. Heeft dat een positieve invloed op het zelfvertrouwen?
- Welke rol speelt de intuïtie en wordt deze mee ontwikkeld?
- Hoever komt de leerling in het metaforische denken en met het modelbegrip?
- Brengt de 'grijpbaarheid' werkelijk steeds een grotere begripbaarheid mee, of wordt er een barrière opgeworpen voor het abstracte denken?

Ook als er aangetoond kan worden dat enkele van deze punten niet van belang zijn, of reeds bevredigend zijn opgelost, is er door eliminatie winst ontstaan. Anders gesteld: zullen de gegeven antwoorden echt antwoorden zijn?

9 Wat moet er nog voor de leraar gedaan worden?

Uit het voorgaande blijkt dat er nog veel onderzocht moet worden. Dat is niet alleen van belang voor de leraar, die zelf contexten zoekt en geschikte vragen bedenkt. Elke leraar moet op de hoogte zijn van de contextproblematiek om het leerboek goed te kunnen inzetten, met de aangeboden situaties te kunnen spelen en proefwerken te kunnen opstellen en beoordelen. En het belangrijkste: de resultaten moeten, in een voor de leraar verteerbare vorm, verschijnen en hij moet die publikaties gemakkelijk kunnen verwerven. De taakbelasting van de leraar is zo groot, dat hij het zich niet kan veroorloven veel tijd te spenderen aan werk dat anderen voor een deel voor hem kunnen doen. Er is nog veel werk aan de wiskundewinkel.

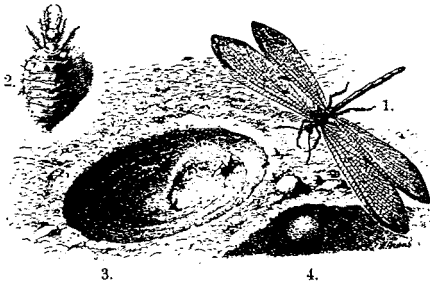
Noten

1. De problematiek van context-ontwikkeling werd als een mogelijk verschil aangegeven tussen natuurkunde en wiskunde door Broekman en Van der Valk (1990).
2. Een indeling van soorten contexten waarbij de band met de werkelijkheid en die met de wiskundige kern een rol speelt valt te lezen bij De Lange (1987).

Literatuur

- Broekman, H. en A.E. van der Valk: 'Contexten in β -onderwijs', in: P.L. Lijnse en W. de Vos: *Didactiek in Perspectief*, CD- β Press, Utrecht 1990.
- Lange, J. de: *Mathematics: insight and meaning*, OW & OC, Utrecht 1987.
- Roodhardt, A.: *Tabellen, Grafieken, Formules 1*, 3^e versie, OW & OC, Utrecht 1989
- Roodhardt, A.: *Tabellen, Grafieken, Formules 2*, 3^e versie, OW & OC, Utrecht 1990
- Roodhardt, A.: *Tabellen, Grafieken, Formules 3*, 3^e versie, OW & OC, Utrecht 1990
- Roodhardt, A.: *Tabellen, Grafieken, Formules 4*, 3^e versie, OW & OC, Utrecht 1990

Bijlage 1 De mierenleeuw



Ameisenjungfer.
1. Ausgebildetes Insekt. 2. Larve. 3. Trichter der Larve.
Das Tier bewirft eine Ameise mit Sand. 4. Kokon der Puppe.

Om er achter te komen hoe mierenleeuwen een nieuw gebied in bezit nemen, voerde een bioloog het volgende experiment uit.

Hij liet op één plaats een aantal diertjes los en keek na verloop van tijd waar ze gebleven waren. Dat was niet zo moeilijk, want een mierenleeuw graaft een kuil om andere insecten te vangen door ze met zandkorrels te bekogelen.

Dat er in de buurt van het centrum meer exemplaren waren dan verderop was niet zo verwonderlijk. Het ging hem erom een zekere wetmatigheid in die verspreiding te ontdekken. Hij trok een aantal cirkels om dat centrum en telde hoeveel exemplaren zich binnen die cirkels bevonden. Hij vond een formule van de vorm.

$$F = N(1 - e^{-cA}), \text{ waarbij}$$

A = de oppervlakte van de gekozen cirkel.

c = een positieve constante

N = het aantal losgelaten exemplaren

F = het aantal binnen de gekozen cirkel gevonden exemplaren.

- >a Noem enkele voorwaarden waaraan volgens jou een realistische formule moet voldoen en ga na of een formule van de gegeven vorm daaraan voldoet.
- >b We bedenken nu zelf getallen voor de formule:
 $N = 100$ en $c = 0,15$.
 Neem voor de oppervlakte achtereenvolgens 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30 (niet nader bepaalde) eenheden.
 Teken de grafiek van F als functie van A .
- >c Het resultaat zou in beeld gebracht kunnen worden door een stel cirkels met daarin stippen die mierenleeuwen voorstellen.
 Beschrijf hoe zo'n plaatje zou moeten worden getekend.

Bijlage 2 Voetbalvelden

Om een voetbalveld bespeelbaar te houden kan het maar een beperkt aantal uren per jaar gebruikt worden. Vaak rekent men op zo'n 150 'slijtage-uren' per veld per jaar. Een logisch gevolg is dat het aantal teams dat gebruik kan maken van de velden van een sportcomplex ook niet te groot mag zijn.

Daarom zijn er rekenvoorschriften bedacht waarmee een club kan bepalen hoeveel velden er voor zijn teams nodig zijn.

Deze teams worden in drie groepen verdeeld:

I senioren- en junioren A-teams

II junioren B en C-teams

III pupillenteams

De groepen II en III hebben een kortere speelduur dan groep I. Die tellen dus minder zwaar.

De formule voor de berekening is: $s = \frac{a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c}{6}$

waarin: s = benodigd aantal speelvelden

a = aantal teams uit groep I

b = aantal teams uit groep II

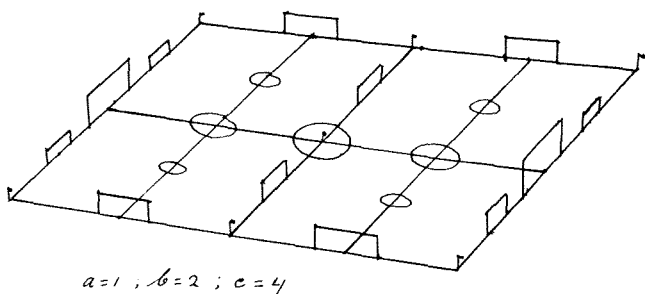
c = aantal teams uit groep III

- >a Hoe kun je aan de formule zien dat sommige teams minder zwaar tellen?
- >b Bereken het benodigde aantal velden voor een club A met de samenstelling groep I: 7 teams; groep II: 9 teams; groep III: 5 teams.
Eveneens voor club B met de samenstelling I: 12; II: 14; III: 16.
- >c A en B gaan fuseren. Hoeveel velden zijn er nu nodig?
- >d De formule is een breuk, waarbij in de teller ook weer breuken staan. Verander de formule zo, dat de teller breukenvrij is. De resultaten moeten natuurlijk hetzelfde blijven.
- >e Als er maar één veld beschikbaar is, welke combinaties van teams kunnen daar dan spelen?
Neem daarbij aan dat er van elk van de groepen I, II, III minstens één team is.
- >f Bereken s als $a = b = c = 6$. Ook als $a = b = c = 10$.
Als a , b en c gelijk zijn, dan kun je een veel eenvoudiger formule maken. Doe dat door voor a , b en c elk n te nemen.
- >g Door een andere manier van terreinonderhoud wordt de formule vervangen door:
 $s = \frac{1}{10}a + \frac{1}{15}b + \frac{1}{30}c$.
Is dit voor de clubs (1) gunstiger, (2) ongunstiger of (3) soms gunstiger, soms ongunstiger? Je moet er van uitgaan dat het aantal velden niet zo gemakkelijk vergroot zal kunnen worden. Daarom is het voor de clubs gunstiger als ze extra teams op dezelfde velden kunnen laten spelen.

>h De uitkomsten van de berekeningen van s met de nieuwe formule zijn rechtstreeks te vinden uit de antwoorden van de berekeningen met de oude formule. Voorwaarde is wel dat die antwoorden niet zijn afgerond. Hoe moet dat en hoe is dat te verklaren?

>i Gebruik je kennis uit >h om de tabel in te vullen. De gegeven getallen zijn niet afgerond.

oude s	nieuwe s
15	..
..	15



$$a=1 ; b=2 ; c=4$$

een 'oplossing' van het veldenprobleem

Bijlage 3 Problemen rond een formule

1. Er zijn indertijd proeven genomen met het gebruik van helikopters bij het storten van betonblokken voor de aanleg van een dijk. Bij het depot pikt de heli drie blokken op, vliegt naar de stortplaats en deponeert ze daar. Na het terugvliegen is één vlucht voltooid.

Het is voor het uitvoeren van waterwerken belangrijk om te weten hoeveel vluchten per uur zo gemaakt kunnen worden.

Dat aantal zal afhankelijk zijn van de te vliegen afstanden. Daarvoor is een formule bedacht:

$$VL = \frac{450}{0,01d + 6}$$

VL is het gemiddelde aantal vluchten per uur en d is de afstand van het depot tot de stortplaats in m.

>a Vul de tabel in:

d	VL
100	
200	
300	
400	
500	
700	
800	
900	

d in meter
 VL afronden op 1 decimaal

- >b Uit de tabel blijkt: hoe groter d , hoe kleiner VL .
 Waarom mag je dat van een bruikbare formule verwachten?
 Was zo al aan de formule te zien dat dit zou gebeuren?
- >c Teken een grafiek van de formule, waarbij d alle waarden van 100 tot 1000 meter aanneemt (d langs de horizontale as, VL langs de verticale as)
- >d Voor een karwei is het gewenst dat er minstens 52 vluchten per uur worden gemaakt. Bepaal met behulp van de grafiek hoe groot de afstand tussen depot en stortplaats mag zijn.
 Controleer met een berekening of het antwoord ongeveer klopt.
- >e Probeer met de rekenmachine eens uit te vinden bij welke afstand het gemiddelde aantal vluchten per uur onder de 12 komt.
 Het antwoord moet minder dan 100 m van het echte antwoord verschillen.

Opmerking:

De probeermethode werkt zo: Kies een waarde voor d . Bereken VL . Beslis nu of er een hogere of lagere waarde voor d gekozen moet worden, enz.

Bij opgave 1 >e kon dit probleem ontstaan:

Welke waarde moet je aan d geven om er voor te zorgen dat

$$\frac{450}{0,01d + 6} = 12 \text{ een ware bewering is?}$$

(Er is sprake van een bewering omdat er gezegd wordt dat twee getallen aan elkaar gelijk zijn.)

Het moeizame proberen kan met behulp van enige algebra vermeden worden.

Een van de manieren is:

Doe alsof de noemer $0,01d + 6$ één getal is: $\frac{450}{\boxed{0,01d + 6}} = 12$

Het probleem is: Welk getal moet in het hokje staan opdat $\frac{450}{\boxed{}} = 12$ klopt?

Dat getal is $450 : 12 = 37,5$.

Dus $0,01d + 6 = 37,5$ en dit is een vergelijking die je met een bekende methode kunt oplossen.

$$0,01d + 6 = 37,5$$

$$0,01d = 31,5$$

$$d = 31,5 / 0,01 = 3150.$$

Controleer het antwoord door invulling in de formule.

We willen nu proberen te achterhalen hoe de formule is ontstaan. Een bruikbare methode is om zelf eens één of meer rekenvoorbeelden te maken en daaruit een recept af te leiden.

We rekenen in seconden en meters en laten het woord 'gemiddelde' weg. In die berekening is een aantal stappen te onderscheiden:

$$\text{aantal vluchten per uur} = \frac{3600}{\text{tijd per vlucht}}$$

$$\text{tijd per vlucht} = \text{tijd voor heen en weer vliegen} + \text{tijd voor laden en lossen}$$

$$\text{tijd voor het heen en weer vliegen} = \frac{2 \times \text{afstand tussen depot en stortplaats}}{\text{snelheid}}$$

4. > Ga na of deze 'woordformules' juist zijn.

Er is zo ook te zien welke gegevens we nodig hebben om een berekening te kunnen maken. We kiezen:

$$\text{snelheid} = 12 \text{ m/s}$$

$$\text{tijd voor laden en lossen} = 50 \text{ s}$$

$$\text{stortafstand} = 500 \text{ m}$$

5. >a Bereken nu het aantal vluchten per uur.

>b Doe hetzelfde voor een stortafstand van 900 m.

Het aantal vluchten per uur kan worden opgevoerd door een betere laad- en losmethode te ontwikkelen of de helikoptersnelheid te verhogen.

Het voordeel moet natuurlijk wel de extra kosten overtreffen.

Om dat te kunnen bestuderen zijn er formules nodig waarbij die snelheid en die laad- en lostijd als variabelen voorkomen.

9. > Ontwerp formules voor de volgende drie gevallen:

	I	II	III	eenheid
snelheid	20	v	v	m/s
laad- en lostijd	l	40	l	s
stortafstand	500	500	500	m

Overzicht van de belangrijkste problemen van dit hoofdstuk:

- De UITVOER van een bepaalde formule berekenen als de INVOER bekend is.
 - De grafiek van een formule tekenen.
 - De INVOER berekenen als de (gewenste) UITVOER bekend is. Dit komt neer op het oplossen van vergelijkingen. Dat kan op verschillende manieren:
 - aflezen uit de grafiek
 - proberen, controleren, verfijnen, weer proberen,...
 - gebruik van algebra
 - De oplossing van een ONGELUKHEID in verband brengen met de oplossing van een VERGE-
LIJKING.
 - Afronding.
 - De invloed van de INVOER op de UITVOER van een formule aangeven.
 - Controleren of een formule het gewenste resultaat geeft.
 - Een formule aanpassen aan gewijzigde omstandigheden.
 - Een formule ontwerpen.
 - Een formule 'kraken', dat wil zeggen het 'waarom' opsporen.
- In het vervolg van dit boek worden deze zaken verder uitgediept.

Bijlage 4 Stadsontwikkeling

Op een groot terrein wordt een nieuw stadscentrum ontwikkeld. Dat zal niet meteen vol komen te staan met de bedoelde bebouwing.

Hierdoor ontstaat er een keuze probleem:

Laat je de grond braak liggen tot er een blijvend gebouw komt, of laat je een voorlopige bebouwing toe die later weer afgebroken moet worden voor de bedoelde bebouwing?

En deze mogelijkheden kunnen heel verschillende financiële gevolgen hebben. In de beslissing zal meespelen welke 'waarde' de grond al of niet met bebouwing heeft.

Braakliggende grond.

De grond wordt gekocht voor 10 miljoen gulden. Dat geld wordt geleend tegen een jaarrente van 5%. Na 1 jaar vertegenwoordigt de grond een kapitaal van aankoop prijs plus rente. Als er geen rentebetaling en aflossing plaatsvinden, moet de rente het volgend jaar dus over een groter bedrag worden berekend. Als dat zo door gaat neemt de 'waarde', dat wil zeggen het geld dat er in gestoken is, jaarlijks toe. Die waarde noemt men de *grondkosten*.

>a G_t stelt de grondkosten na t jaar voor.

Bepaal een formule voor G_t .

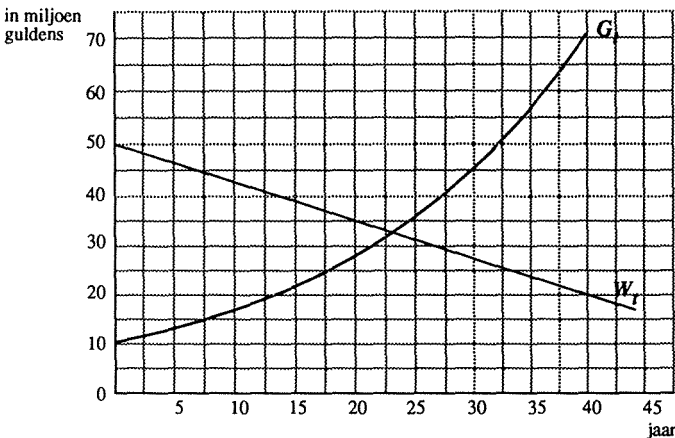
Grond met voorlopige bebouwing.

De grond met de bebouwing vertegenwoordigt op een zeker tijdstip een waarde van 50 miljoen gulden. Maar hier treedt waardevermindering op. Elk jaar neemt die waarde met 750.000 gulden af.

>b W_t stelt de *reswaarde* na t jaar voor.

Bepaal een formule voor W_t .

Een voor de hand liggende vraag is: wanneer zijn die twee waarden G_t en W_t even groot? (We laten de beginwaarden op hetzelfde tijdstip beginnen.) Daarvoor zijn de grafieken van G_t en W_t in één figuur getekend. Voor de duidelijkheid zijn ze doorlopend gemaakt.



>d Controleer enkele punten van de grafieken.

>e Schat het antwoord op de gestelde vraag met behulp van de grafieken en controleer of verfijn het antwoord met de rekenmachine.

Bijlage 5 Groepsgrootte in de prehistorie

In de prehistorie vormden mensen in sommige gebieden (woon)groepen om gezamenlijk op jacht te gaan en hun voedselgebied tegen andere groepen te verdedigen.

Voor een landstreek wil men graag weten hoe groot die groepen waarschijnlijk waren.

De deskundigen zijn het over een aantal meer of minder voor de hand liggende zaken wel eens.

I. Hoe meer mensen, hoe groter het benodigde voedselgebied.

II. Hoe meer mensen, hoe groter het gebied dat verdedigd kan worden.

Maar die uitbreiding van het gebied gaat niet gelijk op met de bevolkingstoename: 10 mensen extra bij een grote groep helpt minder dan 10 mensen extra bij een kleine groep.

Om het gestelde probleem op te lossen zetten ze hun kennis eerst in wiskundige vorm. Daarna staan bekende wiskundige technieken ter beschikking om tot een antwoord te komen.

I en II worden vertaald naar grafieken.

Voor I moet een grafiek worden bedacht waaruit het minimaal benodigde voedselgebied in afhankelijkheid van de groepsgrootte is af te lezen.

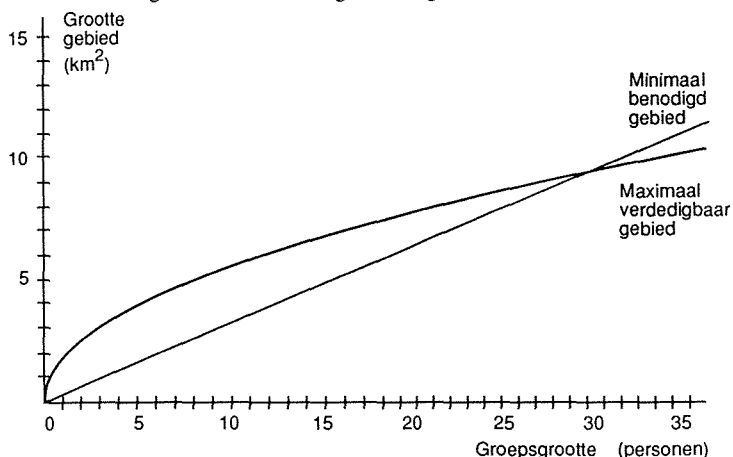
Voor II een grafiek die het maximaal verdedigbare voedselgebied in afhankelijkheid van de groepsgrootte laat zien.

De groepsgrootte staat langs de horizontale as en de grootte van het gebied langs de verticale as.

>a Teken twee grafieken die volgens jou hiervoor geschikt zijn (het komt alleen op de vorm aan). Geef een duidelijke verklaring van je keuze.

De deskundigen hebben studie gemaakt van onder andere de natuur van het gebied, de aanwezigheid van mogelijke buit, de voedingswaarde van de buit en de voedselbehoefte van de mens.

Hun bevindingen hebben tot deze grafieken geleid:



De bekende wiskundige technieken zijn nu het aflezen uit grafieken en het bepalen van snijpunten.

>b Waarom is een groeps grootte van 35 niet ideaal?

>c Bij welke groeps grootte kun je spreken van een soort evenwichtssituatie?

Het antwoord van >c zou kunnen worden voorgesteld als antwoord op de vraag naar de waarschijnlijke groeps grootte. Maar erg overtuigend is dat niet. Er is immers geen enkele reden gegeven waarom de groeps grootte naar dat getal zou gaan.

Neem eens een groeps grootte van 15. Die mensen zitten op rozen.

>d Waarom?

Er moeten dus *veronderstellingen* worden gemaakt over het *veranderen* van de groeps grootte.

Hier zijn er twee:

A. Als het maximaal verdedigbare gebied groter is dan het minimaal benodigde gebied, dan zal de groep op de lange duur groter worden.

B. Als het maximaal verdedigbare gebied kleiner is dan het minimaal benodigde gebied, dan zal de groep op de lange duur kleiner worden.

>e Probeer redenen voor A en B te bedenken.

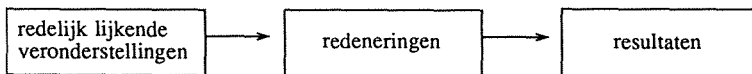
>f Bespreek wat er gebeurt bij een groeps grootte van 15.

Eveneens bij een groeps grootte van 35.

>g Verklaar waarom je via het snijpunt de groeps grootte kunt vinden die er indertijd was.

>h Wat is er te zeggen over de zekerheid van het antwoord?

Het vorige vraagstuk was een voorbeeld van het ontwerpen van een *theorie*. Zo'n theorie heeft vaak deze vorm:



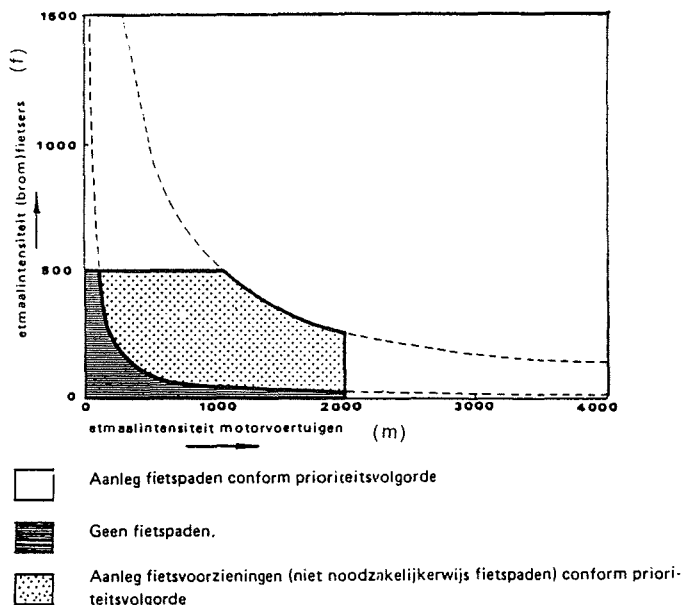
5. Hoe kan het volgende gebeuren?

>a De resultaten van een theorie zijn in strijd met de werkelijkheid.

>b De deskundigen zijn het oneens over de juiste theorie.

Bijlage 6 Fietspaden: wel of niet?

Grenswaarden als criteria voor opname in het lange en korte termijnplan (voorzieningen ten behoeve van langs de weg rijdend fietsverkeer).



(De uitdrukking 'conform prioriteitsvolgorde' slaat op de tweede beslissing.) Er zijn grafieken gebruikt om het plaatje te tekenen: enkele stippellijnen en enkele rechte lijnen. Maar het gaat eigenlijk om de ingesloten gebieden.

Een actiegroep heeft handtekeningen verzameld om een veilige fietsroute te krijgen. De tellingen gaven $m = 300$ en $f = 100$.

Van de provincie komt het antwoord:

"Tot onze spijt kunnen we niet aan uw wensen voldoen, want volgens de voorschriften komt de door u genoemde weg niet in aanmerking voor een fietspadvoorziening." (enz.)

De actievoerders zijn zeer ontevreden. De afwijzing komt door dat rare ronde stuk in de grafiek. Als ze rechte grenzen hadden getrokken zouden ze goed gezeten hebben!

Bijlage 7 Hoeveel mensen wonen hier?



Dit zijn restanten van een prehistorische nederzetting. Hier hebben ooit mensen geleefd. Wat voor mensen waren dat en hoe leefden ze? Dat zijn enkele van de problemen waarin archeologen geïnteresseerd zijn. Het zou daarom nuttig zijn te achterhalen hoeveel mensen hier doorgaans woonden.

Er zal wel een of ander verband bestaan tussen de oppervlakte van de nederzetting en de bevolkingsgrootte.

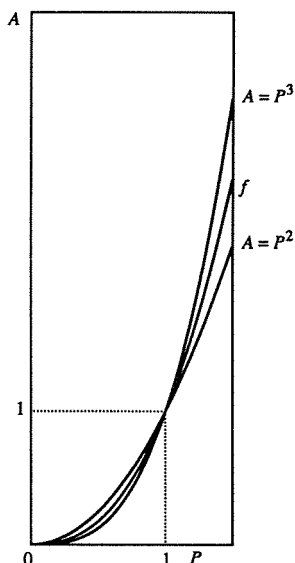
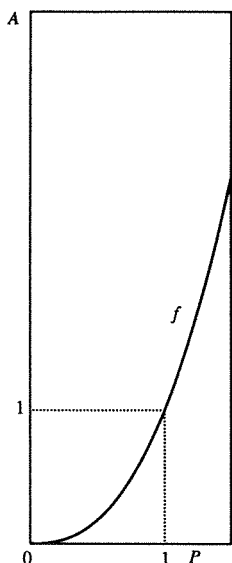
De hypothese heeft dan deze vorm: $A = \dots P \dots$, waarin A de oppervlakte in m^2 en P de bevolkingsgrootte in personen voorstelt.

Van sommige plaatsen weet men langs een omweg de waarden van A en P en vergelijkbare hedendaagse situaties willen ook wel eens iets opleveren. De resultaten worden in een coördinatenstelsel uitgezet en er wordt een grafiek gezocht die daar zo goed mogelijk bij past. Dat zoeken gaat in wezen met kandidaatformules. Daar moet dan natuurlijk wel een flinke voorraad van zijn.

We verlaten even het spoor om nader in te gaan op die formules. De daarbij gebruikte getallen zijn *niet* zo realistisch!

Veronderstel dat de ideale formule grafiek f zou moeten produceren.

Gezien de vorm hadden we die misschien kunnen vinden door formules van het type $A = P^n$, met $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ te proberen. $A = P^2$ en $A = P^3$ komen het dichtst in de buurt.



Bekijk nog eens de grafieken van $y = x^n$ voor $n = 1, 2, 3, 4$ uit 'Tabellen Grafieken Formules 3'. Bij elke stap voor n verspringt de grafiek.

Het zou mooi zijn als er ook kleinere stappen mogelijk waren. In dit voorbeeld zou dan iets kunnen komen als $A = P^{2\frac{1}{2}}$. Machten met breukexponenten hebben we al leren kennen, dus we kunnen aan het rekenen.

1. >a Controleer met enkele waarden (ook voor $P < 1$) of de grafiek van $A = P^{2\frac{1}{2}}$ werkelijk tussen die andere twee in ligt.
- >b Was het probleem ook op te lossen geweest door uit te gaan van $A = c \cdot P^3$, waarin c een constante is?

We beschikken nu over de formules $y = x^r$ waarbij r elk positief getal kan zijn. Het is veilig om $x \geq 0$ te houden. Negatieve waarden van x kunnen problemen geven. Probeer maar eens $(-9)^{\frac{1}{2}}$ te berekenen.

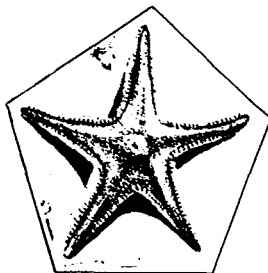
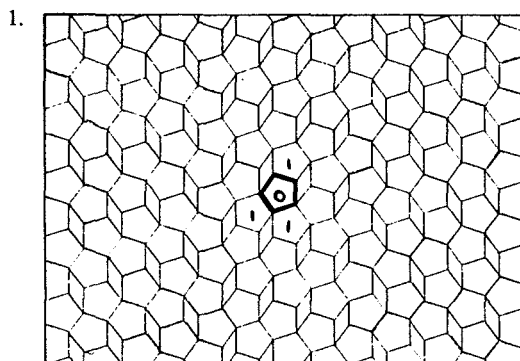
$(-9)^3$ kan wel namelijk -729, hoewel niet elke rekenmachine dat kan.

Deze formules zijn uit te breiden tot formules van de vorm $y = a \cdot x^r$.

Bijvoorbeeld: $y = 5 \cdot x^{0,12}$

(Bij invullen eerst $x^{0,12}$ berekenen!)

Bijlage 8 Eenvoudige regelmaat



Een zeesterrenkweker brengt zijn diertjes onder in vijfhoekige bakjes die, voorzover dat kan, tegen elkaar zijn geplaatst.

Eén van de diertjes is geïnfecteerd met een zeer besmettelijke virus.

De besmetting wordt verder gebracht wanneer twee bakjes met een hele zijkant tegen elkaar staan.

Alles verloopt in vaste tijdseenheden. Op tijdstip $t = 0$ is één zeester geïnfecteerd. Op tijdstip $t = 1$ komen daar de zeesterren bij die door de eerste zijn aangestoken. Op $t = 2$ de volgende generatie, enz.

>a Vul deze tabel in:

t	1	2	3	4	
aantal <i>nieuwe</i> infecties I	3				

>b Bedenk een formule die het aantal nieuwe infecties I geeft in afhankelijkheid van t .

>c De geldigheid van de formule is vastgesteld voor $t = 1, 2, 3, 4$.

Voorspel met de formule de waarden van I voor $t = 5$ en $t = 6$ en vergelijk ze met de werkelijkheid.

>d De infecties kunnen wel doorgaan tot $t = 10$, als er maar voldoende bakjes staan. De formule geeft dan $I = 30$.

Waarom denk je dat je de formule mag toepassen?

Is je redenering echt betrouwbaar?

>e Het *totaal* aantal geïnfecteerde zeesterren is een kwadratische functie van t .

Hoe kun je dit weten zonder de formule te maken?

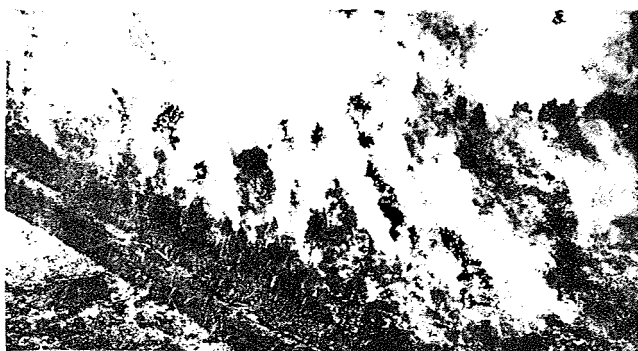
Bijlage 9 Bosbranden

Schrijf voor een streekblad een kort artikeltje (15 regels), waarin de mensen tot voorzichtigheid met vuur worden gemaand, om zo het aantal bosbranden te beperken.

Je beschikt over de volgende gegevens:

- Van elke 10 branden ontstaan er 6 door onvoorzichtigheid.
- Het percentage van het totaal aantal branden per jaar voor elke maand

maand	jan	feb	mrt	apr	mei	juni	juli	aug	sept	okt	nov	dec
%	0,4	2,5	16,9	31,2	24,0	12,0	4,9	4,5	3,3	0,2	0,1	0,0



Toegepaste analyse: probleemaanpak en contextgebruik

Henk van der Kooij

1 Inleiding

Vijf jaar na invoering van de nieuwe wiskundeprogramma's in de vwo-bovenbouw is ook de havo-top in 1990 gestart met de nieuwe vakken wiskunde-A en -B. De vakken hebben op vwo en havo dezelfde naam meegekregen, maar de inhoudelijke vullingen zijn (zeer) verschillend.

Karakterisering van de vier vakken op het leerstofgebied 'analyse', dat in ieder van de vier voorkomt, geven een globaal beeld van die verschillen.

Wiskunde-B, vwo (VB)

De analyse is, zonder enige verandering, overgeheveld van wiskunde-I naar wiskunde-B. De opzet is strikt formeel-theoretisch en (vrijwel) geheel gericht op ontwikkeling en routinematige oefening van technische vaardigheden rond formulemanipulatie:

- het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden;
- *het* functieonderzoek;
- het hanteren van differentieer- en integreertechnieken.

Er is geen aandacht voor toepassingen en de computer wordt nergens benut.

Wiskunde-A, vwo (VA)

De analyse gaat (wat theorie en formele technieken betreft) minder ver. Er is veel ruimte voor het gebruiken van formules en technieken in toepassingssituaties. Denk daarbij aan:

- de hellingfunctie (afgeleide) is een maat voor veranderingsgedrag;
- exponentiële en logaritmische functies dienen als model voor groeiverschijnselen (beginhoeveelheid, groeifactor, halfwaarde tijd);
- sinusoiden worden gebruikt als mogelijke modelbeschrijving voor periodieke verschijnselen.

Computer en rekenmachine worden onder andere gebruikt om benaderende waarde(n) van een oplossing te zoeken.

Wiskunde-A, havo (HA)

De analyse is hier ondergebracht in het leerstofgebied 'Tabellen, grafieken en formules'. De term functies is bewust vermeden, om te voorkomen dat er direct gedacht zou worden aan een formele, theoretische benadering.

De benodigde technische vaardigheden worden op een informeel niveau, vrijwel altijd binnen toepassingssituaties, aan de orde gesteld en geoefend. Alleen bij (stuksgewijs) lineaire verbanden worden expliciete eisen gesteld aan technische vaardigheden. De rekenmachine wordt erg vaak ingeschakeld om oplossingen, die (bijvoorbeeld uit een grafiek) al ruw zijn geschat, te verfijnen.

Een uitvoerige beschrijving van dit leerstofgebied is te vinden in de bijdrage van Roodhardt aan deze bundel.

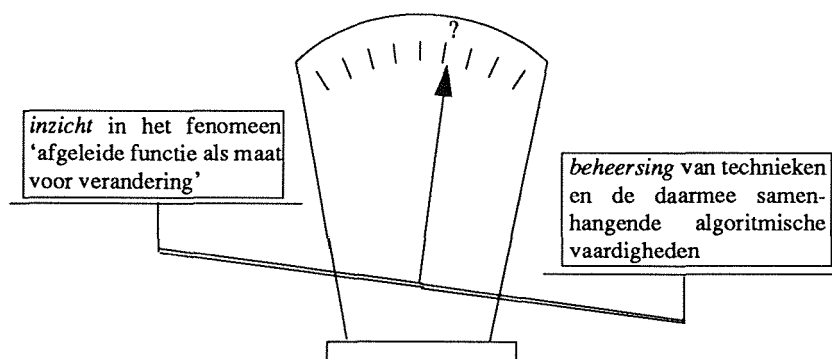
Wiskunde-B, havo (HB)

Anders dan op het vwo is hier absoluut geen sprake van een overheveling van de analyse uit het oude naar het nieuwe programma. De analyse heeft een wezenlijk ander karakter gekregen. Naast de formeel-theoretische kant is er zeer nadrukkelijk aandacht voor toepassingen.

Rekenmachine en computer (grafieken tekenen!) worden geaccepteerd als nuttige apparaten. Zo is bijvoorbeeld 'het functieonderzoek' met zijn voorgeschreven standaardaanpak die routinematig wordt geoefend, vervangen door het onderzoeken en analyseren van bijzonderheden van functies die in de (computer-)grafiek zichtbaar worden.

Omdat de analyse van HB in het vervolg centraal staat, staan in bijlage 1 de beschrijvingen van het doel van wiskunde-B en de algemene doelen bij het leerstofgebied 'toegepaste analyse' (uit het eindexamenprogramma, 1991).

Wat sfeer betreft, kan de toegepaste analyse van HB ergens worden geplaatst tussen de strikt-formele analyse van VB en de toepassingsgerichte aanpak van VA. De analyse van VA heeft gediend als uitgangspunt voor de analyse van HB; de eisen die (met name door het Hoger Technisch Onderwijs) gesteld worden aan technische en algoritmische vaardigheden hebben de analyse van HB gedeeltelijk een VB-inkleuring gegeven. Deze dubbele kleuring van het vak, die nieuw is in het middelbaar onderwijs, brengt een probleem met zich mee dat in beeld is gebracht in figuur 1.



Figuur 1: Waar ligt het evenwicht?

Bij de linkerkant (inzicht) horen met name activiteiten die te maken hebben met

- informeel, zoekend bezig zijn; heuristisch;
- kritisch zijn; vragen naar het 'waarom';
- (leren) herkennen van wiskundige essenties;
- verdiepen in een probleemsituatie.

De rechterkant wordt voornamelijk gekenmerkt door:

- strak keurslijf; formule-manipulatie;
- routinematig handelen; veel oefening;
- herkennen van het type wiskundig gereedschap (bijvoorbeeld:
 $3 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$ behandelen als tweedegraads vergelijking met onbekende $\sin x$).

2 Aspecten van de probleemaanpak

Er is een, moeilijk in kaart te brengen, gebied tussen inzichtelijk bezig zijn en algoritmisch bezig zijn. Dat is het gebied van de probleemaanpak. Enerzijds is er de behoefte om leerlingen veel ruimte te geven voor verkenning, zoeken en eigen strategieën te ontwikkelen. Anderzijds ligt er de dwingende eis om voldoende technische vaardigheden te ontwikkelen.

We zullen een zestal aspecten, met toelichting en voorbeelden, wat nader bekijken. Ieder van deze aspecten zal in de vorm van een uitspraak gepresenteerd worden.

2.1 Een strak voorgeschreven keurslijf kan een, van bovenaf opgelegde, belemmering zijn voor een goede probleemaanpak.

Het komt vaak voor dat leerlingen bij een gegeven probleem, al dan niet in een context, op een andere strategie uitkomen dan wij (docent, auteur, ...) bij het probleem in gedachten hadden.

Een mooi voorbeeld daarvan, uit de onderbouw, is het zakgeldprobleem (zie ook de bijdrage van Spijkerboer aan deze bundel).

Mieke heeft 25 gulden en krijgt 5 gulden zakgeld per week.

Annemarie krijgt slechts 3 gulden per week, maar ze heeft al wel een kapitaal van 35 gulden.

Na hoeveel weken hebben ze evenveel geld?

De vanzelfsprekendheid waarmee de auteurs veronderstellen dat dit leidt tot

los op: $5x + 25 = 3x + 35$

gaat volledig voorbij aan de volgende problemen:

- het verhaal gaat over twee meisjes, die ieder een eigen spaarpot of portemonnee hebben. Het '='-teken, dat in deze gedwongen oplossingsstrategie wordt geëist, is dus erg onnatuurlijk;
- noem het aantal weken x . Dat klinkt heel wiskundig! Maar waarom niet, zeker in de beginfase, gewoon in woorden gezegd: *aantal weken* of *weken* of *aw* of *w*;
- directe vertaling vanuit de context naar x levert bedrag na x weken:
 $25 + x \cdot 5$ en niet: $5x + 25$.

Die laatste vorm kom je wel altijd tegen bij de 'gewone' sommetjes.

De stap van $25 + x \cdot 5$ (de natuurlijke notatie die voortvloeit uit de context)

naar $5x + 25$ (de notatie die wij zo graag gebruiken) vergt zelfvertrouwen van de leerling op het gebied van formule-manipulatie. Dat zelfvertrouwen is er vaak niet, mede doordat in het onderwijs weinig of geen aandacht besteed wordt aan dit soort omzettingen in formules.

Gelukkig worden deze problemen door de algebragroep van het project W12-16 onderkend en beloven ze ruime aandacht te besteden aan de verkenning van structuren in formules (Algebragroep W12-16, 1990).

Pogingen om de leerling bij dit probleem in het keurslijf van een vergelijking te persen mislukken meestal. Het is niet correct om te stellen dat een leerling, die dit probleem niet kan oplossen, op de bedoelde manier een mislukking is. Vanuit de optiek van de probleemaanpak zou het zakgeldprobleem in een *open* versie nuttige informatie kunnen opleveren over de manier waarop een leerling problemen aanpakt.

Op het niveau van eerste of tweede klas is de volgende manier de meest natuurlijke. Bekijk naast elkaar, met behulp van tabellen, de twee spaarpotjes:

na ... weken	Mieke	Annemarie
start	25	35
1	30	38
2	35	41
3	40	44
4	45	47
5	50	50

Na vijf weken krijgt een eventueel '='-teken pas de betekenis die het verdient. Uit ervaring (met HA, HB en VA) weet ik dat in een later stadium dit zakgeldprobleem wordt benaderd als een *dynamisch* probleem.

Ook in de onderbouw is die benadering natuurlijk wel mogelijk. De vergelijking $5x + 35 = 3x + 25$ als *statische* modelbeschrijving past absoluut niet bij deze manier van beschouwen. Het probleem wordt in eerste instantie voorbewerkt in het informele gebied van de context.

Er is sprake van een inhaalprobleem: Annemarie heeft een achterstand van tien gulden. Per week loopt ze twee gulden in op Mieke. Na vijf weken hebben ze dan evenveel geld.

Mocht er al behoefte bestaan om iets in formule-taal op te schrijven, dan is een natuurlijk startpunt daarvoor: $2x = 10$ en zeker niet: $5x + 25 = 3x + 35$.

Van de voorafgaande beschouwingen komt alleen maar een argumentatie *in woorden* op papier.

2.2 Bij een goede probleemaanpak hoort noodzakelijkerwijs een goede beheersing van een aantal basistechnieken en -vaardigheden.

Dit lijkt een wat overbodige opmerking. Gedurende het Hawex-experiment is echter steeds gebleken (zowel op de drie eerste experimenteer-scholen als op de 25 volgscholen die bij het experiment betrokken waren), dat de HB-leerlingen wat betreft de basistechnieken op twee punten tekortschoten:

- goede beheersing van de benodigde technieken die in de onderbouw aan de orde zijn geweest;
- het herkennen en gebruiken van die basistechnieken in een breder verband.

Om die redenen is in een vroeg stadium van het experiment besloten om naast het gewone lesmateriaal oefenlessen te maken, waarin de vaardigheden en technieken uit de onderbouw kort worden herhaald en kunnen worden geoefend. Geen stereotype, eindeloze training van één bepaald type opgave, maar wisselende situaties waarbij steeds een beroep gedaan wordt op één bepaald soort technische manipulatie.

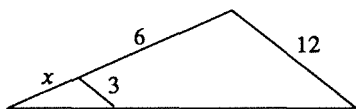
Bij toegepaste analyse gaat het met name om formules bij rechte lijnen en parabolen, oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden (met of zonder gebruikmaking van grafieken). Bij ruimtemeetkunde bleek het noodzakelijk om uitgebreid terug te komen op elementaire begrippen uit de vlakke meetkunde (hoeken, oppervlakte, gelijkvormigheid en evenredigheid).

Vaak blijkt de uit de onderbouw aanwezige kennis en vaardigheid alleen maar geïsoleerd te functioneren. Drie voorbeelden.

Voorbeeld 1

Bij de ruimtemeetkunde in HB wordt vaak gebruik gemaakt van evenredigheden waarbij een variabele (bijvoorbeeld hoogte h , lengte x) voorkomt.

Naast de gewone oefeningen rond evenredigheid, komen daarom in de oefenles ook opgaven voor van het volgende type:



Schrijf een vergelijking op, waar x in voorkomt.

Bereken vervolgens x .

Een paar leerlingen die beweerden deze opgave niet te kunnen maken, wisten wel het antwoord ($x = 2$). Het probleem zat hem dan ook in het in formuletaal omschrijven van hetgeen ze *in woorden* hadden gedaan, namelijk met vier vermenigvuldigingen.

Met wat hulp kwam op papier: $4 \cdot x = x + 6$.

Denkend dat het probleem hiermee de wereld uit was, liep ik weg.

Ik werd teruggeroepen met de vraag 'wat moeten we nu doen?!' De betreffende leerlingen zaten met hun gedachten zo sterk in de meetkundige context dat ze

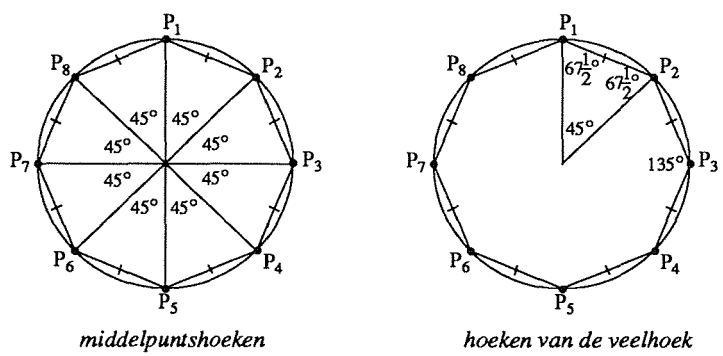
niet in staat waren een stukje simpele, overbekende algebra te herkennen!
 Mijn opmerking dat er een gewone eerstegraads vergelijking stond, joeg hen het schaamrood naar de kaken.
 In de uiteindelijke versie van de oefenlessen is die ene vraag uitgebreid tot een hele bladzijde (Kindt e.a., 1990a). Het argument hiervoor is dat het kunnen vertalen vanuit een meetkundige context naar een algebraïsche context en het kunnen hanteren van algebraïsche methoden bij meetkundige problemen noodzaak is binnen HB.

Voorbeeld 2

Het werken met hoeken en de hoekensom in een veelhoek is vaak nodig binnen de Ruimtemeetkunde van HB.

In een oefenles ‘regelmatische veelhoeken’ komt de volgende opgave voor:

*Van een regelmatige achthoek is een middelpuntshoek 45° .
 Daaruit volgt dat de som van de hoeken van de achthoek gelijk is aan 135° .*



- a. Bereken middelpuntshoeken en hoeken achtereenvolgens van: een regelmatige 3-hoek, 4-hoek, 5-hoek, 6-hoek en n-hoek.
- b. Een andere manier om de hoeken van een regelmatige veelhoek te berekenen is, daar gebruik te maken van de hoekensom:

veelhoek	hoekensom
3-hoek	180°
4-hoek	360°
5-hoek	540°
6-hoek	720°
...	...

Bereken via de hoekensom de hoeken van: een regelmatige 5-hoek, 6-hoek, 8-hoek en n-hoek.

Er zijn maar weinig leerlingen die, volledig zelfstandig, de algemene formule voor een n -hoek vinden. Zowel opgave a als opgave b komen, inclusief afleiding, op het bord. Eindresultaat van a: $\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ en van b: $\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$. De vraag die (logischer wijze) volgt, nadat deze twee formules op het bord verschenen, is: 'Twee formules voor hetzelfde fenomeen, hoe kan dat?'. Controle voor een paar verschillende waarden van n geeft het idee dat ze hetzelfde voorstellen, maar geen één leerling is in staat om dat algemeen aan te tonen. Voor de meesten moet de omvorming:

$$\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot 180^\circ = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n},$$

stap voor stap, met de extra tussenstap:

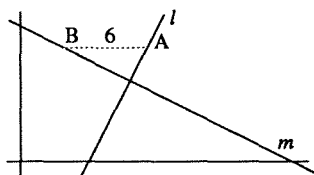
$$\frac{n-2}{n} = \frac{n}{n} - \frac{2}{n} = 1 - \frac{2}{n},$$

getalsmatig worden toegelicht.

En wij maar denken dat de leerlingen zulke manipulaties in de onderbouw al onder de knie hadden gekregen.

Voorbeeld 3

In een oefenles over substitutie van formules in formules stond oorspronkelijk ook deze opgave:



Gegeven de lijnen $l: y = 2x - 10$ en $m: y = 10 - \frac{1}{2}x$

A ligt op l en B ligt op m zodat AB horizontaal is.

Bereken de coördinaten van A en B voor het geval A rechts van B ligt en $AB = 6$.

(Aanwijzing: stel $x_B = x$, en druk y_B , x_A en y_A uit in x)

De aanwijzing had de volgende bedoeling:

$$\begin{array}{ll} \text{als } x_B = x & \text{dan } x_A = x + 6 \\ \downarrow & \downarrow \\ y_B = 2x - 10 & y_A = 10 - \frac{1}{2}(x + 6) = 7 - \frac{1}{2}x \end{array}$$

x volgt dan uit $y_A = y_B$

Binnen de oefenles is deze opgave bedoeld als oefening van substitutie.

Geen enkele leerling blijkt die gedachtengang uit zichzelf te kunnen volgen.

Zelfs na behandeling, uitgaande van de aanwijzing, bleef veel onbegrepen. Het vraagstuk is daarom uit de oefenles verwijderd. Vanuit de optiek van de probleemaanpak is het echter een prachtig voorbeeld van een contextloze (kaal wiskundige) opgave die goed binnen HB past. Er waren namelijk een aantal leerlingen die de aanwijzing negeerden en zelf een strategie bepaalden.

Vier juweeltjes ter illustratie:

- *een aanpak met behulp van substitutie*

Druk de x -coördinaten van A en B uit in de bijbehorende, even grote y -coördinaten:

$$x_A = 5 + \frac{1}{2}y$$

$$x_B = 20 - 2y$$

$$x_A - x_B = -15 + 2\frac{1}{2}y = 6 \quad \rightarrow \quad y = \frac{42}{5}$$

x_A en x_B volgen na substitutie van y

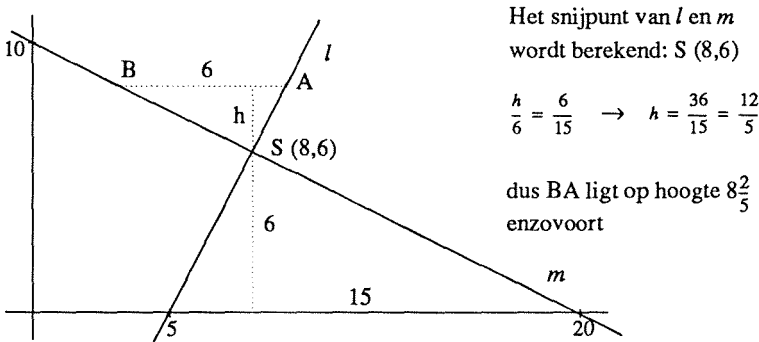
- *een dynamische aanpak*

Verschuif lijn l zes eenheden naar links. Het snijpunt van m met de verschoven lijn is het gevraagde punt B. A ligt dan zes eenheden naar rechts.

Bij de verschoven lijn l' hoort de formule $y = 2x + 2$ (l heeft hellingscoëfficiënt 2, dus zes naar links verschuiven betekent dat het snijpunt met de y -as twaalf naar boven schuift!).

$y = 2x + 2$ snijden met $y = 10 - \frac{1}{2}x$ geeft $B(\frac{16}{5}, \frac{42}{5})$ en $A(\frac{16}{5} + 6, \frac{42}{5})$.

- *een meetkundige aanpak (met behulp van de grafieken)*

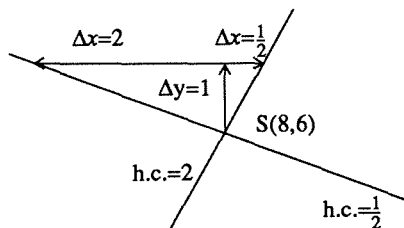


Figuur 2: Meetkundige aanpak

- een aanpak vanuit het hellingbegrip

Lijn l heeft hellingscoëfficiënt 2; lijn m heeft hellingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$.

Bij een verticale stijging van 1 vanuit $S(8,6)$ wijken de twee lijnen dus $2\frac{1}{2}$ uit elkaar.



Bij een stijging $\Delta y = \frac{6}{2\frac{1}{2}} = \frac{12}{5}$ wijken de twee lijnen dus 6 uit elkaar.

Dan heb je precies lijnstuk AB te pakken.

AB ligt dus op hoogte $6 + \frac{12}{5}$
 x_A ligt dan bij $8 + \frac{1}{2} \times \frac{12}{5}$ en x_B bij $8 - 2 \times \frac{12}{5} = \frac{16}{5}$

De eerste twee aanpakken werden door diverse leerlingen zelfstandig tot een goed einde gebracht.

Bij de twee laatste methoden kwamen de ideeën voor de aanpak van de leerlingen zelf. De complete uitwerking hiervan was een gezamenlijke activiteit van de hele groep, gestuurd door de docent.

2.3 De opgaven moeten prikkelen tot nadenken in plaats van aanzetten tot routinematig handelen.

Een scherpe tegenstelling tussen de analyse van HB en VB, wordt zichtbaar bij het onderwerp functie-onderzoek.

Op het vwo is dat, op zich niet slechte, onderdeel verworden tot routinematige oefening van een standaardalgoritme, dat plichtmatig punt voor punt moet worden afgewerkt (1: $f(x) = 0$; 2: tekenschema $f(x)$; 3: $f'(x)$ bepalen; 4: $f'(x) = 0$; 5: tekenschema $f'(x)$; 6: extremen; 7: horizontale asymptoten; 8: verticale asymptoten; 9: grafiek tekenen)

Een gevolg van die ingeslepen traditie is dat zo'n vraag in elk examen VB voorkomt en dat in de leerboekjes alleen functies aan de orde komen, waarbij $f(x) = 0$ oplosbaar is.

Lachwekkend gevolg hiervan is dat $f(x) = x + \cos x$ (vwo examen wiskunde-B, 1985) landelijk slecht gemaakt werd omdat het functieonderzoek bij de eerste verplichte stap ($f(x) = 0$) al vast liep! Voor een vwo-A leerling is dit een makkelijke opgave.

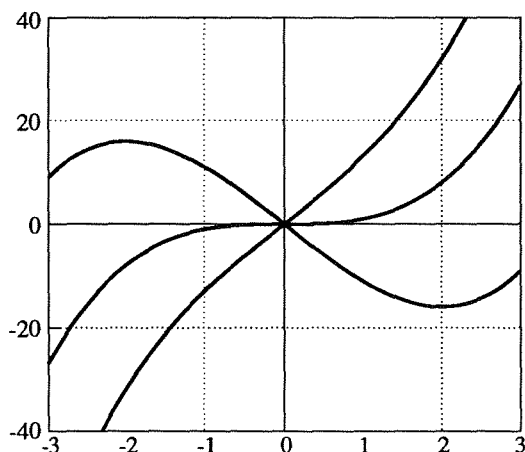
In de toegepaste analyse van HB wordt de computer geaccepteerd als instrument dat prachtige grafieken kan tekenen. Die grafieken zijn dan vaak uitgangspunt voor vragen over de bijbehorende functies. In VB gebeurt dit (nog?) niet.

De volgende voorbeelden komen uit het boekje 'Differentiëren' (Kindt, 1989).

- Bestudering van derdegraadsfuncties van de vorm $y = x^3 + ax$.

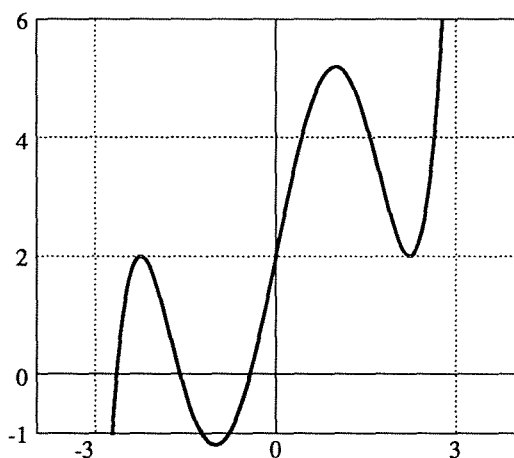
Met de computer zijn de grafieken van een drietal derdegraads functies getekend, namelijk van $f(x) = x^3 - 12x$, $g(x) = x^3$ en $h(x) = x^3 - 12x$ (figuur 3).

- Bereken de hellingsfuncties f' , g' en h' .
- Hoe kun je met behulp van de hellingsfuncties uitmaken welke grafiek bij f , welke bij g en welke bij h hoort?
- Neem de figuur over en teken ook de grafiek van $j(x) = x^3 - 6x$ en $k(x) = x^3 + 6x$.



Figuur 3: Grafieken van $f(x) = x^3 - 12x$, $g(x) = x^3$ en $h(x) = x^3 - 12x$

- Bespiegelingen rond een vijfdegraadsfunctie. (Bij vwo-B komt zo'n vorm niet aan de orde want de nulpunten zijn niet te berekenen!).



Figuur 4: Grafiek van $f(x) = 0.2x^5 - 2x^3 + 5x + 2$

In figuur 4 is een computerplaatje te zien van de grafiek van de vijfdegraadsfunctie $f(x) = 0.2x^5 - 2x^3 + 5x + 2$.

- a. De grafiek van f heeft vier punten met horizontale raaklijnen. Twee van die punten geven een 'plaatselijk maximum' aan. Bereken de exacte coördinaten van die twee punten.
- b. Bereken ook de exacte coördinaten van de punten die een 'plaatselijk minimum' aangeven.
- c. Laat x variëren van -2 tot 3 . Welke waarden bereikt y ?
- d. Hoeveel buigpunten heeft de grafiek van f ?

Wanneer een functie gebruikt wordt in een toepassingssituatie, blijken nulpunten vaak niet zo belangrijk. Wijzigingen in het veranderingsgedrag (buigpunten in de grafiek) zijn dat meestal juist wel. Vandaar dat buigpunten expliciet zijn opgenomen in het HB-programma.

2.4 *Ontwikkeling van een probleemoplossende houding is alleen dan mogelijk als de opbouw van de theorie geïntegreerd wordt met (praktijk)toepassingen.*

Dit wordt, hoewel het vanzelfsprekend lijkt, zo essentieel gevonden, dat er in het examenprogramma expliciet melding van wordt gemaakt (zie algemene doelomschrijving bij toegepaste analyse in bijlage 1). Dat het niet overbodig is, blijkt onder andere uit de verantwoording bij de nieuwste editie van 'Sigma'. Deze methode blijft (in het belang van de leerling?) een strikte scheiding van theorie en toepassingen propageren.

Bij toepassingen zeggen hellingfuncties ('afgeleide functie' is een kleurloze, nietszeggende naam) veelal iets over het veranderingsgedrag. Het Hawex-boekje 'Differentiëren' heeft daarom, heel toepasselijk, als ondertitel meegekregen: *een manier om veranderingen bij te houden*.

Lang voordat sprake is van techniek-regeltjes voor differentiëren worden veranderingen bestudeerd. Zie bijvoorbeeld de afsluiting van het eerste hoofdstuk (bijlage 2).

2.5 *De behandeling van een vraagstuk moet niet altijd beperkt blijven tot alleen maar beantwoording van de gestelde vraag.*

Onder docenten heerst nog vaak een, niet helemaal onbegrijpelijke, angst om een vraagstuk te gebruiken als kapstok voor andere activiteiten. Argumenten die daarbij aangevoerd worden, zijn dan: examendruk en overladenheid van het te behandelen programma.

Toch is het, voor de ontwikkeling van een probleemoplossende houding bij de leerlingen, erg aan te bevelen om geregeld een vraagstuk meer uit te diepen of te gebruiken als aanleiding om 'buiten het boekje te gaan'. Juist onzekerheden, foutieve aanpakken en alternatieve aanpakken kunnen een goede bron vormen voor het leren verkennen en leren aanpakken van problemen.

Het in paragraaf 2.2 besproken voorbeeld 3 beschrijft een situatie zoals hier bedoeld wordt. Ook de lesbeschrijving in bijlage 3 geeft hiervan een voorbeeld.

2.6 Een goede probleemaanpak wordt niet bevorderd door lang routinematig bezig zijn met een algebraïsche techniek.

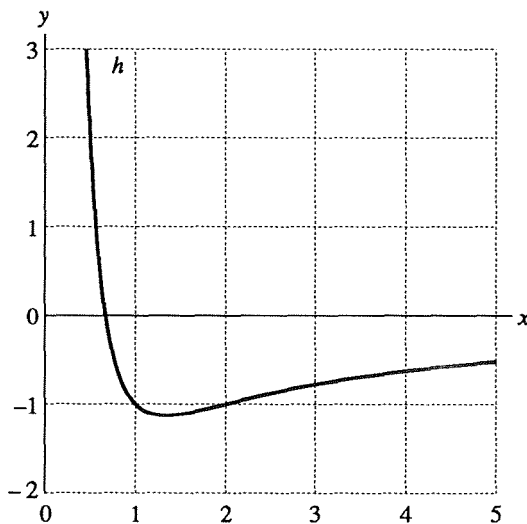
In feite wordt hiermee het grote verschil tussen HA en VA enerzijds en HB anderzijds aangestipt. Tevens vormt dit het dilemma van HB.

Bij VA, en vooral bij HA, spelen de algebraïsche technieken een ondergeschikte rol. Het oplossen van vergelijkingen en dergelijke gebeurt vrijwel altijd binnen de context, waardoor contextgebonden, vaak informele strategieën, voor de hand liggen en soms zelfs de voorkeur verdienen. Bij HB is beheersing van algebraïsche technieken en algoritmische vaardigheden echter ook op zichzelf een doel. Maar het onderhouden en uitbreiden van algoritmische vaardigheden past niet zo goed in de opbouw van nieuwe leerstof en vaardigheden.

Dit was, naast de eerder genoemde argumenten, dan ook een reden om de aparte oefenlessen te maken. Daarbij is overigens welbewust gekozen voor een verscheidenheid aan probleemsituaties in plaats van eindeloze rijtjes sommen van één soort. Een systematische behandeling van vergelijkingen met breukvormen - in de trant van: op nul herleiden en onder één noemer brengen - ontbreekt in het HB-materiaal. Daarom is vraag twee (examenvraag 1990, eerste tijdvak) geen standaardvraag voor de HB-leerlingen, niet iedere leerling kon dit probleem dan ook oplossen:

Gegeven is de functie: $h(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x}$ voor $x > 0$.

In figuur 5 is (een deel van) de grafiek van die functie getekend.



Figuur 5: Grafiek van $h(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x}$

1. Bereken de x-coördinaat van het snijpunt van de grafiek van h met de x-as.
2. Los op: $h(x) < -\frac{5}{8}$.

Door de niet-routinematige behandeling van gebroken vormen waren de kandidaten gedwongen na te denken over de aanpak. Een verheugend groot aantal leerlingen deed dat vanuit de herkenning van een tweedegraadsvergelijking. Substitutie van $t = \frac{1}{x}$ geeft een bekend type vergelijking: $2t^2 - 3t + \frac{5}{8}$

Natuurlijk zijn veel van de gemaakte opmerkingen over probleemaanpak niet alleen voor HB geldig. Een moeilijkheid, die met name bij HB speelt, is echter - gezien de geformuleerde doelstellingen - het vinden van een juiste balans tussen probleemoplossend bezig zijn en het getraind zijn in het herkennen en gebruiken van technieken (figuur 1). Die twee aspecten van de probleemaanpak lijken nogal eens met elkaar in conflict.

In de toegepaste analyse van het Hawex-materiaal is gekozen voor starten met een uitgebreide, inzichtelijke benadering die vrijwel alle leerstofpakketjes van 4 havo omvat. Daarna krijgen de pakketjes een meer technisch karakter. De verwachting dat de leerlingen voor het tweede gedeelte (de meer technische benadering) voldoende inzichtelijk zijn gevormd in de eerste fase, wordt bevestigd door de docenten van de experimenteerscholen.

Tegen de tijd dat de Derive-achtige programmatuur beschikbaar komt voor de graphic calculator zal vermoedelijk weer een nieuw evenwicht tussen deze twee aspecten gevonden moeten worden. Het technisch manipuleren van formulevormen zal dan vermoedelijk minder ver hoeven te gaan dan nu nog noodzakelijk is (zie ook de bijdrage van Kemme).

3 Contextgebruik bij toegepaste analyse (HB)

Anders dan bij HA is de contextkeuze met name bepaald door de wiskundige aspecten die erbij aan de orde kunnen komen. We bekijken kort een paar voorbeelden bij vier manieren van contextgebruik.

Voor verdere beschrijving van aanverwante voorbeelden en zienswijzen verwijs ik naar de bijdrage van Roodhardt.

3.1 Een contextgebonden begrip als metafoor

Klassiek startpunt voor de differentiaalrekening is de tijd-afstandfunctie, met daaraan gekoppeld de (momentane) snelheid. Meestal wordt het idee snelheid alleen maar gebruikt als opstap naar de afgeleide. De wiskundige behandeling beperkt zich verder tot raaklijnen.

In het leerstofpakket 'Differentiëren, een manier om veranderingen bij te houden' (Kindt, 1989) wordt het idee 'hellingfunctie is maat voor de snelheid van verandering' en 'tweede afgeleide is de snelheid waarmee de verandering verandert' lang vastgehouden. Het blijkt voor veel leerlingen een nuttige kapstok te zijn om het moeilijke begrippenkader aan op te hangen.

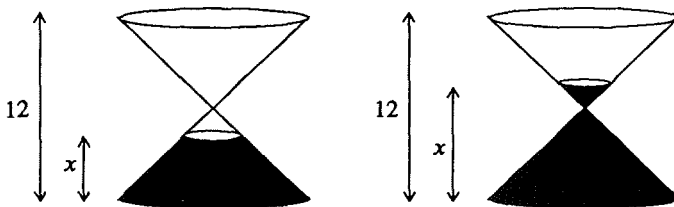
Bij exponenten en logaritmen blijkt de (tijdelijke) interpretatie: '*logaritme = tijd die nodig is om ...*' een goed begrip van logaritmische eigenschappen te bevorderen.

3.2 Verbreding van het inzicht in een fenomeen

In het leerstofpakket 'Differentiëren, ...' (Kindt, 1989) wordt een hoofdstuk volledig gewijd aan inhoud en oppervlakte.

Twee glazen kegels zijn met de punt aan elkaar gesmolten, zodat grond- en bovenvlak parallel zijn (zie figuur 6). De hoogte van elk van de twee kegels is 6, de straal van zowel grond- als bovensirkel is ook 6.

In de onderste kegel wordt vloeistof gebracht; zodra de onderste kegel vol is, wordt de bovenste kegel met vloeistof gevuld.



Figuur 6: Dubbele kegels met vloeistof

$O(x)$ = de oppervlakt van de vloeistofspiegel op hoogte x .

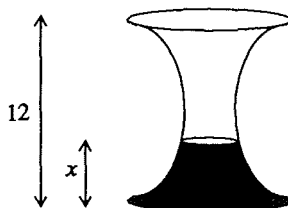
$I(x)$ = het totale volume van de vloeistof op hoogte x .

- Toon aan dat geldt: $I(x) = \pi(\frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 36x)$
- Bereken uit de formule voor I de formule voor O als functie van x .
- Leid uit de formule voor O als functie van x ook rechtstreeks af uit de meetkundige figuur (dus ook zonder de formule van I te gebruiken).
- Teken een grafiek van O als functie van x .
- Teken een grafiek van I als functie van x .

Een ander vat (zie figuur 7) met dezelfde hoogte en dezelfde totale inhoud als de dubbele kegel, wordt eveneens met vloeistof gevuld.

De grafiek van het volume van de vloeistof als functie van x , heeft net als in de vorige opgave precies in het midden een buigpunt.

Wat is het verschil tussen deze volume-grafiek en die van de vorige opgave in de directe omgeving van het buigpunt?



Figuur 7: Vat met vloeistof

Oorspronkelijk was dit hoofdstuk bedoeld als opstap naar de integraalrekening, maar dit onderwerp werd geschrapt uit het examenprogramma.

Het hoofdstuk is echter gehandhaafd, juist vanwege de verbreding van het inzicht in het fenomeen differentiëren.

Overigens is dit voorbeeld ook onder te brengen bij de volgende subparagraaf.

3.3 De meetkunde als context voor de analyse

In het examenprogramma wordt gesproken van dwarsverbanden tussen de meetkunde en de analyse. Al eerder is opgemerkt dat de vertaalactiviteiten van het ene naar het andere gebied door de leerlingen als moeilijk worden ervaren. Vandaar dat er meetkundige contexten zijn gebruikt onder andere om de vertaalactiviteiten voldoende aan bod te laten komen. Zeker wanneer er wat dynamiek in meetkundige constructies wordt gestopt, blijken analytische methoden vaak nuttig en mede daardoor gemotiveerd te kunnen worden. Een voorbeeld uit 'Werken met goniometrische functies' (Kindt, 1990b) is te vinden in bijlage 4.

3.4 Concretisering van een abstracte situatie

Op het eerste gezicht een vreemd argument voor contextgebruik. In feite is hierbij immers sprake van een context die slechts lijkt te dienen als franje bij een vraagstuk, waarbij het louter om wiskundige vaardigheden gaat.

Bij een dergelijke context gaat het er alleen maar om, dat de leerling zich iets concreets kan voorstellen bij de, daarna geheel losstaande, wiskundige activiteiten die van hem worden gevraagd. Voor veel havo B-leerlingen blijkt dat absoluut geen overbodige franje die weggelaten zou kunnen worden.

Zie voor een voorbeeld, bijlage 5 'Doorzakeffect'.

Literatuur

Albragroep W12-16: 'En de variabele, hoe staat het daarmee?', *Nieuwe Wiskrant* 10 (1990), 12-19.

Eindexamenprogramma Wiskunde-B voor het Havo, in: *Keuzebegeleiding Wiskunde-A en -B, brochure voor docenten, decanen en schoolleiding Havo*, Hogeschool Holland, 1991.

Kindt, M.: *Differentiëren, een manier om veranderingen bij te houden*, 3^e versie, OW&OC, Utrecht 1989.

Kindt, M. e.a.: *Oefenlessen Wiskunde-B*, 3^e versie, OW & OC, Utrecht 1990a.

Kindt, M.: *Werken met goniometrische functies*, 3^e versie, OW & OC, Utrecht, 1990b.

Bijlage 1 Doelen

'Het programma wiskunde-B is voornamelijk gericht op het gebruik van wiskunde in de exacte vakken.

De kandidaten moeten beschikken over algoritmische en meetkundige vaardigheden en deze bekwaamheden kunnen gebruiken in wiskundige probleemstellingen en in diverse toepassingssituaties.

Algemene beschrijving van kennis en vaardigheden

Om het gestelde doel te bereiken moet de kandidaat leren:

- probleemstellingen te analyseren en logische relaties aan te geven tussen gegevens, beweringen en resultaten;
- een geschikte wiskundige werkwijze te kiezen om een probleem op te lossen en algoritmen te gebruiken bij uitvoering hiervan;
- zakrekenmachines en computerprogramma's te gebruiken bij het oplossen van problemen en daarbij een passende nauwkeurigheid in acht te nemen;
- hun ruimtelijk voorstellingsvermogen op effectieve wijze te gebruiken;
- adequate redeneervormen te gebruiken;
- verschillende oplossingsmethoden te combineren en te integreren;
- nieuwe begrippen te hanteren die vanuit de leerstof bereikbaar zijn na een korte omschrijving;
- de keuze van de werkwijze, het proces van oplossen en de resultaten overzichtelijk in woorden of wiskundige taalelementen weer te geven.

Toegepaste Analyse

Dit gebied bevat een aantal onderwerpen uit de differentiaalrekening. De naam *toegepaste analyse* is gekozen om te benadrukken dat in elk ontwikkelingsstadium van de theorie de toepassingen een wezenlijk bestanddeel van de stof vormen.

Het inzicht in het fenomeen 'afgeleide functie als maat voor verandering' en de beheersing van differentieertechnieken en de daarmee samenhangende algoritmische vaardigheden zijn de twee hoofddoelen van het onderwerp. Tussen beide aspecten dient een goed evenwicht te worden bewaard.

Bovendien zal de kandidaat in staat moeten zijn de aangereikte wiskundige instrumenten te gebruiken bij problemen, waarbij het gaat om formules te extraheren uit een tekst en de langs wiskundige weg verkregen resultaten te interpreteren.'

(uit: eindexamenprogramma wiskunde-B voor het havo (1991))

Bijlage 2 Griep epidemie

TERUGBLIK

Hellingfuncties spelen een rol bij veranderingprocessen, zoals:

- voortbeweging van een voertuig (verandering van *plaats*)
- verhitting van een keteltje water (verandering van *temperatuur*)
- stijging van het water in de Rijn (verandering van *waterstand*)

In deze voorbeelden kunnen plaats, temperatuur en waterstand worden opgevat als *functies van de tijd*.

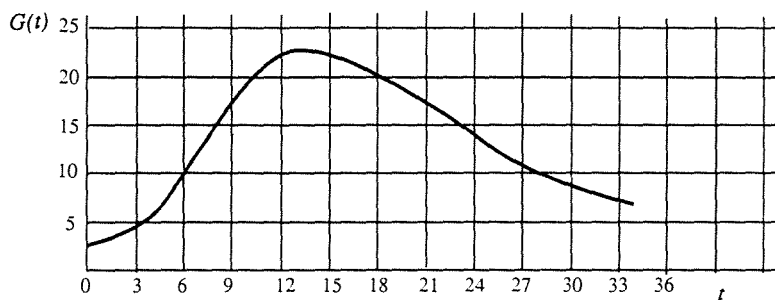
De hellingfunctie is in deze voorbeelden een *snelheidsfunctie*:

- snelheid van voortbeweging (eenheid bijvoorbeeld km/u)
- snelheid van verhitting (eenheid bijvoorbeeld °C/min)
- snelheid van stijging van de waterstand (eenheid bijvoorbeeld m/dag).

Opgave

Grafiek van het verloop van een griep epidemie.

$G(t)$ = het aantal grieppatienten op het tijdstip t .

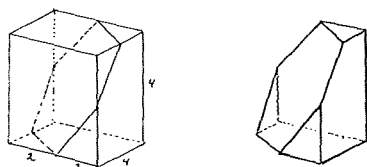


- >a Op welk moment breidde de epidemie zich het sterkst uit?
- >b Schets een grafiek van de hellingfunctie G' van G .
Welke betekenis kan je hier aan de hellingfunctie toekennen?

Bijlage 3 Lesbeschrijving

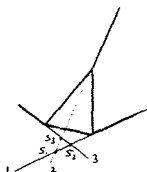
14. In een kubus met ribbe 4 worden zes middens van ribben verbonden. Je mag zonder bewijs aannemen dat hierdoor een vlakke regelmatige zeshoek wordt gevormd.

De kubus is nu verdeeld in twee lichamen, waarvan het rechter apart is getekend.



- >a Bereken de totale buitenoppervlakte van dat lichaam.
 - >b Bereken de inhoud van dat lichaam door er eerst drie kleine piramides aan vast te plakken zodat één grote piramide ontstaat.
- Hoe kun je je antwoord eenvoudig controleren?

Deze opgave bleek heel wat meer tijd te kosten dan ik vooraf had ingeschat. Hoewel..... als ik me precies aan de vraag had gehouden, zou het nog wel zijn meegevallen. Het probleem bij een aantal leerlingen was dat ze die drie piramiden, die er aan geplakt moesten worden, niet "zagen". Ik schetste vlug, en dus slordig, een deel van de figuur op het bord en plakte er zo'n piramide aanvast. Door de onnauwkeurigheid van de schets vroeg ik mezelf opeens af waarom die extra stukjes nou zo nodig piramiden moesten worden. Ofwel: waarom zouden de lijntjes 1, 2 en 3 eigenlijk met z'n drieën door één punt moeten gaan? Sterker nog: snijden ze elkaar überhaupt wel?

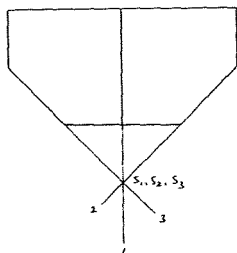


Deze twee vragen -zijn S_1 , S_2 en S_3 echte snijpunten?
-vallen S_1 , S_2 en S_3 samen?

speelde ik door naar de leerlingen.
Ze kregen ongeveer vijf minuten de tijd om een oplossing te vinden of in ieder geval een mogelijke aanpak van de problemen.

De eerste vraag konden ze zeker wel beantwoorden: lijntjes 1 en 2 liggen in het rechterzijvlak dus snijden elkaar echt. Zo ook 1 en 3. S_3 is ook een echt punt, want er was gegeven dat die zeshoek een plat vlak was. De tweede vraag had nog geen bevredigende oplossing opgeleverd. Een doubleur deed, voor het bord, een manhaftige poging om zich de drievlakkenstelling te herinneren. Dat lukte niet en ik voelde me niet geroepen om die regel op dat moment uit de toverhoed te trekken. Bij de, lichtelijk gestuurde, discussie kwamen na een tijdje twee ideeën naar voren die het uitdiepen waard waren. Een handig gebruik van het begrip "helling van een lijn" liet S_1 , S_2 en S_3 tot één punt samensmelten.

Een tweede goede suggestie was het tekenen van een uitslag van grondvlak en rechterzijvlak, waarna het probleem opeens niet meer bestond.



De tijdsinvestering bij opgave 14 b was zeker 15 á 20 minuten. Tijd die helemaal niet werd besteed aan de beantwoording van de vraag die daar werd gesteld. Tijd die helemaal besteed was aan het bezig zijn met ruimtemeetkunde, bezig zijn met probleemaanpakken,

Bijlage 4 Planten kweken

Onderstaande opgave is voor een deel gelijk aan een examenopgave van 1990.

8. Voor het kweken van plantjes gebruikt een tuinder een cellenstructuur zoals in figuur 25a is afgebeeld. Iedere afzonderlijke cel heeft zes zijden van 3 cm. Door de hele structuur uit te rekken, in de richting zoals aangegeven in figuur 25b, verandert de vorm van iedere cel. Daarbij blijven EF en CB evenwijdig. Die verandering kan worden beschreven met behulp van de variabele hoek DAB .

Stel de grootte van hoek DAB is x radialen.

fig 25a

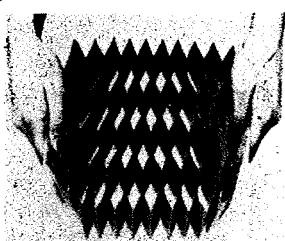
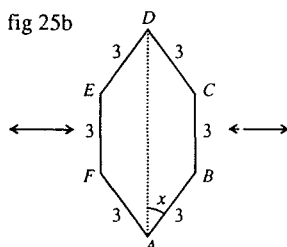


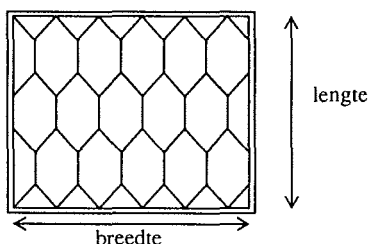
fig 25b



- >a Bereken x in radialen (in 2 decimalen nauwkeurig) in het geval dat $BF = 4$.

In figuur 26 is een dergelijke cellenstructuur aangebracht in een plantenbak.

fig 26



- >b De binnenbreedte van de plantenbak is 22 cm.
Bereken de binnenlengte van de plantenbak.

De cellenstructuur van figuur 14 wordt uit de plantenbak genomen en horizontaal uitgerekt totdat de hoek $x = \frac{1}{2}\pi$.

- >c Teken voor dit geval het bovenaanzicht van de cellenstructuur.

Het verband tussen de oppervlakte van de cel (S) en de hoekgrootte (x) wordt voor elke hoek x gegeven door

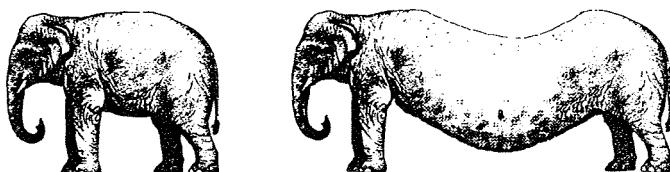
$$S = 18 \sin x + 18 \sin x \cos x$$

- >d Bewijs de juistheid van deze formule.

- >e Druk $\frac{dS}{dx}$ uit in $\cos x$.

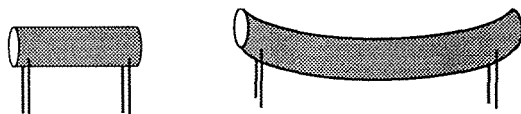
- >f Bereken voor welke waarde van x de oppervlakte van de cel maximaal is en teken de cel met maximale oppervlakte.

Bijlage 5 Doorzakeffect



Bij een bepaalde 'dikte' en 'lichaamsgewicht' van een viervoeter zijn er beperkingen voor de 'lengte', vanwege het doorzakeffect.

Enig idee hiervan krijgt men door het dier te beschouwen als een staaf die aan de uiteinden ondersteund wordt.



Iemand heeft het volgende systeem van formules opgesteld voor het grensgeval, waarbij G (= lichaamsgewicht in gram), L (= lengte in cm) en D (dikte in cm) een rol spelen.

$$(1) \frac{GL^2}{D^4} = 680$$

$$(4) D = b \cdot G^{\frac{3}{8}}$$

$$(2) LD^2 = G$$

$$(5) \frac{L}{D} = c \cdot G^{-\frac{1}{8}}$$

$$(3) L = a \cdot G^{\frac{1}{4}}$$

$$(6) D = d \cdot L^{\frac{3}{2}}$$

>a Als het gewicht van een dier bekend is, kunnen uit de formules (1) en (2) de maximaal mogelijke lengte en dikte worden berekend.

Neem een Indische olifant van 5000 kg.

Wat zijn de maximaal mogelijke lengte en dikte van zo'n olifant volgens formules (1) en (2)?

>b De formules (3) tot en met (6) zijn af te leiden uit (1) en (2).

Controleer dat en bereken a , b , c en d .