mathématiques pour tous

mathematics for all ... in the computer age

à l'âge de l'ordinateur

LEIDEN '85 HOLLAND

37

CIEAEM

Freudenthal instituut
Archief

OW&OC

vakgroep onderzoek wiskunde onderwijs en onderwijscomputercentrum
rijksuniversiteit utrecht

CIEAEM

COMMISSION INTERNATIONALE POUR L'ETUDE
ET L'AMELIORATION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

INTERNATIONAL COMMISSION FOR THE STUDY
AND IMPROVEMENT OF MATHEMATICS TEACHING

MATHEMATIQUES POUR TOUS ... A L'AGE DE L'ORDINATEUR

MATHEMATICS FOR ALL ... IN THE COMPUTER AGE

COMPTE RENDUS DE LA 37E RENCONTRE INTERNATIONALE
PROCEEDINGS OF THE 37TH CIEAEM MEETING

CIEAEM
XXXVII
LEIDEN: 4-10 AUGUST 1985.

Commission 1985:

Présidente d'honneur:	A.Z. KRYGOWSKA (Pologne)
Membres d'honneur:	W. (†) et R. SERVAIS (Belgique)
Président:	H. FREUDENTHAL (Pays-Bas)
Vice-Président:	M. PELLEREY (Italie)
Secrétaire:	J. NACHTERGAELE (Belgique)
Secrétaire-adjoint:	R. BOLLETTA (Italie)
Trésorier:	Th. BERNET (Suisse)
Délégué:	J. BOROWCZYK (France)

Commission 1986:

Présidente d'honneur:	A.Z. KRYGOWSKA (Pologne)
Membres d'honneur:	W. (†) et R. SERVAIS (Belgique)
Président:	M. PELLEREY (Italie)
Vice-Président:	J. NACHTERGAELE (Belgique)
	M. CIOSEK (Pologne)
Secrétaire:	J. DE LANGE Jzn (Pays Bas)
Trésorier:	Th. BERNET (Suisse)
Délégué:	F. MICHEL (Belgique)
	R. BOLLETTA (Italie)
	P. BOWIE (Angleterre)

Colophon:

Published by the State University of Utrecht,
Research Group on Mathematics Education and
Educational Computer Centre (OW & OC),
Subfaculty of Mathematics, The Netherlands, 1986.

Editorial secretary: Sylvia Pieters
Editorial executive: Ellen Hanepen
Editor: Jan de Lange Jzn
Printed by: Technipress, Culemborg.

© 1986 by the authors.

TABLE OF CONTENTS

PREFACE 6

Invited papers

MATHEMATICS FOR ALL ... IN THE COMPUTER AGE
Sir Wilfred Cockcroft 9

REALISTIC MATH FOR (ALMOST) ALL - THE HEWET PROJECT
Martin Kindt/Jan de Lange Jzn 14

QU'Y A-T-IL DE FONDAMENTAL POUR NOS ELEVES D'AFRIQUE, D'EUROPE ... OU D'AILLEURS?
Annie Berté 43

PRACTISING SKILLS AND REFLECTION
Erich Christian Wittmann 60

LA NOTION D'OBSTACLE EPISTEMOLOGIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
Anna Sierpinska 73

Group 1: Arithmetic and Algebra

LES NOMBRES IRRATIONNELS ET LES MICRO-ORDINATEURS
Krystyna Dalek 96

APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES ET MOYENS ELECTRONIQUES
Laura Laviosa 100

LA CONCEPTION DU NOMBRE RATIONNEL - UNE RECHERCHE EMPIRIQUE
Gregor Ebneth/Gisela Heink/Reinhold Spyra 104

WHY ERROR PERSIST IN OPERATIONS ON FRACTIONS? DO TEACHERS HAVE DIFFERENT OWN PURPOSES?
Teresa Navarro de Mendicuti 116

Group 2: Mathematical Models

GEOMETRY AND COMPUTERS: DANGERS AND POSSIBILITIES
Michèle Pellerey 118

LABORATOIRE MATHEMATIQUE
Barbara Feluch 122

UNE DEMARCHE DE MODELISATION, UN EXEMPLE: LA CONSTRUCTION D'UN SYSTEME DE REPRESENTATION DU NOMBRE SIGNIFICATIF ET EFFICACE
Nadine Bednarz 129

ELEVES EN SITUATION
François Jacquet/André Scheibler 133

THE AID OF GEOMETRY IN SOLVING PROBLEMS OF STABILITY; EIGENVALUES, MARKOW CHAINS, LINEAR SYSTEMS
Marta Menghini 138

LA GEOMETRIE AIDE LA COMPREHENSION DES CONCEPTS
Lina Mancini Proia 143

TESSELLATION - ECOLE PRIMAIRE, V CLASSE
Ida Sacchetti 153

LA SITUATION DE PROBLEME POUR LES ENFANTS QUI ACCEDENT A L'ECOLE MOYENNE
Cristina Mostacci 156

TEACHING APPLIED MATHEMATICS: THE GEAR OF A MOTOR-CAR AND THE GAUSS' DISTRIBUTION
Paul Bungartz 161

A SHORT STUDY ABOUT INTERDISCIPLINARY MATHEMATICAL MODELS
Lucas Gimeno Blasco 166

MATHEMATICAL MODELLING: LEARNING OF MATHEMATICS AND CULTURAL OBSTACLES
Paolo Boero 171

A JOURNEY INTO ELEMENTARY TRIANGLE GEOMETRY
Peter Baptist 176

Group 3: Mathematical Reasoning

ELEMENTS OF MATHEMATICAL REASONING: FIRST STAGE OF A RESEARCH
Marianna Ciosek 181

RAISONNEMENT ET PERSUASION: QUELQUES EXEMPLES POUR DEUX DIRECTIONS DE RECHERCHE
Yves Paquelier 185

MATHEMATICAL REASONING FOR ALL? JUST HAVE A LOOK
Rijkje Dekker 191

MATHEMATIQUES DANS UNE CLASSE 'SPECIALISEE' PRIMAIRE
Françoise Cerquetti-Aberkane 195

JEUX ET ECHEC EN MATHEMATIQUES
Marc Thierry 201

KNOWING HOW TO PROVE
Mario Barra 206

MATHEMATIQUES A L'AGE DE L'ORDINATEUR. QUEL GENRE DE CAPACITES DEVONS-NOUS FORMER CHEZ NOS ELEVES?
Emma Castelnuovo/Claudio en Daniela Gori-Giorgi 216

PREVIOUS KNOWLEDGE, AVAILABLE RESOURCES REASONING WHILE SOLVING PROBLEMS IN THE CLASSROOM AND REAL LIFE
Luis Puig Espinosa 221

Group 4: Teacher Training

L'EXPLOSION SCOLAIRE ET LA FORMATION DES ENSEIGNANTS
Jose M.Duarte/Raul F.Carvalho 227

TEACHER TRAINING FOR PRIMARY SCHOOL TEACHERS
Luciana Bazzini 233

TEACHER TRAINING: A WORK WITH TEACHERS FROM THE MEDIA INFERIORE SCHOOLS
Angela Pesci 237

FORMATION OF TEACHERS; MATHEMATICAL EDUCATION IN PRIMARY SCHOOLS
Irma Fuenlabrada 241

LES ANIMATEURS DE FORMATION PERMANENTE
Lucia Grugnetti/Rosanna Ruggiu 246

PROPOSITION DE THEMES POUR UN COURS DE METHODOLOGIE SPECIALE DE LA MATHEMATIQUE
Maggy Schneider 249

FORMATION PROFESSIONNELLE A L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
Josette Adda 256

UN ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES A TRANSFORMER: DANS QUEL SENS? ILLUSTRATION DES TRANSFORMATIONS DEMANDEES
Nadine Bednarz 261

UN ESSAI DE METHODOLOGIE SCIENTIFIQUE POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE DE 11 A 16 ANS ET POUR LES ECOLES DE FORMATION DE MAITRES
Joaquim Gimenez 267

TRAINING TEACHERS FOR INSTRUCTIONAL COMPUTING
Paulo Abrantes/Joao Ponte 277

Group 5: Mathematics and Computer Education

COMPUTER SCIENCE LITERACY IN SECONDARY SCHOOL
R.M. Bottino/P.Forcheri/M.T.Molfino 283

USE OF MICROCOMPUTERS IN CHILDREN TV-PROGRAMS
Marta Riveros Rojas/Pierina Zanocco Soto 289

DE BAAS OVER DE COMPUTER (II)
George Schoemaker 300

REFLEXION CRITIQUE SUR L'UTILISATION DU MICRO-ORDINATEUR DANS LA FORMATION MATHEMATIQUE
André Hardy 305

ETUDE DE FONCTIONS A L'AGE DE L'ORDINATEUR
Jean Paul Houben/Jacqueline Vanhamme 312

LA MATHEMATIQUE DANS LA VOIE DE L'INTEGRATION A L'AGE DES ORDINATEURS
Cristina Zambujo 321

INTERRELATION ENTRE LES SCIENCES HUMANINES, LES MATHEMATIQUES ET L'INFORMATIQUE; UNE APPLICATION A L'ARCHEOLOGIE
Sixto Romero Sanchez/Fulgencio Prat Hurtado 327

WILL LOGO ENVIRONMENTS REALLY IMPROVE EDUCATION?
Peter Bender 336

APPROCHE AUX ALGORITHMES A L'AGE DE 13 ANS
Laura Parenti 343

THE ROLE OF PROGRAMMING MICROCOMPUTERS IN MATHEMATICS TEACHING
Faisal Moshattat Shagati 347

Reports of the working groups

LE CALCUL/ARITHMETIC
Rapport du Groupe 1 351

MODELES MATHEMATIQUES
Rapport du Groupe 2 356

RAISONNEMENT MATHEMATIQUE
Rapport du Groupe 3 358

LA FORMATION DES MAITRES
Rapport du Groupe 4 361

L'ORDINATEUR
Rapport du Groupe 5 365

MATHEMATICS AND COMPUTER EDUCATION
Rapport du Groupe 5 369

Other presentations/Foire aux idées

ESSAI SUR L'HISTOIRE DE LA CIEAEM
Lucienne Felix 375

THE PLANETARIUM OF CHRISTIAAN HUYGENS AT LEIDEN AND CONTINUED FRACTIONS
Michael Neubrand 379

CINEMA AND COMPUTER GRAPHIC: A NEW AND OLD AID FOR EDUCATION
Michèle Emmer 382

MATHE-JOURNAL - A NEWSPAPER FOR TEACHERS
Bernhard Andelfinger 388

MATHEMATICS FOR ALL - A REPORT ABOUT THE DID-M-PROJECT (FRG)
Bernhard Andelfinger 389

AXIOMATIC DIDACTICS
Jan Karel Timmer 392

CERTAINE TYPOLOGIE (CLASSIFICATION) DES EXERCICES DE MATHEMATIQUES ET DE L'EFFECTIVITE DE LEURS SOLUTIONS
Barbara Rabijewska 399

LIST OF PARTICIPANTS 402

PREFACE

MATHEMATICS for all ... in the computer age is certainly not a very original choice as a subject for a conference on Math Education.
The theme of the 31st CIEAEM-conference was nearly the same: "Mathematics for all", and at ICME 5 in Adelaide a Theme-Group dealt with the same subject in a large number of presentations, which will be published this year. So we may conclude that for many years this problem will remain one of the main topics of mathematics education.
A stimulating role has been played - not only in the United Kingdom - by the Report of the Committee of Enquiry into the Teaching of Mathematics in Schools in England and Wales, the well known Cockcroft-report, since its publication in 1982.
As Cockcroft pointed out in his opening lecture at CIEAEM 37 the commission that bears his name could not yet take in full account the measure of availability of microcomputers in English schools. At present there are 11 microcomputers per secondary school in England and Wales, and 1.75 per primary school.
Two natural questions arise with respect to the introduction of the computers on such a wide scale:

- How can microcomputers assist and improve the teaching of mathematics in the classroom?
- How will the availability of such computers change the contents of mathematics syllabuses?

A third question may not be neglected: will the computer bring mathematics closer to all, or will it rather benefit the gifted students and the youth of the prosperous countries?

As we all know not all computer use leads to improving our educational system. Though there is a lot of software, and a lot of research, there is often a lack of quality and of experience how to use the relatively rich financial resources. Nebres in Adelaide urged researchers in mathematics education in developing countries to look at the actual life of urban workers, rural farmers and merchants in order to identify the mathematics needed and used in everyday life. Likewise Berté, in her presentation at our meeting, made it clear as follows: "Je pense que mes élèves africains, s'ils aident leurs parents à faire un parc pour animaux dans le Sahel où on n'est pas limité par la place mais plutôt par le prix des matériaux, penseront à planter les piquets en cercle, plutôt que d'imiter des constructions dites 'civilisées'".
The lack of fit between mathematics needed and the curriculum mathematics is often due to math-colonization by the 'civilized' countries.

Looking at all contributions during the last years there seems to be a trend towards more 'realistic' mathematics education - realistic in the sense of teaching mathematics within contexts of real life situations, and treating the student not as a passive receiver of prefabricated knowledge, but as an active 'constructor'. According to Wittmann's

paper many teachers react reluctantly to the idea of a 'constructivistic' approach. Conceptions based upon this view are not widely accepted because too little attention has been paid to practising skills. A new approach by Winter tries to tackle this problem for primary education.
In our own presentation we presented the development of a nationwide-introduced curriculum with very strong realistic aspects, which as a matter of fact has brought mathematics as a teaching subject to more students than ever before. Mathematics for almost all - I mean a very special group, the pre-university students.
Nevertheless, it can and will mean more since the effects on this new curriculum will spread to the curricula for lower age groups. Indeed, Damerow, in his Adelaide paper, raised the question whether we should proceed with a mathematics curriculum for a small, élite group, or rather develop a program designed to bring more of the essence of mathematics to all students?
This dichotomy may be a false one. Maybe we could teach high quality mathematics to all students and at the same time offer extras to the small élite group: the would-be mathematicians.

In fact more and more attention is being paid to math-for-all, realistic-math, learning by discovery on one side while on the other side the structuralist, Bourbaki persuasion is declining. As a teaching subject mathematics is not any more the strong structure it used to be. Lakatos' *proofs and refutations* , Davis' and Hersh's *fallibism* , display a different philosophy of mathematics and consequently, of mathematics education. In this frame we can also fill the notion of epistemological obstacle as introduced by Brousseau, and also presented in the paper of Sierpinska.

CIEAEM 37, in Leiden, was the first after the private meeting of the Commission in Frascati in 1984.
Lucienne Felix's contribution displays the long and interesting history of the Commission. According as the meetings grow bigger and bigger it became clearer that the informal character of the previous meetings could no longer be kept up.
In Leiden the program was more structured. Every participant was expected to really contribute to the results, which should be set down in written reports on the work in the five sub-theme-groups. Vivid discussions and short presentations were at the heart of this conference. We hope that the present proceedings witness this atmosphere and will contribute to the discussion on mathematics for all.

'Leiden' was organised by a small team of the Research Group OW and OC of Utrecht University. In this small team by far the largest part of the work was at the responsability of Ellen Hanepen. She not only organized the 37th CIEAEM conference, which was a complex matter because of the scarcity of accomodation in Leiden, but also did all the work on the proceedings. We thank her very much on behalf of all participants.

Jan de Lange Jzn

SIR WILFRED COCKCROFT

MATHEMATICS FOR ALL ... IN THE COMPUTER AGE

WHEN my committee of inquiry into the teaching of mathematics in schools in England and Wales was taking evidence, and preparing the report *'Mathematics Counts'* [1], we were aware of the increasing availability of microcomputers in our schools. But we could not be aware of the scale of what was to come. We worked and reported in the period 1978-81; the full extent of our Government's 'Micro-electronics Education Programme' was something we could only dimly foresee.

However, as those of you who are familiar with *Mathematics Counts* will know we included in the report a Chapter 7: *Calculators and computers*. The chapter was short: perhaps if we were reporting today we might wish to place greater emphasis on the impact of computers in the classroom. But to be fair I think I should remind you of our views in 1981. I believe they are still worthy of consideration.

We began in Chapter 7 by pointing out the rapidly developing nature of the calculator and computer scene at large. Nothing which has happened since contradicts what we saw - in particular, more microcomputers are available in homes - one estimate recently argued that a quarter of eleven year olds in Great Britain have access to a home computer. Access in homes to 'a variety of information services displayed on domestic television sets, and to interactive games, either on microcomputer or by special attachments to television sets', is indeed, even more, as we said in our report, 'commonplace'.

In schools, present estimates indicate that on average there are 11 microcomputers per secondary school in England and Wales, and 1.75 per primary school. In the main these are 'BBC's', although there are other brands in use. All this is a result of central and local government initiatives.

Let me however make one thing clear at the outset.
The micro-electronics education programme was not initiated with any particular emphasis on mathematics. Its aim was 'to help schools prepare children for life in a society in which devices and systems, based on micro-electronics are commonplace and pervasive'. It assumed that the study of individual subjects could be enriched and pupils familiarized with the use of the microcomputer. It aimed to use the microcomputer in both teaching and learning.

The installation of school based microcomputers was only a part of the programme. Software and databases were to be produced both for the traditional curriculum and for 'new topics' such as control technology, computer studies, information retrieval, word processing, etc.

Teacher training both in-service and pre-service was provided - again spread right across the curriculum, as much for the humanities and

language teachers as for the scientists or mathematicians. In the last month a further £ 2.2 m has been allocated by central government to provide support in 1986-'87.

Turning back to mathematics, then, the two matters of concern to my committee are now surely of even more concern to us; firstly within this general programme, how can microcomputers assist and improve the teaching of mathematics in the classroom; secondly how will the availability of such computers change the content of our mathematics syllabuses, or alter the relative stress placed on different topics within these syllabuses?

It is surely obvious that mere installation in a school of one or more computers will not of itself improve the teaching of mathematics, or indeed of any other subject. It simply makes available another teaching aid - albeit a very sophisticated aid - which requires teachers, as with any other aid, to have appropriate skills and knowledge to be able to prepare associated suitable teaching schemes.

On the other hand we know from experience that a microcomputer can provide a valuable resource for individual pupils in mathematics who are likely to derive considerable benefit from its use. Many examples exist of such pupils readily accepting the technological innovation inherent in the use of the computer. Such pupils are often self taught, and access to school computers both within and outside formal teaching periods is surely to be encouraged. Their enthusiasm should be turned to our advantage and every opportunity taken to guide them to initiate worthwhile mathematical investigations using the computer.

But changing classroom practice by using *any* modern aids is not something to be achieved overnight, or without considerable guidance and support for teachers. As far as microcomputers are concerned, good software is essential.

Sadly, only too often I hear stories of how little software of an appropriate standard is available. We concluded in Chapter 7 of *Mathematics Counts*, and we still hold the view that 'the fundamental criterion at all stages must be the extent to which any piece of software offers opportunity to enhance and improve work in the classroom'.

Let me remind you that our list of what mathematics teaching at all levels should include had in it six points:

— exposition by the teacher;
— discussion between teachers and pupils and between pupils themselves;
— appropriate practical work;
— consolidation and practice of fundamental skills and routines;
— problem solving, including the application of mathematics to everyday situations;
— investigational work.

All these points can surely be emphasised and enhanced in using a computer. We see no reason to alter the list in the light of possible modern developments; it was not drawn up on the assumption that it could be met without the appropriate use of teaching aids, sophisticated or

simple.

Going beyond this basic guide, few of us in England and Wales would dispute the thesis that if our pupils are to be introduced in school to a 'mathematical experience' appropriate to the late twentieth century, then we must consider a curriculum more extensive than that defined by our current syllabuses; included in any such extension must be some aspects of computer use, planned in relation to other areas of experience in our school curricula. [2]

Even at primary level, activities were noted by T.J. Fletcher:

> "Work was seen with programs which teach English language, with instructional games of various kinds, and with programs cultivating the ability to classify.
> A high proportion of the activities seen were mathematical. These range from drill and practice on number bonds to programs presenting number activities which encourage algebraic generalization. A number of programs are geometrical; these most commonly encourage an active approach to geometry with tasks such as manoeuvring a point round a maze, using the machine to produce complex drawings or to explore systematically generated patterns."

But, as Fletcher also notes, best practice often involved programmes written by teachers, and we cannot expect all teachers at any level, to be able or willing to develop extensive programmes from scratch. How then can we achieve a middle position, with programmes providing a framework into which teachers can put their own material, appropriate to their individual classes? Can these be such as to enable children to explore and investigate for themselves?

Interestingly, quoting again from Fletcher:

> "Advice against regarding the computer as 'only a number cruncher' appears misplaced, because during many visits to schools it was difficult to find examples of the computer's capacity for extensive heavy calculation being exploited at all. It was certainly difficult to find cases of the computer being used to assist in the study of straightforward arithmetical properties of number. By this we mean such things as the properties of prime numbers, of sequences such as the triangular numbers, squares and cubes, and properties of divisibility. These ideas are little studied in schools but they are encouraged by the publications of the subject associations and by the more scholarly textbooks. In this area pupils may get involved relatively quickly with ideas which fascinated the great mathematicians of the past."

Use of the language LOGO has stimulated geometrical work on designs and patterns at both junior and lower secondary levels, but again much more could be done in this direction using the graphics facilities on the machines in our schools. Are we exploiting them sufficiently to display the behaviour of functions, including three-dimensional examples?

The use of BASIC has similarly provided not only a method of approaching geometrical work, but also an approach to the learning of algebra. Any programme must include variables; the acceptance of this

and the need to understand how to work with such variables has already been recognized as a valuable approach at the early stages of algebra. More is needed: we must take the point noted by our Mathematical Association "Computers seem to operate at a lower level of abstraction in a child's mind than formal symbolism and so computers can enhance understanding. A formula embedded in a line of BASIC is more assimilable than the same formula viewed as an algebraic sentence."

So, arithmetic, geometry and algebra can all be enhanced by appropriate computer back up. But of course, the list of topics does not stop there. In particular, statistics and probability at any level can be revolutionized by using real data and the speed of the computer to perform experiments. At an early stage, tabulating, sorting, visual representations of data are all possible in a way not previously possible. Later, insight into the nature of probability distributions can be gained using the computer's ability to generate and illustrate distributions.

Such uses all involve different teaching emphases. If we turn to calculus, some may advocate much more. Far beyond the use of the computer as a graphical aid, they would argue considering numerical methods as a replacement for classical analytical techniques.

I am personally not convinced that we are as yet ready to move too far in this direction. We must certainly beware of losing sight of essential relationships in handling calculus (and algebra for that matter) numerically. Nevertheless we must seriously consider in teaching differentiation, integration, and differential equations, the numerical methods classically associated with analytical methods. Numerical gradients, Simpson's rule, Eulerian step by step methods of solving differential equations all spring to mind as methods already adapted to computer use in the outside world where mathematics is a basic tool.

Clearly the lists I have gone through raise questions and problems enough. I apologize to those of you who may feel I have omitted a topic dear to your heart. I am sure you will have an opportunity to raise such matters in the coming days.

I want to leave you with two general points.

First, I have not referred to the words 'for all' in the title of the conference. There are those who argue that the computer is not 'sexist' - that there is much evidence to indicate that both girls and boys react to the computer equally positively. If this is true, please let us take advantage of it. The possibly greater problem is to extend our mathematical teaching effectively across the whole range of ability. Again we have evidence of the ways in which computers cannot just take away drudgery but positively help less able pupils to have time to absorb concepts without the fear that they may still 'get the sum wrong' when they come to use a concept. I hope there will be those here today who can offer us much more information about the support computers offer us in this way.

Second, a comment from my own country. We argue that industry and commerce will be dominated by the new technology - hence our micro-

electronics programme in schools. Given that agreement, we must question any science and mathematics monopoly in this field, if such a monopoly is thought to exist. Should we not turn this into a positive programme, breaking through subject barriers, so that we openly recognize the mathematical and scientific ways of thinking which by implication will exist in any subject when the computer is used? Ordering evidence, testing hypotheses, logical questioning of data, are all a part of the wider world. We must surely take advantage of the work our colleagues teaching in other subjects are carrying out. I believe we must explore with them their use of the computer, not just in the science classes, or the craft and design workshops, but beyond, into the social sciences and the humanities. After all, the sorting art of a problem for the purpose of computer implementation helps you *think*, whatever the subject. Perhaps the right title I am seeking for a conference of this kind is:

"*Computer use for all . . . the place of mathematics?*"

Sir Wilfred Cockcroft
Secondary Examinations Council
London/England.

REFERENCES

[1] Report of the Committee of Inquiry into the teaching of mathematics in schools, London, HMSO, 1982.

[2] Fletcher, T.J.: *Microcomputers and Mathematics in Schools*, HMI, Department of Education and Science, London, 1983.

MARTIN KINDT/JAN DE LANGE JZN

REALISTIC MATH FOR (ALMOST) ALL
THE HEWET PROJECT

INTRODUCTION

THE *Hewet-project* has lead to a new curriculum, called 'Math A', for pre-university students (16-18) in The Netherlands. This curriculum is meant for those students who are not heading for a study in an exact science like math of physics but who need mathematics as a tool, for instance students in social sciences, psychology, economics, biology, etc.
From the *Hewet-report*[1] we quote the main goals of the new curriculum, as they were formulated globally.

> (...)This means that the students have to learn judging the value of a mathematical coloured presentation. Therefore they will have to be familiar with the use of mathematical language and they have to learn working with mathematical models.
> (...)The program has to be a broad one, because the students will meet very different applications in their next study. Moreover it is important from the view-point of general mathematical building that the students has orientated him- or herself in different fields of mathematics.

The *Hewet-team*, which was charged to develop the curriculum by experiments, received also four indications about the fields: *elementary and applied calculus*, *matrices with applications*, *probability and statistics* and *automatic data processing*.
In these fields some marks of recognition were placed, formulated in mathematical terms, such as: rules for differentiation, sum and product of matrices, binomial distribution, algorithms and structure-diagrams.
The didactical route was not pointed out, but it was explicitly mentioned that applications have to play an important role within the curriculum. Examples were briefly mentioned: exponential growth in biology and economy, periodic phenomena and trends, data- and transition-matrices, linear programming, testing hypothesis, etc.
In this presentation we will give you impressions about:

1. the contents of the program of math A;
2. the organization of the experiments;
3. goals and didactics;
4. achievement tests.

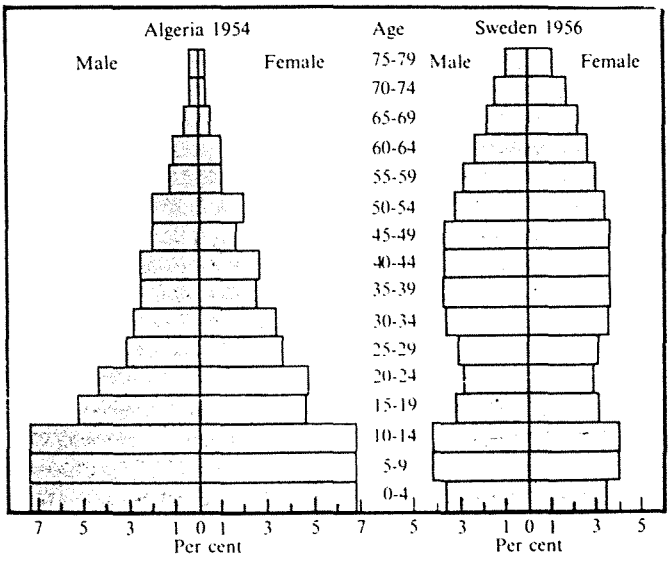
MARTIN KINDT/JAN DE LANGE JZN

ABOUT THE CONTENTS OF THE MATH A-PROGRAM

Changing population pyramids

In almost each schoolbook of geography a so called *population*-pyramid may be found. Such a pyramid is a 90°-rotated double histogram, which illustrates the age-distribution of the male and female population for a country.

We compare the pyramids of Algeria (1954) and Sweden (1956)[2]:

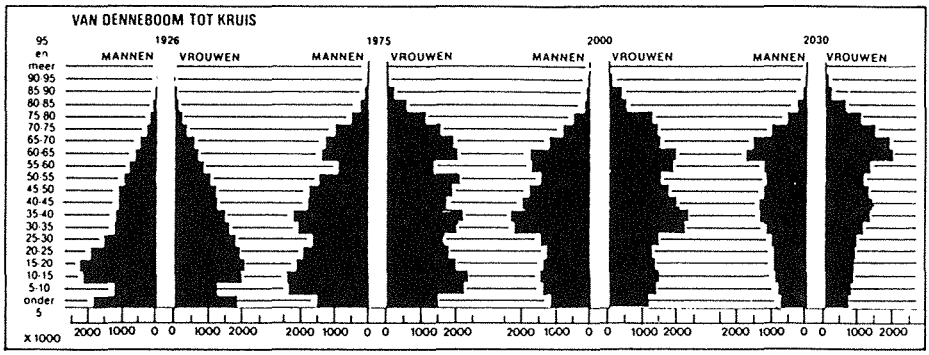


Not an insignificant difference.

The geometrical characteristics of the pyramid for a developing country can be summarized concisely: 'Large base, small top'. In demographical terms: 'high fertility, high mortality'. Not only the nation is young, so is the population as well. In Algeria 1954, 43% of the population was less than fifteen years old. Very different from a modern welfare-state which Sweden was already in 1956. You better speak of a pillar instead of a pyramid. However the Swedish histogram has looked like that of Algeria a number of decades before!

In Elseviers Magazine[3] there was a paper about 'growing grey' in the West-European countries, under the headline 'having babies is old-fashioned.'

A nice illustration in this paper was the changing pyramid of West-Germany: from 'Christmastree to Cross':



The transformation of a population-pyramid has far-reaching consequences for human society. The figures in the West-European countries have alarmed the politicians, especially in West-Germany and France. Measures to stimulate the birth-rate has been announced.

Not only human-population pyramids earn our attention. The age-structure of an animal population may be very interesting with regard to questions as:

— do we expect the extinction of the species?

— which measures about hunting has to be taken to save the species?

The situations that were sketched here, may serve as a motivating starting point to develop a piece of 'math A'.

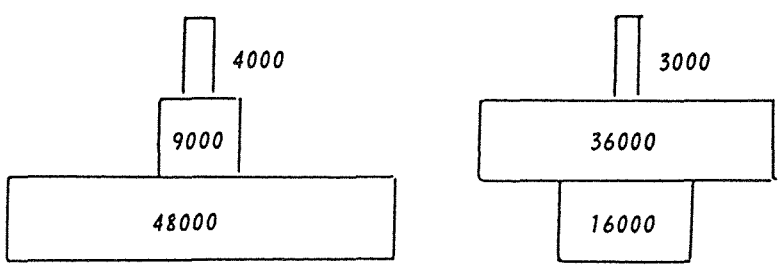
Transition patterns

An important principle for mathematizing is to simplify first of all the situation.

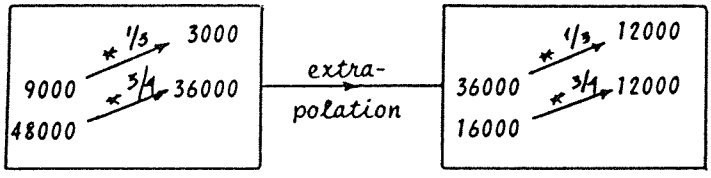
In this case we shall restrict ourselves to a symmetric population pyramid with three floors.

For a human population this would mean a distribution in classes with a length of 35 years. Of course such a distribution is to rough to learn something from. Therefore we imagine ourselves a population of animals with a shorter duration of life, i.e. beetles who reach a maximum age of three years.

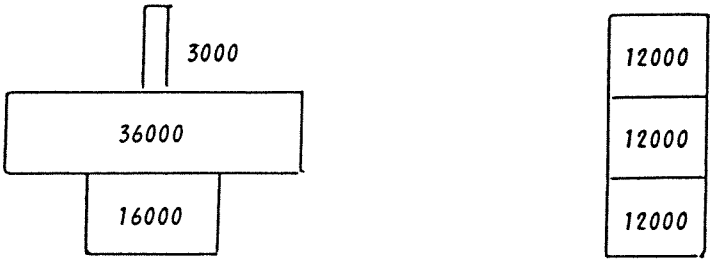
Two (fictive) pyramids for two consecutive years are:



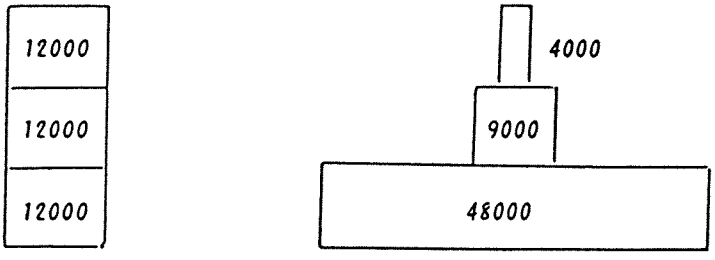
So, in one year a transformation from 'tree' to 'cross'. The question to the students could be: 'How can you forecast the next pyramid from these two ones?'
This is rather an open question; there are different correct answers. The question will lead almost inevitably to a discussion. The students will have to be made some assumptions about the changing process. For simplicity they may decide that the change is due only to birth and death, not to migration. Moreover, they may assume that birth-rate and death-rate do not change for the next years.
Under these assumptions the highest two floors of the next pyramid are easy to be found:



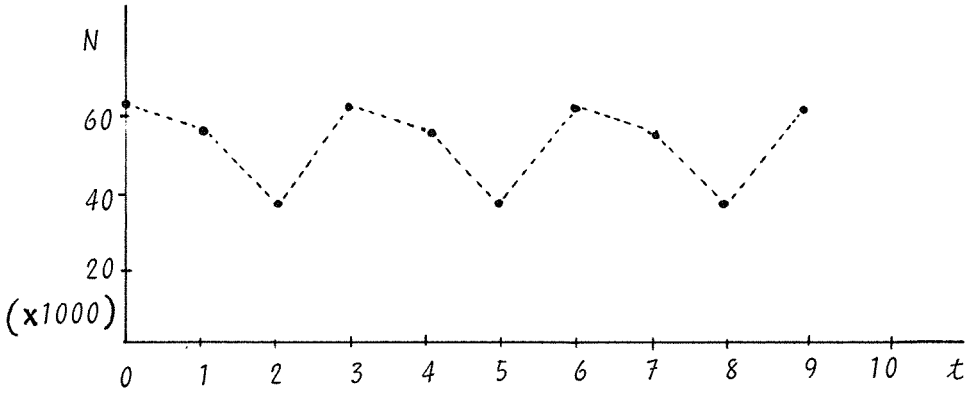
The third pyramid still needs a foundation and the question is from which floors of pyramid (1) do the 16000 new born beetles (2) come. So we have to know something about the beetle-breeding. Again there must be made an assumption. We suppose that only the two-years-ages beetles produce new ones.
Simple counting tells us that on the average, a beetle-family has eight children; the production-factor for one beetle is 4.
Extrapolation gives 4 × 3000 = 12000 baby-beetles:



And one year afterwards:



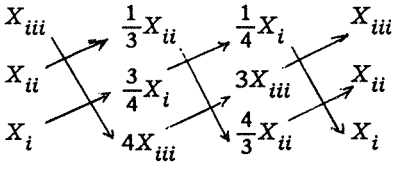
Big surprise. The original pyramid is back again. The age-structure appears to be periodic, with a period of three years.
The graph of population-size shows a fluctuation:



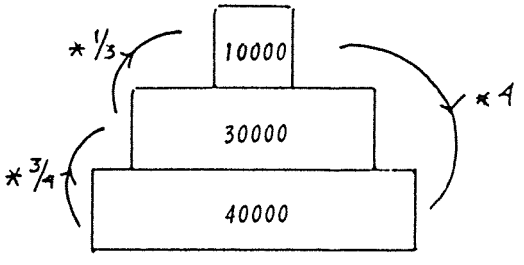
If N(t) is number of beetles at time t(=0,1,2,3,...) then N(t+3) = N(t).

Starting with another pyramid under the assumption of the same survival probabilities and the same fertility-pattern one can also expect a periodic motion.

For:

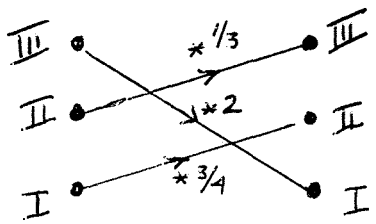


The 'amplitude' of the function t → N(t) may be larger of smaller, may even be 0:

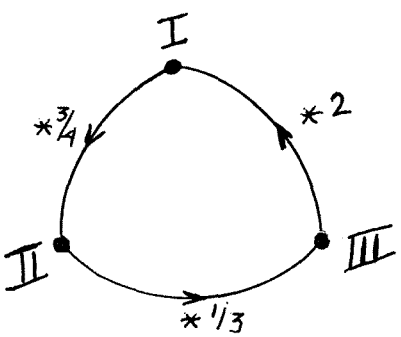


In this special case the population is stable 'forever'.

As usually, human intervention occurs. The beetles are a bit harmful for the environment and there will be used a poison to control the population. The effect is only a decrement of the fertility-rate.
The transition pattern becomes:



or to demonstrate the cyclic character:



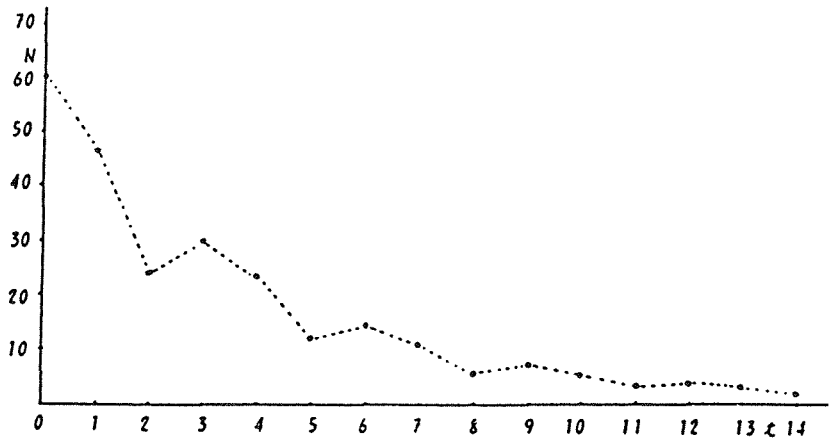
Such a transition-graph can be characterized with a matrix:

$$\begin{array}{cc} & \text{From:} \\ & \begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array} \\ \text{To:} \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

What is the result? Well:

$$\begin{pmatrix} 4000 \\ 9000 \\ 48000 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3000 \\ 36000 \\ 8000 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 12000 \\ 6000 \\ 6000 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2000 \\ 4500 \\ 24000 \end{pmatrix}$$

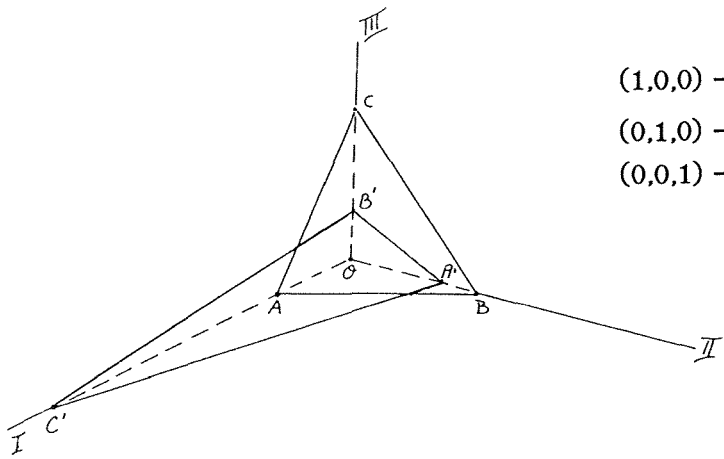
After three years the pyramid has again his original shape, but the population-size is halved.
N is a periodic-exponential function of t, so to say.



$$N(t+3) = \frac{1}{2}N(t)\ ,\ t=0,1,2,3,...$$

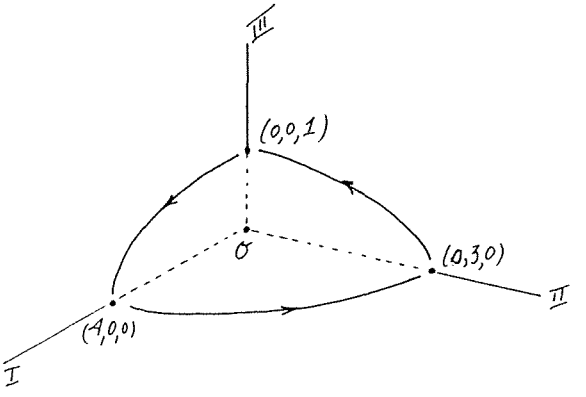
One thing is clear: the beetle population will extinct. The peaks in the curve are only little twitchings.

A geometrical interlude
Honestly we must say that the three age-classes were chosen in order to be able to make a three-dimensional representation.
Each age distribution of the beetles corresponds with a point in space and the transition from one distribution to the next corresponds with an affine transformation T of R^3.
We look at the first transition-pattern.



$(1,0,0) \rightarrow (0,\frac{3}{4},0)$
$(0,1,0) \rightarrow (0,0,\frac{1}{3})$
$(0,0,1) \rightarrow (4,0,0)$

The tetrahedron OABC is transformed in OA'B'C' which has an equal volume as OABC. The transformation T is something like a 'stretching rotation' around the invariant line from (0,0,0) to (4,3,1).

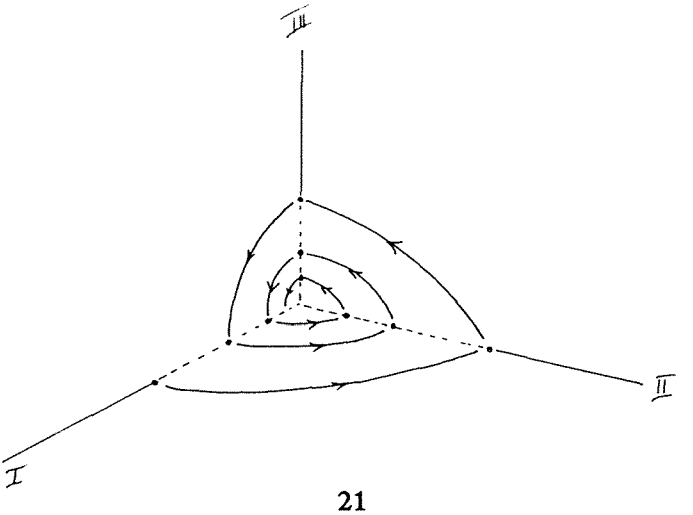


$T^3 = I$, which also follows from matrix-multiplication.

In general:

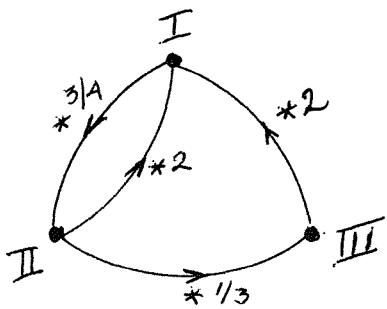
$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

is an affinity with the property $T^3 = pqrI$.
Hereby pqr is the factor with which the volumes are multiplied.
If $pqr < 1$, as in the case $p = \frac{3}{4}$, $q = \frac{1}{3}$, $r = 2$, the tetrahedron is diminished after three turns to a similar one and will converge to the origin by repeated application of T.
T is like a cyclone, moving to one point:



If pqr > 1 the cyclone moves in opposite direction; only if pqr = 1 the motion is periodic.
The volume factor pqr has probabilistic sense. The probability that a new born female beetle will be fertile is p.q and the expectation about the number of daughters of a female beetle is pqr. So the criteria for extinction, stabilization or exponential growth, each with period three, are elucidated again.

Evolution and explosion
The beetles who are treated to the poison don't resign. A rather quick evolution follows which advances the fertility and the pattern becomes now:



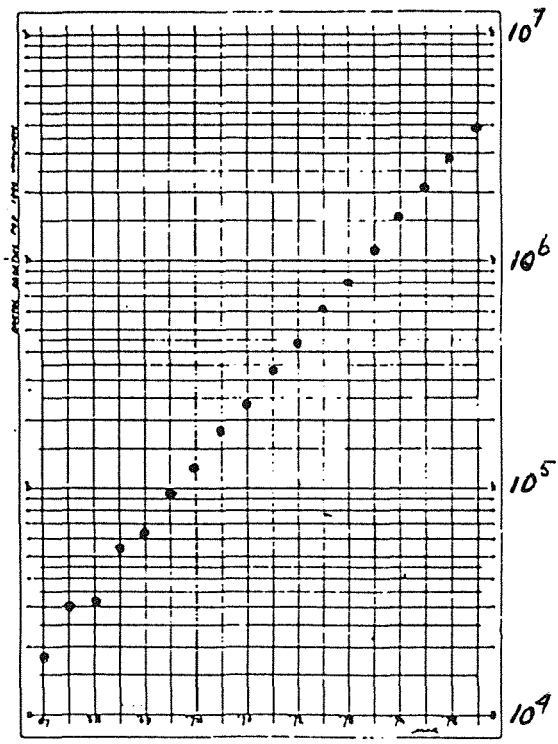
or:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

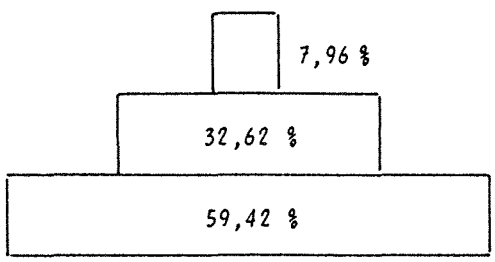
Starting with the population $X_i = 6000$, $X_{ii} = 6000$, $X_{iii} = 6000$ and with co-operation of the micro-computer, we find the next result:

6000	6000	6000
24000	4500	2000
13000	18000	1500
39000	9750	6000
31500	29250	3250
65000	23625	9750
66750	48750	7875
113250	50063	16250
132625	84938	16688
203250	99469	28313
255563	152438	33156
371188	191672	50813
484969	278391	63891
684563	363727	92797
913047	513422	121242
1269328	684785	171141
1711852	951996	228262
2360516	1283889	317332
3202442	1770387	427963
4396700	2401831	590129
5983921	3297525	800610
8196271	4487941	1099175

The evil is much worse then before. After a hesitating start the population rises very fast. So fast that we get the idea to use a logarithmic scale to draw the graph:



'Logarithmic paper' straightens everything which is curved exponentially and the conclusion is that we now have exponential growth after some time.
The grow factor is nearly 1,37, so $N(t+1) = 1{,}37.N(t)$ after some time.
When you draw the population-pyramids, you will see that the shape doesn't change at last. The percentages of the three classes become stable: 59,42; 32,61 and 7,96%:



That the beetle population grows fast after the adaption is not very astonishing if we notice the expected number of daughters for a female beetle:

$$\frac{3}{4}.2 + \frac{3}{4}.\frac{1}{3}.2 = 2$$

Eigenvalues
With the aid of linear algebra one can explain the foregoing results.
The eigenvalues of:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

are:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3},\ \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ and } \lambda_3 = -1.$$

λ_1 has the greatest absolute value and is therefore called *dominant*.
This dominant eigenvalue is just the growth-factor of the population ($\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3} = 1{,}366...$) and the eigenvector of λ_1 corresponds to the stable pyramid. The convergence to the stable situation can be explained geometrically. T is composed by three stretchings with factor:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

and the tug-of-war between these three factors will at last be won by λ_1. The angle between the vector $T^n x$ and the eigenvector e_1 (of λ_1) will convergence to 0°.

After the beetle story you can imagine how to act in a more complex situation.
The general form of the *population-projection matrix* (Leslie-matrix) is:

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

f_i = age-specified fertility rate of class i
s_i = survival probability of class i

The average number of daughters born by a single female:

$$f_1 + s_1 f_2 + s_1 s_2 f_3 + \cdots s_1 s_2 \cdots s_{n-1} f_n = \rho$$

is called the net-production rate of the population.[4]
Extinction or explosion will be determined by the value of ρ.
The eigenvalue-equation of the Leslie-matrix is:

$$\frac{f_1}{\lambda} + \frac{s_1 f_2}{\lambda^2} + \frac{s_1 s_2 f_3}{\lambda^3} + \cdots + \frac{s_1 s_2 \cdots s_{n-1} f_n}{\lambda^n} = 1$$

and it is easily to be proved that there is always a unique positive real eigenvalue λ, whose absolute value is at least the absolute value of the other eigenvalues.
In the case that two successive age-classes has a fertility-rate $\neq 0$, the positive eigenvalue is strictly dominant.
So in realistic situations there will be convergence to a stable situation, unless... the rates of death and fertility change. Unfortunately you can almost always expect changing the numbers f_i and s_i and this makes a long-term forecasting very difficult.

Different topics in one context
The beetle-story shows that a broad math program as math A pretends to be, not necessary will be crumbled. Topics of the four, mathematically spoken, different domains (calculus(1), matrices(2), statistics and probability(3), automatic data processing(4)) can meet each other and support each other within one context.
In the beetle-case we had:

1. periodic functions, exponential functions, working with logarithmic scales;
2. matrix representation of a transition pattern, multiplication of matrices;
3. histogram, survival-probability, expected value;
4. investigation of stabilization with the use of a standard program.

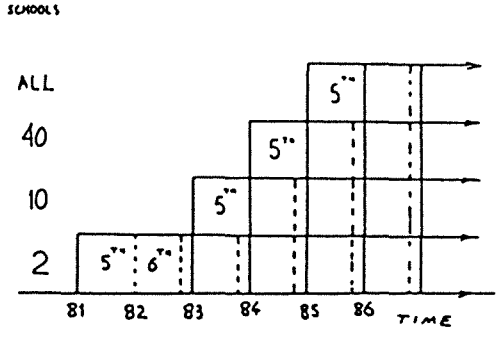
The geometrical part and the theory of eigenvalues don't belong to the curriculum of math A; they give some mathematical background for the teacher.
Realistic and complex problems about age specific population structure, as in the Hewet textbook Matrices[5] the possible extinction of the hooded seal, are very challenging for the students. The richness mathematically spoken as well as from the applications point of view, make this topic to a nice example of math A.

THE EXPERIMENTS

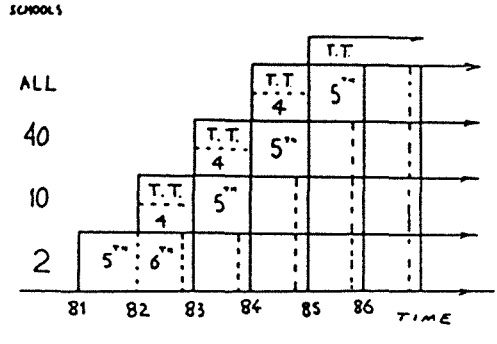
The Hewet-team was given only four years of experiments: the start of the experiments was scheduled for August 1981, the nationwide introduction in August 1985. The following schedule was chosen[6]:

In 1981 experiments started at two schools.
In 1983 ten more schools joined.
In 1984 forty more schools joined.
In 1985 the remaining schools joined.

So basically we have the following scheme:



Of course this is a very simple representation of the real situation. There was in the first place the desire by the schools to prepare their students for the new curriculum in the fourth grade. So for all students, except the two schools, experiments started almost a whole year earlier.
Secondly there was a need for in-service training for teacher *before* teaching the new experimental mathematics.
So the Hewet-team designed and taught a teacher-trainers course to be given to the teachers of the ten schools and to the teacher-trainers who had to teach the course from 1983 on. So the schedule can be completed to:



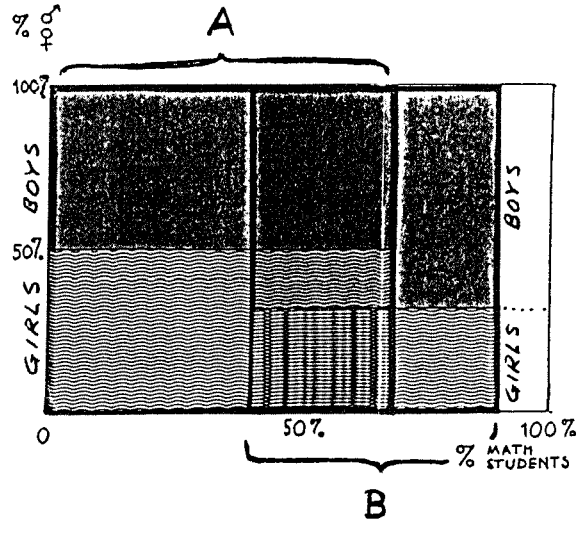
The innovation-strategy can be characterized as an exponential-growing-four-step-process, whereby almost all activities were carried out or co-ordinated by the Hewet-team (three persons). To give an impression of the activities involved in carrying out the experiments:

1981: developing experimental material
class observations
student interviews
teacher interviews
research to find out what level can be reached and what is desirable?
development of tests
dissimilation of information (teachers, teacher-trainers, government, others)
developing teacher-trainer material
developing pre-experimental material
1982: teacher training and teacher-trainers-training course
development of software
designing final school test
information to student councillors
revising experimental materials
information to publishers/authors
1983: designing final examinations
research to effects of new curriculum on number of students
meetings with teachers of ten schools
regional information meetings all teachers
research to effectiveness of tests
1984: commercialization of experimental materials
co-ordination 32 teacher trainer courses
following and controlling tempo at 52 schools
development of alternative tests
1985: conference teachers forty schools
research on achievement testing
etc.

The reaction of the students at school were rather favourable to mathematics A: the first weeks there were some problems: the break from previous mathematics was too large. With this kind of mathematics you had to read carefully, to discuss the problem, to think about, and, sometimes, to defend your answer; some students felt uncertain. Mathematics all at a sudden lost its image: it was *not* abstract, it was *not* for only the happy few, it was for almost all. For most teachers the transition phase was considerably larger. Not so much for the teachers of the two, or even the ten following schools. They had so many close contacts with the Hewet-team, that after completing the teacher training course, they were already convinced that this kind of mathematics had its possibilities.

But for the teachers of the forty schools this was quite different: they had only a few direct contacts with the Hewet-team and felt less secure when starting the experiments. They had only small advantages: they were given a rather precise schedule how long to spend on each of the subjects, and were given lots of experimental testing material.
But the first months were difficult, nevertheless six months after starting with the new curriculum the teachers felt already much better, especially after learning- on a conference - that their colleagues experienced the same problems.
One of the most mentioned problems the teachers encountered was the insecurity: when there are more 'correct' answers, how to handle?
In general the feeling was that the new program offered a lot of possibilities after all, and that it really was mathematics. But of course the most fascinating part of the experiment will start when officially the experiment is over: How will the students of the forty schools preform on the first nationwide final examination in 1986? And even more interesting: How about the exam for all schools in 1987?

Student participation in mathematics at the experimenting schools is higher than before.[7] The student have a choice: when they are sixteen years old they may decide not to continue in mathematics at all, or to choose math A, or math B (exact sciences) or both math A and B.
The trend is that 90% choses to continue in math A or B, and that some 70% choses math A (50% math B, and 30% math A and B):



With the old program student participation was about 70%, and the results were much lower.

One final remark on student participation: in math A there is an equal distribution in girls and boys: 50% each. In math B however, the boys dominate by two to one.

As mentioned before the majority of the teachers feel that this new curriculum is little short of a revolution, although a survey carried out by a publisher shows that 50% of the teachers is in favour of the new program and the way it was concretised by the Hewet-team.
Most teachers agree that the contents of the experimental material is within the boundaries set by the Hewet-report. But on the other hand there is a feeling that the Hewet-team went quite far in putting through its philosophy behind this math A in experimental material. As this material is not only being used on the 52 experiment schools, but also inspired the authors of commercial textbooks one may ask what the authors really wanted to achieve. What are the goals, what is the methodology?

GOALS AND DIDACTICS

Mathematization
Of course the students should learn the basic skills on the subject mentioned before: algebra, calculus, probability and statistics and automatic data processing.
But a basic activity in the math A-program is *mathematizing*.

Mathematization is an organizing and structuringactivity; an activity that in the first place is aiming at translating a real world problem into a mathematical one.[8]
This may be called *horizontal* mathematization:
— to identify the specific mathematical aspects in the problem;
— to transfer the problem to a known model;
— to formulate and visualize the problem in different ways;
— to recognize isomorphism in different problems;
— to find relations;
— to find regularities;
— to schematize.
As soon as the problem has been transformed into a mathematical one, we are able to handle the problem in a mathematical way.
One may call this *vertical* mathematization:
— to find a formula representing a relation;
— to use different mathematical models;
— the refine and adjust the model;
— to combine and integrate models;
— to generalize.
Most of the mathematization activities mentioned here can be found back in our example about population distributions.
It should be noticed that in most cases it is impossible to distinguish the horizontal and vertical components of mathematization.

It goes without saying that math A is more than mathematical concepts and skills and mathematization. When a problem has been mathematized successfully, one comes to the following important activity:
— to interpret the results;

— to discuss the restrictions of the model and method used;
— to look critically at the process of mathematization; and, also, recognize manipulations based on statistical material.

Finally, after all these aspects with a strong cognitive component, we mention a goal on the affective domain:

> *To develop an attitude to mathematics and a awareness of its power to communicate and explain which will result in mathematics being used wherever it can illuminate or make more precise an argument to be presented in a way which will assist clarity and understanding.*

Didactics

These goals and activities had to be transformed and translated by the Hewet-team in *didactics.*

It is not necessary to study the material very carefully to conclude that the team has chosen for the so-called *realistic method.* This means that the problem area is first investigated in an intuitive way. One tries to formulate the mathematical aspects in a verbal way, the next activity may be schematizing or model forming. These schemas and models are not presented in a final form to the students, but are developed by the students as much as possible.

Offering complete and ready-to-use models is typical for a completely different approach in mathematical education: the structuralistic approach. Seen from a structuralistic approach - influenced by Bourbaki, Dieudonné, Choquet - mathematics as taught at school is derived from the science mathematics: the structure of mathematics as a scientific building is already there and should not be discussed at school.

From a realistic point of view - Freudenthal[9], Whitney[10], - mathematics is in the first place a human activity: one should offer children to develop their own mathematical building. This approach is called realistic, while real problems play an important role. Actually one starts in reality and from there mathematical concepts are being developed - by the children. This means that context-problems play a vital role in a realistic approach: they can bridge the gap between reality and the formal system.

Characteristic for the realistic approach is the use of contexts to introduce a mathematical concept. One develops the concept through and by means of the context. The real world and mathematics are intertwined at all times. This didactical use of contexts may be called *third order* contexts to distinguish it from more often used way of context-problems.

When we only need to translate the verbal problem into a mathematical one, one may speak of *first order* contexts.

An example:

> **'The growth-factor of a bacteria population is six (over a time-unit).**
> **At time 0 there are four bacteria.**
> **Calculate at what time there will be 100 bacteria.'**

This can be translated in:

$$4.6^x = 100.$$

Simple, but it has to be trained too.

As soon as one has to do more than just translating the problem, like in our starting example, one may speak of *second order* use of contexts. Here one needs a lot of activities: organizing, structuring, sieving, identifying the mathematics, interpreting models, etc.etc.

In short, realistic curricula can be characterized in the following way[8]:

1. The dominating place of real problems, where the context serves both as source of mathematical concepts and as a field of application of mathematical concepts.
2. The broad attention paid to the development of schemes, symbolising and models.
3. The large student contribution in the course.
4. The interactive character of the learning process.

Following this rough sketch of the goals and didactics of mathematics A, is one of the major problems of this kind of mathematics: *constructing achievement tests.*

ACHIEVEMENT TESTS

It seems that many of the goals of mathematics A cannot be tested in the 'restricted time-written-test'. In these kind of test one usually tests the *product* but how about the *process* leading to that product? These kind of questions is much more important with math A, than just the answer. How does the student reflect on his model, how does he refine it?

This kind of questions is barely found in the tests that were designed by teachers, and at the nationwide final examination that took place in 1983, 1984 and 1985.

This examination is very important while teachers and authors tend to follow examinations in such a way that the contents of the curriculum may be affected drastically.

This has been a problem for a long time, and in may countries.

I quote Van Hiele (1957)[11]:

> 'Soon, too soon, the final examination does influence the way mathematics is taught.... This results in a kind of training for the examination, training that has no or negative significance for concept-building.'

The National Council of Teachers of Mathematics is very clear in its 'Agenda for Action' (1980)[12]:

> 'It is imperative that the goals of the mathematics program dictate the nature of evaluations needs to assess program effectiveness, student learning, teacher performance, or the quality of materials.

> Too often the reverse is true: the tests dictate the programs or assumptions of the evaluation plan are inconsistent with the program's goals.'

The Cockroft Report 'Mathematics Counts' (1982)[13] puts it this way:

> 'It therefore seems clear that, if the assessment at 16^+ is to reflect as many aspects of mathematical attainment as possible, it needs to take account not only of those aspects which it is possible to examine by means of written papers, but also of these aspects which need to be assessed in some other way.'

This 'some other way' is exactly what we were looking for: we were looking for achievement tests that would operationalize the goals of math A better than is possible with restricted time-written-tests and, furthermore, the tests 'should be such that they enable candidates to demonstrate what they do know rather than what they don't know'[13]. This means that children should be given the opportunity to show their flexibility and creativity.

From 1983 on we experimented with some other kinds of achievement tests. Right from the start we considered the aims of 'testing' more widely than usually done at schools in The Netherlands. Teachers and students share the feeling that they only make tests to obtain a 'score'. We wanted not just a score for a test, but a substantial role in the learning process as well.

Almost all restricted-time-written-tests do test only what a student does *not* know. We might expect a motivating effect when offering students test that give them the opportunity to show what they *do* know, and have them show their creativity and flexibility.

Finally we agree with Gronlund[14] that with this kind of tests 'the likelihood that the learning will be of greater permanent value to the students' increases.

So our starting points for developing tests for math A were - in short:

— to operationalise as much as possible the goals of math A;
— to give the students the opportunity to show what they know, not what they do *not* know;
— to give the students the opportunity to show insight, creativity and flexibility;
— that the quality of the test should not be measured by its possibility to score it objectively or mechanically;
— that we should carry out research to find out the value of inter-subjective-scoring.

During the last two years the following kind of not so common tests were tried out:

— oral test;
— oral test, with preparation (reading an article);
— a very open essay;
— take home test: a test on considerably higher level than encountered at school, to be made alone or in couples, at home;
— two-stage-test.

Two-Stage-test
In the remaining of this article we shall concentrate on this two stage test.
With this test the students first get the opportunity to make most of it as an ordinary restricted time written test. The teacher grades it, and turns it back to the students.
Now they take this test home for a couple of weeks in order to 'remake' it, to extend it, and to answer more completely the questions where reflection, insight, creativity and flexibility may be shown.
Not only offers the second stage the opportunity to test more of the goals, the first stage has the advantage of being scorable more objective.
Furthermore, the first stage is of a 'what you don't know' nature, while the second stage is more of 'what you do know' nature.
In this way the two-stage-test seems to offer a wide range of possibilities.

We carried out a two-stage-test recently.[15] The subject was rather limited: matrices. Limited in a sense that integration with other subjects was not likely this way.

The students: a group of twenty students who only had mathematics A (and six other disciplines) and a group of twenty who did choose math A and math B (and five other disciplines).
The teacher had previously brought a group students to the final examination; in this way he was experienced. He found that the two groups of students behaved very differently: the A-group was a very fine group of interested students who liked to reflect on the results they had found. The other group, the ones that chose A and B, were less interested. They doubted nature of this kind of mathematics and didn't like to reflect on the results: an answer is an answer.
The pace and the results in the mixed groups (eight hours per week) were considerably higher than in the A-group (four hours per week).

The subject of the test is *forestry*[5]: the context is real, the model is being used in forestry. There is a distance to the well known examples in the student material; although the model has a slight resemblance to population-projection-matrices.

To avoid any problems in the initial stage of the test we made the first questions very easy. If the students are unable to 'enter' the test the whole test may be of no value.

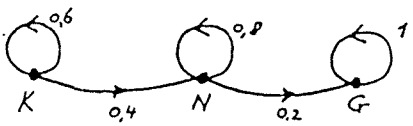
The first questions:

A forester has a piece of land with 3000 firs. He cuts a part of it just before X-mas to sell the trees. He has three lengths of trees:

small - medium - large

The small trees have no economic value, the medium sized are worth Dfl. 10,– and the large ones are sold for Dfl. 25,–.
Just after X-mas he has 1000 small ones, 1000 medium-sized ones and 1000 large ones. These trees grow without problems till the next X-mas.

He knows, from experiences of colleagues, that about 40% of the small trees will then be of medium length, and some 20% of the medium-sized trees has become large trees.
Or, as a graph:



This can be represented in a matrix as well:

$$G = \begin{matrix} \text{to} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \overset{\text{from}}{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}} \end{matrix} \begin{matrix} S \\ M \\ L \end{matrix}$$

1. *Complete the matrix.*
2. *Use G to complete how the forest looks next X-mas.*
3. *After cutting trees, and planting new small trees, he wants again a 1000, 1000, 1000 population.*
   How many trees, of what length, should he cut?
   How many small trees should be planted?

The score on these three questions came close to perfect (95%).
The fifth question did arise some problems: in this question three strategies were compared.

The forester questions the above mentioned strategy. He considers seriously two other strategies. All three:

I. Cut the trees after (almost) one year, and plant small trees till the 1000, 1000, 1000 population is back (the above strategy).
II. Cut the trees after (almost) two years, and plant small trees till the 1000, 1000, 1000 population is back.
III. After (almost) one year only the large trees are cut (leaving 1000 large trees) and plant the same number of small trees; and after another year only the large trees (over 1000) are cut, and new ones are being planted.

5. *Which of the strategies is most profitable for the forester?*

The following questions were again rather straight forward: they are asked to consider the use of a fertilizer, resulting in a new matrix:

$$G_* = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

instead of:

$$G = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix}$$

The students had to explain why G_* 'results' in faster growing of the forest.

The problem with G_* is that the forester is unable to get his starting population (1000, 1000, 1000) back:

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 900 \\ 1500 \end{pmatrix}$$

Through cutting and planting one gets:

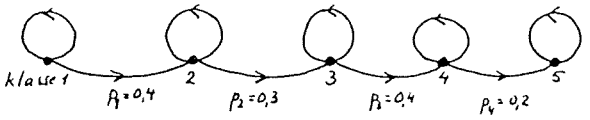
$$\begin{pmatrix} 600 \\ 900 \\ 1500 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ -500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 900 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

The forester, however, wants his 1000, 1000, 1000 population back. The students are asked: make a proposal for using less fertilizer such that he can get back his starting population.
Most students suggest the following matrix:

$$G_+ = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,4 & 1 \end{pmatrix}$$

Three questions are worth considering more in detail.

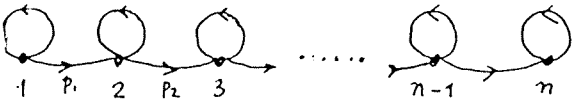
Another forester prefers to use five length-classes:



with starting population: $B = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$

10. Write an essay containing:
- *the growth-matrix for this situation;*
- *the population after one year;*
- *is it possible to get the starting population back?*
- *if this is not the case is it possible then to change one of the elements of the matrix in order to make it possible?*
- *the effect of fast growing trees: for instance a tree that grows within a year from class 3 to class 5.*

11. Find the matrix for the general case:



How can you see from the matrix whether or not you can get back the starting population?

$$B = \begin{pmatrix} 1000 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1000 \end{pmatrix}$$

12. What are the restrictions of this model? What refinements are possible?

Open

These three questions offer the possibility to discuss the 'openness' of a question. To make one thing clear, a 'closed' question is somewhat more than a multiple choice question.

We like to say that: 'solve $4.6^x = 100$' is closed as well: there is virtually no degree of freedom for the student.

When we look at the questions 10, 11 and 12, we notice an increasing level of 'openness', and - according to many people - a decreasing possibility to score objectively.
Question 11 (the generalization of the problem) is an almost closed question, although the student has quite some freedom in answering the second part of it.
A question like this one will have a fair chance when proposed for a final examination in the Dutch tradition.

That may be different with problem 10:

Write an essay containing:
- *the growth-matrix for this situation;*
- *the population after one year;*
- *is it possible to get the starting population back?*
- *if this is not the case, is it possible to change one of the elements of the matrix in order to make it possible?*
- *the effect of fast growing trees: for instance a tree that grows within a year from class 3 to class 5.*

This has more freedom. Let's say of the second order: students may focus on the point they prefer, and pay little attention to other points. They can answer in half a page or write a rather long essay.
Within the math-examination a tradition problem like this might not be given a chance. This is rather surprising, while in examinations in other disciplines like history and economics, similar problems were posed on the 1985 examination.

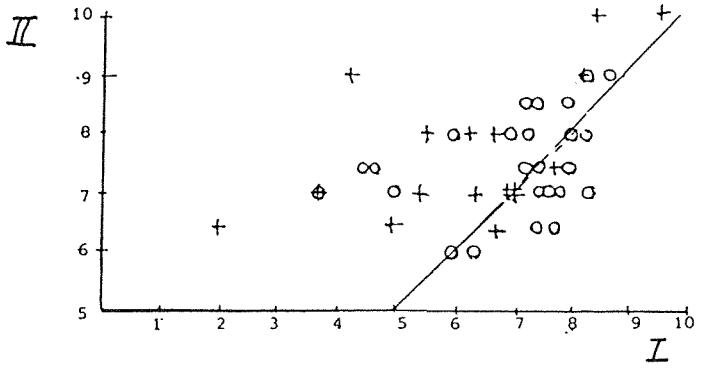
Almost complete 'openness' of the third order can be found in problem 12: 'What are the restrictions of this model? What refinements are possible?'
A question like this one goes too far in the opinion of many test designers. Though not according to the students: some of them produced excellent essays on this question, where all earlier mentioned aspects like creativity, flexibility, reflexion and a critical look at the model played a vital role.

Results
The reaction of the students showed different opinions. The A-group was in general very enthusiastic, without restrictions. They liked particularly the second phase of the test: here 'you could learn a lot', 'you were able to show insight'. 'it is not correct or wrong, there are more possibilities'.
The reaction of the mixed A-B-group was different. They found that the first stage of the test offered enough possibilities to show that they understood the matter, and they were reluctant to reflect on their work. Nevertheless they agreed that it was fair to give students a chance with the second stage.
Scoring the first stage of the test was no problem for the teacher as this was an ordinary restricted time written test.

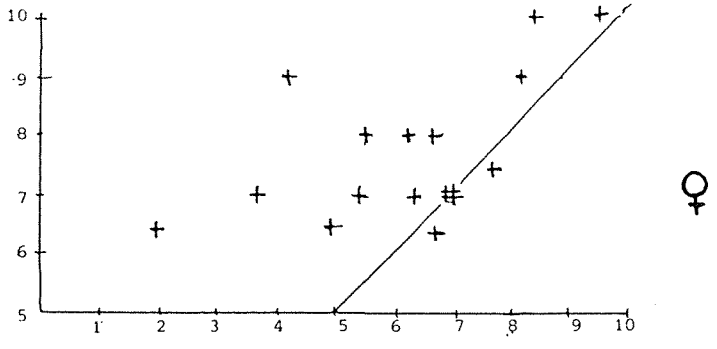
And there is a general feeling that these kind of tests are - at least in mathematics - fairly objective scorable.

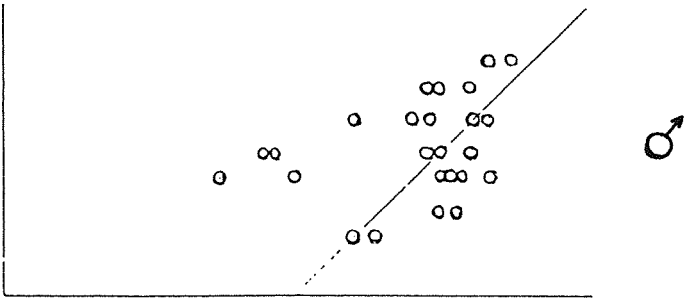
Scoring the second stage is a problem. The teacher decided to read the work of the student and to make positive and negative notes, resulting in a score. So no precise table, just an impression that could be defended by pointing to these positive and negative points.

Comparing the scores of the students, there are some remarks to be made. This remarks are not based on the experiences with this test and this forty students only, but follow from other alternative tests as well. First let's look at the graph showing the total results:



It shows clearly that the second round gives higher results, according to what we expected. When we make seperate graphs for boys and girls we get:





From these graphs one would like to conclude that girls used the possibilities of the second stage better than boys.
The results of the girls in the first stage were considerably lower than those of the boys; but not so in the second stage.
The best results were actually from girls.
This seems to be a trend: especially girls seem to score better when they are being tested by other means than restricted-time-written-tests.

Now one might ask how fair the scoring is on the second stage work. How fair is intersubjectivity?
So we decided to pick five second stage student-works and sent them out to a number of teachers.
We asked them to score the pieces of work done by the students without any background information on the students and not proposing any scoring-table. They were just asked to read the work and assign a score to it.
Most teachers protested that this was too much asked from them.
Although we are not yet ready to publish the results we like to show you some partial results:

STUDENT \ TEACHER	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1/2	1	1	1
2	2	2	3	1/2	2	2/3/4	2
3	3	3	2	3	4/5	2/3/4	3
4	4	4	5	5	4/5	2/3/4	5
5	5	5	4	4	3	5	4

ranking numbers

This is a very surprising result. And not only there is a wide agreement on the ranking order, but also on the absolute scores.
For instance the scores of student 2:

8½ 9 8+ 9 8 8 8

Of course there are works where the results show a wider spread. But in thoses case one can -most of the time - explain this differences while different teachers appreciate different aspects. We have the impression that with certain guidelines the intersubjectivity can be even more reliable.

Mathematics A was never intended for all. But it seems possible to develop a math curriculum that all students can follow successfully, when starting from the realistic approach.
One of the major problems is to develop proper test material, in order to maintain the goals of the program, and having it less influenced by the final examination.
For this reason we are developing testing material, collecting it[16], and distributing it. This service to the teachers is an essential part of our strategy to make sure that the development of Math A continues the way the designers meant it.

Martin Kindt/Jan de Lange Jzn
Researchgroup OW & OC
University of Utrecht
Utrecht/The Netherlands.

REFERENCES

[1] 1979, Rapport van de Werkgroep van Advies Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde Een en Twee, Staatsuitgeverij Den Haag, Holland.

[2] Young, J.Z.: 1970, *An Introduction to the Study of man*, Oxford University Press, Oxford, UK.

[3] Elseviers Magazine, 6.4.1985.

[4] Rorres, C. and H. Anton: 1977, *Applications of Linear Algebra*, John Wiley & Sons, New York, USA.

[5] Lange Jzn, J. de and M. Kindt: *Matrices*, Educaboek, Culemborg, Holland.

[6] Lange Jzn, J. de and M. Kindt: 1984, *The Hewet Project - Report on an Experiment Leading to a New Curriculum for the Pre-University Students*,' Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 16(2), 74-79.

[7] Verhage, H.: 1985, *Ja of nee tegen A en B*, Nieuwe Wiskrant 4(2), 15-18.

[8] Treffers, A. and F. Goffree: 1985, *Rational Analysis of Realistic Mathematics Education*, Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, OW & OC, Utrecht, Holland, 97-121.

[9] Freudenthal, H.: 1983, *Didactical phenomenology of Mathematical Structures*, D. Reidel Publ.Co., Dordrecht, Holland.

[10] Whitney, H.: 1985, *Taking Responsibility in School Mathematics Education*, Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, OW & OC, Utrecht, Holland, 123-141.

[11] Hiele, P.M. van: 1957,*De problematiek van het inzicht*, RU Utrecht, Holland.

[12] N.C.T.M.: 1980, *An agenda for Action*, Reston Va., USA.

[13] Cockroft, W.H.: 1982, *Mathematics Counts*, HMSO, London.

[14] Gronlund, N.: 1968, *Constructing Achievement Tests*, Englewood Cliffs, USA.

[15] Lange Jzn, J. de: 1985, *Toetsen bij Wiskunde A*, Nieuwe Wiskrant 4(4), 19-32.

[16] Lange Jzn, J. de (ed.): 1984, *Hewet en Toets 2*, OW & OC, Utrecht, Holland.

ANNIE BERTE

QU'Y A-T-IL DE FONDAMENTAL POUR NOS ELEVES D'AFRIQUE, D'EUROPE ... OU D'AILLEURS?

LE Thème qui nous a réuni avait déjà été le sujet de la Rencontre de Vezprèm en Hongrie en 1979, l'informatique en moins. D'une certaine manière c'était aussi le thème de Tunis en 1975: Pourquoi la mathématique?
Fait significatif: la question avait été posée ainsi la première fois où notre Commission se réunissait hors de l'Europe et de l'Amérique du Nord.

Lors de notre rencontre de Vezprèm, j'avais tiré grâce à M. Freudenthal, la conclusion suivante:

— A la question: Qu'y a-t-il de fondamental à enseigner dans notre discipline?
— La réponse est: Il n'y a rien de fondamental si on le recherche par rapport à la mathématique seule, car comme toute science humaine, la mathématique est prise dans le courant de l'histoire et de la société.
Ce qui était important hier ne l'est plus aujourd'hui. L'enseignement des structures a paru à une époque plus importante que celui de la géométrie classique, aujourd'hui l'informatique remet à la mode la recherche d'algorithmes.

Savons-nous ce qui apparaîtra important demain?

Les mathématiques étant hors de cause, examinons l'aspect social du problème. Deux grandes vagues, me semble-t-il portent cette interrogation sur le fondamental.

Une première interrogation arrive des pays riches où un grand nombre d'élèves accèdent aujourd'hui à l'enseignement secondaire. Ils y échouent en masse, ce qui est *nécessaire* puisque la société est hiérarchisée. Faute d'une formation didactique des maîtres, la mathématique est présentée souvent encore plus formellement qu'autrefois, selon le mécanisme: 'j'apprends - j'applique', qui ne réussit qu'à un très petit nombre. La mathématique est devenue une importante cause d'échec, même un instrument de sélection hors de propos pour l'accès à certaines professions.

Dans une société où le principe de base est le rendement, la formation mathématique n'est utile, au sens strict de ce mot, qu'aux futurs techniciens supérieurs, aux professeurs et aux chercheurs. Si l'enseignement des mathématiques devient tel, que les élèves du secondaire eux-mêmes et parfois les maîtres n'en voient plus l'utilité spirituelle pour l'homme moyen, il apparaît qu'il faut réfléchir pour réduire cet enseignement à un minimum, mieux enseigné peut être, et laissant plus de place à une autre formation (artistique, sportive ....).

Le double tranchant de ce discours réside dans le fait qu'il se tient dans une société peu idéale, de pouvoir technocrate, où la liberté de chacun - liberté de décider et de contrôler - croît comme son instruction scientifique.

Une deuxième interrogation résulte de l'émergence sur la scène internationale de sociétés qui n'avaient pas jusqu'ici la parole, et qui se réveillent dans un monde d'interdépendance où elles doivent assimiler la science des riches, base de la technique, uniquement pour survivre dignement.

Si le but est la survie et le bonheur, cette construction abstraite dont les derniers développements sont le seul fait de l'homme blanc occidental, est-elle nécessaire? Le marasme moral et politique des sociétés développées n'encourage guère l'imitation, surtout quant on ne peut se permettre de gaspiller des ressources réduites. D'où à nouveau cette question du fondamental nécessaire à l'homme moyen d'une société différente.

Ce discours transporte à l'échelle de la planète le problème précédent avec son double tranchant, la maîtrise scientifique étant aussi actuellement pour les nations pauvres, la clé de la liberté.

Ainsi notre Commission, portée par ces interrogations venues d'abord d'un pays africain, puis d'un pays de l'Europe de l'Est, puis de la Hollande qui nous accueille aujourd'hui, s'est réunie pour tenter de voir en quoi ces questions se rejoignent sur un fond commun.

Je pense que nous, enseignants ou chercheurs, instruments parfois de certains pouvoirs qui nous contrôlent et nous utilisent à notre insu, nous devons être uniquement guidés ici par l'observation des réactions de nos élèves, d'autant plus fiable qu'elle peut se faire dans des pays différents.

Je prendrai mes exemples dans deux pays d'Afrique Noire, le Niger et le Mali, pays du Sahel peu souvent représentés dans nos Rencontres, ce qui n'est pas près de s'arranger puisqu'actuellement le peuple y meurt de faim, soif et pauvreté. Mais je crois qu'un tel pas de côté dans l'espace peut nous aider à mieux comprendre.

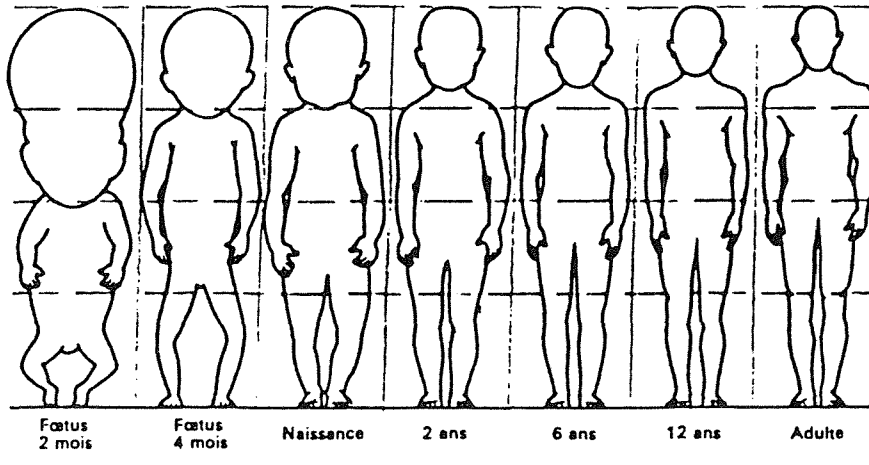
Il y a quelques années, Emma Castelnuovo avait organisé, dans une classe de collège à Niamey, l'activité suivante:

Prenons des feuilles sur un même rameau d'une sorte d'euphorbe, plante grasse sauvage très courante dans le Sahel. Mesurons pour chaque feuille la longueur L et la largeur maximale l.

Plaçons les résultats sur un graphique. On obtient une série de points presque alignés. On vérifie que le rapport L/l est à peu près constant. Il s'agit de la proportionnalité.

Les naturalistes observerons avec plus de détails la croissance des feuilles, selon la lumière, le sol, ... etc. La mathématique met ici seulement en évidence la similitude. On voit les limites, dans la réalité de ce modèle simple.

Si on mesure maintenant le rapport H/T (hauteur totale du corps sur hauteur de la tête) au cours de la vie, du foetus à l'adulte; ce rapport n'est pas constant, ce qui est à mettre en relation avec le fait que nous avons notre capital de cerveau très jeunes:

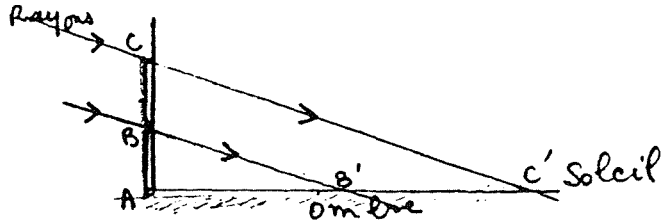


Pour un poulain c'est la hauteur des pattes qui sera démesurée.

Prolongeant cette idée, grâce à une suggestion de Jean Sauvy dans le cadre de sa recherche: *Mathématiques et Corps humain*, j'avais incité mes élèves nigériens de première année de collège à mesurer leur taille et d'autres parties de leur corps. Ils avaient été ravis de se mesurer en classe, car certains ne connaissaient pas leur taille. Ils avaient été très surpris de constater que la hauteur de la tête était la même pour les plus grands et les plus petits, la même aussi pour les filles et les garçons. Jean Sauvy m'avait envoyé des mesures faites par des élèves dans des classes de différents pays, ce qui permettait de faire une initiation à la statistique. Et mes élèves nigériens ont été contents de vérifier que ces écoliers d'Europe et d'Amérique avaient à peu près la même hauteur de tête qu'eux. Leur conclusion, inattendue pour moi avait été: "Nous avons la même grosseur de tête en moyenne que les Européens, donc nous sommes semblables, dons nous pouvons faire comme eux!" ... raisonnement qui méritait beaucoup de commentaires.

Je suis absolument sûre que, pour mes petits élèves nigériens, j'avais touché avec ce problème de statistique sur la grosseur moyenne des têtes une vraie question pour eux, la preuve c'est que j'ai retrouvé au Mali la

même question sous une autre forme, avec des étudiants licenciés de 4ème année de l'Ecole Normale Supérieure à qui je faisais un cours de didactique des mathématiques.
Je leur disais la chose suivante:
une bonne introduction du théorème de Thalès peut se faire par les ombres, car en Afrique le soleil est une forte réalité.
Commencez avec un bâton. Si on double sa longueur, l'ombre double...



Expliquez pourquoi les rayons de soleil sont parallèles.
(Source de lumière à l'infini pour nous.)

N'oubliez pas surtout, même si c'est une légende, de parler de Thalès. Son père, commerçant l'avait envoyé en Egypte pour l'aider dans son commerce et là-bas, on lui a demandé de mesurer la hauteur d'une pyramide ....
Vos élèves seront très attentifs, car cette anecdote les touche. L'Egypte, c'est l'Afrique, les grands voyages commerciaux vers la Mecque, c'est une des bases de l'ancienne civilisation du Mali. En plus, par le fait du père qui envoie son fils pour l'aider, ils se sentent concernés. A ce sujet, je disais toujours à mes étudiants africains, futurs professeurs: l'Afrique et très proche du Monde Antique.
La légende rapporte qu'Archimède a été tué alors qu'il dessinait sur le *sable*, porter des objets sur la tête est très romain, comme Emma Castelnuovo l'avait fait remarquer au Niger. Avec mes étudiants, il y avait toujours là un moment d'émotion intense, sans doute parce que les étudiants africains, grands et petits, pensent tous un peu confusément qu'ils apprennent ces mathématiques étrangères à leur société, pire, inventées par ces gens qui, par la colonisation leur ont fait un peu de bien et tant de mal. Il est donc très important pour nous tous de sentir que malgré tout, nous sommes bien du même monde. Donc j'en étais là avec eux, quand une vraie question, leur question, est apparue: "Mais pourquoi n'avons-nous pas de grands mathématiciens africains? (Même question que le problème des têtes des petits collégiens). J'ai répondu par une autre question: "Connaissez-vous beaucoup de femmes, de n'importe quelle race qui aient été de grandes mathématiciennes? Ils n'en connaissaient pas, et pourtant ils avaient étudié en licence les anneaux noethériens. Ils étaient d'ailleurs assez fâchés qu'on leur ait caché par omission qu'Emmy Noether était une femme. On voit aisément la suite de la discussion. Quand de telles questions si profondes pour les étudiants sont mises à jour par mon enseignement, je pense que le

résultat est positif.

Doit-on conclure que pour toucher au fondamental, il est bon de se déplacer transversalement à travers les disciplines, ainsi que verticalement dans l'histoire comme le dit Emma Castelnuovo. Oui, c'est évident. Par contre, il ne faudrait pas conclure que le seul fondamental est le 'concret' ou pire encore que certains peuples démunis ont besoin de concret principalement. En fait, si on veut bien l'examiner, la demande de ces enfants et étudiants est tout autre. Ils revendiquent le droit à la connaissance et à la découverte en mathématique pure, comme gage de leur dignité d'homme.

C'est pour cela que l'exemple qui va suivre est différent, du moins au départ, des exemples précédents.

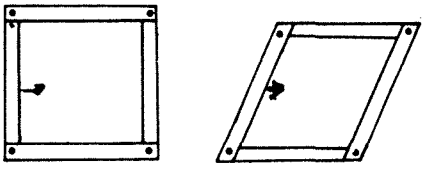
Pour enseigner les mathématiques, nous posons des problèmes à nos élèves.

Pour que ces problèmes provoquent l'apprentissage, nos élèves doivent prendre les questions à leur compte, en leur donnant un sens et en forçant leur volonté à les résoudre eux-mêmes.

J'avais dit à Lisbonne que cette transmission du problème et du désir d'apprendre est notre charge principale, et on ne peut l'assumer automatiquement en plaçant les élèves en groupe ou devant un ordinateur. J'ai été très contente en arrivant à Bordeaux chez Guy Brousseau de constater que les chercheurs en didactique français lui ont donné un nom: la *'dévolution'* car on parle mieux d'un phénomène quand on l'a nommé. Pour obtenir cette dévolution Guy Brousseau a mis en relief l'importance de la situation didactique construite exprès par l'enseignant pour provoquer l'apprentissage.

Examinons les réactions des élèves devant ce carré articulé appartenant à Emma Castelnuovo qui a été ma source d'inspiration pour la construction de situations didactiques utilisables au secondaire et jusqu'à l'Université. Emma Castelnuovo a noté les réactions de ses élèves en Italie, puis au Niger au collège. Moi-même je les ai notées au Mali à l'Université, puis en France au lycée.

Le maître montre ce carré articulé aux élèves et demande:



L'aire du quadrilatère a-t-elle changé?

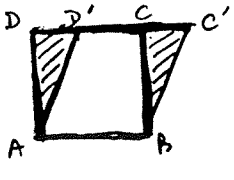
Certains disent oui, d'autres non.

Au Collège, ceux qui disent non emportent la conviction de la classe car ils ont des arguments:

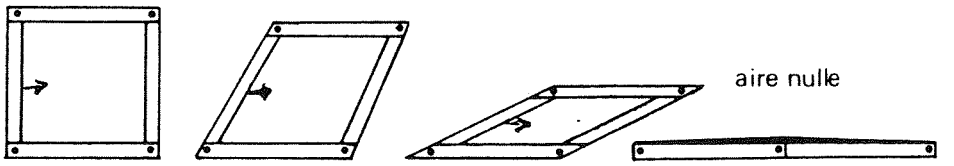
— l'aire ne change pas car le périmètre ne change pas;

— l'aire ne change pas car il y a compensation;

comme le montre le dessin:



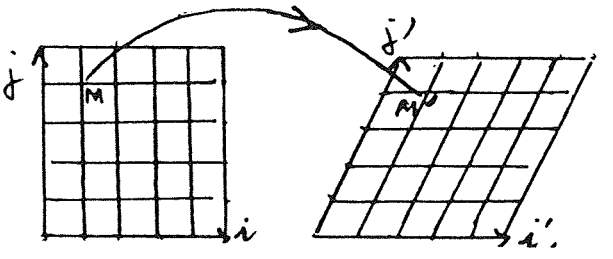
Le fait que toute une classe peut être convaincue par ces arguments, montre bien que dans un débat posé comme scientifique, la vérité n'a pas automatiquement le dessus.
Le maître dit alors: donc l'aire ne change pas!



On obtient ici deux catégories de réactions:
— Ceux qui disent: on s'est trompé, ça doit diminuer petit à petit.
— Ceux qui persistent à dire que ça ne change pas, et brusquement ça devient nul.

D'après l'étude générale des obstacles faite par Guy Brousseau, la confusion aire-périmètre peut provenir en partie d'un obstacle didactique. A l'école primaire, le périmètre et l'aire sont souvent associés.
D'autre part, j'ai constaté que même si de nombreux adultes se trompent, par contre dans les classes de lycées et encore plus à l'Université, on trouve un certain pourcentage de gens qui pensent à poursuivre la transformation jusqu'à son terme, c'est-à-dire que l'argument du périmètre constant ne leur paraît pas absolu au point de bloquer leur imagination. Ceci me conduit à penser que la confusion aire-périmètre ou surface extérieure-volume, relève aussi en partie d'un obstacle onto-génétique selon la terminologie de Guy Brousseau, c'est-à-dire quelque chose d'analogue aux stades de Piaget, mais des stades qu'on ne franchirait pas automatiquement.

Les élèves qui refusent délibéremment la diminution par continuité s'accrochent au deuxième argument, qui, plus fort même que la compensation, me semble être la vision de la bijection, mise en évidence par ce carré en bois d'Emma Castelnuovo. On a une application affine.



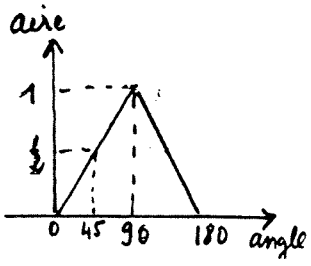
Il y a bijection entre les surfaces des deux quadrilatères et la bijection ne

disparaît que si on arrive au segment.
On a donc à partir de ce matériel simple, deux voies: une vers l'analyse, une vers la géométrie affine.

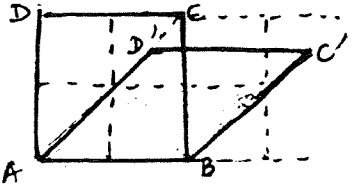
La voie vers l'analyse se développe ainsi:
— On part de zéro et on arrive à zéro, d'où la mise en relief du théorème de Rolle (existence d'un extrêmum pour une fonction continue prenant deux valeurs égales) qui apparaît ici comme un théorème 'en acte' comme disent les didacticiens français. Le théorème apparaît et peut être utilisé avant d'être formulé.
— Introduction de la trigonométrie, la variable étant l'angle et la fonction l'aire.

Les élèves font le raisonnement suivant:

aire pour 0° est 0
aire pour 90° est 1 } donc aire pour 45° est ½.



Le maître dit: dons aire pour 180° est 2 (absurde, c'est 0).
Dans ce cas, les élèves conçoivent la variation de l'aire ainsi:
Le matériel tel qu'il est ne permet pas de mettre en échec ce schéma.
J'ai pensé, grâce à la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau, que ce matériel pouvait être complété en faisant dessiner aux élèves les deux quadrilatères sur papier quadrillé.



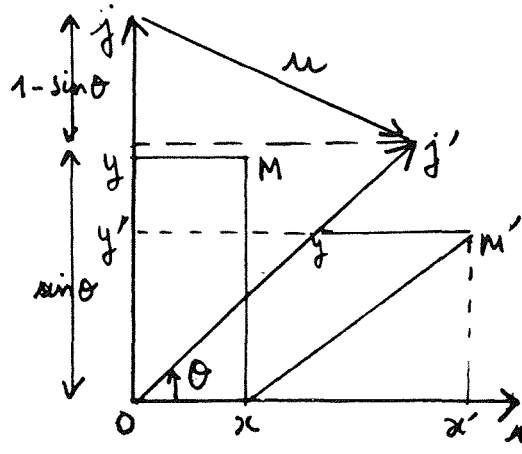
On vérifie: aire ABCD=1; aire ABC=½; aire ABC'D' > ½.
Il y a alors un début de révolte: mais enfin, il est impossible de calculer autrement, nous ne pouvons pas résoudre cette question!
Ceci met en relief le modèle implicite de la linéarité, source d'erreurs innombrables. Les élèves n'ont absolument pas conscience d'avoir fait une hypothèse, la linéarité leur apparaissant comme une certitude.

Nous sommes ainsi au coeur d'un autre problème didactique. Quand les élèves ont trouvé un résultat apparemment satisfaisant, ils sont prêts

à s'y arrêter (situation d'équilibre de Gérard Audibert). Si le maître dit que c'est faux, ils remettront le résultat en question, mais cette remise en question venant d'une autorité supérieure sera vite effacée et on retrouvera dans quelques temps: sin 3x = 3 sin x .... Or la vraie éducation doit apprendre à réviser ses conclusions non par le fait d'une autorité supérieure ou à la légère mais par soi-même, par le choc des faits. Toute la difficulté consiste à produire dans la classe une histoire qui amène ce choc, histoire qui ne peut être la même que l'histoire réelle, ne serait-ce qu'à cause du temps. C'est la difficulté de la transposition didactique, mise en évidence par les chercheurs français.

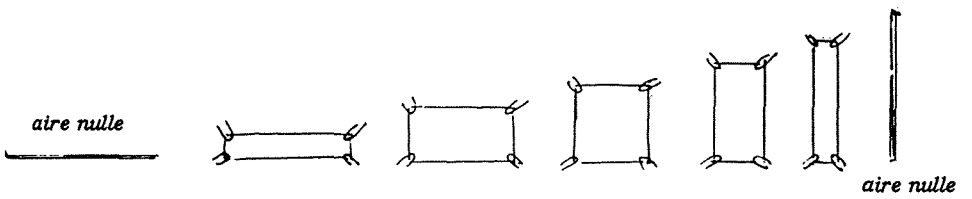
La voie vers la géométrie affine se développe ainsi:
Dans le repère (o,i,j), M'(x',y') image de M(x,y).
Les coordonnées de M dans (o,i,j) sont égales aux coordonnées de M' dans (o,i,j').

$$\overrightarrow{OM} = xi + yj$$
$$\overrightarrow{OM'} = xi + yj' = xi + y(i\cos\theta + j\sin\theta)$$
$$\overrightarrow{OM'} = (x + y\cos\theta)\, i + (y\sin\theta)\, j$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Le déterminant de la matrice est l'aire du parallélogramme: sinθ.
Les vecteurs propres de cette transformation sont:
i = invariant (associé à la valeur propre 1)
u = cosθ i + (sinθ - 1) j (associé à la valeur propre sinθ).
La transformation affine apparaît comme un étirement dans le sens des vecteurs propres.
A partir du même matériel, on obtient deux voies, mais il y a une liaison entre:
aire d'un parallélogramme → sinus de l'angle → déterminant → d'une transformation affine.

On peut poursuivre le même thème avec la ficelle qui est aussi un matériel d'Emma Castelnuovo.
On va de séro à zéro en passant par un maximum.



Si x et y sont les mesures des côtés, on a ici:

$$x + y = \text{constante} = k$$

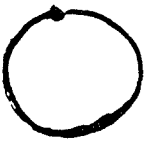
et l'aire est:

$$xy = x(k - x) = -x^2 + kx$$

On obtient une parabole renversée.

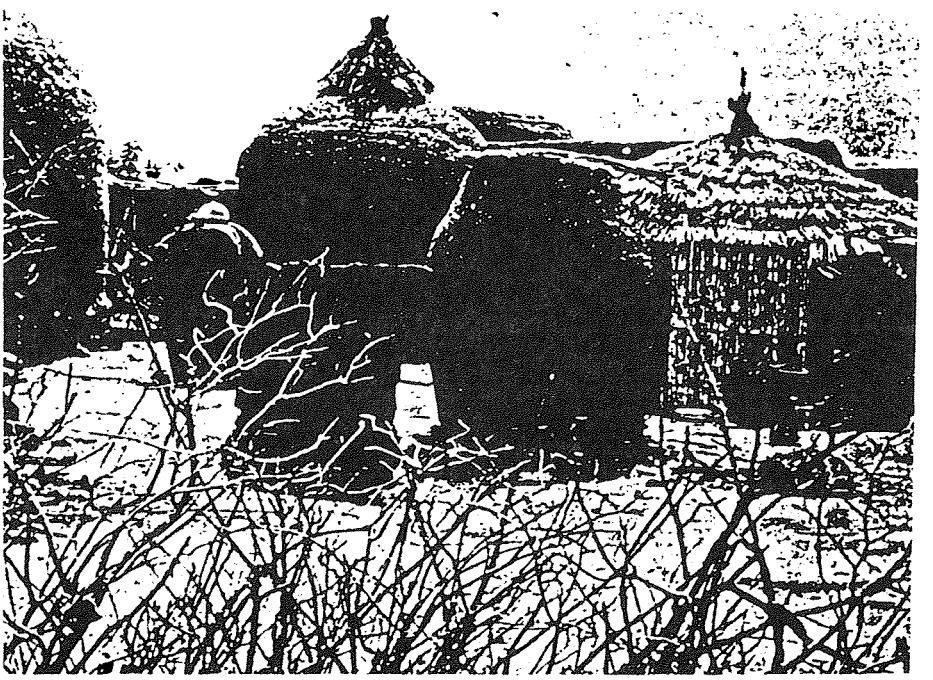
Dans une classe de collège, au Niger, Emma a dit aux élèves: à quoi vous fait penser cette courbe?
Elle attendait une réponse du style: jet de projectile. Les enfants d'Europe pensent souvent à la trajectoire d'un ballon lancé. Mais les petits Nigériens ont dit ceci: "C'est comme le soleil dans le ciel." Ceux qui vivent dans l'agitation et environnés de murs ne pensent pas à lever les yeux au ciel. En Afrique, on prend encore le temps de contempler les astres. Je ne sais si cette leçon aurait provoqué au Mexique, terre des Aztèques, une semblable réaction. Pour l'Afrique du moins, cela me semble très significatif d'un tout autre rapport avec la nature.

Avec ces deux exemples (carré articulé et ficelle) on démontre que parmi les rectangles ou les losanges de même périmètre, le carré a l'aire maximale.
Mais avec la ficelle on peut faire un cercle et l'aire du disque dépasse celle du carré.



Mes élèves, en Afrique étaient très intéressés car les Africains font des cases rondes depuis toujours. Ils ont compris que c'était bien optimum si on veut le maximum d'espace intérieur et une surface latérale minimale pour éviter les échanges de chaleur et économiser le matériau. Cet hiver, comme j'étais en France, dans la vague de froid, nous avons parlé avec mes élèves des igloos des esquimaux.
Je pense que mes élèves africains, s'ils aident leurs parents à faire un parc pour animaux dans le Sahel où on n'est pas limité par la place mais plutôt par le prix des matériaux, penseront à planter les piquets en cercle, plutôt que d'imiter des constructions dites 'civilisées'.

La confection de maisons rondes est un 'théorème en acte' non pas sur le plan individuel mais sur le plan social et qui est utilisé dans l'intérêt d'une société donnée. S'il n'est pas formulé et reconnu comme savoir, il peut être balayé au profit d'une imitation nocive d'un modèle qui correspond à d'autres intérêts.



Cases et greniers à mil, de forme ronde *visible dans toute l'Afrique du Sahel.*

Vous allez me dire maintenant: Quelles conclusions tirer pour notre sujet: la recherche du fondamental pour nos élèves? D'après les exemples que j'ai donnés, il m'apparaît important.

ANNIE BERTE

D'UTILISER DES SITUATIONS DIDACTIQUES QUI PROVOQUENT UN APPRENTISSAGE REEL DES MATHEMATIQUES

J'ai demandé à mes enfants, l'un au collège, l'autre au lycée: "Que voyez-vous d'important dans ce que vous avez appris en mathématique jusqu'à ce jour?"
Ils m'ont dit: "Tout ce que nous avons compris nous paraît important."
C'est évident. Ce que nous avons bien compris au point de pouvoir le réinvestir ailleurs est important pour nous. Par exemple ma conférence ne sera pas importante si une majorité d'entre vous la trouve incompréhensible ou sans intérêt pour son travail futur. Donc il faut inventer des situations didactiques conduisant les élèves à se poser des questions, conjecturer, raisonner, vérifier, buter sur des contradictions, concevoir des nouveaux outils qui se transformeront en concepts.
C'est essentiel pour l'exercice de la liberté de l'individu surtout face aux pouvoirs de la société où il vit. Il n'y a pas de limitations sauf les déficiences de notre propre enseignement.

En effet, tout au long de sa vie, l'individu aura à prendre des décisions motivées par des anticipations en vue d'actions, il devra formuler ses représentations et il devra prouver ou infirmer des assertions, en particulier juger de prétendues preuves de toutes sortes qui lui seront fournies.

Aujourd'hui, il semble clair à tous que trois phases en influence dialectique sont nécessaires dans l'enseignement:

Une phase 1 de construction par l'élève déclenchée par la dévolution du problème (première dévolution) et qui comporte différents moments:

action:
utilisation de théorèmes en acte et de concepts comme outil;

formulation:
énoncé des théorèmes et définition des concepts comme objets;

validation:
par preuves et réfutations.

Certaines situations problèmes peuvent être plus particulièrement des situations de communications pour la mise en place de définitions ou d'énoncés (réalisation à l'aide de message), d'autres plutôt des situations de preuves (conjectures et validation). Ces dernières mettent l'accent sur la mathématique comme 'jeu social' étudié par Guy Brousseau et de ce fait sur la valeur relative des énoncés et de leurs preuves.
A ce stade, l'élève n'a pas nécessairement conscience d'avoir appris du nouveau, même s'il a formulé et validé des résultats individuellement ou en groupe. Ce savoir doit être identifié pour pouvoir être mobilisé rapidement si un nouveau problème se présente.

Une phase 2 d'institution des connaissances par le maître qui doit produire la dévolution du savoir (deuxième dévolution).

Une phase 3 de structuration personelle du savoir par l'élève à l'aide d'exercices qui doivent plutôt intervenir à la suite d'une demande des élèves. Cette demande est essentielle car elle prouve que la deuxième dévolution, la plus difficile est réussie. (Voir la remarque de Mme A.Z. Krygowska au sujet de cette élève fière de s'être posé et d'avoir résolu une certaine de systèmes d'équations du premier degré, tous du même type).

Quand on fonctionne avec les seules phases 2 et 3, la phase 3 de structuration personnelle est trop lourde pour la majorité des élèves. Pour obtenir un succès relatif, les enseignants doivent donc imposer les exercices en les réduisant à de simples répétitions. Tout sens disparaît, d'où échecs.

Sans doute, pour toutes les notions d'un programme donné, ces trois phases ne sont pas nécessaires. Certains concepts peuvent être directement fournis par l'enseignant. Mais si la phase 1 d'activité n'a jamais lieu ou trop peu souvent, on aboutit à des connaissances purement verbales, inutilisables. Pour rendre notre enseignement optimum, nous devons donc, non pas chercher à le limiter, mais chercher à déterminer les points cruciaux sur lesquels il est impossible d'économiser la recherche de situations didactiques.

Je remercie Guy Brousseau, Gérard Audibert, Régine Douady, nos amis Canadiens et bien d'autres, tous chercheurs en didactique, de nous aider à analyser les phénomènes et les obstacles que nous rencontrons dans cette voie.

D'INITIER A LA MODELISATION CAR C'EST L'OBJECTIF DES MATHEMATIQUES

D'initier à la modélisation car c'est l'objectif des mathématiques, même si elles possèdent une certaine autonomie de développement, comme le dit R. Douady.

Parce qu'il y a modélisation du réel, il existe des mathématiques appliquées. Il faut donc considérer les deux aspects: modélisation et applications.

Sans des développements trop longs qui ne sont pas notre rôle, on peut saisir les occasions pour faire sentir à nos élèves l'utilité de notre science et le lien entre les disciplines. Nous en avons parlé dans nos Rencontres du Mexique, d'Espagne, d'Italie et du Portugal.

Il s'agit là: d'aspiration à une vie meilleure. J'ai demandé à des amis enseignants en Amérique du Sud: qu'attendent à votre avis les enfants de vos pays de l'apprentissage des mathématiques? Les enfants de rues qui vivent de petits commerces veulent savoir mieux compter, les enfants des campagnes veulent savoir s'il est plus avantageux d'élever des lapins ou des poulets, bref à tous niveaux des problèmes d'optimisation.

Au Niger et au Mali, avec les élèves des lycées ou les étudiants, j'ai toujours démontré la propriété du foyer de la parabole et j'ai parlé des cuisinières solaires. Il est très important à cause de l'avancée du désert

d'éviter des coupes de bois dans le Sahel. Le minimum est d'apprendre dans les écoles de ces pays que le soleil tue par la sécheresse, mais que, source d'énergie bien utilisée, il peut faire vivre. La suite relève de choix politiques, et notre premier devoir d'éducateur est l'information.

Il n'y a pas de technique sans modélisation et applications et la maîtrise technique est actuellement la condition de la liberté pour les pays pauvres. Les pays du tiers monde ont un besoin urgent d'ingénieurs de toutes sortes, pour exploiter eux-mêmes leurs ressources naturelles avant d'en être dépouillés.

Quelques remarques au sujet des deux premières conclusions qui sont pour l'instant des exigences:

1. Exigence de la situation didactique pour l'apprentissage.
2. Exigence du fonctionnement des connaissances appliquées à la réalité.

Importance de la géométrie dans les deux cas

Puisque je parle du foyer de la parabole, je fais une parenthèse sur la géométrie. La géométrie 'pure' qu'on enseignait autrefois a disparu des mathématiques puisqu'on retrouve tous ses résultats par l'algèbre linéaire et la géométrie analytique. Si on la réintroduit aujourd'hui dans l'enseignement c'est bien parce qu'elle est source d'activités selon le cheminement: conjectures, preuves et réfutations dont j'ai parlé.

Souvent, un même problème peut être résolu par la géométrie pure ou par la géométrie analytique et il est bon que les élèves aient deux cadres différents pour leur recherche. C'est 'le jeu des cadres' souligné par Régine Douady. Les connaissances dans un cadre favorisent la construction des connaissances dans l'autre par équilibration et de plus les deux cadres permettent à l'élève un contrôle de ses résultats.

D'autre part, sans géométrie du tout, ni pure ni analytique, la partie modélisation et application des mathématiques que l'on peut faire au secondaire se trouve très réduite. C'est un danger sur le plan social et culturel, qui a été perçu je pense.

Nécessité de ne pas privilégier 1 ou 2

Si on pense à l'exigence 1 axée sur l'apprentissage de la formulation et de la preuve, on peut trouver de bonnes situations didactiques dans le domaine des jeux par example. Les élèves agissent, formulent des stratégies, prouvent, réfutent et améliorent leurs formulations et leurs preuves. Le maître peut simuler dans la classe une micro-société mathématique. C'est un très beau résultat s'il s'agit d'un débat passionné pour la quête de la vérité. Mais d'une part, j'élimine volontiers l'optique 'jeu' si elle met trop l'accent sur la compétition. Il ne me semble pas vraiement indispensable de reproduire en classe la concurrence qui préside à l'élaboration des connaissances dans les pays développés, même si la concurrence augmente la vitesse de découverte.

Il ne faut pas oublier d'autre part, que les mathématiques actuelles, constituées en savoir, sont un pouvoir aussi par leurs applications.
Dans la mesure du possible, nous devons transmettre des connaissances

conceptuelles à nos élèves, surtout s'ils sont pauvres, soit pauvres parmi les riches, soit pauvres dans un pays pauvre. C'est pour cela que j'insiste sur les situations didactiques qui ne sont pas un jeu gratuit mais qui débouchent à la fois sur une connaissance mathématique et sur des applications, non parce que les mathématiques sont importantes en elles-mêmes, mais parce que le pouvoir qu'elles donnent doit être le plus possible partagé.

Le problème du 'concret'

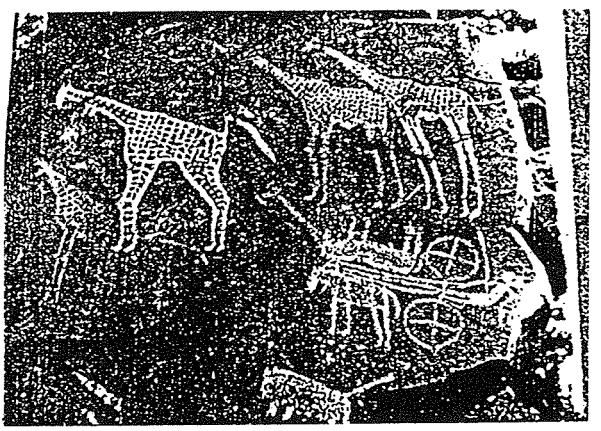
Le problème du 'concret' utilisé soit pour introduire des notions mathématiques, soit pour les faire fonctionner, dans tous les cas pour leur donner du sens, provoque parfois quelques remous. J'ajoute donc deux mots à ce sujet:

— L'utilisation du concret peut être néfaste s'il fait croire comme évidents des résultats qui n'en sont pas, ou s'il bloque le fonctionnement de la pensée abstraite.
On connaît des exemples: par exemple, avec le carré articulé en bois, il ne faudrait pas croire que dans la transformation affine décrite, seuls les points de l'intérieur du carré ont un transformé. Heureusement le matériel est assez bon puisqu'on peut prolonger en imagination le quadrillage de tous côtés (gauche, droite, haut et bas) pour voir qu'il s'agit bien d'une application du plan entier dans lui-même.
On perçoit un des dangers habituel du matériel qui peut nous enfermer si on ne s'en débarasse pas au moment voulu, lors du 'saut' vers l'abstrait. Il est légitime de vouloir donner à tous les enfants le droit à l'abstrait.

— Inversement, comme nous sommes tous des apprentis mathématiciens de naissance, notre pensée abstraite peut nous amener à un modèle inadapté et même nous empêcher de voir la réalité telle qu'elle est.

Nous avons vu un exemple avec le carré articulé. (Le dessin montrant la compensation).

Voici la photo d'une gravure rupestre provenant de l'Aïr, massif du Nord du Niger.



Le char des fresques de l'Aïr. (Photo du Musée de Niamey).

Ces gravures témoignent du temps où le Sahara était une terre fertile, berceau d'une civilisation. Ce char dessiné par l'artiste de l'époque rappelle le mathématicien qui était en lui, plus sensible à la symétrie qu'à la reproduction de ce qu'il voyait en réalité.

Mathématique ou pas, il est bon, il me semble, de montrer aux enfants nigériens ce témoignage d'une civilisation qui s'est épanouie autrefois sur leur terre jouissant d'un autre climat.

Des soucis de ce genre, nous amènerons à nous déplacer à travers les disciplines et à travers l'histoire. Les travaux d'Emma Castelnuovo, de Mario Barra, de Lina Mancini, de Simone Trompler, de nos amis de Hollande et de bien d'autres peuvent nous y aider. C'est essentiel pour ouvrir les horizons par une vraie culture mathématique. On peut espérer ainsi chez nos élèves quelques prises de conscience politique.

Par exemple, dans les pays où l'enseignement n'est pas donné dans la langue maternelle des élèves, un programme développé sans lien avec la réalité du pays coupe la future élite de tout le peuple, l'amenant à prendre pour insignifiantes la culture et l'histoire de ce peuple.

Nous devons souligner, à travers notre enseignement, le fait essentiel que notre culture est toujours relative et, qu'être instruit nous donne des devoirs avant de nous donner des droits.

AU DESSUS DE TOUT CRITERE D'UTILITE SOCIALE

Au dessus de tout critère d'utilité sociale, au niveau de l'homme et de son destin, il y a une troisième exigence qui touche à une dimension philosophique et artistique donc à la fois au concret à l'abstrait. Cette troisième exigence est indépendante de la forme d'enseignement et peut être satisfaite par une leçon magistrale, même pas entièrement comprise, pourvu qu'elle le soit assez pour soulever l'auditeur un peu au-dessus de lui-même et toucher le centre de son être. Il s'agit de montrer si possible à nos élèves que les mathématiques sont pour nous une tentative de réponses aux questions fondamentales.

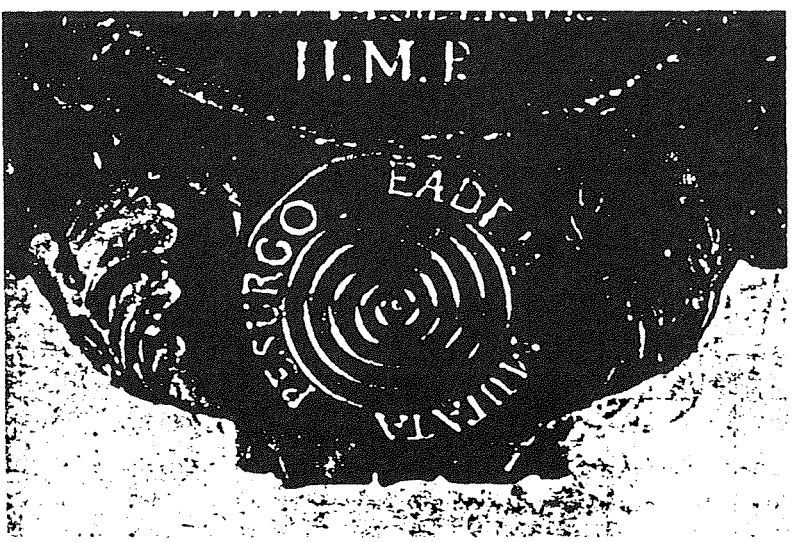
Le problème majeur des jeunes de tous âges, c'est de se situer par rapport au monde et à autrui, de mettre de l'ordre et du sens dans ce qu'il leur arrive. Pourquoi suis-je? Quelle est mon origine et mon avenir?

C'est la question '*Pourquoi?*', source des religions et des mythes. Ils ont vite compris que ce n'est pas le savoir scientifique qui donne les réponses à ces questions angoissantes. Il est plus subtil de percevoir, surtout si nous présentons un enseignement désséché, que toutes les sciences se construisent par un effet déplacé, sublimé, de ce questionnement essentiel.

Un exemple personnel: je pense que je n'ai eu aucun problème avec les mathématiques jusqu'à 16 ans, parce que entre autres faits, j'ai été très satisfaite, étant très petite de découvrir la suite illimitée des nombres. Puisqu'on pouvait toujours ajouter 1, et obtenir un nouveau nombre, ceci garantissait à mon niveau l'existence de l'infini, infini de l'espace et du temps. J'ai perçu les nombres sur une route où je pourrai marcher indéfiniment, sans peur, d'autant plus qu'il était toujours possible

d'enlever 1, donc de revenir en arrière, jusqu'à 0, origine qui pour moi était sécurisante. Je n'ai eu aucun problème sur l'ordre des nombres, même si je comptais sur mes doigts à l'envers, ce qui, chez une autre enfant, moins ancrée que je ne l'étais dans l'espace et le temps, aurait pu provoquer des erreurs graves. De nombreux psychologues ont signalé qu'il peut y avoir des dérapages pour les enfants au niveau de ce sens intime qu'ils donnent à la connaissance. Nous, enseignants, ne pouvons pas avoir une action immédiate à ce niveau, si ce n'est de deux façons. La première c'est de donner un sens extérieur correct grâce à la situation didactique car les dérapages se glissent surtout quand il y a absence totale de sens. La deuxième c'est en ayant une vue assez haute de notre discipline pour laisser transparaitre sa dimension spirituelle qui me semble essentielle. Pour cela, nous avons tout intérêt à fréquenter les grands mathématiciens qui nous éviterons de nous perdre dans l'insignifiant.

Voici un autre exemple historique:



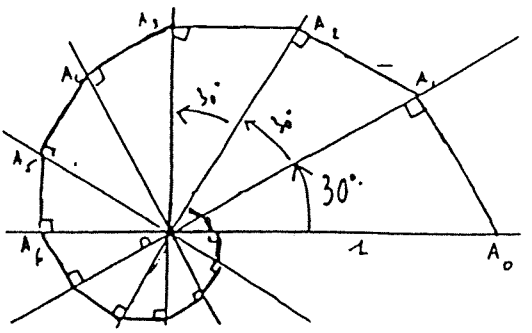
Bernouilli voulut une spirale logarithmique sur son tombeau. Ce n'est pas neutre.

La spirale équiangulaire a fasciné les plus grands savants du dix-septième siècle: Descartes, Galilee, Toricelli.

Jacques Bernoulli a désiré que sur sa tombe, à Bâle, soit sculptée la spirale équiangulaire mais ... le sculpteur s'est trompé: il a tracé une spirale uniforme!

Extrait du livre "Mathématique dans la réalité" de Mario Barra et Emma Castelnuovo.

Il est très facile, à propos de la trigonométrie d'approcher la spirale avec des élèves du secondaire:



$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0, \text{ car } \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$$

$$OA_0 = 1;\ OA_1 = \frac{\sqrt{3}}{2};\ OA_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

Plus l'angle est petit, plus la spirale est arrondie.
Permettons aussi à nos élèves de ressentir quelques joies d'homme: découverte et méditation.

Lors de notre Rencontre de Vezprèm où nous discutions du fondamental, j'ai eu une dernière conversation avec notre cher ami Willy Servais que je n'oublierai jamais. Je lui donnais des exemples d'intellectuels scientifiques africains qui n'ont pas pu faire grand chose d'utile pour leur pays et ainsi je mettais en doute tout ce que nous disions sur le fondamental. Comme nous étions dans l'embarras avec mes objections, il m'a dit: quand j'étais prisonnier en Allemagne, j'ai vu moi aussi ce qui était vraiment fondamental pour chacun: la conscience de sa dignité. C'est donc avec la plus grande émotion que j'ai lu sous la plume de Renée Servais dans l'histoire de notre Commission ces phrases: "Après la capitulation de l'Armée belge en 1940, Willy Servais est acheminé vers l'Allemagne et emprisonné dans un camp. Ne disposant que d'un crayon et d'un bout de papier, il se met à rédiger un cours, son cours de géométrie analytique. Il donne sans aucune référence, ni documentation des cours clandetins à des camarades. Il s'intéresse aussi à la poésie, initie des amis au dessin et à la perspective."

C'est clair! Notre enseignement de mathématiques est une voie, parmi d'autres, pour donner à nos élèves de tous pays, ce qu'ils nous demandent qui se résume en un mot: la dignité d'homme. Car si la liberté est après tout relative, la dignité d'un homme, même prisonnier, est absolue.

Annie Berté
Université de Bordeaux
Bordeaux/France.

ERICH CHRISTIAN WITTMANN

PRACTISING SKILLS AND REFLECTION[1]

ABSTRACT

THE development of mathematics teaching in the 20th century has been influenced by two competing theories of learning: behaviourism, seeing the learner as a passive receiver of pre-fabricated knowledge, and constructivism, considering him as an active constructor of his personal knowledge. Conceptions of mathematics teaching based upon the second view have not been readily accepted by most teachers, because these conceptions have not paid sufficient attention to practising skills.

The paper reviews a new approach by H. Winter (1984) to practising skills within a learning-by-discovery-conception of mathematics teaching. In extending Winter's approach the concept of *reflective practice* is introduced and illustrated by typical examples from primary teaching.

INTRODUCTION

The historical development of mathematics teaching in the 20th century shows very clearly that conceptions based upon a developmental perspective (e.g. genetic teaching, learning by discovery, childcentred teaching, applied problem solving) have not been accepted by the majority of teachers. Even today the situation is not essentially different.

Teachers asked to explain their reluctance towards developmental approaches state that in their view these conceptions concentrate mainly on introducing new subject matter and that at the same time they neglect the practice of skills, the 'daily bread' of mathematics teaching.

This criticism is not unjustified, as a look at the literature of the past twenty years makes obvious. On the other hand there are already pieces of a modern theory of practising skills and above all there are many beautiful examples. However, in order to appreciate the peculiarity and specificity of these examples some coherent picture of practising skills within modern mathematics teaching is necessary. The present paper is intended to contribute to this end.

In the first section of the paper the ways of practising skills found in today's classrooms will be discussed followed by an examination of Brownell's fundamental analyses from 1935 and 1956. I hope to show the need for a comprehensive developmental conception of teaching and

1. Paper submitted to the XXXVIIth Annual Meeting of the Commission International pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement Mathématique (CIEAEM) Leiden, The Netherlands, August 4-10, 1985.

The author is indebted to Dr Thomas C. Cooney, University of Georgia, Athens, for critical comments.

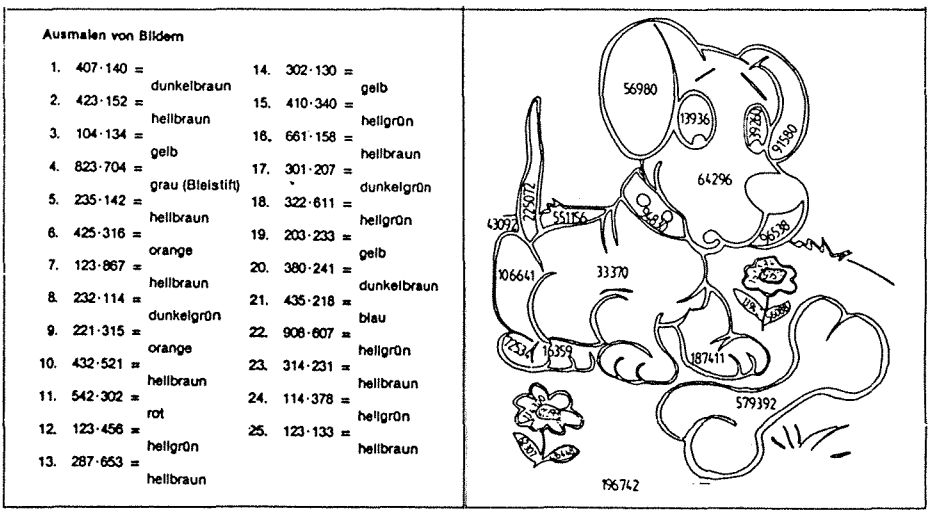
learning which includes a theory of practising skills as an *explicit* part of instruction. The third section will review H. Winter's recent approach to such a theory.
In the fourth section I will extend Winter's ideas by introducing the concept of *'reflective practice'*, which is aimed at relating the repetitive practice of skills to the development of cognitive strategies.

In conclusion I will express some views on the relationship between reflective practice, drill, and mental calculation as well as on teacher training.
Throughout the paper the examples I use are restricted to the primary level. I believe, however, that the paper has relevance for other areas of school mathematics as well.

PRACTISING SKILLS TODAY

The following examples are typical for German primary teaching and most probably for other countries as well (cf. Moody (1977) about the situation in the U.S.).

Example T1: 'The coloured dog'.
This example is taken from a handbook on practising mathematical skills written by a primary teacher:



The child is given a series of problems in multiplication. The solutions can be checked by comparing them to the numbers found on the dog. As a reward the corresponding field may be coloured by the child. (The author calls this 'self-control'!)

Example T2: The Lük-box.
On the bottom of this flat rectangular box sheets with 6 x 4 = 24 squares

each having a problem can be put. The child covers each square with a number card showing the solution of the corresponding problem. When turning the complete set of cards over a geometric pattern appears whose irregularities point to wrong results.

Example T3: Bingo.
This popular game is designed to give students practice in division and multiplication facts. Each player is given a card with a different number in each of its nine squares, and a caller is given a set of smaller cards that have multiplications and division problems.
The game is played as follows: The caller reads the problems. The other players place markers on quotients and products found on their cards. The first player to get three markers in a row (horizontal, vertical, or diagonal) calls "Bingo!" and wins. The caller reads answers as a check.

Example T4:
The class is divided into two competing groups of equal size. At the beginning the whole class gets up. The teacher poses a series of problems. Any child first giving a correct solution may sit down and is released. The group all of whose members get first seated is the winner.

Example T5: Little Professor (Texas Instruments).
This computer-like apparatus poses problems in addition, subtraction, multiplication and division on four levels of difficulty. The child enters the solution, which is then checked by the 'Little Professor'. The problem is repeated up to three times if the solution is wrong. After every ten problems it is stated, how many solutions were right.

The five examples are typical for a large class of similar examples dominating the practice of skills today. In spite of the seeming variety these examples nevertheless present one and the same structure:
The students are given batteries of similar small problems, they solve the problems, and the solutions are checked and evaluated by an external control mechanism.
Different examples arise by varying the mechanisms for *posing the problems* (e.g. work sheets, cards, games, random mechanisms, computers, teacher), by varying the *control mechanisms* (e.g. solution cards, mechanical 'fitting' devices, optical signals, teacher), and by varying the *mode of reinforcement* (e.g. winning or losing, marks, reworking, extra work).

The simple pattern behind practice of that kind is obviously the stimulus-response pattern of behaviourism. In fact learning in terms of behaviourism is a 'relatively permanent change in behavioural tendency and is the result of *reinforced practice*'.

It is very disappointing to realize how widely spread teaching materials and teaching methods following this theory of learning, which is completely out of date, still are (cf. von Glasersfeld, 1985). On the other hand one cannot avoid the feeling that in presenting alternatives some

fundamental mistake must have been made. Therefore it seems worth while to analyse the historical development.

A HISTORICAL PERSPECTIVE

Brownell (1935) elaborated and evaluated three different psychological 'theories of arithmetic':
(a) the drill theory;
(b) the incidental learning theory;
(c) the 'meaning' theory of arithmetic instruction.
The drill theory is of course the conception based on behaviourism. The incidental learning theory was developed at the turn of the century as a reaction against the drill theory and was put forward by educators and teachers who, influenced by the child-centered educational movement, assumed that learning proceeds best if children meet rich contexts, experience real situations, and are engaged in work of educational value. The proponents of this movement considered the routine practice of skills as damaging the personal development of children: 'The pedagogic movements emphasizing the individuality of human beings and their personal experience, the child-centered movement, J. Dewey's and G. Kerschensteiner's project method, the holistic approach to teaching - all that contributed, theoretically or practically, willingly or unwillingly, to undermining the practice of skills and to pushing it out of the classroom' (Odenbach 1963, 14). (Cf. also Loser 1968.)

Brownell (1935) seeing the dangers and weaknesses as well as the strengths of both (a) and (b) developed his own approach (c) as a sort of synthesis between both. His aims were to encourage understanding by taking into account the complexity of arithmetical learning, by adapting the pace of instruction to the difficulty of the learning and by emphasizing relationships and to develop the ability to *think* in quantitative situations.

Twenty years later Brownell (1956) stated that no essential progress had been made in achieving a 'balance between meaning and skill'.
As sources of the dilemma he identified:
— incomplete exposition of 'meaningful arithmetic';
— misunderstood learning theory;
— influence of general educational theory;
— inadequate instruction of meaning.
The remedy he proposed was the following:

1. Accord to competence in computation its rightful place among the outcomes to be achieved through arithmetic.
2. Continue to teach essential arithmetical meanings, but make sure that these meanings are just that and that they contribute as they should to greater computational skill.
3. Base instruction on as complete data as are reasonably possible concerning the status of children as they progress toward meaningful habituation.
4. Hold repetitive practice to a minimum until this ultimate stage has

> been achieved; then provide it in sufficient amount to assure real mastery of skills, real competence in computing accurately, quickly, and confidently (Brownell 1956, 136).

The dilemma described by Brownell has continued to exist to date. Also the sources have remained the same. In my personal view the third source has proved particularly influential in the following way:
On one hand teachers know from their daily experience that practising skills is a decisive factor in successful learning. Therefore they tend to theories of learning which take these experience into account. The theory of learning most explicit in this respect is behaviourism. On the other hand more enlightened theories of teaching and learning are necessarily opposed to behaviourism. They envisage more comprehensive goals of teaching (including cognitive strategies) and stress the constructive activity of the learner. As long as no explicit and concrete attention is given to practising skills teachers get the impression that these conceptions weaken the practice of skills and therefore they do not trust them.

Looking back to the sixties and seventies one must concede that the New Maths movement had the same disastrous effects as had the child-centred movement during the twenties and thirties. The call "Back to Basics" did not arise by chance, but rather as a reaction against a perceived movement to de-emphasize skills.
How can this dilemma be avoided? Brownell's recommendations are certainly valuable. However, they are not so coherent and explicit as one would wish. What is needed is a comprehensive theory of practising skills within some developmental perspective of mathematics teaching. Winter's approach provides such a theory.

THE APPROACH BY H. WINTER

Although the practice of skills as a theoretical problem has received little attention in the literature of the past ten years there are some notable contributions on it. (Cf. Van Dormolen 1975, Blankenagel 1978, ATM 1977 chap. 3.)
On the other hand teachers' journals published a large variety of examples for practising skills 'many of which differ significantly from the pattern described in section 1. Without downgrading this work I would like to say that to the best of my knowledge the recent approach by H. Winter (1984) has been the first comprehensive attempt to develop a systematic theory of practising skills based on contemporary psychology and equally pertaining to objectives, contents and principles of mathematics teaching. I think this paper is a fundamental contribution to modern mathematics education.

Winter starts with the principle of learning by discovery and describes the position of skills within this conception as follows:

> "First I would like to reject the widely spread misunderstanding that learning by discovery is restricted to introducing new subject matter, possibly in a socratic way, and would have nothing to do with practising skills, where one simply had to work hard in order to achieve mastery.

> Equally wrong is the view that the cultivation of creative behaviour were contradictory to practising skills and learning facts. On the contrary, practising skills is inherent in learning by discovery: On one hand discoveries presuppose the availability of skills and knowledge ... On the other hand during the solution of a more complex problem by guided discovery there is continued repetition and practice of skills and facts ..." (Winter 1984,6).

As a consequence Winter relates practice to all domains of objectives, not only to facts and skills, but also to abilities, habits, and attitudes. To make his approach operational Winter states some didactical principles for practising skills (Winter 1984, 10-16, cf. also Müller/Wittmann 1984[3], chap. 1.2.5. and 2.2.3.) I will go through them and illustrate them by typical examples. In the next section the examples will help us to differentiate between reflective and implicit practice.

PRINCIPLE OF PROBLEM-ORIENTED PRACTICE

Practice and repetition should be related to higher-order problems. Solving these problems should involve solving a series of small problems all of which require a certain skill. Looking back to what has been done should be motivated and put together by interesting questions.

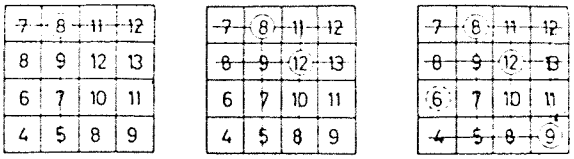
Example A1: 'Cancelling squares' for practising addition.
(De Moor/Schoemaker 1969, 35; Müller/Wittmann 1984[3], 43-46).
Given the square:

7	8	11	12
8	9	12	13
6	7	10	11
4	5	8	9

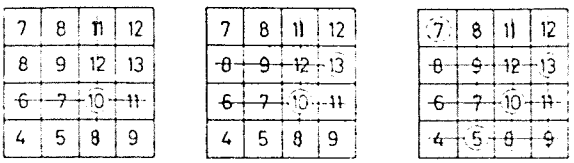
the child has to select a number, to encircle it and to cancel the corresponding row and column. From the remaining numbers again one number is selected, encircled and the corresponding row and column is cancelled, etc. At the end the four encircled numbers are to be added.

Illustration:

8+12+9+6=35

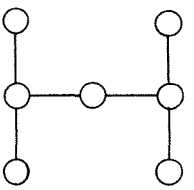


10+13+5+7=35



Obviously there are different ways of getting 4 numbers. After having followed some of them the children will observe that - assuming correct calculation - the result will always be the same.

Example B1; 'Magic H' (I. Weinzweig).
The numbers 1 to 7 have to be put into seven circles arranged in form of the letter H such that the sums in the two vertical rows and in the horizontal row are equal.



While solving this problem a great many of addition and subtraction problems have to be done.

PRINCIPLES OF OPERATIVE PRACTICE

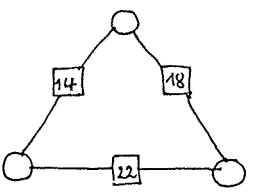
According to the operative principle similar problems should be generated by systematically varying the data in order to observe patterns and to get insight.

Example A2: 'Differences of mirror-numbers' for practising subtraction.
The children are first given the following problems and asked to solve them:

83 - 38 =	76 - 67 =
95 - 59 =	54 - 45 =
71 - 17 =	92 - 29 =
53 - 35 =	42 - 24 =

Then they are asked to find and solve similar problems. The third step might be to classify the problems according to the results. The fourth step would consist in explaining patterns and finally the children could try to prove why only multiples of 9 occur as results.

Example B2: 'Arithmogons' (Mc Intosh-Quadling 1975).
Given the threesided arithmogon three numbers have to be put into the three circles such that the number in each square equals the sum of the numbers in the adjacent circles.



The arithmogon can be solved by an operative approach: Start by putting '7' into the highest circle. Then in order to fulfil the rule, you have to put '7' into the circle (7+7=14) and '15' into the right circle (7+15=22). However, 7+15=22=18. We change the initial '7' into '8' and get '6' and '16' for the remaining circles. The final check, 8+16=24 shows that the distance from 18 has become bigger. So let us try '6' for the highest circle and see what happens. We get the final check 6+14=20 which is fairly close to 18.
Changing '16' into '5' leads to '9' for the left and '13' for the right circle, and 5+13=18 as required.

Again, a lot of additions and subtractions have to be done while solving the arithmogon.

PRINCIPLE OF APPLICATION-ORIENTED PRACTICE

Wherever possible practice should be related to real situations and contribute to developing useful knowledge.

Example A3: 'Folders in the German IC-trains' for practising the calculation of time intervals. (Müller/Wittmann 1984[3]. 273-274).
The children are provided with folders to be found in German IC-trains (fig. 1) and they are asked to calculate various time intervals (stops, travel times). In addition they may follow the route of the train on map, calculate the distances, and get some crude impression on how to get from Germany's West to the North.

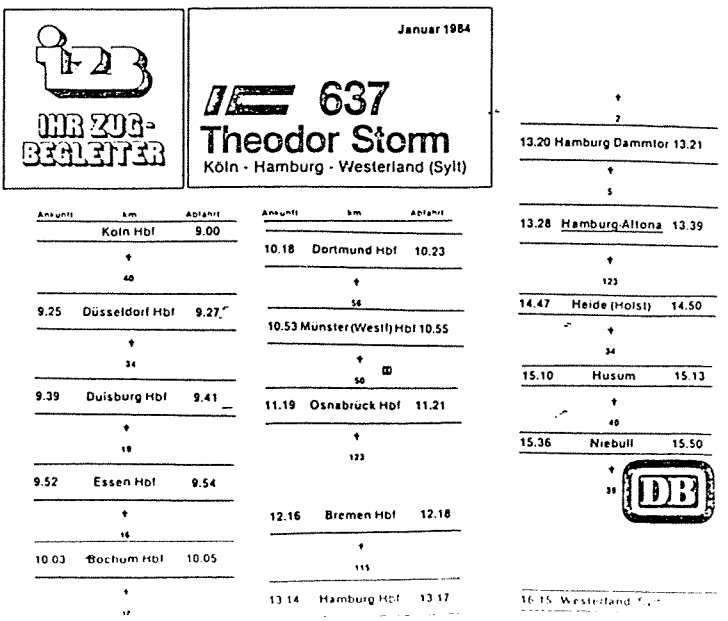


fig. 1

Example B3: 'Coins and banknotes' (Winter 1984, p. 15).
The German money-system consists of coins:
(1 Pfennig = 1 Pf, 2 Pf, 5 Pf, 10 Pf, 50 Pf, 1 DM, 2 DM, 5 DM) and banknotes (10 DM, 20 DM, 50 DM, 100 DM, 500 DM, 1000 DM).

The following series of problems is intended to make students familiar with representing given amounts by means of coins and notes:

— Represent the following amounts in the most economical way (minimal number of coins/notes): 63 Pf, 602 DM, 35,07 DM, 601,95 DM ....
— Represent 40 Pf in as many ways as possible.
How can you do it systematically?
— Which amounts can be represented by 2(3,4,...) coins? Are there amounts below 1 DM for which more than 4 coins are needed?
— Calculate the 'gap' between two subsequent values in the series of coins and notes from 1 Pf to 1000 DM.
Why do the gaps get bigger and bigger?

REFLECTIVE PRACTICE

When comparing the examples of the previous section illustrating Winter's principles to each other and to the traditional examples in section 1 some distinctions become apparent and lead to three different forms of practice.

The examples of type T (drill) are obviously aimed at practising a given skill. In each example the problems are chosen arbitrarily, hence precluding any interrelations among them. Any of the drill problems could be replaced by some other without changing the structure of the example. As a consequence there is nothing to do any more, once the dog has been coloured (T1), the Lük-box arranged (T2), Bingo (T3) finished, one of the two competing groups got seated (T4), or the 'Little Professor' has done his checks - apart from going on to the next activity.

Quite contrary to that, the small problems within each of the examples in section 3 are related to each other in a *meaningful way*. In examples A1, B1 the relationship is established by higher-order problems (Why always the same sum? Form a magic H!), in examples A2, B2 by operative variations of the data, and in examples A3, B3 by real situations. Therefore practising skills and applying cognitive strategies (discovery, mathematization, argumentation) are intertwined. In this way not only *social interaction* can be stimulated but also the *self-regulatory* and *'metacognitive' abilities* of children can be developed which more and more are found essential for intellectual progress and for the mastery of domain-specific skills.

When we examine more carefully *how* the practice of skills and cognitive strategies are interrelated, two distinct types appear in the examples of section 3. In examples B1, B2 and B3 the solution of an overall problem *dominates* the students' work. That is, while the students try to find a magic H (example B1) they have to do many additions and subtractions but these calculations are not practised in a straightforward way.

The constraints of the problem continuously require decisions, evaluations and deliberations.
Thus a great deal of the students' attention is drawn to the solution of the overall problem. The students cannot *concentrate* on the practice of a certain skill. Therefore I would like to call this form of practice *implicit practice*.

Although implicit practice is accepted as a valuable way to develop students' skills there are convincing arguments that it is not sufficient and that a real, in a sense automatic, mastery of skills requires some repetitive practice (cf. Brownell's (1935) criticism of incidental learning, Blankenagel (1978, 423), Gagné (1983), Wachsmuth (1983, 206)).

The examples of type A in section 3 show that it is not necessary to fall back to drill and practice in order to ensure repetitive practice. Each of these examples starts with a series of problems pertaining to a *precisely defined skill*: Example A1 starts with a series of addition problems, example A2 with a series of subtraction problems, and example A3 with a series of calculations of time intervals. The children can concentrate on these problems and repeatedly apply one and the same skill. It is only in the *second part* of the exercise that the emphasis shifts to another point of view. Quite naturally the teacher can stimulate *reflection* on the difficulty of the problems, on the methods of solution, on possible patterns, and introduce interesting questions:
In example A1 it can be investigated why all sums have the same result and what relationships between the numbers in the 4x4 square exist.
In example A2 the problems can be classified according to the results, the resulting patterns can be explained, and predictions about the results of further problems of the same type can be made.
In example A3 the duration of the whole ride can be calculated and checked by splitting it up into two or more parts, the route of the train can be followed on a map etc.
Referring to J. Kilpatrick's general ideas of *'Reflection and Recursion'* presented at ICME 5 Adelaide 1984 (Kilpatrick 1985) I would like to call this third form of practising skills *reflective practice*.

Reflective practice is equally directed to practising skills and to fostering cognitive strategies. Unlike implicit practice, however, reflective practice consists of two phases, the first is devoted *explicitly* to practice, the second one devoted to thinking about the first phase and making it meaningful. Thus in reflective practice practising skills is not 'integrated out', but included in a *discernible way*.

To finish this section I would like to mention a fourth didactical principle for reflective practice, which is due to Freudenthal (1981) and Treffers (1983).

PRINCIPLE OF PROGRESSIVE SCHEMATIZATION

Learning and practising a skill should not at once be forced towards its final stage of mastery. The children should be given the opportunity to develop their own 'primitive' versions first and to schematize them through social interaction.

Progressive schematization is intended to make children reflect on the advantages, disadvantages and on the economy of their skills, and to stimulate the development of more economical algorithms. This principle is particularly concerned with meaning and understanding.
Let us consider an example.

Example 4: The robbers and the treasure.
(Practising the addition table).
(Müller/Wittmann 1984[3], 42-43, Bösel 1984).
The game uses the plan in fig. 2 and is played according to the following rules: Two robbers are fighting for a treasure. After some time there is no winner and they are exhausted. So they agree to decide the quarrel by playing a game: They paint fields 1 to 20 between their caves. The treasure is put on field 10. Now they throw the die alternately. According to the result the treasure is moved towards the corresponding cave.

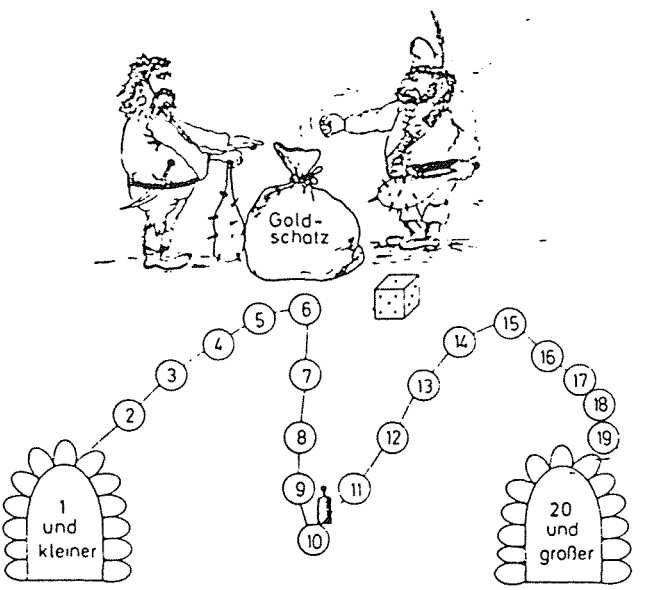


fig. 2

As soon as the treasure enters a cave, the owner of that cave wins it. Now you and your partner are the robbers. Play the game!

Bösel (1984) found the game particularly useful for slow learners, because the players decided by themselves when and how they should use the iconic hints of the numberline. Developments from counting on the line to mental calculation could be observed.

I would like to mention that the context of the game allows for problem-oriented practice. Reflection may be stimulated by asking questions like these:
— Suppose the treasure is on field 11. Where might it be after each of

the robbers has thrown the die just once?
— Where will the treasure be if the 'plus-robber' throws a '5' and the 'minus-robber' a '4'?[1] etc.

CONCLUSION

Although I consider reflective and implicit practice the most important forms of practising skills I do not argue in favour of completely excluding other forms of practice from mathematics teaching. This is not to minimize the importance of the concepts of reflective and implicit practice. My intention is just to indicate the pragmatic compromises which teaching in real classrooms always necessitates.

Given the reflective activities are time consuming, practice cannot always contain extended phases of reflection. The teacher has to react to various constraints in a flexible way. Inevitably sometimes there will be *no* time for reflection. Moreover, examples like the 'coloured dog' will certainly be lovely by many children, and they are acceptable as long as they do not undermine the general orientation of teaching. Following Brownell I believe that there is also a place for drill in mathematics teaching provided that it is preceded *and* followed up by meaningful learning. Furthermore, mental calculation restricted to a carefully selected small set of skills should be an essential part of mathematics teaching. Moreover, I am sure it can be practised in a reflective way.

As far as inservice-training of teachers is concerned, the historical lesson of section 2 suggests the following approach:
Instead of emphasizing applied problem solving, inquiry-based teaching, learning by discovery etc. we should go the other way round, i.e. *we should start from practising skills*, introduce the concept of reflective practice and from there go on to implicit practice and to developmental conceptions of teaching including the necessary philosophic, epistemological, and psychological background. As teaching units following reflective practice (cf. the examples in section 3) are rich in relationships they provide interesting material for teachers' investigations. In the same vein the development of teaching units representing reflective and implicit practice is a challenging didactical task demanding the most creative powers of mathematics educators.

Erich Christian Wittmann
Universität Dortmund
Dortmund/Western Germany.

1. One of the robbers has always to add, the other one to subtract: 'plus-robber', 'minus-robber'.

REFERENCES

[1] The Association of Teachers of Mathematics, (ATM), *Notes on Mathematics for children*, Cambridge, CUP 1977.

[2] Blankenagel, J., *Zur Integration von Rechenübungen in einen mathematisch orientierten Unterricht*, Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, 6 (1978), 415-423.

[3] Bösel, S., Ueben des kleinen Einspluseins mit Hilfe des Rechenspiels *Der Goldschatz*, Schriftliche Hausarbeit. Universität Dortmund, Institut für Didaktik der Mathematik 1984.

[4] Brownell, W.A., *Psychological Considerations in the Learning and the Teaching of Arithmetic.*
In: Reeve, W.D. (ed), *The Teaching of Arithmetics*, Tenth Yearbook of the NCTM, New York 1935, 1-31.

[5] Brownell, W.A., *Meaning and Skill: Maintaining the Balance*, Arithmetic Teacher, 3 (1956), 129-136.

[6] Dormolen, J. van, *Mathematical Skills. 1001 reasons why pupils lack good practice*, Groningen, Wolters-Noordhoff 1975.

[7] Freudenthal, H., *Major Problems of Mathematics Education*, Educational Studies in Mathematics, 12 (1981), 133-150.

[8] Gagné, R.M., *Some issues in the psychology of mathematics instruction*, Journal for Research in Mathematics Education, 14 (1983), 7-18.

[9] Kilpatrick, J., *Reflection and Recursion*, Educational Studies in Mathematics, 16 (1985), 1-26.

[10] Loser, F., *Die Uebung im Unterricht und ihr Beitrag für eine pädagogische Theorie des Lehrens und Lernens*, Zeitschrift für Pädagogik, 14 (1968), 145-165.

[11] Moody, W.B., *Arithmetic: Must it be mechanical monotony and individualized boredom?*, Arithmetic Teacher, 24 (1977), 65-69.

[12] McIntosh, A., D. Quadling, *Arithmogons*, Mathematics Teaching, 70 (1975), 18-23.

[13] Moor, E.W.A. de, G. Schoemaker, *Rekenkalender. 77 problemen voor rekenachtige dagen*, Utrecht, IOWO 1979.

[14] Müller, G., E.Ch. Wittmann, *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Ziele, Inhalte, Prinzipien, Beispiele*, Braunschweig/Wiesbaden, Vieweg 1984[3].

[15] Odenbach, K., *Die Uebung im Unterricht*, Braunschweig, Westermann 1963.

[16] Treffers, A., *Fortschreitende Schematisierung - ein natürlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. und 4. Schuljahr*, Mathematik lehren, 1 (1983), 16-20.

[17] Wachsmuth, I., *Skill Automaticity in Mathematics Instruction: A Response to Gagné*, Journal for Research in Mathematics Education, 14 (1983), 204-209.

[18] Winter, H., *Begriff und Bedeutung des Uebens im Mathematikunterricht*, Mathematik lernen, 2 (1984), 4-16.

ANNA SIERPINSKA

LA NOTION D'OBSTACLE EPISTEMOLOGIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

LA notion d'obstacle epistémologique, introduite en 1938 par Gaston Bachelard, a fasciné beaucoup d'entre nous. Brousseau, Glaeser, Balacheff, Cornu, Bouvier, Zawadowski et d'autres ont trouvé que cette notion tient une place importante dans leur réflexion sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

L'été dernier, j'ai eu la chance d'interviewer Guy Brousseau au sujet de la notion d'obstacle epistémologique et il m'a dit que cette notion l'a aidé à répondre aux questions auxquelles la théorie des sauts informationnels n'a pas su répondre (cf. Brousseau, 1977). Une de ces questions semble particulièrement importante: quelles connaissances des élèves, quoique fausses voire incomplètes méritent néanmoins d'être prises en compte dans l'enseignement.

Mais il y a bien plus à la notion d'obstacle epistémologique. Ce n'est pas un concept isolé. Il y a dans cette notion une philosophie souterraine des mathématiques et de l'enseignement des mathématiques qui peut servir de base au développement autour d'elle de tout un programme scientifique de recherche. Et c'est cette energie potentielle de la notion d'obstacle epistémologique qui la rend intéressante.

Dans ce qui suit nous essayons de rendre croyable cette hypothèse.

QU'EST-CE QU'UN OBSTACLE EPISTEMOLOGIQUE?

Exemples

Depuis un temps immémorial, la notion de l'infini était source de questions et polémiques en mathématiques. Les paradoxes de l'infini, qui bouleversaient les Anciens, ne cessent de nous bouleverser aujourd'hui encore. Les mathématiciens éprouvent le besoin de les expliquer sans cesse de nouveau. Cent trente ans sont passées depuis la première édition de l'ouvrage de Bolzano explicant à la satisfaction de tous, semblait-il, les paradoxes de l'infini à base de l'Analyse, qu'un jeune mathématicien américain, Rudy Rucker, dans son livre *'Infinity and the mind'* (1982) entreprit de nouveau ce sujet et réussit non seulement à ajouter des choses intéressantes mais posa encore quelques questions auxquelles il n'est pas facile de répondre.

Différentes versions des paradoxes de Zénon circulent parmi les lycéens sous forme de devinettes, comme j'ai pu me rendre compte pendant une de mes expériences auprès des élèves. A un moment de cette expérience, les élèves étaient priés répondre à la question suivante:

$$\text{"}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=2.\ \text{Pourquoi?"}$$

Chez l'un des garçons (ils étaient deux devant cette tâche) cette question

évoqua la devinette suivante: une araignée monte le long d'un poteau haut de 2m. Pendant la première journée l'araignée réussit à monter 1m, pendant la seconde - la moitié de ce qu'elle fit le jour précédant, pendant la troisième - la moitié de ce qu'elle monta pendant la seconde, etc. Question: quand atteindra-t-elle le sommet? Réponse attendue: jamais. Jamais elle n'arrivera au sommet, donc cette somme ne sera jamais égale à 2. Cette égalité est fausse. Bien sûr, on sera "formidablement près de 2", mais "malgré le nombre infini de neufs", "en additionnant sans cesse comme ça, une petite part va toujours manquer" - disaient les garçons. Ce qui peut être à la base d'une telle attitude, c'est le traitement de l'écriture 'a+b' comme une instruction de faire une addition. Alors, en effet, la somme indiquée ne se laisse pas calculer en un temps fini, d'où, en un temps fini, le résultat ne sera pas égal à 2. C'est une forme de non acceptation de l'infini actuel, où toute la série est donnée comme un tout, nous l'englobons dans une seule pensée et sa somme, c'est-à-dire le résultat de l'opération de passage à la limite, est égale à 2. Si nous pensons au passage à la limite comme à une opération mathématique qui attribue un objet mathématique - la limite, à un autre objet mathématique - une suite convergente, par exemple, alors nous avons besoin de l'infini actuel. Pour le processus de passage à la limite, l'infini potentiel suffit. Pour les Intuitionistes, qui, comme on sait, rejetaient l'infini actuel, la notion de limite était acceptable, mais seulement sous forme de processus (cf. Heyting, 1956).

Pour les Anciens, l'infini actuel - apeiron - avait un sens péjoratif: il se trouvait du côté du Mal, tandis que le fini se trouvait du côté du Bien dans les 'colonnes des contraires' des Pythagoriciens (cf. Rucker, op.cit. p. 56). Ils essayaient d'éviter l'infini en inventant la méthode dite d'exhaustion qui leur permit de formuler et démontrer plusieurs théorèmes qui seraient, de nos jours, démontrés à l'aide du calcul différentiel et intégral.

Mais pour les mathématiciens qui voulaient aller plus loin et résoudre rapidement les problèmes que posaient la Physique et l'Astronomie, la méthode d'exhaustion avec son contournement pédant de l'infini actuel devenait un obstacle. En rejetant l'interdiction aristotélicienne, les mathématiciens du XVIIe et XVIIIe siècles se servaient librement de l'infini actuel sous forme des grandeurs constantes infiniment petites, dont on pouvait se debarrasser au bon moment en obtenant ainsi une formule toute faite. La rigueur de ces démarches n'était pas toujours sans reproche et c'est dans l'infini actuel qu'on a vu le coupable: dans la définition de Cauchy de la notion de limite l'infini potentiel suffit. Mais en apparence seulement, comme le suggèrent Robinson (1967) et Lakatos (1978_2) dans leur explication de fameuses erreurs de Cauchy.

> "En fait, malgré ses déclarations, Cauchy traitait habituellement les grandeurs infinitésimales comme des nombres ordinaires satisfaisant les règles familières de l'Arithmétique. Et, comme il se trouve, cette procédure l'a menée aux résultats corrects dans la plupart des cas, quoiqu'il existe une situation célèbre et fort discutée où il a été conduit à une conclusion fausse. Ici encore, l'Analyse Non-standard, malgré ses fondaments

différents, apporte un outil remarquablement bien choisi pour discuter les succès et les échecs de Cauchy.
Par exemple, le fait que la fonction f(x) soit continue au point x_0 si la différence $f(x_0 + e) - f(x_0)$ est infinitésimale pour e infinitésimal, qui est un théorème de l'Analyse Non-standard est aussi une explication précise de continuité. D'autre part, en arrivant à la conclusion fausse que la somme d'une série de fonctions continues est continue, si seulement elle existe, Cauchy s'est servi de l'argument non justifié que si $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$ sur un intervalle alors la différence $s_n(x_0) - s(x_0)$ est, pour tous les x_0 dans l'intervalle, infinitésimale pour n infini. Dans l'Analyse Non-standard, il s'est avéré que ceci est vrai pour $s_n(x)$, s(x) et x_0 standard, mais pas en général pour x_0 non-standard. Par exemple ceci est faux pour $x_0 = x_1 + e$, où e est infinitésimal.
Pour apprécier à quel point Cauchy considérait les grandeurs infinitésimales comme partie intégrale de son système, il est instructif de regarder sa définition de derivée. Pour lui, $f'(x_0)$, si elle existe, est la limite du rapport:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+e) - f(x_0)}{e}$$

où e est infinitésimal. Dans l'approche standard moderne, l'hypothèse que e soit infinitésimal est redondante ou, pour être plus précis, insignifiante. Le fait qu'elle fusse néanmoins introduite explicitement par Cauchy montre que son image mentale de la situation était fondamentalement différente de la nôtre.
Ainsi, il semblerait que, pour lui, une variable n atteint zéro qu'après avoir voyagé à travers une région d'infinitésimales (Robinson, 1967, p.36-37)."

"L'essence de la solution suggérée par Robinson est que dans l'histoire du calcul différentiel et intégral de Leibniz à Weierstrass il y avait deux théories rivales sur le continu: la théorie leibnizienne, s'est-à-dire, le continu archimedéen étendu au non-archimedéen par l'adjonction des grandeurs infiniment petites et infiniment grandes et, aujourd'hui acceptée, la théorie de Weierstrass. La théorie de Leibniz dominait jusqu'à la révolution weierstrassienne et Cauchy lui-même suivait tout à fait la tradition leibnizienne. Révolutionnaire dans la théorie de Weierstrass était ce que le calcul différentiel et intégral connu aujourd'hui pouvait être totalement expliqué et même développé à base des nombres réels de Weierstrass seulement, dont l'ensemble ne constitue qu'un squelette de ce que Leibniz prenait comme l'ensemble des réels (...) les points de Weierstrass sont les points finis de Leibniz-Cauchy dépourvus de leurs voisinages infinitésimaux (...). La thèse quasi-empirique que la limite de toute série convergente de fonctions continues est une fonction continue était traitée comme chose évidente, sans nécessité de preuve, pendant tout le XVIIIe siècle. Elle était considérée comme un cas spécial du principe de continuité de Leibniz (...). Cauchy était le premier à essayer de démontrer cette thèse; peut-être était-ce parce qu'il construisit les nombres irrationnels comme suites convergentes des nombres rationnels et c'était déjà une réfutation du principe général de Leibniz, ou, peut-être, c'était parce que Fourier, en 1807, semblait avoir produit des contre-exemples à la thèse et Cauchy pouvait penser que sa démonstration va montrer que les séries de Fourier ne pouvaient pas converger proprement.

(Lakatos, 1978_2, p. 47-48)".

De ce point de vue, Cauchy n'avait pas fait d'erreur; il a tout simplement démontré un tout autre théorème, "sur les suites transfinies de fonctions qui sont convergentes au sens de Cauchy sur le continu leibnizien (ibid. p. 50)."
Quand Cauchy dit: "soit lim $s_n(x) = s(x)$, où $s_n(x)$ sont des fonctions continues", il veut dire que les fonctions $s_n(x)$ doivent être déterminées et continues, et la suite $s_n(x)$ doit être convergente non seulement aux points standard de Weierstrass, mais aussi aux points de Leibniz-Cauchy, c'est-à-dire, que la suite $s_n(x)$ doit être déterminée pour infiniment grands n et les fonctions $s_n(x)$ doivent être continues pour n infiniment grands. L'exemple de Fourier ne satisfait pas cette condition.

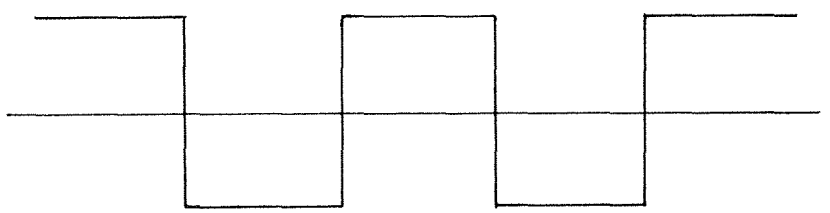
Donc, chez Cauchy, le contournement de l'infini actuel ne serait qu'apparent. D'ailleurs, il devenait de plus en plus difficile d'éviter l'infini actuel dans les raisonnements mathématiques. Par exemple, la définition des nombres réels à l'aide de l'infini potentiel seulement ne peut être faite qu'au prix d'une grande facticité. (Cf. Heyting, 1956).
Nous avons mentionné plus haut l'exemple de Fourier de la série:

$$\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots$$

qui parût pour la première fois dans le *'Mémoire sur la propagation de la chaleur'* (1807). En décrivant la ligne représentative de l'équation:

"$y = \cos.u - \frac{1}{3}\cos.3u + \frac{1}{5}\cos.5u$ - etc.",

Fourier mentionne les segments perpendiculaires à l'axe des abscisses comme faisant eux-mêmes partie de la ligne. Les diagrammes de la forme:



où les discontinuités sont jointes par des lignes verticales apparaissent dans les versions ultérieures du *'Mémoire'* et dans la *'Théorie de la propagation de la chaleur'* du 1821 (cf. Grattan- Guinness, 1972, pp. 158, 184, 220, 221). Cela peut impliquer que Fourier lui-même ne considérait pas sa série comme étant un contre-exemple au principe de continuité de Leibniz, s'il pensait que son diagramme représente le graphique d'une fonction; et s'il pensait ainsi, alors sa conception de fonction était bien différente de la nôtre. Il n'y serait pas le seul, d'ailleurs. Beaucoup de mathématiciens de l'époque appelaient fonction une courbe quelconque (cf. Shilov, 1965).
Un commentaire très intéressant se trouve dans (Grattan-Guinness, op.cit. p. 193):

"Du point de vue moderne, une telle ligne verticale indique une valeur multiple, ou une indétermination de la fonction en ce point; mais il est probable que Fourier concevait ces courbes comme objets géométriques, pour lesquels la connexité ou 'contiguité' étaient des propriétés plus importantes que la propriété d'avoir des valeurs uniques par rapport à un axe. Si à la manière de Monge, nous imaginons ces courbes comme *bords des surfaces contenant toutes les courbes continues d'approximation*, nous verrons combien la description de Fourier était naturelle. Ici, comme partout d'ailleurs, on remarque l'approche non-dogmatique de Fourier à ses objets mathématiques: comme représentation d'un état physique, une fonction doit être finie et avoir une valeur unique pour chaque argument, mais au cours de la manipulation de son expression algébrique on peut librement admettre des valeurs infinies, et sa représentation géométrique doit seulement bien se conduire en tant qu'une courbe."

Nous avons souligné ci-dessus une conception de limite: comme bord de la surface contenant toutes les courbes d'approximation. Cette conception semble avoir des liens profonds avec ce que nous avons nommé "obstacle géométrique" relatif à la notion de limite. (Sierpinska, 1983, obstacle III.1).

Quelques propriétés

Quatre exemples d'obstacles épistémologiques en mathématiques ont été réunis au paragraphe précédent:

1. Seul l'infini potentiel est admis dans les raisonnements mathématiques.
2. Liberté totale dans l'utilisation des infiniments petits et infiniment grands avec l'application à ceux-ci des règles et des lois qui ne sont propres qu'aux quantités finies.
3. Identification de fonctions avec les courbes.
4. L'obstacle 'géométrique' relatif à la notion de limite.

Ces exemples mettent en valeur plusieurs traits caractéristiques de la notion d'obstacle épistémologique, dont voici quelques uns:

A. La notion d'obstacle épistémologique est une notion relative: quelque chose est obstacle toujours par rapport à une certaine norme. Par exemple 1. et 2. sont des obstacles par rapport à l'Analyse classique, mais 1. n'est pas un obstacle par rapport à l'Analyse intuitioniste et l'Analyse Non-standard, en introduisant la notion des nombres hyper-réels, a legitimisé les infiniments petits et élaboré une technique de s'en servir sans crainte de contradiction. Pour l'Analyse Non-standard, c'est peut-être le rejet des infiniments petits en faveur des limites qui à été obstacle.
   La relativité des obstacles peut s'exprimer aussi dans leur rapport à une étape donnée du développement d'une théorie.

B. Les obstacles apparaissent par couples: c'est caractéristique des obstacles qu'en voulant éviter l'un d'eux, on risque de tomber sur l'obstacle opposé. Les obstacles 1. et 2. forment un tel couple d'obstacles. Les obstacles 3. et 4. vont de pair avec les obstacles numériques correspondants (pendant longtemps dans l'histoire, d'une manière explicite, les fonctions n'apparaissaient que sous la

forme des tables).

C. L'obstacle est un appui pour le développement d'une théorie à une certaine époque. Les obstacles sont inévitables dans le développement d'une théorie, car à chaque étape de son évolution, le savoir qu'on construit est adéquat aux problèmes à la solution desquels il sert. Des problèmes nouveaux demandent le changement d'outils, le rejet de certaines hypothèses, admission d'autres, la revision des connaissances déjà construites. Le contournement d'un obstacle ne conduit pas au développement du savoir avec lequel l'obstacle est lié mais il peut mener à l'évolution d'une théorie rivale. Ceci est bien visible dans les exemples 1. et 2. (Les obstacles épistémologiques sont donc inévitables dans le développement du savoir.)

Certaines difficultés

Certaines difficultés liées à la définition de la notion d'obstacle épistémologique en mathématiques.

a. Bachelard voyait les obstacles épistémologiques dans la période pré-scientifique d'une science seulement; les historiens datent la période scientifique des mathématiques de l'Antiquité.

Remarquons, cependant, que les propriétés A-C de la notion d'obstacle épistémologique, qui s'appuyent sur des exemples puissés dans l'histoire des mathématiques, ont toutes leur référence dans l'ouvrage de Bachelard:

> A, p. 17:
> " ... il faut bien se placer à un point de vue normatif si l'on veut juger de l'efficacité d'une pensée ..."
>
> B, p. 20:
> "Il est d'ailleurs très remarquable que, d'une manière générale, les obstacles à la culture scientifique se présentent toujours par paires. C'est au point qu'on pourrait parler d'une loi psychologique de la bipolarité des erreurs. Dès qu'une difficulté se révèle importante, on peut être sûr, qu'en la tournant, on butera sur un obstacle opposé."
>
> C, pp. 13-14:
> "En revenant sur un passé d'erreurs, on trouve la vérité en un véritable repentir intellectuel. En fait on connaît *contre (souligné par l'Auteur)* une connaissance antérieure, en détruisant les connaissances mal faites, en surmontant ce qui, dans l'esprit même fait obstacle à la spiritualisation (...). Une connaissance acquise par un effort scientifique peut elle-même décliner. La question abstraite et franche s'use; la réponse concrète reste. Dès lors, l'activité spirituelle s'invertit et se bloque. Un obstacle épistémologique s'incruste sur la connaissance non-questionnée. Des habitudes intellectuelles qui furent utiles et saines peuvent, à la longue, entraver la recherche."

D'après Bachelard, la présence d'un obstacle épistémologique dans une pensée nie sa valeur scientifique. Dans l'évolution de la Physique, les

obstacles épistémologiques caractérisaient son étape pré-scientifique. En plus, Bachelard croyait, semble-t-il, à une fin des obstacles:

> "En troisième lieu, nous fixerions très exactement l'ère du nouvel esprit scientifique en 1905, au moment où la relativité ensteinienne vient déformer des concepts primordiaux que l'on croyait à jamais immobiles. A partir de cette date, la raison multiplie ses objections, elle dissocie et réapparente les notions fondamentales, elle essaie les abstractions les plus audacieuses. Des pensées, dont une seule suffirait à illustrer un siècle, apparaissent en vingt cinq ans, signes d'une maturité spirituelle étonnante. Telles sont la mécanique quantique, la mécanique ondulatoire de Louis de Broglie, la physique des matrices de Heisenberg, la mécanique de Dirac, les mécanique abstraites et bientôt sans doute les Physiques abstraites qui ordonneront toutes les possibilités de l'expérience. (Bachelard, 1938, p.7)."

Notre position est un peu différente. En vue de ce qui a été dit à propos de la propriété C, on peut se demander si des pensées scientifiques libres d'obstacles épistémologiques existent du tout. Tout ce que nous savons est basé sur des hypothèses et même en mathématiques, la non-contradiction de nos systèmes est très souvent un fait empirique (cf. Lakatos, 1978_1, 1978_3 ; Popper, 1972, p.23). A cause aussi de la relativité des obstacles on ne peut pas, non plus, parler d'un franchissement absolu de certains obstacles dans le développement d'une science. Quelque chose peut être obstacle dans le développement d'une branche de cette science et pas dans le développement d'une autre. Pour nous, les obstacles épistémologiques ne seraient pas tant 'des connaissances mal faites' que des connaissances faites autrement, pour d'autres buts, adaptées à d'autres problèmes; même si ces connaissances (ou plutôt - hypothèses) s'avèrent fausses dans une nouvelle perspective, elles étaient produites et tenues pour vraies pour le même genre de raisons qui ont conduit à ce qu'aujourd'hui nous voudrions appeler connaissance scientifique. (Cf. Kuhn, 1962, p.2).

Cette position nous authorise à considérer les obstacles épistémologiques dans toute l'histoire du développement des sciences, mathématiques ou non, et pas seulement à leurs étapes 'pré-scientifiques' ou 'pré-paradigmatiques'.

Nous nous référons ici à la théorie des révolutions scientifiques de Kuhn et, en particulier, à son idée de paradigme.

Ce que Kuhn appelle 'paradigme' est 'un accomplissement scientifique universellement reconnu qui, pendant un certain temps, sert comme modèle d'une problématique (i.e. problèmes et leur solutions) à une communauté de chercheurs (ibid. p.x). Cet accomplissement scientifique est suffisamment sans précédent pour gagner à sa cause un groupe de partisants et suffisamment ouvert pour que le groupe des practiciens nouvellement formé ait des problèmes à résoudre. Cela veut dire que certains exemples reconnus de practique scientifique réelle contenant en même temps des règles, des principes, la théorie, son application et l'outillage, apportent des modèles qui donnent naissance à des traditions cohérentes de recherches scientifiques. Ce sont des traditions comme

celles que les historiens ont nommé 'astronomie ptoléméenne' (ou 'copernicaine'), 'dynamique aristotélienne' (ou 'newtonienne'), 'optique corpusculaire' (ou 'ondulaire') etc. (ibid.)

D'après Kuhn, une science mûre se caractérise par la présence d'un paradigne. Cela ne veut pas dire que dans la période préparadigmatique les recherches scientifiques n'existent pas, mais dans ces périodes on peut parler tout au plus de l'existance de diverses écoles. Bien que Kuhn refuse de qualifier ces écoles de 'science', il admet que ceux qui formaient ces écoles contribuaient d'une manière substantielle au développement de la science et toute définition de 'scientist' qui les excluerait, devrait exclure aussi ceux qui forment la science dans le cadre d'un paradigme. Donc, pas de science sans paradigme quoiqu'on puisse parler d'activité scientifique sans paradigme (cf. Freudenthal, 1978).

Il semble que dans le cadre d'une science régie depuis presque toujours par le paradigme, il faut chercher les obstacles épistémologiques parmi les hypothèses plus ou moins explicites, les règles ou les principes du paradigme suffisamment importants pour que l'abandon du paradigme soit lié avec leur rejet. Ce peuvent être les hypothèses coupables de l'insuffisance du paradigme bien que les practiciens du paradigme ne doivent pas se rendre compte ni de ces hypothèses ni de leur rôle dans l'insuffisance du paradigme. C'est cela, entre autres, qui rend difficile la découverte des hypothèses, règles ou principes du paradigme.

Une autre raison est qu'un paradigme ne doit pas être également interprété par tous les membres d'une communauté des chercheurs (Kuhn, op.cit. p. 44).

La prise de conscience et l'explicitation des règles, hypothèses et principes d'un paradigme a souvent lieu juste avant et au cours des révolutions scientifiques où le paradigme est d'abord attaqué, mis en question et ensuite subit des changements. Il existe un exemple, bien connu, d'une telle situation dans l'histoire des mathématiques. Il s'agit du débat sur la notion de fonction engagé au XVIIIe siècle par Euler et d'Alembert à propos du problème de la corde vibrante. Cette discussion a révélé toutes les conceptions de la notion de fonction en cours à l'époque, les contradictions entre elles et montré que le temps est venu pour formuler une définition acceptée et respectée par tous (cf. Shilov, 1965).

Kuhn suggère une reconsidération des erreurs que nous découvrons éventuellement dans l'histoire. Ces erreurs peuvent témoigner qu'on adhère à un paradigme différent, qu'on attache un sens différent aux mêmes termes, bref, qu'on travaille dans un monde différent (Kuhn, op.cit. p. 148-149).

Ajoutons deux autres propriétés à notre liste:

D. Un obstacle épistémologique, ce n'est pas simplement une erreur, un manque de compréhension ou d'information. C'est quelque chose qui a été élément d'une tradition, d'un certain système et - un élément important. Par exemple, une des hypothèses fondamentales, dont le rejet est lié avec le changement ou l'écroulement de tout le système.

E. Les hypothèses-obstacles dans un paradigme ou une tradition

scientifique ne sont pas nécessairement explicitées ni même conscientes chez les membres de la communauté scientifique qui partage ce paradigme ou cette tradition. Un obstacle peut être mis à jour avant ou pendant une révolution scientifique lorsque l'ancien paradigme est attaqué et critiqué et on cherche les sources des contradictions et insuffisances. Mais il peut être découvert beaucoup de temps après l'abandon du paradigme, dans une perspective plus large de problèmes.

b. Bachelard considérait les obstacles épistémologiques dans les sciences naturelles seulement; la mathématique n'est pas une science naturelle.

Nous trouvons chez Bachelard (1938 p.22) le passage suivant:

> " ... la croissance de l'esprit mathématique est bien différente de la croissance de l'esprit scientifique dans son effort pour comprendre les phénomènes physiques. En fait, l'histoire des mathématiques est une merveille de régularité. Elle connaît des périodes d'arrêt. Elle ne connaît pas des périodes d'erreurs. Aucune des thèses que nous soutenons ici ne vise donc la connaissance mathématique. Elles ne traitent que de la connaissance du monde objectif."

Il existe, cependant, une position philosophique, qui souligne les aspects empiriques et sociaux des mathématiques en tant qu'activité et que nous voulons adopter ici. Ce point de vue, décrit par Lakatos dans son article sur la renaissance de l'empiricisme dans la philosophie récente des mathématiques (1978_1)[1] où il se réfère à des philosophes tels que Russell, Gödel, Weyl, Kalmar, nous permet d'étudier les obstacles épistémologiques en mathématiques aussi. Cette philosophie place les mathématiques dans le 'troisième monde' de Popper: les mathématiques sont bien une création de l'esprit humain, mais une fois le concept inventé, il commence à vivre sa propre vie et les mystères de cette vie ne sont pas toujours faciles à découvrir. Il existe des hypothèses comme celle de Goldbach (Popper, 1972, p. 131-132).

Une question se pose: dans le cadre d'une telle philosophie, quel est le rapport entre les mathématiques et le langage des mathématiques? Il est clair que pour Popper la mathématique n'est pas qu'un jeu linguistique formel, qu'il accepte l'existance des choses telles que les objets mathématiques extra-linguistiques. Il dit que le langage mathématique naît en même temps et en interaction avec les constructions mentales mathématiques:

> " ... ceci ne signifie pas que nous pourrions construire les mathématiques sans langage: il ne peut exister de construction sans qu'il y ait contrôlé critique constant, et il ne peut exister de critique sans que nous transposions nos constructions sous une forme linguistique et sans que nous les traitions comme des objets du troisième monde. Quoique le troisième

1. Voir aussi Davis and Hersh (1980) et Steiner (1983) pour l'explication des aspects sociaux et empiriques des mathématiques.

monde ne soit pas identique au monde des formes linguistiques, il naît avec le langage argumentatif: il est un sous-produit de langage. Ceci explique pourquoi, dès que nos constructions deviennent problématiques, systématisées et axiomatisées, le langage peut aussi devenir problématique, et pourquoi la formalisation peut devenir une branche de la construction mathématique. C'est, je crois, ce que veut dire le professeur Myhill lorsqu'il dit que nos 'formalisations corrigent nos intuitions, tandis que nos intuitions donnent forme à nos formalisations' (Popper, op.cit. p. 151-152)."

Lakatos essayait de montrer, dans ses *'Preuves et refutations'* entre autres:

" ... que les mathématiques informelles sont une science au sens de *Popper*, que leur développement se fait dans une succession de critiques et de perfectionnement de théories et l'avancement de théories nouvelles ou rivales et non pas suivant le schéma déductif des mathématiques formalisées (Davis, 1980, p. 349)."

" ... la mathématique aussi, comme les sciences naturelles, n'est pas infaillible ou indubitable; elle aussi, elle croît par voie de critiques et corrections successives de théories qui ne sont jamais tout à fait libres d'ambiguité ou possibilité d'erreur ou inadvertance. Commençant par un problème ou une hypothèse, on cherche en même temps des preuves et des contre-exemples. Nouvelles preuves expliquent les anciens contre-exemples, de nouveaux contre-exemples ébranlent la validité des anciennes preuves. Pour Lakatos, 'démonstration mathématique'[2] dans ce contexte de mathématiques informelles ne signifie pas une procédure mécanique qui porte la vérité dans une chaîne ininterrompue d'hypothèses. 'Démontrer' veut dire plutôt expliquer, justifier, rendre la conjecture plus plausible, plus convincante, pendant qu'elle devient mieux formulée et plus précise sous la pression des contre-exemples'. (ibid. p. 347)."

c. *Débat sur le concept d'obstacle épistémologique en didactique des mathématiques.*

Comme nous l'avons vu dans les considérations a. et b., l'adaptation de la notion d'obstacle épistémologique en mathématiques ne peut pas se faire par un transfer direct. Cela demande 'un effort d'invention'. Cet effort a été entrepris (Brousseau, 1983, Duroux, 1983, Glaeser, 1984), mais pour le moment nous sommes encore à l'étape des expériences et des conjectures. Et Glaeser a raison en disant que le temps n'est pas encore venu pour donner des formulations ou définitions définitives. On peut tout au plus prendre des hypothèses de travail. Mais, avant tout, il faut avoir beaucoup d'exemples d'obstacles, et de contre-exemples aussi; il faut savoir qu'est-ce que nous voulons, au fond, de cette notion d'obstacle, quel doit être son rôle, quelles sont les propriétés qu'elle devrait avoir et ce n'est qu'alors (si jamais) que le temps viendra de

2. Le mot francais qui correspond très bien à ce sens de 'proof' est 'preuve'. (Cf. 'Introduction' à l'édition francaise de "Proofs and refutations" par N. Balacheff et J.M. Laborde).

systématiser et organiser.

Prof. Zawadowski aime comparer le problème de définition de l'obstacle épistémologique en didactique des mathématiques avec un problème analogue en médecine avec la notion de maladie. L'histoire de médecine connaît plusieurs définitions mais aucune n'est restée jusqu'à nos jours car aucune n'était assez générale pour englober un phénomène aussi complexe (et, en fait, encore inconnu). Le même sort est, peut-être, réservé à la notion d'obstacle épistémologique. C'est d'autant plus probable qu'avec les obstacles épistémologiques on a affaire plutôt à phénomène qu'à une notion.

Cela ne veut pas dire que nous devrions abandonner tout effort de formuler une définition; au contraire, c'est bien le moyen de mieux comprendre et expliquer ce 'phénomène'. Nous devons discuter, polémiser et critiquer nos points de vue; il n'y a pas de chemin royal qui mène au progrès.

Et, il faut bien le dire, le débat a eu lieu dès le moment où Brousseau découvrit cette notion pour la didactique des mathématiques. Il semble, cependant, que, dans ces discussions, le désaccord vient parfois d'un malentendu.

Par exemple, on ne distingue pas deux choses:

(a) formuler les propriétés générales des obstacles épistémologiques et

(b) formuler les conditions que devrait satisfaire la description d'un obstacle - qu'elle devrait, par exemple, comprendre une description des méthodes de solution de problèmes avant le franchissement de l'obstacle et une analyse des conditions historiques dans lesquelles ce franchissement a eu lieu. Brousseau, par exemple, refuse d'appeler obstacle un 'manque de connaissance', en disant qu'un obstacle est une connaissance, quelque chose qui a été une réponse à une question et - une réponse reconnue socialement (1984). D'une part, une expression en termes de 'manque de connaissance' peut être seulement un nom donné à l'obstacle et sa description peut satisfaire les conditions formulées plus haut. D'autre part, si ce 'manque de connaissance' n'est pas un simple 'manque d'information' (cf. propriété D, p. 80), vu la relativité des obstacles, leur rapport à une certaine norme, il est assez naturel de les décrire en termes de 'manque'.

Pas 'manque d'information', bien sûr, mais manque, par exemple, d'une structure générale qui engloberait tous les petits cas particuliers connus en les faisant voir sous un jour nouveau et permettant ainsi de généraliser en une seule les méthodes qu'on élaborait à nouveau pour chacun de ces cas particuliers. Telle était l'histoire des nombres réels. Et nous voudrions appeler 'obstacle épistémologique' le manque d'un concept uniforme de nombre et non pas toutes les méthodes et les moyens dont se servaient les mathématiciens dans le passé pour résoudre leur problèmes malgré ce 'manque'.

Parfois aussi il y a confusion entre obstacles épistémologiques et obstacles 'didactiques', c'est-à-dire les obstacles dans le développement individuel des connaissances en situations scolaires d'apprentissage qui ont leur source souvent dans la transposition didactique (Brousseau,

1980-1981)[3]. (Pour éviter une telle confusion, dans nos expériences, nous choisissons les élèves qui n'ont jamais rencontré le concept sur lequel porte la recherche dans l'enseignement systématique à l'école).

d. Difficulté et obstacle.

Nous nous servirons d'un example. Il y a, dans le volume 14 de 'Educational Studies in Mathematics' un article qui contient le mot 'obstacle' dans son titre: *L'obstacle du dédoublement des objets mathématiques* (Duval, 1983). S'agit-il d'un obstacle épistémologique au sens que nous voulons communiquer ici? Il semble que non. Le mot 'obstacle' est employé plutôt au sens de 'difficulté'. (L'auteur ne fait pas de référence à Bachelard et ne cherche pas à trouver une analogie entre les conceptions des élèves et celles des mathématiciens dans le passé.)

Le problème de l'auteur est que beaucoup d'étudiants sont incapables du dédoublement d'un objet mathématique lorsque, dans deux situations différentes, l'attention est tournée vers deux propriétés différentes de cet objet (ce qui est, d'après Duval, une démarche inverse de l'identification de deux dénominations d'un même objet). Par exemple, ils ne parviennent pas à dissocier le nombre 4 comme étant le carré de 2 du nombre 4 comme le nombre naturel suivant 3. Ainsi, il leur est difficile de regarder l'ensemble des carrés parfaits et l'ensemble des naturels comme deux ensembles distincts. Et comme, intuitivement, *une bijection n'est possible qu'entre les ensembles d'objets distincts*, ces élèves n'acceptent pas la possibilité d'une bijection entre deux ensembles quand l'un d'eux est une partie de l'autre.

Si nous n'appellerions pas le 'dédoublement des objets mathématiques' un obstacle épistémologique, la conception que nous venons de souligner, au contraire, ressemble fort à un obstacle épistémologique. C'est peut-être cela, entre autres, qui a empêché des mathématiciens du Moyen Age de résoudre le paradoxe dit de Galilée, et si Galilée y réussit, c'est bien grâce au franchissement de cet obstacle.

Au sens où ce mot est employé par Duval, 'obstacle' veut dire quelque chose de positif, une connaissance ou une faculté qui est acceptée en mathématiques aujourd'hui mais dont l'acquisition est difficile. Dans ce fil d'idées, on pourrait dire, peut-être, que les nombres irrationnels font obstacle à l'apprentissage de l'Analyse. Nous dirions seulement que la notion de nombre irrationnel est une notion difficile, que cette notion constitue une difficulté fondamentale qu'il faut surmonter pour comprendre les éléments de l'Analyse. Un autre exemple de difficulté rencontrée par les collegiens français est donné par Duroux (1983): "étude de cas" (p. ex. lorsqu'on résoud les équations avec la valeur absolue, il faut considérer plusieurs cas). Mais, dans ce dernier article, on appelle cette difficulté 'une difficulté' et on la distingue des obstacles épistémologiques liés à la notion de valeur absolue.

3. Voir aussi: Y. Chevallard, 1985.

Quelques remarques sur l'arrière-plan historique et philosophique de la notion d'obstacle épistémologique

L'ouvrage de Bachelard (1938) dans lequel il introduisit la notion d'obstacle n'est, au fond, rien d'autre qu'une contribution à la question de la 'ligne de démarcation' entre ce qui est scientifique et ce qui est pseudo-scientifique ou non-scientifique. D'après Bachelard, ce qui caractérise avant tout la pensée scientifique, c'est 'la perspective d'erreurs rectifiées'. Il dit:

> "On a souvent dit qu'une hypothèse scientifique qui ne peut se heurter à aucune contradiction n'est pas loin d'être une hypothèse inutile. De même, une expérience qui ne rectifie aucune erreur, qui est platement vraie, sans débat, à quoi sert-elle? Une expérience scientifique est alors une expérience qui contredit l'expérience commune (...). C'est cette perspective d'erreurs rectifiées qui caractérise, à notre avis, la pensée scientifique (op. cit. p. 10)."

Dans ces quelques phrases nous avons, d'une part, une référence implicite au falsificationisme de Karl Popper, et, de l'autre, pas une anticipation, peut-être, mais certainement un présentiment de l'idée de Lakatos des programmes scientifiques de recherche. (Lakatos, 1978_3).

La méthodologie des programmes scientifiques de recherche est, comme Lakatos le dit lui-même, une reconstruction objective, dans "le troisième monde", du concept socio-psychologique de paradigme de Kuhn (ibid. p. 91). C'est un 'falsificationisme rafiné', par opposition au 'falsificationisme naif' de Popper. Cette méthodologie "remplace le problème de l'évaluation des théories par le problème de l'évaluation des suites de théories. Ce n'est pas une théorie isolée mais bien une suite des théories qu'on peut appeler scientifique ou non-scientifique (ibid. p. 34)." L'importance est qu'une telle suite de théories soit progressive, i.e. que chaque nouvelle théorie ait un contenu supplémentaire par rapport à la précédente, que cette nouvelle théorie soit capable de prédire des faits nouveaux (novel facts) - faits que les théories précédentes ne prévoyaient pas ou contredisaient même (ibid. p. 31-34).

N'est-ce pas une 'perspective d'erreurs rectifiées?'

"Les théories dans une telle suite sont d'habitude liées par une remarquable continuité qui les soude en programmes de recherche. Cette continuité - qui évoque l'idée de science normale de Kuhn - joue un rôle vital dans l'histoire d'une science (ibid. p. 46)."

Cette continuité évolue à partir d'un vrai programme de recherche esquissé au départ et elle est assurée par un 'noyau d'hypothèses' (hard core of hypotheses) - 'l'heuristique négative du programme'. 'Négative' - parce que, dans le cadre d'un même programme de recherche il est interdit de diriger la pointe des critiques contre ces hypothèses. Au contraire, il faut former autour d'elles une 'ceinture protectrice d'hypothèses', et ce sont ces dernières qui peuvent être ajustées et re-ajustées, testées, changées ou rejetées si la securité du 'noyau' le demande. L'heuristique positive du programme consiste en un ensemble de suggestions concernant le changement, le développement, la modification, le rafinement de ces hypothèses auxiliaires pour permettre de résoudre les problèmes et

faire des découvertes sans changer les hypothèses du 'noyau'. (Ibid. p. 48).
Un programme de recherche est abandonné avec l'écroulement de son 'noyau' et ceci a lieu quand la force heuristique du programme est epuisée, c'est-à-dire lorsque le programme n'est plus capable de prédire de nouveaux faits (ibid. p. 49).

N'était-ce la supposition d'une certaine continuité dans la suite de théories formant un programme de recherche, et le besoin, quand même, d'un certain dogmatisme (ibid. p. 85), il n'y aurait pas de place, dans la méthodologie des programmes de recherche de Lakatos, pour les obstacles épistémologiques. Il n'y a pas de place pour les obstacles épistémologiques dans une science dont le développement est une révolution constante. Les obstacles s'accumulent pendant les périodes d'une certaine stabilité, quand les moyens et les outils que l'on possède suffisent encore à expliquer (ou ignorer) les anomalies. Au cours du développement d'un programme de recherche quelque chose est conservé. Ce quelque chose peut être une hypothèse, un principe ou une règle, pas nécessairement explicitée mais suffisamment importante pour que son rejet par une théorie place celle-ci dans un programme de recherche nouveau ou différent.

D'après Lakatos, un programme de recherche est falsifié s'il est supplanté par un programme rival qui explique les succès de son prédécesseur et déploie une nouvelle force heuristique (ibid. p. 69). Donc, Lakatos dirait que:

F. Pour franchir un obstacle épistémologique, il ne suffit pas de trouver un exemple qui contredit les thèses contenues dans ou impliquées par cet obstacle. Une théorie rivale doit apparaître qui expliquerait les succès (i.e. dans quel sens l'obstacle a été un appui dans le développement des connaissances) et les échecs (i.e. en quel sens l'obstacle est coupable des anomalies) de ses prédécesseurs et serait capable de prédire de nouveaux faits.

IMPLICATIONS POUR L'ENSEIGNEMENT

Changement de l'attitude de l'enseignant envers les erreurs de ses élèves
Le credo pédagogique de Bachelard s'exprime dans le slogan: "Erreur, tu n'est pas un mal!" (1938, p.243). Cette, dirait-on, évidence est propagée par beaucoup de didacticiens (on connaît l'expression "erreurs bénies" de Prof. Krygowska) mais peu d'enseignants veulent la prendre à coeur.

Une erreur, surtout si elle réapparaît systématiquement mérite une attention particulière de la part du maître. Il ne suffit pas de dire à l'élève: "Non, c'est faux, je vais te montrer comment il faut faire." Les erreurs sont le résultat de tout un 'système' des conceptions de l'élève, de ses intuitions, des moyens qu'il prend pour résoudre les problèmes etc. Et ce système, dont l'élève ne doit pas être conscient, peut être fondamentalement différent du système que le maître essaye de lui communiquer. L'élève ne va accepter la méthode de résoudre les problèmes que lui montre le maître parce que cette méthode est étrangère

à son propre système conceptuel, elle n'est pas compréhensible dans ce système. Ou alors elle y est interprétée autrement et cela peut provoquer de nouvelles erreurs. Les termes employés par l'enseignant peuvent avoir une signification différente pour l'élève. En paraphrasant l'expression de Kuhn concernant les chercheurs-practiciens de différents paradigmes, on pourrait dire que l'enseignant et l'élève travaillent 'dans deux mondes différents'.

La tâche de l'enseignant est d'aider l'élève à prendre conscience de ses propres conceptions, à découvrir les contradictions éventuelles, à chercher les conséquences théoriques de ces conceptions. Les conceptions de l'élève peuvent conduire au développement d'une autre théorie, différente de celle qui est prévue dans les programmes scolaires. Et nous ne pouvons pas être sûrs si ce que nous savons aujourd'hui sur un fait (mathématique ou autre), son interprétation actuelle est définitive ou vraie dans un sens. Cela implique:

Un changement d'attitude de l'enseignant envers le savoir enseigné
Même si nous acceptons l'existance d'une connaissance objective, nous l'acceptons, comme Popper, plutôt au sens de son autonomie, qu'au sens de 'la vérité objective'. Il est particulièrement difficile de parler de vérité en mathématiques. La connaissance mathématique est hypothétique non seulement à cause de l'admission sans démonstration de certains théorèmes. Hypothétique est aussi la transcription de toutes les démonstrations mathématiques en logique du premier ordre, ce qui, dirait-on, permettrait de les vérifier.

> "En vérité, voilà ce qui se passe. D'un côté, nous avons les vraies mathématiques avec les démonstrations qui sont établies par le consensus des spécialistes. Une vraie démonstration n'est pas vérifiable par une machine ni même par un mathématicien non familier du gestalt, du mode de pensée de ce particulier domaine des mathématiques dans lequel se trouve la preuve. Même parmi les spécialistes, il y a normalement des différences d'opinion si une vraie démonstration (c'est-à-dire qui est véritablement communiquée ou écrite) est complète ou correcte. Ces doutes sont résolus par communication et explication et jamais par la transcription de la démonstration en calcul des prédicats du premier ordre. Une fois une démonstration est 'acceptée', ses conséquences sont considerées comme vraies (avec une très haute probabilité). Cela peut prendre des générations entières pour détecter une erreur dans une démonstration. Si un théorème est bien connu et largement utilisé et si sa démonstration est souvent étudiée, s'il existe des démonstrations alternatives, si le théorème a des applications et des généralisations connues et s'il est analogue aux résultats connus dans les domaines proches, alors il commence à être consideré comme une partie de la 'base rocheuse' (rock bottom). Ainsi, bien sûr, toute l'arithmétique et la géométrie euclidienne font partie de la base rocheuse.
> De l'autre côté, à distinguer des vraies mathématiques, nous avons les 'méta-mathématiques' ou la logique du premier ordre. En tant qu'activité, elles font vraiement partie des vraies mathématiques. Mais en ce qui concerne le contenu, elles présentent une structure de théorèmes qui ne sont vraiment infaillibles qu'en 'principe'. Nous sommes donc capables

> d'étudier mathématiquement les résultats d'une capabilité imaginaire de construire des preuves infaillibres; nous pouvons, par exemple, donner des variations constructivistes des règles de démonstration et voir quelles sont les conséquences de ces variations. (Davis, 1980, pp. 354-355)."

Même si ce que nous enseignons est de la 'base rocheuse', ce n'est certainement pas une manière unique d'abstraire, de généraliser, de prolonger les notions. Cela veut dire que nous ne pouvons pas faire comme si ce que nous enseignions était une collection de vérités absolues. Tout ce que nous communiquons est toujours le résultat d'une négociation, d'un choix, d'un consensus dans une communauté des mathématiciens.

Il ne faudrait pas, peut-être, tomber dans l'extrême opposé et devenir complètement indifférents vis-à-vis de ce que nous enseignons: l'activité du maître réduite ainsi à transmettre aux élèves les connaissances produites par d'autres. En classe aussi, comme parmi les mathématiciens practicants, le savoir doit être négocié. Le choix d'une définition, par exemple; ce n'est pas que l'affaire de l'enseignant ou de l'auteur du manuel. C'est un problème commun du maître et de ses élèves et sa solution dépend des situations dans lesquelles les élèves ont rencontré et ont été contraints d'utiliser la notion à définir. Quand nous disons 'situation', nous pensons non seulement à un problème mathématique particulier mais aussi à la dramaturgie de la leçon au cours de laquelle ce problème a émergé - donc un contexte social. Et quand nous disons 'négociation', nous pensons à une véritable négociation et non pas à une négociation simulée - un jeu qui consiste à deviner 'qu'est-ce qu'il a en tête, le prof'. L'enseignant ne devrait pas se considérer lui-même ni être considéré par ses élèves comme l'unique détenteur de la vérité et s'il ne la révèle pas tout de suite, c'est soit par sa méchanceté naturelle soit en conséquence de la nécessité de s'en tenir aux règles du contrat didactique (cf. Brousseau, 1980).[4]

Exemple

Au début de cette année, nous avons commencé à tester des situations didactiques ayant pour but de permettre à l'enseignant:

1. de révéler les obstacles épistémologiques relatifs aux notions élémentaires d'Analyse présents chez ses élèves;
2. d'aider les élèves à franchir ces obstacles.

Pendant une des leçons, j'ai dessiné au tableau deux cercles

4. Petrie (1979) a trouvé une analogie intéressante entre un psychologue des animaux qui essaye d'établir les habitudes d'un vieux rat qui lui a été transmis d'un autre laboratoire et un étudiant qui essaye d'apprendre quelque chose de son professeur.
   Petrie suggère qu'en fait, ce que l'étudiant apprend n'est autre chose que les habitudes du 'vieux rat' ou plutôt ses réponses aux différents stimuli, qu'il peut, bien sûr, classifier, chercher leurs implications et agir en conséquence.
   "Il n'y a pas de contact direct avec le monde 'tel qu'il est'. Il n'y a que conjecture et correction dans un processus qui se concentre finalement pas tant sur 'la vérité' que sur la structure représentative qui permet au chercheur et à l'étudiant de se débrouiller dans la vie. C'est de cette manière, je crois, qu'on apprend quelque chose de radicalement nouveau."

concentriques différents et j'ai engagé un débat en posant la question suivante: "Comment pensez-vous, lequel de ces deux cercles contient plus de points?" (Cette question était à la source d'un vieux paradoxe qui occupait les philosophes du Moyen Age). La discussion a fait apparaître trois positions différentes:

I. Il y a infiniment de points sur les deux cercles, donc les deux cercles contiennent autant de points et il y a plus rien à discuter. (Cette conception est liée à l'obstacle 2^0 - voir p. 77).

II. Les points ont des dimensions infinitésimales; donc il y a une infinité de points sur chaque cercle. Mais ces infinités sont de 'qualités différentes' et il y a plus de points sur le grand cercle. Une des élèves expliquait: "Si nous dessinons tous les rayons du petit cercle et si nous prolongeons ces rayons pour faire les rayons du grand cercle, le petit cercle sera complètement noir, tandis qu'il restera des taches blanches sur le grand."

III. Il y a un nombre fini de points sur chaque cercle, le cercle étant un figure fermée. Et, comme tous les points sont identiques, il y a plus de points sur le grand cercle.

Cette dernière position était prise un garçon surtout, Jacek, qui y tenait avec une obstination et conséquence admirables. Pendant la partie précédente de la leçon, il a formulé l'opinion que les nombres irrationnels sont parfaitement inutiles aussi bien dans la vie que dans la technique. Il suffit d'avoir les nombres décimaux avec un nombre fini de chiffres après la virgule; les nombres irrationnels ne sont qu'un inconvenient. Et il nous raconta l'histoire d'un de ses amis, élève d'un lycée technique, qui a résolu ses problèmes avec les nombres irrationnels en emmenant son professeur de mathématiques aux ateliers de l'école et en lui montrant que les nombres irrationnels ne servent à rien dans la vie pratique.

Le but de la leçon était seulement de réveler les diverses conceptions des élèves liées à la notion du continu. J'essayais donc de garder une position neutre et ne pas donner d'indications aux élèves quant à mon évaluation de leurs idées. Plutôt, je les recevais toutes comme également interessantes. Mais le professeur des mathématiques qui était avec nous dans la salle était incapable de cacher son indignation vis-à-vis de la position prise par Jacek. Quand, pour la troisième fois au cours de la discussion, il répéta que le nombre des points sur un cercle est fini, elle s'écria: "Alors combien il y en a, de points, allons, dit nous, combien il y en a-t-il de points?!"

C'était une très bonne question (déjà, le garçon se sentit un peu troublé et se mit à réfléchir plus profondement; il dit 'qu'il faudrait, avant tout, définir le point') mais elle serait encore meilleure si elle était posée sur un ton tranquille et si c'était vraiment une question en attente d'une réponse et non pas une exclamation qui n'a d'autre but que de troubler et faire taire l'élève.

Il ne s'agit pas que de cacher son attitude négative envers une conception de l'élève à cause, par exemple, de la situation qui est expérimentale. Cette attitude ne devrait pas être négative d'un point de vue purement

mathématique. Les hypothèses du garçon sont tout à fait admissibles. Pourquoi ne pas prendre seulement un sous-ensemble des réels et bâtir les mathématiques à partir de la, comme le fait, par exemple, l'analyse numérique? Le professeur peut aider l'élève à développer son idée, à la pousser plus loin, à chercher ses conséquences théoriques en lui montrant en même temps les différences avec l'analyse classique qui prend des hypothèses différentes. Si l'élève veut garder sa conception, il doit plaider, chercher les arguments pour elle et contre les arguments du professeur. C'est cela 'négocier' le savoir avec l'élève.

La conception II est aussi intéressante. Dans un article de Tall (1980) on peut trouver un des développements possibles de cette conception. Tall présente une extension de la notion du nombre au 'nombre-mesure infini' (infinite measuring number) qui est proche de l'intuition qui lie le nombre à la mesure des grandeurs. La philosophie de l'enseignement des mathématiques implicite dans cet article semble très proche de celle que nous voulons adopter ici; Tall dit que "le paradigme du nombre cardinal n'est (...) qu'une des extensions infinies possibles du concept du nombre plutôt qu'une réalité logique absolue contre laquelle tout doit être jugé (op.cit. p. 273)."

Le postulat qui dit que l'enseignant devrait s'engager dans une recherche commune avec ses élèves est, bien sûr, très juste et il est souvent formulé (on trouve un exemple de réalisation de ce postulat chez H.G. Steiner (1983); *'mathématisation à la place des mathématiques'*, *'axiomatisation à la place de l'axiomatique'*, *'recherche de structures pauvres dans les structures riches'* sont des slogans bien connus de Prof. Freudenthal), mais la réalité scolaire est telle que l'enseignant doit fortement sélectionner les contenus dans lesquels il va investir plus de sa propre activité créative et de celle de ses élèves.

Alors se pose le problème du choix de ce qui va être le sujet d'une recherche commune avec les élèves. Cette activité demande que soient prises en compte les connaissances des élèves, leur conceptions et intuitions. Ces connaissances doivent être prises comme un savoir acceptable mais devant, peut être, être rejeté. Guy Brousseau, qui a une longue expérience dans ce domaine, dit que c'est très coûteux du point de vue du maître. "Les enseignants ne savent pas le faire, ils ne savent pas tenir compte du savoir ancien de l'élève, surtout s'il est faux, adapté à d'autres conditions. Ils font ce qu'ils peuvent pour fuire cette obligation qui est, pour eux, une crucifiction. Ils préfèrent exposer directement les choses telles qu'ils veulent qu'elles soient apprises et ils avancent (Brousseau, 1984)."

Bien sûr, cela n'a pas de sens de faire cette recherche commune sur tous les sujets du programme. D'autant plus qu'il faut aussi apprendre aux élèves à suivre un cours, à lire un texte mathématique (cf. Krygowska, 1969, 1977). Mais là, où non seulement il est utile mais il faut absolument passer par ce chemin de la croix pavé des connaissances anciennes des élèves, c'est dans les moments où on a affaire à un obstacle épistémologique que nous savons présent chez les élèves d'aujourd'hui. Le contournement de l'obstacle se venge toujours par un

sous-développement ou un développement déficient chez l'élève de la théorie que nous avons en vue.

Il s'ensuit de là tout un programme de recherche en didactique des mathématiques.

UN PROGRAMME DE RECHERCHE LIE A LA NOTION D'OBSTACLE EPISTEMOLOGIQUE

Le but de ce programme de recherche est, premièrement, de déterminer les obstacles épistémologiques liés aux mathématiques enseignées[5] à l'école. Cela demande en même temps des recherches historiques et expérimentales auprès des élèves. Deuxièmement - d'élaborer et vérifier des situations didactiques qui donneraient aux élèves une chance de franchir ces obstacles et dans lesquelles le savoir serait négocié avec les élèves plutôt qu'imposé sur eux.

Dans nos efforts pour atteindre ce but nous admettons plusieurs hypothèses dont, avant tout, l'existance d'un parallélisme entre les développements historique et individuel de la pensée mathématique (cf. Freudenthal, 1983).

Les hypothèses suivantes concernent les aspects empiriques et sociaux du développement de la pensée mathématique.

Nous assumons que, à la source de ce développement (historique et individuel), il y a toujours un *problème* et le savoir que l'on construit pour le résoudre est adéquat à ce problème. Le moteur du développement est dans de nouveaux problèmes, nouvelles conjectures et contre-exemples qui demandent la correction du savoir ancien. Cela demande un effort intellectuel sérieux; il est difficile d'abandonner ou changer les méthodes, les théories qui avaient été élaborées à la sueur de son front, qui ont bien servi pendant un certain temps et certaines avaient le temps de devenir des habitudes intellectuelles. En plus, il peut arriver que l'hypothèse 'coupable' est cachée, qu'il n'est pas tout de suite clair pourquoi les anciennes méthodes 'ne marchent plus'. De telles hypothèses, et, en général, sources de l'insuffisance d'une tradition ou d'un paradigme ont été appelées obstacles épistémologiques.

L'effort que nous nous décidons d'investir dans la résolution d'un problème dépend de l'enjeu social et cognitif qu'il réprésente: nous n'investirons pas plus qu'il n'est nécessaire pour gagner au jeu. Nous admettons donc que le franchissement d'un obstacle épistémologique a d'importants aspects sociaux.

Si ce programme évolue en un programme scientifique de recherche au sens de Lakatos, alors les hypothèses que nous venons de formuler feront partie de son 'noyau d'hypothèses'. Ce programme n'est qu'un programme 'bourgeonnant' et il serait difficile de formuler dès maintenant toutes ses hypothèses principales, auxiliaires et son heuristique. Mais il a déjà son histoire, dans les travaux théoriques de Brousseau

5. Les mathématiques à enseigner et non pas les mathématiques telles qu'elles sont enseignées.

(1980-1981), Glaeser (1984), Bouvier (1985); dans les travaux, visant la première partie de notre 'but' formulé au début de ce chapitre, de Glaeser (1981), Cornu (1983), Sierpinska (1983). Nous sommes aussi au courant de travaux se rapportant au second point de ce 'but': Berthelot (1983), Robinet (1983).

Comme hypothèses auxiliaires nous admettrions les théories psychologiques de Piaget (1975, 1958-'60) dont la première explique le développement cognitif comme se faisant dans une succession d'équilibres, de deséquilibres et de reconstruction, et la deuxième souligne les aspects sociaux de ce développement et, en particulier, le rôle de la cooperation intellectuelle. On trouve aussi un support important dans les résultats de la psychologie sociale de l'école génévoise (Mugny et al. 1976) qui mettent l'accent sur les interactions sociales dans le petit groupe et les conflicts intellectuels qui y naissent. Ces résultats ont été plus tard développés et adaptés à la recherche en didactique des mathématiques sous forme des 'situations expérimentales d'interaction et de communication' (Balacheff et Laborde, 1984; Laborde, 1982). Dans ces situations l'enjeu cognitif et social est très élevé ce qui favorise aussi bien le développement des connaissances des élèves que l'observation de celui-ci.

De même, la théorie des situations didactiques de Brousseau (1977) constitue un appui pour ce programme, surtout par son parallélisme avec le développement du savoir 'savant', par le rôle qu'elle attribue à la formulation (qui harmonise avec l'idée de Popper à ce sujet, cf. p.81-82), à la validation (proche des idées de Lakatos exprimées dans sa conception des mathématiques comme science quasi-empirique) et aussi à l'institutionalisation du savoir en classe qui correspond à l'établissement d'une convention, d'un paradigme, et qui tient compte des aspects sociaux des mathématiques.

On peut se demander si notre programme est 'progressif', c'est-à-dire s'il est capable de prévoir des faits nouveaux ou expliquer (voire contredire) des faits découverts auparavent. Il semble qu'une telle possibilité existe. La recherche historique des obstacles épistémologiques en interaction avec l'analyse de production des élèves peut contribuer à mieux expliquer les sources de certaines erreurs qui, jusqu'alors étaient traitées comme des automatismes ou manque de pratique. Cette recherche peut prévoir des moments dans les programmes scolaires qui demandent des soins didactiques particuliers à cause des obstacles épistémologiques qui y sont implicites et que les élèves seront obligés de franchir sous peine de l'inefficacité de tous les efforts ultérieurs de l'enseignant.

Mais il n'est pas certain que ce programme réalise cette possibilité car c'est un programme très difficile. Premièrement, il demande des recherches historiques approfondies. Il ne suffit pas, comme nous l'avons déjà remarqué, de déterminer les paradigmes en cours à l'époque étudiée. Les obstacles épistémologiques sont souvent implicites, inconscients chez les mathématiciens actifs dans une tradition. Il faut donc creuser aux sources, forcer certaines 'rationalisations' trop poussées des historiens des

mathématiques, pressés à cacher les erreurs des mathématiciens dans le passé. La présentation des résultats dans la notation moderne, elle non plus, ne facilite pas les choses (cf. Glaeser, 1984; Lakatos, 1978_2, Kuhn, 1962).

Deuxièmement, ce programme demande l'élaboration des situations didactiques, des problèmes et des situations-problèmes qui soit expliciteraient les conceptions anciennes et les intuitions des élèves témoignant de la présence chez eux des obstacles épistémologiques, soit permettraient aux élèves de franchir ces obstacles. La vérification si un obstacle est franchi n'est pas immédiate, non plus. C'est encore la question du choix d'une situation-problème. Et malgré l'existance des appuis théoriques mentionnés plus haut, une règle générale pour l'élaboration de telles situations n'est pas donnée. La connaissance des conditions historiques dans lesquelles l'obstacle a été franchi peut donner quelques indications ou être source d'inspiration, mais c'est tout.

Une source d'information sur la présence des obstacles épistémologiques chez les élèves d'aujourd'hui peut être la littérature didactique existante. Il y a beaucoup de travaux qui rapportent les intuitions, les conceptions et les erreurs des élèves et qui peuvent nous venir en aide. L'enrichissement de ces recherches d'une analyse du point de vue des obstacles épistémologiques peut donner des résultats profonds.

Mais il n'y a rien de définitif dans de tels résultats. Une falsification est toujours possible. L'assertion qu'un obstacle épistémologique est ou n'est pas présent chez les élèves d'aujourd'hui est souvent le résultat d'une interprétation subjective de l'expérimentateur. L'assertion que quelque chose est un obstacle épistémologique dans le développement des mathématiques peut être refutée par de nouveaux résultats des recherches historiques, par la découverte des faits historiques inconnus jusqu'alors ou par un nouveau point de vue sur le développement d'une théorie grâce à l'émergence d'une nouvelle branche des mathématiques comme cela s'est passé avec l'interprétation du développement du calcul différentiel et intégral par suite de la découverte de l'Analyse Non-standard par Robinson.

Anna Sierpinska
Institute of Mathematics
The Polish Academy of Science
Warsaw/Pologne.

REFERENCES

[1] Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.1.1 et 1.2, Grenoble.

[2] Brousseau, G.: *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 4.2, Grenoble, 1983.

[3] Brousseau, G.: *Interview à Orléans*, non publié, 1984.

[4] Cornu, B.: *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*, Thèse de Doctorat du Troisième Cycle de Mathématiques Pures, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1983.

[5] Davis, P.J. and R. Hersh: *The mathematical experience*, Birkhäuser, 1981.

[6] Duroux, A.: *La valeur absolue; difficultés majeures pour une notion mineure*, Petit x, No. 3, Grenoble, 1983.

[7] Duval, R.: *L'obstacle du dédoublement des objets mathématiques*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 14, 385-414, 1983.

[8] Freudenthal, H.: *Mathematics as an educational task*, D. Reidel, Dordrecht, 1973.

[9] Freudenthal, H.: *Weeding and Sowing; preface to a science of mathematics education*, D. Reidel, Dordrecht, 1978.

[10] Freudenthal, H.: *Implicit philosophy of mathematics history and education*, The Proceedings of the ICM '82, Warsaw, The Polish Scientific Publishers-North Holland, 1983.

[11] Glaeser, G.: *Epistémologie des nombres relatifs*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 2.3, Grenoble, 1981.

[12] Glaeser, G.: *Réflexions préalables à une étude des obstacles*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 5.2., Grenoble, 1984.

[13] Glaeser, G.: *Hors de la tour d'ivoire - pour une meilleure approche de la recherche historique*, à paraître, 1984.

[14] Grattan-Guinness, I.: *Joseph Fourier, a survey of his life and work*, MIT Press, 1984.

[15] Heyting, A.: *Intuitionism, an introduction*, Amsterdam, North-Holland, 1956.

[16] Krygowska, Z.A.: *Le texte mathématique dans l'enseignement*, Educational Studies in Mathematics, Vol. II, No. 2/3, 1969.

[17] Krygowska, Z.A.: *Zarys dydaktyki matematyki*, cz.II, PZWS, Warszawa, 1977.

[18] Kuhn, T.S.: *The structure of scientific revolutions*, University of Chicago Press, 1962.

[19] Laborde, C.: *A propos d'une situation d'interaction et de communication en géométrie*, Document de travail pour le Colloque: "Nouvelles perspectives dans l'étude expérimentale du développement social de l'intelligence", Genève, 10-12, 1982.

[20] Lakatos, I.: *Proofs and refutations, the logic of mathematical discovery*, Cambridge University Press, 1974.

[21] Lakatos, I.: *A renaissance of empricism in the recent philosophy of mathematics*, Mathematics, Science and Epistemology, Cambridge University Press, 1978_1.

[22] Lakatos, I.: *Cauchy and the continuum*, Mathematics, Science and Epistemology, Cambridge University Press, 1978_2.

[23] Lakatos, I.: *The methodology of scientific research programmes*, Cambridge University Press, 1978_3.

[24] Mugny, G., W. Doise et A.N. Perret-Clermont: *Conflit de centration et progrès cognitif*, Bulletin de Psychologie, No. 29, 321, 4-7, p. 199-209, 1976.

[25] Petrie, H.G.: *Metaphors and learning*, in A. Ortony (ed.) *Metaphor and thought*, Cambridge University Press, 1979.

[26] Piaget, J.: *L'équilibration des structures cognitives*, P.U.F., Paris, 1975.

[27] Piaget, J.: *Problèmes de la psychosociologie de l'enfance*, in Gurvitch (ed.) Traité de

sociologie, Vol. II, P.U.F., Paris, 1958-'60.
[28] Popper, K.R.: *La connaissance objective, Complexe*, SPRL, Paris, 1972.
[29] Robinet, J.: *Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 4.3, Grenoble, 1983.
[30] Robinson, A.: *The metaphysics of the Calculus*, in I. Lakatos (ed.) *Problems in the Philosophy of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam, 1967.
[31] Rucker, R.: *Infinity and the mind, the science and philosophy of the infinite*, Birkhäuser, 1982.
[32] Sierpinska, A.: *Przeszkody w rozwoju osobniczym pojecia granicy*, Thèse, Varsovie (une version française va paraître dans Recherches en Didactique des Mathématiques en 1986), 1983.
[33] Steiner, H.G.: *The process of mathematization and the social dimension of mathematics*, address at the ICMI Symposium Warsaw, 1983.
[34] Shilov, G.E.: *Co to jest funkcja?*, Matematyka No. 3, p.100-110, 1965. (Traduction d'un article de *Matematika v skole*, No. 3, 1964).
[35] Tall, D.: *The notion of infinite measuring number and its relevance to the intuition of infinity*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 11, pp. 271-284, 1980.
[36] Zawadowski, W.: *Nauczanie matematyki w klasie szóstej*, WSiP, Warszawa, 1984.
[37] Chevallard, Y.: *La transposition didactique; du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée sauvage éditions, Grenoble 1985.

KRYSTYNA DALEK

LES NOMBRES IRRATIONNELS ET LES MICRO-ORDINATEURS

L'UN de plus importants problèmes à l'école - pas seulement à l'école polonaise - c'est le problème du nombre, du nombre réel.
Qu'est-ce-qu'un nombre réel, où il se trouve sur l'axe, et surtout, quelle est la différence entre le nombre rationnel et le nombre irrationnel - ce sont les questions qui posent beaucoup de problèmes pour les maîtres et beaucoup de difficultés aux élèves.

Je voudrais présenter une méthode de démonstration de l'existence de pairs des segments, qui n'ont pas de proportion rationnel. Il ne s'agit pas seulement d'une démonstration, mais d'une démonstration convaincable.
Je veux utiliser l'algorithme d'Euclide pour chercher le PGDC. On sait, que cet algorithme nous donne la possibilité de trouver une mesure commune pour deux nombres a, b naturels.
On prend deux nombres a > b et:

$$a - b = r_1$$
$$b - r_1 = r_2$$
$$r_2 - r_1 = r_3 \quad \text{etc.}$$

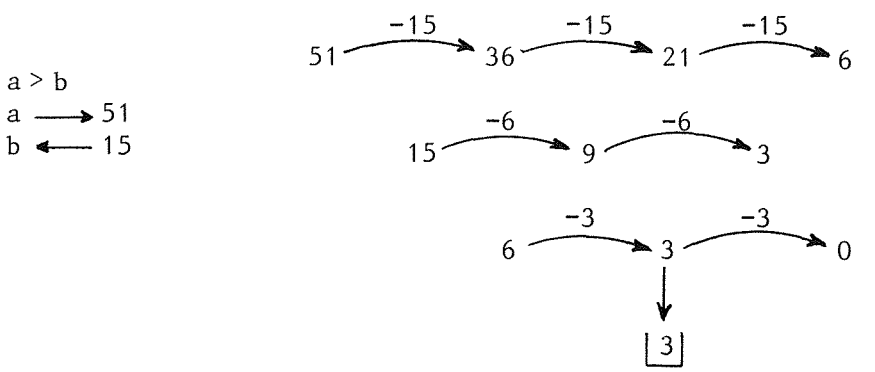


fig.1

La dernière différence non nul c'est le PGDC. Cet algorithme dans le cas a, b naturels possède toujours le STOP.

On peut traduire l'algorithme d'Euclide en géométrie, p. ex. comme ça: on a un rectangle où les côtés sont donnés par les nombres naturels.

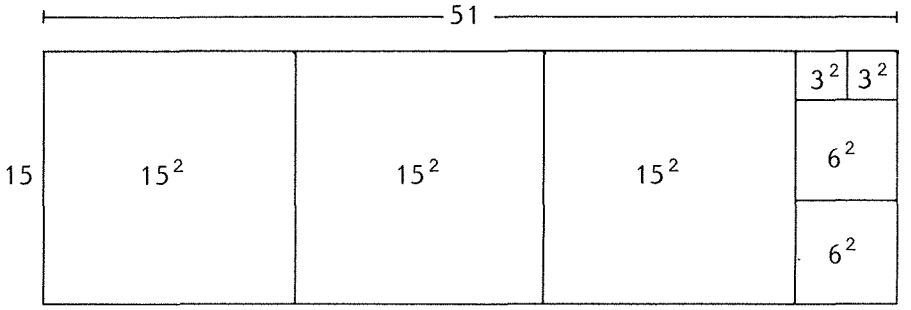


fig. 2

Comme conclusion on dit, que la proportion a/b présente un nombre rationnel.[1] Et ça - les élèves apprennent très vite - s'il y a une paire de nombres naturels, alors il existe toujours un DC et dans un sens c'est naturel que l'algorithme d'Euclide a le STOP.

Essayons maintenant répéter cette méthode géométrique à deux segments a et b, où a c'est le côté du carré et b la diagonale du carré.

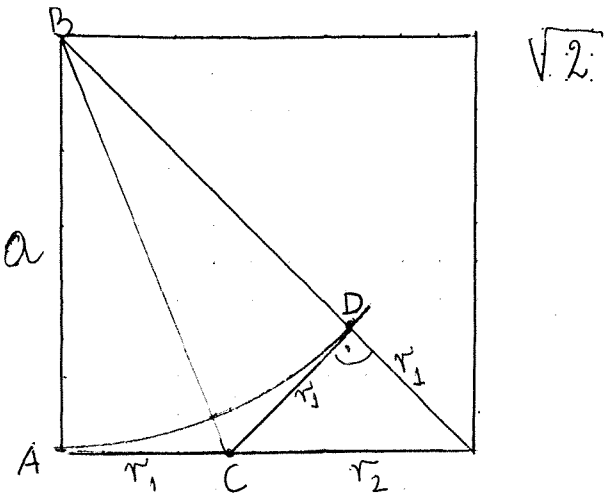


fig.3

On fait d'abord la différence b - a = r_1. Après il faut faire a - r_1. Mais on construit: CD = r_1, tel que $\angle$ D = 90°. Alors on a deux triangles rectangles ABC et DBC où $\angle$ A = $\angle$ D = 90° et AB = BD. Donc ils sont égaux et AC = CD = $\sqrt{1}$. Alors $a - r_1 = r_2$ et on peut dire que r_2 c'est la

1. Dans la langue polonaise, les mots 'rationnel' et 'mesure' possèdent le racine du mot commune.

diagonale du nouveau carré. Le pas suivant: $r_2 - r_1$ sera encore une fois la diagonale du carré moins le côté du carré. La situation est exactement la même qu'au début. Donc ce processus n'a pas de STOP. Le processus d'Euclide dans ce deux est différent: dans le premier il existe le STOP, dans le deuxième le STOP n'existe pas. D'ici la conclusion, que le nombre présenté par ce a/b est de différent genre que le nombre présenté par une pair de deux nombres naturels. C'est à dire a/b ∉ rationnel.

On peut montrer la même chose pour un côté du triangle equilatéral et son hauteur. Pour ça c'est mieux de prendre le losange.

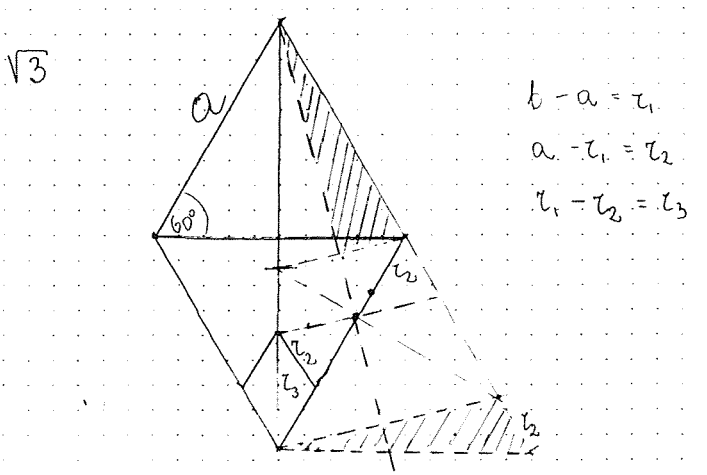


fig.4

Et ici la situation se répète. On voit, que dans ce cas aussi on n'a pas de STOP. Alors le nombre a/b ∉ rationnel.

Mais la plus belle configuration et aussi la démonstration qui est le plus convaincant, on obtient pour le pentagon régulier. Ici on voit plus clairement cette infinité de l'algorithme d'Euclide.

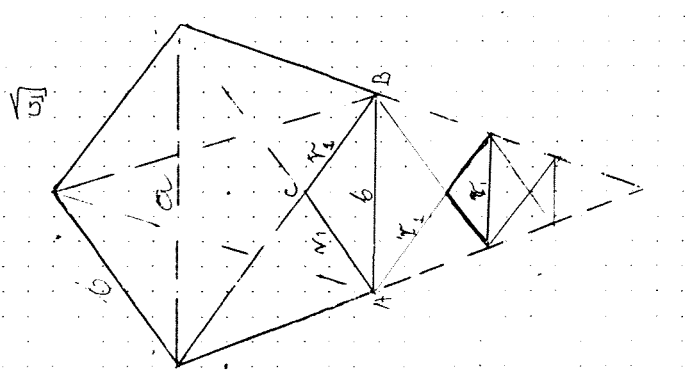


fig.5

Dans le pentagon régulier tout est symmétrique. Alors, la diagonale a moins le côté b nous donne r_1, qui est le côté du petit triangle ABC. On peut ajouter le nouveau pentagon. Et voilà nous avons la même situation. Jamais on a pas de STOP.

Pourquoi le micro-ordinateur? Je pense, que c'est très bon utile pour montrer ce processus, cette démonstration. On peut animer les images et ainsi donner l'impression de l'infinité, qui est plus proche aux enfants que seulement par un dessin.

On dit fréquemment qu'un ordinateur peut être utiliser comme une super projecteur. Dans notre cas c'est seulement au commencement du problème. On peut animer la projection et motiver les enfants d'une manière visuelle. Mais après une réflection viendra. Et en ce moment, c'était le début de mathématique en histoire de l'humanité. Rappelons que dans l'antiquité, le problème du nombre irrationnel et son résolution vers le fin du V siècle avant J.C., c'était le premier crise intellectuel.

Krystyna Dalek
Université de Varsovie
Warszawa/Pologne.

LAURA LAVIOSA

APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES ET MOYENS ELECTRONIQUES

MA relation portera sur le travail d'élaboration et d'expérimentation de l'usage des moyens électroniques dans l'enseignement des mathématiques bâti par le 'Groupe de recherche sur la didactique des mathématiques et sur la formation scientifique dans l'école obligatoire (6 - 14 ans)'.

INTRODUCTION DES CALCULETTES DANS L'ECOLE MOYENNE (11-14 ANS)

Après beaucoup de débats et d'expériences à l'intérieur du groupe (1979-1982) on a choisi d'introduire la calculette à partir de la fin de notre deuxième classe car on pense que, à cet âge, la technique des 4 opérations est suffisamment consolidée. Sa utilisation suit les mêmes principes d'introduction des autres habilités disciplinaires du projet génois:

a. A l'intérieur des unités didactiques tel que moyen pour connaître et approfondir les aspects les plus importants de la realité qui nous entoure.
b. Approfondissement technique pour fournir le prétexte d'une réflexion sur son fonctionnement intérieur (mémoire).
c. Dans notre troisième classe: encadrement historique, surtout pour ce qui concerne les conséquences de son introduction dans les activités de travail et le lien avec le computer.

En conséquence de ces considérations et par des continuelles revisions suggérées par le travail de classe et par des cours de ajournement pour les enseignants du groupe on a bâti le matériel utilisé aujourd'hui. Le matériel actuel déroule plus diffusément la deuxième et la troisième partie qui sont traitées dans la troisième classe.

Venons aux détails du travail dans les classes. Les élèves emploient les calculettes pour la recherche du partage pourcent (dans la deuxième année, dans le domaine de l'U.D. *Evolution du rapport homme-femme dans l'histoire*) en attirant leur attention sur la prévision de l'ordre de grandeur des résultats et l'approximation des nombres (par suppression ou par arrondissement). Donc, en introduisant des fiches de travail, on réflechit sur les calculs déjà effectués, sur les difficultés de battement, sur le temps employé pour taper plusieurs fois des nombres formés par beaucoup de chiffres et de la sur l'opportunité d'utilisation de la mémoire.

A ce moment on propose plusieurs exercices sur l'emploi de la mémoire:

— copier d'après le display dans la mémoire un nombre;
— rendre visible le nombre qui est dans la mémoire;
— effacer de la mémoire le nombre qu'on avait écrit pour en copier un

autre;
— utiliser la mémoire pour compléter rapidement un tableau de données.

Dans la troisième classe, à coté de l'U.D. 'Développement de la société industrielle', après avoir rappelé l'emploi de la mémoire, l'étude est étendue aux 'mémoires intérieures', pas directement accessibles aux usagers, les quelles remémorent le nombre tapé et la opération en attendant l'opération successive, au fin de mettre en fonction l'algorithme qui est à la base de la précédence des opérations. Sur ça, à l'aide de dessins schématiques, on propose des exercices pour prévoir ce qui 'arrive au dedans' et ce qui est écrit dans le display.

A travers une réflexion sur ce qu'on peut faire lorsque la calculette n'est pas programmée par la précédence de * et + on arrive à utiliser les parenthèses et à étudier le fonctionnement logique qui est derrière leur emploi dans les calculs des expressions et l'historicité de leur emploi.

Cet argument est examiné ainsi en détail car en Italie les expressions ont traditionnelement un poids considérable en comparison des autres arguments enseignés pendant les trois années d'école moyenne. C'est pourquoi que le groupe génois a choisi de remplacer par la qualité du matériel proposé, la surcharge d'exercice réiteratif du curriculum traditionnel.

A travers la quantité des langages proposés: graphes, flow-chart, parenthèses, vinculum, les élèves assimilent le concept de hiérarchie des opérations sans une définition explicite.

Chacun de ces langages a des propriétés caractérisantes:
— le 'vinculum' et le graphe éclaircissent l'ordre d'exécution;
— les parenthèses donnent une vision d'ensemble, mais elles créent des problèmes sur l'ordre d'exécution;
— le flow-chart met en succession temporelle les opérations qui vont être exécutées.

De plus, chaque langage a aussi une justification pratique: le 'vinculum' né au XVI siècle, lorsque les expressions sont devenues trop longues et compliquées, a été substitué par les parenthèses (au XVIII siècle) pour substituer les petites barres et pour rendre plus aisé le travail de l'imprimeur. Aujourd'hui quelques calculettes ont le symbole des parenthèses, mais seulement ( ) et non pas [ ], { }.

Donc, ce travail veut fournir conscience que quelques formalismes tiennent des conventions de tout genre, qui ont changé dans le temps. Dans l'étude des mathématiques il ne suffit pas de connaître les formalismes, mais il faut découvrir les structures logiques qui sont cachées par les formalismes.

INTRODUCTION DES CALCULETTES DANS L'ECOLE PRIMAIRE

Le projet du groupe pour l'école primaire voit en cinquième (10 ans) l'introduction des calculettes, telles qu'objet d'étude, c'est à dire 'machines à calculer'.

Le fil qui conduit le discours dans l'école primaire peut être la réponse aux naturelles curiosités des enfants à l'égard des objets et à l'égard de

leur fonctionnement.
L'étude des calculettes est précedée par l'étude de beaucoup d' autres machines à travers les questions:
— Comment sont-elles à l'intérieur?
— Comment fonctionnent-elles?
— Comment faisait-on lorsqu'elles n'existaient pas?
Pour l'école primaire il s'agit d'un projet total qui n'a pas seulement le but d'atteindre des habilités mathématiques, mais linguistiques aussi.

Le rôle linguistique engage pour cela beaucoup d'importance; d'abord par plusieurs occasions de stimulus de l'imagination (par exemple par le projet d'une machine inventée). ça offre aussi la possibilité d'explorer les représentations mentales des élèves sur les nouvelles technologies. Puis à travers les descriptions les plus rigoureuses, sur des machines plus complexes (connues pendant des visites à des industries locales) les descriptions demandent des élèments linguistiques plus complexes.

Particulièrement, pour ce qui concerne les calculettes, les procès examinés sont: mémoires intérieures, précédance des opérations, notation exponentielle. Mais l'exploration de la machine arrive surtout à travers un jeu: comparaison entre un enfant avec la calculette et son instituteur sans calculette, sur la vitesse et la précision du calcul. Ce jeu est enrichi de plus en plus de règles pour justifier si une réponse peut être acceptées ou non (surtout pour ce qui concerne l'approximation).
S'entretenir sur ces aspects développent dans les enfants des habilités mathématique telles que:
— calcul mental rapide;
— maîtrise des ordres de grandeur;
— maîtrise des propriétés des opérations arithmétiques;
— lecture des nombres;
— distinction entre nombres et chiffres;
mais aussi des habilités linguistiques dans la régistration de la démarche du jeu et de ses règles (qui demandent une taxe complexe: 'si ...alors').

Les résultats les plus importants dans l'école primaire, concernent surtout la conscience des algorithmes existants à l'intérieur de la calculette dès sa construction, sur lesquels l'usager ne peut plus intervenir, mais qu'il peut utiliser au fond s'il en connaît très bien les règles.

INTRODUCTION DE MACHINES PROGRAMMABLES (MP) DANS L'ECOLE MOYENNE

Pendant l'année scolaire 83/84 le groupe a débattu longtemps la possibilité de compléter le cadre culturel existant, par l'introduction, dans quelques classes, de MP pour exécuter concrètement quelques-uns des flow-charts déjà construits; donc pas pour enseigner à faire un programme, mais pour faire comprendre comment fonctionne un programme.
Les exemples choisis pour la programmation correspondent aux exigences suivantes:
— la simplicité des problèmes scientifiques ou professionels

habituellement résous par les MP (par exemple: exécution rapide d'une séquence de calculs);
— la possibilité de réfléchir sur des aspects algébriques des problèmes de notre troisième classe (variable, constantes, signification de fonction).

Le Basic qu'on présente aux élèves est réduit au minimum, cependant les instructions sont standards et avec elles on peut construire des programmes bien engageants aussi.

En la comparant avec la calculette la MP permet de constater que la possibilité d'intervention de l'usager sur la machine est bien supérieure et que les stratégies de résolution peuvent être transformées dans un programme que la machine exécutera.

Le travail sur les MP en eloignant le moment de la création de la stratégie de résolution du problème, du moment de l'exécution, en offrant un support concret lorsqu'en lisant les instructions du programme il s'arrête où il y a une faute et la signale, lorsqu'il donne la possibilité de suivre step by step les opérations, permet aux enseignants de mieux travailler avec les élèves sur des concepts 'durs' comme la stratégie résolutive d'un problème ou le concept de variable ou de fonction.

Laura Laviosa
Ecole L.Milani
Génes/Italie.

GREGOR EBNETH/GISELA HEINK/REINHOLD SPYRA

LA CONCEPTION DU NOMBRE RATIONNEL - UNE RECHERCHE EMPIRIQUE

LA METHODE, LES RESULTATS ET LEUR DISCUSSION

RAPPORT sur une recherche empirique dans le cadre d'une recherche en cours, destinée à *l'Analyse des difficultés lors de la résolution de problèmes mathématiques* et à laquelle participent des scientifiques de matières diverses de la Freie Universität Berlin et de la Technische Universität Berlin (G.Heink, U.Lehnert, G.Lessner, W.Reitberger).
Ce projet de recherche est supporté financièrement par le 'Zentralinstitut für Unterrichtswissenschaften und Curriculumentwicklung' de la Freie Universität Berlin.

LA POSITION DU PROBLEME ET LES QUESTIONS ET LES HYPOTHESES QUI EN RESULTENT

On a souvent pu observer que la compréhension du nombre rationnel pose aux élèves de grands problèmes. Des recherches empiriques de K.Hart [3] et [4], de K.Hasemann [5] et de R.Post, I.Wachsmuth, R.Lesch et M.J.Behr [6] et [7] reposent sur l'analyse de tests spécialement construits et sur les conclusions de l'observation des élèves et d'interviews avec eux. Elles ont montré de grandes divergences entre la conception du nombre rationnel que les enseignants croyaient avoir transmise et celle que les élèves ont effectivement acquise.

L'objet de notre recherche était de retenir systématiquement ces divergences. La question initiale des dimensions de difficultés lors de la résolution de problèmes mathématiques, de leur enrégistrement qualitatif et quantitatif [1] et [2], fut limitée à la question des différences structurelles qui marquent la compréhension du nombre rationnel. Il s'agissait d'analyser si les aspects qui, pour l'enseignant, contribuent principalement à la structuration de la conception du nombre rationnel, sont également reconnus comme essentiels par les élèves et en reçoivent la même pondération.

L'étude intensive des recherches des dernières années, dont il existe d'excellentes documentations [8] et [9], nous a mené à choisir comme conceptions de base les termes 'fraction' (relation partie-partie entière), 'quotient', 'rapport' (relation partie-partie) et 'probabilité'. En classe, ces conceptions sont traitées comme des états ou des opérations, en relation avec certaines réalisations (grandeurs physiques telles que le kilomètre ou le kilogramme, représentations géométriques, textes). Les représentations géométriques se divisent en: disque, rectangle, bande, segment (axe des nombres). L'ordre et l'équivalence jouent un rôle important. C'est exprès que nous avons exclu les opérations arithmétiques (simplification, addition, multiplication). A ce sujet, de

nombreuses recherches existent déjà maintenant.
Le schéma des catégories (fig.1) représente le résultat de l'analyse structurelle de notre propre compréhension du nombre rationnel.

A: Type du problème (état-opérateur)	? $\xrightarrow{0}$ p.f. partie entière? A_1	p.e. $\xrightarrow{?}$ p.f. opérateur? A_2	p.e. $\xrightarrow{0}$? partie fractionnaire? A_3
B: Représentation du nombre rationnel	représentation géométrique B_1	grandeurs B_2	nombres B_3
E: Questions relatives à l'unité	partie entière? ou bien dans l'énoncé E_1	partie entière donnée qu'indirectement E_2	
T: Forme de l'énoncé	texte T_1	pas de texte, ou en quantité négligeable T_2	
V: Conception de la partie	partie-partie= rapport V_1	partie-partie entière = fraction V_2	quotient/ probabilité V_3
S: Nombre d'étappes de résolution	une étappe S_1	plusieurs étappes S_2	plusieurs étappes avec comparaison S_3

fig.1

B_1 peut être divisé en: B_1 a: disque;
B_1 b: rectangle;
B_1 c: bande;
B_1 d: segment (axe de nombre).

Ce schéma des catégories regroupe les hypothèses. Le but de la recherche empirique est de voir, si ce schéma des catégories correspond vraiement à la compréhension que les élèves ont de la conception du nombre rationnel.

DESCRIPTION DU PLAN DE RECHERCHE

Le test
Le test que nous avons assemblé comprend 60 exercices, extraits en partie du *'CSMS Mathematics Test'* de la National Foundation for Educational Research [3], du *'Assessment of Rational Number Concepts'* et du *'Assessment of Rational Number Relationships'* développé par la National Science Foundation [6] et [7] et de différents livres scolaires. Ces exercices ne vérifient que la compréhension du nombre rationnel et non pas

la technique des opérations arithmétiques. A quelques exceptions près, ils se limitent à des nombres rationnels positifs, inférieurs à 1, ayant 2,4,8,3,6,5,10 [7] et 12 comme dénominateur. Les difficultés de compréhension du texte sont minimisées par une expression simple et claire. Les exercices d'un énoncé uniquement numérique n'ont été rajoutés que pour but de contrôle (p.e.: $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{2}$?). Nous avons veillé à ce que les exercices soient si possible liées au contexte. Les lignes auxiliaire et les indications servent exclusivement à l'unicité de la solution. Les exercices ont été choisis exprès de manière à pouvoir utiliser le test de la 6ème à la 10ème année scolaire. (Les nombres décimaux et les pourcentages n'ont pas été considérés). Dans quelques exercices nous avons posé des questions à choix multiple. Tous les exercices ont été classés dans une des catégories, p.e. (fig.2)

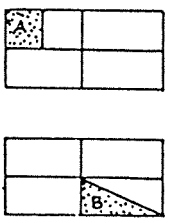
Exercice 5:

Mets une croix:

A est plus grand que B ☐

A est plus petit que B ☐

A a la même grandeur que B ☐



$A_2\ B_{1b}\ E_1\ T_2\ V_2\ S_3$

Exercice 14:

M. Brummer gagne 2400 DM par mois. Il dépense $\frac{1}{6}$ de son salaire pour le loyer. Combien paye-t-il de loyer?

$A_3\ B_2\ E_1\ T_1\ V_2\ S_1$

fig.2

A la construction du test, nous avons veillés à ce que toutes les combinaisons sensées de catégories soient représentées.

Réalisation des tests

Pour vérifier notre schéma hypothétique des catégories, nous avons réalisé un premier test en octobre 1984 avec 90 élèves à Berlin-Neuköln et un second test en avril 1985 avec 218 élèves à Berlin-Spandau. Il s'agissait dans les deux cas de la 9ème année scolaire d'une 'Gesamtschule' berlinoise (école regroupant des élèves de tous les niveaux).

Le test fut divisé en deux parties; dans chacune d'elles se trouvaient des exercices correspondants, c'est à dire de même catégorie et de même degré

supposé de difficulté. Pour chaque partie les élèves avaient une période de 45 minutes. Les exercices furent présentés dans un ordre randomisé, différent pour chaque élève pour éviter les effets d'apprentissage.

Une répétition antérieure du sujet a été omise exprès. Les élèves avaient le droit de se servir d'une règle. La contrainte du temps a pratiquement pu être exclue et les élèves savaient que les résultats n'influenceraient pas leur notes. En dehors de l'enseignant, au moins un membre du groupe de recherche fut présent pendant le test dans chacun des cinq groupes.

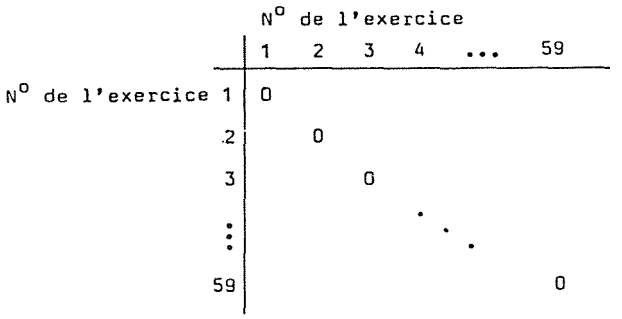
Interprétation des résultats

Les exercices furent classifiés de la façon suivante:
résolu correctement: 0
solution fausse ou exercice non traité: 1
(Les exercices non traités sont marqués de manière spéciale.)
Pour l'interprétation des données, nous avons utilisés de diverses méthodes de 'l'analyse des clusters' [10] et de l'écholonnement multidimensional' [11].
Voici la matrice des données pour la seconde réalisation du test 1):

N° de l'élève	N° de l'exercice						
	1	2	3	...	57	58	59
1	0	1	1		1	1	0
2	1	0	1		1	1	1
3							
⋮	⋮		⋮	...		⋮	
219							

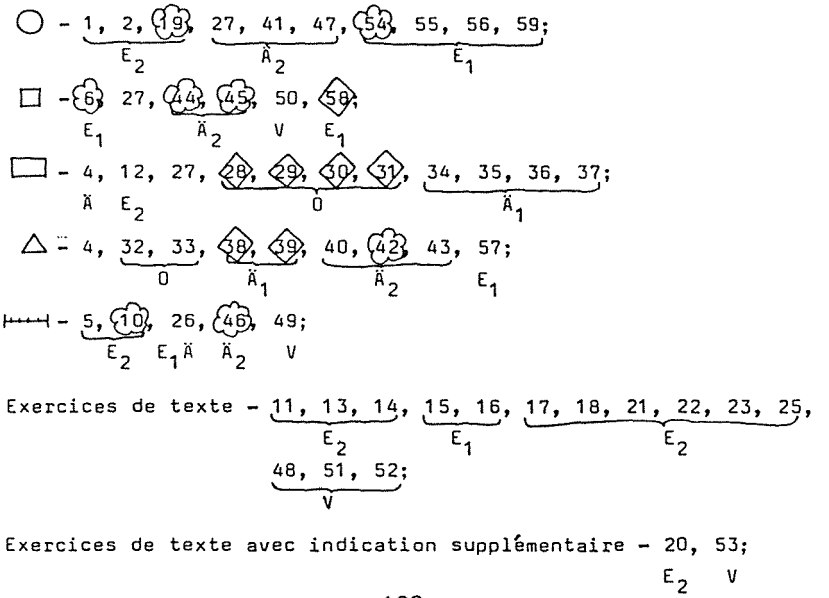
L'analyse des clusters (Ward, Complete Linkage) a fourni trois clusters d'élèves. Les élèves faisant partie d'un même cluster ont manifesté une conduite semblable à la résolution des exercices (quant à l'aspect solution correcte ou non).

Nous avons examiné les solutions des exercices séparément pour chaque cluster. A ce propos, nous avons pour chaque élève comparé tous les couples d'exercices possibles quant à la coïncidence de leur résolution (0 ou 1). Nous avons attribué l'indice 0 aux couples identiques et l'indice 1 aux couples différents. Puis nous avons pour chaque couple d'exercices additionné les indices de non-coïncidence de tous les élèves (a_{ij} avec $a_{ij} = a_{ji}$). Nous avons obtenu une matrice symmétrique de 'non-coïncidence' des résultats que nous avons interprétée comme matrice des dissemblances des exercices.



La procédure de l'échelonnement multidimensional (MDS, MINISSA) fait correspondre aux dissemblances des distances et représente les exercices dans un plot comme points d'un espace de dimension n. Nous avons choisi l'interprétation d'un plot dans un espace de dimension 2 [14].
(Dans la seconde partie, M. Gregor Ebneth présentera un modèle mathématique différencié pour l'analyse des données, qui a été développé spécialement à nos fins et que nous allons mettre à l'épreuve prochainement.)

Premières interprétations des plots
Comme les résultats du test nous sont disponibles que depuis peu de temps, nous nous trouvons en ce moment encore dans la phase d'interprétation des clusters. Nous aimerions esquisser ici les premiers résultats.
Les exercices ont été présentés sous la forme suivante:



Exercices ne pouvant être classés - 3,7,8,9,24.
Les symboles correspondent aux types d'exercice suivants:

E_1 - Partie entière demandée directement
E_2 - Partie entière demandée indirectement
O - Opérateur demandé
$\ddot{A}_1$ - Transformations équivalentes (l'exercice peut également être résolu par simplification).
$\ddot{A}_2$ - Transformations équivalentes
V - Problèmes de propositions
$\clubsuit$ - Nombre des parties supérieur à huit
$\diamond$ - Nombre des parties supérieur à huit, mais présentation claire par groupement.

Dans chaque groupe d'élèves, nous pouvons distinguer dans la configuration de base deux clusters d'exercices. Nous les nommons cluster "+" et cluster "-". Les exercices du cluster "+" sont considérés comme plutôt faciles et ceux du cluster "-" comme plutôt difficiles. Quant à la capacité des élèves, le groupe 1 représente les élèves forts, le groupe 3 les moyens et le groupe 2 les faibles. Chaque exercice du cluster "+"2 se trouve aussi dans le cluster "+"3 et dans le cluster "+"1. Les exercices du cluster "+"3 sont aussi dans le cluster "+"1.
La relation des ensembles est donc la suivante:

cluster "+"2 c cluster "+"3 c cluster "+"1

Pour les clusters "-", si un exercice est dans le cluster "-"1, il est aussi dans les clusters "-"3 et "-"2. Un exercice du cluster "-"3 est aussi dans le cluster "-"2.
Nous avons donc la relation inverse:

cluster "-"1 c cluster "-"3 c cluster "-"2.

Ceci prouve une bonne sélectivité des exercices.
La question pour nous était donc de décider si nous devions considérer la droite du cluster "+" du cluster "-" comme axe de difficulté. Or cette axe n'indique que la difficulté absolue à la résolution d'un exercice mais ne dit rien sur la difficulté substantielle. D'autre part nous constatons que pour tous les groupes d'élèves on peut trouver sur les plots une ligne de séparation commune de manière à former deux facettes (la facette "o" et la facette "*").
Chaque facette regroupe des types d'exercice:

Groupe d'éléve	Facette "o"	Facette "*"
1	Type V Exercices ne pouvant être classées	Les autres exercices
3	Type V Type $\ddot{A}$, traité comme type V Type E_2	Type E_1 (Type E_2) Type O
2	Type V Type $\ddot{A}$, traité comme type V Type O Type E_2 Type $\ddot{A}_2$	Type E_1

Pour les facettes, on a de même:
Si un exercice se trouve dans la facette "o"1, il est également dans les facettes "o"3 et "o"2.
En somme, quand on va du groupe d'élèves 1 au groupe d'élèves 3, il y a des exercices qui se déplacent de la facette "*" à la facette "o", mais il n'y en a pas dans le sens contraire. Nous supposons que les facettes "o" et "*" caractérisent des niveaux de difficulté différents.

Nous vous prions de ne pas considérer ces résultats comme définitifs. Quelques parties en devraient être vérifiées et modifiées, ce qui pourrait se faire par une codification différente. Or nous ne voulons pas entrer dans les détails ici en maintenant.

UN MODELE MATHEMATIQUE SPECIALEMENT DEVELOPPE POUR L'INTERPRETATION DES DONNEES D'UN TEST SUR LA BASE DU MDS

La méthode de l'écholonnement multidimensionnel [12] (MDS) peut être appliquée si, dans un test de n exercices, on a pour tout couple d'exercices (i,k) un nombre réel α_{ik} qui mesure la correlation des exercices i et k. Ces nombres doivent de plus satisfaire aux axiomes d'une métrique:

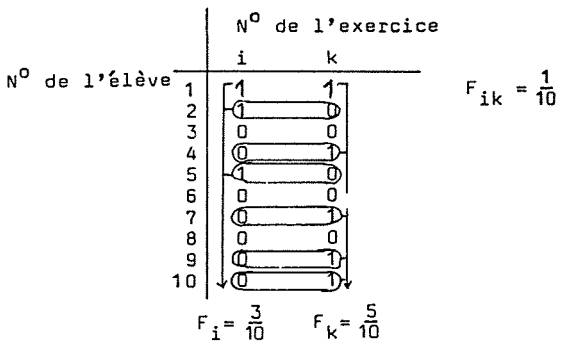
$$(\alpha_{ik} \geqslant 0, \alpha_{ik} = 0 \iff i = k, \alpha_{ik} = \alpha_{ki}, \alpha_{ik} \leqslant \alpha_{ij} + \alpha_{jk})$$

et possèdent ainsi les propriétés d'une distance. On essaie alors d'obtenir à l'aide du MDS une configuration géométrique de dimension 2 ou 3 de l'espace métrique en question en préservant le mieux possible les distances.
Pour tout test, on peut en principe définir deux sortes de mesures: une 'mesure de dissemblance' γ_{ik} et une 'mesure de difficulté' σ_{ik}. Le chemin habituel d'obtenir une mesure de dissemblance est de faire estimer les élèves le degré de dissemblance selon un barème, et ceci couple d'exercice par couple d'exercice. Cette méthode est difficile dans le cas général et elle n'est donc pratiquable que pour des petits échantillons.

C'est pour surpasser cette difficulté que nous appliquons un procédé simple qui nous déduit les mesures de dissemblance γ_{ik} directement de la résolution par les élèves.
Considérons l'exemple suivant:

1: faux
0: correct

F_i : Fréquence des résiltats faux pour l'exercice i;
F_k : Fréquence des rsultats faux pour l'exercice k:
F_{ik} : Fréquence des résultats faux pour i et k simultanément.



On suppose que plus la résolution des exercices i et k par le même élève diverge, plus la dissemblance entre ces deux exercices est grande. Dans l'exemple, ceci arrive dans six cas sur dix, et nous pouvons ainsi caractériser la dissemblance par le nombre $\frac{6}{10}$. On voit que ce nombre peut être calculé par:

$$F_i+F_k-2.F_{ik} = 0{,}3 + 0{,}5 - 2 \,.\, 0{,}1 = 0{,}6.$$

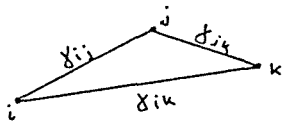
Cette caractérisation nous mène immédiatement à la définition suivante de la mesure de dissemblance entre les exercices i et k:

$$\gamma_{ik} \underset{\text{p.déf.}}{=} \frac{1}{2}(f_i + f_k - 2 \,.\, f_{ik}) \qquad (1)$$

ou f_i, f_k et f_{ik} désignent les probabilités d'un résultat faux.

(On choisit le facteur $\frac{1}{2}$ pour des raisons mentionnées plus bas.)

(Pour la transition des fréquences des résultats faux aux probabilités d'un résultat faux et pour le classement des élèves en groupe de même capacité, on se rapportera à [13].) On vérifie facilement que le γ_{ik} défini au (1) satisfait aux axiomes d'une métrique. La dissemblance définie ainsi a donc les propriétés d'une distance entre deux points. Si l'on conçoit les exercices comme points et les mesures de dissemblances comme distance euclidiennes, le MDS mets à notre disposition une configuration géométrique de dimension 3:



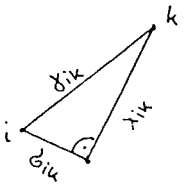
Nous essayons de bien y représenter les γ_{ik} par des distances euclidiennes, car se sont elles que nous percevons lors de la considération optique d'une configuration géométrique de points. Nous n'appliquons pas encore la méthode du MDS. En effet on peut, comme nous l'avons vu, indiquer une seconde distance σ_{ik}. Cette mesure de difficulté sera définie simplement par la différence des probabilités f_i et f_k d'un résultat faux:

$$\sigma_{ik} \underset{\text{p.déf.}}{=} \frac{1}{2} \mid f_i - f_k \mid \qquad (2)$$

Il n'est pas difficile de vérifier que les σ_{ik} ainsi définis satisfont aux axiomes d'une métrique.

On peut supposer qu'il existe en général une relation entre les deux mesures γ_{ik} (dissemblance) et σ_{ik} (difficulté). Il est pour cela souhaitable de conçevoir - au delà des deux configurations qui ne respectent soit que γ_{ik}, soit que σ_{ik} - une méthode qui utilise les deux mesures à la fois sans changer le contenu en information ni de γ_{ik}, ni de σ_{ik}. On cherche en somme une configuration qui contiendrait de manière séparable les deux informations (dissemblance et difficulté) et qui laisserait reconnaître la relation des deux mesures entre elles au cas où il y en a une. Une telle méthode de représentation simultanée de γ_{ik} et de σ_{ik} dans une seule configuration peut être indiquée: d'une part on peut choisir

librement un système de coordonnées car les γ_{ik} ne contiennent que de l'information sur la distance des objets (exercices) entre eux. Nous choisissons un repère orthogonal ($x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$) comme système de coordonnées qui sera déterminé à une translation ou une rotation près, celles-ci laissant invariante l'orthogonalité. D'autre part il est en principe toujours possible de décomposer γ_{ik} en deux composantes orthogonales dont l'une est σ_{ik}.



On définit ainsi une nouvelle mesure λ_{ik}:

$$\lambda_{ik}^2 = \gamma_{ik}^2 - \sigma_{ik}^2$$

$$\lambda_{ik} = \sqrt{(f_i - f_{ik}) \cdot (f_k - f_{ki})}$$

Pour notre problème, il n'est pas nécessaire d'attribuer à λ_{ik} une signification substantielle. (Par contre, λ_{ik} a une signification mathématique: c'est la moyenne géométrique de $(f_i - f_{ik})$ et $(f_k - f_{ik})$. De même γ_{ik} est la moyenne arithmétique et σ_{ik} la demi-différence de ces deux grandeurs:

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2}(a+b);\ \sigma_{ik} = \frac{1}{2}|a-b|;\ \lambda_{ik} = \sqrt{a.b}. \qquad (3)$$

C'était pour obtenir la correspondance formelle de γ_{ik} avec la moyenne arithmétique et de λ_{ik} avec la moyenne géométrique qu'on a introduit le facteur $\frac{1}{2}$ dans les définitions (1) et (2).) La décomposition en deux composantes est toujours possible, et la définition de λ_{ik} est sensée car on a toujours $\gamma_{ik} \geq \sigma_{ik}$. La configuration déterminée par σ_{ik} peut être representée sans restrictions sur une droite (en dimension 1): pour cela on ordonne et numérote les exercices selon leur probabilité décroissante d'un résultat faux, ce qui est toujours possible.

Pour tout $i<k$ on a: $f_i \geq f_k$ (4)

Dans ce cas $\sigma_{ik} = \frac{1}{2}(f_1 - f_k)$

Pour tout $1<j<k$ on a donc $\sigma_{ik} = \sigma_{ij} + \sigma_{jk}$ (5)

Exemple: N° de l'exercice

1	2	3	....	n
$f_1 = 0,9$	$f_2 = 0,8$	$f_3 = 0,5$	....	$f_n = 0,01$

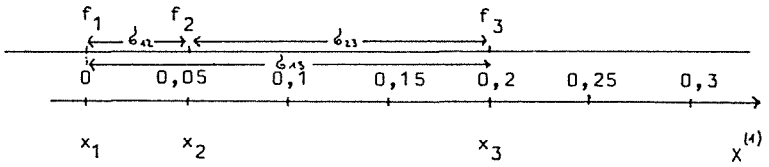
$\sigma_{12} = \frac{1}{2}(f_1 - f_2) = \frac{1}{2}(0,9 - 0,8) = 0,05$

$\sigma_{23} = \frac{1}{2}(f_2 - f_3) = \frac{1}{2}(0,8 - 0,5) = 0,15$

$\sigma_{13} = \frac{1}{2}(f_1 - f_3) = \frac{1}{2}(0,9 - 0,5) = 0,2$

$\sigma_{12} + \sigma_{23} = 0,05 + 0,15 = 0,2 = \sigma_{13}$

La situation est représentée dans la figure:



On voit qu'on peut choisir la droite des σ_{ik} comme axe $x^{(1)}$ du système. Les coordonnées $x^{(1)}$ doivent alors être définies par:

$x_1 = 0$

$x_k = \sigma_{ik} + x_i$

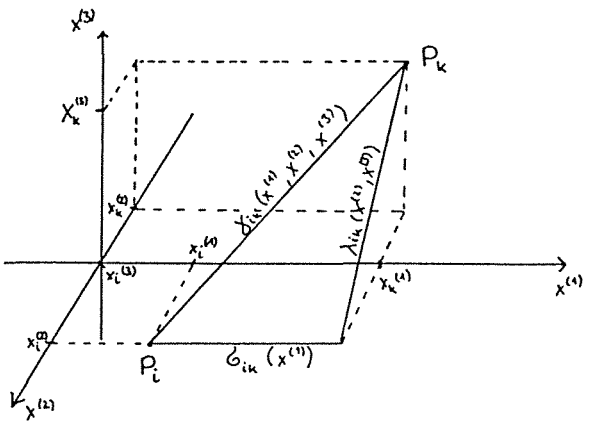
Dans l'exemple:

$x_1 = 0$

$x_2 = \sigma_{12} + x_1 = 0,05 + 0 = 0,05$

$x_3 = \sigma_{13} + x_1 = 0,2 + 0 = 0,2$ ou bien

$x_3 = \sigma_{23} + x_2 = 0,15 + 0,05 = 0,2$



On obtient les coordonnées $x_i^{(2)}$ et $x_i^{(3)}$ par le chemin habituel, en minimisant la fonction:

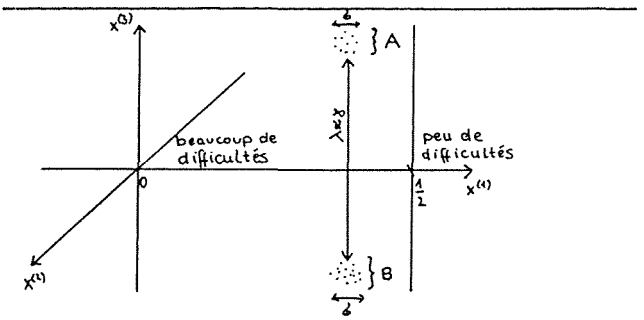
$$F(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \ldots x_n^{(2)}, x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \ldots x_n^{(3)}) =$$

$$= \sum_{i,k} (\lambda_{ik} - \sqrt{(x_i^{(2)} - x_k^{(2)})^2 + (x_i^{(3)} - x_k^{(3)})^2})^2 \qquad (6)$$

(La sommation se fait sur tous les couples (i,k) avec $i < k$.)

On cherche donc les $x_i^{(2)}$ et les $x_i^{(3)}$ de manière à avoir pour tout i:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i^{(2)}} = 0 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial x_i^{(3)}} = 0. \qquad (7)$$



Si par exemple on obtient avec cette méthode la configuration représentée dans la figure au-dessus, on peut lui donner l'interprétation suivante:

1. Les exercices des clusters A et B ont le même degré de difficulté ($\sigma << 1$ et pour tout i $x_i^{(1)}$ = const.)
2. Les exercices du cluster A sont dissemblables aux exercices du cluster B ($\lambda \approx \gamma$) tout en ayant le même degré de difficulté.
3. Entre eux, les exercices du cluster A sont semblables et ont la même difficulté. Ceci est également vrai pour ceux du cluster B.

Finalement nous tenons à remarquer que cette méthode n'est pas encore assez expérimentée. Elle est de plus à critiquer pour les hypothèses très simples et grossières en ce qui concerne les termes 'dissemblance' et 'difficulté'. Nous la regardons comme possibilité d'obtenir un aperçu plus profond de l'esprit mathématique de nos élèves et de pouvoir ainsi mieux décider quelles connaissances mathématiques sont nécessaires aux élèves pour améliorer leur capacité. Seule l'expérience future continuelle et le perfectionnement sauront décider si la méthode proposée peut être maintenue ou bien est à refouler.

Gregor Ebneth/Gisela Heink/Reinhold Spyra
Freie Universität Berlin
Berlin/West-Germany.

REFERENCES

[1] Heink, G., U.Lehnert, W.Reitberger: *Dimensions of difficulty in solving geometrical problems*, Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematical Education (PME 6), Antwerp 1982.

[2] Heink, G., C.Wichrowski: *Mathematical models - a helpfull instrument for empirical investigation?* PME 7, Israel 1983.

[3] Hart, K.M.: *Childrens Understanding of Mathematics 11 - 16*, London, Murray 1981.

[4] Hart, K.M.: *Ratio, Children's Strategies and Errors.*

[5] Hasemann, K.: *Über die Schwierigkeiten von Hauptschülern bei der Bruchrechnung*, Beiträge zum Mathematikunterricht, 1980.

[6] Behr, M.J., R.Lesh, T.R.Post, E.A.Silver: *Rational Number Concepts*, in: Lesh, R., M.Landau: 'Acquisition of Mathematics Concepts and Processes', New York 1982.

[7] Behr, M.J., I.Wachsmuth, Th.R.Post, R.Lesh: *Order and Equivalence of Rational Numbers*, Journal for Research in Mathematics Education, November 1984, vol 15, nr 15 and January 1985 vol 16 nr 1.

[8] Suydam, M.: *Review of Recent Research Related to the Concepts of Fractions and Ratio*, PME 2, Osnabrück 1978.

[9] Dokumentation: Literaturnachweise 3. Quellensammlung zu Didaktischer Informationsdienst Mathematik, Thema: Proportion, B.Andelfinger, Landesinstitut für Curriculumentwicklung und Weiterbildung, Neuss, 1982.

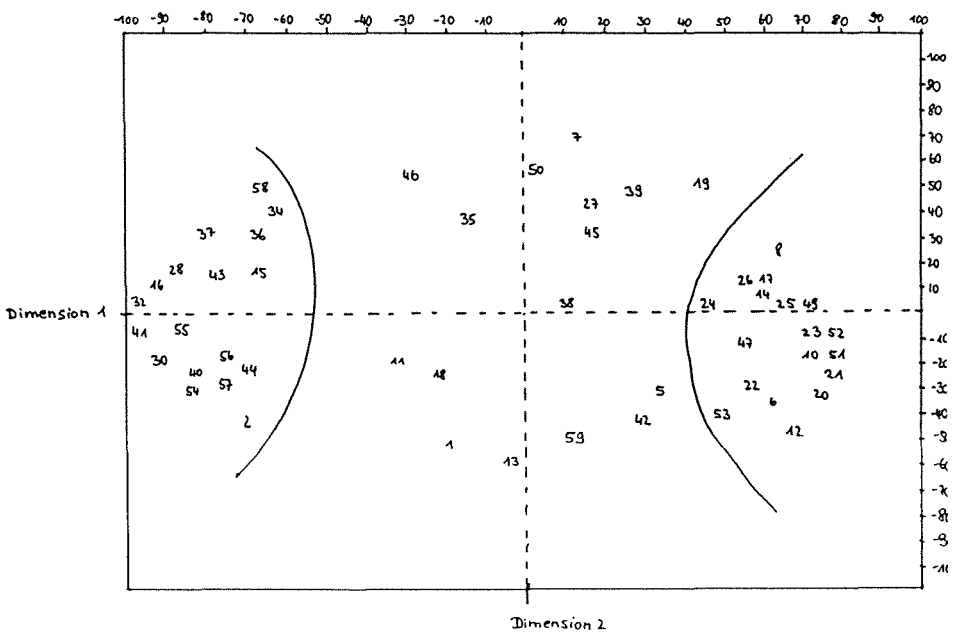
[10] Späth, H.: *Cluster-Formation und -Analyse, Theorie, Fortranprogramme und Beispiele*, München 1983.

[11] Borg, I.: *Anwendungsorientierte Multidimensionale Skalierung*, Berlin 1981.

[12] Kruskal, J.B.: *Nonmetric Multidimensional Scaling: Numerical Method* in Psychometrika, vol 29, nr 2, June 1964.
Multidimensional Scaling by Optimizing Goodness of Fit to a Nonmetric Hypothesis, vol 29, nr 1, March 1964.

[13] Reitberger, W.: *Empirische Validierung von Lernzielen durch mehrdimensionale Skalierung.* In Dörfler, W.: 'Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik. Verlag Hölder-Pichler, Tempsky, Wien 1985.

[14] Exemple d'un plot:
(Le groupement des exercices a été effectué par nous).



TERESA NAVARRO DE MENDICUTI

WHY ERROR PERSIST IN OPERATIONS ON FRACTIONS ? DO TEACHERS HAVE DIFFERENT OWN PURPOSES?

THERE has been a large research effort aimed at finding out how children acquire mathematical understanding and explaining the difficulties encountered over the past 25 years.

Such research has given us a clear picture of how children learn many aspects of Mathematics: early number and numeration, whole number algorithm, decimal and common fraction concepts and operations which provides a firm basis for developing programs of instruction to achieve those aims. At the same time, research and development on general curriculum design, the needs of the classroom and so on, has provided a structure in which of this understanding research can be set.

In turn, this allows the construction of textbooks and particular lessonplans to develop the understanding in pupils. Yet we all know that the desired endresults are still not achieved, which interferes with the clear understanding of the needs of mathematical education - the teacher and the pupil with the well-developed procedures for implementing them.

Curriculum development

As a consequence, the focus in the curriculum has changed from the acquisition of knowledge skills to the ability to understand and to apply such skills.

Social conception of the classroom has changed too:
pupil as a recipient → pupil as a discusser, discoverer, etc.
teacher as provider → teacher as facilitator.

Implementation by teachers

About the teachers, we need to consider:
— their beliefs concerning mathematical topics: which ones are important, which notions should be developed and in what order, etc.;
— their beliefs concerning the aims (that I call 'own purpose'): to cover the program, to prepare pupils to pass examination, the student's cumulative knowledge or to increase the student's ability to think;
— how to interpret the official curriculum.

We also need to consider the school situation as well as the social situation in which teachers have to implement the mathematical curriculum.

Pupil's construction of mathematical knowledge and understanding.

Now, how errors persist in operations on fractions?

This topic has been already considered by several researchers with different results. But what about the 'way to proceed' the curricular materials? 'Anyone who has observed how the same mathematical skills are taught in different classrooms has seen that each classroom

seems to operate differently from the others' (Romberg 1984). This differences are more important when teachers are trying to get different ends: to cover a program, to pass an exam, etc.
We know enough about this topic since many researchers have already worked on it, developing different theories, for example Piaget, Hunting (1983, PME Israel), Streefland (1984, PME Sydney), Kathleen Hart (1985, Mexico), Lesh (1983, PME-NA Montreal).
Then, looking at the needs of the classroom, we have applied those results in designing activities for teaching the addition of fractions. For example, we have taken into account Hunting's statement that knowledge of fraction equivalence is necessary for mature understanding for rational numbers.

In this paper we will speak about a non formal but real experience with two schoolgroups of 40 children (12/13 years) with the same background and two teachers with different 'own purposes' to teach: although they know the general goals of teaching maths.

Teacher A was interested in the student's cumulative knowledge; teacher B was interested in increasing the student's ability to think. The topic was addition on fractions. To test the results, pupils were asked to solve 5 additions.
Results were as follows:

Mistakes	0	1	2	more than 2
Teacher A	20%	25%	20%	35%
Teacher B	50%	25%	12%	13%

Mathematics promotes the mind-provided that it is taught and learned appropriately (Polya 1980) but it happens that teacher's behaviour is controlled by other 'hidden purposes'.

During that experience we asked wrong or inappropriate questions, but with the interaction between the 'researcher' and the pupils, that occurs now, we are able to modify our questions to get the underlying reasons, rather than superficial causes.
The framework we need to explain the behaviour of pupils has evolved from a simplistic description towards one which takes into account developmental aspects and hence towards a constructivist one which views the pupil as constructing mathematical knowledge.
Now I would like to call your attention to the teacher's beliefs concerning the aims.
Conclusions:

— Since objectives are so important from the beginning to design any teaching it is essential to keep them in mind all along our teaching.
— Increasing the student's ability to think is one of the best goals in teaching education.

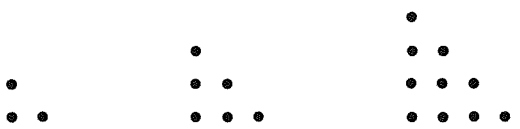
Teresa Navarro de Mendicuti
Colegio Frances Pasteur
Naucalpan/Mexico.

MICHELE PELLEREY

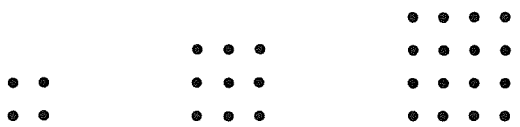
GEOMETRY AND COMPUTERS: DANGERS AND POSSIBILITIES

I WOULD like to analyse briefly some theoretical questions arising from recent developments in the teaching of geometry through the computer. In doing this, I think it useful to begin with a comment about the Pythagorean approach to geometry.

The model used by Pythagoras to describe concrete objects, forms and movements was based on the natural numbers, that is on the intuition of discreteness. A segment was formed by material points, conceived like grains or atoms, that we could count. The triangular forms were represented by triangular numbers:



The square forms by squared numbers:



and so on.

He thought that we could analyse and describe the world through a discrete model. However, inside the Pythagorean community someone found that this model was inadequate. This man could falsify the general hypothesis with a very substantial piece of evidence: the side and the diagonal of the square cannot have a segment, however little as a common measure unit. That means that there is no material or finite point to use like a brick to build up the two segments.

Plato, in the Menon, seems to have shown us the path of the discovery. He discussed in the Dialogue a closely related question: how to find a square exactly the double of a given one.

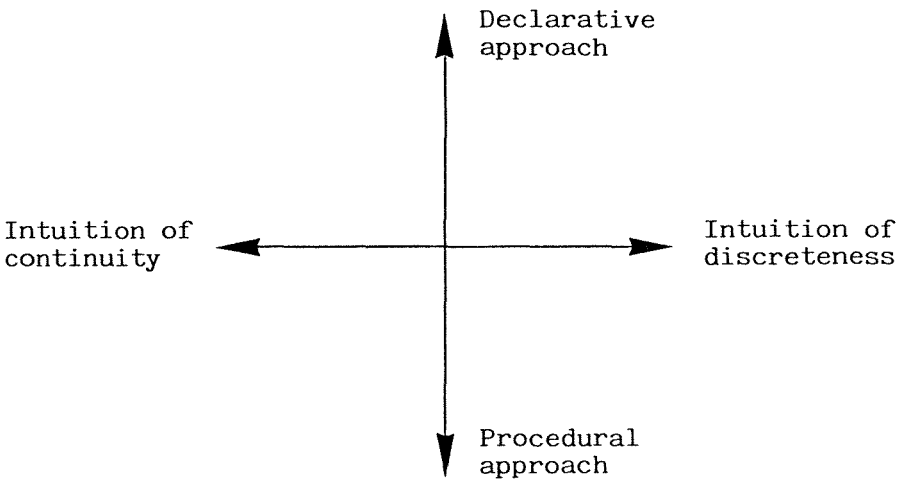
After that discovery, discussion in the philosophical community was violent, as the arguments against movement proposed by Zeno show us. If we accept a continuous model for describing space and movement, he argued, then we cannot explain several wellknown situations.

Little by little, however, the geometrical model based on the concept of

the point without dimension, that is the continuous model, gained space and credibility and a century later Euclid was able to write his Elements, a complete geometrical construction grounded on two solid foundations: the continuous intuition and the declarative approach.

The second foundation needs some explanation. In the Artificial Intelligence domain the distinction between a procedural and a declarative way to represent knowledge has been proposed (E.Rich, 1983, p.239). The first way is more dynamic and facts and definitions are mainly described by procedures, while the second is more static, and facts and definitions are generally described by predicate logic. The Euclidean construction is in fact based on a declarative way of defining concepts and deriving assertions.

Taking into account what has been recalled above, we can now introduce the following diagram:



In it there are two separated dimensions. The first one is related to the mathematical model used like a framework for the mathematical or the educational activity. The second dimension refers to the way in which the searching or teaching activity is organized and the knowledge represented. The mathematical construction built up by Euclid can then be placed on the right superior quadrant of the diagram, while the Pythagorean approach finds its space in the left superior quadrant.

This construction affected also the way of organizing and representing mathematical knowledge, ignoring the constructive and dialectic side of the mathematical thinking.

The two mathematical models, discrete and continuous, can, and I think must, be related one to the other. Willem Kuyk wrote: '... that mathematics is based on at least two basal intuitions, the intuition of discreteness and the intuition of continuity, and that each corresponds to a particular kind of existence, namely, existence in the sense of number and discreteness, and existence in the sense of continuum and

spatiality.' (W.Kuyk, 1977, p.137). The perspective suggested is that we have: '... to regard the discrete and the continuous as complementary aspects of the world, in a fashion quite analogous to the complementarity principle in physics: depending on the type of problem that is being attacked in mathematics, we either tend to assume existence after the geometrical-continuous fashion, or we tend to require existence or computability in the sense of numerical-discreteness.' (W.Kuyk, 1977, p.146).

The complementary approach asks for an integration between the two quadrants, but they will remain distinct because rooted on different basic intuitions. In mathematical education then we cannot ignore one of them or reduce one to the other. This would be very dangerous from a mathematical and an educational point of view.

After the Second World War new tendencies in mathematical education found space in the international arena. They were based more and more on the discreteness intuition, but still fastened to the declarative approach, moving towards a progressive reduction of geometry to algebra. In recent years the computer development has pushed even more in this direction, and the algorithmization of mathematics is one of the consequences of such a tendency, but with a clear shifting to the procedural approach. In geometry, for instance, it has been proposed to define mathematical objects through procedures, that can build or draw them. Turtle Geometry (Abelson and diSessa, 1981) starts from a definition of the two main instruments we can use in drawing geometrical figures: the ruler and the compass. On the computer screen the straight line is drawn by an instruction that has as an essential component the number of material points to jump or pass through. The pixel (picture element) is the material and dimensioned point of such a geometry. In this Pythagorean revival of the intuition of discreteness the circle is drawn by adding (and counting) elementary angles. All the constructions have such a character that they can be placed in the left inferior quadrant of the diagram. It is in fact a procedural and discrete approach to geometry.

The opportunity of using an operative and constructive way of defining concepts in mathematical education was underlined several years ago by A.Krygowska (A.Z.Krygowska, 1969), and we agree on the educational value of this approach, even when mathematical concepts are defined in procedural terms, but the introduction of geometry only through procedural definitions and starting from the intuition of discreteness seems to be in the long term dangerous - and this both from a mathematical perspective and a psychological point of view.

In the new elementary mathematical curriculum for elementary grades stated by the Ministry of Education in Italy, the Commission that wrote the program placed a strong emphasis on the necessity to balance the four aspects coming from the four approaches outlined by the diagram. Arithmetic, and the intuition of number, and geometry, and the intuition of space, have an equal weight. The constructive and operational approach is suggested as a first step to new mathematical

concepts, while the declarative approach can be introduced later, like a control and organizational instrument. Set theory is no longer the beginning of mathematical activity and education, but has a place as a regulative agent within the mathematical discourses. W.Kuyk pointed out that: '... on this view, set theory regulates the usage of mathematical language ... Thus, set theory obtains a normative character pertaining to the mathematical language.' (W.Kuyk, 1977, p.147).

Michele Pellerey
Universita Salesiana
Roma/Italia.

REFERENCES

[1] Abelson, H. and A.diSessa: *Turtle Geometry*, Cambridge (Mass.). The MIT Press, 1981.
[2] Krygowska, A.Z.: *Cenni di didattica della matematica*, Bologna, Pitagora, 1979 (original in Polish published in 1969).
[3] Kuyk, W.: *Complementarity in Mathematics*, Reidel, Dordrecht 1977.
[4] Rich, E.: *Artificial Intelligence*, McGraw-Hill, New York 1983.

BARBARA FELUCH

LABORATOIRE MATHEMATIQUE

DANS notre école il y a beaucoup de travail sous la direction du maître. Le maître lit le manuel de l'élève et puis il raconte ce qu'il y a dedans. Après, quand il faut apprendre sans maître - c'est très difficile pour l'élève.

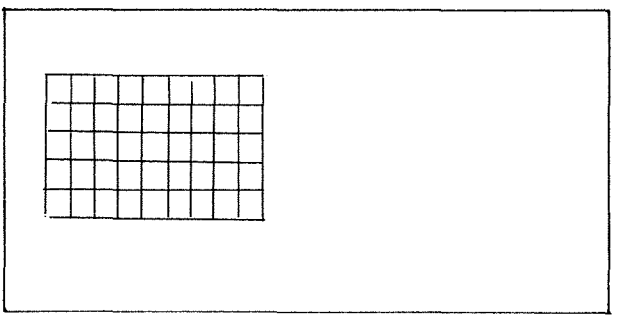
'Mathématiques pour tous ... à l'âge de l'ordinateur', d'après moi c'est l'étude des mathématiques sous la direction du maître, plus un travail individuel. L'enseignement des mathématiques à l'âge de l'ordinateur exige un laboratoire mathématique où les élèves peuvent travailler seuls ou avec 1,2 collègues.

Le laboratoire mathématique c'est un ensemble des modules didactiques pour les équipes de 1 ou 2 ou 4 élèves, ce n'est pas un local avec une installation spéciale. Les modules didactiques seraient par exemple jeux éducatifs, jeux pour microordinateur, résolution de problèmes, lectures mathématique. Chaque équipe peut travailler à un module différent. Les élèves apprennent les uns lentement, les autres vite, ils ont des intérêts différents, ils ont des lacunes différentes.

J'ai observé les enfants de 8,9 ans qui venaient tôt à l'école pour jouer au jeu 'Achats'. C'est un jeu très simple. Il faut compter beaucoup - payer, rendre la monnaie, changer la monnaie. Les enfants étaient très scrupuleux pendant le jeu.

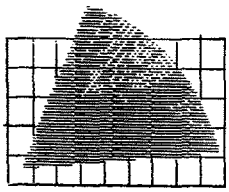
Le laboratoire mathématique peut développer l'indépendance des élèves. Il faut qu'il expérimentent, qu'ils commettent des erreurs et qu'ils les corrigent pour vérifier eux-mêmes leur savoir et leurs possibilités dans les études individuelles.

Je voudrais présenter quelques exemples des modules pour le laboratoire; ils sont préparés au moyen du microordinateur. Jeu 'Aire d'un rectangle' - pour les enfants de 8, 9, 10 ans:



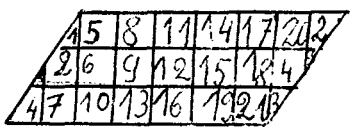
Les petits enfants comptent d'habitude les carrés l'un après l'autre.

Mais le microordinateur cache le rectangle et il faut compter d'une manière différente. Il n'y a pas beaucoup de temps. Il faut compter les carrés dans un rang et les rangs.

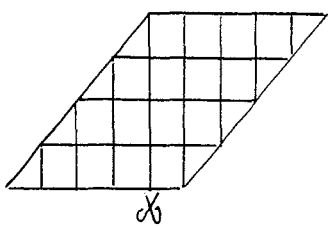


Combien y a-t-il de centimètres carrés dans ce rectangle?

Parfois les choses sont trop concrètes, comme une peinture trop réaliste et une transmission du message est impossible. Un enfant de 9 ans compte l'aire du parallélogramme de cette manière:

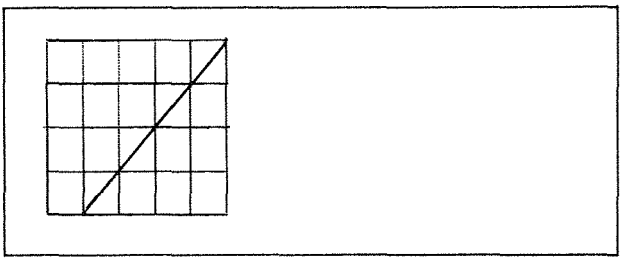


Mais pendant le jeu 'Aire d'un parallélogramme' il compte d'une manière différente, comme lui suggère le micro-ordinateur.

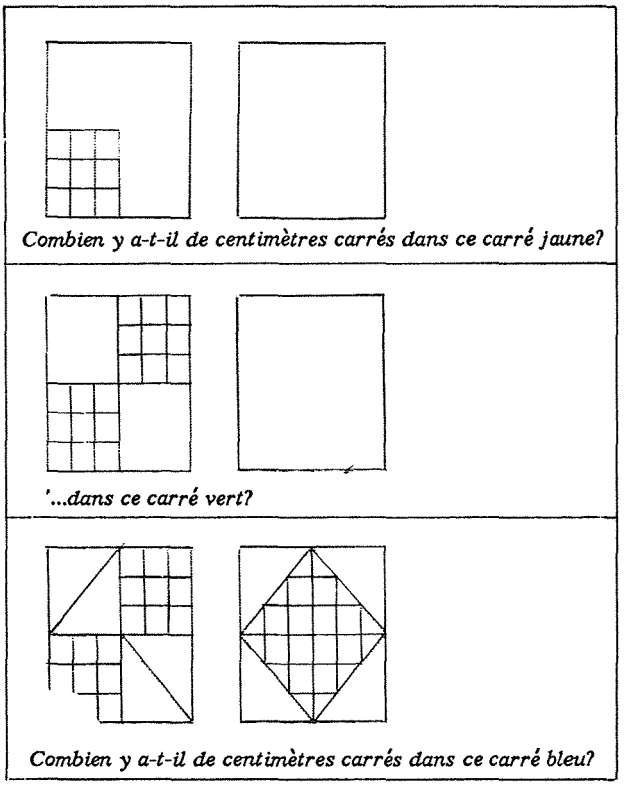


Combien y a-t-il de centimètres carrés dans ce parallelogramme?

Le microordinateur coupe une partie du parallélogramme et pendant quelques instants il compose le rectangle. Après il montre la première situation.

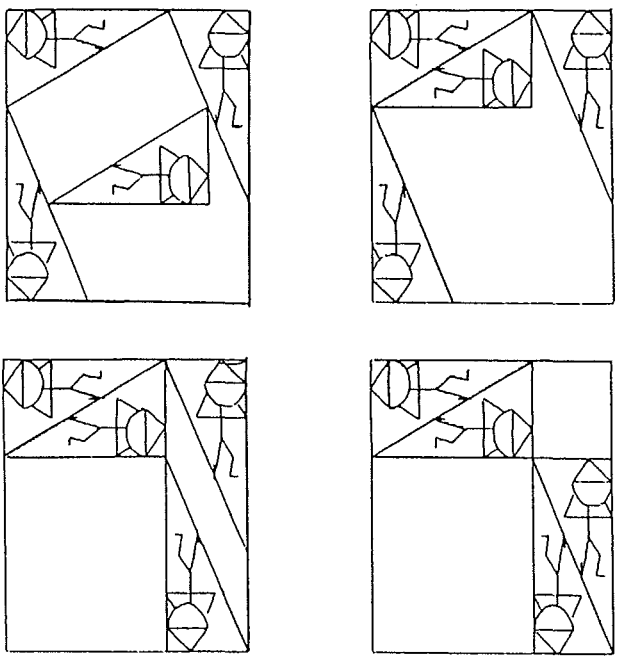


Un module un peu plus difficile pour les enfants un peu plus âgés. Le jeu 'Pythagore' qui est le premier pas dans la direction du théorème de Pythagore.

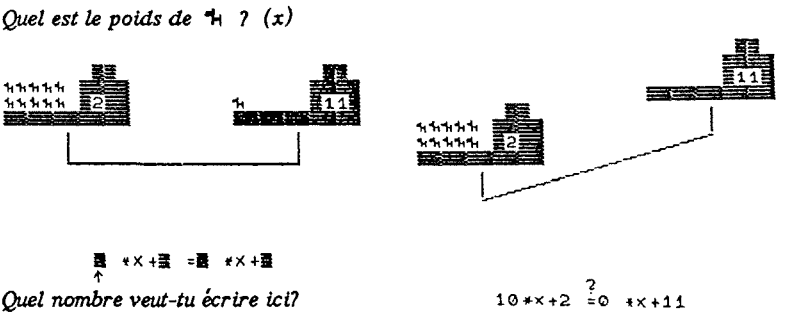


J'ai observé des adultes et des enfants, et pour beaucoup c'était une véritable énigme. La translation des triangles a été nécessaire.

Et si la réponse est mauvaise le microordinateur montre un petit film:



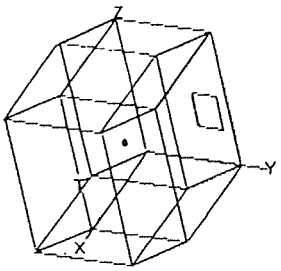
Pour les élèves la langue des équations, des formules est souvent très difficile, incompréhensible. Il manque un peu des conversations dans cette langue. Un bon partenaire est un microordinateur. Au début les enfants pensent qu'on peut parler avec le microordinateur en langue naturelle. Ils écrivent 'Ecris-moi un exemple plus facile', ou 'montre-moi un jeu'. Mais comme cela ne marche pas ils acceptent vite des langues différentes.
Voilà un modèle de l'équation: ax + b = cx + d. x = le poids du chien, a,b,c,d - il faut écrire. Après quelques essais les enfants savent ce qu'il faut faire pour par exemple enlever 1 chien de deux plateaux d'une balance.



Le jeu de 'Dé' est destiné pour les élèves plus âgés, pour les étudiants. C'est une visite dans l'espace de dimension 4. Ce n'est pas exactement une visite dans l'espace, mais un voyage dans un dé de dimension 4 et une observation des vues au moyen de la télévision. Après la visite il faut choisir une porte et sortir du dé.

TES *PROJECTION 1*

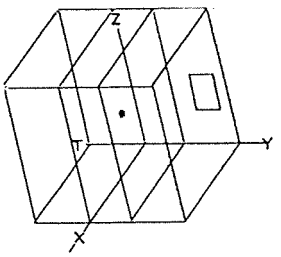
coordonnées:
X = 40
Y = 40
Z = 40
T = 40



Combien d'unités veux-tu parcourir dans le sens X?

TES *PROJECTION 4*

coordonnées:
X = 41
Y = 41
Z = 41
T = 41

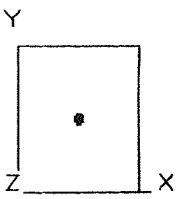


Combien d'unités veux-tu parcourir dans le sens Z?

Une version de 3 dimensions du dé (d'après la suggestion du professeur Peter Bowie). Il faut sortir du dé à dimension 3. Il y a 3 axes: X, Y, Z. La porte est dessinée au hazard. Nous pouvons tourner le dé autour de X ou Y.

TES

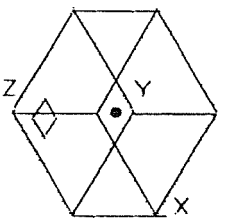
coordonnées:
X = 25
Y = 25
Z = 25



Combien d'unités veux-tu parcourir dans le sens X?

TES

coordonnées:
X = 25
Y = 25
Z = 25



Combien d'unités veux-tu parcourir dans le sens X?

J'ai travaillé d'après la méthode 'laboratoire mathématique' aussi avec les maîtres des enfants de 7 à 10 ans. Ils sont toujours un peu effrayés par les mathématiques. Ils peuvent penser logiquement mais non pendant des cours de logique. Chaque succès dans leur travail avec le microordinateur agrandit leur ouverture sur nos informations mathématiques.

Le programme 'Dé à dimension 3' (ZX-Spectrum):

```
   1 LET f=0: LET w=0: LET drz=0
   7 LET ind=0: LET x1=25: LET x
2=25: LET x3=25
  10 LET a=INT (RND*40): LET b=I
NT (RND*40): LET c=INT RND: LET
d=INT (RND*3)+1: GO TO 13+d
  11 IF c<0.5 THEN GO TO 13
  12 LET c=0: GO TO 14
  13 LET c=40
  14 LET xd1=c: LET xd2=c: LET x
d3=c: LET xd4=c: LET zd1=a: LET
yd1=b: LET zd2=a+10: LET yd2=b:
LET zd3=a+10: LET yd3=b+10: LET
zd4=a: LET yd4=b+10: GO TO 17
  15 LET yd1=c: LET yd2=c: LET y
d3=c: LET yd4=c: LET zd1=a: LET
xd1=b: LET zd2=a+10: LET xd2=b:
LET zd3=a+10: LET xd3=b+10: LET
zd4=a: LET xd4=b+10: GO TO 17
  16 LET zd1=c: LET zd2=c: LET z
d3=c: LET zd4=c: LET xd1=a: LET
yd1=b: LET xd2=a+10: LET yd2=b:
LET xd3=a+10: LET yd3=b+10: LET
xd4=a: LET yd4=b+10: GO TO 17
 130 DEF FN f(x,y,z)=x*COS (w)-z
*SIN (w)*COS(f)+y*SIN (f)*SIN (w)
+150
 131 DEF FN v(x,y,z)=z*SIN (f)+y
*COS (f)+80
 132 PLOT FN f(0,0,0),FN v(0,0,0
): DRAW FN f(50,0,0)-FN f(0,0,0)
,FN v(50,0,0)-FN v(0,0,0)
 133 DRAW FN f(50,50,0)-FN f(50,
0,0),FN v(50,50,0)-FN v(50,0,0)
 134 DRAW FN f(0,50,0)-FN f(50,5
0,0),FN v(0,50,0)-FN v(50,50,0)
 135 DRAW FN f(0,0,0)-FN f(0,50,
0),FN v(0,0,0)-FN v(0,50,0)
 136 DRAW FN f(0,0,50)-FN f(0,0,
0),FN v(0,0,50)-FN v(0,0,0)
 137 DRAW FN f(50,0,50)-FN f(0,0
,50),FN v(50,0,50)-FN v(0,0,50)
 138 DRAW FN f(50,50,50)-FN f(50
,0,50),FN v(50,50,50)-FN v(50,0,
50)
 139 DRAW FN f(0,50,50)-FN f(50,
50,50),FN v(0,50,50)-FN v(50,50,
50)
 140 DRAW FN f(0,0,50)-FN f(0,50
,50),FN v(0,0,50)-FN v(0,50,50)
 141 PLOT FN f(0,50,50),FN v(0,5
0,50): DRAW -FN f(0,50,50)+FN f(
0,50,0),-FN v(0,50,50)+FN v(0,50
,0)
 142 PLOT FN f(50,50,50),FN v(50
,50,50): DRAW FN f(50,50,0)-FN f
(50,50,50),FN v(50,50,0)-FN v(50
,50,50)
 143 PLOT FN f(50,0,50),FN v(50,
0,50): DRAW FN f(50,0,0)-FN f(50
,0,50),FN v(50,0,0)-FN v(50,0,50
)
 200 PLOT FN f(xd1,yd1,zd1),FN v
(xd1,yd1,zd1): DRAW FN f(xd2,yd2
,zd2)-FN f(xd1,yd1,zd1),FN v(xd2
,yd2,zd2)-FN v(xd1,yd1,zd1)
 210 DRAW FN f(xd3,yd3,zd3)-FN f
(xd2,yd2,zd2),FN v(xd3,yd3,zd3)-
FN v(xd2,yd2,zd2)
 220 DRAW FN f(xd4,yd4,zd4)-FN f
(xd3,yd3,zd3),FN v(xd4,yd4,zd4)-
FN v(xd3,yd3,zd3)
 230 DRAW FN f(xd1,yd1,zd1)-FN f
(xd4,yd4,zd4),FN v(xd1,yd1,zd1)-
FN v(xd4,yd4,zd4)
 240 PLOT FN f(0,0,0),FN v(0,0,0
): DRAW FN f(55,0,0)-FN f(0,0,0)
,FN v(55,0,0)-FN v(0,0,0)
 250 PLOT FN f(0,0,0),FN v(0,0,0
): DRAW FN f(0,50,0)-FN f(0,0,0)
,FN v(0,50,0)-FN v(0,0,0)
 260 PLOT FN f(0,0,0),FN v(0,0,0
): DRAW FN f(0,0,55)-FN f(0,0,0)
,FN v(0,0,55)-FN v(0,0,0)
 270 PRINT AT (21-INT (FN v(60,0
,0)/8)),INT (FN f(60,0,0)/8);"X"
 280 PRINT AT (21-INT (FN v(0,60
,0)/8)),INT (FN f(0,60,0)/8);"Y"
 290 PRINT AT (21-INT (FN v(0,0,
60)/8)),INT (FN f(0,0,60)/8);"Z"
 295 FOR m=0 TO 2: CIRCLE FN f(x
1,x2,x3),FN v(x1,x2,x3),m: NEXT
m
 300 PRINT AT 0,0;"Tes";AT 3,0;"
coordonnees:";AT 7,0;"X=";x1;" "
;AT 9,0;"Y=";x2;" ";AT 11,0;"Z="
;x3;" "
 310 PRINT AT 19,0;"Combien d,un
ites veux-tu          parcourir
 dans le sens X"?
                    "; BEEP .1,0: IN
PUT s1
 320 PRINT AT 19,0;"Combien d,un
ites veux-tu          parcourir
 dans le sens Y"?
                    "; BEEP .1,0: IN
PUT s2
 330 PRINT AT 19,0;"Combien d,un
ites veux-tu          parcourir
dans le sens Z"?
                    "; BEEP .1,0: INP
UT s3
 370 IF (x1+s1<=0 OR x1+s1)=50 O
R x2+s2<=0 OR x2+s2)=50 OR x3+s3
<=0 OR x3+s3)=50) THEN GO TO 500
 375 FOR m=0 TO 2
 380 CIRCLE INVERSE 1;FN f(x1,x2
,x3),FN v(x1,x2,x3),m
 383 CIRCLE FN f(x1+s1,x2+s2,x3+
s3),FN v(x1+s1,x2+s2,x3+s3),m
 390 NEXT m
 410 LET x1=x1+s1
 420 LET x2=x2+s2
 430 LET x3=x3+s3
 440 LET ind=ind+1
 450 IF ind=30 THEN GO TO 1500
 460 PRINT AT 7,2;x1;" ";AT 9,2;
x2;" ";AT 11,2;x3;" "
 470 PRINT AT 19,0;"
                    touche ENT
ER                  "; IN
PUT i$
 480 GO TO 1200
 500 GO TO d*10+500
 510 IF s1=0 THEN GO TO 513
 511 LET len=(c-x1)/s1
 512 GO TO 514
 513 LET len=0
 514 IF x2+len*s2>b AND x2+len*s
2<b+20 AND x3+len*s3>a AND x3+le
n*s3<a+20 THEN GO TO 970
 516 GO TO 920
 520 IF s2=0 THEN GO TO 523
 521 LET len=(c-x2)/s2
 522 GO TO 524
 523 LET len=0
 524 IF x1+s1*len>b AND x1+s1*le
n<b+20 AND a<x3+s3*len AND x3+s3
*len<a+20 THEN GO TO 970
 525 GO TO 920
 530 IF s3=0 THEN GO TO 533
 531 LET len=(c-x3)/s3
 532 GO TO 534
 533 LET len=0
 534 IF x1+s1*len>a AND x1+s1*le
n<a+20 AND b<x2+s2*len AND x2+s2
*len<b+20 THEN GO TO 970
 920 PRINT AT 20,0;"ATTENSION...
 MUR...MUR...MUR": BEEP .3,1
 950 PAUSE 50
 960 GO TO 310
 970 FOR n=0 TO 21: PRINT AT n,0
;"LA PORTE,BRAVO.BRAVO,LA PORTE,
": NEXT n
 978 STOP
1200 PRINT AT 19,0;"  Veux-tu
une   projection      differente
 ?(oui,non)
                    "
1210 INPUT i$
1220 IF i$="non" THEN GO TO 310
1230 IF i$="oui" THEN GO TO 1250
```

```
1234 GO TO 1200
1250 PRINT AT 19,0;"A combien de
 degres veux tu       tourner le
de?                   Axe de rota
tion X.": INPUT df
1251 PRINT AT 19,0;"A combien de
 degres veux tu       tourner le
dé?                   Axe de rota
tion Y."  INPUT dw
```

```
1252 LET df=PI*df/180: LET dw=PI
*dw/180: LET f=f+df: LET w=w+dw
1260 CLS : GO TO 130
1261 CLS
1270 IF i1=1 THEN GO TO 42
1280 IF i1=2 THEN GO TO 1050
1310 GO TO 1250
1500 STOP
```

B.Feluch
University of Warsaw
Warszawa/Pologne.

NADINE BEDNARZ

UNE DEMARCHE DE MODELISATION, UN EXEMPLE: LA CONSTRUCTION D'UN SYSTEME DE REPRESENTATION DU NOMBRE SIGNIFICATIF ET EFFICACE

CE que nous présentons ici est une partie d'un travail de recherche de cinq ans qui nous a conduit à faire une réflexion sur l'apprentissage de la numération au primaire. Notre but n'est pas tant d'exposer les résultats de ce travail, ce qui serait impossible dans une présentation de cette nature, mais plutôt d'illustrer par cet exemple comment l'enfant est amené à construire, à s'approprier peu à peu un concept. Nous nous situons sur le plan didactique d'une intervention en classe avec un groupe d'enfants que nous avons suivi pendant trois ans de la 1ère année, 6-7 ans à la 3ième année, 8-9 ans.

Pour être en mesure de faire cette intervention, nous étions allées voir au préalable les difficultés importantes que les enfants rencontrent dans l'enseignement actuel de la numération au primaire, les conceptions inappropriées développées par cet enseignement et avions analysé ce à quoi elles étaient dûes [1] [2].

Cette étude mettait en évidence entre autres des difficultés fondamentales par rapport à quatre aspects.

Signification accordée à l'écriture conventionnelle: une conception attachée à un ordre, à un découpage de l'écriture

Peu d'enfants accordent une signification véritable à la valeur de position dans l'écriture conventionnelle en termes de groupements. Quand ils la prennent en considération, le travail fait sur l'écriture dans l'enseignement actuel conduit beaucoup plus à une interprétation en termes de découpage, à une prédominance de l'ordre qu'à une véritable interprétation de la valeur de position.

Signification accordée à la retenue et à l'emprunt dans les procédures de calcul: des conceptions inappropriées conduisant à des erreurs

Nos résultats nous révèlent que les enfants ne conçoivent pas que les règles qu'ils appliquent au niveau des algorithmes ont un sens, si bien qu'en cas de difficultés, ils sont complètement démunis. Ils ne peuvent illustrer et expliciter avec un matériel, un calcul effectué avec l'écriture. Ils essaient alors de retranscrire ce qu'ils font au niveau de l'algorithme avec l'écriture, et nous retrouvons plusieurs conceptions inappropriées de la retenue ou de l'emprunt (ex.: 'il faut ajouter 10' sans pour cela enlever quoique ce soit en échange; 'j'enlève 1, j'ajoute 1'..)

Habileté à travailler simultanément avec deux groupements d'ordres différents

Même si les enfants voient les groupements, ce qui n'est pas toujours le

cas, et même s'ils peuvent passer d'un groupement à l'autre, ils ne peuvent pour autant étendre leur raisonnement lorsqu'il faut les coordonner. On retrouve alors une confusion des deux groupements.

Pertinence de regrouper et signification du code associé à une collection regroupée

L'enseignement actuel amène l'enfant à faire des exercices de regroupement de collections visant essentiellement la production d'un code; les consignes et procédures de regroupement sont souvent dictées artificiellement à cette fin, et le code produit n'est jamais utilisé par la suite en relation avec les collections sous-jacentes.

Nous constatons, dans nos résultats, que cet apprentissage n'amène pas l'enfant à accorder un sens à ce qu'il fait et au code associé. Ainsi, beaucoup d'enfants ne voient pas la pertinence de regrouper lorsque le regroupement s'avère une stratégie efficace (par exemple: pour comparer, voir vite le nobmre d'éléments de grandes collections...). De plus, même s'ils regroupent, ils ne voient pas que l'écriture est un code qui découle directement de cette collection regroupée.

Une étude de ces difficultés et une analyse épistémologique du concept de numération nous ont conduit à développer une conception de la numération, et de ce que devrait être son enseignement, bien différente de celle qu'on retrouve dans l'enseignement actuel au primaire.

NOTRE CONCEPTION DE LA NUMERATION ET DE CE QUE DEVRAIT ETRE SON APPRENTISSAGE

Pour nous, l'enseignement de la numération ne se résume pas à l'étude de l'écriture conventionnelle et à l'étude des règles syntaxiques qui la gouvernent. Ce n'est pas non plus un à priori à l'étude des algorithmes de calcul relatifs aux différentes opérations (addition, soustraction, multiplication, division): l'enseignement de la numération n'est pas vu comme un pré-requis à l'étude des algorithmes, mais comme un concept qui se développe simultanément.

Notre préoccupation majeure est de forcer une réflexion sur les règles régissant l'écriture, réflexion et travail qui vont être centrés sur l'idée de groupement. Toute notre stratégie va faire en sorte que l'enfant *construise* lui-même des systèmes de représentations associées à des collections, et aboutisse progressivement à une symbolisation significative et efficace, l'écriture conventionnelle.

Nous forçons à tout moment une réflexion sur ces notations développées par les enfants en leur demandant d'opérer sur des collections, via ces codes. L'enfant est ainsi amené à agir sur les groupements (en faire, en défaire, en échanger...) et à établir des relations entre ceux-ci. Les interventions effectuées sur les notations développées sont alors associées à des actions effectives.

Ainsi, pour nous la Numération est vue comme un concept que l'enfant doit *construire*.

L'étude de la numération n'est pas limitée à celle de l'écriture conventionnelle, mais est vue plus comme un *procæssus de représentation*

des nombres aboutissant progressivement à cette écriture.

Dans cette perspective constructiviste, pour donner un sens à cette écriture nous avons besoin de considérer les opérations:

— Elles sont en effet essentielles pour motiver un travail sur les groupements.
— Elles forcent une réflexion sur les transformations alors opérées sur les groupements.
— Enfin, elles obligent à établir des relations entre les groupements.

De plus, la nécessité pour l'enfant de devenir de plus en plus efficace dans le traitement des collections et dans la communication d'informations sur celles-ci force le recours à des représentations écrites et à un raffinement de celles-ci.

NOTRE INTERVENTION

Nous créons autour d'un matériel tout un environnement contextuel (ensemble de situations, de contextes...) dans lequel l'enfant va être amené à faire la démarche décrite précédemment. Un même matériel est utilisé ainsi pendant très longtemps. Nous organisons l'apprentissage à l'intérieur d'un environnement contextuel de telle sorte que l'enfant construise et utilise un système de représentation de moins en moins descriptif et de plus en plus efficace. Plusieurs environnements contextuels seront ainsi développés autour de matériels. Dans le choix et l'organisation séquentielle des différents environnements contextuels, nous faisons en sorte que les conditions appropriées soient présentes pour amorcer et mener à terme la démarche de numération [3].

Nous présenterons un exemple d'un des environnements contextuels utilisé dans notre démarche autour du matériel 'des fleurs'. Celui-ci a été utilisé en 3ième année (8-9 ans). Nous indiquerons alors comment l'enfant est amené à évoluer à l'intérieur de cet environnement contextuel progressivement vers un symbolisme significatif et efficace.

Le matériel des fleurs

Ce matériel a été construit préalablement par les enfants dans le cadre d'activités d'arts plastiques. Des fleurs en papier sont constituées de dix 'feuilles' plates superposées et attachées de telle sorte que les enfants puissent facilement les faire et les défaire.

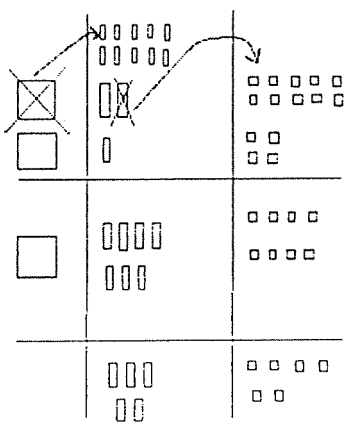
Nous retrouvons donc dans notre matériel les différents éléments suivants: des feuilles plates découpées dans du papier, des fleurs, des bouquets formés de dix fleurs liées ensemble et des guirlandes de fleurs faites de dix bouquets.

Ce matériel peut sembler équivalent à d'autres matériels couramment utilisés dans l'enseignement de la numération au primaire (ex.: Multibases, bâtonnets, Abaque ..). Toutefois, il est important de préciser que nous ne choisissons pas, dans la perspective constructiviste de notre approche, n'importe quel matériel, n'importe comment.

Le choix d'un matériel repose sur des critères que nous n'expliciterons ici que brièvement.

1. Nous privilégions une certaine *conception de la numération* et de son apprentissage telle qu'explicitée précédemment, auquel un matériel doit donner accès. Ainsi ici nous reconnaissons une collection de 'feuilles' avec des modalités de regroupement, sur lesquelles des opérations (addition, soustraction, multiplication, division) peuvent être définies.
2. Nous tenons compte également, dans le choix du matériel, de *l'enfant*. Ainsi le matériel doit être accessible à l'enfant à un moment donné de son apprentissage, permettant à celui-ci de l'utiliser pour faire une démarche complète de numération. Trois critères déterminent l'accessibilité d'un matériel pour l'enfant:
   — l'identification plus ou moins évidente des groupements à travers celui-ci;
   — le caractère plus ou moins explicite des relations entre les groupements;
   — la capacité d'agir plus ou moins directement sur les groupements, sans avoir recours à des substitutions (pour les faire, les défaire...).
3. Le *lien avec la réalité* est également un critère déterminant dans le choix du matériel, permettant d'utiliser le sens a priori pour construire dessus. Ainsi le matériel des fleur, dans un contexte associé (par exemple, celui du fleuriste) a un sens a priori forçant *naturellement* un recours aux groupements, aucune consigne ou procédure artificielle dictée préalablement n'est donc nécessaire. Ce matériel est en effet utilisable dans des contextes (fleuriste, atelier de fabrication de fleurs ...) dans lesquels les opérations et les relations entre les groupements ont un sens à priori. Il permet ainsi de donner un sens aux actions et aux écritures, et évite des consignes inutiles.

Enfin, dans *l'utilisation d'un matériel* jamais nous ne retrouverons ce qui caractérise l'utilisation d'un matériel dans l'enseignement actuel: un travail mettant l'accent sur une simple correspondance matériel, écriture, comme l'illustre l'exemple ci-dessous:



$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 12\ 10} \\ 2\ 3\ 4 \\ -\ 1\ 7\ 8 \\ \hline 0\ 5\ 6 \end{array}$$

FRANCOIS JAQUET/ANDRE SCHEIBLER

ELEVES EN SITUATION

NOUS avons lancé nos élèves dans des activités concrètes et qui à priori pouvaient même paraître banales, comme par exemple faire le plan de la cour d'école, après avoir estimé, de bonne foi, qu'ils possédaient toutes les notions nécessaires à ces situations.
Nous présentons ici l'activité 'plan de la cour d'école', réalisée dans deux classes, et ses résultats, qui nous ont surpris, ainsi que quelques commentaires.

CLASSE I

21 élèves de 13-14 ans, appartenant à la division moyenne du système scolaire, sont répartis en 7 groupes de 3. Préalablement, 2 rappels sont faits:

1. Attention, tous les angles ne sont pas des angles droits.
2. Rappelez-vous que lorsque les longueurs des 3 côtés d'un triangle sont connues, ce triangle est entièrement déterminé.

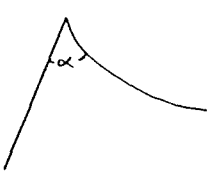
Une parcelle de la cour est attribuée à chaque groupe, avec une feuille de consignes, et comme matériel un ruban métrique de 20 mètres, ainsi qu'un appareil simple leur permettant de mesurer efficacement des angles.

Résultats
Tous les groupes sont partis d'un point du périmètre de leur parcelle, généralement un 'angle' et ont mesuré successivement longueurs et angles, en faisant un tour complet de leur parcelle.

Pratiquement tous les groupes se sont demandé s'il fallait mesurer les hauteurs.
Le sens de la question était double:
— sur le plan faut-il indiquer l'emprise au sol des objets, ou une vue d'avion de ces objets?
— faut-il indiquer sur le plan, et comment, la hauteur de certains objets (murets, escaliers, etc)?

A l'exception de 2 groupes, ils ont constaté dans un second temps que les courbes n'étaient pas des arcs de cercle, et ont développé des stratégies en conséquence.

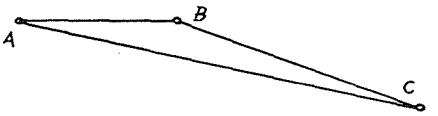
Des angles sont mesurés, dont un côté n'est pas rectiligne (voir figure).



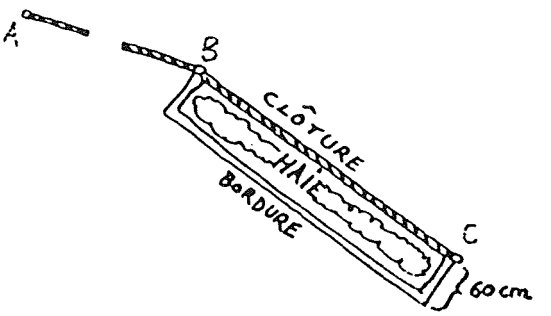
Les mesures sont toujours numériquement précises (le cm et le degré) même lorsque la technique de mesure est visiblement discutable.

Pour tous les groupes, il ne s'agit pas de repérer des points relativement à un référentiel, ou relativement à eux-mêmes, mais des objets, comme la longueur du mur, l'angle entre l'escalier et la fontaine, etc. C'est le mur qui a de l'importance, non les 2 points qui en repèrent les extremités.
Voici deux exemples:

1. Le groupe 7 doit repérer un triangle ABC très plat et très long (près de 60 mètres).

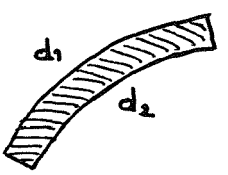


Ils choisissent explicitement la méthode de triangulation. Mais pour eux, il ne s'agit pas de 3 sommets d'un triangle.
La situation se présente comme ceci:



Ils vont mesurer la longueur de la barrière (AB+BC) en collant le ruban métrique contre celle-ci. Puis ils mesurent AB, puis, en passant de l'autre côté, la longueur de la bordure (BC). Ils vont additioner AB et BC pour obtenir AC. L'obstacle ainsi crée n'a apparemment pas été assez fort pour faire sauter la contradiction.

2. Le groupe 4, comme beaucoup d'autres groupes dans un premier temps, a mesuré soigneusement la longueur d'une courbe. Mais eux persistent, et ont même pris soin de mesurer cette longueur de chaque côté du mur.



CLASSE II

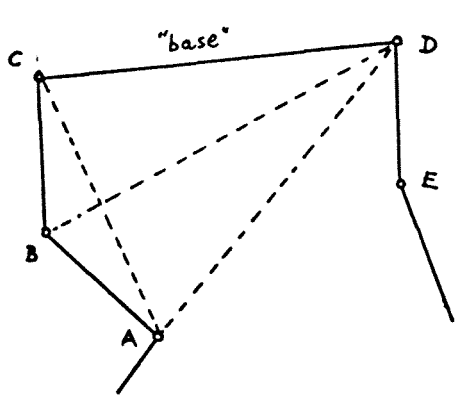
21 élèves de 12-13 ans, de section 'scientifique'. Ils ne disposent pas d'instruments de mesure d'angle et aucune remarque préalable n'est faite ni à propos des angles, ni à propos de la construction des triangles.

Le pourtour

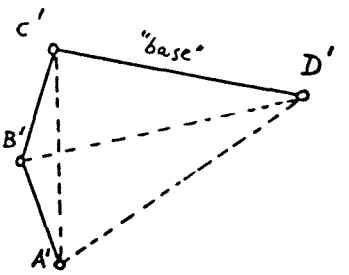
Dans une première étape, cinq groupes sur six ne travaillent que sur le pourtour de leur parcelle et mesurent successivement les distances d'un 'sommet' à l'autre. Les angles ne sont jamais pris en compte, ils sont en général considérés comme droits. Les côtés rectilignes sont mesurés par la ficelle tendue en ligne à peu près droite, les mesures des côtés curvilignes sont prises par application directe de la ficelle contre la bordure.

Evidemment, de retour en classe, ces mesures se révèlent insuffisantes ou inutilisables. Au sein d'un même groupe, les esquisses obtenues sont différentes.

En prévision de cette difficulté, j'avais présenté à la classe, deux leçons auparavant, un polygone d'une dizaine de côtés couvrant toute une feuille de format A4 en demandant de le reproduire à l'échelle $\frac{3}{4}$, sans utiliser de rapporteur.



polygone d'origine (de grande dimension)

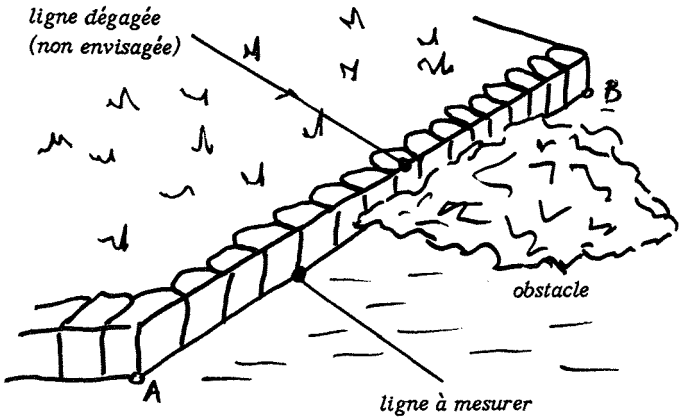


reproduction à l'échelle $\frac{3}{4}$ (sur une autre feuille)

Après bien des tentatives infructueuses, chaque élève avait compris qu'il devait procéder 'triangle par triangle' à partir d'un premier segment considéré comme 'base' puis avait parfaitement réalisé sa reproduction. Cette 'préparation' n'avait-elle donc servi à rien, pour qu'aucun groupe ne pense à cette procédure par 'triangulation' appliquée avec succès quelques jours auparavant? Quel est l'obstacle qui s'oppose au transfert d'une 'maîtrise' sur le plan de la feuille en situation scolaire à la réussite de la même tâche dans une situation réelle?

La ligne droite

Devant sa feuille de papier, aucun élève de 13 ans ne doute que la distance de deux points se mesure le long d'un segment de droite. Pourtant cette belle certitude disparaît en terrain accidenté. Que d'essais et d'hésitations jusqu'à ce que chacun soit convaincu que la ficelle doit être tendue et ne doit pas contourner les obstacles! A ce propos, l'épisode du 'tas de feuilles mortes' est significatif:



Un groupe mesure la distance entre deux points A et B le long d'un tronçon rectiligne. Un tas de feuilles mortes amassées contre cette bordure empêche le passage de la ficelle au ras de la surface asphaltée, mais n'empiète pas sur le gazon ni sur les pierres de la bordure. Les élèves entreprennent alors de retirer les feuilles. Je leur fais remarquer que les jardiniers n'apprécieront pas qu'on étale leur tas. "Mais Monsieur, on ne pourra pas mesurer si on ne retire pas les feuilles!" Pourquoi n'ont-ils pas pensé spontanément à prendre leur mesure sur la partie supérieure de la bordure, entièrement dégagée? Ils savent pourtant que les deux longueurs d'un rectangle sont isométriques (ici, les arêtes inférieure et supérieure de la bordure)!

Un autre groupe, aux prises avec un même genre d'obstacle, s'évertue à passer péniblement sa ficelle derrière un tuyau d'écoulement d'eau pour mesurer la longueur de la façade du préau couvert. A 20 cm de cette paroi, le sol était parfaitement libre et horizontal, on aurait pu y mesurer la distance en question sans aucune difficulté.

Dans un autre groupe encore, les mesures se prennent à hauteur de la taille alors que la ficelle touche le sol dans sa partie médiane!

COMMENTAIRES

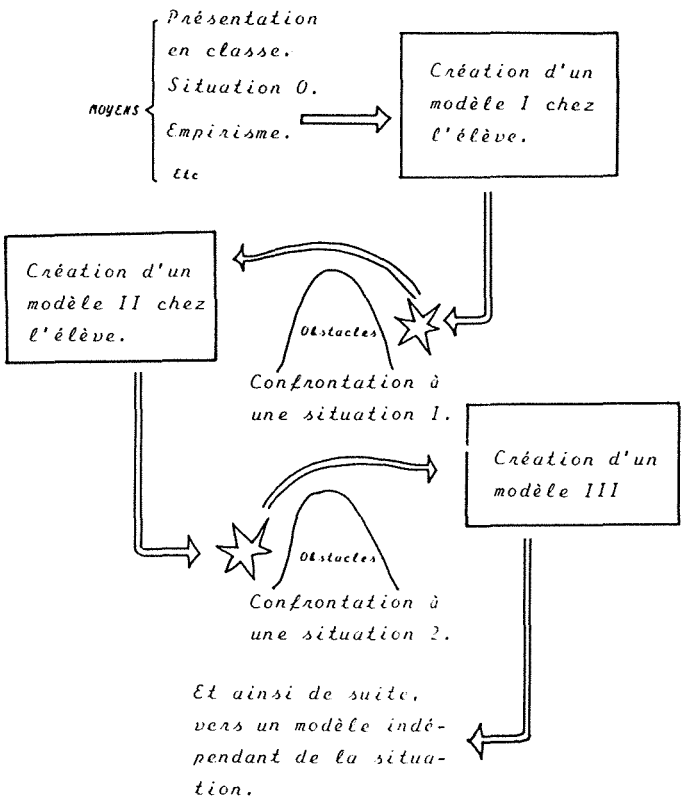
D'une manière générale, nous avons constaté que des notions élémentaires comme point, droite, distance de 2 points, angle, mesure d'un angle, triangle, dont la maîtrise avait été testée en classe avec succès, mais sur feuilles de papier, se révèlent dans ces activités inopérantes.

Il semble donc que les modèles des notions mathématiques développés par les élèves sont très étroitement liés au contexte global dans lequel ils ont été élaborés. Tout se passe comme si les élèves apprennent en classe une 'micro-géométrie', liée, entre autres, à la structure et aux dimensions de la feuille de papier.

Comment dès lors s'y prendre pour développer chez l'élève des modèles de notions mathématiques qui soient plus performantes? Sans prétendre répondre à cette question, nous présentons le schéma de la page suivante que nous accompagnons de deux suggestions:

— La matière d'un programme de mathématique pour tous doit pouvoir se prêter à un processus tel que décrit dans ce schéma.
— Comme il est extrêmement difficile d'affirmer qu'une situation problématique déterminée va provoquer l'apparition de tel obstacle mettant en désequilibre tel modèle, il serait judicieux de répertorier les situations qui ont tout simplement été fructueuses.

Processus d'acquisition d'une notion



François Jaquet/André Scheibler
Collège secondaire
Aigle/Suisse.

MARTA MENGHINI

THE AID OF GEOMETRY IN SOLVING PROBLEMS OF STABILITY: EIGENVALUES, MARKOW CHAINS, LINEAR SYSTEMS

THIS communication follows the one of Lina Mancini Proia. Here we present two kinds of problems: the first one concerns the search for the conditions under which a certain transformation maintains the ratios of given values. The second one concerns the search for the conditions under which a certain transformation fixes a proper given value. Geometrically the problems correspond to the search for the united directions and the united point of a particular affinity, respectively.

Example about the stability of a population

A known example about the stability of a population (compare for example Campbell/Spencer 'Finite Mathematics and Calculus', New York 1977) allows us to elucidate the meaning of the eigenvalues of a square matrix.

Let us consider a population of living objects, for which following values are known:

- $x_{i,t}$ is the number of living objects of age i at time t;
- p_i is the probability that an object of age i at time t will survive at time t+1;
- f_i is the number of new objects created per old object of age i, n is the maximum age.

It is easy to reconstruct the maxtrix' equation which shows the transformation from time t to time t+1:

$$\begin{pmatrix} x_{0,t+1} \\ x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \\ \vdots \\ x_{n,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ p_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{0,t} \\ x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ \vdots \\ x_{n,t} \end{pmatrix}$$

The equation can be expressed as $X_{t+1} = AX_t$.

We require that to the population vector X_t will follow, one unit of time later, a population vector X_{t+1} with the same proportional distribution, t.i. $X_{t+1} = \lambda X_t$.

So the previous equation becomes $AX_t = \lambda X_t$, which is the characteristic value problem. The example is due to Bernadelli, who describes an hypothetical beetle living in a certain environment in which the matrix

A is:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

So in this case the maximum age is 2; at age 2 a beetle generates 6 new beetles; a beetle of age 0 has probability $\frac{1}{2}$ to reach the age 1, and a beetle of age 1 has probability $\frac{1}{3}$ to reach age 2.
Which is the population's distribution whose proportionality is maintained by matrix A?
The characteristic equation leads to:

$$\begin{aligned} 6x_3 &= \lambda x_1 \\ \tfrac{1}{2}x_1 &= \lambda x_2 \\ \tfrac{1}{3}x_2 &= \lambda x_3 \end{aligned} \quad \text{while} \quad \det \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2) + 6(\tfrac{1}{6})$$

The only real solution, when det A is posed equal to 0, is $\lambda = 1$, corresponding to the characteristic vector (6,3,1).
So any population of these beetles with an age distribution proportional to 6:3:1 keeps a stable age distribution in the given environment.

Preliminary remarks
Suppose:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

to be a matrix, whose rows give a probability distribution, so that $a + b = c + d = 1$, and $\det A < 1$.
Let us consider $A^2 = A.A$.
Obviously $\det A^2 = \det A . \det A < \det A < 1$.
Furthermore we have:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & cd + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

$a' + b' = a(a+b)+b(c+d) = a+b = 1.$
$c' + d' = c(a+b)+d(c+d) = c+d = 1.$

So A^2 is still a probability matrix. And A^n is still a probability matrix, with $\lim_{n\to\infty} \det A^n = 0$.

Let $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ be the limit matrix $A_{lim} = \lim_{n\to\infty} A^n$,

$$\det \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \gamma\beta = 0$$

the system $\begin{cases} \alpha\delta & = \gamma\beta \\ \alpha + \beta & = 1 \\ \gamma + \delta & = 1 \end{cases}$ leads to $\delta = \beta, \ \gamma = \alpha.$

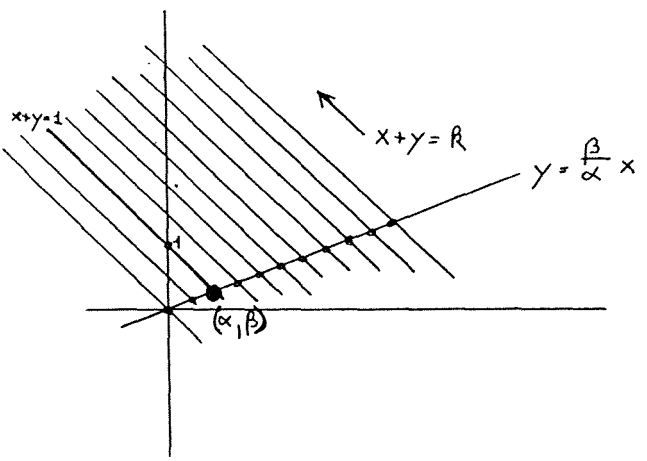
Let us have, at an initial state, a probability distribution of an event and his complementary (do not forget that we made our considerations for the case of the dimension 2) given by the vector $X(x_1,y_1)$, with $x_1 + y_1 = 1$.
We write:

$$(x_1,y_1)\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = (x'_1, y'_1)$$

or $X.A_{lim} = X'$.

Then $X' = (x'_1, y'_1) = (\alpha x_1 + \gamma y_1, \beta x_1 + \delta\gamma_1) = (\alpha(x_1 + y_1), \beta(x_1 + y_1))$.

It follows that: $\frac{y'}{x'} = \frac{\beta}{\alpha}$, or $y' = \frac{\beta}{\alpha}x'$.
So it is now clear that we are dealing with a degenerated affinity: all points of the plane are transformed in points of the line $y = \frac{\beta}{\alpha}x$.
But we have also to consider that $x_1 + y_1 = 1$, that means that we are transforming only the line $x+y = 1$, whose points are all transformed in the point (α,β).
Starting from any probability distribution X we arrive to the probability (α,β). The degenerated affinity can consequently be described as a sort of parallel projection, as in figure:



Example
A given system can perform, at a certain time interval, in a satisfactory (1) or in an unsatisfactory (0) way.

The probability of changing state is given by the matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (1) \\ \leftarrow (0) \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ (1) & (0) \end{matrix}$$

At the initial time interval B_0 the probability of 1 and 0 is:

$B_0 = (0,9 \;\; 0,1)$.

For the following time intervals we have:

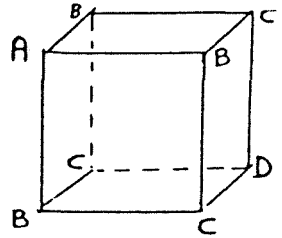
$$B_1 = B_0 \cdot A = (0,9 \;\; 0,1) \begin{vmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{vmatrix} = (0,62 \;\; 0,38)$$

$$B_2 = B_1 \cdot A = B_0 \cdot A^2 = (0,62 \;\; 0,38) \begin{vmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{vmatrix} = (0,67 \;\; 0,32)$$

We already see that the probability vector B_k is going to be stabile. For k $\rightarrow \infty$ $B_k = B_0$. A^k will become the united point of the transformation.
What we saw is a Markow Chain, t.i. a stochastic experiment in which the probability p_{ij} that trial outcome a_j will follow to trial outcome a_i is the same for every trial.

Analogous problems

Analogous problems can be solved without using the recursive procedure, by means of the linear systems. Let us take the famous example of the beetle moving random on the edges of a cube (see figure), starting from A, with a poison positioned in D.



The matrix showing the probability that the beetle goes from a vertex of type A, B, C or D to an adjacent one is the following:

atrix A by itself it is possible to see that in the last
es become each time larger, tending to the limit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e stability point is D(0,0,0,1).
e result solving the system given by X = A.X:

$$x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$\begin{aligned} &= x_1 \\ \tfrac{2}{3}x_3 &= x_2 \\ &= x_3 \\ x_4 &= x_4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_1 &= x_2 = 0 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(0,0,0,1).

induced us to begin this work was given, sooner than
problem of introducing linear algebra at school, by a
lem. A chemist submitted us a program which, with
l operations, solved the problem of the best superpo-
molecules, in order to operate a molecular substitu-
asked for the meaning of the sequence of algebraic
ng concepts of square matrices, symmetric and diago-
values a.s.o) which operated on the atomic position
e geometrical interpretation of the algebraic formulas
fy the whole procedure.

LINA MANCINI PROIA

LA GEOMETRIE AIDE LA COMPREHENSION DES CONCEPTS

LE modèle géométrique peut aider la compréhension de plusieurs arguments parce qu'il donne facilement la possibilité d'un appui concret, et en plus parce que plusieurs disciplines mathématiques ont leurs racines dans la géométrie, la plus ancienne des disciplines mathématiques.

Nous nous bornerons, dans cet exposé, à parler des matrices de transformation. Les matrices sont, tout d'abord, liées aux déterminants. On peut faire remonter l'introduction des déterminants à une lettre de Leibniz à Guillaume de l'Hôpital.
En effet il remplace l'écriture:

$$\begin{cases} a + bx + cy = 0 \\ d + ex + fy = 0 \\ g + hx + iy = 0 \end{cases} \quad \text{par} \quad \begin{cases} 1_0 + 1_1x + 1_2y = 0 \\ 2_0 + 2_1x + 2_2y = 0 \\ 3_0 + 3_1x + 3_2y = 0 \end{cases}$$

en utilisant deux indices pour déterminer la position de chaque coefficient, par exemple: 3_2 remplace le coefficient de y dans la troisième équation.
Plus tard les déterminants sont étudiés par Bezout (1739), Cramer (1750), Laplace (1770), Cauchy qui, lui, en donne un premier traité organisé.
Mais les matrices deviennent des entités indépendantes lorsque Cayley en 1858 les considère des transformations et commence à opérer sur elles.

LES OPERATIONS

Nous nous bornerons aux matrices carrées. Lorsque on introduit les opérations, en général, on donne les formules:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

Ceci est irréprochable du point de vue théorique, mais non du point de vue didactique. Considérons par exemple le produit. Si l'on suit la définition du produit de deux transformations on comprend les raisons du déroulement, en effet si l'on donne:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x'' = fx' + gy' \\ y'' = hx' + ly' \end{cases}$$

en composant on obtient:

$$x'' = (fa + gc)x + (fb + gd)y$$
$$y'' = (ha + lc)x + (hb + ld)y$$

d'ou la formule du produit des matrices.
A ce point on peut se demander ce qu'il arrive aux déterminants relatifs et on peut facilement démontrer, ne serait-il que pour les matrices du deuxième ordre, que: 'le déterminant du produit est le produit des déterminants'.

QUELQUES ARGUMENTS RELATIFS AUX MATRICES

Construction de l'unité
La transformation identique est:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

donc la matrice unité sera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

En plus nous pouvons affirmer que si les déterminants sont différents de zéro, les matrices, par rapport à la multiplication, ont une structure de groupe; il s'agit du groupe des affinités non dégénerées.

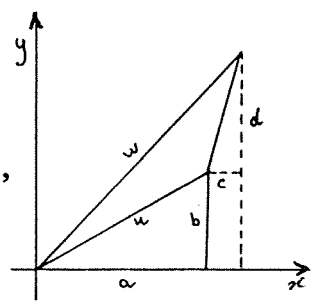
Addition de matrices
On peut justifier l'introduction de l'addition des matrices à partir des vecteurs.
Soient les deux vecteurs:

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; \quad u = ae_1 + be_2$$

$$v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}; \quad v = ce_1 + de_2.$$

La figure nous suggère la position:

$$w = u + v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix},$$



c'est à dire:

$$u + v = (a + c)e_1 + (b + d)e_2 .$$

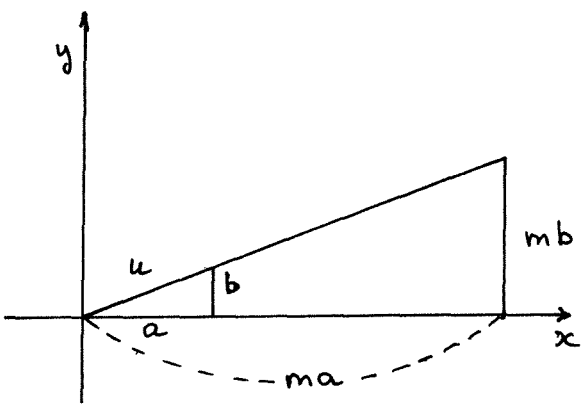
L'addition pour les matrices d'ordre supérieur devient simplement une extension:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne une structure associative; il s'agit d'un groupe dont l'on écrit facilement le neutre et l'opposée de chaque matrice.
On peut aussi observer que par rapport aux deux opérations d'addition et de multiplication on a obtenu une structure d'anneau.

Produit d'une matrice par un nombre
On peut procéder d'une pareille façon pour introduire le produit d'une matrice par un nombre. Commençons du produit d'un vecteur par un nombre; soit:

$u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



le vecteur considéré ; le théorème de Thalès nous permet d'écrire:

$$m\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma \\ mb \end{pmatrix}$$

Du point de vue géométrique il s'agit de la multiplication du vecteur donné par l'homothétie:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = my \end{cases};$$

c'est à dire:

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma \\ mb \end{pmatrix} .$$

Cela permet d'élargir cette dernière observation aux matrices d'ordre n'importe quel. C'est à dire le produit d'un nombre par une matrice:

$$m\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

devra être le produit d'une affinité par une homothétie:

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma & mb \\ mc & md \end{pmatrix},$$

c'est à dire:

$$m\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma & mb \\ mc & md \end{pmatrix}.$$

On a ainsi obtenu une structue d'espace vectoriel sur le corps des réels. Si l'on veut, on peut ajouter quelque chose à propos de l'extension des opérations aux matrices rectangulaires.

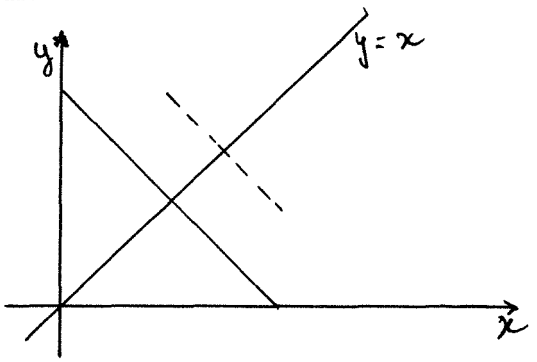
LES MATRICES ELEMENTAIRES

Interprétons géométriquement les matrices élèmentaires:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

il s'agit de la symétrie orthogonale:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

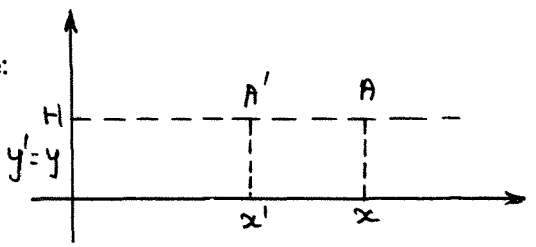


dont l'axe est la bisectrice du premier et du troisième quadrant,

b) $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ce qui est une homologie affine:

$$\begin{cases} x' = px \\ y' = y \end{cases}$$



d'axe y.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$

ce qui est la même transformation du cas précédent lorsqu'on change x par y, c'est à dire une homologie affine d'axe x:

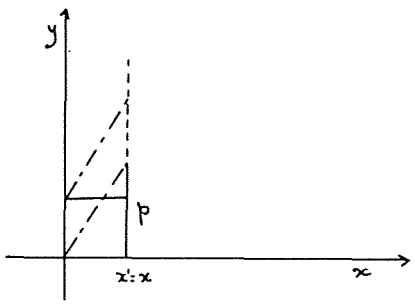
$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= py \ . \end{aligned}$$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}$,

il s'agit d'une homologie affine équivalent d'axe y:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = px + y. \end{cases}$$

e) $\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



ce qui est la même transformation du cas précédent lorsqu'on change x par y, c'est à dire une homologie affine équivalent d'axe x.

On peut énoncer le théorème: "En multipliant, par la suite, n'importe quelle matrice dont le déterminant est différent de zéro par de convenables matrices élémentaires on peut obtenir l'identité". Cela veut dire que chaque matrice peut s'exprimer par le produit de matrices élémentaires. Du point de vue géométrique cela signifie que "chaque affinité, non dégénérée et dont l'origine est unie, peut s'obtenir par le produit d'homologies dont les axes contiennent l'origine." Ce théorème est l'extension de celui relatif aux isométries: "Chaque isométrie dont l'origine est unie peut s'obtenir par le produit de symétries dont les axes contiennent l'origine." Sans démontrer le théorème relatif aux affinités, on peut donner une idée sur un exemple.
Nous avons considéré la matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

et nous avons trouvé que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{15}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est à dire:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{15}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

qui exprime ce que l'on doit démontrer.

LES ELEMENTS UNIS D'UNE TRANSFORMATION

Considérons, pour simplifier, une transformation du troisième ordre:

$$\begin{cases} x' = ax + by + cz \\ y' = a'x + b'y + c'z \\ z' = a''x + b''y + c''z \end{cases}$$

On obtient les éléments unis lorsqu'on a:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Les éléments unis peuvent être des directions unies, donc:

$$(1) \qquad \begin{cases} hx = ax + by + cz \\ hy = a'x + b'y + c'z \\ hz = a''x + b''y + c''z \end{cases}$$

c'est à dire:

$$\begin{cases} (a-h)x + by + cz = 0 \\ a'x + (b'-h)y + c'z = 0 \\ a''x + b''y + (c''-h) = 0 \end{cases}$$

Le système a des solutions différentes de zéro si le déterminant:

$$\begin{vmatrix} a-h & b & c \\ a' & b'-h & c' \\ a'' & b'' & c''-h \end{vmatrix} = 0$$

Nous avons ainsi obtenu l'équation caractéristique du troisième ordre en h qui nous donnera trois éléments unis. Les valeurs de h sont les autovaleurs et les vecteurs correspondants sont les autovecteurs.
La recherche des éléments unis d'une transformation est très importante pour les applications; par exemple le problème de l'accroissement d'une population a ses valeurs de stabilité dans les éléments unis. Vous en trouverez quelque chose dans l'exposé de mademoiselle Menghini.

Note
Reprenons la (1), on peut l'écrire vectorialement dans la manière suivante:

$$h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

et si X est le vecteur de composants x,y,z on peut écrire:

(2) $\qquad hX = AX .$

Quelqu'un pourrait penser de présenter immédiatement cette écriture très simple aux élèves; mais ce serait une grosse faute parce que la (2) est la syntèse d'un long raisonnement et il faut bien de temps pour que les élèves peuvent y arriver.

CHANGEMENT DE BASE

A est une matrice donnée, pour simplifier supposons-la du seconde degrée; elle transforme un vecteur X en un vecteur Y, c'est à dire:

$$Y = AX .$$

Si e_1, e_2 sont les vecteurs base de A, supposons de vouloir changer la base e_1, e_2 en e_1', e_2'.
Les quatre vecteurs e_1, e_2, e_1', e_2', sont complanaires, donc on pourra en exprimer deux à travers les deux autres.
Soit par exemple:

$$e_1' = b_{11} e_1 + b_{21} e_2$$
$$e_2' = b_{12} e_1 + b_{22} e_2$$

La matrice qui permet la transformation est alors la suivante:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} .$$

Par B on a: $X \to BX \qquad Y \to BY,$

et $Y = AX$

devient: $BY = ABX$

d'où: $Y = B^{-1} ABX.$

Donc, pour obtenir le transformé du vecteur X on doit multiplier X par:

$$B^{-1} AB .$$

En plus, si l'on transforme une matrice A avec une matrice B on obtient une autre matrice D:

$$D = B^{-1} AB .$$

On dira alors que A et D sont des matrices semblables; étant B une matrice non dégénérée. Le problème de la transformation d'une matrice A devient particulièrement intéressant lorsqu'on passe d'un système de référence à un autre système qui a pour base les autovecteurs.
Considérons un exemple; soit la transformation:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 8x + 3y \end{cases}$$

dont la matrice est:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer les éléments unis nous devons résoudre le système:

$$(1) \quad \begin{cases} hx = x + y \\ hy = 8x + 3y \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} x(1-h) + y = 0 \\ 8x + (3-h)y = 0 \end{cases}.$$

Il s'agit d'un système homogène, qui a des solutions différentes de zéro si:

$$\begin{vmatrix} 1-h & 1 \\ 8 & 3-h \end{vmatrix} = 0$$

c'est à dire:

$$(1-h)(3-h) - 8 = 0.$$

Les solutions de cette équation sont $h = -1$, $h = 5$. En remplaçant ces valeurs de h en (1) nous obtenons deux directions unies $y = -2x$, $y = 4x$. En choisissant un vecteur pour chaque direction, par exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

nous obtenons la matrice recherchée et sa réciproque:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Donc:

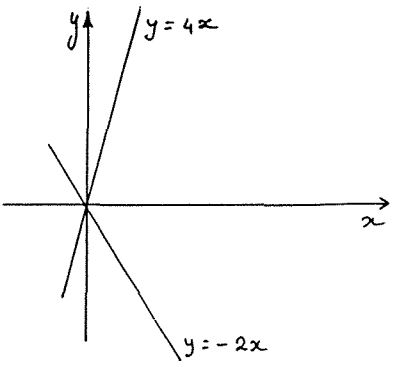
$$D = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Ce qui est une transformation très simple:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = 5y. \end{cases}$$

D est une matrice diagonale parce que les éléments qui ne se trouvent pas sur la diagonale principale sont zéro. Mais, allons voir ce qu'il arrive du point de vue géométrique. Dans la figure nous avons dessiné les droite unies par la transformation A.
B transforme les axes coordonnées en les deux droites considérées.
En effet:

$$y = 0 \rightarrow y = -2x$$
$$x = 0 \rightarrow y = 4x.$$



A ne déplace pas ces droites et B^{-1} ramène ces deux droites sur les axes coordonnées.
En effet:

$$y = -2x \rightarrow y = 0$$
$$y = 4x \rightarrow x = 0.$$

Pour transformer A en forme diagonale nous nous sommes servies d'une affinité telle que B. Il est extrêmement probable que si les autovecteurs de A sont perpendiculaires entre eux il suffit que B soit une isométrie.

LA FORME DIAGONALE DES MATRICES

Posons la question: Est-il toujours possible de transformer une matrice A, non dégénérée, en une matrice D diagonale, de sorte que A et D soient semblables? Il est très probable que la chose soit possible si les racines caractéristiques de A sont distinctes, mais cela n'est pas nécessaire.
Voici un exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

dont l'équation caractéristique est:

$$\begin{vmatrix} 2-h & 2 & 1 \\ 1 & 3-h & 1 \\ 1 & 3 & 2-h \end{vmatrix} = 0$$

c'est à dire:

$$h^3 - 7h^2 + 11h - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad (h-1)^2(h-5) = 0.$$

La racine double h=1 donne le plan de points unis:

$$x + 2y + z = 0.$$

ce qui implique nécessairement deux vecteurs linéairement indépendants pour le déterminer; il s'agit dans ce cas d'une homologie de l'espace.

Voulant généraliser l'on peut démontrer que: "une matrice est semblable à une matrice diagonale si et seulement si les autovecteurs sont linéairement indépendants".
Géométriquement: une transformation, d'ordre n, peut se mettre sous la forme:

$$x_1' = a_1 x_1$$

si ses éléments unis sont tels qu'on peut les assumer comme système de référence d'une espace S_n. Par conséquent une affinité comme celle déjà considérée (v.d. pag.147):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = px + y \end{cases}$$

ne peut pas se réduire encore parce qu'elle a une droite de points unis et un autre point uni appartenant à cette droite.

MATRICES SYMETRIQUES

Dans cette perspective les matrices symétrique sont particulièrement importantes. Rappelons que l'on dit matrice symétrique celle ou pour chaque i.j l'on a:

$$a_{i,j} = a_{j,i}.$$

Nous avons le théorème: une matrice symétrique a toujours les racines caractéristiques réelles et les autovecteurs orthogonaux.

Cela entraîne que l'on peut toujours transformer une matrice symétrique en diagonale en se servant d'une isométrie et de sa réciproque.

Pour conclure il faut ajouter que en didactique il peut être très important de chercher la génèse des théories. En effet le développement d'une branche particulière d'une théorie mathématique peut générer une autre théorie qui, une fois suffisamment développée, se détache de la théorie originaire pour former une théorie indépendante. Très souvent dans l'enseignement, on oublie les origines historiques des théories et cela n'aide pas la compréhension de la théorie elle-même, alors qu'une reconstruction historique de l'argument peut être très utile du point de vue didactique. La géométrie, qui est la plus ancienne des disciplines mathématiques est liée à beaucoup de ces théories et peut donc être bien utile dans l'enseignement.

Jusqu'à présent nous avons parlé des matrices parce que notre exposé veut se lier à celui de mademoiselle Menghini. Mais, naturellement, nous aurions pu trouver d'autres moyens pour soutenir notre thèse sur l'importance didactique de la génèse des problèmes, comme l'introduction de l'analyse mathématique à partir de sa démarche historique qui est très seduisante et bien compréhensible pour tous les élèves.

Lina Mancini Proia
Rome/Italy.

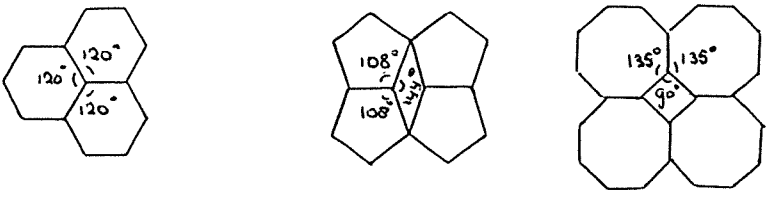
IDA SACCHETTI

TESSELLATION - ECOLE PRIMAIRE, V CLASSE

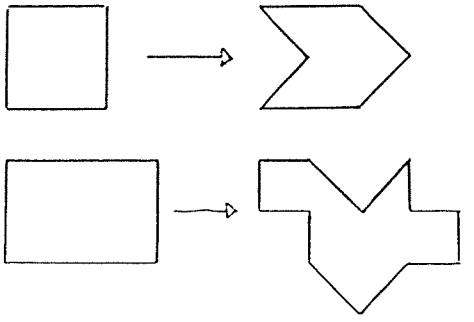
DANS mon école, au début de la cinquième classe, ayant fait expériences de translation, rotation et symmétrie, est né le problème de la couverture du plan.
On a fait un travail exploratif et on a découvert que il y avait seulement des polygones qui couvraient le plan.

Polygones qui couvrent le plan	Polygones qui ne couvrent pas le plan
Parallélogrammes hexagone régulier trapèze triangles	Polygones réguliers: pentagone heptagone octogone

La chose a mené à réfléchir sur les angles:



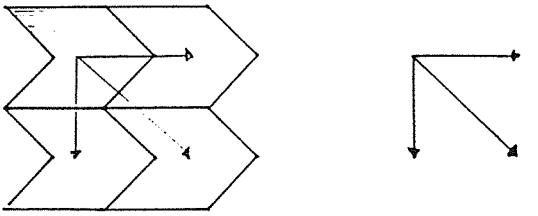
Le pas successif a été: transformer les polygones trouvés en autres polygones qui couvrent le plan.



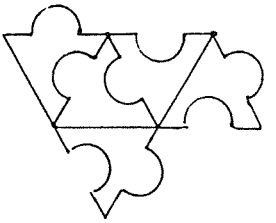
Quelques fois, pour obtenir les tessellations, les enfants ont adopéré des petits modèles en papier. Souvent ils ont dessiné sur papier quadrillé.

Les tessellations ont été coloriés avec deux ou plusieurs couleurs. Successivement on a cherché d'examiner les travaux terminés pour

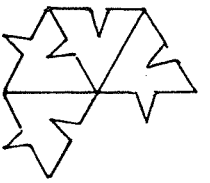
prendre conscience de ce qu'on avait fait. Dans un premier moment on a representé les transformations en glissent les modèles en différents directions. Après la chose a été resumé avec vecteurs.



Après on a découvert dans certains tessellations une rotation et une translation comme dans le cas:



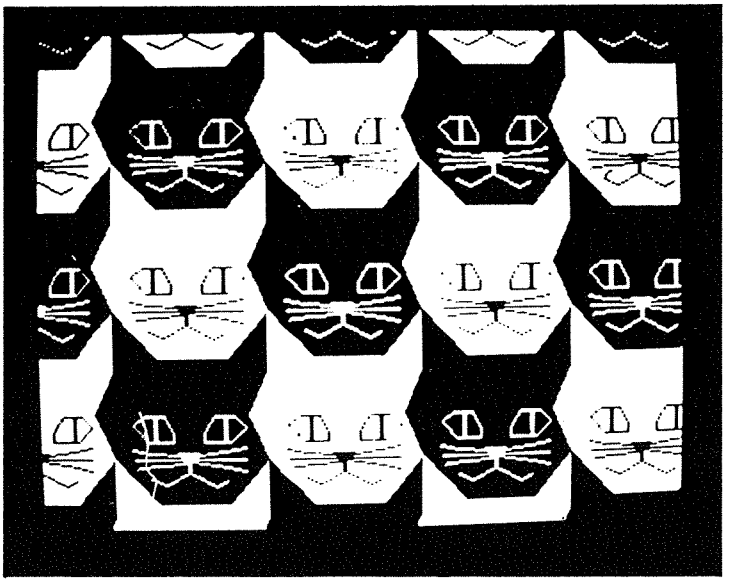
Ou une rotation et une symétrie:



Les enfants ont réfléchi sur le coloriage des tessellations. Ils se sont aperçus que presque tous avaient colorié des polygones proches avec des couleurs différents et que dans chaque tessellation on pouvait découvrir une régularité dans la distribution des couleurs. Cette distribution, dans la majorité des cas était une rotation:

a	b	c
b	c	a
c	a	b

Cela nous a introduit aux problèmes de combinatoire.



Ida Sacchetti
Ecole primaire
Roma/Italie.

CRISTINA MOSTACCI

LA SITUATION DE PROBLEME POUR LES ENFANTS QUI ACCEDENT A L'ECOLE MOYENNE

LE group GRIM s'occupe depuis plusieurs années de recherche et expérimentation en didactique des mathématiques au niveau d'école obligatoire (6-14 ans). Les procédés d'apprentissage et de la formation des concepts mathématiques, proposés en respectant les indications de nos programmes ministériels constituent notre ligne privilegiée de recherche.
L'actuation de projets didactiques qui utilisent l'ordinateur - outil déjà introduit bien souvent d'une façon sauvage dans nos maisons et dans nos écoles - nous avons causé beaucoup de moments de réflexion.

Une question fondamentale, à notre avis, est la suivante: puisque l'ordinateur joue son rôle premier - nous avons choisi de poser l'élève comme sujet du rapport homme-machine - dans la solution de problèmes quelconques, qui se présentent dans la sequence 'sujet-obstacle-but', ou bien, comme propose Polya: 'inconnu- donnés-condition', comment se posent les enfants qui accèdent à l'école moyenne dans la situation de problème? Quelle aptitude à reconnaître, développer, formaliser, résoudre un problème peut-on s'attendre d'eux?

SUJET DE L'ETUDE

En accord avec G.Brousseau: "un élève ne fait pas de mathématique s'il ne se pose et ne résoud pas de problèmes", on a encore remarqué: quel est, ou quels sont les modèles de problème que les élèves ont acquis après cinq années d'école primaire et comme expérience activée dans, ou par, leur contexte sociale.

Nos objectifs
Il fallait avoir des indications suffisamment acceptables et rigoureuses, avec plusieurs moments d'expérimentation, sur les questions suivantes:

1. Qu'est-ce que c'est qu'un 'problème' pour l'élève qui sort de l'école primaire?
2. Comment et s'il reconnait une situation de problème?
3. Quels procédés mentals sont utilisés pour reconnaître ou non une telle situation?
4. Quels procédés de solution il active pour résoudre la situation qu'il considère de problème?
5. Quelle logique pour aboutir à la solution; logique des stratégies, logique du calcul?
6. Quels sont les obstacles qu'il rencontre quand il se trouve à affronter des problèmes différents de ceux qu'on lui propose d'habitude?

7. Quels problèmes il a traités dans l'école primaire?
8. En quelle mésure la 'motivation' agit sur les capacités et développe des aptitudes?
9. Quel rôle joue l'environnement social et culturel de l'élève?
10. De quelle façon il utilise les informations - il reconnait les informations?
11. Combien influe sa 'subjectivité'?
12. Il est capable, et en quelle mesure, de comprendre l'énoncé du problème et quelle structure linguistique il considère typique d'un problème?

NOTRE PREMIERE EXPERIMENTATION

Méthodologie

Nous avons conçu et proposé huit tests en tenant compte de l'éducation mathématique des écoles primaires, en analysant les livres officiels utilisés et les cahiers de beaucoup d'élèves.

Nous avons constaté que:

— Dans l'école primaire l'on donne des problèmes de mathématique qui ont une configuration standardisée.
— On ne s'occupe pas de récouvrir le 'sens commun' et de mathématiser le réel.

Les tests

— Un paysan est propriétaire d'un champ dont l'aire mesure 1000 mètres carrées. Il le cultive en froment et dans une année il produit deux quintals de blé. Le paysan sera-t-il satisfait de la récolte s'il vend le blé à Lit. 1.000.000?
— Une tarte coûte 10.000 Lit.; un billet pour le stadium Lit. 5.000. Combien coûtera-t-il un billet pour le cinéma?
— Tu es en train de fuir parce qu'un ami à toi veut te donner des poings. Tout à coup la route que tu as prise est obstruée par un mur. Qu'est-ce que feras-tu?
— Il faut que tu mesure la longueur et la largeur de ta chambre et que tu établies s'elle est carrée on rectangulaire. Tu dispose d'un pélote de ficelle.
— Combien d'argent avais-tu dans ta poche si tu as dépensé Lit. 1.500 pour acheter des journaux, Lit. 800 en patisserie, Lit. 500 pour ta collection et tu possèdes encore quelques centaines de Lires?
— Pour ton anniversaire on t'a donné Lit. 20.000. Tu peux t'acheter quelque chose ou bien les garder. Qu'est-ce que penses-tu faire?
— Tu as lu une histoire que tu as bien aimée. Tu veux la réaliser avec tes amis. Mais vous êtes seulement 4, tandis que les personnages de l'histoire sont 5. Comment peux-tu résoudre la question?
— Charles doit aller dans un lieu où il a un rendez-vous avec ses camarades pour jouer. Il doit parcourir 3 km. Il doit se hâter parce qu'il est en retard, mais il se fatigue tout de suite et il emploie une heure et demie de temps.
S'il a parcouri 500 m en courant et 1500 m au pas, à quelle heure

est-il arrivé?
Les classes où l'on a proposé les tests sont neuf, appartenant aux écoles moyennes de la ville (deux classes) et de la banlieu (sept classes).
Les élèves ont été 184, dont la plupart accédait pour la première fois à l'école moyenne: les autres (à peu près 30) répétaient la classe. Ils s'agissaient de classes mixtes; une classe simplement était formée de garçons. Les tests ont été proposés par les enseignants de mathématique, qui n'avaient pas proposé aucun problème en avant.

On a donné aux élèves un papier où l'on avait écrit par la machine à écrire les huit tests, avec cette seule indication: "Lisez avec attention les situations qu'on vous présente et dites, par chacune, s'il s'agit d'un problème ou non. Motivez votre réponse en écrivant tout ce que vous pensez et en developpant ceux que vous considérez des problèmes sur le papier blanc qu'on vous donne aussi."
Les élèves pouvaient disposer de deux heures de temps. On a aussi ajouter "qu'il se traitait de travailler tous seuls parce qu'il était très important pour l'enseignant de connaître 'vraiment' ce que pensait chaque élève pour mieux travailler ensemble ensuite. Il fallait que chacun montrait sa propre habileté, sans aucune préoccupation. Après on aurait discuté ensemble."

Ensuite on n'a plus parlé de ces tests pour un mòis environ, mais l'on a proposé plusieurs situations de problème, que l'on pourrait classer en trois types:

1. problèmes classiques;
2. problèmes casse-tête;
3. problèmes de la vie réelle.

En ce moment-là on a discuté avec les élèves pour se rendre compte de la compréhension des énoncés, pour clarifier le contexte, pour séparer des données celle qu'on a appelée 'partie narrative', pour développer des stratégies de solutions communes, en essayant d'aboutir à une certaine classification.

On a enfin repris les tests et, en utilisant un magnetophone, on a enregistré - de la lecture haute voix de chaque test jusqu'à la solution - la discussion qui va sortir parmi les élèves sur le test lu , sur son être ou non un problème et pourquoi.
Dans cette phase l'élève est mis dans une situation sociale et le but est celui de chercher 'une solution de group'. On arrive à une solution de groupe quand la nécessité de se mettre tout d'accord sur une seule réponse, pousse à extérioriser, expliquer, transmettre tout ce que l'on pense avec le but de convaincre les autres.
Avec cette méthode on a réjoint de bons résultats soit du point de vue de l'explicitation des raisonnements (les élèves s'efforcent d'être clairs, d'utiliser une bonne langue, de traduire en mots leurs pensées), soit du point de vue de la formation du concept de problème.
Mais il a fallu beaucoup de temps (deux heures par test environ).

PREMIERE INTERPRETATION DES RESULTATS

Par l'analyse des protocoles, on a pu constater l'existence de:

1. Deux différentes modélisations du concept de problème:
   a. Question qui attend une solution par des procédés scientifiques; on applique la séquence sujet-obstacle-but où bien: inconnu-données- conditions.
      On peut supposer une pensée dynamique et une position d'objectivité dans les élèves. Ce modèle concerne les tests à configuration classique.
   b. Difficulté tout court, 'ce qui est difficile à expliquer'. La position mentale est très subjective. Les élèves constatent simplement l'existence ou non d'une difficulté. Il s'agit d'une pensée statique. Ce modèle est instauré dans les tests à configuration pas classique.
2. La plupart des élèves considère un problème n'importe quelle situation où l'on dispose de nombres.
   Dans ce cas-là on a observé:
   a. Pour ces élèves la structure typique d'un problème est constituée par un contexte narratif qui contient des nombres liés à coûts, mesures ou un point interrogatif à souligner une question.
   b. La logique de la situation n'est pas, presque tout à fait, considérée.
   c. La logique des opérations non plus: l'on fait des opérations les plus absurdes sur les nombres dont on dispose.
3. La présence, dans les stratégies de la pensée exprimées par les protocoles, de l'Einstellung. C'est à dire la tendance à chercher de préférence, et parfois exclusivement, la solution le long de certaines directions qui sont, pour l'élève, pleines de promesses mais en réalité pas productives. On a observé cette tendance aussi au moment des solutions de groupe.

CONCLUSIONS

On est en train de conduire des analyses plus spécifiques sur ce travail qui nous a fourni beaucoup d'autres informations. La problématique soulevée par nos objectifs doit être approfondie par d'autres études, puisque nous croyons que l'école doit se rendre compte, enfin, que ce n'est plus possible de scinder la recherche théorique de la pratique didactique.

Cristina Mostacci
GRIM, CNR - Università di Palermo
Palermo/Italie.

REFERENCES

[1] Polya: *Come risolvere i problemi di matematica*, Feltrinelli 1967.
[2] Brousseau, G.: *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*, Recherche en didactique des mathématiques, vol 4, nr 2, 1983.
[3] Borasi, R.: *Che cose un problema? Considerazioni sul concetto di problema e sulla sua utilizzazione nella didattica della matematica*, L'insegnamento della matematica, 1984.
[4] Claparede, E.: *La genèse de l'hypothèse*, Archives de Psych., 1933.
[5] Lucins, A.S.: *L'effetto dell'Einstellung*, Psych. Monog. 1942, nr.218.

PAUL BUNGARTZ

TEACHING APPLIED MATHEMATICS: THE GEAR OF A MOTOR-CAR AND THE GAUSS' DISTRIBUTION

WE visited the Ford-Werke Köln and asked for real applications of mathematics. They informed us of the mathematical problems in the construction of the gears of motorcars. We used these informations to develop a teaching sequence in stochastics:

1. We work out the technical problem of a gear, how it works and how it is constructed out of cog-wheels, ball-bearings a.s.o.
2. We explain the mathematical problem and get a first solution by using mean values.
3. The solution is unsuitable, we have to look for better mathematical instruments.
4. We destinate a continuous function, the Gauss' distribution, and solve the problem.

Didactical remarks

I think pupils are very interested in motor-cars, they much better know the functions of a gear than the teacher, they are well motivated to treat the object. I am sure they would like to visit motor-car works, they are interested in the informations, perhaps they can do the random test in the depot. The supervising engineer will explain the solution of the problem by Gauss' function, but the pupils will not understand it totally, a very good reason to teach it.

Explanation of the technical problem

In a gear-box you have several cog-wheels sitting on a main spindle and a second spindle. The cog-wheels on the second spindle are fixed, on the main spindle they are movable, only that one which transfers the power from the motor to the wheels is fixed and gears into a cog-wheel on the second spindle. The cog-wheels are transmitted to the right position by a contact-lever and a coupling-box using synchronizing gears and a rubbing clutch with inner and outer cone.

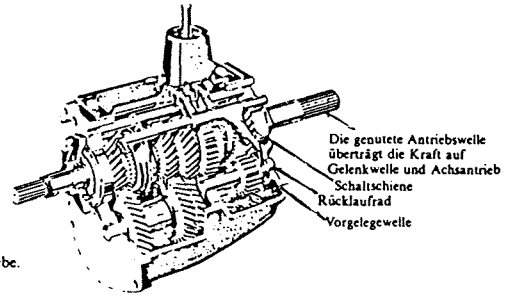


Fig. 1 Ein typisches Vierganggetriebe.

The problem constructing a gear is the breadth of the single parts: cog-wheels, ball-bearings a.s.o. The production of these parts is not as correct as wanted.
We reduce the problem on a small part of the gear:

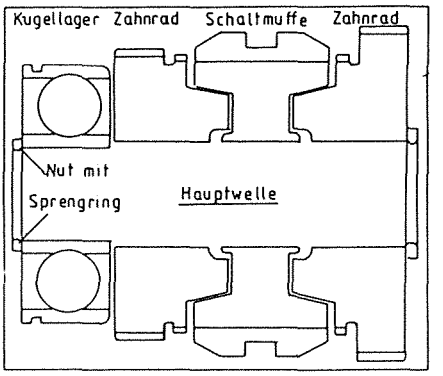


Fig. 3 Längsschnitt einer Getriebehauptwelle, Teilausschnitt

In that part are six things which should have exactly the given size:
2 spring-rings: 5 mm each; 1 ball-bearing: 46 mm;
2 cog-wheels: 60 mm each; 1 coupling-box: 30 mm;
distances: 4mm.
Therefore the distance of the rabbets at the end of that part of the gear should be exactly 210 mm. Now the problem is, the cog-wheels a.s.o. are not of the demanded breadth, some are smaller some are wider. Shall we mill the rabbets in a distance of more than 210 mm or less?

Remark: When the Ford-Werke use the Gauss' distribution to solve the problem they reduce the costs about 5 DM per gear, that means if they produce 200.000 gears a year they get savings of 1 million DM a year!

Efforts to solve the problem by using the average
We write down the data of a sample taken at random:

Tab. 1 Häufigkeitsverteilung der Zahnradstärken;
Klassenbreite 0,1 mm, n = 80.

d_i	$H(d_i)$	$h(d_i)$
59,5	1	0,013
59,6	2	0,025
59,7	2	0,025
59,8	9	0,113
59,9	17	0,213
60,0	20	0,250
60,1	16	0,200
60,2	6	0,075
60,3	3	0,038
60,4	2	0,025
60,5	1	0,013
60,6	1	0,013

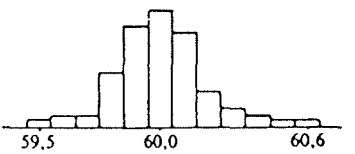


Fig. 4 Blockdiagramm zu Tab. 1

I only show you the table and the diagram of the cog-wheels, we also have them of the spring-rings, coupling-boxes and ball-bearings.
We compute the mean values of the deviations by the formula:

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i} H(d_i)\,|\,d_i - m\,|\,:$$

cog-wheels: a(ZR)= 0,14; spring-rings: a(SR) = 0,09;
coupling-boxes: a(SM) = 0,16; ball-bearings: a(KL) = 0,16.
We consider that the average deviation of the sum is equal or less than the sum of the averages and compute: a(sum) $\leqslant$ 0,78.
We try to estimate the probability of a deviation of more than c of the mean value:

$$P(|d-m|>c) = \sum_{|d-m|>c} h(d_i).$$

If we assume c = 1 we get:

$$P(|d-m|>1) = 0{,}78.$$

That means we computed that ca 78% of the cog-wheels deviates more than 1 mm (!) from the mean value m = 60 mm. If we look at the data-table we recognize that this is an unsuitable statement.

We are forced to develop more exactly the mathematical means
We define the mathematical notions: set of items, sample taken at random, random variety, mean value, relative frequency, a.s.o. The theorem of Tschebyscheff is formulated and proofed. We discuss the connections between probability and relative frequency and stochastically independent random varieties.
Applicating Tschebyscheff's unequality we get for the cog-wheels:

$$P(|d-m|>0{,}35) = 0{,}294.$$

That means nearly 30% of the cog-wheels differ more than 0,35 mm of the mean value. Even that is no good statement. Of course if we look at the facts in the above table a deviation of more than 0,35 mm occurs only in ca 9%.

We try to find a continuous function which describes the data
There are a lot of data and we look for a suitable function to describe them. Repeat your knowledge of calculus. The block-diagrams be partwise described by a parabola $p(x) = -ax^2$. Remember the properties of the exponential function e^x. The composition of both gives us $f(x) = e^b.e^{-ax^2}$. Again we repeat calculus to get an information of the graph of that function. It seems to be suitable for our purpose, but look at the diagrams: they depend on the exactness of our measurement : one diagram with the exactness of 0,1 mm is quite different from that of the exactness of 0,05 mm (p.e. of the cog-wheels). But if we sum up the relative frequencies and look at the according diagrams we see that they are nearly the same. Remembering what we did in the sense of calculus we recognize that we have to compute the integral-function:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{b}\cdot e^{-a(t-\mu)^2}\,dt.$$

Destination of the parameter:

1. $a = 1; b = 0; \mu = 0$ gives us:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1,7724 \qquad (= \sqrt{\pi}).$$

(Use a pocket-computer!)

2. F(x) should be a probability distribution:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$$

We get:

$$\frac{1}{1,7724} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b} \cdot e^{-a(t-\mu)^2} dt = e^{b} \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Assume $b = 0$.

3. We compute the mean value and get μ.
4. We compute the variance σ^2 and get $a = \frac{1}{2\sigma^2}$

The function we destinated is the well-known Gauss' distribution, it is tabulated in each school book.

Application to the problem

Again we compute the probability for the cog-wheels but now using the Gauss' function F:

$$P(|x-60| > 0,35) = 2(1-F(1,84)) = 0,0658.$$

That means: ca 6,6% of the cog-wheels differ more than 0,35 mm from the mean value 60 mm. Looking at the data-table again we see that in fact 9% of the cog-wheels differ more than ... Discuss the result! Assuming that the sum of several Gauss' distributed random varieties is again Gauss' distributed we now answer the question: what should be the distance of the rabbets if we demand a loss of 5% only.
We find the constant c computing:

$$P(|d_s - \mu_s| > c) = 0,95; \ \ldots; \ F(\tfrac{c}{\sigma}) = 0,975.$$

The table of F gives us $F(1,96) = 0,975$, that means $c = 0,756$.
The solution of the problem is:
The rabbets on the main-spindle should be milled in a distance of 210,76 mm. Than we can expect a loss of 5% or less. That's a good statement for industrial production.

Probability-net

If there are any data arising in industrial productions how can we decide whether they are Gauss' distributed or not? You may draw the

data-points in an ordinary coordinate-sheet and look at the graph. Does it look like the graph of a Gauss' function or not? It will be difficult to decide that! It will be better to 'linearize' the coordinates so that the graph of the Gauss function F becomes a straight line. That's done in the so-called 'Probability-net': the x-axis is linear, on the y-axis you find $y' = F(y)$. If you list the data in such a sheet and if the points then lay on a straight line the data are Gauss' distributed. Easily you find the mean-value m and the standard-deviation s. In some school books you find reproduction of the 'nets'.

Final remarks

I hope you got an impression of what I mean with 'teaching applied mathematics'. I published it in 'Didaktik der Mathematik', Heft 2 und Heft 3 1985, Bayerischer Schulbuchverlag München.
The title there is: *Toleranzen im Getriebe eines Autos und die Normalverteilung*.
If you would like to have a reprint please write me a letter.

Paul Bungartz
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Bonn/W.Germany.

LUCAS GIMENO BLASCO

A SHORT STUDY ABOUT INTERDISCIPLINARY MATHEMATICAL MODELS

THE word Interdisciplinarity is nowadays used more frequently: Areas of Subject Coordination, Interdisciplinary Seminars, etc. have been established in the last few years.

The great advances of Mathematics and its extensive and useful application to other disciplines, principally Physics and Astronomy, made Galileo exclaim: "the book of Nature is written in mathematical characters."

From this idea arose a desire to mathematize all sciences (to begin with, the experimental ones). It was even considered that a science would be that much more perfect the more its problems could be treated by mathematical models. In this exaltation of the possibilities of Mathematics from Galileo onwards, inadequate applications have been produced, and, as a result, non-scientific works. Thus, the work of the nineteenth century German L.Halbenicht *Analytical forms of leaves* is of no scientific use at all: two leaves from the same tree are not normally similar; each leaf changes its shape according to its age. Such works compromise the use of Mathematics in Biology.

At times, results that have been properly obtained mathematically are wrongly extrapolated in their application. In their article *The sociology of Suicide*, published in the journal 'Mundo Científico' (number 45, March 1985), Cristian Baudelot and Roger Establet try to establish a relationship between the percentage of suicides and the state of loneliness of such people. They separate the weekly suicides into three groups: married people; widowers, widows, separated and divorced; single people. They take the number of suicides from each group that occurs on Sunday and divide it by the weekly total of each group, obtaining the following figures: 12.3%, 13% and 14% respectively. From their results they get the solution they wanted: loneliness foments suicide.

Let us now analyse this interdisciplinary situation of the application of Mathematics to Sociology. The data on suicides is taken from public records.

Our first question is: "Have these deaths been correctly identified?" Some situations are not always so clear; for example: someone suffering from psychological problems who has drunk rather too much, swallows a lot of pills. Did he do it unconsciously or did he do it to commit suicide?

Another example: the family doctor, knowing the family well, certifies as death by natural causes what has been a suicide. Cases such as these may well be few, but mathematically they must be taken into account in the form of a limit of absolute error and its consequent relative error, something not cited by the authors of this study. The differences

between the percentages quoted earlier (small enough as they are) may be among the levels of the limits of error. In my opinion, these differences cannot be considered sufficiently significant to affirm that *loneliness foments suicide.*

AN EXAMPLE OF THE CALCULUS OF LINGUISTIC CONSTANTS

Students of Humanities in their last year at school before university entrance who had chosen Mathematics as one of their subjects, were initiated into the calculus of linguistic constants by trying to determine certain constants in the work of the English novelist Kingsley Amis. The novels *Take a girl like you* and *Lucky Jim* where chosen for the experiment.

Pupil A was given the task of preparing forty samples, chosen completely at random, of one hundred consecutive words in each of the works mentioned, and counting in each sample those words beginning with the letter A. The idea was to try to determine whether in the novels of Kingsley Amis a constant relative frequency of words is beginning with the letter A, or whether they can be assigned an interval into which their relative frequencies fit.

Pupil A found for *Take a girl like you* : $f_r = 9.3\%$ with $\sigma = 2.2\%$; for *Lucky Jim* : $f_r = 9.175\%$ and $\sigma = 2.5$.

Applying student's criteria for the contrast of mean values, both mean values with a reliability superior to 95% could be variants of a same relative frequency for both works with a value close to 9%.

The teacher in charge of the experiment was surprised by the closeness of the relative frequencies, and proceeded to revise the samples, finding errors in the underlining of words beginning with the letter A and in their counting.

He obtained the following statistical tables:

Take a Girl		Lucky Jim	
40 samples of 100 consecutive words		40 samples of 100 consecutive words	
Number of words beginning with A in each sample	Number of samples	Number of words beginning with A in each sample	Number of samples
7	2	5	1
8	5	6	3
9	5	7	1
10	8	8	2
11	4	9	7
12	7	10	4
13	4	11	2
14	2	12	7
15	2	13	5
19	1	14	2
		15	4
		16	1
		19	1
Total number of words: 4000 Beginning with A: 436 m = 10.9%, σ = 2.4576		Total number of words: 4000 Beginning with A: 443 m = 11.075%, σ = 1.15	

Other pupils were given new tasks. Through a mixture of playing cards and dices, pages and parts of pages to carry out the counting were chosen. Two new series of 40 samples of 100 consecutive words for each of the two works mentioned were confected. Furthermore, in order to carry out contrast tests, for *Take a girl* a series of 60 samples of 200 consecutive words was prepared, and for *Lucky Jim* one of 50 samples with the same characteristics. All the results were checked by this teacher. In a new check of various samples chosen at random no error was found.

Take a Girl like you					
Second series: 40 samples of 100 words Begin with A	N. of samples	Third series: 40 samples of 100 words Begin with A	N. of samples	Contrast series: 60 samples of 200 words Begin with A	N. of samples
6	3	3	1	13	1
7	4	4	1	15	4
8	4	5	1	16	3
9	5	6	1	17	4
10	1	7	5	18	5
11	3	8	3	19	3
12	3	9	6	20	7
13	5	10	5	21	3
14	4	11	3	22	3
15	1	12	4	23	8
16	2	13	4	24	3
17	1	15	2	25	4
18	2	16	2	26	2
20	1	18	1	27	3
22	1	20	1	28	2
				29	3
				32	2
Total number of words: 4000 Begin with A: 465 m = 11.625% σ = 4		Total number of words: 4000 Begin with A: 414 m = 10.35% σ = 3.55		Total number of words: 12000 Begin with A: 1,301 m = 10.84%	
Lucky Jim					
Second series: 40 samples of 100 words Begin with A	N. of samples	Third series: 40 samples of 100 words Begin with A	N. of samples	Contrast series: 50 samples of 200 words Begin with A	N. of samples
2	1	5	4	13	3
6	2	6	3	14	2
7	3	7	7	15	3
8	6	8	2	16	7
9	5	9	4	17	5
10	4	10	3	18	1
11	5	11	4	19	5
12	8	12	3	20	6
13	4	13	6	22	4
14	1	14	3	23	5
16	1	17	1	24	2
				27	1
				28	1
				30	2
				33	1
				34	1
				35	1
Total number of words: 4000 Begin with A: 401 m = 10.025%		Total number of words: 4000 Begin with A: 386 m = 9.65% σ = 2.26		Total number of words: 10000 Begin with A: 1030 m = 10.30%	

The mean value of the three series of 40 samples in *Take a girl like you* is 10.96%, and the mean value in the contrast series is 10.84%. The closeness of these mean values is a garantee of the proper carrying out of the calculations. The mean value of these two values just cited is therefore 10.9%, which coincides with the percentage of the first series.
The mean value of the three series of 40 samples in *Lucky Jim* is 10.25%, and the mean value in the contrast series is 10.30%. Again the proximity of these results guarantees the proper carrying out of the calculations. The mean value of these four values just cited, taking into account the number of words involved (12000 and 10000 respectively), is $10.\widehat{27}\%$.
Having determined these relative frequencies of 10.9% and $10.\widehat{27}\%$ respectively, the work of the pupils finished, since they lacked sufficient knowledge to be able to continue with the statistical work.

For the true relative frequencies of the two novels cited, the teacher determined confidential intervals with an exactness of calculation (at level) of 95%. To get that he determined the typical deviations of the relative frequencies cited earlier.

For *Take a girl like you* ,

$$\sigma = \sqrt{f_r(1 - f_r)} = \sqrt{0.109 \times 0.891} = 0.31164.$$

The number of sample words was 24000; therefore, the confidential interval with a reliability of 95% turned out to be:

$$\left(0.109 - \frac{1.96 \times 0.3116}{\sqrt{24000}} \; , \quad 0.109 + \frac{1.96 \times 0.3116}{\sqrt{24000}}\right);$$

carrying out the calculation:

(0.1051, 0.1129); in %: (10.51%, 11.29%).

For *Lucky Jim*,

$$\sigma = \sqrt{f_r(1 - f_r)} = \sqrt{0.10\widehat{27} \times 0.89\widehat{72}} = 0.3036.$$

The number of sample words was 22000; therefore, the confidential interval with a reliability of 95% turned out to be:

$$\left(0.10\widehat{27} - \frac{1.96 \times 0.3036}{\sqrt{22000}} \; , \quad 0.10\widehat{27} + \frac{1.96 \times 0.3036}{\sqrt{22000}}\right)$$

carrying out the calculation:

(0.0987, 0.1067); in %: (9.87%, 10.67%).

CONTRAST OF THE TWO RELATIVE FREQUENCIES

Since both intervals overlap to the extent of 0.16%, it was decided to analyse whether both relative frequencies are variants in a binomial

distribution of a relative frequency common to both works (zero hypothesis) or whether they are variants of different relative frequencies (alternative hypothesis).

Using the criterion Z and the Laplace's table Φ (t):

$$Z = \frac{f_{r_1} - f_{r_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{0.109 - 0.10\widehat{27}}{\sqrt{\frac{0.097119}{24000} + \frac{0.092174}{22000}}} = 2.19$$

Using Laplace's table Φ (t) for the level 95%, t = 2.18; for t = 2.19 results a level of reliability higher than 97%.

Both works have a distinct relative frequency of words that begin with the letter 'a' with a reliability higher than 97%.

Analysing these samples, it was observed that in *Take a girl like you* there was a greater number of proper names that begin with 'a': Anna, America, etc.

If we were to take out the proper names that begin with 'a', it is almost certain that we would obtain almost equal relative frequencies in both works. To prove this will be the subject of a further piece of research.

The percentage of words that begin with 'a' in English language dictionaries is lower than 6.5%. The difference between this figure and those cited earlier (10.9% and 10.2$\widehat{7}$%) can be explained by the repetition of the particles 'a', 'an', 'and', 'at', etc.

Lucas Gimeno Blasco
Instituto Pablo Gargallo
Barrio San José
Zaragoza/Spain.

PAOLO BOERO

MATHEMATICAL MODELLING: LEARNING OF MATHEMATICS AND CULTURAL OBSTACLES

THE researches I will speak about were generated by the problems we met in elaborating and experimenting our projects of integrated teaching of mathematics in primary school (age from 6 to 11) and comprehensive school (age 11 to 14). During 1984/85 scholastic year 250 classes and 170 teachers were involved in these projects which were carried out by a team of ten university researchers and professors and forty teachers.

The main characteristics of the projects are:

— integrated curricula of *themes* (concerning important features of the natural and social reality) and *mathematical contents*, both structured according to the needs of prerequisites and to the gradual explicitation of the involved concepts;

— selection of themes and mathematical contents according to: social needs (on the cultural ground); cultural reality (today mathematics, ...); historical suggestions (about subjects from which mathematical concepts can be derived); national programs.

The elaboration, experimentation and revision of our projects (and related materials: i.e. work-sheets) are based both on adult-level discussions about the cultural and pedagogical problems involved and on informations, studies and some 'researches' about the educational and learning problems which arise during the work. The principal aim of the group is to offer to Italian compulsory school (6-14 years) efficient and qualified work-models for teachers and pupils.

I want to point out that one of the most important reasons which induce 'good' teachers to meet our group (and our group to aggregate 'good' teachers) is the global character of our experience. We explicitely take into account (up to didactic realizations) not only the problems of mathematical learning and teaching, but also the problems of the meaning of mathematical tools as 'tools of knowledge' and also the general aims of mathematical and scientific education. This creates many difficulties in mastering a very large (and frequently not well defined) amount of problems, but also it gives many opportunities of observing, arguing, experimenting a number of aspects of mathematical education which usually escape more limited experiences.

According to these ideas, the problems concerning mathematical modelling are very important for us; we need to clarify them in order to understand the difficulties we met, to prevent 'mistakes', to generalize 'good results' in elaborating our didactic proposals and to contribute to a more general effort on this ground.

The problem of the *efficiency* of mathematical modelling in order to build mathematical concepts and skills was examined by M.P.Rogantin

at the Lisboa meeting of CIEAEM with a classification of the results we obtained in our projects. In the present contribution I will try to summarize further investigations about some epistemological and cultural problems we met on this subject.

MATHEMATICS AS A TOOL OF KNOWLEDGE: KINDS OF MODELS AND RELATED QUESTIONS

The history of mathematical modelling and the difficulties we usually have in our classes suggest that the following 'rough' classification of mathematical models may be a good starting point to understand some didactical phenomena concerning the learning of mathematics through mathematical modelling:

Interpretative and/or previsional models
In our projects we meet these models when dealing with the probabilistic models of Mendel's laws, or interpreting the rotation of the sun shadows as an effect of the rotation of the Earth. In these models the 'way of working' of mathematical concepts is the 'way of working' of knowledge; we reach great efficiency in building and developing mathematical concepts (if some cultural conditions such as verbal abilities or scientific attitude are satisfied). From a historical point of view, many areas of mathematics (like mathematical analysis) arised from these kind of models.

Descriptive models
In our projects we use for example the geometrical language to describe spatial configurations or the statistical language to describe quantitative features of phenomena. These models seem to have a low efficiency in building and developing mathematical concepts; the reason might depend on the fact that the 'way of working' of mathematical concepts is not involved in the deep knowledge of the phenomena. From a historical point of view we must however remember that this kind of models had introduced into human culture many 'objects' which became later the ingredients of the first 'internal' mathematical investigations (numbers, fractions ...)

Normative models
When we write that a taxi-run costs A+B*C+D*T (where C is the number of the units of length and T is the number of minutes) we consider a mathematical model which regulates a social transaction. Also the 'way of working' of computers is based on models of this kind (the rules are social conventions, the physical constraints agree with many other conventions...)
From a historical point of view this kind of models gave important 'meanings' for arithmetics (calendars, money ...) and geometry (housing, ground managing ...) and, later, for logarithms and analysis (revenues, insurances...). In these models there is a good correspondence between the knowledge of social rules involved and mathematical

knowledge (social rules as good 'semantics' for mathematical concepts). The results concerning the learning of mathematics through these models seem to be good.

This classification of mathematical models is neither original, nor well-precised (there are dynamical relations between different kinds of models); however, it was a good tool for us to improve our projects and to avoid some difficulties we met in our classes. For instance, it suggested us to reduce the number of 'descriptive' models in our curricula and it also suggested to approach computers as 'objects to be described', as 'objects to be interpreted' and as 'objects to be mastered according to social conventions'.

CULTURAL OBSTACLES IN MASTERING INTERPRETATIVE, PREVISIONAL AND NORMATIVE MODELS

In this section I will introduce a question which at present appears crucial to understand the main difficulties we usually meet in our classes during the teaching of mathematical modelling: what are the relations between competencies in mathematical modelling and competencies in 'rationalizing' and 'verbalizing' children's experiences? In the common sense of our teachers (and, perhaps, of every teacher ...) these relations do exist; on the basis of our observations we think that the existence of these relations is not a widespread misconception. When we propose to our children to build a mathematical model ('interpretative', 'previsional' or 'normative') we meet often with mental representations, manners of reasoning or verbal deficiencies which hinder mathematical modelling. Many articles have analyzed some features of these relations, but I think that we are far from understanding how really they work. I will show now some examples taken from our classes, without giving any explication: we are not yet in condition to 'theorize' on this ground.

The 'black hole' of the midnight and arithmetic problems about durations

After a work on calendars (at the age of 6), our teachers introduced the clocks at the age of 7 (analogical and digital-quadrants).

As a *first* problem concerning the crossing of midnight, teachers asked the following question: "Mary falls asleep at 10 p.m. and wakes up at 7 a.m. How long did she sleep?"

About 60% of pupils did not arrive to a correct solution ...

On the contrary an arithmetically equivalent problem like the following one was solved by more than 85% of pupils: "Mary's father left at March, 22 and comes back on April, 7; how long did he remain far from home?"

We analyzed the characteristics of the pupils which fail the problem of the "crossing of midnight": more than a half of them associated feelings of "fright of darkness" or "fright of not awakening", to the idea of the night, while less than 20% of the other pupils spoke of these aspects of the night.

Midnight seems to be a 'black hole', an 'obstacle' toward

mathematisation due to a loss of rationalization of the experience of 'sleep' and 'night'!

The shadow as a property of the sun
We asked 2192 pupils of 11 years old the following questions: "have you ever observed if your body overshadows the ground under the beams of the sun? Your shadow is longer at 9 a.m. or at 12 a.m.? Why?"
About 16% of pupils reply "at 9, because the sun is low" and similar; about 47% reply "at 12, because the sun is stronger" and similar. There is a very strong correlation between the correct answers and the social origins of pupils (from 10% tot 24% of correct answers in the 'extreme' groups of classes); and between the answers to these questions and other questions concerning 'scientific attitude' towards reality.
We have made many interviews to pupils answering "at 12, because the sun is stronger." More than a half of them justifies the answer motivating it according to this model: "the sun is stronger, then its shadow must be longer" (the shadow appears as a 'property' of the sun ...).
This conception is an important obstacle to reach a geometric model of the phenomenon, like our teachers observed many and many times.

Mendel's laws and mythological conceptions of hereditary characters
We have analysed the origins of some difficulties that many pupils meet at the age of 12 to 'enter' the probabilistic models of the transmission of hereditary characters. We have observed that these difficulties are frequent among pupils having a mythological conception of hereditary characters (for instance, pupils who think that hereditary diseases are punishment against faults of parents, or consequences of a spell ...).

Influence of verbal explicitation of reasoning on the competence of solving arithmetical problems concerning normative models
Money and prices are (with the calendar) the main arguments on which our pupils work at the age of six.
We followed two kinds of strategies of resolution of problems concerning "money and prices": the first based on drawings and symbolic representations of the problematic situation, the second based on the verbal description of the problematic situation and of possible resolutions.
At the age of seven we have asked our pupils the following question: "if you have 1870 liras and you want to divide them among your friends, what is the amount due to each of them?" The behaviour of pupils was very different (according to the training they followed): some of them represented money with drawings and symbols ... and frequently stopped at this stage; some others frequently reached a correct solution by "reasoning" and "writing": "I change 1700 liras into coins of 100 liras ... after I give 100 liras to the first friend, 100 liras to the second ... Then I consider 270 liras: I change ..."

Some considerations about these examples

I repeat once again that these are only examples, not 'proofs'; and that we have no theory to prove ... Indeed the correlations described between 'verbal competencies', 'rationalizing attitude' and 'mathematical modelling abilities' might be the exterior appearances of more deep phenomena concerning mathematical and scientific learning. I think that many other observations (in different contexts and concerning other modelling problems) should be made in order to begin to clarify the nature of difficulties we meet in teaching 'mathematical modelling'. It would be also interesting to observe if the experience of mathematical modelling may influence the ways of thinking of pupils and their scientific attitude.

In any case the problem of teaching 'mathematical modelling' to pupils aged from 6 to 14 cannot be reduced to a pure didactical problem concerning mathematics or astronomy or economics. In fact dealing with 'real' problems involves a large and deep amount of competencies, ways of thinking and conceptions which may prevent (or aid) the mastery of problems according to a mathematical model.

Paolo Boero
Istituto di Matematica
Universita di Genova
Genova/Italy.

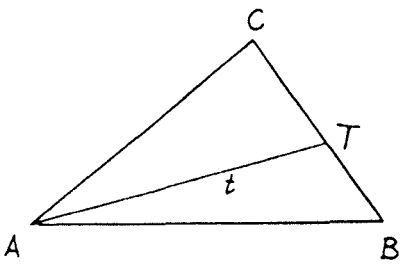
PETER BAPTIST

A JOURNEY INTO ELEMENTARY TRIANGLE GEOMETRY

MATHEMATICS for all - in the computer age, that does not mean at all mathematics only with the computer. Besides our reflections how to integrate the computer in the curriculum we have to reflect as to how we can improve the teaching of important classical topics at school. *The* classical topic of school mathematics is geometry. Twenty years ago people tried to replace geometry by linear algebra. Classical geometry was outmoded, a structural approach to mathematics - avoiding pictures - was propagated. But times have changed and geometry has survived.

'Bring back geometry' is the title of an article which appeared in the journal 'The Mathematical Intelligencer' this spring. The author, R.Kapadia, presents the different viewpoints towards geometry in the classroom in the hope of stimulating discussion. In the following I do want to bring back geometry and to make some proposals for classroom-work.

We consider a triangle ABC and an arbitrary vertex-transversal of this triangle. We are interested in the length of this vertex-transversal in dependance on the length of the sides of the triangle. By the length of a transversal we will understand the distance from the vertex to the point of intersection of the transversal with the opposite side.
We get the following *theorem:*



Let ABC be a triangle.
We denote:

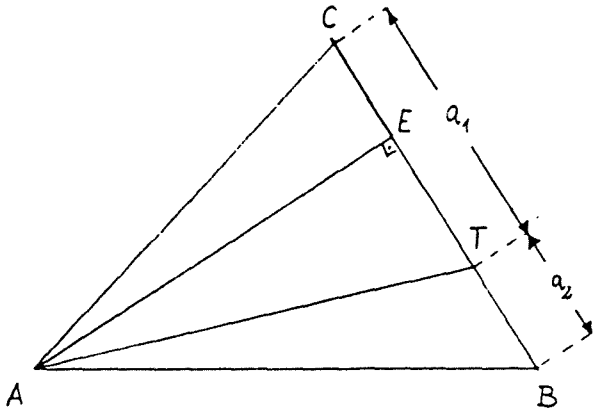
$\overline{AT}=t$, $\overline{CT}=a_1$, $\overline{TB}=a_2$, $\overline{AB}=c$, $\overline{CB}=a$ and $\overline{AC}=b$.

Then it holds:

$$at^2=a_1c^2+a_2b^2-a_1a_2a.$$

The proof of this theorem furnishes a good application for the theorem of Pythagoras and the Law of Cosines resp.
We give two different proofs.

First proof
We dissect the arbitrary triangle ABC by means of a perpendicular in two right triangles. Now we can apply the theorem of Pythagoras three times.



$x = \overline{ET}$
$a = a_1 + a_2$

$\Delta ACE: b^2 = (a_1 - x)^2 + \overline{AE}^2$ (1)
$\Delta ABE: c^2 = (a_2 + x)^2 + \overline{AE}^2$ (2)
$\Delta ATE: t^2 = x^2 + \overline{AE}_2$ (3)

Putting in equation (3) in (1) and (2) resp. we get:

$$b^2 = a_1^2 - 2a_1x + t^2$$
$$c^2 = a_2^2 + 2a_2x + t^2.$$

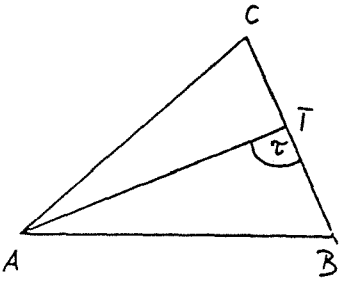
Elimination of x furnishes:

$$a_1c^2 + a_2b^2 = a_1^2a_2 + a_1a_2^2 + t^2(a_1 + a_2)$$

and because of $a = a_1 + a_2$ we get:

$$at^2 = a_1c^2 + a_2b^2 - a_1a_2a.$$

Second proof
This proof is an application of Law of Cosines.
We apply the Law of Cosines twice:



$\Delta ATB: c^2 = t^2 + a_2^2 - 2ta_2\cos\tau$ (1)
$\Delta ACT: b^2 = t^2 + a_1^2 + 2ta_1\cos\tau.$ (2)

Multiplication of equation (1) by a_1 and equation (2) by a_2 and summing up the two modified equations furnishes:

$$a_1c^2+a_2b^2=(a_1+a_2)\ t^2+a_1a_2(a_1+a_2),$$

and finally:

$$at^2=a_1c^2+a_2b^2-a_1a_2a.$$

Of course our theorem is not a very new one. It is a special case of a more general rather old one. In 1746 M.Stewart published in Edinburgh a treatise with the title *Some General Theorems of Considerable Use in the Higher Parts of Mathematics*. Here you can find the following.

Theorem (Stewart):
Let C, T, B be collinear points and A be an arbitrary point, then it holds:

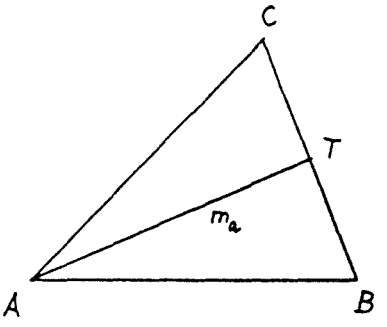
$$\overline{AC}^2 \cdot \overline{TB}+\overline{AT}^2 \cdot \overline{BC}+\overline{AB}^2 \cdot \overline{CT}+\overline{TB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CT} = 0.$$

Remarks:
— Stewart gave no proof.
— In contrast to the special case of the Stewart theorem above we have to work here with directed segments, that is $\overline{AB}=-\overline{BA}$.
— A can be an element of the line through C, T, B.

Applications of the theorem
Now we want to apply our special Stewart theorem. Our goal is the determination of the lengths of some distinct vertex-transversals in dependance on the lengths of the sides of the triangle. The crucial part will be the determination of the segments a_1 and a_2 in which each vertex-transversal dissects the opposite side of the triangle.

The length of the medians
In this case the determination of the lengths of the segments is very easy. It holds $a_1=a_2=\frac{a}{2}$. Thus we get from the special Stewart theorem with $m_a=\overline{AT}$:

$$2m_a^2=b^2+c^2-\frac{1}{2}a^2.$$



Analogously we get for the two other medians:

$$2m_b^2=a^2+c^2-\frac{1}{2}b^2,$$

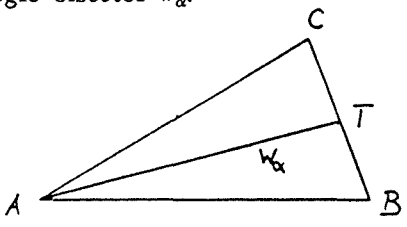
$$2m_c^2=a^2+b^2-\frac{1}{2}c^2.$$

The length of angle-bisectors

Here the determination of the segments a_1 and a_2 is not so easy. The fundamental idea to get these segments is the fact that each angle-bisector of a triangle divides the opposite side into segments proportional in length to the adjacent sides.

Thus we get for the segments of side CB: $a_1=\frac{ab}{b+c}$, $a_2=\frac{ac}{b+c}$.

Application of the above special Stewart theorem furnishes for the length of the angle-bisector w_α:



$$w_\alpha^2= bc\left(1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right).$$

Analogously we get for the lengths of the other two angle-bisectors:

$$w_\beta^2= ac\left(1-\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right),$$

$$w_\gamma^2= ab\left(1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right).$$

Now we ask: what triangles have two equal angle-bisectors? For answering this question we set $w_\alpha=w_\beta$. We replace w_α and w_β resp. by the above equations and get after some computation the condition a = b. Thus we have got a direct proof of the famous theorem of Steiner-Lehmus:

Theorem:
Any triangle that has two equal angle-bisectors is isoceles.

Why has this theorem got the name Steiner-Lehmus? In 1840 this theorem was sent from Lehmus to a number of mathematicians with a request for a pure geometric proof. One of the first to answer this challenge was Jacob Steiner (1796-1863). Steiner was an outstanding geometer. Once he said: "Working with formulas makes me crazy." He was born in Switzerland. He taught himself in reading, writing, mathematics. After studies with Pestalozzi he went to Germany. He earned his living as a teacher and in 1834 he got a professorship at the University at Berlin.

With our special Stewart theorem we can determine the lengths of

other vertex-transversals, too, e.g. the lengths of the Nagel (Longhurst)- and Gorgonne transversals. For these transversals hold theorems of the Steiner-Lehmus-type as well (cf [1]).

Peter Baptist
University of Bayreuth
Bayreuth/West Germany.

REFERENCES

[1] Baptist, P.: *Längenbestimmung von Dreieckstransversalen*, Didaktik der Mathematik 13, 3, 1985.
[2] Coxeter, H.S.M. and S.L.Greitzer: *Geometry Revisited*, MAA, 1967.

MARIANNA CIOSEK

ELEMENTS OF MATHEMATICAL REASONING: FIRST STAGE OF A RESEARCH

THE object of my research is the process of mathematical problem solving. Subjects of various level of knowledge and mathematical experience are observed while solving the same problem. Analysis of their reasonings reveals different very complex mathematical activities and forms of reasoning. Inference from assumptions is one only of those forms. Besides there are many others, some well known (e.g. empirical induction, intuitive reasoning), some having no name and hard to describe (like assertions motivated by the solver's strong belief or prejudice). One of my objects is to distinguish and characterize those various elements of reasoning.

Involving subjects of different levels of experience makes it possible to answer:

— whether, and what, types of mathematical reasoning are common;
— what qualitative differences are manifested in their behaviour.

For example, it can be found whether both a mathematician and a pupil would investigate special cases; if so, whether a mathematician would do it better than a pupil, and what the difference consists on.

Results of my observations might contribute to the answer important questions:

1. Which forms of mathematical reasoning are accessible to all?
2. What strategies of solving mathematical problems are applied by experts, i.e. mathematicians?

Though many problem solving strategies have already been described, they are far from being known. We need to get to know them in order to improve methods of teaching of solving mathematical problems. It is not my attention here to present a full methodology nor any particular research results. The research has only commenced. As for now, I want to show - on the example of one problem - various approaches and forms of reasoning that occurred in the process of solving that problem.

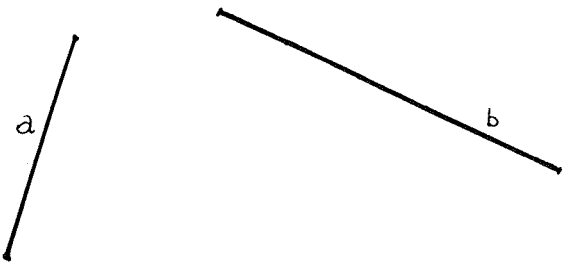
Problem:
For any coplanar line segments a and b find the set of centres of the line segment XY such that X,Y belong resp. to a,b.
('Le livre du problème', fascicule 2, CEDIC 1973, Lyon-Paris).

This problem is well suitable to observe the process of solving as its content is simple while finding the solution requires a certain creative act, by both a pupil and a mathematician. Subjects of three experience levels were observed: secondary school students, university mathematics students, and mathematicians.

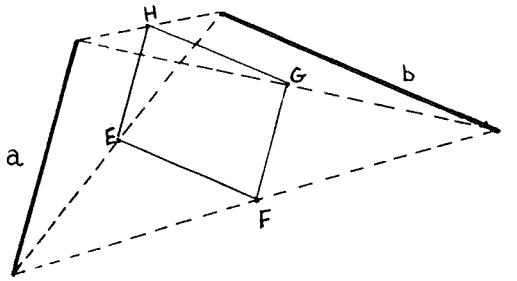
In general, three approaches were found:

1. The solver starts with a hypothesis, of which he is intuitively sure, and verifies it in various ways.
2. The solver starts with a strong assertion (sometimes wrong) and tries to make it true.
3. The solver starts with studying particular cases with the intention to make a conjecture towards the general solution.

Example of the first approach:
Phase 1
A secondary school student draws segments a, b like those beneath (fig.1):



He joins end points of one segment with those of the other one, finds midpoints E,F,G,H of four segments thus drawn (fig.2) and draws the quadrangle EFGH.

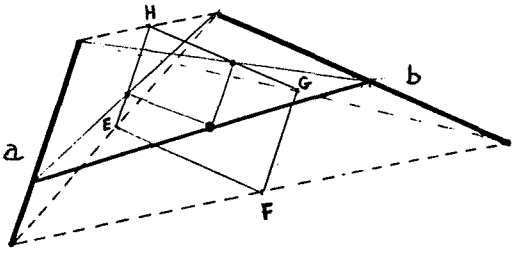


Then he says: 'The figure sought will likely be this quadrangle as we took extreme positions of points on both segments'.

Phase 2
As a result of observing elements of his configuration the student finds and proves that EFGH is a parallelogram and - indirectly - that each side of this parallelogram is a set of centres of line segments with one end point being the end point of one of the given segments.

Phase 3
The student says: 'I am convinced that the interior of this parallelogram

is included in the figure sought. But how to prove it?' He first reassures himself empirically by drawing two arbitrary line segments and finding their midpoints. Then he takes an arbitrary point inside the parallelogram and tries to find an adequate line segment. Attempts an indirect proof but soon abandons it. He has an idea of using a new parallelogram to show that the midpoint of another chosen line segment lies inside the first parallelogram (see fig.3). The student ends with formulating a correct construction of the parallelogram as his final result.



When we try to describe the reasoning it sometimes is easy to see its particular type and give it a name. For example, in phase 2 the reasoning is rather formal, while in phase 3 we can distinguish three elements: an assertion motivated by the student's strong belief, an experiment using the drawing as a model, and again formal reasoning. But phase 1 is less clear: there is here an element of intuitive predication, but can we call it intuitive reasoning? This question is by now left open.

There were many solutions similar to the above, yet, of course, not identical. Differences concern mathematical tools used in the 2nd or 3rd phase. One of the mathematicians, for example, managed to obtain the result on a much shorter way: he used enlargement to transform line segment.

The 2nd approach is characterised by a sort of trail-and-error attempts before the successful idea comes out. So the solver will put a haphazard, often wrong, conjecture, check it using the diagram or otherwise, and refute it by a counterexample, only to propose another answer of the same quality.

Typical for the 3rd approach is starting with a special case. But the special case can be used in several different ways.
For example:

a. based on the solution found for the special case a general hypothesis is formulated and submitted to further investigation;
b. the method used to solve the special case is adapted to the general case;
c. the result obtained for the special case is transformed in some way to formulate a general solution as a justified answer; e.g. for perpendicular line segments the set sought proves to be a rectangle, so through

affine transformation a parallelogram is obtained as a general answer.

Ways a and b were met in reasonings of both students and mathematicians, while c in mathematicians' ones only. It might suggest that using a special case in way c is too difficult for a secondary school student. But such a conclusion would be imprudent as our students have never had the experience.

It should be added that mathematicians, using any of those approaches, act much more systematically, in an organized way while students often act randomly. For example, a mathematician will focus on a family of line segments, while a student will often select line segments at random, find their midpoints, and observe their positions to see something in common.

Tentative conclusions:

1. There are certain common elements in mathematical reasonings of mathematicians, secondary school students, and mathematics students.
2. Further investigation into those reasonings is needed in order to find their elements in more detail and how these elements are put together in the whole process of solution.
3. Attainability of types of reasoning cannot be decided a priori, without an experimental research using open problem settings given to subjects of different mathematical experience.

Marianna Ciosek
Higher Pedagogical School
Kraków/Poland.

REFERENCES

[1] Lakatos, I.: *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, New York 1976.
[2] Krygowska, Z.: *Zarys dydaktyki matematyki*, Część I Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1977.
[3] Polya, G.: *Odkrycie matematyczne*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1975.
[4] Schoenfeld, A.H.: *Explicit Heuristic Training As a Variable in Problem - Solving Performance*, Journal for research in mathematics education, vol. 10, nr 3, 1979.
[5] Schoenfeld, A.H.: *Measures of Problem - Solving Performance and of Problem - Solving Instruction*, Journal for research in mathematics education, vol 13, nr 1, 1982.
[6] Schoenfeld, A.H.: *Psychological Factors Affecting Students' Performance on Geometry Problems*, Proceedings of the Fourth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Athens Georgia, 1982.
[7] Wolfson, P.: *Philosophy Enters the Mathematics Classroom*, For the Learning of Mathematics, vol 2, nr 1, 1981.

YVES PAQUELIER

RAISONNEMENT ET PERSUASION: QUELQUES EXEMPLES POUR DEUX DIRECTIONS DE RECHERCHE

SE demander: "A quelles formes de raisonnement tous doivent-ils accéder?", c'est aussi se demander: "Quels raisonnements de l'élève doit-on prendre en compte?", question qui se pose à la fois dans la perspective d'analyse du didacticien et dans celle de l'apprentissage du raisonnement mathématique de l'enseignant.

Nous partons alors du principe (simple mais souvent oublié) qu'un raisonnement faux est avant tout un raisonnement et mérite d'être considéré comme tel c'est à dire comme l'expression des 'raisons', celles du locuteur, dans un but de persuasion [1] (ou d'auto-persuasion). Il s'agit pour nous, devant les productions d'élèves (dialogues enregistrés, messages écrits ...) lors de la résolution de problèmes, d'accepter de nous placer dans le cadre plus large d'une étude de l'argumentation, tout en préservant dans notre analyse des raisonnements des élèves le caractère spécifique du domaine mathématique à savoir l'existence d'une preuve déductive, d'une démonstration.

Nous voudrions illustrer, à l'aide d'exemples, deux directions de recherche qui mériteraient, à notre sens, d'être développées dans une telle perspective d'étude des phénomènes de persuasion. La première concerne le domaine des raisonnements non contraignants, nous en parlerons à propos du rôle de l'exemple. La deuxième, peut-être plus originale, s'intéresse à la notion de 'transfert d'adhésion'.

EXEMPLES DE RAISONNEMENTS NON CONTRAIGNANTS: LES RAISONNEMENTS 'EMPIRIQUES'

Ce qui différencie, entre autres choses, l'argumentation de la démonstration, c'est le caractère non contraignant (non nécessaire) des raisonnements utilisés [2]. Au nombre de ceux-ci il faut envisager les raisonnements s'appuyant sur un ou plusieurs exemples pour affirmer la vérité d'un énoncé général. C'est ce que l'on désigne habituellement par l'expression 'raisonnements empiriques'.

Mais à l'intérieur de cette catégorie bien vaste, il nous parait possible d'établir des 'nuances' (il faudrait une étude plus systématique pour pouvoir parler de sous-catégories) en s'appuyant notamment sur le statut donné à l'exemple par celui ou ceux qui argumentent [3].

Au cours d'une expérimentation menée avec des élèves de 14-15 ans nous avons proposé à plusieurs binômes un certain nombre d'énoncés portant sur les notions arithmétiques de multiples, diviseurs, nombres premiers ... Pour chacun d'entre eux, chaque binôme devait dire s'il était vrai ou faux et surtout n'émettre un verdict définitif que lorsque les deux membres du binôme étaient du même avis; cette exigence

permettant l'explicitation orale de 'preuves' et d'arguments dans des discussions souvent animées enregistrées au magnétophone.
Parmi les phrases proposées citons les deux suivantes:

1. Quelle que soit la valeur de n, $n^2 - n + 41$ est toujours un nombre premier.
2. Quel que soit l'entier n, $n^3 - n$ est un multiple de 6.

Considérons les trois extraits de dialogues suivants:

1. *Binôme 1, énoncé 1:*
   Après avoir fait des 'essais' pour n=1, n=2, n=3:
   a: $4^2 - 4 + 41 = 53$ c'est un nombre premier t'es d'accord?
   b: Tous sont un nombre premier alors?
   a: Bon alors c'est vrai t'es d'accord?
   b: Ouais, ouais j'suis d'accord.

2. *Binôme 1, énoncé 2:*
   a: Eh! t'essaye pour 3, moi j'essaye pour 2.
   b: $3^3 - 3$ est égal à 24. Ouais ça marche.
   a: Et $2^3 - 2$ ça fait 6. ça marche.
   b: Attends! on va essayer 5 ...
   a: Bon essaye ... essaye ...
   b: On peut toujours essayer.
   a: Eh! moi j'essaye pour 1. C'est toujours un truc bizarre 1.

3. *Binôme 2, énoncé 2:*
   Après avoir essayé pour 2, pour 3, pour 9, à la recherche d'un contre exemple (un truc qui fait faux):
   a: Attendez! j'ai fait un nombre super grand!
   b: Ah bon! tu crois que ça fera mieux?
   a: Ben ouais avec un nombre au hasard!
   b: Ah ben ouais, j'ai l'impression que ça marche.

De toute évidence, le statut de l'exemple n'est pas le même dans chacun des échanges précédents. Nous pouvons distinguer en première analyse:

La répétition d'exemples dans le cas 1 où le problème de la généralisation n'est pas posé mais directement résolu par simple affirmation. (Tous sont des nombres premiers alors !)

L'exemple spécial (tératologique) dans le cas 2 où est établie explicitement une distinction et même une 'hiérarchie' [4] entre les différentes valeurs particulières que peut prendre n. Ainsi de manière paradoxale, c'est le caractère particulier (bizarre) de l'exemple qui lui confère sa force persuasive. Il n'y a pas là le souci de généraliser mais la recherche d'une 'expérience décisive' [5].

L'exemple aléatoire dans le troisième cas où la démarche du 1 apparait comme insuffisante et où la nécessité de généraliser est explicitement perçue et résolue par le choix d'un exemple le moins particulier possible, le plus 'impartial' puisque *au hasard*. A cela s'ajoute d'ailleurs, comme dans le deuxième cas, une hiérarchie des exemples par le fait qu'un nombre *super grand* est *mieux* c'est à dire considéré comme plus convaincant qu'un nombre 'ordinaire' comme 2, 3 ou 9.

Par ailleurs, ces 'preuves par l'exemple aléatoire', si elles constituent un dépassement de la répétition d'exemples, ne sont pas sans poser quelques problèmes.
En effet, il semble qu'il puisse y avoir (au moins) deux modèles argumentatifs faisant intervenir la notion d'exemple aléatoire.
Le premier est 'statistique'. Il se constitue par analogie avec le procédé de vérification par choix aléatoire de la conformité de pièces fabriquées en série.
Le second est 'pré-logique' en ce que l'on peut voir dans l'exemple aléatoire un effort de déparcularisation, première étape constitutive de la notion de variable quantifiée universellement.
D'autre part, cette invocation du *hasard* comme outil de persuasion de la part des élèves peut conduire parfois à certaines absurdités. Considérons, par exemple le message suivant écrit par deux élèves de 12 ans à propos de l'énoncé: (2') le produit de trois nombres qui se suivent est un multiple de 6 [6].

> Vrai car si on prend 3 nombres *au hasard* [7] et qu'on les multiplie et après qu'on divise ce résultat par 6, il n'y a pas de reste dans la division c'est donc un multiple de 6.
> Exemple: $2 \times 6 \times 10 = \frac{120}{6} = 20$.
> Autre exemple: $12 \times 23 \times 5 = \frac{276}{6} = 46$.

Tout se passe ici comme si l'argument *hasard* était à la fois 'radical' puisqu'il occulte l'hypothèse de la consécution des nombres [8] et purement 'rhétorique' puisque chaque exemple est, consciemment ou non, soigneusement choisi pour satisfaire la conclusion. Il s'agit bien là d'une démarche purement persuasive où seule compte la conclusion qu'il faut 'valider' à tout prix.

Tout cela mériterait, de notre point de vue, des études beaucoup plus approfondies et constitue un des axes de notre recherche à venir. Analyser, dans toute sa diversité, la fonction de persuasion de l'exemple dans les démarches de preuves des élèves nous semble être une part importante de l'étude des raisonnements non contraignants.

LE 'TRANSFERT D'ADHESION'

Cette notion explicite une autre différence essentielle entre argumentation et démonstration:

Le but de l'argumentation n'est pas, comme celui de la démonstration, de prouver la vérité de la conclusion à partir de celle des prémisses, mais de transférer sur les conclusions l'adhésion accordée aux prémisses [9].

Avec une telle définition de l'argumentation nous abordons certes l'extrême limite du raisonnement puisqu'elle permet d'envisager tous les procédés rhétoriques (sophismes, métaphores, analogies ...) et même des stratégies d'autorité ou de séduction. Nous pensons néanmoins que cette notion de 'transfert d'adhésion' trouve sa place dans l'interprétation de certaines preuves produites par les élèves dans la résolution d'un

problème, notamment dans la phase orale de recherche en groupe. Nous voudrions en donner deux exemples extraits de la même situation:
Il s'agissait de résoudre le problème suivant:

> Alain et Bernard jouent plusieurs parties de 'pile ou face'. Chaque partie rapporte 1 point à celui qui la gagne. Le premier qui a 8 points est le vainqueur du jeu et il gagne la mise qui est de 84 Fr.
> Seulement Alain et Bernard sont obligés de s'arrêter quand Alain a 7 points et Bernard 5 points. Avant de se séparer ils veulent se partager la mise puisque personne ne l'a complètement gagnée (aucun d'eux n'a 8 points).
> Mais alors comment partager la mise, c'est à dire que donner à Alain et que donner à Bernard pour que le partage soit juste. Quel partage proposez-vous et pourquoi? [10]

Les élèves (14-15 ans) étaient par groupe de trois et devaient se mettre d'accord sur un partage afin de le proposer par écrit à un autre groupe. Voici donc deux extraits de la discussion du même groupe à propos de ce problème:

> Philippe propose un partage en commençant par diviser 84 par 16:
> Sébastien: "Pourquoi t'as divisé par 16?"
> Philippe: "Parce que si Bernard il a 8 et si Alain il a 8 ça fait 16."
> Sébastien: "Ah oui, d'accord."

> Daniel propose une solution dans laquelle il commence par retirer 4 parties à chaque joueur. Il semble convaincre ses deux camarades mais au moment de rédiger Sébastien revient sur ce retrait de 4 parties:
> Sébastien: "Pourquoi t'enlèves 4?"
> Daniel: "Hein?"
> Sébastien: "Au fait pourquoi t'enlèves 4?"
> Daniel: "Parce que 4 et 4 égale 8!"
> Sébastien: "Ah ouais ouais ça y est!"

Ces deux arguments analogues, du type 'parce que 1 + 1 = 2', nous semblent représentatifs de ce que nous pouvons qualifier' de 'transfert d'adhésion' en mathématique. Il ne s'agit en effet aucunement d'exhiber quelque lien logique entre '4 + 4 = 8' et 'il faut retirer 4 parties', mais bien uniquement de transférer, de transporter, presque de propager, l'adhésion évidente accordée à '4 + 4 = 8' vers la proposition 'il faut retirer 4 parties'.

Exemples significatifs parce que, d'une part le lien, le 'fil' qui permet ce transfert est pour le moins mince (sur le plan de l'argumentation même), il ne s'agit que d'une identité de nombre dans les deux propositions et d'autre part parce que, de toute évidence, comme le montre les dialogues, cela fonctionne.

Signalons, pour terminer, qu'il serait sans doute facile (et un peu 'rapide') de rejeter de tels arguments dans le musée des curiosités produites par des élèves étrangers à toute rigueur ... Considérons, par exemple, ce dialogue enregistré en classe entre un maître et un élève (de 12 ans) lors de la correction orale d'exercices:

L'élève: "2x + x = 2x."
Le maître (ironique): "Ah bon? et 2 + 1 ça fait combien?" ...
L'élève: "Ben ...3"
Le maître: "Donc 3x! Fais donc attention!"

Est-il exagéré de dire qu'il se passe dans cet échange un phénomène analogue à celui relevé dans les deux dialogues précédents? Certes, un lien logique existe entre '2 + 1 = 3' et '2x + x = 3x' mais, à supposer que ce soit là que se situe la difficulté pour l'élève, encore faudrait-il l'expliciter, parler de factorisation ou de distributivité.
Il nous semble qu'alors tout se passe comme si la proposition évidente (et d'une facilité presque vexante pour l'élève) '2 + 1 = 3' était utilisée comme 'catalyseur' d'une adhésion qu'il suffit alors de transmettre, à l'aide d'un *donc* magique, à l'énoncé '2x + x = 3x'. Et l'élève n'a plus qu'à *faire attention*! On peut légitimement se demander: 'à quoi?'...

Ceci n'est qu'un exemple et une première analyse d'enregistrements de classes nous incite à penser que cette notion de transfert d'adhésion peut être un instrument fécond de compréhension des phénomènes des persuasion observés dans les dialogues maître-élèves.

Nous avons tenté, dans ces quelques pages, de montrer comment le point de vue de l'étude de l'argumentation et des phénomènes de persuasion pouvait permettre de prendre en compte, de manière différente et 'positive', certains aspects des raisonnements naturels des élèves. Il resterait à expliquer de quelle manière une telle perspective est susceptible de faciliter l'apprentissage du raisonnement déductif (notamment dans la gestion par le maître de 'débats' autour de différentes solutions d'un même problème). Cette deuxième partie est, pour nous, inséparable de l'analyse que nous avons exposée ici, mais elle se situe à un niveau encore plus 'fragmentaire' dans nos recherches.

De toute évidence, les questions posées au début de cet article demeurent ouvertes ...

Yves Paquelier
Université Paris VII
Paris/France.

REFERENCES

[1] Il faudrait évidemment se demander: 'persuasion de quoi?' La question n'est pas simple et ne peut être développée ici. Disons simplement que, loin de porter sur la vérité d'une proposition mathématique (solution d'un problème, conclusion d'une démonstration), la stratégie de persuasion de l'élève se trouve bien souvent 'décalé' vers un objectif implicite (et para-mathématique) du type: 'persuader le maître que je sais bien faire ce qu'il attend de moi et donc que j'ai compris ce qu'il m'a enseigné.' Les causes et les conséquences de ce 'décalage' sont, pour nous, un important sujet d'étude.

[2] Cf: Perelman, Olbrechts-Tyteca, *Traité de l'argumentation*, Ed de l'université de Bruxelles 1970.

[3] On a souvent, par exemple, mis en évidence le rôle en mathématique des exemples dits paradigmatiques ou génériques.

[4] Cf *Traité de l'argumentation* p.476.

[5] Notons cependant que dans le cas de ce binôme, le fait d'avoir trouvé pour n = 1, 0 *qui n'est pas un multiple de 6* pour eux, a transformé l'exemple spécial en contre exemple et a conduit à rejeter l'énoncé. Le caractère bizarre de 1 n'est d'ailleurs peut-être pas étranger au fait de s'orienter plutôt vers une réfutation que vers une confirmation ('un truc bizarre doit donner quelque chose de bizarre'!).

[6] Il s'agit d'une autre expérimentation où la discussion n'était pas enregistrée mais donnait lieu à la rédaction d'un message écrit devant convaincre le reste de la classe de la verité ou la fausseté de l'énoncé.

[7] C'est bien entendu nous qui soulignons.

[8] On peut, au passage, se demander si cet effacement ce serait effectivement produit si la version proposée avait été, non pas (2'), mais (2) qui a l'avantage d'indiquer qu'il y a une seule variable, un seul nombre à prendre *au hasard*.

[9] Cf: Perelman: *L'empire rhétorique*, Ed Vrin 1977, p.35.

[10] Ce problème est le problème historique et célèbre appelé 'problème des partis'. Le reste de l'expérimentation s'appuie sur les différentes solutions proposées par les mathématiciens (Pacioli, Tartaglia, Cardan, Fermat, Pascal) entre 1494 et 1654, mais il serait trop long de l'exposer ici en détail. Ceci donnera lieu à d'autres publications (voir notamment pour la partie historique les actes du colloque inter-IREM de Montpellier, 31 mai-1er juin 1985).

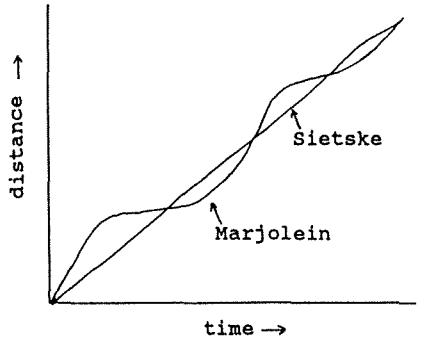
RIJKJE DEKKER

MATHEMATICAL REASONING FOR ALL? JUST HAVE A LOOK

WHICH forms of mathematical reasoning should be accessible to all? What do we really know about the way children reason? Two boys, Rik and Jósé, both twelve years of age, are working together during the math lessons. I have been observing them during three months. The two following observations show their different ways of learning and reasoning.

Example 1

Exercise: Sietske and Marjolein are jogging together, but their way of running is quite different.
Tell something about it.



'Sietske runs without stopping and Marjolein runs fast and then slowly again', says Rik.
'Are you sure?', Jósé asks, 'then why does she make these silly curves?'
'Yes, because look, here she slows down and there she speeds up again', Rik points at the graph.
Jósé objects: 'But then you go ...'
'Oh, if you think you know better', says Rik, 'well, tell me then, she doesn't walk in curves'.
'Oh yeah, but what is this?', Jósé points at the curves in the graph.
'Oh, look at that', says Rik, 'he doesn't understand one damned little thing about it!'
'That has got nothing to do with it, fatty', says Jósé.
Rik calmes down and starts to explain:
'Now look, first she walks normal, then he, she slows down ...'
Jósé: 'But it would be better if she went in one straight line. She'is quite stupid'.

'What stupid', says Rik, 'that's the way this graph is made'.
'Yes quite stupid, isn't it', says José, 'imagine me walking all the way in that direction to rest, well, then I'm still tired'.
He follows the curve with his fingers.
'You don't understand one damned little thing about it!', says Rik. 'Look here, this one walks steady, you know. If she walks let's say ten she keeps on walking ten. Look, and this one starts walking ten and then again she walks five and then she starts walking ten again and then again five'.
Rik sounds very patiently.
'Yes', says José, 'but then why does she make these curves?'
'She makes a curve, she makes a curve, sure', Rik's voice is getting ironical, 'look, here she makes a curve into a little street, and then she goes around that street, yes, that's very clever of you'.
'A little street?', says José, 'I don't see a little street'.
'Oh well', says Rik, 'there is a landscape, here there is a tree and then you go around that tree and then, tell me what you mean?'
'I don't mean anything at all, I was just asking why this one walks like that, in a curve'.
'Because that goes slowly', says Rik.
José: 'Yes, but then you are not going to walk like that, along that line!'
Rik: 'That's why it is a graph, slowly and fast, that's the way this graph is made'.

Rik understands the construction behind the graph completely but José sees the graph as a path. Rik explains his solution in terms of speed. That is probably the way he immediately interpretes the distance/timegraph. When José doesn't understand him he tries to give an explanation with numbers, 'she walks ten'. But again he is referring to speed and his explanation has no success. Finally he joins as a joke José in his reasoning which he fully understands. But José cannot understand this as a joke. It would have been better if they were asked to construct a distance/timegraph. Then they would have to do some research together and in such a research you just have to reason.

Example 2

Exercise: There is a well-known rule with which you can calculate your braking distance at any speed:
Take the square of the speed and divide it by 100. Then you have the braking distance in meters.
Make a graph from speed 0 upto 150 km/h.

'You have to calculate it all', José says grumbling and he starts reading aloud the exercise.
'Let me read that', says Rik, 'I'm a professional in reading'. Rik takes over. José is calculating the braking distance at 40.
'1600', he says.
'1600?', Rik asks.
'You still have to divide it by 100, then it will be 16', says José.
'Let's start at the nought', Rik suggests.
'Then you have to draw such a line', José continues and he moves his

hand like this:

Rik hesitates and José explains: '40 times 40 is 1600 isn't it, and then you have to divide it again by 100 and then it is 16. You have to draw a graph, so, 40, and then you have to pull a line from zero like this, tsjjj'. Again he sketches the graph with his hand.
'No, of course not', Rik objects, 'you have to put more dots'.
'At 80', José suggests looking at the blackboard. The teacher had taken 80 as an example to explain the meaning of square.
'64', José says and he puts the dot at the right place.
'Do you have to draw that?', Rik asks.
José reads aloud again: 'Make a graph from speed 0 upto 150 km/h'.
'Upto 150', says Rik, 'at 150 you too have to put a little dot. You can calculate it all'.
The teacher passes by and asks whether they have enough dots to draw the graph.
'Sure', says José.
'Oh no, I don't think so', Rik objects.
The teacher suggests they calculate some more and she leaves. Rik and José start calculating some more points. Especially Rik really gets involved.
'You can put a dot everywhere', Rik cries, 'you can do it too at 100'.
'Yes well, then you have a line', says José, 'let's do it at 100'.
'Well now, you can do it anywhere', Rik leans back.
'100 times 100', José is calculating.
'You can pull that line very easily', says Rik.
José: '100 times 100 and then ...'
'Now we have it all', concludes Rik.
'Now we will draw the line', José suggests and so they do.

Now it is José who immediately feels this 'square' graph. For Rik even the step from points to a line is a big one. At the end of the discussion he has got the insight which José expressed right at the beginning. Although their learning is almost reversed, they both end with a fine graph because in the construction of the graph they just have to reason together. And in this reasoning they combine José's global insight with Rik's precision.

Which forms of reasoning should be accessible to all? What makes this reasoning mathematical? I don't think we know how children learn. We just know a little how we can stimulate learning. But we do know that children learn and reason in different ways. So at least we have to make such exercises that children in cooperation can show these different ways. And in the classroom we have to stimulate reflection on these different ways in order to compare them and choose the most

suitable one. This can be a different one for different children, but it is the reflection on the reasoning which can make it a mathematical one for all.

Rijkje Dekker
Department of Education and Educational Research
University of Utrecht
Utrecht/The Netherlands.

REFERENCE

[1] Dekker, R., P.Herfs, J.Terwel, D.van der Ploeg: *Interne Differentiatie in heterogene brugklassen bij wiskunde*, Den Haag, SVO selecta, 1985.

FRANCOISE CERQUETTI-ABERKANE

MATHEMATIQUES DANS UNE CLASSE 'SPECIALISEE' PRIMAIRE

IL y a 3 ans, alors que j'animais un stage dans une Zone d'Education Prioritaire [1] de la banlieue parisienne, une institutrice de classe de perfectionnement [2] m'a demandé de l'aider dans l'enseignement des mathématiques. Nous voulions prouver que ces élèves étaient capables de faire, entre autre, des mathématiques et qu'ils pouvaient être réintégrés dans des classes dites 'normales', moyennant une certaine forme de pédagogie à définir.

Pour cette expérience nous avons adopté le rythme d'une matinée par semaine pendant laquelle je prenais de temps à autre la classe en main ou observais seulement les enfants. La leçon durait de une heure à une heure et demie puis l'institutrice et moi préparions la progression et le travail de la semaine.

PRESENTATION DE LA CLASSE ET DE LA RECHERCHE

La classe comprend 3 groupes que j'appellerai 'grands' (3ème année de perfectionnement), 'moyens' (2ème année de perfectionnement), 'petits' (1ère année de perfectionnement). Tous ces enfants avaient suivi deux fois la première année de primaire français et ne savaient ni lire ni écrire ni compter avant leur 1ère année de perfectionnement.

J'ai axé essentiellement mon travail, cette année, sur les groupes des petits et des moyens, les grands étant recyclés, pour le français et les mathématiques, dans une classe de 2ème année de primaire ordinaire (grâce à la maîtresse. Ils y suivent d'ailleurs très bien l'enseignement).

J'ai observé l'influence du milieu socio-culturel sur les difficultés rencontrées par les enfants en mathématiques, entre autre, et avec la maîtresse nous avons tenté de batir une progression permettant à ces enfants de progresser, de réussir et d'acquérir un certain nombre de connaissances fondamentales.

Ci-joint un tableau récapitulatif des conditions socio-culturelles des enfants.

Remarques sur les intitulés

1. Revenus salariés: coché 'oui' si un des membres de la famille a un travail salarié et 'non' si la famille vit uniquement d'allocations diverses et d'aides sociales.
2. Logement convenable: coché 'non' s'il est insalubre ou (et) trop petit.
3. Problèmes dans le couple: coché 'oui' si ce sont des problèmes graves (alcoolisme, mariage consanguin, personne handicapée physique ou mentale, inexistence morale ou physique de l'un des membres du couple etc...).
4. Violence.

5. Stimulation par des jeux à la maison.
6. Alimentation convenable: coché 'non' si l'alimentation est insuffisante (pour tous les enfants elle est déséquilibrée).
7. Hygiène coché: 'non' si les enfants ne sont pas soignés (vêtements sales ou déchirés) ou pas lavés fréquemment
8. Ecole = garderie: coché 'oui' quand l'école n'a pas pour les parents un rôle éducatif et important.

Elèves de 1ère année; A: algériens; F: français; H: Haitiens.
Sauf les Haïtiens tous les enfants parlent français à la maison.

	1	2	3	4	5	6	7	8
Mohamed 10 ans A	oui père maçon	non	oui 5 enfants	oui	non	oui	oui	oui
Antar 10 ans A	non	oui	oui 8 enfants	non	non	non	non	oui
Jerome* 9 ans F	oui libraire	oui	oui 2 enfants	non	oui	oui	oui	non
Frédéric 10 ans F	oui peintre	oui	oui 3 enfants	non	oui	oui	oui	oui
Christophe* 9 ans F	non	non	oui 5 enfants	oui	non	oui	oui	oui
David G.* 9 ans F	non	non	oui 4 enfants	non	non	oui	non	oui
Najim* 9 ans A	non	oui	oui 6 enfants	oui	non	non	oui	oui
Morad 10 ans A	oui frères	oui	parents agés 14 enfants	non	oui	oui	oui	non
Sybille 10 ans H et Rita 12 ans H	oui ouvrier	oui	oui 4 enfants	oui	non	non	oui	non
David 11 ans F	oui imprimeur	oui	oui 3 enfants	non	oui	oui	oui	non

CE QU'ON LEUR PROPOSE HABITUELLEMENT

La 1ère année de la recherche j'ai observé les difficultés des enfants face aux exercises traditionnels par exemple ceux portant sur la spatialisation: des gants ou des chaussures sont dessinés ainsi que des mains ou des pieds et on leur demande de retrouver la main ou le pied correspondant. Bon nombre d'enfants se trompent. Par contre, la maîtresse ayant mis en tas des chaussures et demandé aux enfants de chausser convenablement l'un d'entre eux, obtient une bonne réponse des enfants. La plupart des exercises proposés traditionnellement à l'école font appel à la réalité mais ne sont pas la réalité. Je les baptiserais 'faux concrets'

car ils utilisent un langage concret par exemple 'aide la petite fille à ranger ses jouets' mais il n'y a ni vraie petite fille ni vrais jouets [5] et c'est cela qui gène les enfants. Un autre type d'exercice posant problème aux enfants est le tableau à double entrée posé sans aucune raison apparente. Les enfants en difficulté le complètent 'façon coloriagé'. En effet ils prennent la 1ère case comme modèle et terminent la ligne de la même façon. J'ai proposé aux enfants un tableau à double entrée avec lettres et chiffres. Bien que ce tableau n'ait pas plus de raison d'être que le précédent, les enfants ont su le remplir convenablement car il n'y avait plus le parasite coloriage.

A cause de leurs échecs répétés, dus en partie au type d'exercices proposés, ces élèves rejettent tout ce qui est scolaire en adoptant une attitude passive ou en étant très agités et parfois même violents.

DIFFICULTES RENCONTREES AU COURS DE LA RECHERCHE ET LIEES AU MILIEU SOCIOCULTUREL DES ENFANTS

Tout d'abord j'ai observé un très fort taux d'absentéisme, surtout pendant les beaux jours. Craignant la perte des allocations familiales, les parents remettent tout de même leurs enfants à l'école au bout de 15 jours à 1 mois. Il est donc très difficile de faire une activité suivie avec ces enfants. Un autre de leurs handicaps est la difficulté à fixer leur attention sur une activité pendant un temps donné. Ceci est dû, d'une part, à l'habitude prise dans les classe sses précédentes où les échecs successifs les ont conduits à l'apathie et d'autre part, à divers problèmes tels que le manque de nourriture (les enfants arrivent souvent le matin sans avoir déjeuné), le froid (cet hiver quelques enfants étaient très insuffisamment vêtus et pleuraient en arrivant à l'école tellement ils avaient froid) et la violence qu'ils subissent parfois. On peut tout de même remédier en partie à ce problème de fixation de l'attention en proposant aux enfants des activités nouvelles qui les intéressent et leur permettent de réussir.

Ils ont du mal également à s'adapter, au cours d'une même activité, à une consigne qui change ou à une nouvelle règle du jeu dans un court laps de temps. La cause semble en être le manque de sollicitation familiale de ces enfants, non entrainés à des jeux éducatifs. Ils n'ont souvent aucune image mentale mathématique. Par exemple dire 5 n'évoque rien dans leur esprit même lorsqu'ils savent ce qu'est 5.

J'ai aussi observé une grande difficulté à s'adapter à un nouvel enseignant lors de l'absence de la maîtresse. Les liens affectifs avec l'enseignant semblent extrèmement importants dans la réussite des enfants.

ACTIVITES MATHEMATIQUES

L'une des 1ères activités paramathématiques faites par les 'petits' a été la réalisation d'un puzzle et l'élaboration par le groupe d'une méthode de travail. (La plupart des enfants n'avaient pratiquement pas eu l'occasion d'en réaliser). Les enfants se référaient ensuite au plan

élaboré pour réaliser leur puzzle et ont ainsi commencé à entrevoir la nécessité d'avoir une méthode de travail.

Pour leur faire comprendre le principe de la numération décimale, nous avons proposé aux 2 groupes le 'jeu du banquier' [6]. Chaque enfant lance un dé et reçoit autant de jetons bleus que de points sur le dé. Dès qu'il a 3 bleus il les échange contre 1 rouge, 3 rouges sont échangés contre 1 vert, 3 verts contre 1 jaune etc... Ce jeu a permis le déblocage de Jérôme et de David G. jusque là très passifs. Ils se sont mis à participer au jeu et ont ensuite adopté une attitude active. Chaque fois que nous demandions à Jérôme s'il pouvait faire des échanges il disait toujours oui même s'il n'avait que 2 jetons d'une même couleur. Il donnait pourtant l'impression d'avoir compris la règle du jeu. Nous lui avons demandé de dire si l'un de ces camarades pouvait faire des échanges et cette fois il ne s'est jamais trompé. Il était tellement enthousiasmé par le jeu qu'il voulait sans cesser faire des échanges et gagner et étant lui même impliqué n'était plus capable d'appliquer la règle du jeu. Ceci s'est produit dans divers autres jeux (bataille, etc...) et nous avons réutilisé la même méthode avec succès. Rapidement Antar, Morad et Mohamed ont réussi à calculer mentalement. Quand ils faisaient 3 ou 6 ils demandaient 1 ou 2 rouges Sybille et Frédéric faisaient en plus le calcul mental pour 4 et 5. A la fin du jeu Antar m'a dit "mais si on jouait longtemps on pourrait continuer les échanges avec plein d'autres couleurs, ça continuerait toujours." C'est à l'issu de ce jeu que nous avons présenté les résultats dans un tableau à double entrée, pour savoir qui avait gagné, et les enfants ont su parfaitement l'utiliser.

Les 2 groupes ont également fait une recherche sur la classification des triangles. Les enfants étaient par 4. J'avais distribué 20 triangles en carton à chaque groupe et seulement dit aux enfants de les classer. Au début ils ne faisaient rien. Pour les aider j'ai pris 2 triangles isocèles et j'ai demandé aux enfants ce qu'ils avaient de commun et comme ils ne trouvaient pas je leur ai montré avec une ficelle qu'ils avaient chacun, 2 côtés égaux. Je leur ai ensuite demandé de trouver tout ceux qui avaient 2 côtés égaux et leur recherche à démaré. Christophe s'est aperçu que certains avaient 3 côtés égaux, Jérôme en empilant les triangles rectangles m'a montré que 'là c'était pareil' (en montrant l'angle droit). Nous avons ensuite afficher les différents classements des enfants au tableau. Ils avaient fait 4 groupes (équilatéral, isocèle, rectangle et quelconque). Nous leur avons donné les noms et les définitions des différents triangles. A ce moment un enfant prenant un triangle équilatéral en main dit "il a 2 côtés pareils" il le tourne et dit "il a 2 côtés pareils" et conclut "il est 2 fois isocèle." Comme dans la catégorie des triangles isocèles il y avaient des triangles rectangles, ils ont affiné leur classement en créant une sous famille. Pendant que nous faisions l'affichage des triangles rectangles David G. s'est levé, est allé prendre sur ma table, au fond de la classe, l'équerre qui s'y trouvait et me l'a donnée en disant "tiens maîtresse celui-là il est de la même famille."

Nous avons poursuivi ce travail avec les notions de périmètre de droites parallèles et perpendiculaires et nous avons terminé par la

classification des quadrilatères (de la même façon). Les enfants ont réussi tout de suite à faire une classification convenable. Pour mettre en forme les recherches des enfants la maîtresse a fait un tableau qui comportait les colonnes suivantes: 2 côtés parallèles, les 2 autres côtés parallèles, 1 angle droit [3], 2 côtés égaux, les 2 autres côtés égaux, en correspondance avec les différents quadrilatères. Les enfants devaient mettre oui ou non dans les cases correspondantes. Une fois le tableau rempli, Antar a dit "mais alors on ne voit pas la différence entre le carré et le rectangle et entre le losange et le parallèlogramme" et Sybille a ajouté "il manque une colonne." La maîtresse avait oublié la colonne 'les 4 côtés égaux'.

Nous avons essayé de faire le jeu du portrait avec les polygones étudiés mais les enfants avaient beaucoup de mal à poser des questions concernant les propriétés. Ils demandaient tout de suite 'Est-ce un carré' par exemple.

Nous avons donné un tangram [4] en bois a chaque enfant et nous leur avons demandé de retrouver le carré en utilisant toutes les pièces, puis, sans tout défaire, de trouver un triangle isocèle rectangle, un parallèlogramme, un trapèze puis un rectangle. David G. a été le premier à trouver les différentes figures alors qu'il n'avait bien sûr jamais utilisé ce jeu avant.

Nous avons également proposé aux 2 groupes le 'jeu du magicien'. Les enfants choisissent un nombre secret, lui ajoute 1 par exemple, donnent le résultat à la maîtresse qui retrouve le nombre choisi. Les enfants essaient de trouver le 'truc' utilisé par la maîtresse. Ensuite les enfants prennent la place de la maîtresse. Antar, Najim et Sybille ont très vite compris la méthode et Antar a dit 'mais on peut rajouter 2 ou 3'. C'est à l'occasion de ce jeu que j'ai pu constater l'inadaptation à une consigne qui change. Quand nous avons proposé par exemple le même jeu en ajoutant 2, certains enfants ont continué à ajouter 1 pendant un certain temps, bien que leur attention ait été attirée sur ce petit changement.

J'ai amené en classe un 'bigtrak' (camion programmable) et les enfants ont programmé des parcours qu'ils ont ensuite fait exécuter au camion. Il avait tout d'abord fallu démystifier 'le robot' car les enfants pensaient qu'il 'savait tout faire tout seul'.

Nous n'avons pas cherché l'originalité dans le type d'activités mathématiques proposées, mais par contre nous avons voulu prouver que ces enfants, exclus du cycle normal par l'institution scolaire, et souvent considérés comme des 'débiles' sont capables comme les autres d'intérêts pour les mathématiques qu'ils peuvent mener à bien des activités de recherche et acquérir des notions mathématiques abstraites et fondamentales. En conclusion il est clair que ces enfants ont fait preuve d'une véritable activité intellectuelle. Ils ont su chercher et trouver, utiliser leur sens critique et déduire et enfin faire preuve d'initiative.

Françoise Cerquetti-Aberkane
Université Paris VII
Melun/France.

REFERENCES

[1] Z.E.P. zone classée priopritaire par le ministère a cause des énormes problèmes sociaux et d'immigration que l'on y rencontre.
[2] Classes recevant théoriquement des débiles mentaux, crées depuis le début du siècle.
[3] Les enfants avaient compris sans peine que cela voulait dire 1 au moins.
[4] Puzzle géométrique.
[5] Adda, J.: *Difficultés liées à la présentation des questions mathématiques* 'Educational Studies in Mathematics' vol 7, Juillet 76.
[6] E.R.M.E.L.: *Apprentissage mathématiques à l'école élémentaire*, C.P. Hatier 81.

ANNEXES

Remarques sur quelques enfants

Antar: dernier d'une famille de 8 enfants. Est arrivé dans la classe très sale. Il bavait sans arrêt et avait perpétuellement le nez qui coule. Il ne savait ni lire ni écrire. Il était rejeté des enseignants et des autres enfants. Ses parents ne s'occupaient pas de lui ayant une fille grabataire qui les occupe à plein temps. Il est depuis 2 ans dans la classe. Le premier mois son apparence physique a changé, et en un an il savait lire. C'est actuellement l'un des plus vifs en mathématiques (a été un an suivi par un psychologue scolaire).

David G.: issu d'un mariage consanguin vit dans une famille où il y a de vrais débiles. De plus ses parents sont alcooliques. Il avait adopté une attitude de débile bien que ne l'étant pas lui même. Extrèmement sale sur lui il était rejetté également par toute l'école (hors mis sa maîtresse actuelle et la classe de perfectionnement). En un trimestre son comportement s'est modifié.

Jérôme: le père voulant que son fils réussisse à l'école à tout prix, lui fait faire sans arrêt des devoirs. Il ne joue jamais et passe son temps à travailler scolairement à la maison. Il était complètement apathique et fermé en classe, écrivant extrèmement petit et ne bougeant pratiquement pas en éducation physique. En un trimestre son comportement s'est modifié et son écriture est devenue lisible (depuis 6 mois suivi par une psychologue).

Note: Je tiens particulièrement à remercier la maîtresse de la classe, Mme Albrecht, sans laquelle ce travail n'aurait pu avoir lieu.

MARC THIERRY

JEUX ET ECHEC EN MATHEMATIQUES

DANS le système scolaire français est prévue une structure d'acceuil des élèves les plus faibles; cette classe est appelée CPPN (Classe PréProfessionnelle de Niveau). Elle est réservée à des élèves ayant au moins 14 ans et au plus 16 ans et qui sont en échec scolaire complet. Mon propos est de vous présenter quelques expériences menées dans ces classes.

Il n'est pas question de proposer un enseignement tout à fait traditionnel des mathématiques aux élèves concernés et donc il est nécessaire de chercher des activités motivantes leur permettant de s'intéresser et ceci sans que les activités demandent un trop vaste bagage de connaissances. En effet, je précise que les élèves de CPPN ont souvent un comportement difficile et que certains savent à peine lire et compter.

Ma recherche a pour but d'étudier les activités mathématiques accessibles à ces élèves; en général, seuls des problèmes 'pratiques' leur sont réservés: 'une association amicale organise une sortie d'une journée en autocar pour 48 personnes. La distance à parcourir est en tout 502 km. Le transporteur prend 4,20 fr du km et demande que ses clients paient le repas du chauffeur. Chaque repas coûte 46 fr. Calculer la dépense par participant (arrondir au franc supérieur).'

Deux hypothèses guident mon travail:
— il est indispensable d'amener l'ensemble des élèves à raisonner sur des situations mathématiques;
— il est possible d'amener tous les élèves à effectuer des raisonnements mathématiques.

Je ne parlerai aujourd'hui que de l'utilisation des jeux de réflexion mais il doit être entendu que cela n'est qu'un aspect de mon travail. Pour moi un jeu sera une activité intellectuelle présentée sous une forme semblant attrayante à mes élèves. C'est ainsi que le jeu d'échecs ne peut être considéré ici comme un jeu. Comme exemples de jeux je citerai: les carrés magiques, les tours de Hanoi, le Master Mind, le solitaire, la course à n...

L'utilisation des jeux me permet souvent d'établir un contact avec des adolescents difficiles, d'amener l'ensemble de la classe à effectuer des raisonnements, d'initier à l'utilisation des ordinateurs et même parfois aux rudiments de la programmation.

DESCRIPTION DE QUELQUES SITUATIONS

Je dispose dans mon école de sept ordinateurs; dans certaines activités j'ai utilisé les machines, dans d'autres non. Dans tous les cas la classe (une vingtaine d'élèves) est divisée en deux groupes, donc en fait chaque

activité se déroule avec une dizaine d'élèves très souvent groupés par deux ou trois. La communication entre les élèves est autorisée et même encouragée. Je consacre deux heures par semaine pour chaque groupe à ces activités, pendant une durée correspondant à peu près à un tiers de l'année scolaire (un autre tiers est consacré au logo, un dernier tiers à l'initiation au traitement de textes, à l'utilisation de logiciels mathématiques, et aussi aux rudiments de programmation en basic et en logo).

CARRES MAGIQUES

J'ai proposé des carrés magiques d'ordre 3 et d'ordre 4 (très exceptionnellement d'ordre 5). Chaque année le succès est immense, les élèves acceptent avec enthousiasme de chercher pendant l'heure de cours, demandent à rester dans la salle de classe pendant la récréation.

Dans un premier temps la recherche est faite par tatônnements (raisonnement empirique), ce qui à l'ordre 3 peut permettre d'atteindre la solution, mais très rarement à l'ordre 4. Dans un second temps on élabore une méthode fondée sur le raisonnement par l'absurde, la recherche étant plus ou moins longue selon le nombre de nombres donnés sur la grille initiale. Cette année une élève, Lydia, à partir d'un carré magique d'ordre 3 qu'elle venait d'obtenir, en a construit un second en appliquant une symétrie (nous n'avions pas encore évoqué cette notion en classe de mathématiques). Je précise qu'elle m'a montré son nouveau carré en affirmant qu'il était magique et ceci sans faire aucun calcul de vérification. Après communication du résultat au groupe, qui a été immédiatement persuadé que le carré était magique, certains élèves ont cherché d'autres symétries afin de construire de nouveaux carrés (constatant par la même que la symétrie est involutive). Un élève a demandé si le 5 était nécessairement dans la case centrale, question qui a passionné l'ensemble de la classe. Sans l'utilisation de l'algèbre, il est assez long de prouver qu'effectivement le 5 doit être dans la case centrale, nous avons seulement fait une approche de la démonstration, en utilisant les symétries, en procédant par élimination. Je crois que beaucoup ont été persuadés de la conclusion par ce raisonnement intuitif.

A l'ordre 4, la difficulté est beaucoup plus grande et les élèves ne vont pas jusqu'aux conséquences ultimes à partir des situations construites empiriquement. Bien sûr, il est possible de moduler la difficulté en proposant plus ou moins de nombres sur la grille initiale.

Une démarche semblable a été utilisée dans certains problèmes de dénombrement (nombre de tiercés ou de quartés dans une course de n chevaux, nombre de mots de n lettres construits sur un alphabet de p lettres) et dans la résolution d'équations du type $ax + by = c$ où a,b,c sont des entiers naturels donnés et x,y sont des entiers naturels à calculer.

Je pense que l'ensemble des activités autour des carrés magiques ont permis la mise en oeuvre de raisonnements empiriques et intuitifs, qui ensuite ont pu être partiellement transférés dans d'autres situations mathématiques. La difficulté majeure est de rendre explicites des

raisonnements implicites parfois complexes.

LES TOURS DE HANOI

Dans cette activité j'ai utilisé l'ordinateur. Le programme utilisé est excellent: à la fin de chaque partie est indiqué le nombre de déplacements effectués, ainsi que le nombre minimum nécessaire. En début de partie, il est possible de demander à la machine d'effectuer elle-même une partie (avec la meilleure stratégie bien sûr). On peut choisir un nombre d'anneaux de 2 à 10. Ici l'utilisation de l'ordinateur a pour but de contrôler que l'activité se déroule selon les règles (en cas d'erreur, la machine affiche 'déplacement impossible'), de plus je crois que dans ce cas elle participe beaucoup à la motivation initiale.

La première étape de la recherche est de l'ordre de la manipulation (raisonnement empirique) et cette étape peut être fort longue pour certains groupes. Quelques groupes entreprennent véritablement une recherche sur la stratégie à adopter et peuvent y réfléchir sur plusieurs séances. Cela montre que même des élèves très instables sont capables de concentration et d'une réflexion suivie. Il est passionnant de découvrir les progrès réalisés d'une séance à l'autre. Beaucoup réussissent sans trop de problèmes avec trois puis quatre puis cinq anneaux, mais sans vraiment prendre conscience qu'il y a un processus récurent. Certains accèdent à un niveau supérieur, à savoir une stratégie valable pour un nombre quelconque d'anneaux, sans toutefois être capables de communiquer la démarche construite, et ceci car aucun n'a pu coder l'évolution des positions.

On peut distinguer quatre étapes dans la recherche des élèves:

— recherche par tâtonnements;
— recherche d'une stratégie pour un nombre fixé d'anneaux;
— recherche de la meilleure stratégie pour un nombre fixé d'anneaux;
— recherche de la meilleure stratégie pour un nobmre quelconque d'anneaux.

Il y a dans cette activité approche d'un processus récursif, et je dois noter qu'il est relativement bien assimilé par mes élèves: on retrouve des processus semblables dans la décomposition en facteurs premiers ou dans l'algorithme d'Euclide, ainsi qu'en programmation en logo.

LE COMPTE EST BON

Ce jeu télévisé très célèbre en France provoqua l'enthousiasme parmi mes élèves. La règle est simple: on choisit six nombres parmi les nombres 1,2, ...10,15,25,50,100 les répétitions étant autorisées. Puis on donne un nombre compris entre 100 et 999. En utilisant les quatre opérations dans N il faut obtenir (ou au moins se rapprocher le plus possible) le dernier nombre donné, et ceci en utilisant au plus une fois les six nombres donnés au départ.

A coté de l'intérêt évident pour la pratique du calcul mental, on peut penser qu'il y a une exploitation à faire de ce jeu dans l'apprentissage de l'algèbre: propriétés des opérations, utilisation des parenthèses. Il

n'existe pas de stratégie globale, mais pour chaque exercice il faut procéder avec astuce; en général les critères de divisibilité sont d'un précieux secours.

J'ai proposé une version plus simple du jeu en limitant le choix des opérations à la multiplication et à l'addition, ce qui a permis une réflexion assez approfondie sur la structure algébrique de (N, +, x), mais je n'ai pas réussi à introduire le calcul littéral. Des exercices du type 'factoriser (AxX) + (BxX)' ou 'simplifier (5 + X) + 8' ont provoqué une incompréhension pour tous les élèves. Par contre les exercices 'calculer X tel que (3xX) + (7xX)= 225' ou 'calculer X tel que (5+X) + 8 = 193' sont réussis par la majorité, ce qui signifie que les écritures sont bien décryptées.

ACTIVITES GEOMETRIQUES

J'ai aussi proposé des activités du type:
— découper une figure en n figures isométriques (n=2; 3 ou 4);
— compter tous les triangles (ou carrés, ou rectangles, ...) sur une figure donnée.

Le second type d'activités permet aux élèves de reproduire avec soin le dessin proposé (cette étape semble indispensable pour se familiariser avec le problème), puis de réfléchir sur des objets géométriques usuels (triangles équilatéraux, isocèles, rectangles, ...). Il n'est pas évident d'inventer une méthode efficace et certaines remarques de symétrie sont souvent utiles. Une fois encore une activité ludique (considérée comme telle par tous les élèves) m'a permis de motiver, donnant un point de départ à de nombreuses activités (classifications, constructions, raisonnements simples). De plus une question a beaucoup animé la classe: comment être sûr que l'on n'a pas oublié de figures dans le dénombrement?

Pour le premier type d'activité, beaucoup plus difficiles en général, le seul principe à utiliser est celui de l'égalité des aires pour deux figures isométriques, principe qui fut admis assez facilement par tous, d'autant plus que 'isométrique' fut introduit comme synonyme de 'superposable'. Il est intéressant de noter que les manipulations dans ce type d'exercices sont malaisées et en fait ceux qui ont réussi ont obtenu la solution par un 'éclair'. Il est par conséquent difficile de comprendre la démarche, je n'ai jamais pu obtenir une quelconque explication.

CONCLUSION

Les activités intellectuelles et ludiques permettent incontestablement de motiver les élèves et offrent l'occasion de faire raisonner sur des situations que l'on peut considérer comme abstraites, ce qui me semble déjà un résultat important lorsque cela concerne des élèves réputés faibles et ascolaires. De plus, l'enthousiasme pour ces jeux touche tous les élèves, indépendamment de leur valeur scolaire supposée, et donc pour une fois il est possible de proposer des activités identiques à un groupe tout à fait hétérogène, et on peut alors noter qu'il n'apparait pas de différences

notables dans la réussite, pour ces jeux, entre 'bons' et 'mauvais' élèves. Par contre la différence apparait très nettement lorsqu'il s'agit d'expliquer la démarche ou la stratégie utilisées, car pour mes élèves de CPPN, il y a une réelle difficulté à décrire verbalement, alors que parfois l'explication est parfaitement communiquée au moyen d'un dessin.

Souvent il y a mise en oeuvre de raisonnements naturels implicites, c'est à dire sans prise de conscience du raisonnement, ce qui, bien sûr, rend difficile le transfert de ces raisonnements à d'autres situations où ils seraient utiles. On peut se demander si cette difficulté évidente à actualiser des raisonnements assimilés n'est pas avant tout d'ordre linguistique. Je pense que les élèves de CPPN présentent un retard sensible et objectif au niveau de la langue: pauvreté du vocabulaire employé, fautes de syntaxe, orthographe défaillante. Mais cependant nous connaissons tous des exemples d'élèves très faibles dans la manipulation de leur langue maternelle et pourtant très capables en mathématiques (en France on oriente ces élèves dans les sections techniques!), donc le retard linguistique n'est pas un obstacle insurmontable pour aborder des rudiments de mathématiques. Dans les situations décrites précédemment, certaines activités ont été proposées sous une forme très scolaire: contrôles notés, travail à la maison, ... ce qui n'a pas empêché l'enthousiasme et le plaisir de chercher. N'y a-t-il pas là un indice du fait que des élèves 'faibles' peuvent aussi aimer raisonner? Je crois qu'il est primordial d'imaginer de nombreuses situations adaptées à des élèves en retard scolaire et permettant des raisonnements accessibles à ces derniers.

Marc Thierry
Université Paris VII
Paris/France.

REFERENCES

[1] APMEP: *Les carrés magiques*, nr 10, 1975, par Belouze.
[2] APMEP: *Algèbre des carrés magiques*, nr 55, 1984, par Groizard.
[3] APMEP: *Jeux 1*, nr 44, 1982.
[4] IREM de Grenoble: *Activités mathématiques CPPN*, soutien 6, 5, 1982.
[5] IREM de Grenoble: *Activités géométriques en sixième et cinquième*, 1979.
[6] IREM de Grenoble: *Petit x*, nr 1, 1983.
[7] Barrat, M. et J.C.Gouneaud: *Mathématiques pour CPPN*, 1979, F.Nathan.
[8] Berloquin, P.: *100 jeux géométriques*, Le livre de Poche.
Berloquin, P.: *100 jeux numériques*, Le livre de Poche.
[9] Boule, F.: *Mathématiques et jeux*, CEDIC 1976.
[10] Renaut, O.: *Géométrie du cycle élémentaire à la 5*, CRDP Dijon, 1978.

MARIO BARRA

KNOWING HOW TO PROVE

IN this didactic research we want to establish how, and at what age, it is possible to develop in pupils some logical skills related to 'knowing how to prove'.

For the purpose of this research we have tried to unify algebraic, analytic and geometric languages in close connection with didactic materials. We consider in particular various proofs of formulas for the evaluation of:

$$\sum_{i=1}^{n} i^k \quad k = 1,2,3.$$

to be carried out by 11-14 year old children.

For this research a historical and epistemological analysis of the various kinds of proofs of the mentioned argument has been used, together with some new proofs which can be expressed through handy didactic materials.

INTRODUCTION

We have been led to deal with the subject matter of this paper by the following remark: 11-14 years old children, but also older ones, show a scarce ability in 'arguing and proving'. Here, by a scarce ability in arguing we mean a poor logical and expressional ability both in the sense of a scarce ability to explain the main points of a claim, and in the sense of a scarce ability to make and to explain logical connections to come to a conclusion.

By a scarce ability to prove means, here and in particular in the scientific studies, to know what a proof is, to recognize it, to learn and to repeat it and, possibly, to find it. The possibility of developing this kind of ability may represent a particular problem in Italy. Actually, in this country, over 75% of the mathematics teachers, with 11-14 old students, are neither mathematicians nor physicists. For instance most of them have never been exposed to a proof by mathematical induction during their course of studies. In what follows, the verb 'to prove' will be also used to mean 'to argue'.

KIND OF RESEARCH

In order to increase in a child the ability to argue and to prove, various paths of research are tentatively followed:

1. try to understand how a child reasons trying to find out his implicit argument; in particular we can try to know what are his ways of learning and of expressing himself, and what are the selections he makes among the various ways of reasoning;

2. try to develop in the child the knowledge of suitable languages and proving methods fitting with his way of reasoning;
3. to study whether and how, and at which age, it is possible to develop in the child a suitable language for a proof which is as yet foreign to him, such as a synthetic language and in particular an algebraic language in tight connection with the geometric one.

As to 1 we are presently studying the behaviour of pupils both in solving open problems and while playing with didactical games. This also in order to know what is the suitable emotional atmosphere that can ensure good results.

As to 2 a historical research has been made on various ways of proving and we have elaborated proofs which are as simple as possible. Attention has been given to the drawings, the graphics and the construction of didactical objects for manipulation. These proofs have been the object of a first brief experiment with a limited number of students with the purpose of having some information before working on the problem systematically.

As far as 3 is concerned a few work sheets have been elaborated for students and teachers, and tested in three pilot classes. We want to make it clear that algebra is for us merely a synthetic language; our intention is not that of introducing algebraic concepts.

The motivation of the present research is both didactic, with a special attention to mathematics, and social. We know that today's pupils are scarcely stimulated to use their abilities of expression and reasoning. This because of their limited relations with their parents, the lack of interest in social and political engagement and in recreative forms such as books. In this framework our goal is to expose the child to a wider range of subjects while at the same time he saves time and forces.

In this paper we shall only deal with some aspects of this problems concerning 2 and 3.

HISTORICAL ANALYSIS OF THE FORMULAS FOR THE EVALUATION OF:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} i^k \qquad\qquad k = 1,2,3.$$

To our knowledge there does not exist a thorough analysis of the types of proofs more often used in the various historical periods. Thus, we attempt to carry out this research ourselves in a few cases with special emphasis on the evaluation of (1). This because a great number of proofs of it exist and have been the object of study in various times. In what follows we will deal in particular with:

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{(i.e. the case } k = 2\text{)}$$

In the Babilonian table AO 64.84,2 (Musée du Louvre, see [11], page 124, or [11*] page 15) we find how to evaluate the sum of the squares of the numbers from 1 to 10:

$$(1.\frac{1}{3} + 10.\frac{2}{3}) \,.\, 55$$

which corresponds to (2) written in the form:

(3) $\frac{1}{3}(1 + 2n) \cdot \frac{1}{2}n(n + 1)$ for $n = 10$.

A possible proof of this formula has been reconstructed by various authors and in particular by O.Neugebauer [9], p.172, J.E.Hofmann [8], p.36, S.J.Lurje [8], p.17, L.Giacardi and T.Viola [4], p.185, L.Giacardi and S.C.Roero [5], p.132 and p.231.

Archimedes [1], p.253, gives a rigorous proof of (2), for n=8, and we find again (1) in the Pythagoreans (for k=1: [7], p.192) and in the Neo-Pythagoreans (for k=3: Nicomachus Gerasenus). (This problem was later considered by the Romans (Codex Arcerianus), by the Arabs (Al Haitam and Muhammed ibn al Hosein) and by the Chinese (Yang Hui)).

The strictly analytical proofs of (1) can be given in different ways. For example by means of Pascal's Triangle, by relying on a certain identity, as Leonardo Pisano elegantly does in *Liber Quadratorum* or by recurrence, through the development of $(1 + i)^n$ and the formulas of (1) already calculated for smaller values of n, and finally by mathematical induction (a verification, more than a proof, because it does not contribute to the result, see [2]). The two last proofs are those which are mostly found nowadays in the university texts.

HYPOTHESIS AND FIRST CONCLUSIONS

The hypothesis and the first conclusions that can be drawn by this analysis in connection with what will be said in the sequel are as follows:

a. Historically the first proofs have been considered as perfectly rigorous and of general validity even if they are limited to special cases, under the condition that the used arguments are general.

b. At an early stage the chosen languages and the first intuitons on which the largest number of proofs were based, were of geometric type (this might be due to the fact that the area in our brain connected with the sense of sight occupies $\frac{1}{3}$ of the total volume).

   The non geometrical approach, like the arithmetical one of the Sumerians and of the Pythagoreans might be based on mystical or magical reasons or even on the intent of avoiding the divulgation of their knowledge. Moreover the influence of this approach can be found later on. Even in the proof of (2) by Archimedes, although geometrical, the best intuitions appear not to be fully exploited because he tends to reduce the various geometric configurations to segments or rectangles of unitary height, as he wants to translate the figures into numbers.

   The Pythagoreans themselves, in their 'Aritmo-geometries' make use of points, but they assemble them in geometrical configurations, and perform algebraic operations in the 'Geometric-algebra' always reasoning on geometric configurations. On the other hand it is, for example, impossible, only using points, to divide in two equal parts and odd number of those points or a rectangular configuration of

them with a diagonal line. The latter operation is very useful, for instance, in the proof of the Pythagoras' Theorem itself.
The role of geometry, useful in proving numerical and algebraic properties, as it can also be seen in the proofs of the Babilonians, was an auxiliary one, but nonetheless important and often conclusive.

c. In our opinion, in the three dimensional case, which is the case mainly considered by the first mathematicians, the non geometrical language is less simple and does not have as many possibilities and demonstrative evidence as the geometrical one.
d. Leaving aside the used language, there seems to be little worry of finding a simple proof and of making the meaning understandable in the clearest possible way.
e. The algebraic symbolism has found its way very slowly and gradually (we must consider however, that the knowledge of the alphabet was not widespread; words were used in place of letters). This is also the reason why the reading and comprehension of some proofs is not so clear and not so easy to follow.
f. As far as the study of geometrical figures is concerned, there is in history a clear passage from the geometrical language to the algebraic-analytical one, which derived also from the passage to the n dimensions. In today's school, however, even when the cases $n \leqslant 3$ are dealt with, powerful tools are used despite of their limited degree of evidence; in the words of Bruno de Finetti 'a press is used to push in a drawing pin'.

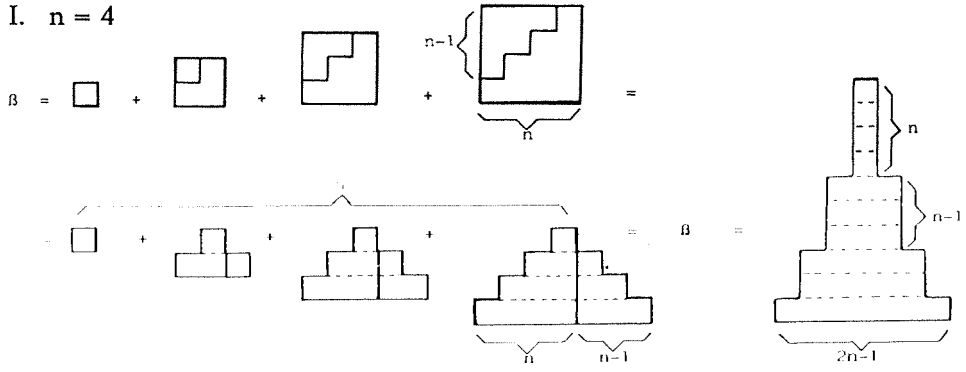
We close these historical remarks by quoting a statement of Leonardo Pisano (Liber Abbaci (1202)) with which we agree, at least from a didactical viewpoint:

> 'Et que arismetica et geometria (sic) scientia sunt connexe et suffragatorie sibi ad invicem, non potest de numero plena tradi doctrina, nisi intersecantur geometrica quedam, vel ad geometriam spectantia que hic tantum juxta modum numeri operantur; qui modus et sumptus ex multis probationibus et demonstrationibus, que figuris geometricis fiunt.'

HISTORY AND DIDACTICS

In the following proofs we sometimes make use of some ideas that can be found in the historical proofs mentioned above.

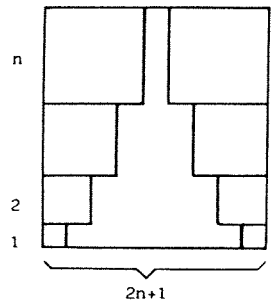
I. $n = 4$



The height is: $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

The area is: $3\beta = (2n+1)\frac{n(n+1)}{2}$

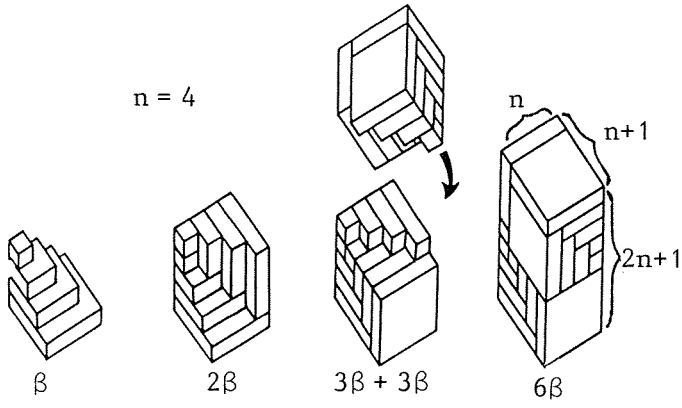
$\Rightarrow \beta = \frac{1}{3}(2n+1)\frac{n(n+1)}{2}$.



The latter formula, for n = 10, is the same as the one found in the Babilonian tables (see (3) above). It might even be defined as a 'Babilonian formula' for the method of proof. If instead of squares we consider the centers of them, then the formula may be called a 'paleo-pythagoric' formula.

In Archimedes' proof we find the same partition of square numbers into triangular ones; the sum of the squares is then repeated three times. However, the proof is too long; see also our remarks under b.

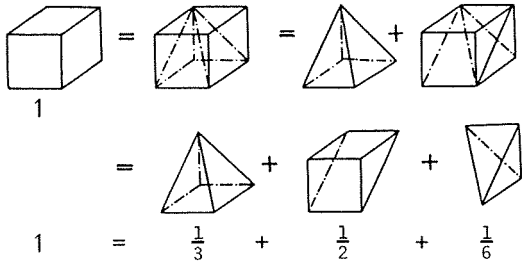
II. Game: put together six equal 'pyramids' of the form β in the picture, so as to form a rectangular parallelepiped.



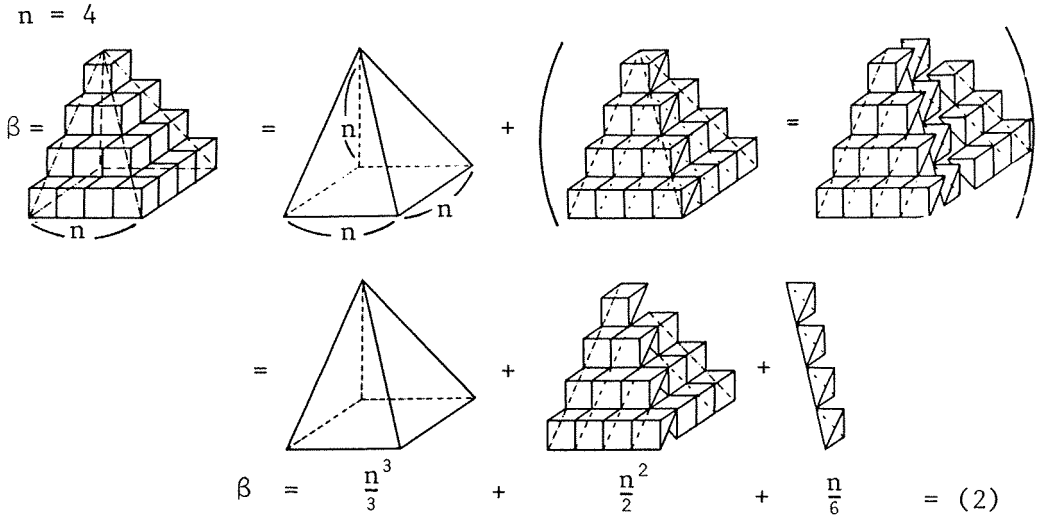
$6\beta = n(n+1)(2n+1) \quad \Rightarrow \quad (2)$

This proof is very similar to that of S.J.Lurje. This author makes use of only three 'pyramids' and obtains what is shown below in the third figure. However, this is not suitable for a game and does not allow us to easily remember the final formula.

III.



n = 4



$$\beta = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = (2)$$

Of course the result can also be obtained with a pyramid circumscribed to β. The two pyramids (insc. and circumsc.) allow us to have the corollary of Archimedes' tenth proposition directly:

$$\frac{n^3}{3} < \sum_{i=1}^{n} i^2 < \frac{(n+1)^3}{3}$$

The proof III is based on the pyramid as in Giacardi's and Viola's paper, ([4]: a very interesting paper which has suggested some of the considerations we have made). In this proof, however, the formula for the volume of the truncated pyramid is used.[1]

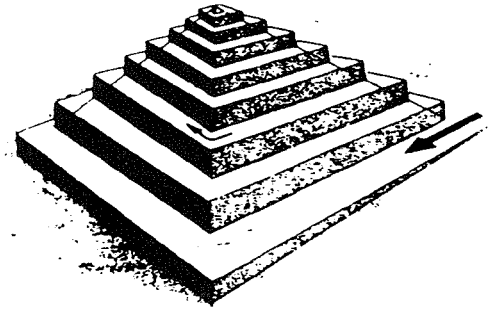
As in [4] the proof III could be considered as one of Egyptian origin, and not only for the kind of procedure involved. There is, in fact, a first similarity between 'β' and the step pyramid built around 2750 B.C. at Saggarah; but, above all, the passages used in III are

1. This formula was already known to the Egyptians around 1850 B.C. as we can see in problem n.14 of Moscow's Papyr [3] and [4].

identical to the lifting technique of rock blocks in the construction of pyramids without steps starting from Cheope's (2650 B.C.).

In fact there is no archeological evidence that the Egyptians had lifting machines such as winches or pulleys, therefore the various explanations which envisage the use of these tools cannot be reasonably accepted. However there is still the hypothesis of the existence of access ramps (remains of them have been found) made of mud bricks dried in the sun, on which the stone blocks would have been pulled up to the height of the erections. But also in this case the experts disagree and offer differing solutions:

1. Gigantic ramps were built at the sides of the pyramid (or only on one), and had to be gradually lengthened and raised as the construction progressed. This explanation causes much perplexity because, to have the proper inclination, the ramps would have had to be two to three kilometers long, and would have required more work than the pyramid itself. It should also be noted that by the end of the work, the pyramid would have been completely buried under an artifical mountain which would then have had to be removed to free the finished structure.
2. A ramp was built which would round the pyramid.

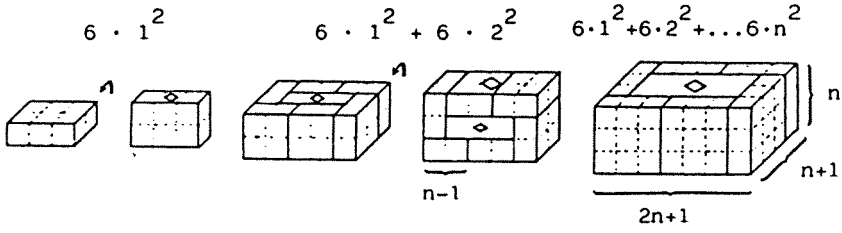


This hypothesis, suggested by the French Egyptologist Georges Goyan, seems to present various advantages. It would permit the building of the inner chambers, the blocking devices and the interior revetment at the same time. Only the use of sledges and human traction would be required. It would not clutter up the area around the pyramid reserved for other religious and funerary constructions. On completion of the construction, the material to be removed would be much less than that envisaged in the other hypotheses.

Therefore, the consideration of steps and then the removal of them might have been useful for the construction of the pyramids and for the proof of (2).

IV. Geometric induction:

$n = 3$

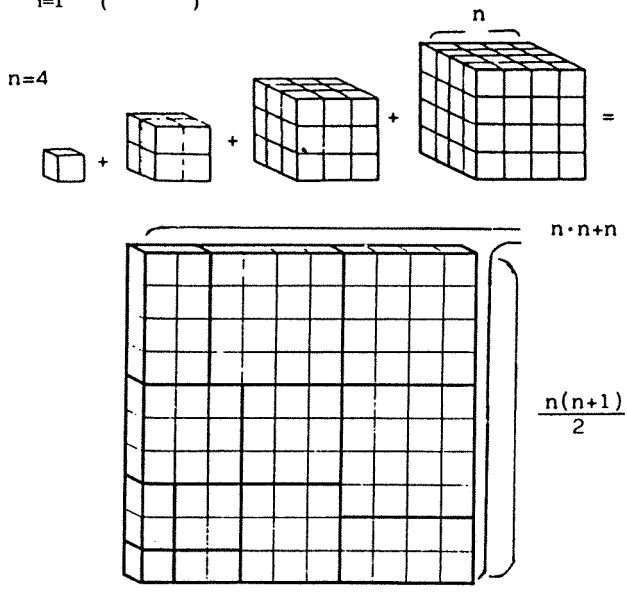


$$6 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = n(n+1)(2n+1) \Longrightarrow (2)$$

Substituting the geometric passages for the algebraic ones, we can 'see' that the formula is true for n=1 and that, if it is true for a given value, it is also true for the following one.

V.

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$



$$1+2+\ldots\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

The area is $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

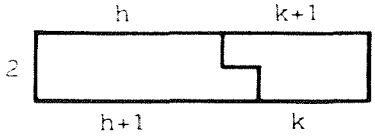
FINAL REMARKS

These and other proofs of the same formulas have been proposed to children starting from 13-14 years of age. The considerations made by the younger ones are often the same as the ones made by university students or by teachers.
In particular the proof of (2) that has been mostly appreciated is II, because it is not a trivial game; IV and III are, in this order, the proofs that allow one to remember more easily the final formula.

The final objective, not yet tested, is the one to divide the students of a classroom in work groups so that each group will 'construct' one of the proofs presented here and show it to the others afterwards. Such proofs should involve algebraic notations. In view of the introduction of them we have elaborated some working sheets tested with about 100 students of 10-12 years. In these sheets the geometric and algebraic languages are presented in tight connection as in the following examples:

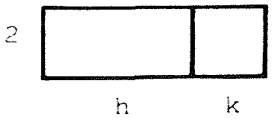
even = e; odd = o.

$o + o' = e$



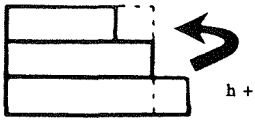
$2h + 1 + 2k + 1 = 2h + 2k + 2 = 2(h + k + 1)$

$e + e' = e$



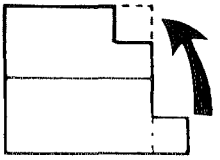
$2h + 2k = 2(h + k)$

The sum of three consecutive numbers is divisible by three:

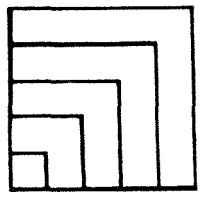


$h + h + 1 + h + 1 + 1 = 3h + 3 = 3(h + 1)$

The sum of two consecutive odd numbers is divisible by four:



$2h + 1 + 2h + 1 + 2 = 4h + 4 = 4(h + 1)$



$1 + 3 + 5 + \ldots 2n + 1 = n^2$

The geometric proofs are understood and constructed fairly easily. The main problem however consists in the use of the letters to denote generic numbers. In the new working sheets, before the use of letters we will insert some exercises in which the geometrical and algebraic properties will have to be explained in words.

As for now, what we have seen is not an indication for school programs, but only a way of studying the problems under consideration.

Mario Barra
Ricercatore Universita
Roma/Italia.

REFERENCES

[1] Archimedes: *Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii*, ed. Heiberg, Lipsiae in Aedibus B.G.Teubneri, 1910-1915.
[2] Courant, R., Robbins, H.: *What is Mathematics?*, Oxford University Press, New York 1941.
[3] Giacardi, L., Viola, T.: *Il calcolo del volume del tronco di piramide nella matematica egizia* (Discussione sulle ipotesi più importanti già proposte); *Saggio su un possibile calcolo dei volumi di alcuni poliedri nella matematica egizia*, Atti Accad. delle Scienze di Torino, 1977.
[4] Giacardi, L., Viola, T.: *Le possibili origini di un teorema di matematica noto ai Greci alla luce dei rapporti con le civiltà che li hanno preceduti*, Atti Accad. delle Scienze di Torino, 1978.
[5] Giacardi, L., Roero S.C.: *La matematica delle civiltà arcaiche*, Edizioni Stampatori, Torino 1979.
[6] Pisano, L.: *Scritti di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo*, ed. B.Boncompagni, Roma, Tip. delle Scienze Mat. e Fis., 1857-1862.
[7] Loria, G.: *Storia delle matematiche*, STEN, Torino, 1929.
[8] Lurje, S.J.: *Archimedes*, Wien 1948.
[9] Neugebauer, O.: *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*, Vol I *'Vorgriechische Mathematik'*, J. Springer, Berlin, 1934.
[10] Gerasenus, N.: *Nicomachi Geraseni Pythagorai Introductionis arithmetici libri*, ed. Hoche, Lipsiae, Teubner 1866.
[11] Waerden, B.L. van der: *Erwachende Wissenschaft*, Basel-Stuttgart, Birkhauser Verl. 1956.
Science Awakening, Noordhoff, International Publishing, Leiden-New York 1956.

EMMA CASTELNUOVO/CLAUDIO ET DANIELA GORI-GIORGI

MATHEMATIQUES A L'AGE DE L'ORDINATEUR QUEL GENRE DE CAPACITES DEVONS-NOUS FORMER CHEZ NOS ELEVES?

CETTE étude a été motivée par deux différentes considérations: l'une concernant la didactique et la recherche dans l'éducation mathématique, l'autre concernant de problèmes sociaux d'aujourd'hui.
Il est clair que, à l'âge de l'ordinateur, l'enseignement des mathématiques doit renforcer son caractère logique et analytique. Mais il est moins évident qu'il doit, en même temps, mettre l'accent sur l'intuition et l'imagination créative; et ceci pour deux raisons:
— pour avancer en mathématiques indépendamment des ordinateurs;
— pour aider les ordinateurs, en créant, pour eux, des techniques convenables.
La seconde considération est dictée par le contexte social d'aujourd'hui. Le problème, toujours plus grave, du chômage a conduit, tout récemment, sociologues et industriels à la conclusion suivante: il faut que les jeunes reçoivent à l'école une formation flexible, capable de les préparer, dans le futur, à changer fréquemment de travail, en acceptant les activités fort différentes de leur spécialisation. Il est clair que chaque discipline doit former cet esprit ouvert, mais, à notre avis, c'est surtout l'enseignement des mathématiques qui peut avoir une influence particulière en ce sens, soit pour la variété des raisonnements soit pour la richesse des sujets. On se demande: à ce but, quel genre de mathématique devrions-nous enseigner? Par quel méthodes pouvons-nous former une mentalité particulièrement flexible?

Réfléchissons: on est obligé de passer d'une méthode à l'autre lorsqu'on n'est pas soutenu par l'analogie. Or, ce manque d'analogie est typique de la géométrie de l'espace par rapport à la géométrie du plan. C'est justement pour cette raison que nous avons développé, avec des élèves âgés de 16-17 ans, deux sujets de la géométrie de l'espace, très liés l'un à l'autre, en les comparant avec des sujets analogues de la géométrie du plan:

1. la somme des dièdres d'un tétraèdre, comparée à la somme des angles d'un triangle;
2. la notion d'équivalence des polyèdres, comparée à la notion analogue concernant les polygones.

Considérons le premier sujet.

Somme des dièdres d'un tétraèdre

Dans la géométrie du plan la somme des angles d'un triangle est constante, c'est-à-dire qu'elle ne tient pas à la forme du triangle. Le problème analogue dans l'espace sera de considérer les dièdres d'un tétraèdre. La fig.1 montre un tétraèdre droit ayant pour base un

triangle équilatéral.
On a indiqué par:

α le dièdre entre chaque face et la base;
β le dièdre entre deux faces.

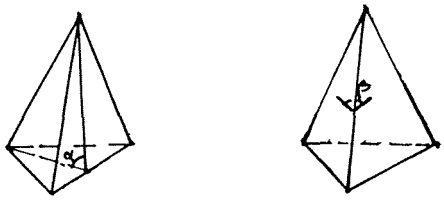


fig.1.

Des considérations dynamiques suggérées par un simple 'appareil';

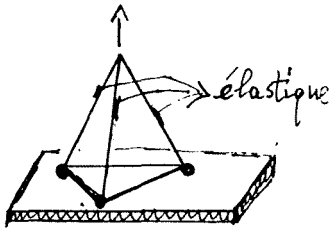
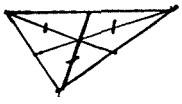


fig.2.

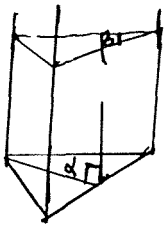
conduisent à intuire que *la somme:*

$s = 3\alpha+3\beta$

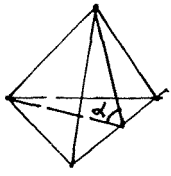
change selon la forme du tétraèdre; en effet, si on considère les deux cas limite et le cas du tétraèdre régulier, on a les situations illustrées dans les figures 3, où on a indiqué par R l'angle droit.



$\alpha=0$
$\beta=2R$
$S=3\alpha+3\beta=6R$



$\alpha=1R$
$3\beta=2R$
$S=3\alpha+3\beta=5R$



$\beta=\alpha<1R$
$S=6\alpha<6R$

fig.3.

Or, le fait que la somme $S = 3\alpha + 3\beta$ change par continuité, conduit à une importante conclusion: *la valeur de S* sera donnée, en général, *par un nombre irrationel d'angles droits.* On verra que cette observation

résultera fort importante pour éclaircir le second sujet.

On doit remarquer que ces considérations peuvent être développées aussi avec des très jeunes élèves: le but sera non pas seulement de comparer propriétés analogues du plan et de l'espace, mais aussi celui d'exercer la vision spatiale. Il est certain que si on veut une recherche plus poussée on doit avoir recours à la trigonométrie.

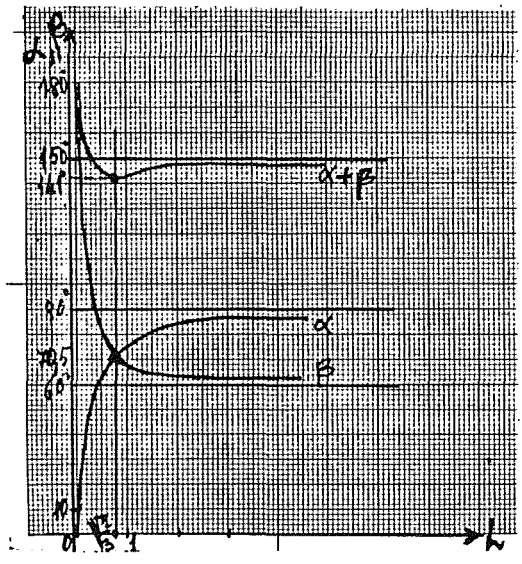


fig.4.

Après avoir calculé la tangente de α et de β, en fonction de la hauteur h du tétraèdre, il est très intéressant de dessiner (fig.4), par points, le graphique de α et de β; ensuite, de ces deux graphiques, on arrive, par addition (qu'on peut effectuer soit 'à la main' soit avec l'aide d'un ordinateur), à la somme $\alpha + \beta$. Le minimum de $\alpha + \beta$ se réalise dans le cas du tétraèdre régulier, c'est-à-dire lorsque $\beta = \alpha$. Ce résultat, obtenu par le dessin, on peut évidemment l'avoir par l'analyse, et donc à un niveau plus haut.

Venons maintenant au second sujet.

La notion d'équivalence entre les polyèdres

Cette notion représente un point 'historique': c'est, en effet, seulement au début de ce siècle que le manque d'analogie entre l'équivalence des polyèdres et celle des polygones a été mis en relief. C'est le mathématicien allemand Max Dehn qui, en 1903, a démontré que deux polyèdres peuvent avoir le même volume sans être décomposables en parties polyédriques égales. La démonstration de Dehn est très longue et subtile. D'autres démonstrations ont été données plus récemment; entre autre une démonstration du mathématicien espagnol J.Rey Pastor qui fait recours à l'analyse.

Notre but était seulement de donner aux élèves une idée de cette curieuse propriété négative, de cette non-analogie. On a commencé par présenter deux conteniteurs de lait, bien connus: un cube et un tetrapack ayant la capacité d'un demilitre. On a porté l'attention sur les dièdres, plus précisement sur la somme des dièdres d'un cube et d'un tétraèdre. On a, indiquant toujours par R l'angle droit:

(1) pour *le cube* : $S_{\text{dièdres}} = 12$ fois de R
pour *le tétraèdre* : $S_{\text{dièdres}}$ = nombre irrationel de fois de R.

Et maintenant allons sectionner le cube par des plans. Il suffit d'examiner les quelques exemples représentées dans la fig.5 pour se rendre compte que, lorsqu'on coupe le cube en parties polyédriques $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$, la somme 12R est altérée d'un multiple de R.

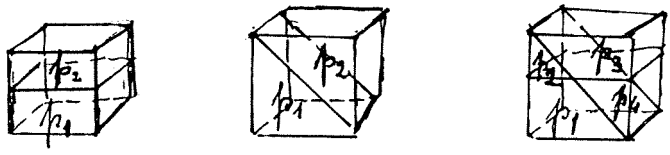


fig.5.

Or, cette propriété a un caractère général: *en coupant un polyèdre P dans un certain nombre de polyèdres* $p_1, p_2, \cdots p_n$ *la somme des dièdres change d'un multiple de R.*
C'est-à-dire, on a:

(2) $S_{\substack{\text{dièdres de} \\ p_1, p_2, \cdots p_n}} = S_{\substack{\text{dièdres de} \\ P}}$ (module R).

Revenons maintenant au tétraèdre.
Considérons un tétraèdre dont la somme des dièdres est égale à un nombre irrationel d'angles droits, et comparons ce tétraèdre avec un cube ayant le même volume. Peut-il arriver que les pièces polyédriques p_1, $p_2, \ldots p_n$, placées de façons différentes, forment soit le cube soit le tétraèdre? Réfléchissons: si ce fait se vérifie, la (1) et la (2) conduisent à écrire:

12 fois de R= nombre irrationel de fois de R.

La conclusion absurde à laquelle on arrive tient à l'hypothèse que cube et tétraèdre étaient composés par le même nombre de parties polyédriques égales. Le résultat de ce raisonnement est donc le suivant: un cube et un tétraèdre peuvent avoir le même volume sans être equi-décomposables.
Cet exemple suffit pour comprendre que la signification d'équivalence est, pour les polyèdres, plus large que celle d'équi-décomposabilité.

Cherchons, à la fin, de tirer, de ces exemples une conclusion.
Nous sommes partis de considérations générales concernant soit la didactique et la recherche soit des gros problèmes de notre société. Nous avons mis en relief la nécessité de donner à nos élèves une mentalité flexible et ouverte. Les exemples que nous venons de présenter montrent

qu'aussi un sujet de géométrie classique est à même de susciter cette disponibilité mentale, mais *à une condition* : on ne doit jamais mépriser la vision concrète et spatiale, premier pas vers le 'savoir voir en mathématique'.

Emma Castelnuovo
Claudio et Daniela Gori-Giorgi
Ecole secondaire
Roma/Italia.

LUIS PUIG ESPINOSA

PREVIOUS KNOWLEDGE, AVAILABLE RESOURCES REASONING WHILE SOLVING PROBLEMS IN THE CLASSROOM AND REAL LIFE

IT has been argued that previous knowledge heavily influences the problem solving process, in particular the kind of reasoning involved. That is evident in the extreme case: when someone has previously solved the problem, he only has to retrieve from memory his previous work on it. In the story we are going to tell, the lack of certain pieces of knowledge conditions the problem solving process and contributes to the eventual failure. Nevertheless such a lack does not explain the whole story: it is rather the presence of other pieces of knowledge, which one could call 'procedural' or 'process knowledge' (as opposed to 'content knowledge'), that explains the actual problem solving process. Besides, the eventual failure can be accounted for by the experimental context that restricted the available resources.

We want to show that when examining the role of previous knowledge in the problem solving process one must determine what is referred to by previous knowledge. This is especially important if one wants to draw conclusions with reference to what should make up a mathematics curriculum.

THE CONTEXT OF THE STORY

The story is taken from a research project currently being undertaken on the metacognitive aspects of the problem solving process [1]. We have been observing the problem solving behaviour of pupils of a teachers training school (Escuela Universitaria del Profesorado de EGB de Valencia) in an experimental setting. A course of problem solving given at the school forms the context of the research and the results of this research feeds back into the course. The technique followed is the cooperative solution of problems in pairs with a set time limit. The sessions are video taped and the observers do not intervene during them [2]. We are currently analyzing the protocols and writing a research report.

THE CASE STUDY

Merche and Vicente (aged 21) were the first pair to take part in the experiment. They had both done the problem solving course the year before. They are both brilliant at mathematics.
The problem we set them was:

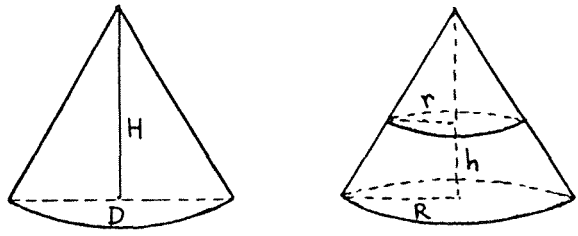
Is the lateral area of a frustum of a cone $\pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2}$ *?*

They began by drawing a cone and the plane section that truncates it,

where they wrote in the variables of the formula. They immediately proposed a plan to solve the problem: "It'd be work out like the area ..., lateral area of a normal cone, minus the area of the other little one" (M.14;1m10s).

When they tackled the task the first difficulty arose: "The only thing that occurs to me is to begin by ..., I think it'll be easier to look for the lateral area of a cone ... *I don't know the formula*, of course, but it's probably easier ... I don't know, if it's an area, a plane figure, you can develop it, can't you? We can develop it ..., *what I don't know is how it's going to look like*" (M.22;1m55s).

Forgetting the formula of the area causes one problem: to find it; forgetting what the development looks like causes another, which was unexpected: to identify the elements of the cone in the drawing of its development. In fact, they marked in the drawing of the development the height of the cone and the diameter of its base.



To find the formula of the area, as the figure they drew suggests, they divided the problem into parts (V.39;3m40s). They began by calculating the area of the triangle. When they had worked this out (incorrectly, but consistently), instead of calculating the other part of the area (too difficult), they decided to find H as a function of the variables of the original formula. To do this they worked on the drawing of the cone. On seeing both drawings simultaneously for the first time, Merche discovered the mistake they made when identifying the diameter. To convince Vicente, she made a bigger drawing "I think you can see it better if it's bigger" (M.85;9m00s) and concluded by saying: "It can't be the diameter ..., in any case it's twice the diameter" (a plausible argument based on visual perception and on her belief that in mathematics you find eventually simple rules: 2 is a nice number and in her drawing the line looked twice the size of the diameter). Their previous calculation of the area of the triangle was wrong.

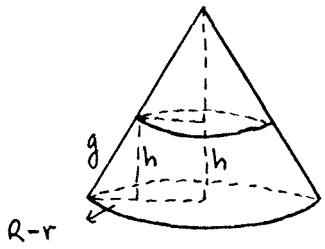
They recapitulated. The overall plan is good "I think it's a good idea to look at the cone ... as a difference of cones because in the formula you get the difference of the radii and when you do the subtraction you'll get, I think, somewhere a minus sign" (M.96;10m10s) (they assessed the plan against the formula, a plausible argument, but false). They realized exactly where they were stuck: 'The problem is what's the base of the triangle' (M.112;12m05s), and they decided to change the representational system by making a cone with a sheet of paper. This made them

to see that it was a circular sector.

They revised the plan: it is no longer necessary to divide the surface of the cone, and so they changed the plan: considering the surface as a circular sector whose arc is known. But they did not remember the formula for its area.

Stuck again, they recapitulated. To see if they can remember what the formula of the circular sector was (they are aware that they knew it), they decided to look at the original formula "to do some algebra with it to see if it gives us some idea of what we've got to get" (M.154;17m20s). They did that, and got:

$$\pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2} = \pi(R+r)g$$



They tried to identify the formula they had found in the drawing of the development, They ran into the same initial mistakes. The allocated time, 25 minutes, is up. They have failed.

A CODA FOR THE STORY

A few days later I was analyzing the protocol with Merche and Vicente when, suddenly, the telephone rang. It was my brother Juan, who is finishing his degree in biology: "Hey, I've got to make a truncated cone whose radii and height I know. Can you tell me the formula for the lateral area?" Surprised, I asked him why he wanted a truncated cone. Juan said that he had to collect zooplancton and for that there is a standard net, the Juday-Bogorov net, one of whose parts is a truncated cone with diameters of 50 and 75 and a height of 65 cm and so he needed to know how much material to buy to make it. I said: "Well, have you got a piece of paper handy? Take this down: pi, open brackets, capital R, plus, small r, close brackets, square root, open brackets, capital R, minus, etc." Juan thought that mathematicians are crazy. I joked about the infinite number of formulae a mathematician knows by heart...

A few days later the net had been made. Juan did solve his problem.

CONSIDERATIONS

It is clear that not knowing the formula of the lateral area of the cone, nor what the figure of the development of a cone was like, nor the formula of the area of a circular sector conditioned the work of Merche and Vicente. This is knowledge that enables one to tackle the problem

in an easier way. However, the lack of this piece of knowledge fails to account for the whole story. In fact, what really propels their activity is another kind of knowledge that we have called 'process knowledge': first of all the heuristic tools 'make a drawing', 'divide the problem into parts', 'use an auxiliary element', 'work backwards' which Merche and Vicente use at the right moments, and then the existence of an explicit management of the process which we can see in their:

— monitoring the implementation of the plan;
— revising the plan when new information crops up;
— assessing the plan when one is stuck using any significant element available (in this case the original formula);
— operating even a complete change of point of view within the plan for exploratory purposes (when they decided to look at the formula and to do some algebra with it).

From the point of view of an explanation of Merche and Vicente's behaviour it is obvious that their knowledge of the heuristic tools mentioned and their explicit and sound managerial behaviour is much more crucial than the lack of knowledge of certain facts or formulae. Furthermore, both those things that they know and those they do not know have been part of the curriculum of mathematics they have followed; these facts and formulae are not really *unknown*, but *forgotten* and we would dare to say that in the long term most of the students inexorably forget this kind of knowledge. However, we can not really say the same thing about 'process knowledge'. If this is so, there is an obvious consequence for mathematics curriculum design in the compulsory education: we must emphasize 'process knowledge' rather than 'content knowledge' [3].

One could always argue that mathematical facts are forgotten when they are isolated in memory, and not integrated in a network of facts, concepts, techniques that forms a conceptual structure. Although this is obviously true, 'process knowledge' is also useful to go through the conceptual network searching the facts in question in memory.

One could also argue that general problem solving heuristics are not very worth-while, as the story of Merche and Vicente shows. That is not really true.

One must remember:

— They have solved some subproblems, mainly the development of a cone.
— We are not stressing the role of general problem solving heuristics, but heuristic tools linked with an explicit manager.
— The experimental setting forced them to fail. They have to do something, they are not allowed to let the problem sleep and to come back to it maybe next morning.
— There was a perverse being, myself, that did not allow them to call on external resources.

Juan was able to solve his problem 'looking for an expert', an heuristic that is common in real life problem solving but is usually forbidden in the classroom.

Briefly, the lack of particular 'content knowledge' creates problems within the problem which is to be solved. 'Process knowledge enables the solver to attack them and possibly to reach the solution. It is not 'content' that matters, for content, facts you can always 'ask an expert'.

KNOWLEDGE/BEHAVIOUR

Apart from the 'external resources' invoked by 'asking an expert' which are determinated by the social conditions in which the task evolves, when an individual faces a problem he disposes of a stock of different kind of knowledge that make up his internal resources: the relevant content for the problem, heuristic tools and the presence of absence of a good or bad manager. The appearance of one or another of these elements in the problem solving process gives rise to very different types of behaviour.

Some kind of behaviour that have appeared on our research are:

— Knowledge of the mathematical domain (concepts, facts, specific heuristics and techniques): the behaviour of the problem solver is algorithmic or schema-driven.
— Knowledge of heuristic tools and presence of a good manager, but lack of knowledge of some concepts involved (or loss of this knowledge): behaviour rich from an heuristic point of view, success of failure in solving the problem.
— Knowledge of the mathematical domain, but absence of control: the behaviour that Schoenfeld has called "wild goose chase."
— 'Formal knowledge' of heuristic tools, a bad manager, and knowledge of relevant content: the behaviour is characterized by calling all the known heuristics, one after the other, to see which one works.

This last kind of behaviour which can only reasonably appear with pupils who have followed a course in problem solving, with explicit instruction in heuristic tools, shows that when these are formally taught they become pieces of knowledge that the learner stores in his memory in the same way as any piece of 'content knowledge'. Knowing heuristic tools, having them stored in one's memory does not guarantee that one knows when to use them. The presence of a good manager seems to be a help but it is not enough because he only acts as a monitor. To the question quoted by Ciosek in her presentation 'Can heuristics be taught?' the answer is 'Yes', but the problem is how to design learning situations that enable the student to integrate each heuristic tool into a network of relations with problems already solved, with features of the structure of the relevant problems, and with 'paradigmatic problems', so that he can bring them to bear when they are relevant. From the point of view of teaching and not from that of behavioural analysis, this is the main question.

I would not like to take an oath that this kind of 'process knowledge' is 'mathematical knowledge', nor even 'mathematical reasoning', to quote the title of this working group. In any case if to the question 'What is mathematical reasoning?' I dare to answer 'Reasoning while

doing mathematics', 'process knowledge' is a kind of knowledge that appears when our pupils are solving mathematical problems, and a kind of knowledge relevant to their attempts to solve them.

Luis Puig Espinosa
Escuela Universitaria del Profesorado de EGB de Valencia
Valencia/Spain.

REFERENCES

[1] Puig, L. and Cerdán, F.: *Mecanismos de control y de decisión en la resolución de problemas de matemáticas.* I plan de Investigación Educativa de la Comunidad Valenciana.
[2] Our technique is an adaptation of that described in:
Schoenfeld, A.H.: *Episodes and Executive Decisions in Mathematical Problem Solving*, in Lesh & Landau *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes*, Academic Press, New York 1983.
[3] This is the philosophical principle in which is based a curriculum project, developed by the Grupo Cero in which I am currently working, that has been called 'De 12 a 16'.

JOSE M.DUARTE/RAUL F.CARVALHO

L'EXPLOSION SCOLAIRE ET LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

QU'EST-CE que cela veut dire, pour les professeurs de Mathématiques, travailler à présent au Portugal , dans l'enseignement préparatoire et secondaire, avec des couches de jeunesse, qui vont de plus de 80% (5ème et 6ème années de scolarité, obligatoires) jusqu'à 33% et moins (10ème, 11ème et 12ème années de scolarité) en pensant à la totalité des jeunes portugais?

Quelles sont les attitudes et les capacités exigeables aux professeurs de Mathématiques (et quelle formation doit-on leur proposer) face à ce qu'un chercheur portugais, Rui Grácio, a appelé "notre timide explosion scolaire", comprenant l'arrivée à l'enseignement de second degré des enfants et des filles provenant de larges et pauvres couches sociales? Définissons, d'abord, cette realité.

LA TIMIDE 'EXPLOSION SCOLAIRE' PORTUGAISE

Au Portugal, à la fin des années 60 - début 70, il y a eu une certaine expansion et une certaine dynamisation du secteur éducatif, qui n'ont pas été suivies d'une rapide formation et rénovation d'un corps enseignant qui, par le nombre et la qualité de ses membres, puisse faire face aux exigeances de l'enseignement. Ce fut un processus expansif et dynamisateur du système éducatif découlant de la Réforme dite 'de Veiga Simão', traduit dans une expansion vigoureuse du contingent scolaire à l'enseignement secondaire et dans des changements trouvés dans sa composition sociale, tandis que les écoles se peuplaient massivement de professeurs non qualifiés [1].

L'enseignement au Portugal, après une période de stagnation, était entré dans une phase d'une relative expansion à partir du début des années 50, et on a pratiquement atteint, relativement à l'enseignement élémentaire, une situation de normalité (scolarisation totale) vers la moitié des années 60. L'insuffisante scolarisation existante auparavant a acarté pour la population portugaise, la plus âgée, des indices d'analphabetisme sans parallèle en Europe.

Aux quinquenats 1940-1945 et 1945-50, la croissance percentuelle des élèves enregistrés dans l'enseignement secondaire (qui à l'époque allait de la 5ème à la 11ème années de scolarité) avait été respectivement de 10% et de 1%. Aux quinquenats suivants, jusqu'à 1975, les croissances relatives aux mêmes années de scolarité ont été de 42%, 89%, 46%, 57% et 56% [2].

Regardons l'évolution du nombre des élèves dans les enseignements préparatoire et secondaire, selon une possible interprétation de l'intricat système statistique portugais:

1936/37	40	1965/66	262.1
1940/41	86.7	1967/68	304.6
1945/46	109.4	1969/70	403.4
1950/51	108.3	1970/71	451.2
1955/56	147	1972/73	521.6
1960/61	137.5	1984/85	721.1
1962/63	200.5		(milliers)

Soit dit en passant, que la desaccélération de la croissance de la scolarisation au niveau de l'enseignement préparatoire et secondaire, évidente dans le graphique, n'est pas conséquence, comme ce fut le cas dans l'enseignement élémentaire, du fait de la scolarisation totale avoir été atteinte ou presque atteinte.

Cette realité, de croissante diversification parmi les élèves, du point de vue de son moyen d'origine socio-économique et culturel, de fin de la presque totale syntonie socio-culturelle entre professeurs et ses élèves (l'élite, autrefois), exigerait, par elle seule, une adéquation de l'enseignement, le changement de ses méthodes, jusque là basées sur la rigueur scientifique et comptant sur les hauts espoirs des élèves et sur la prompte stimulation et aide de leurs parents.

Par contre, on continue de trouver en général une grande insensibilité en ce qui concerne un tel changement qualitatif, la répétition par routine des mêmes méthodes d'enseigement d'autrefois. Ce ne serait pas difficile de prévoir son inadéquation et sa grande contribution pour l'échec.
Des taux d'échec (données de 1972-73): 27,3% en 7ème année, 21,2% en 8ème année, 36,0% en 10ème année. Et en 1979-80 la réalité de l'échec est analogue (sinon pire): 37,1% en 7ème année, 35,3% en 8ème année, 37,0% en 9ème année, 17,3% en 10ème année, 58,7% en 11ème année; on trouve en moyenne, dans l'enseignement secondaire, 36,6% d'échec. [3]

Devant ce 'boom' scolaire, la politique de main d'oeuvre enseignante à bon marché du régime fasciste a fait que, de 1940-41 jusqu'à 1973-74, parallèlement à l'expansion des enseignements préparatoire et secondaire, le taux des professeurs sans qualification complète ait passé de 20,6% à 76,6%, ce qui veut dire qu'à la veille du 25 avril 1974 plus de trois quarts de la docence étaient attribués à des individus non qualifiés institutionnellement. En 1974-1975 les professeurs titulaires de bonne qualification universitaire (scientifique) et pédagogiquement valable constituaient une minorité d'environ 20%. [4]

Qualification des Professeurs (Enseignement officiel, lycéen, Commerciel, Industriel et Enseignement Préparatoire direct) [4]:

	1940-'41		1973-'74
Professeurs	1755	x 15,6 →	27499
Profs ayant une qualification complète	1294	x 5 →	6420
%	79,4%		23,4%
Professeurs sans qualification complète	461	x 45 →	21079
%	20,6%		76,6%

Malgré l'évolution après le 25 avril 1974, les écoles secondaires et préparatoires possèdent encore environ 50% de professeurs sans une qualification professionnelle complète.

Qualification des professeurs (Enseignement Préparatoire direct officiel)[4]:

	1973-'74	1977-'78
Professeurs	11858	18377
Profs ayant une qualif. professionnelle	2137 (18,0%)	6565 (35,7%)
Profs n'ayant que la qual. scientifique	4865 (41,0%)	9069 (49,3%)
Profs sans la qualification minimale	4856 (41,0%)	2743 (14,9%)

Dans une période proche de celle-ci, entre 1970-71 et 1976-77, le taux professeurs/élèves dans l'enseignement préparatoire direct s'est amélioré de 1/18,5 (5680 professeurs et 104826 élèves) pour 1/7,3 (37639 professeurs et 274499 élèves).

Qualification des professeurs (Enseignement Secondaire officiel)[4]:

	1973-'74	1977-'78
Professeurs	14872	25625
Profs ayant une qualif. professionnelle	4239 (28,5%)	10640 (41,5%)
Profs n'ayant qu'une qual. scientifique	5943 (40,0%)	9473 (37,0%)
Profs sans une qualification minimale	4690 (31,5%)	5512 (21,5%)

Plus récemment (1982-83), la moitié des professeurs dans l'enseignement préparatoire et secondaire portugais n'ont pas encore une qualification institutionnelle complète et dirigée vers l'enseignement [3]:

	Cycle prép.		Ens. Second	
	En général	Au 4ème groupe	En général	Au 1er groupe
Professeurs titulaires	42,4%	39,8%	50,6%	49,9%
Profs en train d'être titulaires	9,5%	10,4%	6,8%	5,5%
Profs n'ayant que qualif. scientifique	34,5%	43,8%	26,7%	5,0%
Profs sans qualification minimale	13,6%	5,9%	15,9%	39,0%

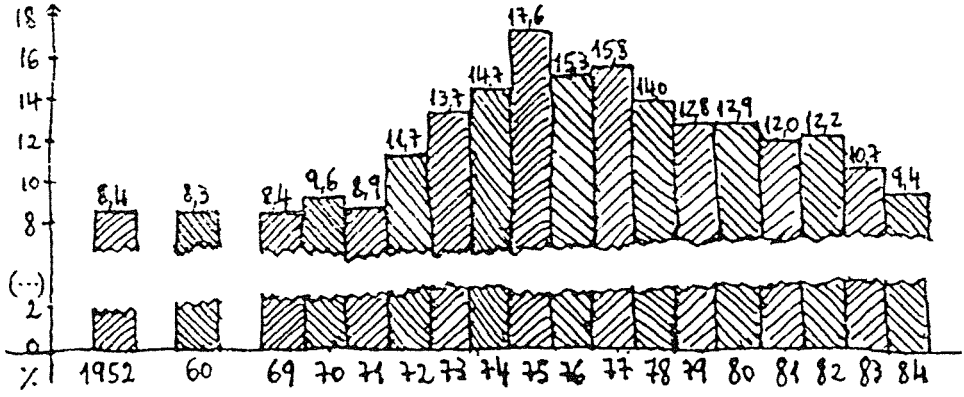
(Note: 4ème groupe du Cycle préparatoire - Mathématiques et Sciences Naturelles; 1er groupe de l'Enseignement Secondaire - Mathématiques).

A cette dégradation institutionelle du corps enseignant il faudrait cependant ajouter l'existence de fortes assymétries régionales et par groupes disciplinaires , où les moins favorisés sont: Alentejo, Algarve et l'Intérieur Centre et Nord (pour les régions); le Portugais, le Français,

les Mathématiques, les Arts et la Géographie (pour les sujets).

En 1982-83 les professeurs n'ayant pas une qualification minimale vont d'un taux minimum, dans les communes urbaines, litorales et industrialisées de Lisbonne (8,3%), Coimbra (9,0%), Oporto (9,1%) et Aveiro (12,2%) jusqu'à 28,6% à Guarda, 32,3% à Vila Real, 34,4% à Evora, 36,1% à Bragança et 43,3% à Beja!

Peut-être le tableau suivant sur les dépenses du Ministère de l'Education, par rapport aux dépenses totales de l'Etat aidera-t-il un peu à comprendre les causes de cette réalité:



Ce n'est pas vraiment exclusive des gouvernements portugais sous le régime fasciste (le temps où les moyens financiers étaient gaspillés dans la guerre coloniale, en Afrique) cette politique de restriction en ce qui concerne l'Education ...

Voilà esquissé l'aspect de la dégradation institutionnelle: loin d'avoir garanti une croissance du nombre des professeurs qualifiés, capables de répondre aux nouveaux besoins, on a au contraire laissé s'accroître le nombre de professeurs sans qualifications, que quelques responsables ministeriels faisaient question d'appeler, non pas professeurs, mais des 'agents d'instruction'.

Mais il faut demander: et les professeurs qualifiés, quelle formation ont-ils reçue? Quelles attitudes et comportements leur a-t-on éveillés? Cela si on pense que la formation doit comprendre des valeurs, des attitudes et des comportements qu'on veut développer dans l'action éducative scolaire future. Nous soutenons qu'en général on pratique les méthodes traditionnelles en vigueur depuis longtemps.

Les Branches Educationnelles des Facultés des Sciences (BEFSc) dans les années 70 et la 'Formation en Service' (FS) ont cependant constitué dans une certaine mesure deux périodes 'qui n'ont plus permis' d'ignorer ce qui se passait.

Les BEFSc offraient, en plus d'une formation scientifique universitaire, une année de formation pédagogique et une année de stage. Celui-ci était presque complètement orienté hors de l'influence des Facultés des Sciences et sous la direction du Ministère et délégué en

général sur des professeurs choisis parmis les plus expérimentés, y compris des ex-responsables par les 'stages classiques'. Sans aucun apuy du Ministère qui puisse conduire à une actualisation, ils continuent, à l'image des méthodes formelles de l'ancien 'stage classique', de s'efforcer de transmettre les aspects pour eux les plus importants, en oubliant en général l'importance des aspects relationels, de la vie des élèves à l'école.

La FS, commencée en 1979 et polémiquement éteinte il y a peu, étant centrée dans les écoles secondaires et préparatoires, était un projet innovateur, avec beaùcoup d'aspects positifs, mais elle fut préjugée par le manque de développement des moyens d'aide prévus, en particulier par le manque de formation des formateurs, malgré un 'projet luso-suédois' destiné à ce but, mais qui a avorté par décision de notre Ministère de l'Education.

QUOI FAIRE?

La grande majorité des jeunes qui fréquentent aujourd'hui les écoles secondaires provient des classes les plus démunies, donc d'une baisse ambiance socio-économique et culturelle. Pour ces jeunes, l'école c'est l'espoir, l'espoir d'échapper à la misère compagne de leurs parents, l'espoir d'un futur de succès tel que les mass-media constamment le promèttent. C'est pourtant tôt que ces jeunes s'aperçoivent que l'école n'est pas préparée pour eux; que l'école se maintient, nous l'avons déjà dit, parfaitement adaptée, culturelle et curriculairement, aux intérêts des classes les plus favorisées. C'est d'abord les problèmes de communication, le choc de cultures, vainquant toujours les valeurs que l'Ecole défend.

Le langage utilisé ne va pas au niveau de la compréhension de l'élève (pour ne pas faire baisser le niveau ...), et voilà, tout court, la principale cause de l'échec pratiquement à toutes les disciplines - émetteur et récepteur n'utilisent pas le même code; y a-t-il quelqu'un capable de soutenir que c'est la faute des élèves?

Le manque d'espace nous empêche de nous référer à bien d'autres causes de l'échec (et par échec nous ne désignons pas les réprovations, mais le manque de succès aux objectifs envisagés, nommément l'accès à l'enseignement supérieur ...) atribuables à un système qui ne s'adapte pas aux nouvelles circonstances.

Cette adaptation n'exige pas, bien sûr, de nouvelles écoles, mais une Nouvelle Ecole, une école où les professeurs se soient aperçus de ces changements qualitatifs; une Nouvelle Ecole où les professeurs soient préparés et prêts à *écouter* l'élève, dans et *hors* la classe, en groupe ou tout seul, pour *suggérer* des solutions, *stimuler* des activités, de façon que l'école devienne la maison, que l'élève parfois n'a pas, la bibliothèque dont le quartier a besoin, l'espace de *saine* familiarité que la rue n'est pas.

Mais un tel professeur n'est pas spontanément engendré; il faut le préparer, soit à la formation initiale, soit à la formation en service. La formation initiale, et nous l'avons déjà décrite, doit donc jouer un rôle fondamental dans ce changement d'objectifs. Elle doit aussi atteindre

ces aspects, en stimulant le nouveau professeur à mener des activités qui privilégient le contact le plus direct de l'élève avec l'école, l'attribution de responsabilités à l'élève pour des tâches à la classe ou à l'école, par exemple l'organisation de travaux à la classe, l'administration de clubs de discipline(s), la participation à des concours interdisciplinaires et multidisciplinaires, l'organisation d'épreuves mathématiques sainement compétitives, la conception et l'exécution de travaux interdisciplinaires qui enrichissent l'école (panneaux solaires, horloge solaire, des machines, etc.), l'informatique. Ce sont des activités possibles auxquelles l'élève peut voir que le professeur le rend *responsable* pour des tâches déterminées, que le professeur *delègue* en lui l'orientation d'un groupe, en bref, que le professeur lui *fait confiance*. Cet appui est essentiel pour l'affirmation de l'adolescent et l'école deviendra pour lui le lieu où il est *compris*.

La formation en service, presque inexistante au Portugal, elle aussi devra envisager ces aspects. Beaucoup de professeurs qualifiés restent angoissés par l'échec de leurs élèves, par la dégradation de l'ambiance scolaire, par les vices auxquels quelques uns de nos jeunes élèves n'essayent pas à échapper.

L'occupation des loisirs des élèves aux écoles, où les tâches proposées soient pour eux considérées des tâches valables ou utiles, ne résoudra pas, bien sûr, tous les problèmes, mais amoindrira le malaise qui existe souvent aux écoles. C'est un défi difficile, mais aussi urgent et payant. Et être professeur est précisément un métier qui pose beaucoup de difficultés et de risques, mais qui offre aussi d'énormes joies.

José M.Duarte/Raul F.Carvalho
Escola Secundária
Sto. André - Barreiro/Portugal.

REFERENCES

[1] Gracio, R.: *Os Professores e a Reforma do Ensino*, 1973.
[2] Brotas, A.: *Ler os números (estatisticas)*, in Raiz e Utopia, 9/10, Outono-Inverno, 1979.
[3] Teodoro, A., G.Fernandes e V.D.Teodoro: *Guia Prático do Sistema Educativo*, 1985.
[4] Sampaio, J.S.: *Portugal - ea educação em números*, 1980.

LUCIANA BAZZINI

TEACHER TRAINING FOR PRIMARY SCHOOL TEACHERS

THE purpose of this report is to present some features of the courses organized by the Didactic Research Group of Pavia for primary school teachers' training. The 'Nucleo di Ricerca Didattica (namely Didactic Research Group) of the University of Pavia was founded in 1975 by a contract between the National Research Council of Italy and the University of Pavia.

This group, including both university researchers and school teachers, has carried out an intense activity to promote a didactic research in mathematical curricula, at every level in pre-university school, for over ten years.

We have always combined this work with teacher training, because most school teachers were not familiar with some topics, such as: Set Theory, Algebraic Structures, Geometric Transformations, Probability and Statistics. These subjects are now a part of Government Programs for the first three grades of secondary school (in force since 1979) and for primary school (in force from 1986).

Initially I would like to make some comments about mathematics teaching in primary schools of Italy.

Mathematics occupies a peculiar position: paradoxically it is considered either as an obvious or an obscure topic. This supposed obviousness may be the cause of the poor mathematical education of the primary school teachers. However this teacher meets a lot of delicate mathematical questions in his daily work: the general pedagogical and didactic principles cannot be of some use to solve such problems.

In the past mathematics teaching in primary school was subject to strict laws: it was necessary to give the boy all the basic knowledges that the coming man would need. It was not relevant to wonder if the pupil was able to learn some elementary notions necessary in everyday life, such as, for instance, the specific weight and so on. Unfortunately the boy was often compelled to learn some topics by heart and to apply the rules mechanically.

In 1963 the enlargement of the compulsory education up to 14 years produced a change in mathematical instruction: basic notions could be taught in a longer period of time and the teacher could rely on pupils mental growth. In the early sixties mathematics teaching became more formative and teachers began to direct their attention to abstract concepts. Although Government Programs for primary school date back to 1955, however the new ideas began to influence mathematics teaching unofficially and soon they gave rise to a lively interest. Today we think of mathematics as a science able to create fantastic worlds but also as a science strictly bound to real life, nature and human activities.

Consequently mathematics teaching tends to go towards new

directions. For instance we believe that a pupil masters a concept if he is able to recognize it and to use it in different contexts.

Abstraction is the final synthesis of many real experiences. The coming of the computer age contributed to the change of our concept of mathematics. There are operations that the computer carries out exactly, but there are some others that the computer cannot make at all, because they require intuition, heuristic ability and cleverness. These qualities are very important in mathematics learning: a good teacher must suggest suitable problems in this direction. For this reason it is necessary to increase mathematical education of primary school teachers.

When a teacher changes his mathematics teaching, he can be undecided about methods, but he must know mathematical topics and pedagogical aims perfectly.

Starting from this principle, the Didactic Research Group of Pavia carried out many training courses of different kinds since 1975.

Our Group organized:

— 20 short-term courses (about 5 meetings);
— 12 middle-term courses (about 15 meetings);
— 2 long-term courses (2 years or more).

Short-term courses included only theoretical lessons, while middle and long-term courses included theoretical lessons and working-sessions.

We dealt with the following topics:

— elements of set theory (sets and their basic relations and operations);
— algebraic structures (particularly the concept of group);
— number systems (particularly the natural numbers);
— elements of combinatorial topology (the concept of simple open line and simple closed line, some topological invariants, topological transformations);
— isometries on the plane (symmetries, translations, rotations, the group of isometries);
— elements of measure theory (measure as a function, the area of a limited figure on the plane);
— elements of statistics (statistical data representation, mode, arithmetic mean, percentage).

At working-session didactic materials were discussed (see [1]...[5]) and sometimes a critical survey of text-books had been carried out.

The financial support was furnished by:

— Ministry of Education.
— National Research Council.
— Regional Institute for Educational Research and Training.
— Provincial Districts.

In the short and middle-term courses, trainees could only receive some innovating hints and suggestions for personal researches, while during long-term courses they could also experiment new mathematical contents and new teaching methods in their classes.

I would like to recall a long-term course, which was carried out by a group of mathematicians, physicists and biologists, with fortnightly

meetings, from 1978 to 1983. During this course a project on the teaching of mathematics and science was elaborated and experimented in primary school (pupils' age: 6-8 years). During the year 1981/82 the number of pupils who used the project was 550. The project comprises nine proposals: I will not go on explaining the contents and the aims of each proposal. I only remind you that the proposals organized along common guidelines, but each of them is a sort of monography: each activity investigates a single subject. Each proposal contains suggested activities, objectives to be achieved, skills, and concepts to be acquired by children, detailed instructions for teachers about the method of classroom work, and in some cases theoretical elements.
The project was published in the italian journal *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate* in 1982, 1983 and 1984 [6]. A review was published in the *European Journal of Science Education* in 1985 [7].

CONCLUSIONS

On the ground of our ten years work we believe that:
— A permanent training is absolutely necessary for primary school teachers independently of the new Government Programs.
We do not have to believe that innovations extend spontaneously and school teachers ask for suitable training courses.
— It would be reasonable to recognize teacher training officially, both for university trainers and for trainees.
— A valuable didactic research is based on a tight connection between theoretical studies and classroom activities.
— Long-term courses, including both theoretical lessons and experimental sessions, are more suitable to provide school teachers with a continuous and profitable training.

Luciana Bazzini
Department of Mathematics
University of Pavia
Pavia/Italy.

REFERENCES

[1] Bazzini, L., M.Ferrari: *Un primo contatto con la topologia. Schede di lavoro,* L'insegnamento della matematica. Supplemento al vol 6, n 2, 1975. Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin (CRDUM) Paderno del Grappa (TV).

[2] Bazzini, L., M.Ferrari, A.Pesci, M.Reggiani: *Le isometrie piane: una mostra di materiale didattico,* L'insegnamento della matematica, vol 7, n 7, 1976 (CRDUM).

[3] Bazzini, L., D.Brandalise, M.Ferrari, A.Pesci, M.Reggiani: *La teoria della misura nella scuola media inferiore. Schede di lavoro,* Quaderni Didattici n 4-5, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 1979, CRDUM.

[4] Bazzini, L., M.Bernardi: *L'introduzione della geometria nella scuola elementare,* L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol 3, n 4, 1980, CRDUM.

[5] Crivelli, G., M.Ferrari: *La geometria in seconda elementare. Resoconto di un'esperienza.* L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol 2, n 1,2,4,5,6, 1979, vol 3, n 1,2, 1980, CRDUM.

[6] Bazzini, L., L.Borghi, A.De Ambrosis, M.Ferrari, C.I.Massara, Mosconi Bernardini, P.Trivelli Ricci, M.Vittadini Zorzoli: *Un progetto di educazione matematico-scientifica per il primo ciclo elementare,* L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. Vol 5, n 1, 2, 4, 5, 6, 1982. Vol 6, n 2, 4-5, 1983. Vol 7, n 2, 4-5, 6, 1984.

[7] Bazzini, L., L.Borghi, A.De Ambrosis, M.Ferrari, C.I.Massara, Mosconi Bernardini, P.Trivelli Ricci, M.Vittadini Zorzoli: *A project on the teaching of mathematics and sciences in the first two grades of primary school.* European Journal of Science Education, vol 7, n 1, 1985.

ANGELA PESCI

TEACHER TRAINING: A WORK WITH TEACHERS FROM THE MEDIA INFERIORE SCHOOLS

I HAVE been, for ten years, part of a group of researchers and teachers in the Mathematics Department of the University of Pavia working on the didactics of mathematics in pre-university schools. We have been working with teachers from 'scuole elementari' (pupil's age: 6-11), 'scuola media inferiore' (11-14) and 'scuola media superiore' (14-19), by means of in-service teacher training courses basically of 3 types:

— short (5-6 meetings);
— medium (2-3 months) with weekly frequency;
— long (1 year or more) with weekly frequency.

In particular I shall talk about our training experimentation work carried out with teachers from the 'media inferiore' school. Short training courses (they amount now to some 30 held since 1974) consist of concise theoretical lessons, team-work (during which didactical materials are presented) together with suggestions. Contacts with trainees stop at the end of the training course.

As far as medium training courses are concerned (they now amount to about 15) in addition to a theoretical introduction of the subjects , a critical survey of textbooks is carried out, didactical materials are studied and a few trainees, on a non-compulsory basis, test them in their classes. In some cases, contacts with trainees are maintained after the very end of the training course.

In both types of trainings described above, most of the didactical materials used are made by us, together with former trainees, and are available to all the new trainees.

The topics dealt with during these courses are:

— The isometries on the plane: symmetries, translations, rotations, the group of isometries. On this subject an exhibition of didactical materials is studied: we set it up with the specifical aim of using it as a training tool [1].
— Some elements of combinatorial topology: elements of graphs theory, the group of topological transformations on the plane; the concepts of simple open line, simple closed line; some topological invariants. For this subject we have used work-sheets tested in the first year of 'scuola media inferiore' [2].
— Measure theory: work-sheets are examined for the second class, where measure is introduced as a function of a set in the group of real non-negative numbers with simple additivity property. In particular, we study the area of a limited figure on the plan [3].
— Geometrical figures on the plane; we study work-sheets for the first class where the properties of the most important figures are pointed out by means of axial symmetries [4].

— Number sets: we hold theoretical lessons and examine text-books.

We think that short training courses are the least advantageous, both to trainee-teachers and to us. They are usually organized by schools, didactic councils, districts, and participation is nearly compulsory. We feel that such courses have hardly any consequences both on a theoric and on a practical basis. Medium duration training courses seemed more advantageous to everybody, spreading their activity more constant in time.

A particular attention is due to training courses of long duration, which we always carry out together with class-testing: they are to us, and we do think also to the trainee-teachers, the richest and most-interesting experience.

These courses are framed in the activity of didactical experimentation arising from the cooperation between the Didactic Research Group (Nucleo di Ricerca Didattica, NRD) in Pavia and the National Research Council of Italy (Consiglio Nazionale delle Ricerche, CNR) started in 1975 and inserted in subsequent research contracts. Similar cooperations, between University and CNR may be found in about 15 Italian towns.

In Pavia, in the framework of this activity, we have approached 'scuola media superiore' teachers first, and then 'scuola media inferiore' ones. We worked with the former ones for 8 years on a big project for mathematics teaching named 'Mathematics as a Discovery', started by prof. Prodi of the University of Pisa, which has subsequently gathered the active cooperation of teachers and researchers of three Universities: Pavia, Pisa, Trieste [5]. But my aim is to refer particularly about the work carried out in the 'scuola media inferiore' environment.

In Italy, in 1979, the government's programs for the 'scuola media inferiore' were changed: in particular, as far as mathematics is concerned, new subjects were introduced, such as probability and statistics, which found the majority of teachers quite unprepared. Very strong, therefore, was the need of training, especially on the contents. We organized then a training course in Pavia during the whole school-year 79/80, with weekly meetings [6]. The first part of each meeting was devoted to the theoretical study of the subjects, the second-one to teamwork with the trainees: at this stage possible doubts were explained, problems and exercises were proposed and solved together, didactical questions were considered, text-books were examinated.

The following topics were studied: statistical data representation; mode, median, arithmetic mean; percentages and their variations; statistical correlation and forecast; samples and testing; probability as a measure of uncertainty; probability as a ratio; compounded random events and trees' use; probability applications to genetic problems; the 'moderate disorder' of a casual process; the 'law of great numbers'; probability in the study of a population. At the end of the course a testing-group (composed of 6 teachers) was formed and enlisted, in september 1980, in a CNR contract named *'Design and testing of programs of probability, statistics and applied mathematics in 'scuola media*

secondaria'.
Starting from that year, and with new teachers who joined the first ones (today school-teachers are about 20 and university teachers and researchers are 6) we worked out a three-year project for the teaching of probability and statistics in 'scuola media inferiore'.
Once pointed out the targets to be reached, we formulated a work-plan for the whole three-year period and detailed specific programs for each year; we subdivided the subjects in didactical units, which were in turn transferred onto work-sheets for the pupils. We carried on in-class testing and discussed about it, coming thus to a remake of the didactical materials already used and tested.

Today, the three-year project is almost completely transferred onto work-sheets [7]: some of them require an individual approach, other ones teamwork, some are check-sheets, other ones are the synthesis of concepts already used. All sheets at any rate, require the active participation of the pupil.
The choice to transfer didactical units onto worksheets is not new to us: I will not go on explaining the reasons of our choice, but, referring to the subject 'teachers' training' I want to stress only that the preparation of worksheet is a good occasion of cooperation among teachers: a particular care is needed, in fact, both in scaling proposals and in weighing their language.
Now we are working with personal computers with school-teachers and for the next year we are planning to work with personal computers in class: in particular we intend to use it in statistics and probability, in the framework of the project described before.

As far as the methods used both during the training of teachers and on the sheets for pupils' use are concerned, we have tried to face actual and significant problems, even if, sometimes, their necessary outlining may often make them little realistical.
We think that this way of acting offers the following advantages:
— to arise interest and to keep alive the motivation to get new elements of knowledge;
— to facilitate an integrated cultural development and, especially with regards to the pupils;
— to facilitate the development of a fundamental attitude: to put oneself actively and critically in front of reality.

In conclusion we think that our experience is quite satisfactory: we must say that these results are achieved thanks to its three fundamental components:
— the work inside the University;
— the positive and helpful attitude of many school-teachers who are ready to offer their didactic experience and practice;
— and, of course, financial contributions from CNR.

Angela Pesci
Mathematics Department
University of Pavia
Pavia/Italy.

REFERENCES

[1] Bazzini, L., M.Ferrari, A.Pesci, M.Reggiani: *Le isometrie piane: una mostra di materiale didattico*, L'insegnamento della matematica, vol 7, nr 7, 1976, Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin (CRDUM), Paderno del Grappa (Treviso).

[2] Bazzini, L., M.Ferrari, A.Pesci, M.Reggiani: *La geometria in una prima media. Resoconto di una esperienza*, L'insegnamento della matematica, vol 8, nr 6, 1977, CRDUM.

[3] Bazzini, L., D.Brandalise, M.Ferrari, A.Pesci, M.Reggiani: *La teoria della misura nella scuola media inferiore.* Schede di lavoro , Quaderni Didattici, nr 4-5, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 1979 , CRDUM.

[4] Ferrari, M.: *Il mondo delle figure geometriche piane: resoconto di un'esperienza*, L'insegnamento della matematica, 1977, CRDUM.

[5] Prodi, G.: *Matematica come Scoperta*, vol 1, Ed. D'Anna, Messina-Firenze 1975.
Prodi, G.: *Matematica come Scoperta*, vol 2, Ed. D'Anna, Messina-Firenze, 1977.
Prodi, G., E.Magenes: *Elementi di analisi matematica*, Ed. D'Anna, Messina-Firenze, 1982.
For these three volumes there are the Guides for the Teacher. In particular I report the third one:
Bazzini, L., A.Pesci, M.Reggiani: *Guida al volume Elementi di analisi matematica*, Ed. D'Anna, Messina-Firenze 1985.

[6] The contents of this course are in:
Pintacuda, N.: *Insegnare la probabilità*, Muzzio Ed., Padova, 1981.

[7] Pesci, A., M.Reggiani: *Una proposta per l'insegnamento della statistica in prima media*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 1983, CRDUM.
Pesci, A., M.Reggiani: *Un progetto per l'insegnamento della probabilità nella scuola media inferiore*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate , 1985, CRDUM.

IRMA FUENLABRADA

FORMATION OF TEACHERS; MATHEMATICAL EDUCATION IN PRIMARY SCHOOLS

FOR several years various attempts, at international level, have emerged to reformulate the mathematical education in primary schools. In the basis of these projects we found data about the high percentage of failure in mathematical learning and about the aversion that most part of the scholastic population reveals towards studying this subject. These facts face the need of a minimal handling of mathematical documents so as to integrate to a more and more industrialized society.

In spite of all the centers of investigation about mathematical learning that exist at the present time, there are still many problems to solve. One of these is the one to conjugate the general problematic of learning the mathematical reasoning with the local problematic of how to propose the teaching of this subject according to the characteristics, needs and possibilities of each country.

We consider that it is not possible to obtain a consistent knowledge about the process of mathematical learning and the domestic scholastic reality through a conglomerate of data about mathematic classes. Our posture is that this knowledge can be achieved throughout a process of daily interaction with the scholastic reality in an attempt to, not only know it, but to have an effect on it, to detect in practice its permeable aspects and its most obstinate resistances. We seek for an integration of the ethnographic perspective with the experimentation in natural situations.

In virtue of the above mentioned, the Laboratory of Psychomathematics, an interdisciplinary group in investigation [1], designed and implemented, since September 1978, a methodology of Mathematical Education in the Primary School. This group elaborated an Experimental Program of Mathematics and practiced it in two groups of students of a public primary school.

The Experimental Program suggest a methodology of education different to the traditional one and respects, in general terms, the contents of the official programs in use. The fundamental aim of the project consists in contributing to the knowledge of the processes of mathematical learning so as to improve its teaching. On the other hand, we do not consider appropriate the direct use, in massive form, of programmatic and methodologic alternatives developed in other countries. At this point the importance of carrying out an experimental program in a pilot school so as to establish the proposition of innovations at a national

1. This group is part of the 'Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional'.

level.

In a more particular level, we think that if we really want to influence in the improvement of scholar teaching it is necessary to achieve: a characterization of the mexican school that allows the precision of its essential features and the localization of aspects more vulnerable to an attempt of transformation; a competent knowledge of the teachers both in the way in which they practice teaching as well as their conception of the world and education; an appropriate knowledge of the primary pupils: their interests, knowledge possibilities etc.; a characterization of the process of learning-teaching mathematics in the primary school; dominion of the existent theories about scholar learning of the mathematics, and, what we think most important, knowledge of the possibilities of practical implementation of such theories within the context of the mexican primary school.

Up to this moment, we have advanced in the knowledge of the 'culture' of the primary school and in the discrimination of the possible activities in the primary school. We have defined a certain 'style' of program of the classes, combining collective activities, group and individual activities and we have achieved certain 'resources' or shooters to make children think creatively within the dominion of the mathematics.

COURSES-WORKSHOP

After carrying out, the first four years of the Experimental Program (September 1982), appears a need of taking into account the successful results of the Program, and this is how a *Proyecto de Formación de Profesores* (Project for Formation of Teachers) begins through courses-workshop which are realized in the Department.

This courses-workshop is a way to establish relation with the teacher, with the aim of achieving, through this relation, a suitable knowledge of its conception of the teaching-learning process of the mathematics. Furthermore, we pretend to contribute to the *professionalization* of the primary teacher. That is why it is understood that he must organize his teaching activities and must develop judgements to register objectively the obtained results, from which he will again restate the organization of his teaching activity.

In other terms, we think that the teaching of mathematics in the primary school will elevate its quality according to the way the teacher explains the strategies of organization of the learning activities and not only be an executor. This autonomy in the labor performance passes by an important requirement: the teacher must be rationally convinced that the options used in his teaching exercise are better than the ones disdained.

In order to help the teacher to be a professional of the teaching, the courses-workshop has been characterized as follows:

A. The contents are the important subjects of the official program (numerical system, operative, measure etc.) or otherwise the conflicting subjects of these (fractions, decimals, logic, etc.).

B. The didactic situations given must allow the teacher, through his own activity, to become aware of:
   — the lack of knowledge of the mathematic concepts involved in the basic level;
   — the difficulties of learning these concepts (for him and for the pupil);
   — the problem of the mathematic symbolization, both in the conventional aspect as in regard to communicate 'something';
   — how the appropriation of the mathematic concept is favored by manipulating a material which represents the characterization of the concept to be taught;
   — how the abstraction can be achieved when facing the same concept through activities different in appearance but which have the same concept in question;
   — the benefits given to knowledge when having the opportunity to elaborate strategies of resolution of the problematic situations established, since only in this way we have the possibility to understand, discuss and analyze the strategies of another companion;
   — how the work in a team enriches the experience of learning when protecting or refuting the position of others (in a small group in the first resort).

In the courses-workshop a *methodology for teaching the subjects to be studied* is established. This methodology generates in the pupil-teacher an attitude of search when trying to solve the didactic situations; the shown situations have different grades of difficulty and elasticity and/or flexibility for its realization, so that the pupil-teacher obtains confidence in the resolution of the problems, in the identification of the obstacles and in the implementation of proper answers.

Moreover the pupil-teacher must be conscious, through personal experience of how to act, so as to acquire knowledge, not only with 'the purpose of knowledge' but also with the social surrounding so as to modify or not his own hypothesis and actions about the resolution to the didactic situation that has been proposed.

The collaboration in the work, the discussion, the exchange of ideas and the reciprocal criticism establishes the didactic propositions later suggested by pupils-teachers so as to take them into teaching practice in the primary school.

These personal experiences about how to cope with the objects and the companions constitute the basis of its cognitive construction, lead the pupil-teacher to restate his role as a teacher within his classroom, in his teaching activity and in the organization and leading of the knowledge of his own pupils.

The leader of the courses-workshop must avoid verbalism, the magesterial class, in order that the pupil-teacher gets involved in the teaching-learning process lacking of the 'dogmatic authority' of whom directs the class.

The leader of the courses-workshop must design the didactic

situations which will permit his pupils to participate and to consider the course as 'their course' so that they feel responsible of the different aspects of its realization.
The didactic situations designed must allow pupils to recognize and identify problems and situations real and important to them, with which they will organize with their own pupils the learning activities. Little by little he must create a climate of freedom, permissibility and acceptance with the other companions, in such a way that each of the participants feel in confidence to explore and expose his own problems, deficiencies, experiences, ideas, opinions, doubts and answers.

It must also propitiate that pupils-teachers put into consideration of the other companions their own didactic resources and personal experiences about the different subjects in study proposed in the courses-workshop.
The leader of the courses-workshop in different moments passes from being a person with knowledge and experience in a certain field, to a person without knowledge and experience in another field; from someone that can bring a well additional information to a person that gets information from his pupils; or, as well, can be an advisor, a speaker or an expectator of the activity of his pupils. It is also important that pupils-teachers be conscious that mathematics is not a rigid model but an area of knowledge subject to experimentation, analysis, discussion, handling of alternatives etc. and not only 'the resolution of exercises'.

BIBLIOGRAPHIC MATERIAL

In Mexico we have few national bibliographic information which analyzes, debates or gives alternatives of solution to the problem of teaching mathematics at primary level. The only source of information to which teachers have access are the official textbooks.
These books provide teachers certain mathematic information of the subjects to be discussed and, in fact, they suggest to realize activities with their pupils, (not with pencil and paper) before asking the children to solve the lessons of the book; but they do not explain what kind of activities can be realized, nor the importance these may have in the construction of the knowledge, nor the characteristics of a good activity or the convenience of some of them.

In this way, the teacher is obliged to solve together with his pupils the lessons proposed in the textbooks, reason why there has few progress in the improvement of teaching mathematics. Another aspect is that the textbooks show the mathematics justification of the algorithms of the operations, but they make no importance of the mathematic concepts at work (both in the operative as in other subjects) and which are previous to an algorithmization of resolution processes.

Due to this problems, the investigation group elaborates articles dedicated to teachers of primary education which propose teaching alternatives for the elementary mathematics where the important source for their design is the experience and conclusions obtained in the courses-workshop.

It is believed that the information which the investigation group obtains from the work of the teachers allows to have a more real and objective visualization of how to influence in their didactic work.
These articles do not only inform some reflections about different subjects of primary level mathematics, but also propose a series of activities that teachers must realize with didactical material (described in the annex of the article) so as to compare their own appreciations with the suggestions and conclusions proposed in the article.

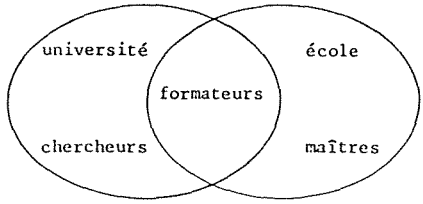
Irma Fuenlabrada
Departamento de Investigaciones Educativas
Instituto Politécnico Nacional
Mexico/Mexico.

LUCIA GRUGNETTI/ROSANNA RUGGIU

LES ANIMATEURS DE FORMATION PERMANENTE

A PROPOS du débat sur l'amélioration de l'enseignement des mathématiques, nous croyons que, outre des chercheurs d'un côté et des maîtres expérimentateurs d'un autre, il faut mettre en evidence l'importance d'une troisième figure.

Nous avons l'intention de fixer l'attention sur ceux que nous avons appelés 'animateurs de formation permanente' ou 'formateurs' en entendant par là des maîtres particulièrement capables, qui prendent part à la recherche didactique et qui développent des actions innovatives 'de l'intérieur' en représentant donc le trait d'union entre l'Université et l'école.



Partons de la situation italienne.
Les professeurs de mathématiques de l'école moyenne (élèves: 11 - 13 ans) dont le 90% a une formation universitaire en sciences naturelles/biologiques, doivent, entre autre, enseigner la physique, la chimie et les sciences naturelles.
A partir de 1979, dans le cadre des nouveaux programmes, ils doivent faire aussi une 'programmation'.
Le professeur doit faire d'abord une évaluation sur sa propre:

classe
↓
le professeur doit choisir

↙	↓	↘
les thémas adequats à cette classe là	la méthodologie	le développement des thémas qui devient le programme de la classe

Il devient fondamental d'affronter le problème de la formation continue des maîtres.

Un cours pour la préparation des animateurs de formation permanente
Siège du cours: Cagliari;
Chef du cours: Prof. Oscar Montaldo;
Années scolaires: 1983/84, 1984/85.

Le buts du cours
La nécessité d'une liaison efficace et organisée entre la recherche en didactique des mathématiques et l'école et ainsi que la demande des cours de recyclage, nous a poussés à organiser des stages pour ceux que nous avons appelés 'animateurs de formation permanente' ou 'formateurs'.

La structure du cours
Le rôle difficile que les formateurs doivent jouer est à l'origine d'une sélection entre les enseignants les plus aptes.
En tenant compte de cela, un questionnaire peut être proposé dans le but de déterminer les intérêts des professeurs pour leur recyclage en enseignement des mathématiques sur les notions de bases et les méthodes.
Quelques données concernant 'notre' questionnaire:
Nous avons proposé le questionnaire à 400 professeurs de l'école moyenne de la Sardaigne.
Le 15,5% a rempli et rendu le questionnaire.
Le 8% de ceux-ci avait une formation universitaire en mathématiques.

Organisation du cours
Pour répondre à la variété des questions inhérentes à la formation des 'formateurs', le cours comprend différents aspects:

1. consolidation de la formation de base (condition nécessaire, mais insuffisante pour un bon enseignant) selon une 'ligne moderne';
2. discussion de méthodes d'enseignement sur la base des rapports données par les participants au cours;
3. problèmes de comportaments et de relation maître-élève.

A propos de ce dernier point, nous avons vu, que souvent, en classe, il se vérifie des situations non-fonctionelles et nous devons faire quelque chose pour les éviter.

Nous allons maintenant, faire allusion à un cycle d'études pour des enseignants qui devaient passer l'examen d'aptitude à l'enseignement, organisé par la 'sovrintendenza scolastica regionale' qui dépend du Ministère et a été géré par notre groupe (CRSEM).

Nombre d'enseignants inscrits: 70;
Année scolaire: 1982/'83.

On a présenté à tous les inscrits un questionnaire dans lequel, entre

autre, on leur demandait si, dans la structuration des cours , ils préféraient développer l'aspect relatif aux contenus des disciplines ou l'aspect méthodologique.

Quelques données:
Le 80% des enseignants a doit qu'il préfère l'aspect méthodologique.
Le 17% des enseignants a choisi soit l'aspect relatif aux contenus que l'aspect méthodologique.
Le 3% des enseignants a choisi l'aspect aux contenus.

— Tous les inscrits avaient à peine quitter l'Université.
— La didactique est négligée pendant les études universitaires.

Ces résultats mettent en évidence l'exigence, de la part des *jeunes enseignants* d'acquérir des méthodes adéquates d'enseignement et des techniques didactiques.

L'approche relationelle à l'inadaptation scolaire: l'importance de la relation maître-élève
Cet aspect concerne la manière, de la part de l'enseignant, de se mettre en contact avec l'élève, la relation qui s'établit entre l'enseignant et la classe, entre l'enseignant et l'élève.
Cycle d'étude pour les enseignants des écoles de UTA (Cagliari) organisé par 'Unità sanitaria locale, n 20' et geré par Ireneo Picciau (psychologue) e Marta Olla (pédagogue).

Années scolaires: 1983/'84 et 1984/'85;
Nombre d'enseignants inscrits: 140.

Sur 140 inscrits:
Le 80% de ces enseignants avaient au moins 8 ans d'expérience d'enseignement.
Le 100% des enseignants avaient précédemment participé à des cours d'aptitude professionelle.

Nous allons maintenant confronter entre eux les deux derniers stages et voilà ce que nous remarquons.
Les jeunes enseignants ont ressenti la nécessité, à cause de leur manque d'expérience, de savoir comment on enseigne et donc d'approfondir l'aspect méthodologique de l'enseignement. Les enseignants, les plus anciens, bien qu'ils aient des années d'expérience d'enseignement et bien qu'il aient ressenti le besoin de se renouveler, se sont rendus compte que analiser leur approche relationelle était chose essentielle pour la résolution des problèmes et des difficultés qui se présentent à l'école et en classe.

Lucia Grugnetti/Rosanna Ruggiu
Dipartimento di Matematica CRSEM
Cagliari/Italie.

MAGGY SCHNEIDER

PROPOSITION DE THEMES POUR UN COURS DE METHODOLOGIE SPECIALE DE LA MATHEMATIQUE

DANS ce résumé, nous présentons d'abord le plan de notre cours de méthodologie spéciale de la mathématique dans lequel apparaissent les thèmes qui structurent ce dernier. Nous expliquons ensuite les méthodes utilisées pour dispenser ce cours. Nous décrivons enfin de manière succinte les raisons qui ont inspiré nos choix.

Ce cours s'adresse à des étudiants qui achèvent leur licence en mathématique et qui, dans le cadre de leur dernière année d'études, préparent le diplôme d'agrégé de l'enseignement secondaire supérieur.

LES THEMES RETENUS

La plupart des vocables utilisés dans ce plan (apprentissage significatif, ..., conception formelle, ..., curriculum) sont à prendre dans l'acception qu'on leur réserve communément dans la littérature pédagogique ou philosophique.
Les termes: directivité de contenu et directivité de procédure sont empruntés à la théorie de la dynamique de groupes.

INTRODUCTION

Rôle du cours de méthodologie spéciale dans la formation initiale de l'agrégé:
— Discours normatif versus discours factuel
— Les objectifs retenus

Contenu, structuration et organisation du cours:
— Contenu
— Structuration et niveaux de langage
— Organisation

Concept de base: l'apprentissage significatif:
— Définition
— Critères de réalisation
— Illustrations

CHAPITRE I: APPRENTISSAGE SIGNIFICATIF ET PROCEDURES DIDACTIQUES DANS UNE PERSPECTIVE D'ILLUSTRATION TRAVERS LES PROGRAMMES DE MATHEMATIQUE DU SECONDAIRE

Les situations problématiques:
— Ce qu'on entend par 'résolution de problèmes' et 'situation

problématique'
— La situation problématique et son rôle dans le processus d'apprentissage:
  - Déstabilisation et restructuration cognitives
  - Motivation intrinsèque
— Le caractère problématique d'une situation en égard au niveau des élèves:
  - Le niveau de connaissances des élèves
  - Le développement génétique de l'élève
— Le caractère problématique d'une situation vis-à-vis du contenu d'enseignement dont elle favorise l'apprentissage:
  - Divers aspects ou emplois d'un même concept
  - Divers niveaux de conceptualisation d'une même contenu d'enseignement
  - Les fausses problématiques
— Situations problématiques et organisation de l'environnement:
  - Situation problématique et apprentissage par découverte
  - La situation problématique doit sous-tendre l'entièreté de la leçon
  - La pédagogie par situations et les contraintes institutionnelles

L'apprentissage par découverte:
— Le 'quoi': qu'entend-on par apprentissage par découverte
— Le 'comment' identifier et favoriser un apprentissage par découverte:
  - La guidance du professeur:
    . Directivités de contenu et de procédure
    . Directivité du point de vue du Prof. de Math.
    . La directivité chez les stagiaires
  - Découverte par l'individu versus découverte par le groupe
— Le 'pourquoi' un apprentissage par découverte:
  - Apprentissage par découverte et apprentissage significatif: 2 niveaux de discours différents
  - Les controverses à propos de l'apport d'iun apprentissage par découverte
  - Les avantages d'un apprentissage par découverte:
    . Motivation intrinsèque
    . Conflits cognitif et socio-cognitif
— Pour 'qui' l'apprentissage par découverte

Apprentissage par réception et apprentissage significatif:
— Communiquer l'objectif à atteindre:
  - Motivation intrinsèque et formulation 'significative' de l'objectif
  - Présentation d'une 'problématique':
    . Problématique et motivation
    . Illustrations
    . Les problématiques artificielles, tronquées ou masquées
    . Prendre le temps de rendre significatives les problématiques
    . Contenus des programmes scolaires et problématiques associées
  - Le relevé des micro-compétences
— Transmettre des 'principes organisateurs' permettant à l'élève

d'intégrer les nouvelles connaissances de manière 'organique':
- Les 'principes organisateurs': définition et fonction
- Diverses formes du 'principe organisateur'; exemples
- Les situations problématiques comme principes organisateurs

— Diversifier les contextes d'apprentissage afin de promouvoir le transfert cognitif des connaissances:
- Apprentissage significatif et transfert cognitif des connaissances
- Par quelles procédures didactiques peut-on favoriser ce transfert?

— Inculquer aux élèves des schèmes d'appréhension et de rétention de l'information:
- Le 'leurre du transfert magique' des facultés intellectuelles
- Implications pédagogiques:
  . La nature du discours du Prof. (métalangage ...)
  . Quelques schèmes
  . L'entraînement systématique de tels schèmes

— Donner un feedback:
- Source du feedback
- Les feedbacks d'une leçon traditionnelle
- Illustrations
- Discussion

CHAPITRE II: APPRENTISSAGE SIGNIFICATIF ET CONCEPTION DE LA MATHEMATIQUE

Conception formelle versus conception substantielle des mathématiques:

— Pourquoi étudier dans ce cours ces 2 types de conception?

— Qu'entend-on par conception formelle et conception substantielle des mathématiques?
- Définitions
- Evolution historique
- Illustrations d'un critère de différenciation
- Rôle de la conception formelle dans l'activité mathématique

Conception formelle et pratiques didactiques:

— Choix, agencement des contenus de programmes et inversion didactique:
- Les manifestations de l'inversion didactique:
  . Principe de Weierstrass
  . Principe de Schwartz
- Inversion didactique et apprentissage significatif:
  . Principe de variabilité de Diénès
  . Exploitation des concepts enseignés
  . Inversion didactique et principe organisateur

— Le discours 'formel': ses référents, son impact pédagogique:
- Définitions 'impressionistes' versus définitions 'opératoires'
- Le mode de validation des résultats:
  . La valeur démonstrative des représentations géométriques
  . La réduction de résultats multiples à un lot minimal d'axiomes et de principes généraux

- Discours formel et apprentissage significatif
— Les processus mathématiques valorisés ou négligés dans les activités proposées aux élèves

Etude critique dans la perspective d'un apprentissage significatif des pratiques didactiques décrites dans la section *'Conception formelle et pratiques didactiques'*.
Objet d'un travail de groupe (cours de méthodologie, année 83/84).

CHAPITRE III: APPRENTISSAGE SIGNIFICATIF, OBJECTIFS D'ENSEIGNEMENT ET CHOIX DES CONTENUS DE PROGRAMMES

La rédaction des 'curricula':
— Le concept de curriculum
— Le concept d'évaluation de curriculum
— Les critères de choix des contenus de programme:
  - Interactions des critères sociaux et scientifiques dans l'établissement des programmes
  - Intégration de résultats de recherche scientifique dans la rédaction des programmes

'La pédagogie par objectifs':
— Ce qu'on entend par là
— Les avantages et limites de cette pédagogie
— Etude comparative de quelques taxonomies d'objectifs

Les programmes belges de mathématique
— Evolution des curricula de mathématique au niveau international
— Impact de 'première informatique'
— Evolution des programmes belges
— Adéquation des programmes aux classes 'faibles'

LES METHODES D'ENSEIGNEMENT

Le cours de méthodologie est dispensé de manière à illustrer, par sa forme même, les concepts principaux du chapitre I.

Il est en prise directe sur les stages didactiques qui en constituent la *situation problématique* sous-jacente. Certaines sections de ce cours, données sous forme d'exposés ex-cathedra ou de documents écrits font l'objet d'un *apprentissage par réception*. D'autres sont aménagées en situations qui se prêtent à un *apprentissage par découverte* et au cours desquelles nous adoptons une *directivité de procédure*. A d'autres moments encore, nous privilégions les activités de groupe qui favorisent le *conflit cognitif* ...

POURQUOI CES THEMES?

Le cours de méthodologie spéciale couvre 30 heures d'une formation qui en comporte environ 150 au total. Pour des raisons pratiques, nous le connectons étroitement à un séminaire de 'méthodologie de l'exposé

mathématique' qui s'étale sur 15 heures et qui s'adresse à tous les étudiants de licence, qu'ils aient ou non le projet d'enseigner dans le cycle secondaire.

Vu le peu de temps qui nous était imparti, un choix draconien s'imposait parmi les thèmes à traiter: nous avons retenu ceux qui nous paraissaient le plus susceptibles d'éclairer et de faire évoluer l'élève-professeur tel qu'il transparaît à travers ses comportements-réflexes et ses aspirations.

1. D'après nos observations, le stagiaire 'moyen' a tendance à:
   a. négliger les questions relatives aux processus d'apprentissage parce qu'il identifie trop vite la logique de l'apprentissage à celle de la matière telle qu'elle est organisée sous sa forme actuelle;
   b. se fourvoyer lorsqu'il tente de mettre en oeuvre un apprentissage par découverte. Ne concevant que la seule directivité de contenu à laquelle il oppose le 'laisser-aller', il formule des questions dont la fonction n'est qu'oratoire, ce qui entraîne la passivité des élèves au lieu de leur participation attendue;
   c. concevoir la mathématique dans une perspective presqu'exclusivement formelle;
   d. méconnaître la problématique, la portée et les enjeux des théories de mathématique élémentaire qu'il enseigne;
   e. se retrancher servilement derrière l'autorité des programmes d'enseignement et des manuels.

   Ces quelques comportements compréhensibles entre lesquels le lecteur établira facilement des liens de cause à effet, seraient, à notre avis, plus significatifs pour les élèves-professeurs de mathématique. Moins pour ceux qui se destinent à enseigner une discipline où les problèmes sont par nature plus complexes, telle la biologie. Nous n'avons pas ici le loisir de justifier cette hypothèse.

2. Outre ces caractéristiques qui leur sont propres, les professeurs de mathématique, futurs ou débutants, partagent avec leurs collègues d'autres disciplines des attitudes, préoccupations et aspirations que de nombreuses recherches ont mise en évidence.
   Ainsi:
   a. un retour, dès l'entrée en fonction, à une attitude conservatrice et traditionnelle, attitude que l'étudiant adoptait spontanément avant sa formation mais qu'il parvenait à transcender durant celle-ci;
   b. des préoccupations centrées sur les problèmes d'autorité et de relation, préoccupations que l'étudiant exprime à travers cinq types de questions explicites: comment faire régner la discipline, comment susciter la motivation des élèves, comment s'adapter à leurs différences individuelles, sur quels critères se baser pour évaluer leurs travaux, quelles relations établir avec les parents?[1]

3. Les insatisfactions formulées dans une enquête récente[2] par les enseignants belges en début de carrière à propos de leur formation initiale d'agrégé ont également été prises en considération. Relativement contents de leur formation théorique et des activités didactiques (stages, ...), ces jeunes professeurs émettent des réserves quant:
   a. aux activités 'facilitatrices du savoir-faire' dont nous ne retiendrons ici que:
      — l'analyse des programmes;
      — la liaison théorie-pratique;
      — l'initiation aux méthodes nouvelles;
   b. à la formation humaine et relationnelle.

   Cela étant, on voit à quelles données le contenu de notre cours fait écho.

Le chapitre I

— les sections de ce chapitre qui s'articulent autour des mots-clés: apprentissage significatif et situation problématique sensibilise les étudiants aux théories relatives aux processus d'apprentissage (cfr. point 1a);
— celles qui explicitent les concepts d'apprentissage par découverte et apprentissage par réception ainsi que ceux de directivité de contenu et de directivité de procédure leur apprend à éviter des confusions fâcheuses et à évaluer correctement les avantages, les dangers, les opportunités et les modalités d'application de chacun de ces deux types d'apprentissage (cfr. point 1b);
— les rubriques et exemples de ce chapitre sont bien sûr de nature à les initier aux méthodes nouvelles (cfr. point 3.a);
— ils fournissent des éléments de réponse à quelques-unes des questions les plus cruciales pour les étudiants à savoir: la motivation, l'adaptation aux différences individuelles des élèves et par là, la discipline (cfr. point 2b);
— notre optique consiste surtout dans ce chapitre à illustrer en même temps qu'à définir un certain nombre de concepts issus de la Pédagogie, à travers les matières des programmes et les matières enseignées lors des stages; par là nous établissons un lien étroit entre la théorie et la pratique (cfr. point 3a);
— en comparant et relativisant plusieurs méthodes d'enseignement et en examinant les moyens de les mettre en oeuvre au sein d'un système scolaire réaliste, nous cherchons à réduire le fossé qui, généralement sépare l'idéal du jeune professeur de ses premières expériences: c'est

1. Sur les points 2a et 2b vous consulterez avec profit une synthèse de 83 recherches européennes et américaines:
   Veeman: *Perceived Problems of Beginning Teachers*, Review of Educational Research, summer 1984, 54, 143-178.

2. Pour plus de détails, consultez:
   Breuse, Dupont, Quenon et Vilain: *L'enseignant débutant*, Direction générale de l'organisation des études, Belgique.

ce fossé qui, paraît-il, inciterait l'enseignant débutant à revenir, une fois sa formation terminée , à une attitude conservatrice en reproduisant des situations d'enseignement qui lui-même a connues en tant qu'élève (cfr. point 2a).

Le chapitre II

Ce chapitre fait suite à notre séminaire de méthodologie de l'exposé mathématique. Au travers de travaux programmés dans ce séminaire, les étudiants analysent l'évolution historique des normes d'exposition de la mathématique et dégagent les conceptions qui sous-tendent ces normes. Cette recherche aide tous les étudiants, qu'ils se destinent à la recherche, à l'industrie ou à l'enseignement, à situer leur propre conception de la mathématique parmi d'autres possibles et par là, à la relativiser. Dans ce chapitre II, nous poursuivons, avec les futurs enseignants la réflexion entamée au séminaire. Nous leur faisons prendre conscience des relations qui existent entre telle pratique didactique et telle conception de la mathématique (cfr. point 1c). Par ce biais nous démystifions à leurs yeux la réforme dite des 'mathématiques modernes' dont leur esprit reste fort imprégné.

Nous profitons des exemples traités pour étudier la problématique et les enjeux d'un certain nombre de matières dans lesquelles ils ne se sentent pas très à l'aise: e.a. la géométrie (cfr. point 1d).

Le chapitre III

Ce chapitre reprend une analyse des programmes ce qui correspond, comme on l'a vu, à un souhait exprimé par les jeunes enseignants (cfr. point 3a).

Cette analyse est effectuée par référence aux théories générales de rédaction de curricula et par référence à ce qui se fait dans d'autre pays: nous espérons ainsi élargir le champ de conscience de nos étudiants, trops enclins à suivre les programmes à la lettre (cfr. point 1e). L'étude de quelques taxonomies d'objectifs fait écho en outre à leurs préoccupations relatives à l'évaluation des travaux d'élève (cfr. point 2b).

Cet éventail de thèmes est complété par d'autres cours: la formation humaine, relationnelle et sociale est prise en charge par le cours de philosophie de l'Education; toutes les variables relatives à une situation d'enseignement sont étudiées au cours de pédagogie générale...

Le lecteur frustré par le caractère schématique du présent texte peut obtenir des renseignements supplémentaires en nous écrivant. Le chapitre I a été rédigé sous forme d'un syllabus de 120 pages intitulé: 'Apprentissage significatif de la mathématique et situations problématiques.'

Maggy Schneider
Facultés Universitaires de Namur
Namur/Belgique.

JOSETTE ADDA

FORMATION PROFESSIONNELLE A L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

TRADITIONNELLEMENT et dans la plupart des pays, un futur maître est considéré comme suffisamment formé et comme apte à enseigner les mathématiques lorsqu'il a étudié un certain programme de mathématiques et a réussi certaines épreuves d'un certain niveau en mathématiques. Mais les maîtres ainsi formés ne sont pas prêts à résoudre un autre type de problèmes, professionnels, qu'ils auront à affronter pendant leur carrière: comprendre les difficultés de leurs élèves, savoir analyser leurs erreurs, savoir se faire comprendre d'eux; sans un complément de formation didactique adéquat, ils feront peut-être, leur vie durant, classe pour les élèves les plus brillants (ceux qui ont le moins besoin d'aide), les autres étant abandonnés à leur situation d'individus en échec scolaire en mathématiques.

Loin de nier l'absolue nécessité d'une formation très solide en mathématiques pour les enseignants comme pour tout futur utilisateur des mathématiques (chercheur, ingénieur, par exemple), je veux parler ici d'une autre formation, complémentaire à la première, spécifiquement destinée à l'enseignement et même encore plus spécifiquement destinée à préparer les futur enseignants à réagir contre les échecs scolaires dans l'optique 'mathématiques pour tous'.

OBJECTIFS

Une formation professionnelle doit être essentiellement liée à la pratique. Tout comme il apprend à résoudre des problèmes de mathématiques, le futur professeur doit apprendre à résoudre les *problèmes* posés par la profession, les difficultés de l'enseignement des mathématiques.

Il s'agit essentiellement d'apprendre à réagir aux *erreurs* des élèves, les analyser, les comprendre, les exploiter; de même pour les non-réponses et les blocages.

Dans la présentation des notions, le maître doit savoir où résident les *difficultés*; certaines sont inhérentes aux mathématiques donc inévitables mais il est très important de les connaître: ne pas les ignorer permet un comportement plus lucide et plus efficace (insistance, contrôles, etc...) Pour savoir faire une utile *autocritique* de son cours, le maître doit apprendre d'abord (car c'est plus facile) à faire la critique d'autres cours, à comparer plusieurs présentations, etc...

PRESENTATION DE MON ENSEIGNEMENT

Il s'agit d'une option proposée aux étudiants en maîtrise de mathématiques (dont tous les autres enseignements sont de

mathématiques pures ou appliquées ou d'informatique). Je l'ai enseignée pendant 4 ans à l'université de Lille I, puis, depuis 5 ans, à l'université de Paris 7 (naturellement de nombreuses modifications, et surtout améliorations, y ont été apportées au cours des années, notamment grâce à l'enquête faite auprès des étudiants à la fin de chaque année, voir plus loin, et aussi bien sûr en fonction de l'évolution de mes recherches didactiques et par la prise en compte de résultats d'autres recherches de toutes origines). Je tiens à souligner qu'elle est également ouverte à des professeurs du secondaire en exercice dans le cadre de la formation permanente des maîtres et à des étudiants en 3ème cycle de didactique des mathématiques (comme prérequis aux recherches dans ce domaine), ce qui permet, à mon avis, d'interessantes confrontations entre futurs maîtres et 'practiciens' connaisseurs du 'terrain'.
Les séances à l'université durent 3 heures chaque semaine pendant toute l'année universitaire [1].

Les étudiants apprennent à résoudre des *problèmes de didactique* : ils ont, une fois par mois, plus le jour de l'examen, à traiter un devoir comportant un ou plusieurs problèmes de l'un des types suivants:
— analyse, interprétation et exploitation d'une erreur (cf. annexe);
— analyse critique d'un texte présentant le compte-rendu détaillé d'une leçon de mathématiques (par exemple certains articles de F.Papy, de A.Bishop, ...);
— analyse didactique de l'enregistrement d'une séquence de cours ('leçon particulière', séance de 'rééducation mathématique, par exemple, extraits de certains ouvrages de S.Baruk par ex.);
— critique d'un chapitre de manuel: exemple 'Analysez, critiquez et commentez le chapitre suivant; on s'attachera notamment à l'étude des représentations utilisées, suit la photocopie d'un premier chapitre de géométrie utilisant plusieurs registres de représentations graphiques;
— comparaisons de présentations: exemple: étude comparative de 3 présentations du théorème de Pythagore données dans des manuels publiés en 1968, 1972 et 1980 chez un même éditeur.

QUEL PROGRAMME POUR CELA?

Représentations
La principale difficulté pour l'enseignant de mathématiques est d'éviter que son discours ne soit reçu comme un jargon sans signification: il a à faire *connaître* les êtres mathématiques abstraits sans pouvoir jamais les 'montrer', il doit nécessairement passer par l'intermédiaire de *représentations* mais il est essentiel qu'il ait bien réfléchi à la relation entre signifiants et signifiés et qu'il ait pris conscience des nombreuses perversions de cette relation qui sont à la base de la plupart des incompréhensions, des a-compréhensions en mathématiques (même

1. Par ailleurs, j'assure des stages de formation continue de professeurs de mathématiques qui, sous forme de 8 journées de 6 heures, traitent le même programme de manière plus dense.

lorsque, par 'dressage', un comportement de simple réaction aux écritures, sans aucune référence aux concepts signifiés, peut conduire à donner des réponses non erronnées à certaines questions scolaires).
On étudie successivement, et toujours sur des cas authentiques, le symbolisme mathématique, les représentations graphiques, les représentations par des matériels, puis par des histoires à titre de métaphores (habillages pseudo-concrets des concepts mathématiques).

Questionnements scolaires
On apprend à faire l'analyse de contenu d'un exercice mathématique, à prendre conscience de l'importance de la formulation: questions 'équivalentes' mathématiquement mais de difficultés très différentes, rôle du contexte, rôle des conditions du questionnement...
On étudie les 'tests' les plus classiques, et, également, on réfléchit aux problèmes d'évaluations, notamment de docimologie (séances de multicorrections de copies, effet Pygmalion, etc...).

Heuristique et 'problem solving'
Pris eux-mêmes comme cobayes (ou bien observateurs d'élèves) les étudiants font l'analyse de leurs comportements, de leur recherche de stratégies de résolution de problèmes.

Le contexte institutionnel
Pour comprendre les phénomènes d'anxiété, les inégalités entre élèves, l'évolution des échecs, etc... on traite quelques chapitres sur:
— la place des mathématiques dans le système scolaire français et quelques éléments de sociologie de l'éducation;
— l'évolution de l'enseignement des mathématiques depuis le début du siècle en France et quelques éléments d'éducation comparée (internationale) relativement à l'enseignement des mathématiques.

EVALUATION - QUELQUES APPRECIATIONS

En fin de chaque année, un questionnaire anonyme est distribué aux étudiants pour améliorer l'enseignement par feed-back. Il y est demandé une appréciation des cours, des travaux dirigés et des devoirs, quelles sont les parties les plus (et les moins) interessantes et en dernière question: 'Que cherchiez-vous dans cet enseignement, et l'avez-vous trouvé?'
Voici, pour conclure, deux réponses (très représentatives de l'ensemble) à cette question:

> "Je ne savais pas bien ce que je cherchais, par contre j'ai suivi les séances (particulièrement les cours) avec intérêt. Je trouve en effet qu'il n'y a pas eu assez de cours. J'aurais voulu plus de participation de la part de l'ensemble des étudiants lors des exposés (plus d'analyse, plus de critique ...). Le travail personnel (devoirs) bien que rébarbatif au départ (car travail!) m'a apporté beaucoup. J'ai trouvé, dans ces cours, une 'ouverture' sur l'extérieur (primaire ...). Ce qui me parait, maintenant, indispensable."

"Ayant été recrutée avec une licence de maths, puis mise dans une classe sans autre formation (notamment pédagogique), j'ai donc choisi cette UV premièrement par manque de formation initiale, deuxièmement parce qu'enseignant je me suis heurtée à des difficultés et donc ai éprouvé le besoin de réfléchir avec d'autres sur l'enseignement des mathématiques. D'autres ayant réfléchi avant, je pensais utile et efficace afin de progresser plus rapidement de pouvoir accéder à la connaissance de cette reflexion (comme 'patrimoine').
Vivant quotidiennement l'échec scolaire et mesurant le gachis qu'il provoque sur un grand nombre d'élèves et d'enseignants, je pens qu'un profond changement de l'école est urgent, que ce changement est avant tout un choix de société (et donc un enjeu). Mais ceci dit, cette transformation demande que l'on réponde à: Quelle école construire? Quels contenus? Quelles méthodes pédagogiques? etc... d'où le 'fond' de ma motivation à suivre cette UV.
Qu'y ai-je trouvé?

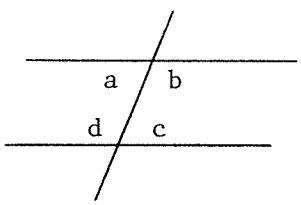
— J'y ai mieux approfondi le pourquoi de certaines difficultés (erreurs, déchiffrage, communication).
— Je me 'situe' mieux par rapport à l'enseignement des mathématiques.
— Je pensais que l'on étais plus en avance sur la reflexion sur l'enseignement, je ressors de cette UV avec le besoin d'en connaître plus sur ce qui s'est fait (IREM ou autres) mais aussi en sachant que des questions posées restent ouvertes et de plus en plus de gens s'y 'penchent'.
— Je repars avec mes questions et d'autres mais en les 'positionnant différemment', en ayant d'autres éléments pour avancer vers une réponse."

ANNEXE

Exemples d'exercices du premier type cité page 257.

Exercice 1
Un élève du cours Elémentaire a répondu à l'exercice:
'Ecris en toutes lettres les nombres suivants: 3 = ..., 15 = ...'
par 'quatre' et 'seize', qu'en pensez-vous?

Exercice 2
Analysez cette démonstration - où est l'erreur?
Considérons la démonstration suivante sans axiome d'Euclide.
Si deux parallèles sont coupées par une sécante, la somme des angles intérieurs situés d'un même côté de la sécante vaut deux droits:
Soit a, b, c, d, les angles internes déterminés par une sécante.
Trois hypothèses sont possibles selon que la somme des angles internes d'un même côté est:
— *supérieure à deux droits;*
— *inférieure à deux droits;*
— *égale à deux droits.*



La première hypothèse entraine:

$$a + d > 180°$$
$$b + c > 180°$$
$$d'où\ a + b + c + d > 360°$$

or $a + b + c + d = 180°$ *donc* $a + b + c + d = 360°$ *ce qui est contradictoire.*

La deuxième hypothèse entrainerait également une contradiction (en inversant les inégalités) donc il ne reste qu'une possibilité: la somme des angles internes d'un même côté égale deux droits.

Exercice 3

Que penseriez-vous du 'calcul' suivant:

$$\frac{4\not{9}}{\not{9}8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Essayez de déterminer les conditions de validité de cette pseudo 'règle de simplification'.

Josette Adda
Université Paris 7
Paris/France.

NADINE BEDNARZ

UN ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES A TRANSFORMER: DANS QUEL SENS? ILLUSTRATION DES TRANSFORMATIONS DEMANDEES

NOUS reprendrons ici brièvement les idées générales présentées dans les programmes d'étude développés au début des années 80 au Quebec et qui ont été mises en application en 1984 dans le cadre d'un nouveau programme de Mathématiques, tant au niveau primaire que secondaire. Ce programme s'ajuste aux nouvelles tendances en enseignement des mathématiques dans le monde actuel de la technologie. Dans son introduction, le programme propose une approche différente de l'enseignement des mathématiques qui est beaucoup plus que l'acquisition de connaissances, un programme qui doit être intégré au vécu de l'élève et à son milieu socio-culturel, qui doit sortir des schémas traditionnels: théorie, exercice, application, un programme accessible à tous.

Quels sont ces principes que le programme veut mettre de l'avant par rapport à ceux auxquels l'enseignant doit se situer, s'il veut répondre aux finalités de l'éducation?

— Favoriser une participation active de l'élève de manière à ce qu'il en arrive à prendre en charge graduellement sa formation.
— Favoriser des activités:
  - de mathématisation;
  - de résolution de problèmes.
— Explorer des heuristiques.
— Diversifier des démarches pédagogiques.
— Intégrer les notions enseignées au vécu de l'élève:
  - par des mises en situation;
  - par l'établissement de liens entre la mathématique et les autres disciplines.
— Effectuer une évaluation pédagogique intégrée aux apprentissages.

Les programmes et guides pédagogiques développés pour répondre à ces intentions sont en contradiction nette avec celles-ci. C'est ainsi que nous retrouvons un programme en objectifs et sous-objectifs, où chaque concept est décortiqué, programme qui favorise beaucoup plus une transmission cloisonnée de connaissances souvent non fondée qu'une démarche heuristique.

Les enseignants en exercice sont mal à l'aise face à ce programme car ils se rendent compte que cet enseignement, reprenant le modèle de l'enseignement actuel des mathématiques légèrement modifié en termes de contenu, ne fonctionne pas. Les exercices de routine pour développer des habiletés amènent une piètre compréhension et inaptitude à appliquer celles-ci dans des problèmes courants. Les enfants ont de la difficulté à se rappeler des faits isolés, ce qui est la plupart du temps l'objectif des

manuels scolaires. Pourtant, même s'ils sont conscients qu'il existe des difficultés, les enseignants ne savent pas exactement quoi modifier dans leur enseignement.

LES ATTENTES DES ENSEIGNANTS EN FORMATION CONTINUE

Nous parlons ici d'un cas précis de formation continue auprès d'enseignants du primaire dans le cadre d'un programme mis sur pied par l'Université en enseignement des Mathématiques et des Sciences. Ce programme rejoint jusqu'alors environ 430 enseignants dans leur milieu scolaire, et comporte dix cours de 43 heures chacun en didactique des Mathématiques et des Sciences. Nos cours sont évalués à la fin par les enseignants. Les enseignants inscrits dans ce programme ont déjà complété une formation initiale, ils sont donc légalement qualifiés pour enseigner.

Cet exemple nous permet d'illustrer les attentes des enseignants, attentes qui dans ce cas sont formulées. Ces enseignants sont en effet très critiques face à ce qui leur est donné, ce qui nous a conduit à remettre en question les cours de didactique des Mathématiques donnés à l'Université. Quelles sont ces attentes?

— Ils ne veulent pas, dans un programme de formation continue, d'un cloisonnement: cours de Mathématiques, cours d'Histoire des Mathématiques, cours de pédagogie, cours de didactique générale. Ils attendent des cours où toutes ces composantes sont prises en considération.
— Ils veulent savoir comment les connaissances se développent chez l'enfant.
— Ils veulent avoir des exemples d'expérimentations vécues, réalisées prenant en considération les différentes composantes: concept, développement historique, enfant ...
— Ils veulent eux aussi avoir l'occasion d'expérimenter des activités préparées ou proposées au cours, et revenir ensuite sur celles-ci pour une analyse. Dans ces cours, se retrouvent des professeurs enseignant de la maternelle à la sixième année (11-12 ans) et cette attente avec d'autres n'est donc pas toujours facile à actualiser.
— Ils veulent analyser les erreurs des enfants: mieux les connaître, analyser les causes possibles de ces erreurs et savoir comment y remédier.
— Ils veulent rester dans leur milieu, se regroupant dans une ou plusieurs écoles. Le professeur chargé de donner les cours doit donc se déplacer dans le milieu.
— Ils veulent savoir comment intégrer l'ordinateur dans leur enseignement.
— Comment partir du vécu de l'enfant?

NOS OBJECTIFS, EN FONCTION DE LA FACON DONT NOUS, NOUS VOYONS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

La plupart des recherches récentes en enseignement des Mathématiques

montrent que le programme, le curriculum, tout le matériel auquel l'enfant est soumis n'a pas une influence déterminante sur celui-ci. L'enfant interprète les connaissances qu'on cherche à lui transmettre, les modifie à la lumière de ses structures mentales existantes. Puisque de tout façon l'enfant construit, faisons donc en sorte que cela aille dans le sens souhaité, et non pas dans le sens du développement de conceptions inappropriées conduisant à des difficultés et des erreurs importantes en Mathématiques. Il est donc important pour nous de *convaincre* l'enseignant de laisser l'enfant *construire* ses connaissances, son rôle étant alors d'organiser l'apprentissage pour que l'enfant puisse s'approprier les concepts et habiletés mathématiques fondamentales.

Il nous faut à cet effet convaincre les enseignants que les enfants ont déjà des connaissances acquises qu'il faut utiliser, raffiner pour qu'elles deviennent des connaissances disponibles et utilisables dans d'autres situations. Cela suppose que l'apprentissage fasse en sorte que l'enfant développe des stratégies, les verbalise, les améliore ...

Cela entraîne à la base le développement d'attitudes différentes chez l'enseignant: savoir être à l'écoute de l'enfant: savoir à quel niveau l'enfant opère et comment, mieux connaître les stratégies qu'il utilise, ses connaissances préalables.

Il faut donc savoir diagnostiquer à travers ce que fait et dit l'enfant les connaissances construites disponibles, les conceptions inappropriées qui peuvent causer obstacle ... savoir regarder, écouter, questionner. L'enseignant doit avoir une meilleure connaissance des possibilités de l'enfant, de la façon dont celui-ci s'approprie un concept ...

Cela suppose également un changement d'attitude par rapport à l'enseignement: savoir s'interroger, se questionner, sur son propre enseignement, revenir sur les situations qu'on propose aux enfants. Pour vraiment apprendre, l'enfant devra être placé dans des situations significatives où il peut construire à partir d'un sens a priori. Il faut aussi amener l'enseignant à s'interroger sur la façon de conduire, d'exploiter ces situations, l'important étant de faire faire à l'enfant des exercices de réflexion où la question de *comment* le problème est résolu est importante.

Notre approche avec les enfants est une approche constructiviste qui a plus le caractère de l'approche résolution de problèmes.

Pour réaliser celle-ci, cela demande en pratique de défier les conventions et exige un effort non négligeable de la part de l'enseignant. Alors comment faire pour convaincre les enseignants et les former dans ce sens?

UN EXEMPLE: L'APPRENTISSAGE DES OPERATIONS

Nous allons présenter ici un exemple *très local* expérimenté avec les enseignants dans le cadre d'un cours de didactique des Mathématiques, et dans lequel nous utilisons en référence notre expérimentation avec les enfants (auxquels nous avions enseigné les opérations en 1ère, 2ième et 3ième années).

1. Nous demandons *dans une première étape* aux enseignants de formuler chacun, par écrit un problème mettant en jeu une addition, un problème mettant en jeu une soustraction, une multiplication, une division. Les problèmes écrits proposés ne doivent contenir qu'une opération et ne doivent porter que sur des nombres entiers.
Nous reprenons alors les problèmes formulés (par opération) en demandant aux enseignants de les classifier et de ce fait les obligeant à les étudier.
Notre objectif est alors de forcer une analyse du concept d'opération (sens de chacune des opérations), c'est-à-dire de les sensibiliser au fait qu'il y a plusieurs sens possibles pour une même opération.

   Ce qu'on observe dans cette activité (ce qu'elle nous permet de conscientiser chez les enseignants):
   — Des *sens* plus fréquents ressortent pour chaque opération dans les problèmes proposés; des sens sont *absents* (par exemple, le sens action d'enlever pour la soustraction est celui qui ressort le plus parmi les problèmes proposés).
   — Les *formulations* proposées sont très *simplistes* nous y retrouvons beaucoup de *mots-clés*, très près de l'équation, surtout pour la multiplication (où le 'fois plus' ressort presque toujours).
   — Des contextes très pauvres, toujours les mêmes (ex. problème de bonbons).

   Cette activité sera reprise en classe par les enseignants: ils demanderont aux enfants de formuler un problème mettant en jeu chaque opération. Un retour sur les résultats sera alors effectué en fonction des niveaux (analyse des lacunes dans la formulation, sens privilégies, sens absents ...).
   Cette activité permet alors de sensibiliser les enseignants aux lacunes de leur enseignement face aux opérations (sens absents, emploi de mots-clés...)

2. Dans une deuxième étape (prenons l'exemple particulier de la soustraction, la même démarche pourrait être reprise pour les autres opérations), nous leur demandons de formuler trois problèmes *différents* de soustraction (sens différents) mettant en jeu des petits nombres (ex. 8-5).
   Les questions posées sont alors les suivantes:
   Pour chacun des problèmes formulés:
   Est-ce qu'un jeune enfant (6-7 ans) peut résoudre chacun de ces problèmes?
   Y voit-il une soustraction?
   Comment pourrait-il résoudre?

   Nos objectifs sont alors les suivants:
   — Les sensibiliser au fait que la soustraction n'est pas perçue dans tous les problèmes à cet âge, qu'il y a des sens plus accessibles que d'autres.

— De plus, sensibiliser au fait que des sens différents font appel à des représentations différentes et à des stratégies différentes de la part de l'enfant pour traiter du problème.
— Leur faire anticiper, prédire différentes stratégies que des enfants de 1ère année (6-7 ans) pourraient utiliser pour résoudre ces problèmes.

3. Les mêmes problèmes sont repris, et les mêmes questions cette fois-ci en pensant à des enfants de 2ième année (7-8 ans).
— Est-ce qu'un enfant de 2ième année est en mesure de voir une soustraction dans chacun de ces problèmes?
— A quelles procédures plus efficaces devrait-on s'attendre?
— Quelles habiletés doit-on développer chez les enfants pour qu'ils soient en mesure d'utiliser ces procédures plus efficaces?

L'objectif sous-jacent est le suivant (objectif qui sera présent tout au long de cette démarche).
Faire en sorte que les enseignants aient une meilleure connaissance du développement du concept chez l'enfant (de 6-7 ans à 11-12 ans), des conditions dans lesquelles il s'approprie le concept. Le développement tient compte à la fois du sens des opérations et de l'évolution des procédures de calcul.

4. Les mêmes problèmes sont repris cette fois-ci en changeant les nombres (par ex. pour 15-9: les problèmes restent les mêmes, seuls les nombres varient).
— Est-ce que les mêmes enfants peuvent résoudre ceci?
— Pensez à différentes procédures possibles.

Les objectifs sous-jacents sont alors les suivants:
— Voir quelle variable dans une situation peut faire changer les procédures, les connaissances des enfants.
— Sensibiliser aux connaissances, habiletés que ces procédures impliquent, aux outils qu'il faut développer pour que l'enfant puisse avoir recours à ces procédures.

5. La même démarche sera reprise pour des nombres plus gros.
L'objectif étant progressivement de mieux connaître:
— Comment le concept d'opération pourrait progressivement se construire.
— Comment les procédures, dans une perspective développementale, évoluent, et quelles sont les procédures 'naturelles' utilisées par les enfants.
— Quelles sont les étapes importantes dans cette évolution, les outils qu'il s'avère nécessaire de développer en fonction de cette analyse?

6. Les enseignants seront ensuite amenés à analyser le programme et les manuels scolaires relativement à l'apprentissage des opérations:

Y retrouve-t-on tous les sens des opérations? Est-on conscient des difficultés des enfants dans les problèmes proposés...? Les étapes retenues dans le programme relativement aux procédures de calcul sont-elles utiles? Quelles sont les étapes pertinentes, à la lumière d'une analyse véritable du développement du concept? ...

CONCLUSION

Dans l'approche actuelle des opérations au primaire, on prend comme à priori qu'il faut d'abord savoir calculer pour résoudre des problèmes. Notre approche part au contraire des connaissances déjà disponibles (stratégies des enfants) pour construire sur celles-ci en les faisant évoluer. Nous essayons par cette démarche, dans le cadre d'un exemple bien précis, de convaincre les enseignants que les enfants disposent de connaissances et qu'on peut construire dessus. Nous essayons peu à peu de développer l'attitude à être à l'écoute de l'enfant, savoir comment il opère, savoir questionner ... savoir choisir des situations pertinentes qui vont provoquer une évolution dans le développement des concepts chez l'enfant. Ce changement d'attitude fondamental ne peut s'opérer que progressivement.

Nadine Bednarz
CIRADE
Université du Quebec
Montréal/Canada.

REFERENCES

[1] Hart, K .: *Children's understanding of Mathematics: 11 à 16*, Alden Press 1981.
[2] Ginsbung, H.A.A.: *The development of Mathematical thinking*, Academic Press, New York 1983.
[3] Carpenter, T.P., J.M.Moser, T.A.Romberg: *Addition and Subtraction, A cognitive approach*, dans Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum, 1982.

JOAQUIM GIMENEZ

UN ESSAI DE METHODOLOGIE SCIENTIFIQUE POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE DE 11 A 16 ANS ET POUR LES ECOLES DE FORMATION DE MAITRES

NOUS allons résumer dans cette communication, une reflexion sur les processus didactiques que nous[1] jugeons appropriés pour l'enseignement de la géométrie dans la période 11-16 ans (de recherche d'introduction aux projets déductifs parmi les élèves) et leur compréhension pour les futurs maîtres.
Elle se base sur une activité de recherche constante où l'élève devient protagoniste. Certainement, la méthodologie 'de découverte' en géométrie est une réalité depuis quelques années (Castelnuovo 1976, Freudenthal 1977, O'Daffer 1977, Fielker 1983, etc. [1]). Alors, nous allons proposer ici un schéma de travail, qu'a comme point de départ ces idées et que le schéma interprète d'une façon très particulière.
On fait un parallelisme avec la méthode utilisée par les sciences de l'expérimentation (Unesco, Nuffield, etc.) afin d'obtenir la connaissance progressive des lois géométriques fondamentales pour la mathématique pour tous, qui a comme point de départ la réalité.

Nous avons pris une classification des activités qu'on propose normalement en géométrie et nous les avons structurées à l'intérieur d'un processus plus général.
Ces processus s'enchaînent entre eux dans une structure plus vaste que va constituer une méthode pour l'enseignement de la géométrie. Il est clair que le désire n'est pas de centrer l'attention sur les structures mathématiques - qui restent souvent immobiles dans des didactiques qui suivent la ligne bourbakiste - mais d'arriver à former la pensée en aidant à structurer la logique de l'élève. C'est-à-dire, aider au 'besoin de la formalisation' avec les travaux de généralisation.
Le quadre (fig.1 - p.268) va montrer les idées principaux des trois points qu'on va lier.

Quelques remarques générales
Avec ce schéma méthodologique on ne peut pas faire une transplantation aux premiers niveaux de l'enseignement mais nous croyons que va s'enchaîner avec une pensée active centrée sur une méthode globalisée des années qu'on appelle primaire.

Ce période antérieur devra proposer les expériences suffisantes pour avoir un langage commun basique, une reconnaissance des formes, une première mise en question des 'abstraits géométriques' surtout avec l'utilisation des matériaux. Le plus important n'est pas 'faire un

1. Avec la collaboration de C.Burgués, I.Battle et J.Partegas, partie d'une recherche sur méthodes et matériaux pour la Géométrie, aidé par l'ICE de l'université de Barcelonne.

programme' (cela préoccupe trop les maîtres à l'Espagne) mais développer un centre d'intérêt pour mathématiser.

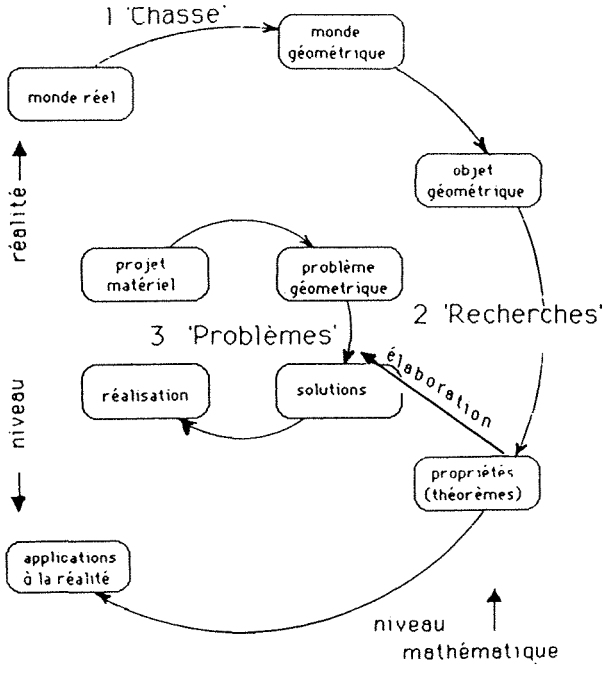


fig.1

On n'a pas dit la dernière parole sur le pourquoi se baser dans la structure euclidienne, mais je crois que - parmi d'autres raisons - il faut la connaître dans cette étape du travail scolaire. Tout à l'heure on peut se proposer la question suivante: Quelle est le lieu dans ce schéma des différentes géométries du projet kleinienne? On répondra: le point de vue ou simplification que nous faisons sur la réalité, au premier stade (la chasse).
C'est ainsi que le schéma incorpore la possibilité d'abstraire aspects différents de la réalité: l'ombre des objets pour un noyeau pointelle de lumière (projectivités), les propriétés qui ne dépendent de déformations (topologie), etc. Et aussi il peut s'enchaîner avec un projet plus large ou thématique. [2]

Ce dernier cas nous servira pour exemplifier un centre d'intérêt pour la classe 'le comète Halley est près d'ici'. [3]
Il faut dire aussi que ce projet n'est pas fini. Il est en phase d'expérimentation; il faut analyser leurs résultats, et pour cela, nous devons avoir parmi d'autres choses des laboratoires de mathématiques à l'école. L'idée n'est pas nouvelle, mais 'à l'âge de l'ordinateur' il faut la remarquer.

Un centre d'intérêt très mathématique:

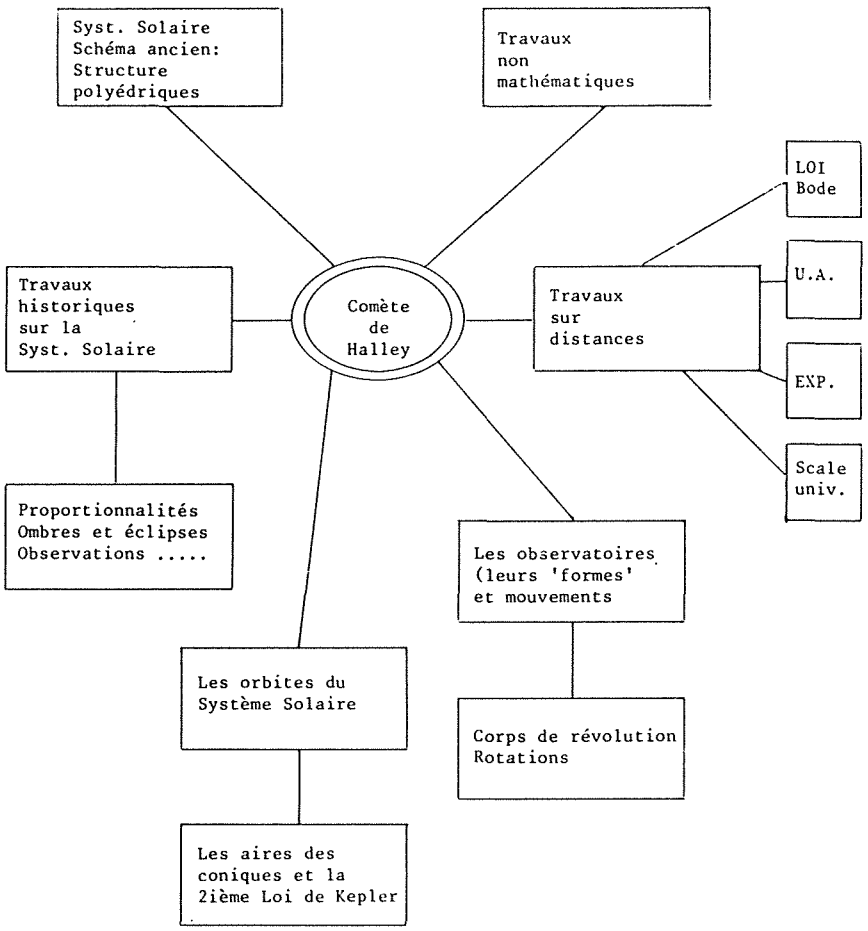


fig.2

LA CHASSE DES FORMES ET MOUVEMENTS DES FORMES

Il faut commencer par *l'observation* des réalités. Nous avons parlé de 'territoires' dans lesquels on peut faire géométrie. On appelle ainsi à un *lieu* dans lequel les élèves se mouvent ou peuvent créer figures avec liberté:

a. *Entourage physique:*
éléments, phénomènes naturels, architecture, etc.
b. *Matériaux proches:*
jeux, géoplan, ordinateur (LOGO), etc.
c. *Lieux particuliers:*
ludothèque, usine, exposition, etc.

Dans ces territoires, nous faisons un safari (belle expression qui fait penser avec le crayon et le cahier) pour chercher et capturer la plus grande quantité de formes et/ou mouvements.
Dans la chasse nous devons chercher la diversité. Il faut séparer d'abord les conditions ou propriétés physiques en laissant aussi au dehors la grandeur, les matériaux que la compose pour fixer l'attention aux formes ou mouvements, suivant une 'ligne géométrique choisie' (euclidienne, projective, topologie, etc.) Après, nous pouvons ajouter d'autres limitations tandis que les élèves les comprennent.

Pour chasser une forme, il faut passer de l'objet à leur réprésentation. C'est un grand chemin de simplification et schématisation: Nous pouvons conserver les dimensions (sculpture) ou les réduire (dessin). En général nous faisons simplifications de la réalité (voir quadre ci joint). Avec tous ces trophées sur la table, est espontanée leur classement pour faire mieux la collection. On utilise ici un vocabulaire descriptif et on explicite des propriétés les plus immédiates.

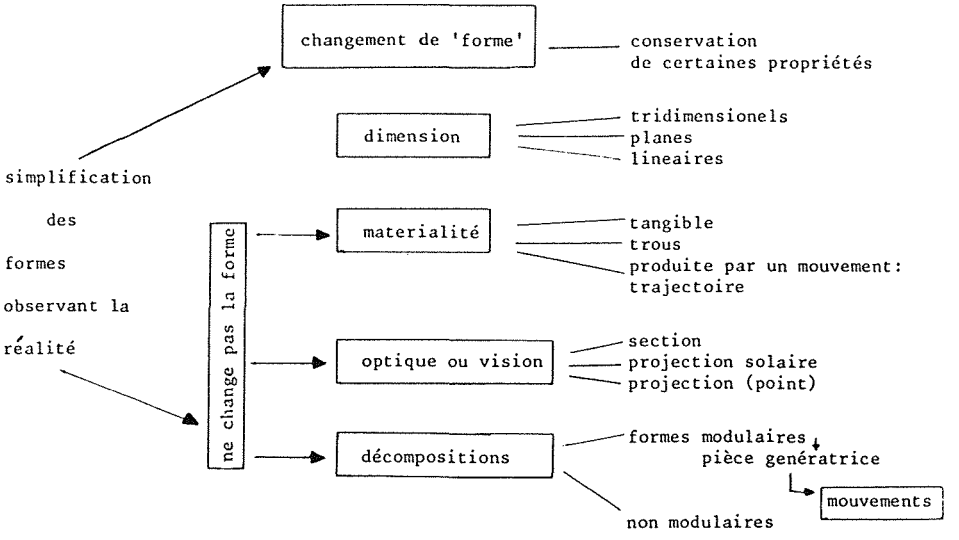


fig.3

Il y a alors une phase que peut devenir créative. On voit que la diversité met en jeu des propriétés et on va compléter la collection. Par combinaison des propriétés choisies, on va créer des nouvelles formes ou mouvements (selon l'objectif qu'on propose). Avec ce processus constructif, nous aurons des concepts plus clairs et nous connaîtrons mieux les propriétés d'une façon très structurées.

Nous pouvons nous aider de papier et dans ce stade est fondamental le travail en groupe et la réflexion commune. Nous avons trouvé les propriétés des figures connues pour faire un enlargement de l'ensemble des figures, comme si jaillissent des feuilles d'une souche nouvelle.

Maintenant, nous prenons un concept géométrique particulier qu'on considère intéressant et nous allons nous submerger pour y faire attention.

CHASSE
Un point de motivation:

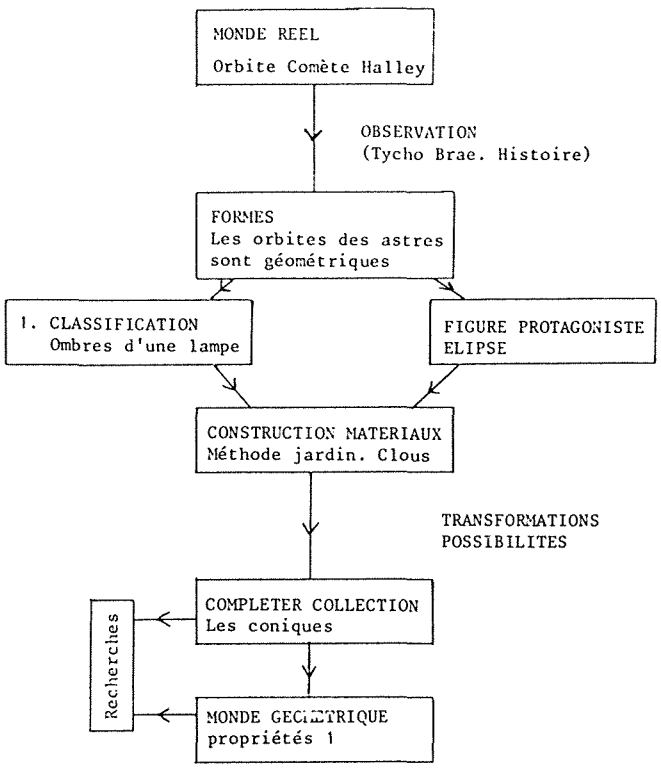


fig.4

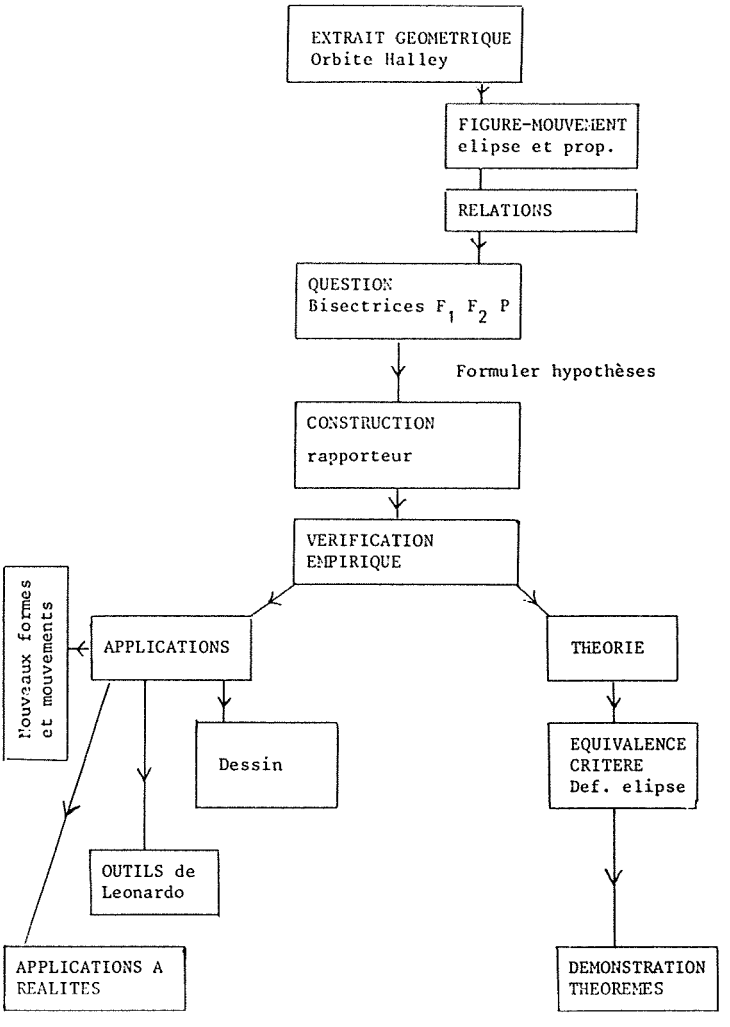
RECHERCHES GEOMETRIQUES [4]

En prenant une situation concrète (matériel, jeux, endroit, forme, etc.) nous allons réprésenter la figure choisie de la forme la plus convenable. Le matériel nous offre des possibilités et limitations. Nous pouvons introduire des conditions nouvelles ou plus limitées pour faire une simplification. Alors on fait une méthode de recherche pareil aux sciences de la nature, isolant variables pour expérimenter à l'intérieur d'une. Nous découvrons des possibilités nouvelles parmi les éléments que nous ne connaissons pas.

On déduit et formule théorèmes si les élèves sont capables d'arriver à

ce stade. On voit dans ce schéma que nous pouvons applier les propriétés découvertes dans:
— constructions géométriques;
— possibilités d'applications practiques
— invention de nouveaux problèmes géométriques.
Nous croyons que tout cela n'est pas possible pour tous les élèves s'ils n'ont pas un bon niveau dans les stades antérieurs.

RECHERCHES



Méthode active ⇒ Lieu de travail géom. ⇒ Laboratoire Mathématique

fig.5

JOAQUIM GIMENEZ

LES PROBLEMES

Lorsque nous voulons construire un objet, on présente des problèmes géométriques. Il faut d'abord les comprendre parce que les élèves ont souvent des confusions avec les problèmes techniques. 'Ça ne va bien, je ne sais pas mettre des clous!' Plusieurs problèmes de géométrie peuvent se présenter dans un jardin, champ de football ou dans un papier. Il faut les résoudre.

Alors, on prend solutions les plus proches à la réalité mais on ne sait pas souvent la méthode de solution 'mathématique'. C'est ainsi que nous devons proposer exercices pour changer le lieu du problème. Changer le territoire pour permettre leur solution. Utiliser un matériel que soit facile pour résoudre le problème.

Ces territoires sont: l'écran, plastiline, le bois et les clous, papier et ciseaux, etc. L'equivalence parmi le problème et leur réprésentation va aider l'exprimer verbalement de façon plus théorique:

a. schématiser la situation (réalité-dessin);
b. chercher le matériel le plus convenable;
c. création d'un code (physique-technologie), trouver l'explication correcte à chaque pas (investigations particulières);
d. résolution définitive du problème;
e. généralisation.

Un exemple: minimisation de distance

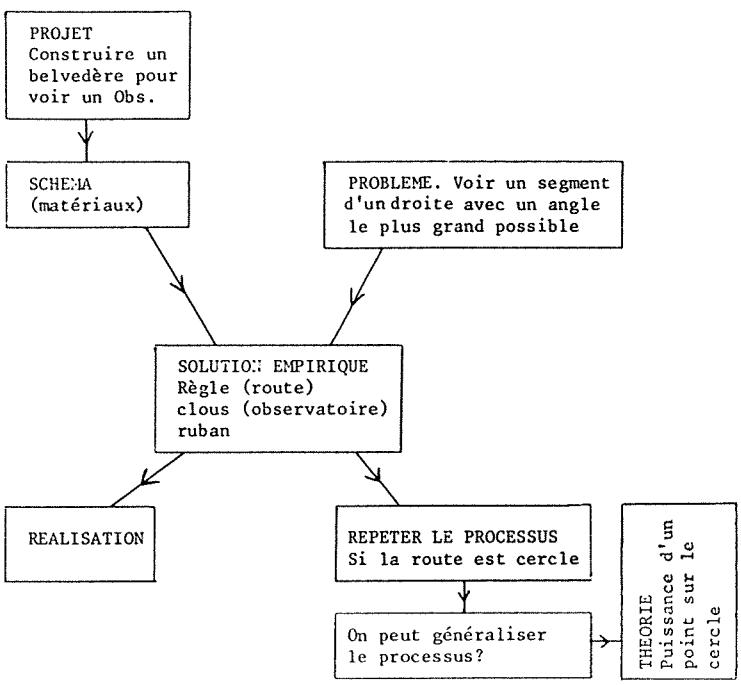


fig.6

Beaucoup d'élèves ne sont pas motivés pour un problème à chercher leur solution définitive. Ils restent tranquilles avec une solution seulement empirique. Il faut alors les motiver pour arriver au fond de la question.

INCORPORATION DE CES IDEES A LA FORMATION DE MAITRES

Depuis 10 ans, la formation de maîtres est universitaire en Espagne, mais il y a une voie d'accès aux plus grands de 25 ans. La réalité parle d'un niveau bas de concepts, surtout en géométrie, parce qu'il a été oubliée à l'école secondaire, laissée à la fin des livres ou travaillée d'une façon uniquement analytique.

Il faut faire deux choses alors: montrer des idées et concepts et aussi voir leur enseignement et les problèmes des élèves. On a essayé de faire une classe active, avec la participation des élèves-futurs maîtres, suivant un schéma pareil à l'antérieur. Nous avons constitué des groupes de travail qui préparent les thèmes théoriques d'une façon practique: qu'on peut travailler à la classe de primaire (cours 1), et dernier cours de l'enseignement basique (cours 3). Puis, on fait la discussion sur chaque sujet, et dans le cours 3, on porte les idées concrètes à la classe des petits élèves. Sur ces practiques, on parle des difficultés trouvées à la classe avec chaque groupe de travail. Alors, les futurs maîtres peuvent voir les 'nouvelles vagues' de l'apprentissage avec:

— leur apprentissage, vue d'une façon moderne;
— la préparation, mise en action, discussion des didacticiels;
— les problèmes plus vastes psycho-pédagogiques, avec la collaboration des spécialistes qui ont travaillé avec nous, incorporant une vision générale de l'école;
— la résolution de problèmes théoriques de niveau plus haut.

La formation permanente se porte à deux niveaux différents:

— institutionelle, dans l'année scolaire;
— volontaire: cours spécialisé, cours d'été, bien connue.

La première voie a déjà une expérience de 3 années. Le gouvernement de la Catalogne a pensée améliorer l'enseignement public peu favorisé premièrement dans la banlieue de Barcelonne (la ceinture industrielle) et quelques noyeaux du secteur des champs. Tout ça, avec la collaboration des écoles de formation de maîtres, et les Instituts de Sciences d'Education (ICE). Un jour par semaine, les professeurs des écoles du village choisi vont faire un Séminaire de formation continue (chacun dans leur spécialité: sciences, langue, etc.) dans l'horaire scolaire. On a mis dans la classe un élève futur maître ce jour, pendant tout l'année.

L'expérience est encore nouvelle (3 villages) mais les premiers résultats sont importants [5]. Les objectifs n'étaient ambicieux. L'idée est de transformer l'école lentement. Pour cela, on doit intéresser les profes en exercice, créer groupes de travail (de recherche?) et surtout penser que la realité scolaire est globale.

On ne peut pas parler encore d'un programme pour ces cours en mathématique, mais on peut dire que le problème principal est

d'introduire des méthodes nouvelles, et une capacité d'observer et réfléchir sur sa classe. Alors, nous avons travaillé avec eux en présentant des matériaux actuels, mais en faisant qu'ils soient protagonistes: avec les regards de leurs difficultés, ils changeont leur classes.

Voici la comparaison des situations identiques dans les 3 niveaux:

élèves 5-14 ans	prof en exercice	formation initial
connaissance de la méthode scientifique par l'action	apprentissage en action; discussion des thèmes elaborés	voire différents méthodes apprentissage en action
apprentissage et utilisation des concepts	utilisation de schémas; vision verticale dans tout l'enseignement	"niveau bas" voir les concepts avec une méthodologie différente; active; quelques concepts globalisateurs.
travail avec matériaux	matériaux nouveaux	connaissance des matériaux
réalité: problèmes de relation handicap ...	sessions psycho-pédagogiques; résolution des problèmes	incorporation aux curriculum de la psychologie et pédagogie
travaux interdiscipl.	relation: groupes de prof. départements	expériences à l'école de form. des maîtres
méthode active	participation; thèmes préparés; expositions	
sorties mathématiques	expérience vécue de sortie thématique ou globalisée	
connaissance de situations historiques du monde mathématique; toujours présents		

Joaquim Giménez
Ecole Universitaire de Formation des Enseignants
Catalunya/Espagne.

REFERENCES

[1] Castelnuovo, E. et M.Barra: *Matematica nella realtà*, Boriggheri, Torino, 1976.
Freudenthal, H.: *Didaktische fenomenologie van wiskundige grondbegrippen*, IOWO, 1976/77.
Fielker, D.S.: *Removing the shakles of Euclid*, Readings in Math Education (Maths teaching) England, 1983.
[2] Boero, P. e grupo de Genova: *Uomo e natura, Uomo e territorio, Uomo e società*, Progetto per l'insegnamento della matematica, Genova 1983.
Alsina, C. e grupo: *Estades de motivació matematica a Torrebonica*, La Caixa, obra social, Barcelona 1985.
[3] Gimenez, J. et J.M.Fortuny: *El cometa Halley ens visita. Propostes didactiques* (A paraître 1985).
[4] O'Daffer, P.G. et S.R. Clemens: *Geometry; an investigative approach*, Addison Wesley, Menlo Park 1977.
Berger: *Devices for a mathematical laboratory*, à Math Teacher nr 44 (1951), p.34; nr 45 (1952), p.287.
Batle, I., C.Burgues, J.Gimenez, J.Partegas : *Geometria a 2a Etapa Propostes de renovació didàctica*, ICE Univ. Barcelona (A paraître 1985).
[5] Expérience de Form. Permanent a Cornellà. Gen. de Catalunya, Barcelona 1984.

PAULO ABRANTES/JOAO PONTE

TRAINING TEACHERS FOR INSTRUCTIONAL COMPUTING

THE computer brought a movement of deep change to the educational scene of the eighties. In this paper we discuss some issues and present our experience concerning instructional computing in relation to teacher education.

Any current teacher training program will become quickly outdated if it does not seriously consider the role of computers in education. Computers may be used for a variety of instructional purposes. They can serve as electronic substitutes for teachers, textbooks, and exercice-books in a line of traditionalist mathematics teaching. But computers also can be used to provide the students with rich exploratory experiences, enhancing their role in the learning process.

OBJECTIVES FOR TEACHER TRAINING IN INSTRUCTIONAL COMPUTING

Not long ago some educational futurists asserted that the computer could easily displace the teacher. It was argued that such replacement would be made as hardware and software costs come down to afordable levels. Today many schools already have some experience of what are the possibilities and the drawbacks of large-scale computer based programs. This experience leads the mathematics education community apparently to agree that the teacher still is and will remain as the most vital element of the educational process.

But even if the computer does not have the power to be a full replacement for the teacher, it has enough potential to change many aspects of mathematics teaching and learning. Teachers need to be prepared to take advantage of its presence in the classroom. A teacher training program for educational computing must be based on a broad view of the role of computers in education, comprehending a place for programming, computer assisted explorations and discoveries, educational games, and classical tutorial and drill and practice programs. Such approach is based in the assumption that the student must be in the center of the learning process and must be given a wide variety of educational experiences. Moreover, what is good for some students and works well for them is not necessarily appropriate for everyone. A similar philosophy must inspire all aspects of a teacher training program, and particularly its computing component: broadness of views, variety of experiences, opportunities for everybody to develop his or her own style.

Zalewski (1982) developed a list of eight items of knowledge and skills for the 'computer literate' mathematics and science teacher. This list goes from knowing how to plug in and switch on the computer to the ability to evaluate software and to program. Zalewski admits that the knowledge of programming is his most controversial point. We can

understand that in non scientific areas many teachers will always refuse to learn the simplest computer commands. But to let programming out of the learning experiences of mathematics education teachers would be absolutely incomprehensible. Programming is the most challenging and profound experience one can have with a computer. It has an important educational value for elementary and secondary school students. Therefore, it would be a mistake to let it out of the teacher training process.

There is some research evidence to support the claim of the educational value of programming. Prichard (1982) indicates that programming can encourage cognitive activity, facilitates the construction of mathematical knowledge, makes the students develop their ideas about mathematics, and assists the development of problem solving abilities. Teachers need to have a deep feeling for the educational value of programming. The only way to promote it is having them going trough the same kind of experiences that they are supposed to undertake with their students (Hatfield 1982). Programming activities were already successfully implemented in many elementary, middle, and secondary teacher education programs. Davis et al. (1984) reported that teachers in a two-week inservice course with Logo got quite confident and competent in the use of the language and enjoyed working on the programming assignments. Doyle (1984) also reported a successful program to introduce BASIC to inservice teachers.

Teachers must know how to write small programs directly addressing the questions raised by their students. But that is not the end of the story. To take full advantage of the computer teachers need to have positive attitudes about technology and innovation, to be confident in using the computer, and to know the largest variety of educational applications (Bossuet, 1982). They must be warned against the views who just assign them the role of simple technicians that backup educational machines running an electronic curriculum. They need to be sensitive to the technological development, to mathematics, and to children, and they need to be prepared to decide in each moment what is best for their own students.

The actual extent of computer use in schools and teachers' attitudes towards computers naturally differ from country to country. In Portugal there was virtually no experience of instructional computing with machines of the main frame generation. The reforms of the sixties turned into a very formal curriculum yielding to a high insuccess rate in the learning of mathematics. Also, there is almost no tradition of inservice work. The environment in which we have our mathematics teacher training programs may be summarized by the following aspects:

1. Most teachers do not have any idea how they can use the computer in the classroom.
2. There is very little educational software. Most of the few programs available are very primitive tutorials and drill and practice that assign the computer traditional educational roles.
3. The computer does not have yet an established place in our schools.

In most cases, when a school has a computer, it is used by very few people.
4. Very few teachers actually used computers in classrooms.
5. There are contradictory attitudes, and very often negative attitudes from inservice and preservice teachers towards the use of computers in schools.
6. There are still many mathematics teachers who are simply afraid of the computer. They feel 'paralysed' in front of the machine, as if they touched the wrong key something disastrous could happen.
7. Existing curricula are not oriented towards the extensive use of computers.
8. The Ministry of Education still did not issue any official policy regarding the use of computers in schools.

A COMPUTER SEGMENT OF A TEACHER TRAINING PROGRAM IN 84/85

In the University of Lisbon a program leading to a professional degree for a mathematics teacher comprises three years of studies in various mathematics content topics, one year of work in several subjects in education, and one year of full-time student teaching in a secondary school. For those who began the fourth year of this program in 84/85 systematic work with microcomputers was planned as one of the essential components and it was considered in connection with a 'methods of teaching mathematics' course and with a seminar dedicated to the applications of mathematics. At this point most students did not have any professional experience while their contact with computers was very limited.

In the 'methods course' two hours per week during six months were dedicated to the work with microcomputers during six months. This activity was divided into three periods of about eight weeks each.

The first period was largely devoted to learning the essential ideas of the BASIC programming language and conducted since the first session in relation to problem solving activities. The students, working generally in small groups, wrote programs to calculate the g.c.d. of two numbers, factorize an integer, simulate n throws of a dice, draw graphs of functions, or calculate the mean or the median of a sample of size n. The emphasis was on solving the problems and on comparing and discussing the algorithms used while little attention was paid to the elegance or technical perfection of the programs.

The second period was mainly dedicated to knowing and evaluating software for mathematics teaching and learning. This software ranged from existing commercial tutorial and drill and practice programs to others, meanwhile developed in our Department, that emphasized simulations and educational games. This activity occurred simultaneously with the writing of programs which involved learning new aspects of programming, such as working with arrays or defining characters, and also with the use of cassette recorders, diskettes and printers. During this period some students began using the microcomputer as a source for ideas discussed in the seminar mentioned earlier or in activities of

planning or simulating lessons for the 'methods course'. This use of the microcomputer was encouraged but it was never a compulsory requirement for the work described.

During the last period each student should work in a project, of his or her own choice, involving educational use of the microcomputer related to the learning of one or several topics of mathematics. That project should include, at least, the presentation of a program and the discussion of its educational utility. The weekly session was then dedicated to the support of the different projects though we also tried to give our students the possibility of having a first contact with other kinds of computers and with the LOGO programming language.

Throughout the year our students had reasonable bibliographic aid and the support of their teachers. Whenever they wanted they could use the microcomputers of our Department, besides the weekly session, naturally with the limitations imposed by other users.

The reactions of the students to the work seem to have been very positive.

We can base our present appreciation on the following facts:

a. Every student is now able to program, obviously with very different levels of performance.
b. The microcomputer was used by several students in a variety of situations, including sometimes small workshops with pupils of secondary schools and it was even the central topic of some optional theoretical or practical activities.
c. The projects and programs presented at the end of the year were generally developed with enthusiasm, are of reasonable quality, and reflect the concern of providing interesting and meaningful activities for secondary school pupils.
d. In a final evaluation almost all the students considered the work with microcomputers as one of the most interesting and important but without regarding it in opposition to other activities like problem solving or planning.

CONCLUSION

Our experience is absolutely positive. It suggests the practicability and usefulness of providing in mathematics preservice teacher training a systematic work using microcomputers following these major guidelines:

1. The future mathematics teacher, who will hopefully use microcomputers with his or her pupils, must know how to make a simple program. But the learning process of this teacher must not be conducted in a technical perspective of informatics. A mathematics teacher is not a computer scientist. In learning to program, the emphasis must not be in the subtleties of the different programming languages but in the mathematical ideas that we want to explore and the problems that we want to solve.
2. We must provide the future mathematics teacher with a general view of the educational possibilities of computers and, at the same time, to

encourage the study and the discussion of the pedagogical implications that the use of computers may have for the students. Special attention must be given to student programming activities, educational games, simulations, and utilities such as data bases, electronic spreadsheets, and word processing.

3. The use of microcomputers must be just a component of a set of activities geared towards the training of the future mathematics teacher and not given the status of a single course or separate unit. In particular, before requiring compulsory works involving computers, it appears advisable to encourage their free use in the most diverse situations.

In spite of the positive results we must recognize limitations that need to be overcome in the future. Some of these, possibly the most significant, result directly from the fact that we do not have available to use in our country software that can be very useful in education and, in particular, in mathematics teaching and learning. Also, a shortage in hardware, working space, and documentation, all constitute limiting factors.

However, it is impossible to know at this point if these students will make effective use of the computer technology in their future professional activity, stimulating new experiences with their pupils and colleagues. These students may contribute in a positive way to improve mathematics teaching in secondary schools but they also may feel intimidated by unfavourable working conditions. Besides, these students do not have the same level of expertise and of personal commitment to organize activities involving computers, specially in the absence of direct encouragement. Therefore, an important factor may be the greater or lesser support that they will receive in the coming school year, in student teaching, which will be for most of them the first professional experience as teachers.

Paulo Abrantes/Joao Ponte
Universidade de Lisboa
Lisboa/Portugal.

REFERENCES

[1] Bossuet, G.: *L'appropriation de l'outil ordinateur par les enseignants en formation.* European Journal of Teacher Education 5, 1982, 101-105.

[2] Davis, E.J., J.Helms, F.A.Norman, and J.Ponte: *Training elementary school teachers to use computers- with emphasis on Logo.* Arithmetic Teacher 32 (2), 1984, 18-25.

[3] Doyle, W.H.: *A discovery approach to teaching programming.* Arithmetic teacher 32 (4), 1984, 16-18 and 27-28.

[4] Hatfield, L.L.: *Instructional computing in learning and teaching mathematics.* Proceedings of the Fourth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Addendum), 1982, 10-31.

[5] Prichard, M.K.: *Student programming in elementary teacher education in mathematics: implications for research*, 1982.

[6] Zalewski, D.L.: *Microcomputers and teacher education.* In D.Zalewski (ed.), *'Microcomputers for teachers: With applications to mathematics and science'.* Bowling Green, E.U.A: School Science and Mathematics Association.

R.M.BOTTINO/P.FORCHERI/M.T.MOLFINO

COMPUTER SCIENCE LITERACY IN SECONDARY SCHOOL

THE introduction of Computer Science in schools is a problem which is now widely discussed also in Italy. The modified requirements of the business world, the mass introduction of cheap microcomputers on the market and the publishers' numerous enterprises are among the external causes which have led to a strong demand for qualification in the computer science field. Inside the school, the stimulus for new curricula arises from the increasing interest of students and teachers and from a wide number of experiences which has been carried out by several groups of researchers through some years. These experiences pointed out that the fundamental principles of computer science should be present not only in technical training but also in the curricula of all school courses. In fact computer science basic principles can be viewed as cognitive tools to be used for a great number of subjects and activities [3],[6],[8].

The introduction of computer science topics in schools involves a number of problems which are now under discussion: the choice of contents according to the school level, the working methods, the quality and type of teachers' educational training and follow-up courses required and so on.

Two years ago, the European Educational Center (CEDE), which is a board of the Italian Ministry of Education, gave rise to a national project, called IRIS, aimed to experimentally introduce basic computer science principles at all school levels. It was decided to introduce these topics among the existing scholastic subjects, rather than to create a new one, without requiring a change of the school present organization.

Moreover, the analysis of the possibility to obtain some kind of collaboration among teachers of different subjects was another purpose of the IRIS project. The planning of the project, as well as the design and the preparation of a number of different didactic units had been realized by a team composed both by researches from University and Italian National Council for Researchers (CNR) and some teachers. These units develop various topics according to different school level (primary, lower and high school).

The first experimentation of these materials had been carried on in a small number of sample schools, chosen with a national criterion. Based on the results of the experimentation the units will be reviewed and widespread. We realized an introductory unit to computer science for secondary school students (aged from 14 to 16). During the first experimentation of the project this unit had been carried on with students previously introduced to basic computer science concepts through a simplified environment (a game) [1],[2].

In this paper the general ideas which outline our work are described

together with a brief description of the contents of the unit we realized, of the working methods and of the evaluation tests adopted.

INTRODUCTION OF BASIC COMPUTER SCIENCE CONCEPTS IN SECONDARY SCHOOL

The purpose of our unit is the introduction of basic computer science concepts through problem solving activities. Young students are usually more interested in obtaining solutions of problems than in finding methods to solve them. On the contrary the abilities to abstract concepts from a specific situation, to recognize the general ideas that procedures are based on and to apply general strategies in solving problems, are some of the central goals of a learning process.

Based on these considerations, our aim is to lead students to learn basic concepts and methodologies for problem analysis, such as fundamentals of the algorithmic method, structured programming and top-down approach. Moreover, the operational introduction of such concepts allows the development of other basic abilities such as errors detection and their analysis, and program testing and modification. These capabilities are very useful, not only for every subsequent action in Computer Science, but also as a general methodology for learning. To correspond to these educational aims the PASCAL programming language was chosen [5],[9].

The unit is organized in five phases (see fig.2). Each phase is subdivided in classroom activities, laboratory activities, home-work, summary of the introduced concepts and evaluation tests. Each activity is supported by work-sheets in which new concepts are pointed out, exercises are suggested, questions are proposed and so on.
Teachers are provided with a guide which gives them detailed suggestions about the development of each phase. A characteristic of the unit is the introduction of computer science concepts dealing with a problem that students must develop step by step.

The problem to deal with is the automation of the telegram reception service (fig.1 shows how the cost of a telegram is calculated in Italy).

RULES TO CALCULATE THE COST OF A TELEGRAM		
LENGTH OF WORDS:	words containing more than 10 characters are computed as 2 words words of more than 20 characters are not allowed	
COST OF A TELEGRAM		
NUMBER OF WORDS	FIXED RATE	VARIABLE RATE
up to 10 words	2700 Lit.	-
more than 10	2700 Lit.	50 Lit. for each extra word after the first 10

fig.1 The cost of a telegram in Italy: How to calculate it.

This choice presents some educational advantages. As we saw through many similar experiences [4], writing one correct program of reasonable size is far more instructive than spending the same time in writing a number of programs unrealistically small or not properly working. This can give some ideas about the technical possibilities, the constraints and the limitations of the computing instruments.

Moreover, the final solution of an articulate problem requires finding a complex algorithm and learning a series of new techniques to implement it. We chose the telegram problem because it can be naturally handled according to different levels of simplification. The general idea is to deal with the problem of the automation of the telegram reception service by dividing it into subproblems, which, in the complete program, corresponds to a series of procedures.

The adopted approach is organized as follows: first of all students analyze the problem in a general way and are induced to draft a plan for the solution. Then they go further in details, by adding procedures aimed to compute and to print the number of words, their cost and the total amount for the telegram under consideration, starting from the easiest situation and reaching the most general one in conclusion of the complete project. The easiest case corresponds to a telegram in which words cannot be composed by more than ten characters and the program input is the number of words.

The final program computes and prints the total amount corresponding to a telegram formed by words longer than ten characters and the input of the program is the corresponding text. An important educational aspect is that the proposed problem gives the possibility not only to deal with numerical data but also with characters.

In school usually, computer programming is used to solve mathematical problems and applications of different nature are rarely analyzed in not specialized schools. Through the proposed problem students are given some operational ideas, in a simplified way, of the influence of computer science applications in the real world. Moreover, the teaching of computer science is not viewed as a specific task of the mathematics teacher, but rather as a field where both knowledges and experiences of various nature can be profitably applied. Mathematical notions about finite arithmetic, approximation, scientific notation, logic operators are introduced while developing the main problem. This points out that a number of mathematical notions are of direct use when a computer is employed, even if it is employed to solve a non-mathematical problem. Obviously mathematics teachers can go deeper into these concepts, and we added the last phase (see fig.2) also to give them the possibility of introducing some notions about real numbers, approximation and so on. Fig.2 shows the structure of the unit: how the problem of the telegram reception automation is dealt with, the introduced computer science concepts and the mathematical notions that teachers can go deeper.

	TELEGRAM RECEPTION AUTOMATION	COMPUTER SCIENCE CONCEPTS	MATHEMATICAL NOTIONS
phases 1-4	GENERAL INTRODUCTION OF THE PROBLEM	PROBLEMS SEMPLIFICATION	
	A FIRST SEMPLIFICATION: COMPUTING THE COST GIVEN THE NUMBER OF WORDS	VARIABLES: NUMERICAL DATA; INTEGER TYPE; ASSIGNEMENT; SEQUENTIAL PROGRAMS; I/O OPERATORS;	VARIABLE; INTEGER EXPRESSIONS HANDLING
	COMPUTATION OF THE NUMBER OF CHARACTERS OF A WORD	ALPHANUMERICAL DATA: CHAR TYPE; DECISIONS; LOOPS; COUNTERS; BOOLEAN EXPRESSIONS; COMPARISON OPERATORS;	ORDERING; COMPARISON; TRUE TABLES
	COMPUTATION OF THE NUMBER OF WORDS OF A TEXT	DECOMPOSITION OF A PROBLEM; PROCEDURES; CHECK OF A PROCEDURE STEP BY STEP; I/O LABELING; CONSTANTS; BOOLEAN OPERATORS;	LOGIC OPERATORS
	ERRORS DETECTION	READING, INTERPRETING AND CORRECTING A PROGRAM; COMMENTS; PROCEDURE CALLS.	FORMULAS CONSTRUCTION; SYMBOLIC MANIPULATION.
phase 5	DEALING WITH ANOTHER PROBLEM: HOW TO COMPUTE AND PRINT THE TELEPHONE-BILL FOR A GIVEN USER	NUMERICAL DATA: REAL TYPE, FLOATING POINT NOTATION.	APPROXIMATION; SCIENTIFIC NOTATION; FINITE ARITHMETIC NOTIONS.

fig.2 : general organization of the unit

EXPERIMENTATION AND EVALUATION

The unit has been experimented the last year in a number of sample schools chosen following a national criterion.
Six classes of the first two years of secondary school (age 14 - 16) were involved in this project which became a part of the regular teaching hours. The experimentation was carried out according to different methods to verify the effectiveness of the didactic materials independently from a particular teacher or school situation.

We personally followed the experimentation of the unit in two classes: in one class our participation consisted of the direct observation of the work carried out by a group of teachers, while, in the second one, the teacher had been replaced by one of us, who completely carried on and developed the work with the students.
In the other classes the experimentation was carried on by one teacher, or a group of teachers, without our direct control.

The teachers' guide and the students work-sheets are then modified, according to the problems and to the observations raised during the different experiences. Apart from this qualitative verification, phases have been provided by tests consisting in a set of technical questions, aimed to verify the acquisition of the following abilities: text comprehension, algorithms design, programs realization, errors detection and correction. Moreover, students were given a questionnaire aimed to identify the real interest, the faced difficulties and the working method effectiveness for each phase. Based on the results of the evaluation and on a discussion with the involved teachers, general observations can be pointed out.

Students did not find technical difficulties in using computers, but at the beginning the real difficulty was found when passing from an informal description of a problem to the formalization and then to a corresponding program. It must be pointed out that these exercises are extremely important from an educational point of view, but unusual in the scholastic practice, in fact problems are usually presented well-formalized and previously subdivided according to their nature.

During the development of the unit students, in general, overcame the initial difficulties and reached, in some cases, very good results. A percentage of students (about 25%) who could not reach a sufficient score in tests is present in all classes. But these students usually obtained negative results also in other teaching subjects, and failed by the end of the year.

It must be pointed out that the sample classes have not been selected based on some attitude test, but on a criterion representative of the national scholastic reality. Moreover, the first two years of secondary school usually turn out particularly compelling for students, giving rise to a high number of failures.

CONCLUSIONS

Both qualitative and quantitative analysis of the experience justify a positive evaluation of the introductory unit of computer science. Dealing with the work proposed in the unit students are encouraged to look inside an articulate problem by a 'learning by doing' approach, in order to acquire some knowledge about real application of computer science.

Problem solving activities with a computer can play an important role in the new school culture as the organization and realization of computer programs is a very good way for testing the understanding of complex processes by scholars [7].

Moreover, this kind of work encourages the collaboration among teachers of different subjects, leading to a better understanding of learning processes. In one of the sample schools three teachers, respectively a mathematician, a physicist and a humanist, performed this work in team, without difficulties due to their different cultural education.

Next year classes where computer science has been introduced, will experiment some new units, aimed to go deeper in concepts already acquired and to use them in various contexts. Our group is now working to plan an unit aimed to introduce mathematical modelling through

computer science.

Rosa Maria Bottino
Istituto per la Matematica Applicata
Genova/Italy.

REFERENCES

[1] AA.VV., Progetto CEDE: *Corso di introduzione all'informatica* , Guida docente, 1983.
[2] AA.VV., Progetto CEDE: *Corso di introduzione all'informatica* , Guida studente, 1983.
[3] Bottino, R.M., P.Forcheri, M.T.Molfino: *A work-plan to test the educational opportunities for using small computers in secondary schools* , in Trott, A., H.Strongman en L.Giddins (eds.): *'Aspects of Educational Technology'*, vol. XVI, Kogan Page 1983, p.117-121.
[4] Bottino, R.M., P.Forcheri en M.T.Molfino: *Computer Science in new school culture* , in Alloway, B.S., G.M.Mills (eds.): 'Aspects of Educational Technology', vol. XVIII, Kogan Page, 1985, p.87-91.
[5] Bowles, K.L.: *Microcomputer Problem Solving Using Pascal* ,Springer 1977.
[6] Fisher, G.: *Computational Models of Skill Acquisition Processes* ,'Computers in Education', IFIP 1981, Lewis, R. and D.Tagg (eds.), North-Holland, p.477-481.
[7] Howe, J.A., T.O'Shea, F.Plam: *Teaching Mathematics through LOGO Programming: An evaluation Study* , in 'Computer Assisted Learning, Scope, Progress and Limits', Lewis & Tagg (eds.), North-Holland, 1980, p.85-102.
[8] Kahn, K.: *Three Interactions between AI and Education* ,Elcock, E.W., D.Michie (eds.) in 'Machine Intelligence 8', 1977, p.422-429.
[9] Wirth, N.: *Systematic Programming: An Introduction* ,Prentice Hall, 1974.

MARTA RIVEROS ROJAS/PIERINA ZANOCCO SOTO

USE OF MICRO-COMPUTERS IN CHILDREN TV-PROGRAMS

THE experience presented is part of a research project, sponsored by the Direction of Investigation of 'Pontificia Universidad Catolica de Chili' (DIUC) and the Program TELEDUC (Distance Program).
The principal objective of this project is to contribute to the improvement of the teaching-learning process of the mathematics at the level of Basic Education, to obtain that this proposition had been experimental many alternatives: perfecting courses to distance; organized by the Department of Education and Universities, complementary texts, etc. but the profit wasn't sufficient and the results can be catalogued as slow changes.
For this reason it was thought to consider a new strategy which was referred to promote the changes directly in the children using means as the TV in the children program, once a week during 40 minutes, complemented with a magazine which appears fortnightly. The title of both means is the same 'Ear, eyelash, eyebrow'.

The program and the magazine are divided in many spaces and sections, we will emphasize the work related directly with us, which name is 'TV-Plays'.
From this space 30 problematic situations were selected, related with many mathematical contents. These contents permitted to apply to the children many strategies of solutions which the teacher must indirectly notice, the methodological mathematical problems from other points of new differents to the traditional approach of class. To present the 'TV-plays' it was decided to use a computational language, specifically 'logo'.

The children who watch TV and the readers of the magazine, participate sending their solutions to the problematic situations showed.
Our work consisted in making analysis of the answers to detect typical mistakes produced by an inadequate methodology given by the teacher. We show you the results of five of these plays:

— The Pentominos
— Big-headed matches
— Dogs and Cribs
— The Coin
— The Moon

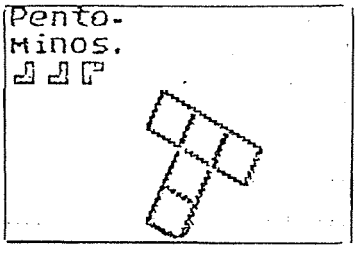
The problem is showed by TV through the images, letters received, correct and wrong answers, analysis of these through pictures, graphics and an example of the answers given by the children.

THE TV-PLAYS

The Pentomino

Statement to the problem
Pentomino is a figure formed by five squares with the same size which have one side in common. These three figures are the same pentomino, with a variation of position. Try to draw 12 different pentominos.

Image showed by TV



Analysis of results
Picture 1: correct and wrong answers.

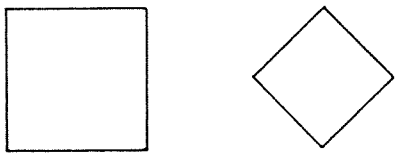
Answers	N	%
Correct	176	34,1
Wrong	340	65,9
Total	516	100

The amount of correct answers is low (34,1%).

Picture 2: mistakes contained in wrong answers.

Mistake present kind of error		Only	with						TOTAL
			A	B_2	C	B_1 and B_2	B_1–C	B_1,B_2,C	
The different position of the representation is not admitted		133		9	5	19	6	2	174 (51.9%)
The instruction to unite a square with other by one side is not respected	They are united by the top	56	79	10	4				151 (45,1%)
	They are united taking two sides	2							
The instructions in relation with number of squares are not respected		10							10 (3,0%)
Sub-total		201	79	19	9	19	6	2	335 (100,0%)
TOTAL		201 (60,0%)						134 (40,0%)	

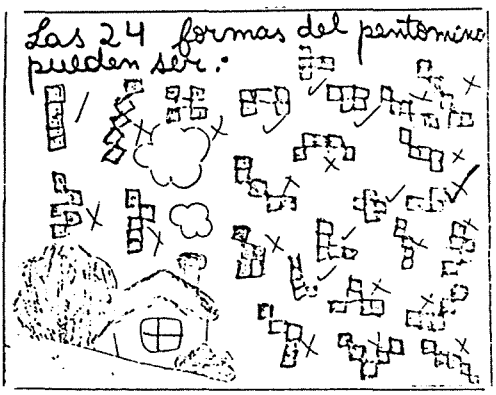
The stereotypic models don't permit to the children to recognize one figure in different positions, this problem occurs, generally, when we show you a square in the following positions:

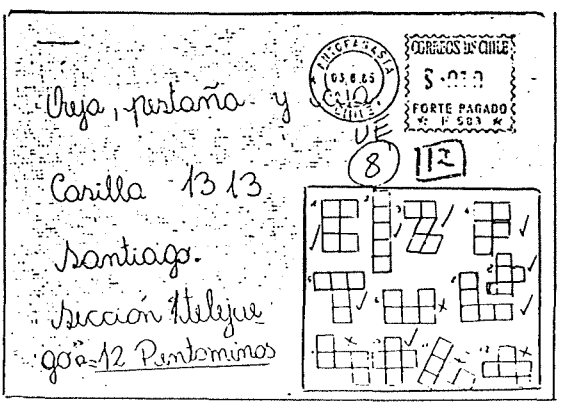


The second figure was a rhomb for them.

The second error is, surely a conceptual geometrical problem, since it was confused with the terms side and vertex. The geometry is one of the contents that the teachers don't attack, addering lack of resources, of time, of academic preparation, etc.

The children's answers



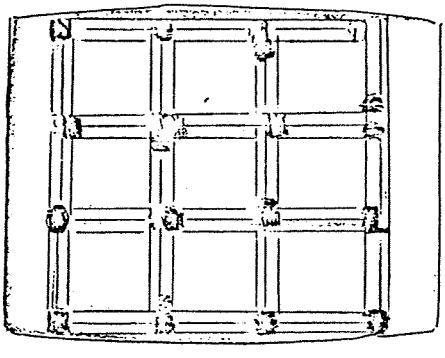


Big-headed matches

Statement to the problem

What fun is play with matches? Build this figure and try to leave 5 small squares taking off only 4 matches.

Images showed by TV

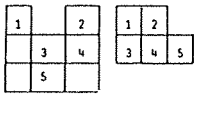
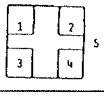


Analysis of results
Correct and wrong answers

Answers	N	%
Correct	165	89,7
Wrong	19	10,3
Total	184	100,0

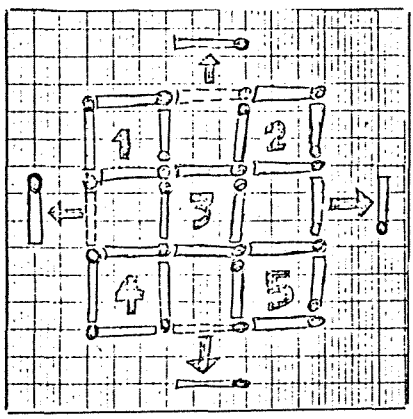
In this problem the percentage of correct answers is higher than in the previous TV-play although the number of letters sent by the children decreases.

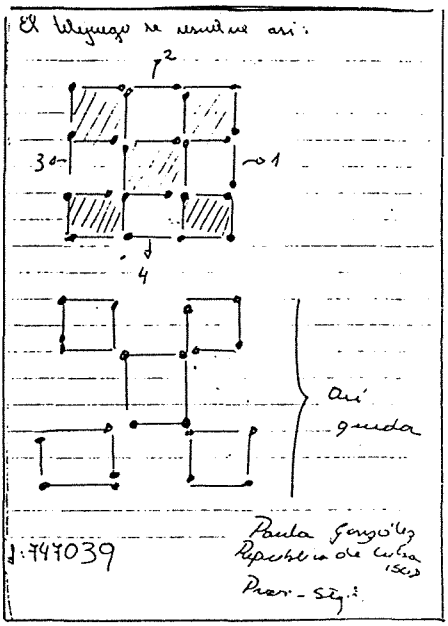
Picture 2: mistakes contained in wrong answers.

Kind of error	N	%
Five squares are left and one another segments. Examples: 	15	78,9
Five squares: four the same size and one another of larger size 	2	10,5
One another	2	10,5
TOTAL	19	100

In the mistakes it is necessary to pay attention that the children don't get the visualization of other figures, apart of the squares asked when they lift matches making segments.

The children's answers



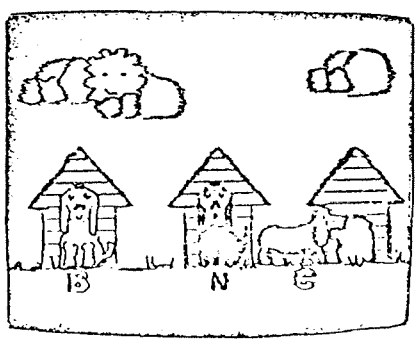


Dogs and cribs

Statement to the problems

George had 3 dogs to prank and he bought them three cribs.
Each of them used any crib, producing a great confusion and disorder to George.
The order made by George for the cribs was C-N-B, in the afternoon the cribs were B-C-N.
How many different ways are there to find the dogs if they change of cribs?

Image showed by TV

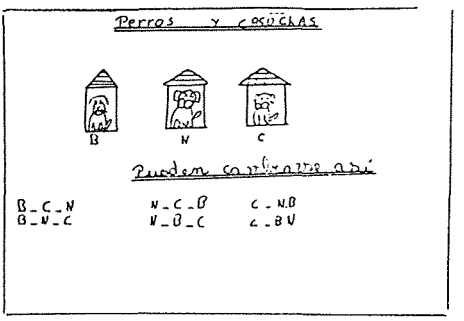


Analysis of results

Picture 1: correct and wrong answers.

Answers	N	%
Correct	162	72,6
Wrong	61	27,4
Total	223	100,0

The correct answers are maintained in a high percentage and the letters received are many.

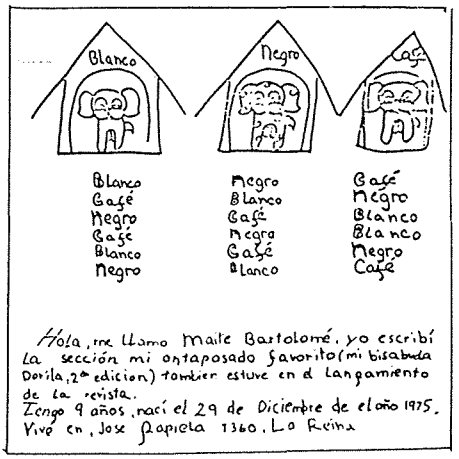


Picture 2 : Mistakes contained in wrong answers.

Kind of error	N	%
Visualization: One combination, which is related with the letter, the colour or both element	16	26,2
Two combinations	1	1,6
Three combinations	19	31,2
Four combinations	5	8,2
Five combinations	6	9,8
Seven combinations were pointed out, one combination was repeated	3	4,9
Eight combinations were pointed out, two combinations were repeated	1	1,6
Nine combinations were pointed out, repeating	10	16,4
TOTAL	61	100,0

The outstanding errors are: to make an abstraction of the possibility of change, insisting in the property of each dog to your own crib (26,2%).

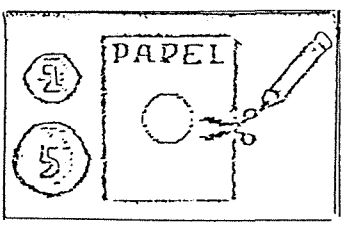
Answers given by the children



The coins

Statement to the problem
Take a coin of 1 dollar. Put it on a piece of sheet and draw the contour of it with a pencil. Carefully, cut this circle .
Would it be possible that a coin of 5 dollar passes by this orifice without shattering the paper?
Try to make it with calm and concentration.
Good luck!

Image showed by TV



Analysis of results
Picture 1: correct and wrong answers

Answers	N	%
Correct	45	23,2
Wrong	149	76,8
TOTAL	194	100,0

The letters received are decreasing again, and the correct answers too (23,2%).

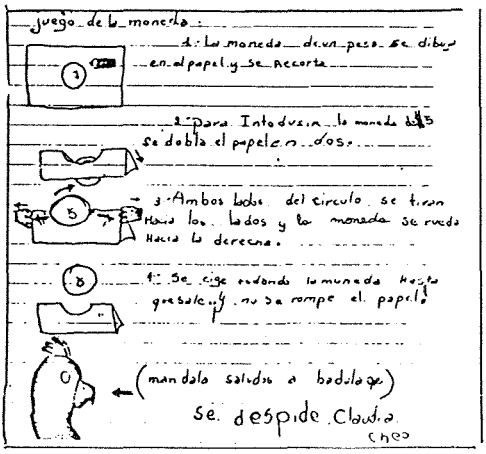
Picture 2: mistakes contained in wrong answers

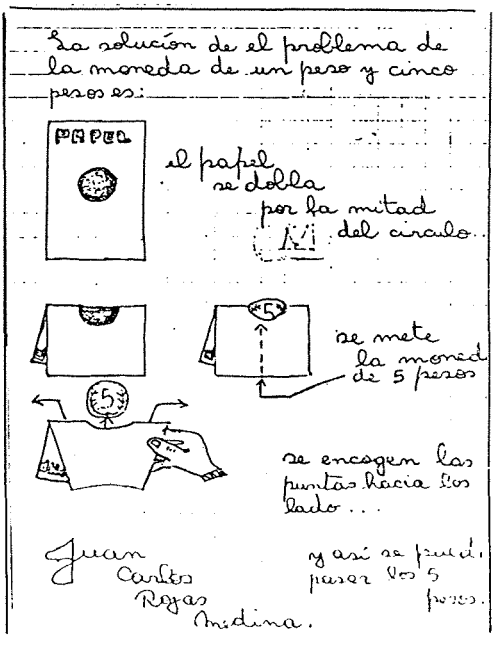
Kind of error	N	%
They give a partial solution ('by the side, in a vertical way')	17	11,4
They tell that it is possible to make it but don't explain	75	50,3
They try to give a solution as in a puzzle (5 dollar with coins of 1 dollar of greater size and one more small of 5 dollar)	46	30,9
They tell that it is impossible to make it		
TOTAL	149	100,0

The mistakes more remarkable show that the children have not the capacity to communicate a solution with words or graphically (50,3%); they insist in the jact that they get the results but they didn't tell how they got it.

Some children attack the problem using their hability (30,9%), that is more remarkable, although the answer isn't correct; but in this way they show their imaganitive capacity.

The answers of the children

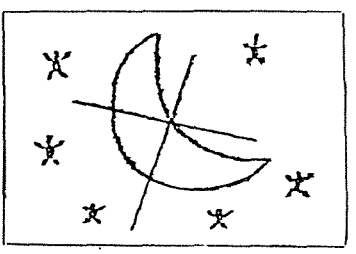




The moon

Statement to the problem
Marcos tells that with only two lines the moon can be divided in six parts.
How do you intend to do this?

Image showed by TV



Analysis of results
Picture 1: correct and wrong answers

Answers	N	%
Correct	501	92,3
Wrong	42	7,7
TOTAL	543	100,0

The answers received and the correct answers are increasing again (92,3%).

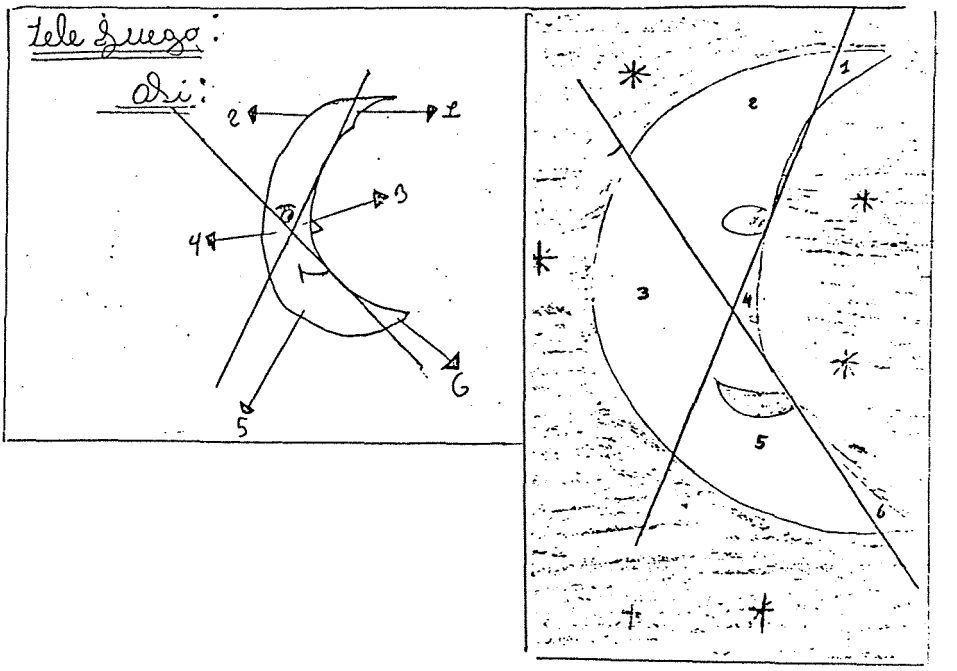
Picture 2: mistakes contained in the wrong answers

Kind of error	N	%
3 interior sections, 2 right angle, 3 exterior sections	16	38,1
4 interior sections, 2 right angle, 2 exteriors	4	9,5
5 interior sections, 2 right angle, 1 interior section	3	7,1
6 obtained sections with two right angle and one segment in the interior section	9	21,4
7 interior sections, 4 right angle	1	2,4
2 moons	3	7,1
They tell that there is no solution	6	14,3
TOTAL	42	100

The errors showed conceptual problems for the children, this problem occurs because they don't identify the interior and exterior sections.

Some children present solutions of ingenuousness when they draw eyes and yace to the moon, that is from the educative point of view.

Answers given by the children



FINAL CONCLUSIONS

In the group of received letters the following was observed: the received letters increase when the problem can be attacked with paper and pencil. The possible cause is that the child is not used to work with concrete materials, since, generally, their classes are limited to the copybook and pencil.

The most frequent errors are:

— Ignorance respect to the basic geometrical concepts by the children, the reason for this matter was presented previously.

— The methodology used by the teachers is so rigid, the concepts are presented only one way and with only one point of view, for this reason the children form and make rigourous and stereotypic models.

Marta Riveros Rojas
Pierina Zanocco Soto
Facultad de Educación
Pontificia Universidad Católica
Santiago/Chile.

GEORGE SCHOEMAKER

DE BAAS OVER DE COMPUTER (II)

THE title means 'The master of the computer'. It is part of a computer project below average ability seventh grade classes of the (non-comprehensive) Dutch educational system.
The project is being carried out by the sub-department OW & OC of the Mathematics Department of Utrecht State University, whose general task is developmental research in math education.

The project is concerned with questions like the following:
Can we teach these students getting about with the computer while taking themselves initiatives, keeping track of what is going on, and using the computer as their servant who carries out the partial tasks set by them?

This aim is stressed by the name of a publication, appearing in the title of the present article. The publication [1] includes working sheets for the students, information for the teacher, and data on the software belonging to the project.

A second question raised in this project asks:
Is it possible to rouse the interest of teachers of all subjects taught at school for this kind of instruction, and to stimulate their disposition and ability to look in their own area for possibilities of using the computer in a similar way, according to their own view on instruction in their subject area?

A POSSIBILITY FOR COMPUTER EDUCATION

Among others these questions have led the group OW & OC to a research design of close collaboration with one school of the type described above.

The 7th grade students get 40 computerlessons during one year. The material and the software are developed in preceding years and tested by members of OW & OC at the same school. The teachers coming from quite various subject areas, had followed a course, developed by OW & OC and built upon the students-material.
Above the 7th grade computer-instruction stops as a separate subject. In the near future one can probably do with less than 40 lessons in the 7th grade as in the course of the years more and more students enter the 7th grade with previous computer experience. It is the intention at this school that from the 8th grade onwards the computer shall be used as a tool in the single subject areas. Some examples of such a use of the computer will be developed in 1985 in collaboration with the respective teachers of the school.

So far no computer-instruction has been foreseen for the 9th to 10th grade. No experiments for computer science as an optional subject

covering these grades, have been started in our country, although it seems that the present design would prove to be a good preparation for computer science as an optional subject.

WHAT DO THEY LEARN IN 40 LESSONS, AND WHAT IS BEYOND?

Students learn getting about with programmes like arithmetic, sorting, calendar [2]. Within these two programmes students learn about time reckoning and about the computer. The various programmes together give them a lot of experiences about the computer.

An editor and a text processor have been developed for the students. The 40 lessons don't include programming proper in any programming language, although in a way using text commands might be considered as a kind of programming. Moreover they learn getting about with a data store the elements of which are being produced by themselves.

INTRODUCTION

In Dutch we use the name 'Weetjesbank'. It could be translated as Info. Items Bank. We want pupils (12-13 years old), to experience searching for a large amount of more or less similar things, rapidly.

In addition to searching for information in a card file these pupils gain experience in searching by means of a microcomputer. In the first lesson the teacher gives a few examples of info-items, valuable information:

The cathedral spire is 110 meters high.
The Kajagoogoo's ex-singer's name is Limahl.

Each group of four pupils gets a card file with 150 cards. The pupils have to prepare themselves for a contest. The teacher asks a question, for example: 'What is the name of the Russian Secret Service'? All groups search industriously for the card with 'The Russian Secret Service is called KGB'. The group which holds the card up first, gets a point. Pupils start to prepare themselves for the contest. They have to report something about their preparation. They receive written questions such as:

— How did you divide the work?
— What made you get on with it quickly?

On the next worksheet they are directed to a division in categories. There are questions such as:

— What do you do with info-items that don't seem to belong to anything?
— What do you do if an info-item belongs to more than one category?

Lastly they have to answer again:

— What makes your division so fast?

The team contests comes next. Pupils use different strategies such as: They split up the categories, lay out the cards, each pupil from the group guarding a few categories.

A group lays all cards uncategorised on the table. They divided the territory in four equal pools. Another group divided categories with

many cards between the four members of the group. By a pop music info-item all four searched in their own subset. In another group they made four stacks of info-items. Before a new question was asked these pupils literally got into a starting position; then they rushed to the stacks.

Still another group set the info-items in alphabetical order of keywords. In the previous lesson they had split up the cards alphabetically according to the first words of the sentence. When they realised that they had a whole row with 'the' info-items, they changed their strategy. They had designated a keyword in each info-item after which they sorted the info-items alphabetically in accordance with the keywords.

Next lessons they use the computer. They have different tools searching for categories and searching with a string. This software was specially developed for this purpose.

To our opinion the pedagogical and didactical issues should dominate technical issues [2],[3]. The computer can do various jobs depending on the programme it is charged with. It is a many-machines machine. The variety of programmes lends the computer various faces. What is being printed can be interpreted in different ways. '2 x 3' is a problem in the arithmetic programme, a word for the text processor, a wrong year-number in the calendar programme.

The many-machines machine is an example of an image about the computer. During this developmental research we have become more and more convinced that building of images can be very important to get an understanding of how to 'steer' the computer. Images as for instance the boss and the many-machines machine can be presented to students.

We have observed situations where students had their own image belonging to how to search with a string in a text. The teacher started a discussion about these images and presented her image. Anyhow this image helped because it enabled students to answer questions like: 'If we use cola, col and co as strings, which one finds more sentences in a text?' A useful preparation for a next question: 'I don't know exactly how a name is spelled in specific text, what can I use as a string?' It would be very important if students could develop an attitude of generating images which they could adapt after new experiences.

In this work we present the students problems that can be solved by using different programmes on the computer. They have to decide whether they want to use a certain programme, they start the programme, insert their data, they write down the result, go back to the boss and select another programme that they need on their road to the solution of the problem.

Text processing and data store are building blocks for activities in subject areas where the computer is used.

Examples:

In mother language lessons students learn from their own composition about readability (paragraphs, intermediate headlines).

In geography students can collect data about the region where they live

and store them among data collected before. Using the computer is only meaningful if appropriate classifications of the data sharpens the picture of the region.
In biology the tree structure of the characteristics plays a role.
The teacher in arts cooperated with us in a small project. We used a Macintosh. Her concern is: pupils of 15,16 years old often do not dare to draw. What happens when we show them the facilities of a Macpaintprogram? Will it encourage them or will it lead to their conclusion: with a computer it can be done better and easier.
With this concern in our mind we spent several hours with small groups of pupils with a Macintosh, exploring the facilities of Macpaint. The pupils experienced that some things are easy on a micro, other things can be done better with a pencil. Minette (15) produced this with the Mac.
She writes: Minette as a mosquito. I am going to string you ... bzzz.

Teachers are stimulated to provide ideas with regard to their own subject areas OW & OC will try to develop appropriate software.
It still remains under discussion for which subjects LOGO programming might be useful.

ONE SCHOOL, IF APPROPRIATELY SUPPORTED, CAN NEVER COME OUT TO BE A FAILURE

Of course the development at one school, with extraordinarily intensive counseling cannot straight forwardly be transferred to schools lacking this special help. New creations in education require a massive approach like ours. Followers need not undergo the same development.

Our teacher course for school teams can anew be tested by teacher training institutions and adapted to dissemination requirements. At this very moment experiments of retraining schoolteams are already being conducted at training institutions.
Meanwhile the students-material of 'De baas over de computer' is being used at other schools thanks to the teachers instructions and the availability of the software.

After an intensive developmental process at one school experiences on computer aided-instruction in various subjects can be disseminated by means of retraining courses and publications.

George Schoemaker
Researchgroup OW & OC
State University Utrecht
Utrecht/the Netherlands.

REFERENCES

[1] Bergervoet, P., A.Goddijn, E.Hoekx, N.Querelle, G.Schoemaker, M.Simons and E.te Woerd: *De baas over de computer (I)* ,Utrecht 1984.
[2] Schoemaker, G.: *De baas over de computer (II)* ,Utrecht 1985.
[3] Bork, A.: *Computers and information technology as a learning aid* ,Computers and Education, Amsterdam, New York, Oxford, 1984, p.77-91.
[4] Bauersfeld, H.: *Computer und Schule - Fragen zur humanen Dimension der Informationstechnologien* ,Bielefeld 1985.

ANDRE HARDY

REFLEXION CRITIQUE SUR L'UTILISATION DU MICRO-ORDINATEUR DANS LA FORMATION MATHEMATIQUE

LE but de cet article est d'engager une réflexion sur l'utilisation du micro-ordinateur comme outil de formation dans le cours de mathématique; le micro-ordinateur sera donc considéré ici comme un outil pédagogique supplémentaire, au même titre que le tableau noir, le rétroprojecteur, le projecteur de dia, le magnétoscope, les réglettes cuisenaires, etc.
Nous n'aborderons donc pas dans cet article le problème de l'enseignement de l'informatique et de la programmation.

UTILISATIONS PEDAGOGIQUES DE L'ORDINATEUR DANS LE COURS DE MATHEMATIQUE

Les utilisations pédagogiques du micro-ordinateur comme outil dans le cours de mathématique sont nombreuses et variées. Nous répertorions la plupart d'entre elles dans les lignes qui suivent.

Mode tutoriel
C'est une forme d'enseignement programmé auquel on a ajouté les possibilités d'analyse et de décision propres à l'ordinateur; l'apport de l'informatique à cette technique réside essentiellement à trois niveaux:
— l'analyse de la réponse de l'élève;
— la présentation de feedback spécifiques;
— la gestion de la progression de l'élève à travers le cours.

Simulation
Cette activité consiste à remplacer une expérience, un phénomène par un modèle paramétré qui la décrit; le principe de la simulation consiste à faire varier les paramètres du modèle et d'analyser les résultats que l'on obtient.

Exercices répétitifs, rattrapage
Ici, l'ordinateur est considéré comme un outil de répétition qui propose à l'élève, inlassablement et à son rythme, des exercices diversifiés.

Interrogation interactive
L'élève est en présence d'un énoncé flou d'un exercice à résoudre; il doit interroger l'ordinateur (le programme) pour obtenir les informations nécessaires à la résolution de son problème.

Illustration et animation
L'ordinateur est considéré comme un supertableau graphique qui permet

de représenter rapidement des graphes de fonctions, des ensembles de données, ...; des techniques d'animation permettent parfois de mieux mettre en évidence les caractéristiques du phénomène que l'on veut observer.

Jeu pédagogique
L'acquisition de certains concepts, ou la révision de techniques de calculs, sont parfois présentées sous la forme de jeux.

Calculateur rapide
L'ordinateur peut être considéré comme un simple (et très performant) calculateur; il permet également un accès rapide à des banques de données.

CONTRIBUTIONS POSITIVES - EXEMPLES D'APPLICATION

Les exemples que nous reprenons ci-dessous illustrent la plupart des rubriques que nous avons présentées dans le paragraphe précédent. Il s'agit de didacticiels utilisés dans des classes de l'enseignement secondaire belges.

Simulation - illustration
Les directives méthodologiques qui accompagnent les programmes de mathématique insistent sur l'importance "de l'activité de l'élève", "d'une mathématisation progressive ménageant un temps de manipulation et d'expérimentation", "de la 'découverte des relations ou des propriétés qui régissent les objets mathématiques" (Bex, 1980). Voici, parmi d'autres, deux exemples de didacticiels qui permettent des activités qui répondent à ces directives:
— étude des propriétés du graphe d'une fonction du premier degré (f: R→ R: x→ ax + b); (CEFIS, Namur, Belgique);
— étude des transformations du plan; (LOVISOFT, Bruxelles, Belgique).
Ces programmes peuvent être utilisés dans des contextes différents:
— le professeur manipule lui-même le programme; il dispose d'un micro-ordinateur relié à un grand moniteur; les élèves proposent (pour le premier exemple) diverses valeurs pour les paramètres a et b; suite à l'observation des graphes correspondant à ces valeurs, les élèves découvrent 'expérimentalement' les propriétés recherchées;
— les élèves travaillent par groupe; ils manipulent eux-mêmes le programme; une 'feuille de route' leur est distribuée pour les guider, par exemple, (dans le second didacticiel) dans la découverte des invariants d'une transformation géométrique, ou des propriétés de la composée de plusieurs transformations.

Les professeurs qui utilisent ces programmes remarquent en général un accroissement de la motivation et de la participation des élèves: les propriétés sont découvertes plus rapidement, les démonstrations théoriques qui suivrent sont mieux comprises, les procédés de construction d'images sont acquis plus rapidement, etc.
Les mathématiques retrouvent ainsi un côté expérimental qui favorise

l'acquisation de savoirs et de savoir-faire.

Exercices répétitifs - rattrapage
Lorsqu'ils sont de qualité, les didacticiels de ce type offrent les avantages suivants:
— les exercices sont tirés au hasard: l'élève a donc la possibilité de résoudre, à son rythme, autant d'exercices qu'il le désire;
— l'erreur n'a plus le même statut: elle n'est plus sanctionnée; grâce à une remédiation appropriée, elle permet à l'élève de progresser plus efficacement;
— l'élève a une évaluation immédiate de son travail; si son résultat ne lui semble pas suffisant, il aura la possibilité de s'exercer jusqu'à ce qu'il obtienne un score satisfaisant.
Voici deux exemples de didacticiels utilisés dans les classes belges:
— les formes indéterminées et les limites (série Point Bac Math - Hachette, Paris, France);
— priorité des opérations (CEFIS, FNDP, Namur, Belgique).
Certaines expériences réalisées en Belgique montrent que, même si l'utilisation du micro-ordinateur comme outil de rattrapage ne diminue pas sensiblement les échecs, elle permet néanmoins de combler certaines lacunes fondamentales et ponctuelles.

Calculateur rapide - accès à des banques de données
Il y a quelques années, certaines applications mathématiques étaient difficilement abordables à cause de la masse de calculs qu'il fallait résoudre pour arriver à une solution; si certains enseignants décidaient quand même d'aborder de telles applications, les calculs empêchaient souvent les élèves:
— d'avoir un recul suffisant vis-à-vis de la méthodologie du problème abordé;
— de s'attarder sur la realité sous-jacente à la situation présentée, sur l'analyse de la solution, sur la signification et l'interprétation des différents paramètres intervenant dans le problème.
D'autre part, rares étaient les applications qui pouvaient inclure le traitement de gros ensembles de données réelles.

Le micro-ordinateur permet, dans une certaine mesure, de remédier à cette situation. Dans cette perspective, la statistique semble profiter pleinement des ressources du micro-ordinateur; en effet, celui-ci peut calculer très rapidement les différents indices statistiques liés à de gros ensembles de données réelles; diverses représentations graphiques du même ensemble de données peuvent apparaître à l'écran; leur analyse permettra de mettre en évidence les éventuels pièges cachés dans les données et conduira à une interprétation pertinente du phénomène que l'on étudie.
De plus, on pourra demander aux élèves de collecter eux-mêmes les données qui les intéressent, et ensuite d'en retirer toute l'information possible; cette activité développe chez les élèves la créativité, un réel esprit d'initiative et une attitude critique vis-à-vis des statistiques

présentées chaque jour par les media (résultats de sondages, statistiques de chômage, etc.).
Les capacités de 'calculateur rapide' du micro-ordinateur permettent aussi l'approche de processus algorithmiques.

Illustration - animation
Des didacticiels d'animation enrichissent le cours de mathématique; grâce à certains d'entre eux (lieux géométriques, CDS, Mons, Belgique), on peut par exemple voir se construire à l'écran, point par point, le lieu géométrique de l'intersection de deux droites variables dont les coefficients sont des fonctions quelconques d'un paramètre.

Jeu pédagogique
Ces didacticiels sont essentiellement utilisés dans l'enseignement maternel ou primaire; le logiciel '*Logique et math*' (PUCE, Québec) permet à l'enfant de repérer les différences entre divers objets de l'espace, et d'apprendre à utiliser, en jouant, les diagrammes de Venn et de Caroll.

DANGERS DE L'INTRODUCTION DU MICRO-ORDINATEUR DANS L'EDUCATION

Les principaux dangers généralement cités sont les suivants:
— le micro-ordinateur risque d'être considéré comme un gadget;
— dimunition:
  - des capacités de mémorisation des élèves: l'ordinateur calcule les moyennes statistiques; l'élève ne manipulera plus directement ces formules; il ne les mémorisera donc plus;
  - de la rigueur: l'élève n'aura-t-il pas tendance à négliger une démonstration théorique rigoureuse d'un résultat dont il se sera convaincu expérimentalement?
  - de l'imagination des élèves: le micro-ordinateur permet de visualiser très rapidement divers résultats graphiques; auparavant l'élève devait beaucoup plus souvent essayer de se représenter mentalement ces mêmes résultats.
— les élèves risquent de n'être plus motivés que par les parties de matière qui se prêtent bien à l'utilisation d'un ordinateur;
— les enseignants risquent de se sentir obligés d'utiliser cette nouvelle technologie, même si elle n'est pas pertinente par rapport aux objectifs qu'ils se sont fixés ou à la méthodologie qu'ils préconisent;
— les enseignants et les élèves risquent d'utiliser des didacticiels mal faits, trop rigides, laissant peu d'initiative à son utilisateur, des programmes où la remédiation est faible sinon absente.

FREINS A L'UTILISATION DE CETTE TECHNOLOGIE

Certaines circonstances rendent difficiles l'utilisation du micro-ordinateur comme outil dans le cours de mathématique:
— le manque de matériel dans les écoles ou l'incompatibilité des appareils existants;
— les problèmes de maintenance des ordinateurs ou de gestion du local

informatique (les ordinateurs sont parfois réservés au seul cours d'informatique);
— le manque de temps (les enseignants qui se forment à l'informatique et à l'utilisation du micro-ordinateur doivent y consacrer une partie non négligeable de leurs loisirs);
— le manque d'information sur les utilisations pédagogiques possibles de l'ordinateur à l'école: certains enseignants associent encore trop souvent l'utilisation de l'ordinateur seulement à des activités de rattrapage, ou à des didacticiels du type 'tutoriel';
— le manque d'information sur les programmes existants, sur la façon de les utiliser; sur la place que peut prendre l'ordinateur par rapport aux moyens pédagogiques traditionnels;
— la qualité pédagogique des didacticiels (les producteurs, parfois pressés par des contraintes économiques, mettent sur le marché des didacticiels présentant des lacunes graves (manque de lisibilité des pages-écran, analyse pauvre de la réponse de l'élève, déroulement rigide, erreurs de contenu, etc.));
— la peur ou le malaise des enseignants vis-à-vis d'une nouvelle technologie:
  - refus des enseignants de remettre en question leur rôle dans la classe ou leur méthodologie;
  - peur de se voir 'dépassé' par les élèves (certains d'entre eux sont très motivés pour l'informatique);
  - peur vis-à-vis du temps qu'ils pensent devoir investir pour se mettre au courant (les enseignants surestiment en général le temps qu'il faut investir en cette matière s'ils ne désirent qu'utiliser des programmes faits par d'autres).
— rejet en bloc de cette nouvelle technologie sur base de quelques didacticiels mal faits, non représentatifs de la production disponible.

LA FORMATION DES MAITRES

Tout centre de formation d'enseignants en mathématique (écoles normales primaires et moyennes, agrégations universitaires) devrait inclure dans son curriculum une formation en informatique et à la programmation.
Cette formation, qui ne serait pas la même pour tous les enseignants, pourrait inclure les éléments suivants (obligatoires ou à option suivant le niveau d'enseignement visé):
— une démystification de l'ordinateur et de l'informatique:
  - montrer les possibilités, mais également les limites de ce nouvel outil;
  - décrire un sytème informatique type, et donner une information sur la façon dont fonctionne un micro-ordinateur;
  - discuter des aspects sociaux de l'introduction de l'ordinateur dans l'éducation, le milieu familial, la société.
— une formation à la programmation:
  - formation à une bonne méthodologie de la programmation (programmation structurée, ...);

  - apprentissage (pour tout le monde) de rudiments de programmation (pour pouvoir, par exemple, lire et comprendre le listing d'un programme, et modifier certaines parties de celui-ci (introduction de ses propres exemples, modification de la cotation d'un exercice, etc.));
  - formation complète à un langage de programmation.
— formation au raisonnement algorithmique;
— formation au langage et à l'environnement LOGO;
— formation pédagogique:
  - comment évaluer les qualités d'un bon didacticiel? (J.Donnay, M.Romainville, 1984);
  - quelles sont les utilisations pédagogiques possibles du micro-ordinateur dans le cours de mathématique? (A.Hardy, 1984) (y compris différents exemples répondant à des objectifs bien précis).
— divers:
  formation à l'utilisation de progiciels tels que traitement de texte, tableur, gestion de fichiers, etc.).

CONCLUSIONS

Nous avons voulu montrer dans cet article que le micro-ordinateur, associé à des didacticiels pertinents, pouvait contribuer à une amélioration de l'enseignement des mathématiques.
C'est à l'enseignant que revient le choix d'introduire ou de ne pas introduire le micro-ordinateur dans son cours, mais il faut qu'il prenne cette décision en toute connaissance de cause; s'il décide de l'introduire, il devra accepter de remettre en question sa méthodologie et d'acquérir une formation adéquate; si un enseignant désire utiliser un didacticiel, il devra s'assurer au préalable qu'il s'agit là du meilleur moyen pédagogique disponible pour atteindre les objectifs qu'il s'est fixé; l'ordinateur ne doit pas éclipser les autres outils d'enseignement; il doit cohabiter harmonieusement avec eux; dans certains cas un didacticiel ne sera utilisé que quelques minutes dans un cours; le travail au tableau et sur papier reste primordial.

L'utilisation du micro-ordinateur semble favoriser la manipulation et l'expérimentation; soulignons cependant que les démonstrations restent essentielles; la rigueur et l'abstraction sont des composantes fondamentales et indispensables de l'enseignement des mathématiques.
Des expériences de plus en plus nombreuses sont réalisées en Belgique; malheureusement, peu d'études systématiques ont été entreprises pour évaluer les résultats obtenus; on peut cependant déjà affirmer qu'il n'y a pas de miracle! Néanmoins, si les résultats réels sont moins spectaculaires que les résultats attendus, ils sont cependant très encourageants; la plupart des enseignants ayant touché à l'EAO restent enthousiastes: les expériences entreprises ont presque toujours été reconduites sinon amplifiées.

Un des éléments primordiaux pour la réussitée d'un apprentissage est la motivation de l'étudiant; dès lors si l'on parvient à canalyser l'intérêt que portent les élèves à l'informatique, de manière à leur redonner le

goût pour certaines matières qu'ils avaient tendance à négliger auparavant, ou à leur faciliter l'apprentissage de savoirs et de savoir-faire en mathématique, une partie du pari informatique serait sûrement gagné.

André Hardy
Département de Mathématique
Faculté Universitaires
Namur/Belgique.

REFERENCES

[1] Bex, R., J.Nachtergaele, R.Laumen: *Evolution de l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires belges depuis 1968* , in 'L'enseignement de la mathématique en Belgique', sous-commission belge de la CIEM, édité par G.Noël.
[2] Donnay, J., M.Romainville: *Grille d'analyse de didacticiel* ,centre OSE, FNDP, Namur 1984.
[3] Hardy, A.: *Réflexion sur les utilisations pédagogiques de l'ordinateur à l'école* ,centre OSE, FNDP, Namur 1984.

JEAN PAUL HOUBEN/JACQUELINE VANHAMME

ETUDE DE FONCTIONS A L'AGE DE L'ORDINATEUR

L'UTILISATION D'UN ORDINATEUR DANS UNE CLASSE

L'ORDINATEUR peut, dans le cadre de l'enseignement, être utilisé de manières très diverses.

— Un des emplois le plus fréquemment évoqué est celui de l'enseignement 'assisté par ordinateur'. Dans cette situation, l'ordinateur remplace presque totalement le professeur et soumet l'élève à un enseignement très dirigé du type 'enseignement programmé'. Il y en a des avantages et les défauts.

— L'ordinateur est programmé par des élèves. Ceci devient intéressant du point de vue de l'enseignement mathématique lorsque pour construire son programme l'élève, par ailleurs formé à la construction de logiciels, analyse un problème posé pour rendre son traitement possible par l'appareil. Lorsque le problème est suffisamment complexe (à son niveau) cette analyse conduit l'élève à une compréhension en profondeur du problème posé.
Nous ne pensons toutefois pas que cet emploi entre dans le cadre d'une 'mathématique pour tous'.

— L'enfant peut être amené à faire certaines découvertes par un maniement de l'ordinateur lié à un nombre restreint d'ordres qu'il peut lui donner. C'est le cas, par exemple, de la géométrie de la tortue avec l'usage du LOGO.
Il ne faudrait toutefois pas croire qu'on conduira par là l'enfant à appréhender la géométrie euclidienne du plan. Il s'agit d'autre chose.

— L'ordinateur peut être utilisé comme banque de données qui pourront facilement être rappelées quand le besoin s'en fait sentir.

— L'ordinateur est un outil de calcul permettant d'obtenir rapidement des résultats numériques qui traités manuellement utiliseraient un temps non négligeable. Il permet ainsi de libérer du temps pour des activités plus formatives.

— L'ordinateur peut encore être utilisé pour réaliser des simulations de situations. Il nous semble que ceci ne présente de l'intérêt que si l'événement simulé ne peut être traité dans sa réalité.

— L'ordinateur peut aussi, et c'est cette utilisation qui a spécialement retenu notre attention au Séminaire de Didactique de la Mathématique de l'Université de Louvain-la-Neuve, être utilisé comme un *Super-tableau* par le professeur. Il pourra faire dérouler, de préférence sur un grand écran de télévision ou de moniteur des images mieux et plus rapidement qu'il ne pourrait le faire au tableau (qu'il soit noir, vert ou blanc). Ces images contiendront un dynamisme créateur de questions.

JEAN PAUL HOUBEN/JACQUELINE VANHAMME

A PROPOS DE L'ETUDE DE FONCTIONS NUMERIQUES

Nous sommes persuadés que l'étude des fonctions numériques fait partie de la 'Mathématique pour tous'. Elle sera, évidemment, poussée plus ou moins loin suivant les orientations choisies par chacun.

Chez nous, en Belgique, elle figure effectivement dans les programmes de toutes les sections de l'enseignement secondaire dès l'âge de 12-13 ans jusqu'à l'âge de 18 ans. Si les professeurs ne rencontrent pas trop de difficultés avec les élèves naturellement motivés par l'enseignement des mathématiques et qui ont choisi des options où l'horaire du cours de mathématique comporte un nombre relativement important de périodes par semaine (6 dans les premières années, 7 dans les dernières) il n'en est pas de même dans les sections à horaires plus réduits pour cette branche.

Nous avons essayé de construire des logiciels qui pourraient apporter une aide aux professeurs.

Etude d'une fonction

Ce logiciel vous a déjà été présenté à Orléans. Nous vous renvoyons aux actes de la rencontre pour sa description. Il a depuis lors été remanié mais l'esprit de son emploi est resté le même. A Orléans il venait d'être construit et n'avait pas encore été utilisé dans des classes. Depuis lors de nombreux professeurs l'emploient à tous les degrés de l'enseignement. C'est en effet un outil multivalent qui permet le tracé du graphe d'une fonction quelconque.

La présentation de graphes de fonctions diverses est utilisée par des professeurs avant l'introduction de la fonction affine. Les élèves dégagent les conditions qui conduisent au tracé d'une droite, ils découvrent ainsi le rôle particulier joué par les fonctions du premier degré.

Plus tard, le tracé simultané des graphes d'une fonction et de sa fonction dérivée fait apparaître, nous disent les professeurs, une multitude de questions et motive très fortement les élèves dans l'étude des variations des fonctions.

L'observation, dans certains cas de points de l'axe des abscisses qui n'ont pas d'image à l'écran conduit à se demander si un changement de repère pourrait amener une image à l'écran ou si l'image n'existe pas. Quel est le domaine de la fonction?

Le professeur qui, à un moment donné, rencontre une fonction dans un problème peut en un temps très court en montrer le graphe à ses élèves... etc. Il s'agit d'un outil multivalent.

D'autres logiciels, dont nos professeurs ont actuellement l'occasion de disposer ont des objectifs plus spécifiques.

Droites - paraboles

Cette disquette sert principalement pour l'étude des fonctions du premier et du second degré. Elle permet toutefois le graphe de quelques autres fonctions préprogrammées, de façon à faire déceler d'abord ce qui entraine que le tracé est une droite dans le cas de la fonction du premier

degré.

Pour les fonctions du premier et du second degré, il est possible de modifier les coefficients au choix du professeur ou des élèves de manière à conduire à la découverte du rôle qu'ils jouent.

Lors de l'étude de résolutions de systèmes les élèves auront la possibilité de vérifier rapidement leurs résultats. L'ordinateur donnera à la demande: la solution et sa représentation graphique.

Recherche algorithmique de zeros de fonctions

La disquette présente quatre méthodes algorithmiques de recherche de zéros de fonctions. Pour chacune d'elles une première partie présente des images qui doivent conduire l'élève à la découverte de la méthode. La deuxième permet une recherche numérique de la racine avec deux options: l'affichage de toutes les étapes intermédiaires, le calcul rapide avec indication du nombre de pas utilisé.

Les deux premières méthodes: dichotomie et cordes (regula falsi) ont une convergence lente mais sûre. Elles peuvent être facilement appréhendées par des élèves ayant une formation mathématique élémentaire. Il suffira, en effet de savoir déterminer l'abscisse du point milieu d'un segment dans le premier cas, le point d'intersection d'une droite avec l'axe des x dans le second. Avec nos élèves nous envisageons que la découverte se concrétise par la description de la recherche des zéros sur calculette.

Les deux autres méthodes présentées sont celles des sécantes et des tangentes (Newton-Raphson). La deuxième demande au moins la connaissance du calcul approché d'une dérivée pour pouvoir être programmée sur calculettes. La possibilité de traiter de nombreux contre-exemples fera réaliser que si la convergence peut être rapide il faut toutefois se méfier. Le processus peut converger vers une autre racine, il peut aussi ne pas converger du tout. La possibilité de modifier les points de départ peut conduire à la recherche de conditions suffisantes de convergence.

Dans l'utilisation de cette disquette, le professeur (ou l'élève) a le choix d'introduire au moment même la fonction qu'il désire. Il peut aussi utiliser des fonctions qu'il aura préalablement stockées dans un fichier.

L'intégrale définie

Le but principal de cette disquette est de conduire l'élève à découvrir une définition de l'intégrale définie d'une fonction continue en relation avec la notion d'aire sous une fonction ainsi qu'à la recherche algorithmique de sa valeur. Elle présentera, pour ce faire, l'approche de l'aire par des ensembles en escaliers d'abord dans le cas d'une fonction positive, puis, après avoir introduit la notion d'aire algébrique, d'une fonction continue quelconque.

La décomposition particulière de l'intervalle d'intégration (ab) en 2^n intervalles de même longueur conduira à une première recherche numérique de sa valeur. Deux autres méthodes sont ensuite présentées: la méthode des trapèzes et celle de Simpson (approche de la fonction par

des arcs de paraboles).

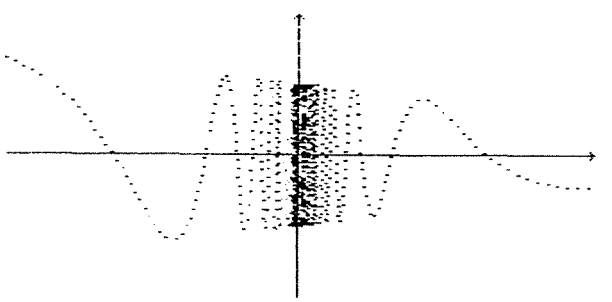
Dans sa dernière partie elle permet, pour une même fonction de modifier les valeurs de a ou b. Pour un a fixé, elle dessine la fonction intégrale en faisant varier b. Le changement de la valeur de a amène une translation de la courbe intégrale. Le professeur a ainsi les éléments nécessaires pour relier les notions de primitive et d'intégrale définie.

Fonctions trigonométriques

Ces fonctions, qui peuvent évidemment être envisagées grâce à la disquette étude d'une fonction sont ici intégrées dans une première approche de la notion de mesure d'un angle (en degrés ou en radians) et de définition des lignes trigonométriques de ces angles. L'attention est particulièrement attirée sur la résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques élémentaires et la représentation de l'ensemble solution sur le cercle trigonométrique.

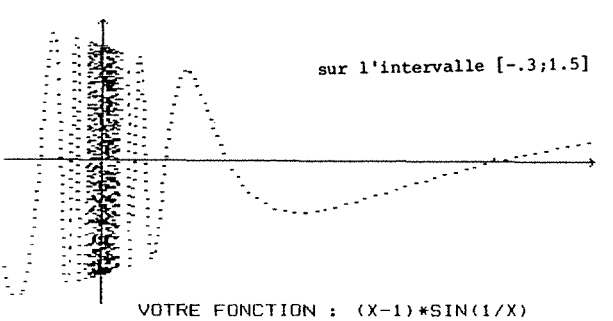
Quelques images

Quand nous présentons la disquette 'Etude d'une fonction' à des professeurs et que nous leur demandons quelle fonction entrer, nous sommes presque certains qu'ils essayeront de nous piéger en prenant une fonction comprenant sin(1/x). Voici ce que donne une telle fonction.



VOTRE FONCTION : (X-1)*SIN(1/X) sur [-.5;.5]

Un changement de repère permet d'obtenir la racine x = 1.

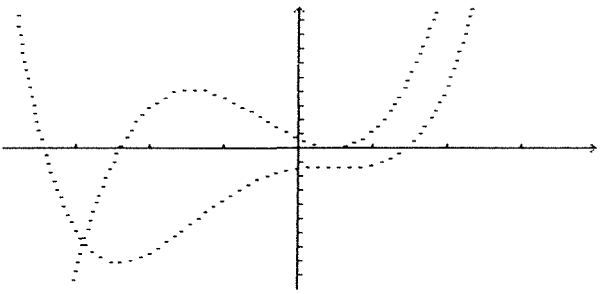


VOTRE FONCTION : (X-1)*SIN(1/X)

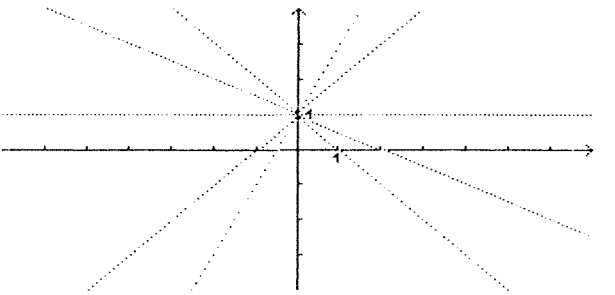
Voici un exercice proposé à des élèves de 15-16 ans d'une section ayant

un cours de mathématique de 5h/semaine.

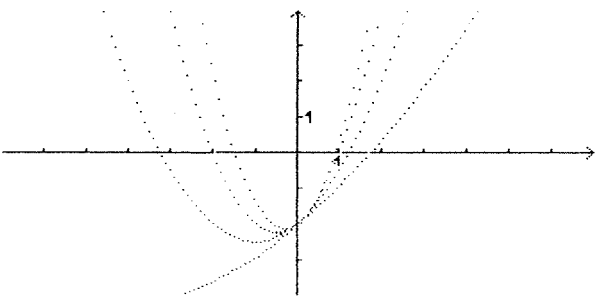
Vous avez ci-dessous la représentation graphique de deux fonctions. Je vous dis que l'une est la fonction dérivée de l'autre.
Quelle est la courbe représentant la fonction dérivée?



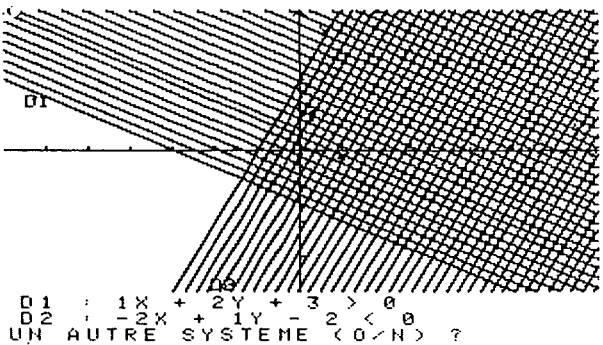
Voici des droites du faisceau $y = ax + 1$ obtenues avec la disquette 'droites et paraboles'



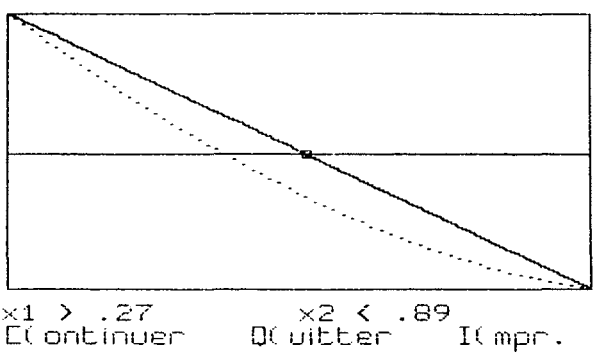
et des paraboles du faisceau $y = ax^2 + x - 2$.



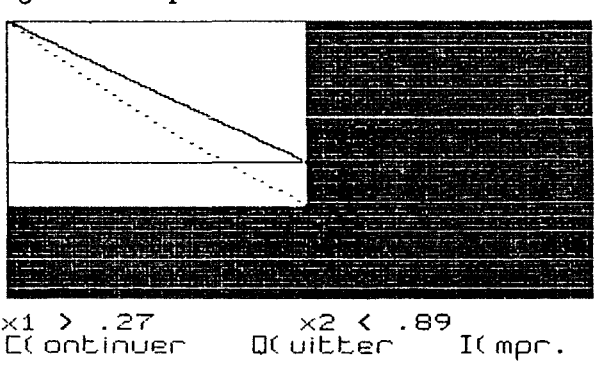
Dans le dessin ci-dessous, l'ensemble des points solution du système d'inéquations est la partie du plan non hachurée.



Dans la recherche des zéros par la méthode de la corde l'attention est attirée sur le point d'intersection de cette corde avec l'axe des x par le clignotement du petit carré.

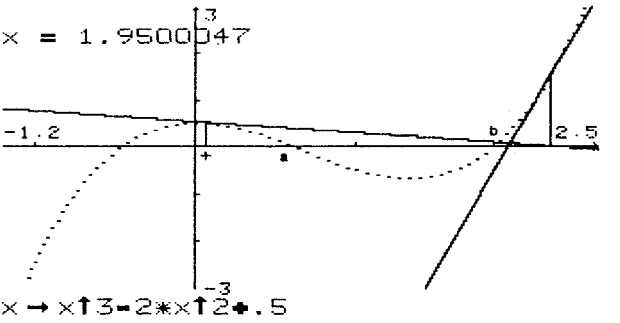


La fenêtre utilisée à l'étape suivante est ensuite indiquée. Dans la prochaine image, elle occupera tout l'écran.

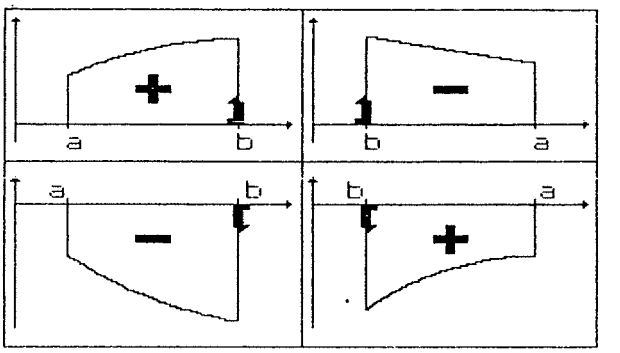


Dans l'exemple ci-dessous, on avait espéré trouver, par la méthode de Newton, une valeur approchée de a. Le point de départ choisi est

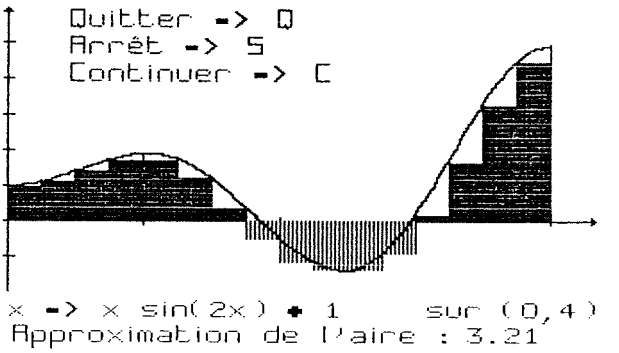
indiqué par une croix. En fait la convergence aura lieu vers la racine b.



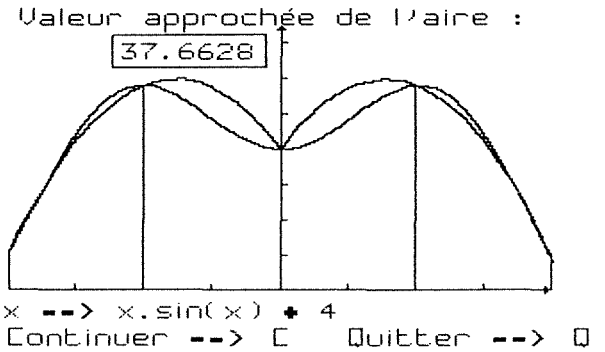
Quelques images de la disquette 'l'intégrale définie'.
Le signe attribué à l'aire est lié au sens de rotation du mobile autour de la surface. Celui-ci se déplace toujours de a vers b.



Une approximation de l'aire par la somme d'aires de rectangles.



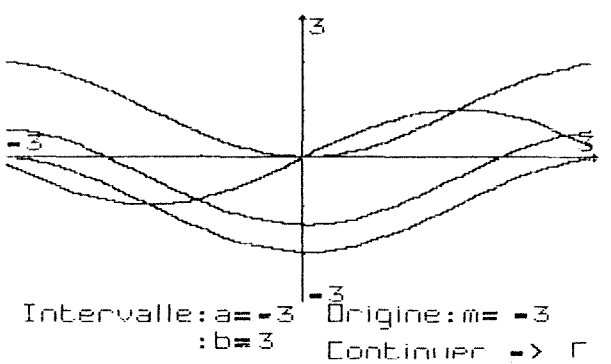
Une illustration de la méthode de Simpson pour la recherche de valeurs approchées de l'intégrale.



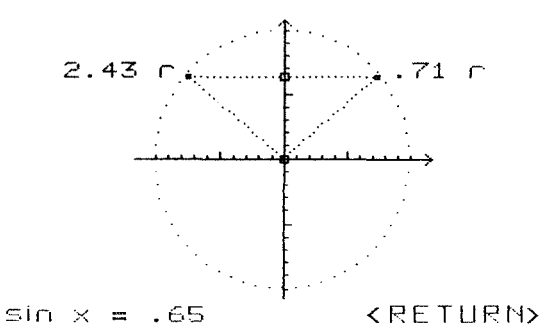
Une représentation de la fonction sinus et de fonctions intégrales:

$$t \to \int_a^t \sin x \, dx$$

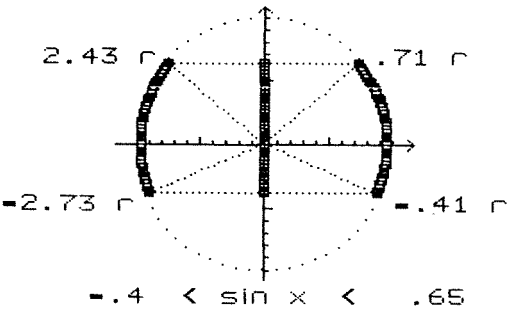
obtenues en prenant pour a les valeurs 0; -3; 2.



Ensemble de solution d'une équation obtenu par la disquette 'trigonométrie'



et d'un système d'inéquations.



Ces quelques images ne vous donnent qu'une faible idée du déroulement des programmes. Il y manque la variable temporelle qui permet de les voir se construire.

Signalons, pour terminer, que les disquettes sont vendues aux professeurs accompagnées d'un livret expliquant toutes les possibilités de celle-ci et lui donnant quelques idées sur son emploi à un prix plus que raisonnable. Ce prix couvre le prix des disquettes et les frais d'impression du livret. Il est fixé à 350 FB + frais de port.
Si vous désirez vous procurer l'une ou l'autre disquette, il vous est possible de le faire en écrivant au SEDIMA, chemin du cyclotron 2, 1348 Louvain-la-Neuve.

Les frais bancaires s'avérant très élevé (minimum 150F), nous vous demandons, lors d'un payement de le faire par mandat postal international ou, si vous désirez faire un chèque de majorer la somme de 150 FB.

Jean-Paul Houben/Jacqueline Vanhamme
SEDIMA
Louvain-la-Neuve/Belgique.

CRISTINA ZAMBUJO

LA MATHEMATIQUE DANS LA VOIE DE L'INTEGRATION A L'AGE DES ORDINATEURS

'Si tout le monde a droit à l'éducation, alors un système qui provoque des échecs est lui-même un échec.'

N.H.Birmebawn

LE grand nombre d'échecs scolaires dans les écoles portugaises est lié à une démotivation des élèves associée à divers facteurs politiques et sociaux. Il provoque un découragement des professeurs. De plus, le divorce entre l'école et la vie, dû aux défis des nouvelles technologies entraîne aussi de nouvelles tensions.

QUE FAIRE?

Certains enseignants refusent le système actuel qui se veut achever, non dialectique. Ils recherchent une méthode de travail où la recherche se fait conjointement avec les élèves, ce qui sera pour tous une nouvelle motivation. Un groupe de professeurs de l'école des Olivais (ESO) a entrepris un travail qui va dans ce sens. Leurs stratégies apparemment parallèles sont en fait complémentaires.

1. Création du Club d'Interdisciplinarité.
2. Expérimentation de cours interdisciplinaires dans les classes.
3. Projet de Recherche Pédagogique dans l'enseignement secondaire pour un nouveau programme.

Pourquoi l'accent sur l'Interdisciplinarité et non sur l'Informatique à l'âge des ordinateurs?

L'informatique influence la structure de toutes les sciences. Elle influence aussi la façon de penser et se veut une science propre qui a sa place à côté des autres disciplines. Cela doit être pris en considération dans l'organisation d'une ecole qui se veut insérer dans le monde réel. Donc, pour nous, le plus important, c'est l'organisation de l'enseignement des sciences.

L'interdisciplinarité est une stratégie qui provoque l'échange de l'information et incite à formuler des objectifs communs.

La trilogie Mathématique - Informatique - Interdisciplinarité s'impose plus que jamais; la pédagogie active accompagnée d'une bonne utilisation des ordinateurs dans un nouvel âge.

Pourquoi le Projet de Recherche Pédagogique dans l'enseignement secondaire pour un nouveau programme?

Puisque les finalités changent, c'est l'heure de penser sérieusement à un changement de programme. On doit alors choisir les buts selon ces finalités et créer des stratégies pour atteindre ces buts.

Mais:

> 'L'ordinateur à lui seul, ne permettra pas de résoudre les problèmes de l'enseignement. Il n'est qu'un moyen pour un bon ou un mauvais enseignement.'
> Lemme de l'ESO

MOYENS UTILISES POUR LE DEVELOPPEMENT DU TRAVAIL

Durant l'année 84/85 on a organisé un travail en collaboration avec des professeurs de Mathématique, Physique, Biologie, de quelques stagiaires des même branches et des professeurs d'Art, d'Economie. On a eu quelques contacts avec l'université, le ministère de l'Education, les services communaux et l'Industrie.

Les expériences interdisciplinaires se sont déroulées dans deux classes de neuvième (14-16 ans):

— un travail sur la chute des corps a vu une collaboration des professeurs de math et de physique;
— un travail d'optique s'est fait avec, en plus, des professeurs de biologie.

On a apprecié les résultats obtenus par comparaison avec les classes des années antérieures à travers les réalisations des élèves, les discussions, les observations des professeurs et des enquêtes. Le travail s'est poursuivi dans le cadre normal des cours.

On a utilisé aussi le Club d'Interdisciplinarité constitué de trois section (Recherche, Sport et Arts). Le groupe d'Informatique inséré dans la section de Recherche était constitué par des élèves de la 7ème à la 9ème et par quelques professeurs. Il possédait deux micros ZX spectrum 48K et TS 1500, deux écrans et un enregistreur.

On a fait des travaux de recherche sur quelques routines, comme par exemple celles des couleurs (en plus des huit déjà programmées). Des programmes graphiques (cartes géographiques, dessins, ...) ont été élaborés, ainsi que des jeux et des thèmes musicaux. On a fait encore des programmes pour les Maths (équations afines, équations du deuxième degré, graphiques de fonctions, etc. Pour les cours on a aussi testé des programmes tutoriels disponibles sur le marché. Les professeurs ont aussi programmé des simulations d'expériences. On a fait des cours pour les débutants en BASIC et on a fait des visites d'étude dans quelques centres d'Informatique.

La plupart de ces travaux ont été placés en heures 'extra-curriculum', 2h/3h par semaine.

Au bout de l'année ce groupe de professeurs et d'élèves a réalisé la 'semaine de l'Informatique INFOR 1' sur le thème général 'ce qu'on peut faire avec l'ordinateur'.

Le principe suivi par toutes ces activités fut:

> 'L'informatique peut devenir positive, négative, facile ou difficile mais jamais ignorée.'

Le Club d'Informatique fut généralement un prolongement de l'activité des élèves en classe mais aussi un lieu d'information et d'échange. Dans

ce laboratoire on a préparé quelques expériences à faire dans le cadre des cours.

DESCRIPTION DES COURS INTERDISCIPLINAIRES

Mécanique - cinématique et équation du 2ème degré
L'étude de l'équation quadratique (2ème degrè) en 9ème, a été faite au cours d'un travail interdisciplinaire avec la Physique à partir des mouvements des corps (rectiligne uniforme et uniformément accéléré).

Les élèves ont obtenu des résultats expérimentaux et ils ont fait des graphiques de ces résultats. Ils les ont analysés. Ils ont résolu des problèmes qui comportaient des concepts de cinématique. Ils ont aussi fait des graphiques pour l'équation du 2ème degré. On a prolongé le travail par la résolution d'inéquations et la généralisation des conditions.

En considérant encore que l'enseignement assisté par l'ordinateur comporte diverses activités pédagogiques on s'est servi de l'ordinateur comme instrument auxillaire. Nous avons pu apprécier l'efficacité de quelques utilisations de l'informatique pour cet enseignement. En particulier, nous avons:

— Des programmes faits par les élèves:
résolution de l'équation du 1er degré;
résolution de l'équation du 2ème degré;
graphiques pour les fonctions.
— Des programmes faits par les professeurs:
méthodes numériques en algèbre (approximations successives)
— Du software tutoriel acheté dans le commerce:
des graphiques de fonctions.
— Une simulation faite par une équipe de professeurs:
mouvements d'un projectile.

Le travail s'est développé de la façon suivante:

1. Des activités expérimentales (plan incliné et chute des corps) pour:
   — l'équation afine $y = ax$
   — l'équation du 2ème degré $y = ax^2$
   — l'équation du 2ème degré $y = ax^2 + b$
2. Une simulation à l'ordinateur pour:
   — l'équation du 2ème degrè $y = ax^2 + bx$
3. Un problème en forme de poésie pour:
   — l'équation complète $y = ax^2 + bx + c$
4. Présentation d'un programme tutoriel pour les graphiques de fonctions.
5. Des travaux au club.
   Dans cette période quelques élèves les plus motivés pour l'ordinateur ont travaillé au club en faisant des programmes pour l'équation afine, l'équation du 2ème degré, des graphiques et la recherche des zéros par la méthode des approximations successives.

Optique - lentilles et homothéties, lames à faces parallèles et trigonométrie
L'étude de la vue et de l'oeil, en particulier, nous a conduit à envisager deux questions fondamentales:

— Quel est le lien entre la formation des images par les lentilles convergentes et les homothéties?
— Quel est le lien entre la réfraction et la trigonométrie?

Nous avons alors étudié la théorie de la propagation rectiline de la lumière (la loi des lentilles, le grossissement et la loi de la réfraction). On a utilisé la formation des images par les lentilles convergentes pour arriver à plusieurs sortes d'homothéties. On a identifié la valeur absolue du rapport d'homothétie avec le grossissement. A l'aide de projections de diapositives on est arrivé aux similitudes. On a utilisé les lames à faces parallèles et la loi de Descartes pour arriver aux notions trigonométriques de $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{cotg}\alpha$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, circonférence trigonométrique.

Les élèves ont fait des mesures, les ont analysées et ils ont fait des constructions géométriques des situations. A l'ordinateur on a utilisé un soft tutoriel sur les homothéties et quelques élèves ont fait une simulation du grossissement des caractères, des graphismes et une recherche sur le tracé de cartes géographiques.

CONCLUSIONS SUR L'UTILISATION DE L'ORDINATEUR

1. Du point de vue mathématique
   La programmation faite par l'élève implique une nouvelle compréhension de certains concepts.
   Illustrons cette idée par quelques exemples:

   Graphisme
   Des problèmes liés à l'affichage de dessins nécéssitent l'utilisation des notions mathématiques comme:
   échelles, proportionalité, similitudes, fonctions, variables, repères, points, coordonnées, matrices.
   Note: L'agrandissement et les cartes géographiques sont des exemples.

   Résolutions d'équations et graphiques de fonctions
   Impliquent des notions mathématiques comme:
   variable, fonction, coordonnées, repères, changement de repères, échelles.
   Note: Dans le cas du travail de mécanique les élèves ont davantage senti le besoin de faire des organigrammes. Pour les graphiques ils ont eu besoin du changement d'origine à cause de l'axe y qui se trouve dans le sens contraire sur l'écran du sens habituel.
   Ils sont arrivés au cas général $y - y_0 = f(x - x_0)$. Pour visualiser un tracé de courbe les élèves ont utilisé d'abord une échelle de 1 et après, en voyant les résultats obtenus, ils ont eu besoin de la modifier jusqu'à obtenir une courbe bien adapté à la visualisation.

   La programmation implique la réévaluation de l'importance de certaines notions mathématiques.
   On a observé pendant cette année que les élèves de 9ème ont eu

besoin plutôt des notions de:
- *trigonométrie* pour représenter des demi-cercles;
- *statistique* pour quelques programmes utilitaires;
- *analyse combinatoire* et de tableaux à double entrée pour programmer une routine des couleurs à partir des huits couleurs fondamentales.

La programmation implique la révision des méthodes de résolution des problèmes traditionnels
Les élèves ont utilisé une méthode d'approximations numériques pour trouver les zéros de l'équation du 2ème degré.

L'informatique favorise l'unité des mathématiques
Par exemple, faire le graphique sur l'écran d'un ordinateur, fait appel à des notions mathématiques très diverses, traditionnellement incluses dans des domaines distincts de la mathématique.

2. Du point de vue des attitudes des élèves face à l'ordinateur
La construction d'un programme par les élèves peut avoir une grande valeur pédagogique, notamment pour l'acquisition de notions mathématiques comme nous venons de le voir.

L'aspect ludique de la machine renforce la motivation.

Les élèves, d'une façon générale, ont rejeté les activités qui nécessitaient des organigrammes, mais ils en ont senti le besoin pour résoudre certains problèmes plus complexes.

Le pourcentage de garçons motivés par l'utilisation de l'ordinateur est supérieur à celui des filles.

La passion engendrée par l'utilisation des ordinateurs au début de l'expérience, s'est fortement atténuée au fil du temps pour certains élèves.

L'utilisation de l'ordinateur dans l'enseignement nécessite de l'interdisciplinarité.
La simulation des phénomènes utilise des outils mathématiques et les modèles mathématiques sont très utilisés pour décrire les phénomènes de la vie réelle.

L'ordinateur développe la creativité, l'esprit de découverte et l'intuition.
De nouveaux besoins apparaissent; on a noté, par exemple, le besoin de faire un quadrillage pour dessiner.

L'ordinateur apporte une nouvelle organisation, une nouvelle discipline, une nouvelle bibliothèque, une nouvelle façon de penser.

L'ordinateur peut susciter l'esprit de coopération.
Le travail en groupes de deux, par exemple s'est révélé très productif.

L'ordinateur débloque quelques situations car il donne une nouvelle motivation.

L'ordinateur peut créer des blocages importants au niveau de son utilisation même. Les heures, parfois infructueuses passées sur la machine sont souvent des causes de découragement pour les débutants.

Actuellement les méthodes d'enseignement font encore fortement appel à la mémoire.
L'introduction de l'informatique est l'occasion de mieux préparer les élèves à trouver et traîter l'information et à mieux exercer les processus déductifs et inductifs.
Aujourd'hui plus que jamais se fait sentir le besoin de collaboration entre les différentes branches du savoir et entre les différents niveaux d'enseignement. L'évolution de la technologie en est une des causes.

Qui aura accès aux secrets de l'informatique dans l'avenir? Comment sera partagée la connaissance dans ce domaine? Il faut aussi être attentif à la voie imposée par le marché, à l'obsession et aux excès.
On doit bien savoir où, quand et comment nous devrons utiliser la machine.

Heraclito, siècle VI A.C. disait:

> Nous descendons et nous ne descendons pas dans le même fleuve, nous sommes et ne sommes pas.
>
> 3ème édition Vorsokratiker de H.Diels

Tout se transforme:

> A seara deve plantar-se, o trigo poderá ser colhido, a tempestade poderá chegar ... Conclusão: é preciso semear o trigo.

(On doit semer le champ, la blé pourra être moissonné, la tempête pourrait venir ... Conclusion: On doit semer, quand même, la blé...)

Ce que l'ordinateur pourra donner à l'enseignement de la mathématique n'est qu'annoncé.
La mathématique est en mouvement constant *dans la voie de l'intégration à l'âge des ordinateurs.*

Cristina Zambujo
Ecole Secondaire des Olivais
Lisbonne/Portugal.

SIXTO ROMERO SANCHEZ/FULGENCIO PRAT HURTADO

INTERRELATION ENTRE LES SCIENCES HUMAINES, LES MATHEMATIQUES ET L'INFORMATIQUE UNE APPLICATION A L'ARCHEOLOGIE

DEPUIS l'apparition du 'microprocesseur' il y a 13 ans les prophéties sur l'utilisation massive et généralisée des toutes les possibilités informatiques dans la société actuelle et encore davantage dans le futur proche n'ont fait qu'augmenter. Les prix de l'hardware, chaque fois plus bas, permettent aujourd'hui d'apercevoir déjà ce que sera une utilisation à la quelle nous ne pourrons pas échapper dans notre activité professionelle. On ne peut pas oublier qu'aux EE.UU. a peu près un 40% de la population active travaille dans le traitement de l'information dans son sens le plus large. Donc, on peut en concluire, si les prévisions se confirment que l'informatique aura un grand retentissement, qui a commencé déjà. Les enseignants, moins que personne, ne peuvent fermer les yeux à cette réalité évidente, et toute la communauté éducative doit y participer.

En effet, les pays dits développés, en prévoyance des conséquences possibles d'introduction des moyens informatiques dans le champ de l'investigation et de l'éducation ont réalisé des études de prospection qui ont abouti à des plans nationaux dans le but d'incorporer l'enseignement et l'utilisation de l'informatique dans le système éducatif propre, dans l'espoir de familiariser les jeunes générations avec des éléments qu'ils devont utiliser lors de leur incorporation à la vie active.

En Espagne l'intérêt porté à l'informatique et les implications éducatives a surgit de la basse, comme l'ont démontré les 'I Jornadas Nacionales sobre Informatica en la Ensenanza' qu'ont en lieu à Barbastro (HUESCA) l'année dernière - 1984, avec notre participation.

Une ensemble de professeurs, et pas petit, de tous les niveaux éducatifs a pris conscience, dans une perspective de conscience professionelle et compromis social, de nouvelles possibilités que l'usage des ordinateurs semble offrir pour son incorporation dans le procès enseignement-investigation-apprentissage. Travaillant en groupe, plus ou moins structurés, ils ont fait des progrès dans l'analyse et description de technologies de l'emploi, à peine ébauché, des moyens informatiques dans la classe. Semble claire la perception générale du fait l'ordinateur n'est pas une machine de plus, mais quoi imprime un cadet à nos manières de penser, d'agir, de percevoir notre relation avec autrui.

L'expérience accumulée le long de cinq dernières années dans notre 'Escuela Universitaria Politecnica' montre que le travail en groupes y l'interdisciplinarité en les sciences différentes, doit nous conduire non à une vision parcellaire de l'investigation et l'enseignement mais à une complémentaire des idées qui en conséquence peuvent donner les meilleurs resultats. Cette idée de basse dirige et anime notre groupe de

travail: un géologe, un mathématicien et deux ingénieurs de Mines, en est la constatation, tous travaillent ensemble dans cette tâche commune.

Maintenant, et suivant une des lignes de travail, sous-thème de ce stage: Mathématique et enseignement de l'informatique, on va montrer très brièvement ce rôle de la Géophysique, la Mathématique et l'Informatique appliquées à l'Archéologie pour montrer le besoin de l'Interdisciplinarité.

Un problème dans n'importe quelles fouilles archéologiques est la pénurie de moyens humains et économiques que possibilitent découverte totale et même partielle des gisements étudiés. D'autre part faire une fouille aveuglement produit indéfectiblement la destruction des éléments importants dont quelques uns irrecupérables. Pour éviter de tels degats dans des fouilles archéologiques et pour en assurer leur conservation quatre sciences se sont résumés: Géophysique, Mathématique, Informatique et Archéologie.

De leur union surgit une nouvelle branche de la science appliqué: l'Archéophysique. Cette nouvelle science va nous permettre une vision globale non destructive des éléments du gisement qui va permettre dans le futur une planification pour faire aboutir les fouilles. En conséquence, nous sommes en conditions d'affirmer qu'une collaboration interdisciplinaire est en train de naître qui peut faire surgir un changement dans la mentalité de l'archéologue. On peut penser donc, que l'archéologie entre dans une nouvelle étape suite à la coopération des sciences humaines, les Mathématiques et l'Informatique. Dans ce travail pluridisciplinaire le mathématicien doit étudier les problèmes que l'humanisme classique fait surgir et en trouver les solutions. En d'autres mots la Mathématique doit trouver les modèles mathématiques pour chaque situation concrète de la realité.

D'autre part, avec l'application des techniques d'informatisation, nous sommes en droit de penser qu'il sera possible, dans un futur pas lointain, de créer une banque de données archéologique et archéophysique accessible à chaque chercheur. En conséquence avoir la possibilité de cataloguer les gisements enterrés avec tous les plans élaborés par des méthodes archéophysiques. Comme dans toute manifestation pluridisciplinaire dans celle à les trois, l'archéologue, le mathématicien et l'informaticien doivent participer des connaissances communes qui feront fructifier l'interprétation des résultats obtenus.

Le but de ce travail est de faire connaître les résultats d'une investigation que même si elle a été commencée en 1980, fruit de la collaboration avec l'Université de Tours (France) en la personne de Mr.A.Kermorvant, ce n'est réellement qu'il y a trois ans que les résultats sont satisfaisants, puisque c'est dans cette période quand la participation des élèves de 2ème et 3ème année d'Ingénierie a été importante. Ce qui a donné pied l'année dernière aux départements de Mathématique et Géologie de notre Ecole Universitaire pour faire ensemble un cours de deux heures de cette matière qu'on appelle Archéophysique.

Le prochain pas sera d'en faire une nouvelle matière dans le contexte

général de matière qu'on étudie dans notre école.

METHODOLOGIE EMPLOYEE

Après cette introduction et pour que les conclusions auxquelles on va aboutir après, dans le cadre du site archéologique de notre province dont la dénomination est TEJADA LA VIEJA, où nous avons mis au point les méthodes d'information et interprétation, on en recours a deux phases de travail qui conforment le caractère d'interdisciplinarité nommé ci dessus:

— *Travail de Champ*, où la géophysique est la science utilisée.
— *Travail de Laboratoire*, avec recours de la mathématique et l'informatique.

Notre attention va se tourner presque exclusivement à la 2ème phase pour raisons évidents.

Travail de champ

Les mesures de champ magnétique terrestre ou résistivité électrique de la terre faites sous le sol permettent de localiser les structures cachées. Les mesures, traitées selon des normes spécifiques, après être cartographiées, font apparaître sur un plan des resources du sous-sol.

Les techniques de prospection géophysiques dérivées des méthodes d'exploration du sous-sol mises au point par les besoins de la recherche pétrolière et minière se sont intégrées peu à peu dans les programmes de recherche archéophysique. En général, les formations archéologiques ont des propriétés physiques différentes du milieu ou elles se trouvent. Les principes de détection reposent en conséquence sur la recherche des différences ou anomalies. Une anomalie était caractérisée par une série de mesures dont l'amplitude peut différer de la normale, née celle-à des formations naturelles. Les techniques ont comme fondement en deux grands principes:

— *Actifs* en introduisant dans le sol une perturbation pour mesurer l'effet produit (prospection électrique, sismique, électromagnétique).
— *Passifs*, fondé sur le fait de mesurer une force physique existente (prospection magnétique, gravimetrique ...).

Pendant ce dernier décennie, de nombreux exemples de développement de techniques de mesure, du traitement de l'information et d'application, ont été réalisées.

L'expérience accumulée par plusieurs laboratoires et instituts, tels que la Fondation Lerici de Rome, le Laboratoire de l'Investigation de l'Archéologie (Oxford), le Centre de Recherche Géophysique de Garchy (France); et les nombreux travaux des professeurs A.Kermorvant, P.Delaune et A.Hesse, parmi d'autres, dans le champ de la Géophysique Appliquée, montre que toutes les méthodes ne sont pas valables. Les plus appropriées sont la méthode électrique et la méthode magnétique. Chacune d'elles a son propre champ d'application dependant des caractéristiques du gisement.

A Tejada la Vieja où nous avons réalisé les investigations, on a utilisé la méthode électrique, mais on peut faire remarquer que les

précipitations comme éléments climatiques, limitent l'utilisation possible de cette méthode, qui est très pertinente quand le gisement à prospecter a l'humidité suffissante pour que le courant injecté à travers les électrodes circule dans le sous-sol.

Parmi les méthodes électrique nous avons choisi la méthode électrique du resistivités, composées de sondages électriques avec des dispositifs WENNER (fig.1).

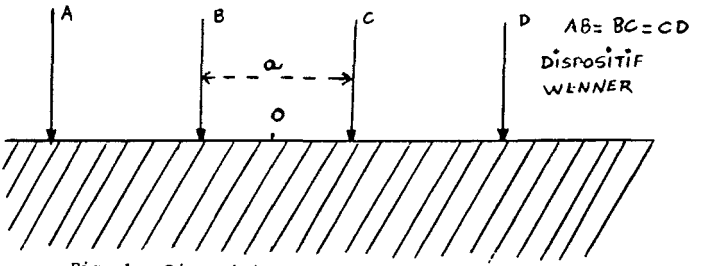


Fig. 1.- Dispositif WENNER avec a=0,5 m.

fig.1 dispositif WENNER avec a = 0.5m

L'équipement matériel employé dans la prise de mesures était composé par:

— une sonde avec quatre électrodes (fig.2);
— une résistivimètre.

fig.2 sonde avec quatre électrodes

En deplaçant la sonde le long des profils parallèles groupes dans des cadrans de largeur constante - un mètre est la largeur utilisée - on

obtient des mesures de résistivité. Dans chaque cadran on obtient un grand nombre de mesures. C'est clair qu'avec la distribution en modules que nous avons fait la densité est grande, mais elle est la pertinente dans les gisements archéologiques pour l'obtention de la forme la plus faible possible des anomalies qu'ils originent. L'étendue étudiée jusqu'à ce moment c'est d'une hectare, ayant obtenu plus de 11025 mesures de résistivité.

Sauf les difficultés du manque d'humidité sur le terrain et l'hétérogenéité du contraste milieu-structure on peut affirmer que les résultats sont bons, étant donnée la méthode employée.

Travail de laboratoire

Le travail de laboratoire dont l'objectif est la réalisation et obtention de la cartographie automatique définitive, représente une étape très importante. C'est un travail de cabinet où l'on fait le traitement définitif des données obtenus à l'étape antérieure, avec la participation des élèves de la dernière année qu'ont une connaissance suffisante de l'informatique.

La grande quantité de l'information à traiter, le nombre des calculs plus ou moins complexes à faire et la cartographie des résultats demandent un traitement informatique approfond, où nous utilisons la microinformatique. Mais quand on doit employer la microinformatique, l'élection de la méthode graphique de représentation va dépendre de trois paramètres:

— Space disponible de memoire.
— Temps de calcul.
— Précision de résultats.

Nous croyons que ces trois paramètres doivent être présents tout au long de nos études si on veut adapter nos programmes aux besoins qui surgissent.

Représenter sur un plan les variables d'un phénomène avec l'aide d'une configuration spécifique c'est dans le but de faciliter l'interprétation des résultats obtenus.

C'est bien évident que cette cartographie n'apportera plus d'informations nouvelles que celles contenues dans les informations surgies de la prospection, mais elle va permettre de différencier rapidement les effets produits:

— par les formations archéologiques;
— par les formations géologiques;
— par d'autres causes (comme la microtopographie).

La cartographie la plus appropriée est celle qui permet de percevoir à l'oeil nu le plus clairement possible une image à travers laquelle on peut esquisser une interprétation, sans que cela demande obligatoirement une spécialisation poussée dans le champ objet de la recherche.

Trois sont les méthodes de représentation qu'on peut utiliser:

Les configurations avec des effets tridimensionels

Cette méthode de représentation, assez spectaculaire, n'offre pas la possibilité d'une exploration rapide. Les moyens mise en oeuvre, dans la

programmation et des matériels, sont très lourds. Mais cette méthode permet l'apport d'un complément d'information à ne pas mépriser.

Les isolignes
Méthode utilisée fondamentalement dans la topographie, météorologie, ... etc. Cette technique consiste à unir avec des lignes des points de phénomènes à valeur égale. A cause des variables et de la complexité des résultats obtenus sur certaines gisements archéologiques, cette méthode a une tendence à signaler les irrégularités minimes dans la configuration générale.

Les méthodes symboliques
Technique actuellement employé par des chercheurs renommés comme Linington, Mukhedhar, Nicolas, Scollar, Kermorvant, ... et qui a déplacé définitivement la technique des isolignes. Cette méthode peut être employé de deux manières:

a. En utilisant des symboles particuliers où la géometrie ou les nuances ou gradations caractérisent des ensembles numériques définis à priori. Compte tenu de la linéalité des phénomènes à mettre en valeur, ces ensembles numériques ou niveaux sont généralement égaux. La qualité et la puissance de définition de cette représentation dépendant essentiellement du choix des caractères et de la combinaison de ceux-là entre eux. Une bonne adaptation de ces symboles graphiques permet une cartographie en 'ton gris' ou en nuance des tons dans le cas de l'utilisation de plusieurs couleurs.
b. L'utilisation du point comme seul caractère, ou la densité par unité de surface change proportionnellement à l'ampleur du phénomène à visualiser, nous emmène à l'obtention de *l'évolution de la tonalité* comme le deuxième procédé.
Le procédé pour l'obtention de la cartographie est relativement simple. Enregistrée toute l'information en bande magnétique, l'ordinateur à travers une série de tests fait la classification des valeurs numériques par niveaux et les cartographies en fonction des paramètres préfixés:
— Le niveau inférieur.
— L'increment ou niveau de la coupe.
On a fait la programmation en Basic, et dans tout le procès informatique on a maintenu le critère suivant: le stockage en bande magnétique est disposé sous forme matriciele. Cette particularité nous permet de représenter des surfaces prospectées où la géometrie peut varier. Cela devient essentiel dans beaucoup de cas où l'implantation sur le terrain d'un réseau de mesures reguliers (carrée ou rectangulaire) est impossible.
A l'objet de fixer les idées sur traitement du procès, il faut dire que celui-là se fait avec deux unités micro-informatique:
— La première est mobile et peut se déplacer. Avec celui-là on acquérit les données et on a un control de ceux-là. Cette première unité est composé d'un microordinateur de 32 K de mémoire de basse et une imprimante avec laquelle on peut obtenir une première cartographie

de la prospection réalisée (fig.3).

fig.3 unité microinformatique

— Cette cartographie obtenue, on fait une étude ultérieure dans le laboratoire pour le traitement définitif des résultats de la prospection.

INTERPRETATION

Après la phase de traitement informatique et même si on développe et améliore les techniques de prospection archéologique, surgit un problème fondamental qui n'est pas tout a fait résolu: *c'est l'interprétation des résultats*.

Parfois c'est difficile d'établir les correlations entre les résultats de prospection et les structures correspondentes sur le terrain. Une prospection donnée arrivera à son but essentiel si elle permet l'interprétation de toutes les anomalies qu'elle détecte. En géophysique traditionelle, l'interprétation pose des problèmes d'estimation quantitative (comparaison des anomalies obtenues avec les schémas théoriques), tandis que les critères d'interprétation archéologiques sont essentiellement qualitatives. En fait il s'agit d'une estimation à partir de la représentation sur un plan d'une surface prospectée, qui sont les structures probables, causes des anomalies. De même que dans la photographie aérienne, l'interprétation est fondée sur la reconnaissance des formes géometriques (circulaires, rectilignes ...). Plusieurs cartes, avec plusieurs niveaux de coupe, vont permettre de guider la valeur et la qualité de l'interprétation (fig.4).

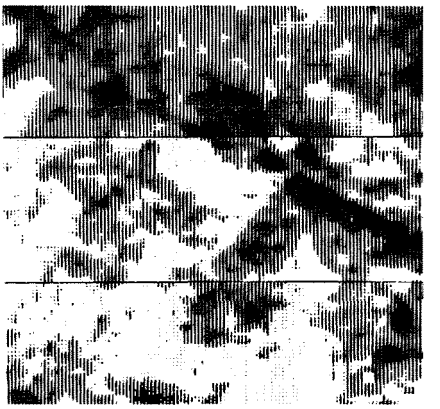


fig.4 cartographie automatique

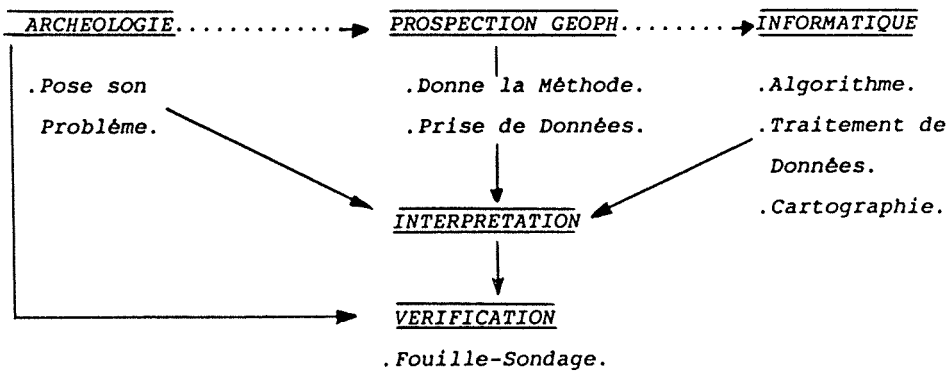
Nous pensons - et c'est notre ligne actuelle de travail, qu'un bon interprète doit avoir des connaissances minimales d'archéologie. Une connaissance des informations des fouilles et tout ce qui fait la mentalité et le niveau d'une époque est nécessaire de la partie de toutes les personnes qui travaillent interdisciplinairement.

Chaque site archéologique est un cas particulier, tant par le voisinage comme par l'état de conservation et le type des vestiges enterrés. En resumé, l'application des règles précises d'interprétation est impossible. Actuellement, malgré les essais sur des modèles expérimentales, un certain empirisme règne dans l'interprétation. Il est, d'autre part, nécessaire d'essayer la zône prospectée dans le but de cerner totalement le site.

Aboutir à des conclusions claires ce n'est pas une tâche facile ni un travail uniquement du mathématicien ni du géophysicien, sinon que l'intervention entre autres de la photographie aérienne, en plus de l'information fournie par le géologue, l'historien, l'archéologue ... etc., constituent une communion des idées, une information complémentaire si importante comme pour obtenir d'une façon approximative les plans auquels ont à aboutir par des méthodes informatiques justifient ainsi d'une manière définitive *la pluridisciplinarité entre les sciences.*

Dans cet esprit nous travaillons actuellement et essayant au même temps d'imprimer dans nos élèves le besoin de travailler en groupe.

Comme resumé, on veut refléter notre travail interdisciplinair dans ce schéma:



Sixto Romero Sanchez
Fulgencio Prat Hurtado
Escuela Universitaria Politècnica de la Rabida
Palos de la Frontera
Huelva/Espagne.

REFERENCES

[1] Bertin, J.: *Le traitement graphique de l'information* (1969).
[2] Delaune, P.: *La prospection archéologique* (1977).
[3] Hesse, A.: *Prospections géophysiques à faible profondeur. Applications à l'archéologie.* (1966).
[4] Kermorvant, A.: *Géophysique appliquée à l'archéologie* (1975).
[5] Kermorvant, A., J.Mason: *Des Microordinateurs pour la prospection archéologie* (1979).
[6] Joao, M., S.Romero: *Pour une renovation didactique de la Mathématique* (1984).
[7] Romero, S.: *Microinformatique appliquée à l'Archéologie* (1984).
[8] Schiller, H.: *Le Pouvoir Informatique* (1983).
[9] Nicolas, R.L.: *Cartographie automatique. Application au calcul des pentes et aux coupes topographiques* (1974).
[10] Correas, J.M.: *Des Implications socials et éducatives de l'Informatique* (1984).
[11] Santalo, L.A.: *L'Education Mathématique, Aujourd'hui* (1977).
[12] Galindo, F.: *De l'Informatique et ses conséquences* (1984).

PETER BENDER

WILL LOGO ENVIRONMENTS REALLY IMPROVE EDUCATION?

IN the last few years there have been a lot of books, papers and talks dealing with computers in education, often with a poor, if any, pedagogical background, but nevertheless recommending an extensive use of computers in classrooms. In order to understand this phenomenon better, one has to take into account some possible vital interests (which are, in part, not objectionable from the first) promoting this movement:

a. The educational system is a considerable market for producers and sellers of computer hardware, software, and accessories (especially books).
b. It is advantageous for the military, government administrations, and the business world, when pupils, as well as their parents, get accustomed to the computer (and eventually computer networks).
c. There are groups in the computer science community who want their field to be rounded off by an appropriate school subject.
d. Research on AI (Artificial Intelligence) has an imperialistic behaviour (Turkle 1984) towards the humanities.
e. A lot of educators who have a microcomputer of their own joyfully make their hobby a job.

Seymour Papert's book *Mindstorms* (1980) is one more praise of the computer's boon for education, but it is outstanding in several respects: It has got a pedagogical basis; its claims for changes as well as its promises are extremely far reaching; its target group are, at first, young children (from the age of 4). At a first glance, the arguments (involving a wide range of humane sciences) appear conclusive; there are keen observations about the contemporary (American) school system, a legible outline of Minsky's and Papert's theory of cognition (well appreciated e.g. by Jahnke (Ed. Stud. 1983, 87), and Otte (foreword of German hardcover edition 1984)), some good rhetoric etc. The phrase 'Logo philosophy' (named after the programming language 'Logo' which is the carrier of the educational revolution as envisaged by Papert) was invented, and there are a lot of people who believe in it.

It started infiltrating American elementary schools, but although it has been criticized ever since it came up, it was apparently not taken seriously enough by professional educators (as well as the whole challenge of computers to education), and before 1984 there existed practically no literature on that matter containing comprehensive criticism. Then there was a whole issue of Teachers College Record devoted to the subject with a sensible introduction by Sloan (T.C.R. 1984, 539), and several of the articles treating the 'Logo philosophy' explicitly.

In Germany we also had some papers: Müller (Beitr.z.Math.Unt. 1984, 251), von Hentig 1984, Bauersfeld (Inst.f.Did.Math. Occ.Pap. 56, 1984),

Köhler (Math.Nat.Unt. 1985, 1, 65), and again some particularly on *Mindstorms*.

Dreyfus/Dreyfus (T.C.R. 1984, 578, and forthcoming book) question the effectiveness of contemporary AI with respect to the computer's proposed role as a tutor and the sufficiency of that kind of merely analytical thinking that the child is supposed to acquire by using the computer as a tutee. They query Papert's assertion that programming with Logo would enable the child to choose, according to a given situation, the appropriate style of thinking (also: Brown (Math.Teaching 107 (1984), 43), Davy (T.C.R. 1984, 549)). Bussmann/Heymann (Zentr.bl.Did.Math. 1985, 76) try to reconstruct the educational theory contained in *Mindstorm's* find some inconsistencies, and draw conclusions similar to those outlined in this paper which is based on a analysis of Papert's methodology and curricular implications (cf. also Davy).

I believe focussing on these topics to be useful, as this provides a possible basis for evaluating a lot of arguments which can be found all over the literature mentioned in the first paragraph. One of the favourite patterns is to substantiate the need for a certain positive view of the computer (fitting the following conclusions) by comparing it with some wellknown technical device such as the automobile, then to deduce that this requires proper activities in schools (like programming), and at the same time to ignore all the shortcomings connected with that device, because inferences from the past cannot be drawn, as the computer is an absolute novelty.

PIAGETIAN LEARNING IN LOGO ENVIRONMENTS

Papert designs the scenario of a 'Piagetian learning in Logo Environments', organized like an idealized version of Brazilian samba schools, at least like he perceives them, resuming - without mentioning it - old traditions in pedagogy, e.g. the reformatory ideas of Gaudig, Dewey, and many others since then, and wellknown principles of modern mathematics education, such as learning procedural mathematics in projects by action and discovery. According to Papert, institutional, social, psychological, cognitive, and other obstacles to this vision belong to the pre-computer culture and will be removed by basing future learning on the computer, strictly speaking on Logo, resp. on its subsystem 'turtle geometry', or on systems still to be developed. His goal is a 'new learning' (as in the subtitle of the German edition) promoting children's insights into mathematics, their problem solving ability, and the reflection of their own cognitive processes. This all shall be achieved by applying or experiencing certain techniques (like debugging, interactivity, modularity, recursion) when programming with Logo and transferring them into problem solving strategies for other domains, in particular for 'epistemological' activities, which, finally, shall bridge the gap between the sciences and the humanities.

Papert underpins the attainability of this ideal by essayist reports about some ten children, all with intense learning or motivational

defects, which were all cured by a several months stay in 'Logo environments', which means that afterwards most of them liked mathematics. As can be found in a lot of papers on educational research, Papert, too, disregards the influence of variables like 'expenditure of time and means', 'degree of attention to each child', 'character of innovation', 'disposition of teachers', 'selection of the sample', 'suitability of the content' on his 'findings', and contrasts his ideas with (a miserable version of) everyday mathematics education (in American schools).

Furthermore, 'Piagetian learning in Logo Environments' is, on principle, connected closer with conventional education than with learning in natural cultural environments, as there is still a system established for the purpose of teaching and there are didactical goals imposed on the pupils. Still Papert talks about the vanishing of schools (in a way similar to Illich 1970) - fully ignoring the dependence of the educational system(s) on economical, social and political conditions. (He does not explain how 'Logo environments' should make them change properly; some speculation about an idyllic computerized future society can be found in Haefner 1982.)

Neither does Papert try to justify his goal of turning children into 'epistemologists' (he even welcomes an accelerated loss of childhood possibly coming along with the 'epistemologist' activity), nor does he question its attainability. He seems not to be aware of the slight but essential difference between thinking about some mathematical content (learning mode) and thinking about this content ('epistemologist' mode). While, for example, in a typical multi-stage process of concept formation there is on each stage always only one single reflection of the stage just left behind, the 'epistemologist' mode always involves a two-fold reflection, hence is much more demanding intellectually. What is more: according to Papert, the two modes (which experienced educators would call incompatible; see Brown) shall be operated in simultaneously. And, it is young children with little practice in learning and reasoning who shall do so.

They all shall learn mathematics (cf. also Papert (Int.J.Math.Educ. 1972, 249)). As a mathematician Papert is not bothered by such problems as legitimation or genuine applications (for some contrast see Fischer (J.Math.Did. 1984, 51)), but pleads for 'turtle geometry', since it fits Logo and is just another mathematical theory like 'pencil and paper geometry' (whose power he heavily underestimates, as Jahnke points out). 'Turtle geometry' is plane geometry with line segments, and on a higher level it can be interpreted as intrinsic differential geometry (see Abelson/diSessa 1981). As such it is not suitable for the vast majority of school children, since it involves the omission of nearly the whole field of experiences in elementary geometry, connected with the practical use of geometric forms in real world, which can and should be made in conventional geometry courses (cf. Bender (B.z.M. 1983, 8)).

For doing geometry in the long run, children have to take a standpoint at a distance, and for that the body syntonicity of the turtle

(which the original robot turtle may have had literally, but which the screen turtle has only in a desensualized manner) is rather hindering. E.g., in 'turtle geometry' the circle is defined as the fuzzy image of a sequence of line segments, related to the transitory track of a person walking in a circle (where from has that person got the idea of a circle?) instead of to a wheel, for instance. Questions already very simple (is the circle a closed curve? has it a center? what is a center? how to construct a triangle? how does a real geometric form satisfy its purpose? etc.) require the local point of view to be given up (Richenhagen (I.D.M. O.P. 66 and J.M.D. 1985)). Not surprisingly, most of the examples given in literature for what children can learn are drawings of concrete or abstract, symmetric or non-symmetric objects.

Making the turtle draw a house, dancing to the rhythm produced by a computer, inventing a poem or some graphical art with the help of a random number generator, dealing with language by programming, or using a wordprocessor are not the type of creative activity a humanist, writer, artist or educator in these fields wants children to adopt, and a vast majority of teachers reject such technology oriented attempts for taking in their subjects (for profound criticism cf. Sardello (T.C.R. 1984, 631)).

HOW ABOUT PROBLEM SOLVING ABILITIES?

First, some of those techniques mentioned above can be treated as categories of theory of cognition, but, of course, Papert's 'society of mind' is only one approach among others to understand cognitive processes. Second, these techniques make up a distinguished programming style which is appropriate for certain classes of tasks. However, Logo is not used in professional programming, because it is too slow, most programmers are accustomed to other languages better processing input and output, and its recursive call of functions conceals the flow of the programs (at least for non-experts). Third, these techniques are ascribed the power of making the programmer develop heuristics for general problem solving, which turns them into pedagogical ideas justifying the use of computers according to the 'Logo philosophy'.

But unlike Papert claims, debugging is a principle applied by everybody everywhere, in programming as well as in everyday situations (including classrooms), as long as it is economical. Only if mistakes are too numerous or significant, the work on a problem (including computer programs) is done over completely. Like the solution of any problem, a program is either right or wrong, in that it either works as demanded or not, and sometimes the problem solver can tell by him/herself (which admittedly will occur more often if the solution is a program), sometimes he/she cannot.

If the principle of recursion is really incorporated by a person, it may lead him/her to ignore physical boundaries (in extreme cases: confound computer worlds with reality) or stages in cognitive (or other) structures. Papert himself delivers involuntarily several examples: for him

'powerful ideas' comprise mostly mathematical theorems, whose power 'the child learns to enjoy and respect', but he/she 'also learns that the most powerful idea of all is the idea of powerful ideas'. By using the notions 'idea', 'thinking', or 'learning' recursively, he jumps light-footed from one object domain to another thus leveling essential structural differences.

The concepts 'modularity' and 'interactivity', finally, can be experienced by programming in a rather reduced manner only, which may not be sufficient for real physical or social situations. Of course, juggling (one of Papert's illustrative examples) can be analyzed in terms of a programming language using those principles, but, structurally, juggling is a decidedly primitive situation consisting of a few simple rules. And even this requires much more than just programming, namely, some motivation, perseverance, dexterity, and possibly a fairly good teacher. The extensive use of the computer, as suggested by the 'Logo philosophy', bears the tendency to replace reforming an activity with programming it - a perfect symptom of psychopathy, as Sardello puts it.

In comparison with those necessary, desirable, or possible social, emotional, artistical, cognitive, sensory, physical, etc. experiences in a child's cultural environment (including school), those experiences which are possible when programming a computer are rather poor. For all the authors mentioned this is a main point of criticism. When working with a computer the child becomes confronted with just one or several more 'domains of subjective experiences' (Bauersfeld 1983), resp. 'microworlds' (Lawler (Cogn.Sc. 1981, 1)). Any content from one such 'domain' is not transferred to some other automatically; these transfers have to be taught, too; and even then they are still hard to accomplish, if at all.

The conception of microworld used by Papert has not got the power to describe children's ideas connected with their activities, since to him it merely means some mathematical theory (often with some background in physics) which they shall study, in particular by varying its axioms. The notion of 'Piagetian learning in Logo environments' gives rise to another misconception: first, 'Logo environments' is not the expression for friendly furnished rooms with a lot of materials for the learning of and with Logo, but it is a technical term for the computer equipment which is necessary for the programming language 'Logo', and Papert obviously uses it in both meanings without differentiating.
Second, his adoption of Piaget's theory is rather unorthodox, as he evolves an essentially different view of the cognitive development of children and how to influence it (cf.Bussmann/Heymann). The reference to Gallwey's (1976) theory of learning tennis (after all one of the sources of his learning theory), again seems to be a total misunderstanding on his part (according to Dreyfus/Dreyfus).

Perhaps stylizing samba schools as prototypes for future classrooms is just another suggestive rhetoric; and rather the subcultural community of AI researchers, computer hackers, etc. working in the laboratories of Massachusetts Institute of Technology (MIT) and those connected to

them by computer networks (as described by Turkle) seems to be a proper model. But this model would appear less pleasant and would point directly to its own main shortcoming: its need for extraordinary people.

LOGO, A TOPIC FOR PRIMARY GRADES?

Meanwhile, 85% of all American schools have computers, and regardless of the extent of use, while Logo is rarely found in highschools, it is the prevailing programming language in elementary schools. (Rezanson/Dawson (M.T. 110 (1985), 5) name some psycho-sociological reasons for this success). According to a lot of reports, it is often like in the old days of 'new math': Logo is a topic for the primary grades, treated, by pupils as well as by teachers, as one more subject besides arithmetic, geometry, sciences, reading, writing, and others, not meant to be extended. It is overlooked that Logo, unlike those other subjects, has no roots in culture or nature, but is a system of artificial rules invented by some human beings at a certain time, fitting a special technology, being changeable, or even removable, without loss of meaning. In all those reports about children working with the computer for a long time ('exploring microworlds') or talking to other children stimulated by the computer ('sharing their ideas') one does not get to know, what they actually learn (let it be facts, concepts, algorithms, or skills) besides programming. In classrooms dominated by 'Logo environments' there seems to be a lack of content related goals (criticized by Cuffaro (T.C.R. 1984, 559) and Sardello); and in the long run they may even fail to fulfill their objective purpose, i.e. keeping the children occupied.

Peter Bender
Gesamthochschule
Kassel/West Germany.

REFERENCES

[1] Abelson, H. and A.diSessa: *Turtle Geometry* , Cambridge, Mass. 1981.

[2] Bauersfeld, H.: *Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklehrens und -lernens.* In: Bauersfeld, H. et al. (eds.); *Lernen und Lehren von Mathematik*, Köln 1983, pag.1-56.

[3] Bauersfeld, H.: *Computer und Schule - Fragen zur humanen Dimension.* Occasional Paper 56, IDM Bielefeld 1984.

[4] Bender, P.: *Zentrale Ideen der Geometrie für den Unterricht der Sekundarstufe I.* In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1983, pag.8-17.

[5] Brown, S.: *On Mindstorms.* In: Mathematics Teaching 107, (1984), pag.43-46.

[6] Bussmann, H. and H.W.Heymann: *Revolutioniert die 'Schildkröte' das Lernen? - Rekonstruktion und Kritik der Bildungsutopie von S.Papert.* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 17, 76-83 (1985).

[7] Cuffaro, H.: *Microcomputers in Education. Why Is Earlier Better?* In: Teachers College Record 85, 559-568 (1984).

[8] Davy, J.: *Mindstorms in the Lamplight.* In: Teachers College Record 85, 549-558 (1984).

[9] Dreyfus, H.L. and S.E.Dreyfus: *Putting Computers in Their Proper Place: Analysis versus Intuition in the Classroom.* In: Teachers College Record 85, 578-601 (1984).

[10] Fischer, R.: *Unterricht als Prozess der Befreiung vom Gegenstand - Visionen eines neuen Mathematikunterrichts.* In: Journal für Mathematikdidaktik 5, 51-85 (1984).

[11] Gallwey, W.T.: *Inner Tennis: Playing the Game* , New York 1976.

[12] Haefner, K.: *Die neue Bildungskrise. Die Herausforderung der Informationstechnik an Bildung und Ausbildung* , Basel 1982.

[13] Hentig, H. v.: *Das allmähliche Verschwinden der Wirklichkeit* , München 1984.

[14] Illich, I.: *Deschooling Society* , New York 1970.

[15] Jahnke, H.N.: *Technology and Education. The Example of the Computer.* In: Educational Studies in Mathematics 14, 87-100 (1983).

[16] Köhler, H.: *Computer als Herausforderung - zur Sklavenarbeit?* In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 38, 1-9, 65-73 (1985).

[17] Lawler, R.: *The Progressive Construction of Mind.* In: Cognitive Science 5, 1-30 (1981).

[18] Müller, K.P.: *Sind die Computer oder die Computerfachleute eine Gefahr für die Schule?* In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1984, 251-254.

[19] Papert, S.: *Teaching Children to be Mathematicians Versus Teaching About Mathematics.* In: International Journal of Mathematics Education in Science and Technology 3, 249-262 (1972).

[20] Papert, S.: *Mindstorms. Children, Computers, and Powerful Ideas.* New York 1980, German Basel 1982.

[21] Rezanson, F. and S.Dawson: *The Logo Cult.* In: Mathematics Teaching 110, 5-7 (1985).

[22] Richenhagen, G.: *Kinder, Computer und Mikrowelten - Bemerkungen und Fragen zu Seymour Papert's 'Mindstorms'.* Occasional Paper 66, IDM Bielefeld 1985, forthcoming in: Journal für Mathematikdidaktik 6 (1985).

[23] Sardello, R.G.: *The Technological Threat to Education.* In: Teacher College Record 85, 631-639 (1984).

[24] Sloan, D.: *On Raising Critical Questions about the Computer in Education.* In: Teachers College Record 85, 539-547 (1984).

[25] Turkle, S.: *The Computer Culture* , New York 1984.

LAURA PARENTI

APPROCHE AUX ALGORITHMES A L'AGE DE 13 ANS

LE 'groupe de recherche sur la didactique des mathématiques et sur la formation scientifique dans l'école obligatoire (9-13 ans) de Gènes' travaille depuis 1974-1975 sur un projet d'enseignement intégré entre les mathématiques et les autres sciences (en Italie elles sont enseignées par le même professeur) qui est expérimenté par 40 professeurs environ en 100 classes d'école moyenne. Depuis 1977-1978 le groupe travaille aussi sur un projet total pour l'école primaire, conduit par 150 enseignants en 100 classes.

Ces projets sont caractérisés par l'entrelacement entre les enseignements (mathématiques et autres sciences expérimentales) et des thèmes particulièrement aptes à connaître la réalité naturelle et sociale.

Les habilités disciplinaires sont bâties telles qu'outils pour approfondir quelques aspects de la realité culturalement importants: rapport homme-nature, rapports sociaux, activités productives, phénomènes culturels.

Naturellement à côté des thèmes on va créer des occasions d'approfondissement technique specifique des habilités et des outils des enseignements et aussi de l'encadrement historique de leur utilisation.

Un des arguments choisis pour les élèves de 13 ans est 'l'organisation du travail et des technologies productives', dans ce context il en dérive que depuis quelques années nous avons étudié comment les 'nouvelles technologies' influencent l'organisation du travail.

Nous avons traité ce sujet pour compléter l'information sur l'orientation (prévue par une loi à l'école moyenne), mais encore pour des finalités culturelles (compléter les thèmes d'histoire du calcul et d'évolution technologique des machines), didactiques (construire des connaissances et des habilités qui ensuite seront utilisées pour la programmation) et pédagogiques (répondre en manière organisée aux intérêts et aux curiosités des élèves).

Le sujet des 'nouvelles technologies' a été traité en développant les points suivants:

1. Analyse de quelques aspects du fonctionnement logique des 'calculettes' (insérée dans l'Unité Didactique 'Ordinateur - calcul dans l'histoire') qui fait partie du thème de l'histoire du calcul.

A travers des considérations sur le fonctionnement de la mémoire d'une 'calculette' en relation à la hiérarchie des opérations et des parenthèses, les élèves sont initiés au raisonnement algorithmique; ils comprennent que le procédé séquentiel est aussi à la base du fonctionnement logique des ordinateurs actuels et ils réusissent à mettre en évidence que

l'homme, dans la plupart des cas, peut concentrer ses efforts seulement pour élaborer correctement la solution d'un problème parce qu'il peut effectuer ses calculs sur des instruments automatiques.

2. Analyse des automatismes (mécaniques et électroniques) dans les machines qui nous entourent (partie de l'Unité Didactique 'Automation').

Cette partie se propose de:

a. Développer dans les élèves une aptitude à 'regarder dedans' les dispositifs automatiques pour comprendre leur fonctionnement logique.
b. Former au raisonnement algorithmique à travers des modèles concrets qui 'incorporent' une logique de fonctionnement du type algorithmique.
c. Encadrer culturellement le problème de l'automation.

3. Première approche à la programmation (insérée dans l'Unité Didactique 'Automation').
   Cette expérience est le point d'arrivée des deux itinéraires 'Automation' et 'Parenthèses'.

Dans cette partie aussi le plus grand effort est demandé pour comprendre le problème à résoudre et pour construire l'algorithme résolutif, tandis que l'écriture du programme est considérée comme un moment d'approfondissement technique, relatif à l'ordinateur disponible à ce moment (on peut comprendre la même chose pour ce qui concerne le langage).
Actuellement l'approche à la programmation est en phase d'expérimentation et pendant cette année a été suivie par la moitié environ de nos classes. Maintenant j'analyserai en détail le deuxième point en renvoyant à l'exposé de Mme Laviosa pour l'analyse détaillée des autres points.

L'analyse des automatismes dans les machines qui nous entourent fait en même temps partie d'une étude sur l'évolution technologique des machines ainsi articulée:

a. Introduction des mécanismes pour transmettre et multiplier des forces, des déplacements, des vitesses de rotation (U.D. Machines).
b. Introduction des moteurs pour actionner des machines qui remplacent et qui augmentent l'énergie fournie par l'homme ou qui transforment en énergie mécanique d'autres types d'énergie (U.D. moteurs).
c. Introduction d'innovations technologiques qui se proposent de remplacer l'homme même dans ses activités d'organisation, de contrôle et de décision sur les différentes phases du processus de travail (U.D. Automation).

Dans la première fiche de travail dirigé de l'U.D. Automation, en employant les flowcharts, on explique et on analyse le fonctionnement

logique de simples automatismes (d'abord mécaniques, ensuite électroniques) qui exécutent des opérations de contrôle et/ou de sélection de type séquentielle.
De cette manière on met en question le comportement de simples objets, en l'expliquant 'rationnellement' et en vérifiant qu'il est réductible à 'l'exécution' de quelques operations simples qui suivent une suite 'préétablie'.

L'emploi des flowcharts initie les élèves au raisonnement algorithmique. La fiche suivante prend en considération certaines applications numériques de l'ordinateur.
Par des exemples, utiles aussi pour l'approche à la programmation, on fait comprendre aux élèves ce qui signifie 'mettre en mémoire' une séquence d'instructions et comment les mémoires d'un ordinateur se modifient durant l'exécution d'un programme.
La troisième et la quatrième fiche décrivent comment l'introduction de l'ordinateur a modifié certains des travaux (de bureau ou d'industrie) et en conséquence comment les connaissances et les habiletés, demandées aux gens qui sont préposés à ces activités, ont changé.
A travers une panorama assez étendu de situations on commence la discussion en classe sur des arguments particulièrement intéressants pour les élèves (utiles aussi dans le but de l'orientation professionnelle). Par exemple le nouveau rapport homme-machine (attitudes des jeunes et des gens âgés devant l'ordinateur; nouvelles professions; rapport automation-reconvertion et automation-occupation; problèmes inhérents à la santé ...) et les représentations mentales des élèves relatives aux activités humaines qui peuvent (ou ne peuvent pas) être automatisées.
La partie de programmation en langage BASIC est insérée comme un moment de reprise et d'approfondissement 'technique' sur les algorithmes, entre la troisième et la quatrième fiche.
De cette manière, à notre avis les élèves comprennent mieux aussi la quatrième fiche qui décrit le tour à contrôle numérique et les robots.
Dans la dernière fiche:

a. On propose aux élèves de lire des articles qui parlent de l'automation pour vérifier leurs capacités de relier les arguments développés pendant l'année scolaire avec le contenu d'articles qui parlent de la réalité productive d'aujourd'hui.
b. On demande aux élèves leurs opinions relatives à l'influence qu'aura l'automation dans le travail qu'ils feront dans l'avenir.
c. On demande aux élèves leurs opinions relatives aux difficultés rencontrées pendant la programmation.

Il nous semble que les itinéraires élaborés sollicitent (dans la pluralité des situations didactiques prévus) une mise en question des représentations mentales des élèves et ils contribuent à faire passer les

élèves de l'usage acritique et des conceptions mythiques des machines à la compréhension et à la maîtrise des différents instruments.

Outre cela la pluralité des problèmes proposés et des discussions en classe évitent, à notre avis, de transmettre aux élèves la convinction de pouvoir traduire tout *avantageusement* dans une séquence élémentaire d'opérations en mettant en valeur le rôle de l'intuition synthétique.

Laura Parenti
Istituto Matematico
Università Genova
Genova/Italy

FAISAL MOSHATTAT SHAGATI

THE ROLE OF PROGRAMMING MICROCOMPUTERS IN MATHEMATICS TEACHING

THE main thesis of this paper is that programming of microcomputers is more and more in recent times playing the role which is analogous to the role of compass and ruler constructions in the nineteenth century style of teaching of mathematics.

The main features of compass and ruler constructions were:
1. constructivity:
2. gestalt-like, easy to asses at a glance result;
3. the need for analysis, giving assurance that the result obtained is really what was asked for.

All these features are essential for programming of a microcomputer, if it is to play its role in the process of teaching of mathematics. With this in mind, we divide the programmes in three types. To the first type belong such programmes which are analogous to drawing of a picture, or writing of a piece of prose, or perhaps poetry. These could be very simple drawings or very complicated ones. The essential thing is that we must decide whether the result is a success or not only the basis of our own impression. Such is e.g. the programme which produces the picture at the title page of this article. This programme paraphrases the known verse of Apollinaire, 'Coeur, Couronne, Miroir'. Only one screen picture is reproduced here.

Even if a programme produces something which is not mathematical, the process of writing that programme involves some mathematics. It might be simple arithmetics or something not much more advanced, but it produces some motivation for 'doing sums', hopefully, with some reflective thinking. The reflective thinking while practising skills was emphasised on many occasions by many educators such as Winter, Wittmann, and others.

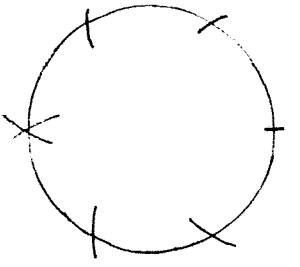
Programming of a microcomputer with any motivation in mind is an activity where reflective practice of skills, be it arithmetical or geometrical is automatically put into effect.

Another type of programmes are e.g. the programmes which play a piece of music, according to written notes. Here it is also essential to decide, whether or not the programme was successful, but it is not only our impression or somebody elses impression that counts. It is also possible to check step-by-step, if every note was written correctly in the programme, whether the programme is formally corresponding to what was written, say, by Bach or another composer. A good example here is the programme listed, which plays a few initial measures of Gavotte and Rondo from Partita III.

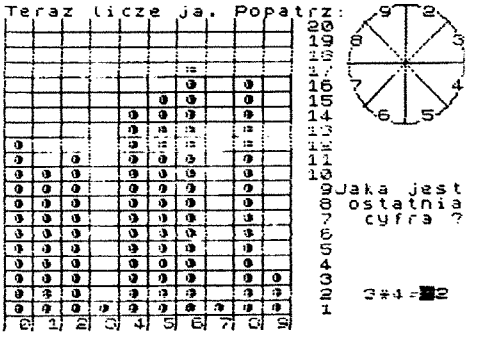
```
9000 REM  Gavotte, Partita III (
tonika, t=7 g dur,          wg.
Jana Sebastiana Bacha w e-dur.)

9001 LET s=.15: LET l=1: LET t=7
: LET koniec=0 : REM s=.15 sekun
dy
       jeden takt = 8 s
       s+s+s+s  +s+s+s+s

9010 BEEP s+s,t-5: BEEP s+s,t+4

9011 BEEP s+s,t+4: BEEP s,t+2: B
EEP s,t: BEEP s+s,t+2: BEEP s+s,
t+5

9012 BEEP .1*s,t-5: BEEP 4*s,t+5
: BEEP s,t+7: BEEP s,t+4: BEEP s
,t+5: BEEP s,t+2

9013 BEEP s,t-5: BEEP s/2,t+2: B
EEP s/2,t+4: BEEP s,t+5: BEEP s,
t+2: BEEP s,t+4: BEEP s,t: BEEP
s,t+2: BEEP s,t-1

9014 BEEP s,t: BEEP s,t-5: BEEP
s,t-8: BEEP s,t-12: BEEP s,t-8:
BEEP s,t-5: BEEP s,t: BEEP s,t+4

9015 BEEP s,t-7: BEEP s,t+4: BEE
P s,t+2: BEEP s,t: BEEP s,t+2: B
EEP s,t+4: BEEP s,t+5: BEEP s,t+
2

9016 BEEP 4*s,t+5: BEEP s,t-5: P
AUSE 60*s: BEEP s,t+4: PAUSE 60*
s

9017 BEEP s,t-3: PAUSE 60*s: BEE
P s,t+2: PAUSE 60*s: BEEP s,t-10
: PAUSE 60*s: BEEP s,t-1: PAUSE
60*s

9018 BEEP .1*s,t-12: BEEP 4*s,t
:      IF  koniec>=1 THEN STOP

9019 PAUSE 30*s: LET t=t+1: LET
t=t: IF t<3 THEN GO TO 9010

9020 BEEP 2*s,t-5. BEEP 2*s,t+4:

9021 BEEP 2*s,t-3: BEEP s,t-3: B
EEP s,t-4: BEEP s,t-3: BEEP s,t:
 BEEP s,t-1: BEEP s,t-4

9022 BEEP s,t-4: PAUSE 60*s: BEE
P s,t-3: PAUSE 60*s: BEEP s,t-3:
 BEEP s,t-1: BEEP s,t: BEEP s,t+
4

9023 BEEP s,t-3: BEEP s,t-1: BEE
P s,t: BEEP s,t+5:
BEEP s,t-1: BEEP s,t+2: BEEP s,t
: BEEP s,t-3

9024 BEEP s,t-4: BEEP s,t-1: BEE
P s,t-8: BEEP s,t-10: BEEP s,t-1
2: BEEP s,t-8: BEEP s,t-3: BEEP
s,t

9025 BEEP s,t+4: BEEP s,t+5: BEE
P s,t+7: BEEP s,t-3:
      BEEP s,t-11: BEEP s,t-3: BE
EP s,t+4: BEEP s,t+7

9026 BEEP s,t+7: BEEP s,t+4: BEE
P s,t+5: BEEP s,t+2
      BEEP s,t-7: BEEP s,t-4: BEEP
 s,t-1: BEEP s,t+2

9027 BEEP s,t+2: BEEP s,t-1: BEE
P s,t: BEEP s,t-3:
      BEEP s,t-8: PAUSE 60*s: BEE
P s,t-4: PAUSE 60*s

9028 BEEP 4*s,t-15

9029 PAUSE 5. LET koniec=1: GO T
O 9010

9030 PAUSE 0: GO TO 9011
```

We may judge to correctness of the programme by ear alone, but we may also check it formally even without listening to what sort of noises it produces. Such formal check is not available for the programmes of the first type.

Still more sophisticated way of analysis is available with mathematical programmes. And this is the third type. Such programmes should produce for us e.g. a graph of a function, or a series of Pythagorean triples, or perhaps first one hundred prime numbers, or the first one hundred decimal digits of, say $\sqrt{2}$. We are then in a similar situation we were while doing classical compass and ruler constructions.



Consider e.g. the simplest construction of the regular hexagone. We draw a circle and then with the same diameter we mark off the pieces of arc, three times clockwise, and three times counterclockwise. The marks then should meet at one point. Theoretically they must. But do they? More often then not they do not meet. What then? Does it show that our construction was false, or perhaps only that our performance was inaccurate? We may ask the same question of any programme of the second or third type. Computer produced graphs of functions are only visualisations of some mathematical objects. They have the obvious metaphorical meaning, but they might also be used to more subtle analysis of these objects. Such analysis requires a lot of reflective and logical thinking, very much like the analysis of compass and ruler constructions. Trying to visualise e.g. the graph of the function $\sin(1/x)$ is a very subtle combination of logical reasoning, the drawing skill, and some psychological ability allowing one to focus his attention on the assignment. The computer drawings of the graph are of course a substantial help in all these aspects.



To these programmes of the third type belong the programmes visualising some chance experiments. We produce here one such visualisation referring to an article of Glaymann in Educational Studies in Maths, 6, 1976, 389-393. This is only one of the screen pictures pro-

duced by the programme. The variations of such pictures which are due to chance are another factor adding to complexity.

It is very interesting to watch the children use one of such programmes of any of these three types. It is possible then to assess their mathematical skill 'in action'. We try to use programmes which are as simple to LIST and read as possible. The teachers and students are then tempted to modify them as they like it. In such a way even a very simple programme may play the double role. First, e.g. as a simple trainer, and then as an object to act upon. And here is something to show that it pays:

```
  10 REM DOLLARS
  20 LET Z=0
  30 FOR S=1 TO 6
  40 PRINT AT 0,5*S;S
  50 NEXT S
  60 DIM W(6)
  70 DIM C(6)
  80 LET K1=INT (RND*6)+1
  90 LET K2=INT (RND*6)+1
 100 LET Z=Z+1: PRINT AT 0,0;Z
 110 IF K1>K2 THEN LET S=K1
 120 IF K2>K1 THEN LET S=K2
 130 IF K1=K2 THEN LET S=K2
 140 PRINT AT 3,0;K1;AT 3,3;K2
 150 PRINT AT 5,2; FLASH 1; BRIG
HT 1;S
 160 LET C(S)=C(S)+1
 170 IF C(S)=21 THEN GO TO 280
 180 LET Y=(21-C(S))
 190 LET X=5*S-1
 200 FOR W=1 TO Y
 210 PRINT AT W,X;"$"
 220 PAUSE 3
 230 PRINT AT W,X;" "
 240 NEXT W
 250 PRINT AT Y,X;"$"
 260 PRINT AT 21,X;C(S)
 270 GO TO 60
 280 FOR S=1 TO 6
 290 PRINT AT 21,5*S-1;C(S)
 300 LET W(S)=W(S)+C(S)
 310 NEXT S
 320 FOR S=1 TO 6
 330 PRINT AT 21,5*S-1;W(S)
 340 NEXT S
 350 INPUT "To play again(y/n)";
A$
 360 IF A$="y" THEN GO TO 400
 370 FOR S=1 TO 6
 380 LET C(S)=0: LET W(S)=0
 390 NEXT S: CLS : PRINT AT 0,0;
"Goodbye": STOP
 400 CLS : GO TO 30
```

Faisal Moshattat Shagati
University of Warsaw
Warsaw/Poland.

RAPPORT DU GROUPE 1

LE CALCUL/ARITHMETIC

CONFLICTS MENTAUX ET OBSTACLES EPISTEMOLOGIQUES

L'EVOLUTION des concepts chez les élèves ne se fait pas seulement par l'accumulation d'informations progressivement mémorisées et assimilées, mais passe par des restructurations intellectuelles. Seule la nécessité de résoudre des conflicts ou des difficultés importantes peut conduire à de telles restructurations.
Il apparaît que les calculatrices et les ordinateurs peuvent être de merveilleux instruments pour provoquer des conflicts mentaux profitables aux apprentissages mathématiques.

NOMBRES ECRITS, NOMBRES DES MACHINES ET CONCEPTS NUMERIQUES

Les difficultés écritures des nombres (décimale, fractionnaire, dans diverses bases) avec leurs syntaxes propres, doivent être dinstingués de l'objet mathématique 'nombre'. Les enseignants devraient en particulier être conscients de la distance qu'il peut y avoir entre la mise en oeuvre d'algorithmes de calcul et l'apprentissage du concept de nombre. Ce point est particulièrement crucial pour les nombres rationnels. Les professeurs devraient fournir de nombreuses occasions aux élèves de résoudre des problèmes relatifs aux proportions avec et sans machine et les stimuler pour communiquer et échanger leurs idées et leurs méthodes.

DES ETRES MATHEMATIQUES ESSENTIELS; LES NOMBRES RATIONNELS

A la suite des premiers apprentissages essentiellement additifs, les raisonnements sur les proportions constituent un objectif majeur de l'enseignement mathématique. Leur acquisition nécessite des rencontres avec des problèmes d'origines variées: numérique, géométrique, statistique, probabiliste ...
La pratique prématurée des opérations écrites peut constituer un obstacle à l'acquisition des idées algébriques. La machine à calculer permet d'éviter cette pratique et pourrait ainsi contribuer à une meilleure approche des concepts functionnels. La distinction entre les fractions vues comme opérateurs et les fractions vues comme nombres (permettant par exemple de les repérer sur une droite) est fondamentale. Un apprentissage qui prend en compte les idées de Bruner sur la succession de présentations aux niveaux actif, iconique et symbolique semble adéquat. Ceci ne résout pas la question qui reste ouverte malgré l'utilisation des calculatrices: comment enseigner la signification profonde des opérations arithmétiques?

VARIABLES ET FONCTIONS

Dès l'école élémentaire, une exploitation des variables, sous une forme qui reste implicite, peut être introduite avec l'aide du schéma:

INPUT → MACHINE → OUTPUT

L'usage effectif des machines donne une caractère opératoire réel à ce schéma. L'utilisation des facteurs et opérateurs constants des calculatrices est indiquée comme un appui indispensable pour que d'autres présentations (graphique, fléchage de correspondance et 'machine' théorique du schéma ci-dessus) conduisent à une première idée de function efficace.

La recherche de fonction, du type 'trouver ce qu'un camarade a introduit comme opération sur la calculatrice', est à la fois une utilisation implicite d'une inconnue et une familiarisation avec l'idée même de fonction.

L'explicitation de la notion de variable pose des questions plus délicates pour la pratique de l'enseignement: apparaîtra-t-elle à l'occasion de calculs sur des polynômes (ce qui serait conforme à l'histoire des mathématiques) ou à l'occasion de l'étude de registres ou de mémoires en machines?

EXTENSIONS DE LA NOTION DE FONCTION

L'idée de fonction de deux variables peut certainement être sollicitée à l'occasion de l'étude de formules comme celle de l'aire du rectangle. D'autre part, il est aujourd'hui facile de rencontrer des phénomènes qui ne correspondent pas (du moins en apparence) au schéma ci-dessus: une machine munie d'une touche RND (random = aléa) en permet une expérience répétable. Cette absence apparente de déterminisme peut-elle constituer une 'contre-image didactique' donnant du sens au fait de parler de fonction?

Et ensuite, l'idée de fonction peut-elle être utilisée efficacement auprès des élèves, avec le résultat fourni par RND , pour conduire aux premières manipulations de fonctions aléatoires, et à quel niveau scolaire? L'ordre traditionnel de présentation des fonctions et des variables (variable - inconnue - paramètre - indice) apparaît ainsi comme susceptible d'être remis en cause, au moins à l'occasion d'expériences didactiques.

UTILISATION ET ETUDE DES MACHINES?

Y a-t-il un bon ordre dans l'utilisation des machines (calculatrice puis ordinateur, ou l'inverse)? Ou ne faudrait-il pas penser à l'utilisation simultanée de la calculatrice comme machine individuelle de poche et de l'ordinateur comme machine de table en classe? De plus il convient de souligner que si l'utilisation de micro-ordinateurs en classe devait apparaître aujourd'hui comme impérative, la question du déséquilibre possible entre divers pays plus ou moins équipés risquerait d'être aigue.

Il n'en est pas de même pour les simples calculatrices.
L'étude de processus spécifiques à l'utilisation de machines pose d'ailleurs des questions autres que pratiques: les processus itératifs sont-ils d'abord un objet d'étude en eux-mêmes, ou d'abord un instrument au service d'autres problèmes? Faut-il, et si oui quand, faire de la programmation à l'école? Cette dernière question a de l'importance, si on se place suivant le point de vue qu'aujourd'hui, l'enseignement doit plus 'apprendre à faire-faire' qu'apprendre à faire.
De succès, auprès des enfants d'utilisation de la tortue LOGO n'est-il pas à relier à cette remarque? En suivant cette idée, on peut être conduit à se dire qu'un minimum d'informations sur la logique et les traitements des machines permettant leur utilisation autonome, devrait être fourni aux élèves. Mais n'est-ce pas aller trop loin, et ne faut-il pas plutôt se limiter aux cas où les schémas usuels de pensée sont assistés mais pas remis en cause par l'utilisation d'une machine?

MENTAL CONFLICTS AND EPISTEMOLOGICAL OBSTACLES

THE evolution of concepts in pupils mind is not only the result of an accumulation of informations progressively memorised and assimilated but goes through intellectual restructurations. Only the necessity of solving conflicts, or important difficulties can lead to such restructurations.
It appears that calculators and computers are wonderful tools to instigate suitable mental conflicts.

WRITTEN NUMBERS, MACHINE NUMBERS AND NUMERICAL CONCEPTS

The different ways of writing numbers (decimal, fraction, different bases) with their own syntaxes, must be distinguished from the mathematical object 'number'. Teachers should be aware of the distance which can exist between the use of computing algorithms and the study of numerical concepts. This point is particularly crucial for rational numbers.
Teachers should give the students a lot of opportunities to solve problems on proportions with and without calculators, and stimulate the communication and exchange of ideas and methods between their pupils.

A BASIC FACT; RATIONAL NUMBERS

After the first studies, which are essentially additives, reasoning on proportions is a major objective of the teaching of mathematics. Its achievement requires encounters with problems of different types: numerical, geometrical, statistical, probabilistic ...
A too early practice of paper-and-pencil operations can be an obstacle to the acquisition of algebraic ideas.
The use of calculators can avoid this technique and could then contribute to a better approach of functional concepts.
The distinction between 'fractions as operators' and 'fractions as numbers' (the latter is necessary to be able to point them on a straight line for example) is fundamental.
A learning process following Bruner's ideas on the succession of presentations at the active, iconic and symbolic levels, seems to be suitable here. That does not solve the still open question, even with the calculators: how to teach the meaning of arithmetic operations?

VARIABLES AND FUNCTIONS

In the primary school it is possible to study variables with the help of this diagram:

INPUT → MACHINE → OUTPUT

The use of calculators lends a real operational character to the process. The use as well of the constant factor and operator is indicated as an

indispensable help in introducing an initial idea of 'fonction efficace' on the basis of such other presentations as graphs, arrows, etc. ...
Some exercices can also lead to the notion of unknown variables.
The explicit formulation of the notion of variables is more problematic: does it appear when a polynomial is computed (as in history of mathematics), or with the study of the registers or memories of the machine?

EXTENSION OF THE NOTION OF FUNCTION

A function with two variables can certainly be introduced with the computing of the area of a rectangle.
Devices such as RND (random numbers) on some machines, which can introduce apparent non-deterministic functions, could be a 'contre-image dialectique' which gives meaning to the fact that we are speaking about functions. After that, RND can also be used to study random variables and functions.

USE AND STUDY OF THE MACHINE?

Is there a preferential order in the use of the machines? Calculators first, followed by computers or the opposite order?
Perhaps it is more suitable to use them simultaneously.
It is important to consider that if the use of a micro-computer becomes indispensable, the gap between some countries will be much greater. It is not the same with calculators.
The idea of specific processes for the use of calculators leads to new problems which are not only technical:
— Are they an object to study for themselves?
— Are they only useful for solving problems?
— Are they to be programmed at the school level?
This last question is important if we accept the point of view that teaching is more 'apprendre à faire-faire' than 'apprendre à faire'. The success of the LOGO tortoise is linked to that.
If so we are led to believe that a minimum of information on logic and hardware should be given to the pupils.
That is perhaps too ambitious; should we then restrict ourselves to ordinary thought patterns simply assisted but not contested by calculators?

RAPPORT DU GROUPE 2

MODELES MATHEMATIQUES/MATHEMATICAL MODELS

LES discussions du groupe 2 se sont centrées sur les questions suivantes:
— Quelle liaison faites-vous entre la géométrie et l'ordinateur?
— Comment enseigner la coordination des modèles?
L'ordinateur peut-il y aider?

AU SUJET DE LA GEOMETRIE ET DE L'ORDINATEUR

Les discussions ont débouché sur les recommandations et les commentaires suivants:
— La géométrie doit avoir une place importante dans notre enseignement.
— Les modèles géométriques nécessitent divers moyens: instruments de dessin, maquettes, ordinateur, etc ...
— L'ordinateur est utilisé comme un moyen d'apprentissage de la géométrie.
— L'ordinateur doit être utilisé avec une grande prudence en géométrie.
— L'ordinateur élimine la perception directe.
— Les origines géométriques des notions mathématiques doivent être prises en compte.

Mais le point de vue précédent doit être compensé.
— Un usage trop exclusif de la géométrie peut créer des obstacles.
— Un ordinateur offre en dehors de la géométrie de nombreuses possibilités.
— C'est une nécessité pour la formation professionnelle et technique.
— C'est un objet de connaissance.
— Utiliser plusieurs programmes pour résoudre un même problème contribue à l'apprentissage de la formalisation.
— N'oublions pas l'ordinateur, banque de données.
— Le travail algorithmique peut se faire sans ordinateur.
— Pourtant n'ayant pas su introduire la réalité dans nos classes, l'ordinateur ne va-t-il pas nous éloigner encore du réel?

Les principales conclusions tirées de la discussion sont:
— Prudence vis-à-vis de l'ordinateur, particulièrement en géométrie.
— La géométrie doit être introduite au moyen des objets de l'espace, puis des dessins et des schémas de l'espace. Une introduction de la géométrie basée seulement sur l'écran de l'ordinateur (example: LOGO) est trop étroite et trop réductrice.
— Attention aux deux attitudes extrêmes: non aux ordinateurs, priorité

à l'ordinateur.

AU SUJET DE LA FORMALISATION, DES MODELES

Les discussions ont débouché sur les recommandations et les commentaires suivants:

— Différents moyens peuvent être utilisés dans l'enseignement: papier, ordinateur, objets tels qu'une balance, matériel pédagogique ...
— Des moyens différents font appel à des modèles différents; si certains noyens ne sont plus utilisés, cela peut entraîner la régression de l'apprentissage de certains modèles.
— Mais les modèles que l'enfant a dans sa tête sont mal connus.
— Quelle idée, par exemple, l'enfant se fait-il d'un problème?
— Quels modèles utiliser pour l'apprentissage des nombres?
— La perspective cavalière est-elle un modèle essentiel en géométrie de l'espace?

Pour chaque individu, la création d'un modèle est un processus allant d'une situation complexe vers des situations de moins en moins complexes. Ce processus doit aboutir à une situation suffisamment simple pour être accessible à une mathématisation. Le Hewet-project donne un exemple de modélisation.

Dans ce processus nous pouvons utiliser l'ordinateur pour simuler, pour montrer les représentations graphiques, pour être capable de trouver des conclusions (par exemple un optimum) sans utiliser des techniques analytiques, pour que les enfants soient autonomes et puissent discuter entre eux, pour augmenter la motivation et la capacité à développer les méthodes symboliques (algébriques).

Dans l'application des mathématiques, il est nécessaire d'équilibrer l'expérimentation et l'abstraction et on doit prendre soin de coordonner les modèles.

Par exemple:

On peut avoir un modèle et deux réalités et matrices peuvent représenter d'une part les déplacements et les transformations, d'autre part les états initiaux et les probabilités de passage ou encore l'invariance peut être associée à des vecteurs propres ou à des phénomènes de stabilité.

On peut avoir des modèles de modèles. C'est ainsi qu'à un ensemble de données numériques, on peut associer un modèle constitué par un histogramme qui aura lui-même pour modèle la loi de Gauss.

RAPPORT DU GROUPE 3

RAISONNEMENT MATHEMATIQUE/MATHEMATICAL REASONING I

WHICH forms of reasoning should be accessible to all?
Fourteen different presentations on this question from very different persons formed the core of our working-group. In analysing and discussing these presentations we discovered many common points, especially on two subjects: observations and mathematical content. We have discussed these two subjects in our working group and we have drawn some conclusions. We also have raised new questions.

OBSERVATIONS

We think that all children can reason, even the weakest ones. But we don't know enough about their reasoning. We cannot decide yet which forms are accessible to all. We have to know more but how? Classroom observations are our main source to discover all kinds of reasoning. The teacher can do these observations more or less accidentally and researchers can do it in a more sophisticated way. But then there is the problem of interpretation. Do we have a theory on mathematical reasoning to interpret our observations? We do have a language to describe them. And we may have some concepts to categorise them. Cognitive conflict for example is such a concept. But we don't have a theory yet. Almost all of us agreed on this point. So we have to be modest and try to develop one by many, many classroom observations.
But if we don't have a theory how can we analyse our classroom observations on mathematical reasoning?

CONTENT

Which mathematical content do we offer the children? Which problems stimulate mathematical reasoning? Do we have to look at the history of mathematics? We think that the most important source for mathematical problems is the social life of the children themselves. So we have to know more about their social life. And if we find problems there we have to take care that these are 'open' ones. Even the teacher should not foresee all the possible ways and solutions. So she or he is also in a kind of research situation with the children. In this research situation it is important that children can insert their own problems. During all these activities the teacher has to take care that these activities become mathematical ones. This can be done by stimulating reflection on the reasoning of the children. But then this often implicit reasoning should be made explicit.
How can we stimulate that the implicit reasoning of the child becomes

an explicit one?

RAPPORT DU GROUPE 3

MATHEMATICAL REASONING II

THE two remaining questions of our first working group formed the starting-point of the second one. We invited the participants to give classroom observations of mathematical reasoning. Many examples were given and we discussed and analysed them on the two questions in order to find some answers and recommandations.

HOW CAN WE ANALYSE OUR CLASSROOM OBSERVATIONS ON MATHEMATICAL REASONING?

It is important to choose concrete points for observations. It gives the observations a certain objectivity and it makes it easier to compare them with those of other colleagues. Teachers can support each other to use observations for improving the teaching. This support is necessary, especially when you want to discover failures in the teaching and failures in the reasoning of the children. Then you have to look for roots of these failures and this has to be done very carefully. Was there something wrong in the sequence of the excercises? Look in the booklets of the children, in older observations, ask them over and over again, try really to discover the roots because any misinterpretation of these failures in the reasoning is a danger for their improvement.
On the positive side you can observe the metaphors children use. It gives you an insight in their social life and in the way they use this to understand mathematics. It can help to develop problems which are interesting for the children.
All these points are important for researchers as well. Although the pressure of objectivity on them is always high, it is important to find such a way of observation that can still be done in the natural setting of the classroom. A good cooperation between teachers and researchers can be a big help for that purpose.

HOW CAN WE STIMULATE THAT THE IMPLICIT REASONING OF THE CHILD BECOMES AN EXPLICIT ONE?

Stimulate that children formulate their own hypotheses. Then they can discuss these in small-groups and then they have to give arguments. The teacher can help them too by expressing doubts about their solutions and by asking more examples and more evidence. The teacher can also put the pupils in contradiction with each other. Of course this should stimulate the children and not discourage them. When the problems are presented in a dynamic way the reasoning can be stimulated also by

modifying the given, by looking at extreme values, by asking for analogical situations.
When children reason and you think there is more behind it, you can confront them with their own reasoning in many ways, by repeating, by report or by tape. You can discuss this with them, ask for their comment on it, for more explicitation and reflection on their thinking.

RAPPORT DU GROUPE 4

LA FORMATION DES MAITRES

PREMIER RAPPORT

CE groupe était en quelque sorte orthogonal aux autres d'une part parce que la formation des maîtres a à intégrer les résultats des recherches dans les domaines dont il est traité dans les autres groupes et d'autre part parce que la réflexion sur chacun des thèmes doit prendre en compte la formation des maîtres relativement à ce thème.
Ce groupe avait été organisé dans une grande salle (à cause de cette quasi-universalité) mais il y a eu assez peu de participants. Cependant presque tous sont restés à toutes les séances et, lorsque nous nous sommes réunis dans une salle plus adaptée, nous avons vraiment pu fonctionner en réel groupe d'échanges.
La suite d'exposés était articulée pour traiter les questions suivantes:

1. Mathématiques partout: jusqu'à quel point est-ce vraiment généralisé? Comment? Quel cadre institutionnel pour encadrer les futurs maîtres et maîtres?
2. Mathématiques pour tous, sans échecs: Quoi et comment (pour la formation des maîtres: présentation de formations conçues en fonction de ces objectifs.
3. Spécificités selon les domaines des mathématiques?
4. A l'âge de l'ordinateur: Intégrer l'ordinateur? Comment?

Les pays représentés (que ce soit par une communication ou par des interventions au cours des discussions) ont été les suivants: Tunisie, Italie, Portugal, Belgique, Espagne, Canada (Quebec), Mexique, USA, France, Zaire, Barbades, Allemagne.
Les orateurs annoncés d'Iran et d'Ouganda étaient absents.
Chacune des communications a été suivie d'une très brève discussion calme et sereine, sauf la dernière qui traitait de l'informatique et pour laquelle les débats ont été très passionnés ce qu'il me semble très important de signaler. On relèvera surtout le contraste entre l'enthousiasme de plusieurs participants et la position de *I. Weinsweig* faisant état des errements vécus aux USA: 'évitez de réinventer la roue, surtout si elle est carrée!'
On trouvera par ailleurs les textes des communications.
La discussion générale a été amorcée par la présentation d'un schéma (par *E. Wittmann*) rappelant les diverses composantes nécessaires à la formation des maîtres en mathématiques, composantes allant des mathématiques (elles mêmes à plusieurs composantes) à l'épistémologie et à la psychologie, avec, en plus, la didactique des mathématiques qualifiée de 'discipline unifiante'.
La discussion a été très vivante avec participation de presque toute la

salle et l'on a vu très vite apparaître une synthèse par la fréquence des mots:
— attitude;
— changement;
— adaptation.
En évoquant le fait que tous les futurs maîtres qui sont en formation initiale sont appelés à avoir dans leurs carrière une formation continuée et en réfléchissant aux articulations entre ces deux types de formations, nous avons vu que l'essentiel est de préparer les maîtres à avoir une *attitude* d'adaptation à une évolution en mathématiques (discipline vivante) (être prêt à apprendre des mathématiques à nouveau), adaptation devant un changement de programme éventuel; adaptation à chaque élève; aux générations qui évoluent rapidement, à l'environnement social, aux nouvelles technologies ....
En conclusion, je suis mandatée par le groupe pour poser la question suivante:

Comment préparer les maîtres à une attitude *permettant de s'adapter aux évolutions?*

et je suis chargée de faire appel à la réflexion des membres des autres groupes à ce sujet.

DEUXIEME RAPPORT

Nous sommes partis de la question:
Comment préparer les maîtres à avoir une *attitude* permettant de s'adapter dans les domaines:
— mathématiques;
— choix de thèmes;
— chaque élève;
— société;
— technologies;
— .....
Une grande partie du groupe précédant est revenue. Il y a eu quelques nouveaux dont Madame *Krygowska* qui a commencé en précisant, ce qui a recueilli l'accord unanime, que certaines *conditions* étaient *nécessaires* à la possibilité de réalisation de notre objectif:
— Première condition pour une attitude ouverte chez les enseignants: une amélioration de leur position dans la société, qu'ils n'aient plus une position qui leur donne un complexe d'infériorité par rapport à médecins, ingénieurs, etc..
— Deuxième condition: le professeur de mathématiques ne doit pas être considéré comme un 'mathématicien qui n'a pas réussi; le professeur de mathématiques a le droit de se sentir aussi un créateur'.
— Dernier point: il ne serait pas sérieux de dire que tout enseignement quel qu'il soit est une oeuvre originale, il n'y a pas toujours 'recherche': les enseignements de routine sont les plus courants, à tous les niveaux et même, malheureusement, jusque dans les cours de mathématiques pour futurs enseignants.

Cependant nous avons presque tous insisté sur la possibilité de créer une attitude d'adaptation aux élèves et aux situations scolaires par une formation à une *attitude*, à un esprit de *recherche didactique*.
Il nous apparait important de bien préciser 'recherche didactique' et initiation à l'attitude de recherche, et non pas simplement 'cours de didactique des mathématiques' car certains cours pourraient être parfaitement dogmatiques et inefficaces vis-à-vis de cet objectif d'ouverture. Il existe des cours de didactique où l'on apprend des définitions par coeur et où l'on fait des dissertations sur les théories d'un tel ou d'un tel; par contre, ce qui peut provoquer l'attitude en question, c'est le développement d'un sens critique et de l'attention aux réactions des élèves et à leur analyse. On a beaucoup insisté sur l'utilité de l'observation et de l'analyse de classes (notamment l'autoscopie). Ceci a été mis en opposition avec la pratique des stages par observation de 'bons cours' de 'professeurs chevronnés' qui favorise une attitude de *reproduction* et non pas d'*évolution*. On a insisté aussi sur le besoin de lier, à ce point de vue, formation initiale et formation continue, et aussi de favoriser le travail en équipes d'enseignants d'un même établissement: tout cela permet d'éviter l'*isolement* du professeur, lui apporte les avis et critiques des autres et le soutient dans son autocritique; de plus les pairs participent ainsi au 'contrôle' du projet évolutif par un suivi de celui qui, après avoir été formé dans cet esprit, serait tout de même tenté de se scléroser. Il s'agit ainsi de permettre une dynamique (il a été remarqué que l'analyse des questions posées aux élèves est souvent un bon indice de l'attitude du professeur dans son enseignement).
Nous avons dû rappeler également qu'il ne s'agit pas d'espérer créer un enseignement idéal mais de s'adapter, de faire le moins mal possible, dans les conditions qui nous sont imposées institutionnellement (par exemple les 'programmes') même lorsque nos recherches nous amènent à considérer ces conditions comme absurdes.
Nous avions aussi posé le problème de provoquer une attitude d'évolution *en mathématiques*. Peut-on provoquer le désir de continuer à apprendre des mathématiques? C'est essentiel car seul un professeur qui a ce désir peut le provoquer véritablement parmi ses élèves et leur communiquer son plaisir. Or trop de nos maîtres ne veulent plus apprendre de mathématiques après leur information initiale et même se disent 'dégoûtés des maths'. De plus il est tout à fait souhaitable que le professeur connaisse à nouveau la situation d'apprendre des mathématiques et de chercher des problèmes afin de mieux comprendre les difficultés de ses élèves.
Nous n'avons pas épuisé tous les aspects du problème, par exemple nous avons dû sciemment renoncer à traiter la question des relations avec les autres disciplines.
En conclusion, nous avons eu des propos assez pessimistes remarquant que les objectifs d'*ouverture* et de *liberté* que nous recherchons sont assez rarement ceux qu'attendent les professeurs qui viennent en formation permanente en demandant des *directives*. L'apprentissage de la liberté

nécessite de gros efforts et n'est pas du tout la voie de la facilité.
Pour aider les maîtres à faire de tels efforts, nous tenons à terminer par quelques recommandations: puisque l'enseignement meilleur que nous voulons présenté plus de difficultés et nécessite plus de temps, cela devrait être reconnu officiellement et entraîner une revalorisation de la profession (statut social et financier) et un aménagement des horaires de services.
Tout cela nous amène à demander pour les professeurs qui choisissent cette voie, la reconnaissance d'un *statut d'enseignant-chercheur*.

RAPPORT DU GROUPE 5

L'ORDINATEUR A L'ECOLE

L'ENSEIGNEMENT des mathématiques demande une certaine reorientation à l'époque de l'intrusion massive de l'ordinateur et de l'informatique dans tous les domaines.
En particulier la formation des maîtres eux mêmes nécessite un élargissement pour être à même de pouvoir juger en connaissance de cause des rapports entre les mathématiques et le domaine propre de l'ordinateur. L'intervention de l'ordinateur à l'école loin de simplifier, élaguer ou ajouter un nouvel chapitre au programme de l'enseignement, exige une réflexion et une étude en profondeur de l'objet propre des mathématiques. Il faut en particulier être au clair quelle partie ou quel aspect des mathématiques peut en principe être représenté et developpé par les programmes et éffectué par les machines.

Il faut donc se demander, si le curriculum classique de la formation des enseignants dans les divers pays fournit des bases suffisantes à une telle réflexion. Cette formation traditionnelle comporte généralement des cours portant sur les divers chapitres des mathématiques tels qu'analyse supérieure, théorie des fonctions analytiques, topologie, équations différentielles, groupes de Lie etc. etc., le tout orienté à la 'fabrication' des chercheurs ('theorem-prouvers'). Or un enseignant, dont le métier est, à mon avis, beaucoup plus difficile et plus complexe que celui de chercheur, aurait besoin, surtout actuellement, d'une préparation qui lui permetterait de mieux saisir l'esprit et même la philosophie des mathématiques pour pouvoir apprécier si l'aspect algorithmique 'couvert' par l'ordinateur épuise 'l'essence' de ce domaine.
Je pense aux domaines tels que:

— les fondements des mathématiques;
— histoire des idées et de principaux courants en mathématiques, principalement dès la fin du XIXe siècle (si non à partir de *Leibniz*, ..., *Gauss*, *Rieman*, ..., *Dedekind*, *Frege*, *Cantor*, *Russel*);
— le logicisme, le formalisme avec la théorie de la démonstration (*Hilbert* et *Bernays*, ..., *Gödel*);
— le constructivisme (*Brouwer*, *Heyting*) et ses limitations, le structuralisme (*Bourbaki*);
— le rôle de la théorie des ensembles (*Fraenkel*, *Zermelo*);
— la théorie des modèles et sa semantique (*Tarski*);
— etc....

Ces branches et similaires, ne sont certes pas plus difficiles à étudier que celles généralement demandées pour la licence en mathématiques et elles donnent une vue approfondie et refléxive sur le metier et permettant de mieux situer l'enseignement. Cette modification du curriculum universitaire, en plus des habituels stages pédagogiques, devrait

constituer une revandication majeure de ceux qui se destinent à la profession de l'enseignant.

Tout le monde sait à quel point l'irruption de l'ordinateur, création des mathématiciens-logiciens (*Hilbert, v. Neuman, Church, Kleene, Turing, ...*) genère un grand nombre des questions de fond pour notre culture: entre autres les déductions (raisonnements) qu'effectue l'ordinateur sont elles analogues à ceux que font, ou doivent faire, nos élèves? Personnellement je reponds que non, car les enfants (et même les adultes) ont leur 'logique naturelle' propre qui est (très) différente de celle qui fait fonctionner les programmes. J'ajoute, que les domaines nouveaux tels que l'intelligence artificielle, les divers simulations de l'activité de la pensée, notamment dans la résolution des problèmes, dans la représentation des connaissances, la logique et la semantique enfantines, ... et suscités par le développement de l'ordinateur, commencent à intervenir dans la didactique des sciences. Il semble que l'enseignant moderne est acculé à se 'recycler' en partie, ou à redevenir autodidacte.

Suivant le voeux du président de notre groupe de discussion, je me permets d'ajouter quelques indications bibliographiques déjà classiques relatives aux fondements et la philosophie des mathématiques et pouvant servir de première orientation. Rappelons encore qu'en théorie l'ordinateur, dont la capacité de traitement maximale est représentée par la machine de *Turing*, ne couvre en principe, que la partie des mathématiques exprimables par les fonctions dites calculables ou 'couvertes' par les fonctions recursives générales; d'autres définitions équivalentes de ce domaine des processus dits 'effectifs' (algorithmes de 'chaines de Markov', algorithmes de Post, et d'autres encore), ont permis de delimiter cette partie des mathématiques 'algorithmiques' ou effective (Thèse de *Church*, 1936). Si l'on fait abstraction des approximations, de la 'digitalisation' des processus continus, des linéarisations etc., et l'on s'astreint aux concept exacts, alors un grand nombre des faits mathématiques depasse cette classe effective. C'est le cas par exemple de tous les raisonnements relevant en principe du continu, du calcul des limites, de l'intervention implicite ou explicite de l'axiome du choix etc. Bien que les programmes scolaires sont rarement concernés par les questions depassant le domaine algorithmique (effectif), l'enseignant lui a le plus grand intêret de réfléchir sur les rapports entre cette classe effectuve délimitée par la thèse de *Church* et la classe des méthodes mathématiques qui l'englobe et la depasse. Cette réflexion ne peut manquer d'éclairer et d'inspirer l'enseignement des mathématiques à notre époque.

Voici quelques ouvrages classiques utiles; on peut par ailleurs trouver facilement dans l'abondante littérature moderne et dans des revues spécialiséés concernant l'ordinateur et l'informatique des complements à tous les niveaux.

REFERENCES

[1] Beth E. et J. Piaget., *Epistémologie mathématique et psychologie* (... relations entre logique et pensée réelle ...), Paris, P.U.F., 1961.

[2] Cavaillès, J., *Sur la logique et la théorie de la science*, Paris, P.U.F., 1947.
(Cf. autres écrits du même auteur sur la philosophie des mathématiques parus chez Hermann, Paris dès 1937).

[3] Davis, M., *The Undecidable*, New York, Raven Press, 1965.
(Une antologie des travaux sur les fondements des mathématiques).

[4] Fodor*. j., *The Language of Thought*, Sussex, Harvester Press, 1976.
(Un de chefs de file pour le 'computational paradigm in explaining mind activity').

[5] Fraenkel*, A. a. Bar-Hillel, *Foundations of Set Theory*, Amsterdam, North Holland, 1958, 2nd ed. Atlantic Highlands, N.Y., Humanities Press, 1973.
(Excellente orientation sur l'histoire et philosophie des fondements de la théorie des ensembles).

[6] Halmos, P.R., *Naive Set Theory*, London, v. Nostrand 1960, 1968.

[7] Hermes, H., *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit*, 2e Aufl. Berlin Springer, 1971.
(Rigoureux, assez technique mais classique sur la théorie de la calculabilité, fonctions recursives et leur limites).

[8] Hofstadter*, D.R., *Gödel, Escher, Bach*, New York, Harvester Press, Penguin Books, 1980.
(Célèbre 'bestseller' traitant d'une manière 'litteraire' les problèmes évoqués).

[9] Kneebone*, G.T., *Mathematical Logic and the Foundation of Mathematics*, London, v. Nostrand, 1963.
(Excellente orientation, facile à lire, sur les fondéments).

[10] Kleene*, S.C., *Logique mathématique*, Paris, Armand Collin, 1971.
(Un classique de la logique moderne très complet et assez technique, contient chapitres sur la calculabilité, la théorie des modèles etc.).

[11] Johnson-Laird and Wason*, *Thinking, Readings in Cognitiv Science*, Cambridge University Press, 1977.
(Orientation sur les méthodes expérimentales en sciences cognitives et explications (non formelles)).

[12] Piaget, J. *Introduction à l'épistémologie génétique, vol. 1: La pensée mathématique*, 2e ed., Paris P.U.F., 1973.
(Un des ouvrages fondamentaux de Piaget).

[13] Piaget, J., *Epistémologie génétique*, Collection 'Que-sais-je? No. 1399, Paris, P.U.F., 1973. (Reédité 198???).
(Très bon résumé de l'épistémologie piagetienne).

[14] Rogers, H., *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, New York McGraw Hill, 1967.
(Très bonne introduction aux fonctions récursives).

[15] Russel, B., *Introduction à la philosophie mathématique*, Paris, Payot, 1970.

[16] Schank, P and C. Kenneth, *Computer Models of Though and Language*, S. Francisco, Freeman ed., 1973.
(Un des premiers ouvrages sur les courants actuels de modélisation des activités de la pensée).

[17] Stoll*, R., *Set Theory and Logic*, S. Francisco, Freeman 1963.

(Explique d'une manière accessible les relations entre la logique et les structures usuelles des mathématiques).

[18] Tarski, A., *Introduction à la logique*, Paris, Gauthier-Villars, 1969.
(Une introduction classique par l'un des pères de la semantique moderne; bonne explication des méthodes déductives).

[19] Weizenbaum*, J., *Puissance de l'ordinateur et raison de l'homme*, Paris, ed. Informatique 1981.
(Introduit à la problématique très actuelle sans, à mon avis, l'épuiser).

Titres marqués avec * comportent une (veste) bibliographie.

REPORT OF WORKING GROUP 5

MATHEMATICS AND COMPUTER EDUCATION

SHORT INTRODUCTION ABOUT THE PROCEDURE

WE try to work bilingual. Don't hesitate to say: 'Too fast I need translation. We have very short time for discussion after the presentation. Thursday afternoon is the first session with time for discussion. We suggest the speakers to present in French or English and make a short translation after three minutes in English or French. This translation could be done by a colleague. Request to stay in the same group to have the possibility during discussions to refer to presentations.

Presentations:
Mrs. R.M. Bottino (Computer Science in secondary school);
Mrs. M. Fasano (Informatique et développement des capacités logiques - école primaire).

Working groups B. N $\approx$ 40.
Presentation: Mr. M. Ferrario.

Working group C. N $\approx$ 35.
We have been trying - during the previous evening - to make the video work with a videotape from Chile. We have an appointment with a technician before the morning session. At last it works.
Heleen Verhage shows a transparant with a schema with characteristics of the presentations during the sessions A and B. (French and English).

	AGE	USE OF THE COMPUTER	GOAL
Bottino	14-16	analysis of problems structured programming in Pascal	problem solving activities
Fasano	6-11	inspired on the computer imitation of a seuquential machine	development of thinking
Ferrario	20	programming problemsolving of problems in mathematics	experience in programming with teaching mathematics

Presentations:
Mr. G. Schoemaker (De baas over de computer);
Mrs. M. Riveros (Use of Micro-computers in childlike programs of television).

Working groups D.
We split up in two groups.
Presentations by:

1. Mr. A. Hardy N ≈ 25.
   Mrs. L. Parenti.
2. Mrs. J. Vanhamme N ≈ 35.
   Mr. J.P. Houben.

Working groups E. N ≈ 45.
We start with a short summary of the presentations in the two groups.
Mrs C. Zambujo, (Mathématique dans la voie de l'intégration .. à l'âge des ordinateurs).

Mr. S. Romero Sanchez and Mr. F. Prat Hurtado (Interrelation entre sciences humaines, mathématique et informatique. Une application à l'archéologie).

After this session the three animators discuss the situation in group 5. They express that the group needs time for discussion. The last session we could have had a fruitful discussion if there would have been time for it.
There is a problem with the language. Who presents in French is allowed to give short summaries. Most people understand French if not spoken too rapidly. Who speaks English is asked for translation. This means a doubling of the time needed for the lecture.
The animators deliberated about a text that could be used as a starting-point for the discussions during working groups G.

Working group F. N ≈ 30.
Mr. F. Shagati Moshattat. (The role of programming microcomputers in teaching mathematics).
Mr. P. Bender. (Will Samba Schools and Logo environments really improve education?).

Working groups G. N ≈ 35.
Startingpoint for the discussion was a paper presented by the animators:
Mathématique et Informatique
A l'écoute des présentations on ressent une impression d'une grande disparité, due, sans doute a des situations très differentes suivant les pays.
En supposant qu'on interdise de programmer en Basic on aurait nécessairement de grandes divergences.
On peut cependant relever les onservations suivantes:
— il est souhaitable avoir des classes avec deux ou trois ordinateurs;
— que des expériences débutent dans un petit nombre d'écoles;
— que des professeurs s'engagent dans une expérience même avec des moyens limités;
— attention que certaines expériences renforcent les bons élèves et affaiblissent les mauvais.
On a besoin de cooperation des informaticiens de l'université et des

professeurs d'école. Il est nécessaire qu'ils donnent leurs talents aux expériments.
Nous recommandons d'encourager à approfondir les recherches qui se font déjà dans quelques écoles mais il est indispensable d'avoir des échanges internationales.
Nous recommandons qu'on ne voit pas l'informatique seulement comme une partie de l'enseignement mathématique. Tous les élèves ont besoin d'enseignement informatique et aussi de possibilités d'utiliser l'ordinateur dans tous les sujets, dont les mathématiques.
Il est probable qu'on ait besoin d'un cours d'informatique pour les élèves de 16,17 ans.
On a besoin de recherche et d'expérimentations en ce domaine.

The tables are placed in a rectangle, a better position for discussion. It was the first time that the problem with the language was solved in a satisfying way. Every statement is translated in the other language, by the speaker or by helpers in the group. This is not experienced as a slow down.
In the discussion there are three questions formulated. The animators get mandate to report about the work in the group and to formulate the questions. Several members of the group assist after this session in the preparation for the plenary session.

Working group H.
The report is presented by Mr. G. Schoemaker and Mrs. C. Berdonneau.

Plenary report group 5:
Mathematics and computer education.
In the presentation we had a large variety: in age of the students: el. school, sec. school, a university project.
Variety in the contents, lessons about the computer, using the computer in mathematical lessons, what kind of mathematics is necessary for informatics.
Also a variety in facilities. Programming in Basic, working with pocket-computers or two micros in a classroom and no other materials for students then programming in Basic.
Other situations.
Ten micros in a classroom, specially developed software to teach students using the computer as their slave:
Word processing database.

Criticism was heard about the self evidence of doing things with computers: Computer fashion.
We should help each other by asking questions, may be nasty questions - about the reasons for using computers.
Behind a microcomputer with nice gadgets and gimmicks there is a philosophy of education.
A very poor philosophy is often camouflaged by nice looking machines, drawings in the screen and music. Beside questions about hardware and software there is a third 'ware' concerning the philosophy of education

'beware'.
We should demand ourselves and governments high standard software developed out of a pedagogical and didactical point of view.
Computers of quality.
That does not mean one should not begin with computers if one has poor facilities. But one could also start with a working group of teachers. Not yet in the classroom.

The procedure in our group yesterday during our discussion. Statements were carefully translated, it did not slow down the communication on the contrary it deepened the communication.

The following questions are proposed for discussion:
Questions

1. L'enseignement des mathématiques a ses objectifs.
   Dans quelle mesure le micro-ordinatuer peut-il aider à atteindre ces objectifs?

   Mathematics teaching has its own objectives.
   To what extend can microcomputers help reach these objectives?
2. Les objectifs de l'enseignement des mathématiques peuvent-ils être modifiés par l'introduction de micro-ordinateur dans le système éducatif?
   Si oui, de quelle façon? Quelle doit être la formation des maîtres?

   Can the objectives of math teaching get modified when microcomputers are introduced in the educational system? In what way?
3. Comment cette transformation peut-elle s'opérer au sein d'un établissement scolaire, étant donné les changements culturels et de structure que cela implique?

   How will this transformation get implemented in a school, with respect to the cultural and structural changes which implied?

Working groups I and J. N $\approx$ 40.
Every participant receives a text with the questions in English and French.
A very careful discussion with many contributants.
Animators try not to participate. They give at the beginning of session J a summary of the discussions during session I. They raise the question about the report. Several participants offer to work on the report after this session. During the discussions a bibliography is presented by Mr. H. Wermus on 'Informatics and Mathematics'. This will be an appendix of this report.
At 17.30 h. the discussions are stopped with the expression of respect for concentration, patience and tenacity of the participants.
The group of volunteers gets mandate to report on behalf of the group about the discussions in the plenary session.

Working group K.
The report is presented by Heleen Verhage and André Hardy.

REPORT OF WORKING GROUP 5

INTRODUCTION

No outstanding conclusions but a collection of ideas and recommendations.

1. Objectives of math education.
   - — Computer is a *mean*, not a *goal*.
   - — Math can become more *dynamic* 'what-if questions'.
     Example: supertableau, functions.
   - — Computer can be used for *technical* work, as a tool, so it is possible to spend time on other things, for example the translation from reality to a math model and vice versa.
2. Relation between math as a science, the *education of math* and *computer science*.
   - — Look which topics are interesting now because of the computer. This can give a suggestion for the teaching of math.
     Example: the concept of recursion.
   - — Which parts of math are not longer done by hand, what does it mean for education?
     Example: differentiation and even integration can be done algebraically by a computer.
     Why should you teach them any longer?
3. Research is needed.
   Not much results are known from the different countries. As far as there are results, they are often disappointing. Programming just for programming appeared to be not very useful. There can be different reasons for that. Is it because the microcomputer is not a very good instrument for education or because of the low quality of software?
   But may be we expect too much from the computer in math education.
   We need research about:
   - — At which point math education can be improved.
   - — What types of activities are useful, the computer as a tool, programming, drill and practice, etc.
   - — Look in detail at how children work on the computer. What skills and abilities are developed when they work with the computer?
     Are they active or passive, what about the interaction, how many children on one computer?
   - — Who works on the computer, the teacher or the children?

This research must be theoretical and experimental, with work on schools etc.

INNOVATION STRATEGY

- — The role of the computer in teacher training.
  Teachers have to work with computers, because they need this experience themselves. For example by programming. This is

necessary because they have to overcome their anxiousness.
— We need high-quality software, developed by a team that consists of: a programmer, a pedagogical specialist on math teaching, a designer.
— The use of computers is not restricted to math education. The computer can be used while working on a certain theme, and many school-subjects can come together in that theme.

BEWARE ....

— We must not overestimate the effects of computers. This can be done by teachers, children, parents.
— Do not use a computer if the only reason is that the school next door has also a computer (because it is a fashion).
— Sometimes the use of a computer is like 'old wine is in new bags'.
— Don't do things by computers only because they can be done by computers.
Example: let the computer draw $\log(\sin(1/x^2 + ...))$.
What is the use for such a silly thing?
Start always with a problem you are interested in and use a computer if it can help you to answer a question where you are really interested in.

EPILOGUE

Looking back on our experience of a good cooperation in an active group, we would like to formulate some statements that might be of use for futural meetings.

1. The team of animators has to be bilingual.
Animators should be able to communicate with each other, each using his 'strongest' language. They should be able to meet before the conference.
2. It is an advantage if an animator has access to the group of Italian or Spanish speaking participants.
3. There should be time for more discussions in the groups after 3 or 4 sessions. In the planning of the presentations and of the main lectures there should be more coherence.
A lecture could be a starting point for discussions in the groups.
4. It was very fruitful for the discussions in the group having the duty to report in plenum.
5. Rapportage in plenum can be done by different teams. The advantage is that the report has coherence of the points of view of the presentators.
An other team can give other accents to keep different ideas in balance.
6. Careful translation during groups discussions does not slow down the discussion, it deepens the discussion, especially if debators try to translate each others statements.

LUCIENNE FELIX

ESSAI SUR L'HISTOIRE DE LA CIEAEM

EN préparation à la réunion de Frascati d'avril 1984, la Commission a demandé à Renée Servais et à moi-même, de présenter un résumé de l'Histoire de la CIEAEM à l'occasion du 35 ième anniversaire de sa fondation.

Je n'ai d'autre titre pour entreprendre ce travail que d'avoir participé à la première Rencontre en avril 1950, dans la forêt de Debden, près de Londres et d'être restée fidèle ensuite. Je ne fus absente que lorsque, à l'étranger pendant les vacances scolaires, je tentais de propager, dans l'esprit de la Commission, ce dont j'avais moi-même profité.

Quant à Renée Servais, son apport était indispensable. Depuis la troisième Rencontre, assistant à toutes les Réunions, elle a travaillé pour nous aux côtés de son mari, Willy, étroit collaborateur de notre fondateur Caleb Gattegno, et, devenu, en 1961, notre Secrétaire et l'âme de la Commission, jusqu'à ce que nous ayions eu la douleur de le perdre à l'issue de la 31 Rencontre d'août 1979 en Hongrie. Renée dispose de documents écrits, lettres, notes manuscrites, imprimés, tout un ensemble précieux qui comble bien des lacunes.

Nous avons donc présenté à Frascati un texte distribué lors de la Rencontre aux membres présents, grâce au travail dévoué de nos hôtes italiens que je remercie vivement. Ce n'était qu'une esquisse et nous avons demandé avec insistance de recevoir les remarques et témoignages permettant de corriger et compléter l'étude. Seuls les intéressés peuvent révéler ce qu'ils ont reçu et ce qu'ils pensent avoir donné dans le travail en commun. Je remercie très sincèrement ceux qui ont bien voulu répondre à cet appel et espère recevoir d'autres documents.

La santé de Renée ne lui ayant pas permis de poursuivre le travail, j'ai continué seule, rédigeant un second texte, puis un troisième que j'ai adressé à Galeb Gattegno, à l'Institut qu'il a fondé à New York. Il a bien voulu répondre, corriger des erreurs et accepter d'écrire une préface, tout en déclarant: "En pas mal d'endroits, j'avais des souvenirs différents de ceux qui est rapporté." Ceci est un point important que je tiens à souligner, bien que je sois réconfortée par la réaction du Professeur Gustave Choquet qui "juge que le texte réussit à faire revivre des journées qui nous ont tous fortement marqués."

Rien ne me préparait au rôle d'historiographe de la Commission. Je n'ai trouvé que très peu de notes prises en direct ou rédigées après coup et ma mémoire a été filtrée par l'intérêt plus ou moins vif que je prenais à ce qu'apportait chaque instant. La personnalité de chacun, son expérience, son attente, font que le compte-rendu diffère suivant le témoin. Après 20, 30 et même 35 ans, la mémoire ne peut prétendre atteindre l'objectivité. Pour ne donner qu'un exemple, pensons à la

Rencontre qui, pour moi, fut le sommet; celle de Melun, en avril 1952, sur le thème: "Structures mathématiques et structures mentales", sujet qui était au centre de l'actualité. Grâce à des notes prises et rédigées immédiatement et à des souvenirs restés vivants, je peux faire le compte-rendu d'une journée, mais d'une seule journée: celle où Dieudonné, Choquet et Lichnèrowitz, nos trois grands savants mathématiciens, exposèrent leurs idées et dialoguèrent. Je revois leurs gestes, j'entends leurs intonations, je me souviens aussi de quelques interventions dans la discussion, telle celle de Gonseth. Or celui-ci fit, un autre jour, en exposé: Je sais que je le trouvais très remarquable, que je fus très intéressée. C'est même cette rencontre qui me mis en relation avec lui, qui le conduisit à me demander un article pour sa Revue "Dialictica" ... Mais de son exposé de Melun, il ne me reste rien, ni notes, ni souvenirs. Ma mémoire est vide - de même pour l'exposé de Piaget ... C'est bien avec raison que Caleb Gattegno m'écrit maintenant: "A Melun, bien d'autres choses se passèrent."

C'est à cause de ces lacunes de ces insuffisances, sans doute aussi d'injustices involontaires, que je dois affirmer ma responsabilité en signant ce texte.

Finalement une série de corrections m'a conduite à rédiger un quatrième texte dont j'ai pu envoyer un exemplaire aux membres de la Commission (reproduit grâce au travail supplémentaire qu'ont bien voulu faire les Secrétaires de Guy Brousseau). Quelques témoignages tardifs me sont parvenus en réaction à cet envoi. J'espère encore que d'autres suivront, me permettant d'écrire un texte considéré comme définitif pour une éventuelle diffusion. En particulier il faut me résoudre à ajouter un paragraphe pour répondre à certains jeunes qui nous disent: "De tout cela, que reste-t-il? C'est un échec. Pourquoi?" La difficulté est pour moi dans le fait que ma réponse est *la mienne*, alors que j'aurais voulu une réponse de la Commission elle-même d'autrefois, dont je n'étais qu'un membre parmis d'autres plus prestigieux, peu qualifiée pour la défendre.

QUELLE EST L'ORIGINE DE LA CIEAEM?

Elle naquit en 1950, dans l'immédiate après-guerre, lorsque s'achevait le retour des combattants, des prisonniers, des réfugiés, clandestins ou seulement déplacés, quand chacun retrouvait un travail normal après des expériences insolites, et que reprenaient les relations internationales. L'appel d'un inconnu, Caleb Gattegno, apatride (avant d'avoir acquis la nationalité britannique) atteignit quelques enseignants des mathématiques d'Europe occidentale. (Pour moi, ce fut par l'intermédiaire de Mme Hatinguais, Directrice du Centre International de Pédagogie de Sèvres nouvellement crée). La réponse fut positive pour une douzaine de volontaires. Le petit groupe qui se réunit dans une baraque de la forêt de Debden, près de Londres, pour une quinzaine de jours à Pâques 1950 était presque entièrement formé d'anciens camarades de combat ou d'individus avant connu camps ou clandestinité. C'est dire que les restrictions et cartes d'alimentation, le séjour en dortoirs, la

toilette à l'eau froide, le service et la vaisselle à assurer en commun, tout cela ne posait pas de problème. Mais quel plaisir de nous trouver tous disponibles pour travailler à l'amélioration de l'enseignement, si différents par nos habitudes, nos traditions, nos conceptions des mathématiques, mais si proches par nos aspirations et la joie de nous rencontrer. Dans mon souvenir, nous étions maigres, pauvres et jeunes. (Jeunes? Je m'aperçois avec étonnement aujourd'hui, en écrivant ceci, que, jeune, je ne l'étais pas! Déjà, avec mes 50 ans, mes trente années d'ancienneté d'enseignante, j'étais la plus âgée. J'avais dix ans de plus que Gattegno, plus que mes nouveaux amis. Ainsi, je suis restée 35 ans doyenne d'âge de la Commission!
Etonnant, n'est-ce pas? .. Mais qu'importe comme les autres, j'étais jeune puisque nous vivions une renaissance après la rupture de la guerre pour créer un monde nouveau où nous allions affirmer notre place.

Quel était l'objet de la Commission dans l'esprit du fondateur et dont nous prîmes conscience progressivement? Le titre l'indique: Commission Internationale pour *l'Étude* et *l'Amélioration* de *l'Enseignement* des *Mathématiques*. Il fallait comprendre 'Etude' d'abord 'Etude' permettant l'Amélioration.
Citons Gattegno:

> "Pour l'étude, nous devions être un groupe où épistémologistes, logiciens, psychologues, mathématiciens, pédagogues, (on ne parlait pas alors de didacticiens) devaient apprendre les uns des autres ce qu'ils ne savaient pas."

Ainsi ceux qui mettaient l'accent sur la logique ou l'intuition, sur l'expérimentation ou la théorie, sur la formation scientifique ou sociale, tous devaient, non seulement se supporter, mais encore collaborer, se remettre en question; attitude d'humilité pour étudier et progresser et non attitude du propagandiste qui veut diffuser et peut-être imposer ce qu'il considère comme la solution définitive.

Pour obtenir une telle collaboration, Gattegno nous conviait à vivre en commun une dozaine de jours dans un logis séparé du monde, dans une simplicité familiale, en toute égalité, non comme des spécialistes plus ou moins prestigieux mais comme des personnes humaines riches de nos expériences et de nos réflexions, poursuivant notre propre apprentissage. Nous rencontrions dans divers pays, non seulement des collègues, mais aussi des enfants rassemblés pour l'occasion.

Par ses dons exceptionnels, Gattegno savait organiser de telles réunions et obtenir la participation de chacun - mieux vaudrait-il peut-être dire qu'il l'*exigeait*! C'est que lui-même poursuivait son propre apprentissage, ce que ses exigences cachaient à certains. Il se définit lui-même comme 'éternel étudiant' et il s'explique sur son départ, sur la raison pour laquelle il nous a quitté en 1960. Par son succès même, la Commission on changeait de nature: "Je ne trouvais plus ma place parmi ces *'améliorateurs-infus'*. De plus, la Commission risquait de devenir un instrument politique. C'est en effet ce qui devait apparaître cinq ans plus tard: un projet rédigé fut adopté, aux multiples possibilités de réalisation, mais il devint *programme*, prétendant conclure les recherches

et, par suite imposer une *programmation* stricte. Le pas fut franchi en dehors de nous et conduisit (en France et en Belgique) à une période de véritable dictature où le dogmatisme triomphait.
Notre faute a été de ne pas réagir à temps, mais celui qui défend la liberté des opinions est mal armé pour apercevoir le danger des démarches despotiques avant qu'elles s'affirment.

En 1970, la Commission s'était liberée, régénérée, mais elle avait changé de visage. Sous la direction éclairée de Zofia Krygowska, qui avait fait preuve d'un remarquable dynamisme éclairé dans l'institut qu'elle dirigeait à Cracovie et qui était parmi nous depuis 1956, la libre expression de toutes les tendances psychologiques et pédagogiques retrouvait ses droits, mais le groupe s'était élargi considérablement: 100, 200 participants aux Rencontres, et même 300 en 1981, dans le cadre merveilleux des lacs italiens, 65 groupes de travail à Orléans en 1982 sous la présidence de notre ami Claude Gaulin, puis d'Emma Castelnuovo.

La CIEAEM est devenue, non plus une source de Recherches, mais un lieu d'exposition et de confrontation. Les nombreux participants viennent y rendre compte des recherches faites dans les divers groupes, Centres, Instituts qui existent maintenant partout - contraste extraordinaire avec notre isolement d'autrefois.
La Commission proprement dite est devenue, par la force des choses, une Assemblée de représentants des divers pays, chargée de la gestion d'un lourd organisme, avec Comité, Bureau, Chargés de mission. Tout ceci efficace grâce au dévouement de volontaires aux talents d'organisateurs. Les Rencontres actuelles ne peuvent exister sans des inventions accordées par les Instituts qui nous reçoivent (ce qui, du reste ne porte pas atteinte à la liberté et l'indépendance de nos travaux). Et la Commission est devenue assez riche pour pourvoir, depuis 1976, publier les Actes des Rencontres, gros volumes d'environ 350 pages mis au point par les plus dévoués des membres actifs du Bureau. Succès évident par conséquent!

Mais quelle est donc la spécificité de la Commission actuelle qui attire des participants pourtant sollicités par tant d'organismes crées à leur intention? Ce serait aux nouveaux venus de le dire, mais on peut affirmer que c'est ce qui subsiste de cette atmosphère très particulière de l'ancien temps, un relent du foyer familial qu'alluma Gattegno et qu'entretient Willy Servais, auprès duquel veillent encore quelques fidèles survivants, une certaine façon de se dévouer, d'accueillir, d'aider, de respecter autrui dans une amicale égalité. Peut-on espérer maintenir ce charme désuet dans la société nouvelle?
Mais quelle est la politique de Recherche devant les nouvelles conditions imposée à l'enseignement du point de vue scientifique, technique, social? Ne serait-il pas urgent de la définir? Ce sera la tâche de la nouvelle génération si la Commission doit être digne de son passé et mériter d'en garder le titre où le mot '*étude*' est le dominant.

Lucienne Felix
Paris/France.

MICHAEL NEUBRAND

THE PLANETARIUM OF CHRISTIAAN HUYGENS AT LEIDEN AND CONTINUED FRACTIONS

THIS contribution is mainly intended as a tribute to the local spirit of Leiden, and as a tribute to one of the most famous Dutch mathematicians and scientists, Christiaan Huygens (1629-1695). His planetarium is now exhibited in the Boerhaave Museum at Leiden. But the mathematics used by Huygens for the construction of this planetarium is also of interest from the viewpoint of mathematics education: Especially the genetic approach in mathematics teaching can be shown by this way as a powerful, insight providing method. Also other didactical remarks are possible. See [2] for details.

In 1682 Johannes van Ceulen, a clockmaker in Den Haag constructed a planetarium which was designed by Christiaan Huygens. This planetarium, of the size of a large clock, shows the planetary system as N. Copernicus has described it, with the sun as its centre. The planetarium is one of the earliest demonstrating Copernicus' system, and in fact the first of this relatively small size and simple, though extremely correct, mechanism. With this planetarium Huygens displayed all the information about the sun system, known at his time. E.g. the relative sizes of the planets and the sun are engraved, and all the moons of the planets known at that time were shown on small slices around the planets, but unfortunately not conserved to our days.

The planetarium operates essentially like a gear in a motorcar. There is a shaft which bears cogwheels, one for each planet. These cogwheels drive cogcircles on which the planets, represented by small balls are mounted. The cogwheel and the cogcircle for the Earth both have 60 cogs. So, in order to determine the numbers of cogs on each wheel and circle, one has to relate the angle which moves the planet around the sun in a certain time, to the respective angle of the Earth.

This, and all the mathematics stressed for the actual calculations of the numbers of cogs are described in reasonable detail by Huygens himself in his 'Descriptio Automati Planetarii' [1]. To demonstrate his method he has chosen the example of Saturn. In 1 year, according to the data available to Huygens from the tables of Riccioli, Earth and Saturn turn around the sun with the following angles:

$$\omega_{\text{Earth}} = 359^0\,45'\,40''\,31''' = 77\,708\,431'''$$
$$\omega_{\text{Saturn}} = 12^0\,13'\,34''\,18''' = 2\,640\,858'''$$

Therefore, the ration of the number of cogs on cogwheel and cogcircle of the planet Saturn has to come close to the very complicated number:

$$\frac{77\,708\,431}{2\,640\,858} = \frac{\omega_{\text{Earth}}}{\omega_{\text{Saturn}}} =: \alpha.$$

But, how can one find smaller, more convenient numbers u, v, such that $u/v \approx \alpha$ holds with best possible approximation?

To solve this problem, Huygens used for the first time in a systematic way, continued fractions:
Expand:

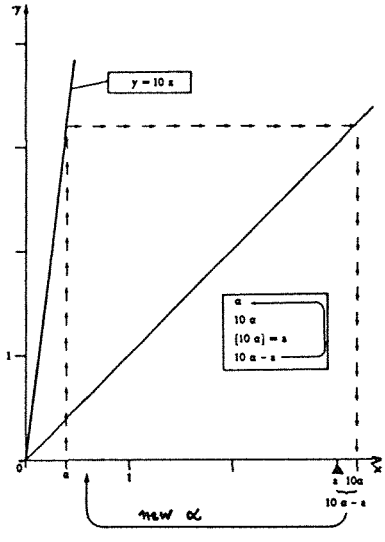
$$\frac{77\,708\,431}{2\,640\,858} = 29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{\ddots}}}}} =: [29,2,2,1,5,\ldots]$$

as a continued fraction by Euclid's Algoritm, and take then an appropriate part of this expansion, e.g.

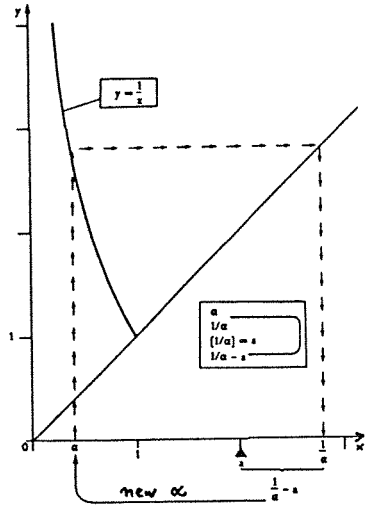
$$[29,2,2,1] = \frac{206}{7}.$$

Then is, as Huygens stated, $\frac{206}{7}$ as close as with such small numbers possible, to the value of the expanded number α.

The key for a heuristic approach to that property of continued fractions in present times seems to me the interpretation of continued fractions as 'numeral expansions' of real numbers. By this concept we mean the representation of a real number as a sequence of natural numbers. For this concept, everybody knows the example of the decimal expansion. But, decimal expansion and the continued fraction expansion are very similar, as one can see best if one compares the following visualizations of the two algorithms.

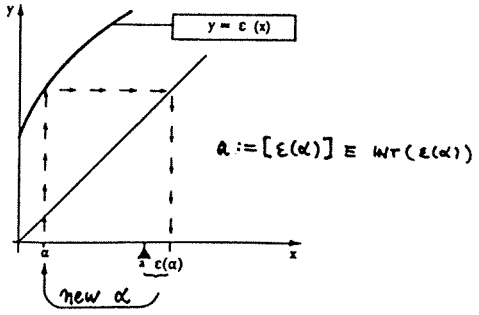


decimal expansion



continued fraction expansion

In any case, a (marked by) will be the next 'digit' of the expansion of the real number α, started with. So, the expansion are both of the typus:



($\epsilon(x)$ denotes the 'expansion function'). Only after reaching at a general concept, conjectures drawn from an example can be used for fruitful heuristics.

We take for an example:

$\pi = [3,7,15,1,292,1,1,...]$

and find the 'approximations':

[3,7] = 22/7 (cf. Archimedes)

[3,7,15,1] = 355/113 (cf. A. Metius).

These values are both wellknown as good rational approximations for π. So, the conjecture is justified: Maybe the continued fraction expansion is suitable to find rational approximations for real numbers (like the decimal expansion is 'suitable' for the arithmetic operations).

In fact, a more detailed study of the behaviour of the convergents of a continued fraction reveals even more. The convergents of the continued fraction expansion of a real number α are the best rational approximations of α in the sense, that roughly spoken, one cannot get closer to α with smaller denominators. By this observation, Huygens method is fully justified. He applied the best possible method, he could do. (A very satisfactory proof of that theorem is due to Legendre.)

Michael Neubrand
Seminar für Mathematik und ihre Didaktik
Universität Bonn
Bonn/W. Germany.

REFERENCES

[1] Huygens, Chr., *Descriptio automati planetarii*, Oeuvres compl]etes, Tome XXI - Cosmologie, Den Haag, Martinus Nijhoff, 1944.

Note: It is conjectured, that this manuscript was written by Huygens in 1691. It was published posthumously in 1703.

[2] Neubrand, M., *Kettenbrüche - Beste Näherungen, transzendente Zahlen*, Der Mathematikunterricht, 30(5), pp. 29-47, 1984.

MICHELE EMMER

CINEMA AND COMPUTER GRAPHIC: A NEW AND AN OLD AID FOR EDUCATION

IN the previous meetings of the CIEAEM I already had the opportunity to show and discuss some of the movies that I have been realizing in the last years on the relationship between art and mathematics, more in general between art and science [1], [2]. The project *'Art and Mathematics'* was started several years ago: the making of movies is only a section of the project; another important section is the organization of seminars and congresses on well defined topics; all activities are carried out with the cooperation of mathematicians and scientists of the various disciplines as well as historians of art and artists. A not secondary part of this activity is the interest in mathematical and scientific education at different levels. Some initiatives in the last topic are only at a starting and experimental stage while others have been already carried out. Another important section is the use of computer graphic in all the other topics of the project. In particular thanks to the cooperation of mathematicians expert of the topic like Thomas Banchoff, chairman of the Department of Mathematics of the Brown University at Providence, computer graphic has been used in movies to illustrate the mathematical point of view as well as the artistic one of the various problems [3].

A different use of computer graphic at a more didactic level, for the students of the courses of Advanced Calculus have been carried on in the last years at the Physics Department of the University of Roma I; this activity is supported by a grant of CEE (European Community) in cooperation with Universities of other European countries. A new project in this area has been started a few months ago in order to test possible use in high school teaching as well to experiment an integrated utilization of more traditional audiovisual aids (cinema, videocassettes) and personal computers [4], [5], [6].

So these are the general lines of activities of the project on *'Art and Mathematics'*. I will now describe in more details the making of the movies of the series with the same title of the project.

All the movies in the Italian version are coproduced with the DSE-RAI, the educational department of the State Italian Television. The movies are also produced in the English version while for the end of the year a French version will be realized for the opening of the Musée de la Science de la Villette in Paris. I have discussed elsewhere the possible didactic use of the movies [7], [8]. I also have considered their possible contribution to the intuition of mathematical problems [9]. I refer to these papers for more details.

I would like to give more details on the making of the movies of the new series that have been shown at the meeting together with some

observations by a didactic point of view.
The films shown are: *'M.C. Escher: Symmetry and Space'*, done in 1982; the film has received the diplom of honour at the 35th International Festival of Scientific Cinema in 1983. *'M.C. Escher: Geometries and Impossible Worlds'*, done in 1984 and *'Knots'*, also realized in 1984.

For the two movies on M.C. Escher I was able to show at the meeting, part of the material that have been used to make the animations and the special tricks; that is I have shown how it was possible to reproduce in images some of the mathematical ideas that are the bases of Escher's work.
The role of Escher's work in mathematical and scientific education is by now almost wellknown. Nevertheless it was never discussed in a congress the theme of the possible connections between the art of Escher and the scientific community; not only in connection with scientific education but also with scientific researches in the various scientific disciplines. By this point of view it is possible to call 1985 the 'Year of M.C. Escher'. In fact at the end of march 1985 an interdisciplinary congress dedicated to M.C. Escher has taken place in the Math. Department of the University of Rome I.
Due to the interdisciplinary peculiarity of the meeting an exhibition of the Escher's works was organized in the same period. The exhibition took place at the Dutch Institute of Rome for two months.

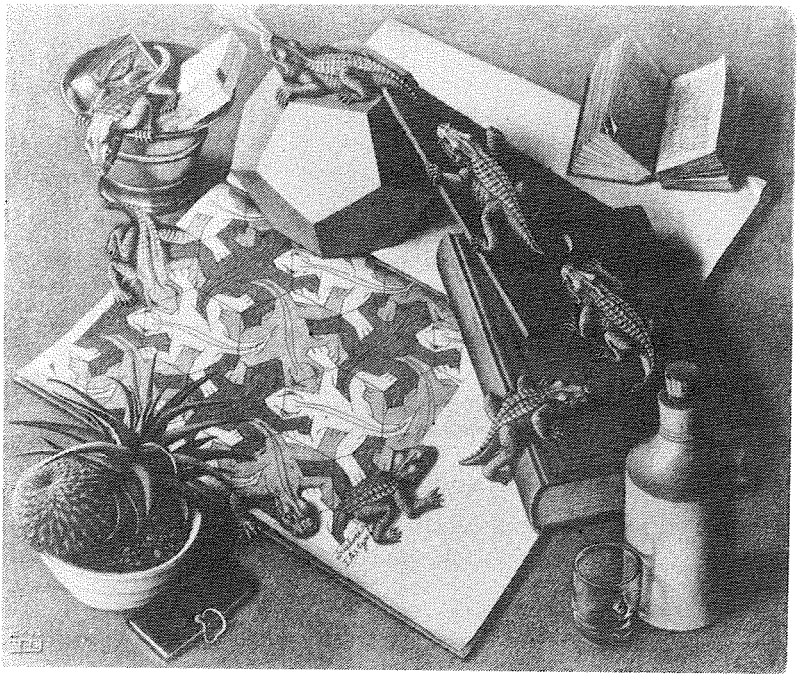
The congress was organized in themes and sections: Escher and Geometry; Escher and Symmetry; Escher and Crystallography; Escher and Computer Graphic; Escher and history of art; Escher and scientific education. Among others attend the meeting the mathematicians
Coxeter, Penrose, Grünbaum, Shephard; historians of art like Teuber and Maltese, crystallographers as C. Macgillavry and many others. A section was entirely dedicated to the workshop during which it was possible to present and discuss the possible use of Escher's works in the various sectors of scientific education, including computer graphic. To have more details I refer to the Proceedings of the Congress as well as to the catalogue of the exhibition in which a mathematician, Coxeter, and a crystallographer, Macgillavry, talk of the artistic activity of Escher [10], [11].

Coming back to the movies on Escher, the main idea was to use the "World of Escher" to realize animations in order to produce images if possible even more impressive than the original ones. Escher himself in his book on "The Regular Division of the Plane" [12] pointed out several times to cinema techniques:

> "... A succession of figures with a number of metamorphoses acquires a dynamic character. Above I pointed out the difference between a series of cinematographic images projected on a screen and the series of figures in the regular division of plane. Although in the latter the figures are shown all at once, side by side, in both cases the time factor plays a part."

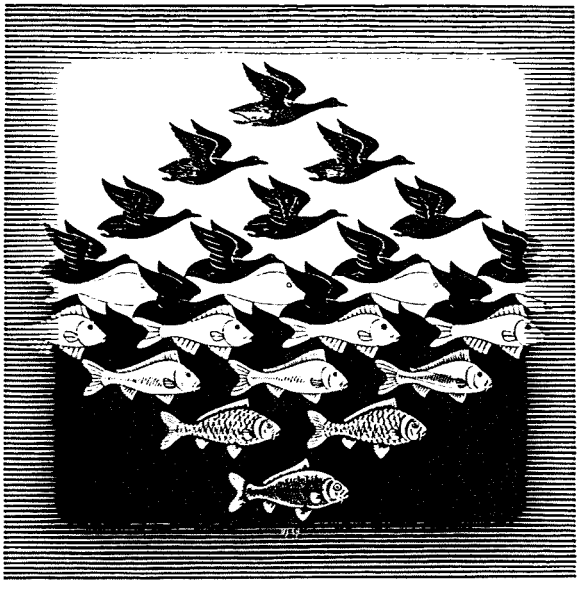
Rather than going on with the analysis of the possibilities that the technic of Escher opens the making of movies, for which I refer to my paper in the Proceedings of the Escher congress [13], I would like to make

some observations on how the film itself and the cinematographic techniques used in its making in connection with an educational point of view. I would like to stop considering only one aspect, surely one of the more interesting: Escher's tessellations. It is wellknown that all mosaics Escher made starting from the 40s were considered by him as a test for his 'true' works, engraving and lithographs. During his life he made more than 150 tessellations. In almost all of them Escher used motifs of living beings, animals in particular; he considered them the more useful to be easily recognizable even without looking at the internal details of the drawings but only referring to the external silhouettes, (fig. 1).



Looking at his mosaics (most of them have been published for the first time in the catalogue of the Japanese exhibition in 1983 [14]) we are struck by the great varieties of shapes and colours. Nevertheless it is wellknown that the bases of periodic tessellations of the plane are rigid mathematical rules. More precisely the 17 crystallographic groups of the plane. So a first mathematical topic arises 'spontaneously' from Escher's mosaics: group theory, in particular the theory of crystallographic groups. So it is possible to introduce, starting from artistic and historical points of view (Arab art, mosaics in the various civilizations) problems connected with structure, in particular mathematical, of mosaics, and their analogy with the internal structure of crystals. But you can also go even further, because many of Escher's mosaics are in colour and of course colour makes all things more complicated. It is a topic to

which several mathematicians in the last years have looked with interest. As Coxeter has pointed out several times, Escher's intuitions were very useful, [15].
Many others are the hidden ideas in the works of Escher. If we consider the point of view of visual perception many prints are really tests [16]. I would like only to refer to a very important question in the construction of mosaics 'à la mode d'Escher'. That is using the silhouettes of animals in which the same line is the boundary of two different shapes: the conflict between the figures and the background.
The fish swimming in the water, the water is nothing else than a set of birds flying in the air, the air is nothing else than a collection of fish swimming ... (fig. 2).



Another mathematical problem comes out. Black and white swans of the famous 'Night and Day' by Escher are quoted as an example of a visual catastrophy in the book 'Topologie et Perception' by Bruter [17]. The catastrophy, the sudden change from a shape to another, is of the type called by Thom Cusp of Whitney. In the same time it is possible to reverse the procedure and start from the abstract mathematical idea and than develop fantasy and imagination, even using a computer.
So the stimuli and visual suggestions that the two movies on Escher give, allow us to develop also in the direction of education and didactic of mathematics and science new interdisciplinary ideas that can be very interesting at the various level of learning, from elementary school to high school to University.

In 1984 an experimental course for children (from 8 up to 12) was organized by several mathematicians of the Universities of Roma I and

II. 'Lectures' were given by S. Buoncristiano, M. Emmer, F. Ghione, C. Procesi and C. Rossi. Also movies have been used. A first result of the experiment is the publication of a book by F. Ghione, coordinator of the course [18]. Other books are in preparation, always based on the topics of the 'lectures'.

In the movie on Escher, computer graphic is not really used while in the movie on 'Knots' some mathematical knots are illustrated and visualized using this technique.

Until now 13 movies of the series 'Art and Mathematics' have been realized while four other movies are in project [19], [20], [21].

Michele Emmer
Dipartimento di Matematica
Università di Roma I.
Roma/Italy.

REFERENCES

[1] Emmer, M., *Art and Mathematics: a Series of Movies*, Processus de géometrisation et de visualisation, 33e Con. CIEAEM, Pallanza, 1981, pp. 129-132.

[2] Emmer, M., *A New Series of Movies: Art and Mathematics*, Moyens et Media dans l'enseignement des Mathématiques, 34e Con. CIEAEM, Orléans, 1982, pp. 285-289.

[3] Banchoff, T., M. Emmer, *Animation Techniques in Mathematical Movies*, to appear Proc. Cong. Math. and Movies, Univ. Torino, 1984.

[4] Emmer, M., *Il ruolo degli audiovisivi e del software nella didattica delle scienze*, to appear in Proc. Tecnologie audiovisive e tecnologie informatiche nella didattica delle scienze, Mondavio, 1985.

[5] Emmer, M., *The Visual Experience: various Techniques to illustrate the Connections between Mathematics, Science and Art*, Proc. ANIEM III, Appl. Nouvelles Tech. Educ. Multimedia, CESTA, Paris, 1985, pp. 43-50.

[6] Capuzzo Dolcetta, I., M. Falcone, *Il Corso di Analisi Matematica con il Personal Computer*, to appear.

[7] Emmer, M., *Un esperimento di matematica visiva: i film della serie arte e matematica*, Il ruolo della geometria nella cultura e nella scuola, Tilgher Ed., Genova, 1983, pp. 93-108.

[8] Emmer, M., *La matematica e l'arte, il cinema e la tecnica dell'animazione: un modo non usuale per fare dell'educazione matematica*, L'Educazione Matematica, Cagliari, IV, 1983, n.3, pp. 35-42.

[9] Emmer, M., *Cinema as a Stimulus in the Intuition of Geometry*, to appear in Proc. Cong. *Intuitive Geometry*, Budapest, 1985.

[10] Coxeter, H.S.M., M. Emmer, R. Penrose, M. Teuber, (Edts), *M.C. Escher: Art and Science*, Proc. Int. Cong. Univ. Roma, 1985, to appear by North-Holland.

[11] Emmer, M., C. Van Vlanderen, (Edts), *M.C. Escher*, catalogue of the Exhibition at the Dutch Inst. Roma, 1985; enlarged version to appear by Palombi Ed.

[12] Escher, M.C., *The Regular Division of the Plane*, Fond. De Roos, Utrecht, 1958; reprinted in English in *The Life and Work of M.C. Escher*, Abrams, New York, 1982

[13] Emmer, M., *Movies on Escher's work and their Mathematical Appeal*, to appear in Proc. Cong. on Escher.

[14] *M.C. Escher's Universe of Mind Play*, Catalogue of the Japanese Exhibition, Fuji Tel. Gallery, Tokio, 1983.
[15] Coxeter, H.S.M., *Coloured Groups*, to appear in Proc. Escher Cong.
[16] Bonaiuto. P., *The Usual, the Ambiguous and two types of visual incongruity in the Work of M.C. Escher*, to appear in Proc. Escher Cong.
[17] Bruter, C.P., *Topologie et Perception*, Vol. II. Maloine-Doin Ed., Paris, 1976.
[18] Ghione, F., *Tau Topologo*, La Città del Sole Ed., Roma, 1985.
[19] Emmer, M., *Art and Mathematics: a Series of Films*, Structural Topology, Montreal, 1982,nr. 7, pp.69-72.
[20] Emmer, M., *Art and Mathematics: a Second Series of Movies*, Structural Topology, Montreal, 1984, n.10, pp. 35-40.
[21] Emmer, M., *Art and Mathematics*, Booklet, Roma, 1984.
[22] Emmer, M., *Arte e Matematica*, book in preparation.

ILLUSTRATIONS

(1) M.C. Escher: "Reptiles", Lithograph (1943), 334 x 385.
(2) M.C. Escher: "Sky and water", Engraving (1930), 435 x 439.

BERNHARD ANDELFINGER

MATHE-JOURNAL - A NEWSPAPER FOR TEACHERS

MAKING a newspaper by teachers for teachers seems to be an important and useful in-service-action for teachers.
The "*mathe-journal*" is an informal newspaper (2 pages DIN A3) which is published twice a year and self-financed by a group of teachers of mathematics.
The newspaper is distributed by this group to their friends and the friends of the friends ..... Thus nearly 3000 teachers are reached.

The *mathe-journal* does not substitute the official and national magazins for mathematics education, but it is a complementary one. The main aims of *mathe-journal* are:
— to encourage teachers to write, produce, read, and react;
— to make teachers more sensitive for their profession.

Therefore the articles in *mathe-journal*:
— describe informal observations in/outside the classroom (e.g. problems of a family with home-tasks of their children);
— describe all-day-problems of the professional mathematics teacher (e.g. misunderstanding of teacher and pupils, conflicts between teachers);
— describe results of educational research which are important for all-day-practice in the classroom (e.g. hidden concepts of pupils);
— discuss classroom materials, tests, etc.

The reactions of the readers are encouraging. This type of a regional in-service-action by teachers for teachers seems to influence all involved persons, the producers as well as the readers.

Contact-address:

Redaktion Mathe-Journal,
c/o Dr. Bernard Andelfinger,
Rosenstrasse 19f,
D-4044 KAARST 1.
W. Germany.

BERNHARD ANDELFINGER

MATHEMATICS FOR ALL
A REPORT ABOUT THE DID-M-PROJECT (FRG)

THE DID-M-Project at the Landesinstitut für Schule und Weiterbildung in Soest (W. Germany) in the country of North-Rhine-Westfalia is a governmental project for developing perspectives of mathematics education in the 1990s (for pupils aged 11-16).
The project group works in cooperation with the IDM (Institute for Didactics of Mathematics) at the University of Bielefeld (W. Germany).

The aim of the project DID-M is to find answers to the question: what can 'mathematics for all' be in the near future?
For this the project group collects results of educational research about teaching and learning of mathematics. A lot of teachers are asked and information from industry, university etc. is collected.
From this data basis the project goes on in the following steps:

1. What works in the classroom?
2. What is accessible for pupils?
3. What is necessary for society?
4. What is necessary for scientific education?

After that conclusions have been drawn:
— What can 'mathematics for all' be like?
— What are conditions for this?
Let's give now a short summing up of results of steps 1-4 related to the topics 'arithmetics/algebra':

STEP 1:
What works in the classroom?

Teacher concepts are often abstract, systematic, logical, syntactical.	different from	pupils' concept images are often informal, math is difficult, not logical.
Teachers have a concept of two closely related topics: (1) arithmetics (2) algebra = generalized arithmetics		Pupils divide in mainly four topics: (1) 'normal' numbers and operations. (2) 'rule of three', % (3) terms for putting in numbers (4) artificial numbers (e.g. most fractions) and artificial operations (e.g. most algebraic manipulations)

STEP 2:
What is accessible for pupils?

Topic 1 (normal numbers and operations, esp. decimals and simple fractions) is accessible for all pupils
Topic 2 (rule of three, ratio/proportion, %) is accessible for most pupils, but only after a long time learning
Topic 3 (putting in numbers in terms/formulas, making tables and graphs) is accessible for most pupils
Topic 4 (artificial fractions and algebraic techniques) is accessible for only 10% of the pupils.

STEP 3:
What is necessary for society?
The topics 1,2,3 are necessary, not topic 4. But for society also statistics, using computers and problem solving are necessary.

STEP 4:
What is necessary for scientific education?
Mathematics education also needs an educational philosophy. In the DID-M-project this philosophy says that developing of concepts in the mind of pupils by help of central ideas and methods of mathematics is the most important thing of education in the mathematical classroom. Developing of techniques or fulfilling of society's needs is not enough.

CONCLUSIONS

When the results of step 1-3 are compared you may suggest that the limitations and topics set up in the *Cockcroft report* give a useful frame for 'Mathematics for all'.
But because of the suggestion of step 4 this cannot be enough. An epistemological background is needed. Therefore the DID-M-group modified the frame of the *Cockcroft report* and proposes a core of education in arithmetics/algebra from 5th grade to 10th grade:

— long-time-learning of the various aspects of rational numbers; computing, describing situations and problem-solving by using these aspects (with and without calculators)
— using of linear statistics and diagrams for describing situations, for data exploration and for problem-solving (with and without computers)
— using of formulas/graphs for describing of situations and for problem solving (with and without calculators/computers).

(To this core a lot of geometry must be added, but this was not discussed in this report.)

To make these ideas effective in all-day-teaching some important conditions are necessary. First we need teachers knowing children's problems and accepting these as their own; we also need educational departments with high flexibility and trust in the work of their schools.

Bernhard Andelfinger
Studienseminar SII
Mönchengladbach/W.Germany.

REFERENCE

[1] Andelfinger, B.: *Didaktischer Informationsdienst Mathematik*, Thema: Arithmetik, Algebra und Funktionen, Curriculum Heft 44, Landesinstitut für Schule und Weiterbildung Soest/FRG, 1985, p.279, ISBN 3-8165-0244-X.

JAN KAREL TIMMER

AXIOMATIC DIDACTICS

WHY, HOW AND WHAT

WE could consider didactics as being an art. If we want to make a part of them a science, we want axioms for the foundation of something practical, that can be explained to future teachers and asked in testpapers. My practice goes from the years 20 into the 70's and the age of my pupils goes from about 6 to about 60. I have studied their reactions while looking for principles and it is only now, that I call them axioms.
The first E in CIEAEM stands for étude, study. What study? The answer is given by the second E(nseignement), that means teaching, so *study of teaching*. That is exactly what I have frequently been doing. Study is comparison; that is a not convertible statement. The first axiom fits in.

THE FIVE AXIOMS

Comparison I
Study of abstract objects can be supported by study of concrete objects as a background.

Structure II
All objects to be studied should be seen in the context of set and subset. This is an appeal for specialisation and generalisation.

Reversability III
(I borrowed the word from *Piaget*, but I gave it my own conception).
Many thoughts can be presented in different shapes. If possible, we mention them all.

Place IV
The place that we give to the sub-units of a totality in relation to one another can have a clarifying influence to understanding and committing to memory.

Transfer V
(This fits directly to the first axiom).
Transfer of culture can be improved by comparison to transfer of concrete things.

Remarks
In my opinion the totality of these axioms is sufficient to support all the transfer of culture, so including all mathematics. But who knows there may be one missing link. I invite the reader to try and find it. Du choc des opinions jaillit la vérité! The axioms even overlap one another; many didactical experiences are supported by more than one of them.

THE AXIOM OF COMPARISON

When I was a boy of 8 years old, I was told that our layer of air was, in comparison, as thick as the rind of an apple. I remember that this statement made a deep impression on me, never to forget.
The biogenetic law of Haeckel compares the genesis of a baby to the genesis of mankind and calls it a recapitulation. He did not (as far as I know) say anything related to thinking.
Suppose, that we continue his law into human thinking, what happens?
In Europe we had this sequence: Pythagoras, Euclides, much later algebra, much and much later the computer.
As I hate the system of partitions (as in politics) my conclusion is not that we should take first the whole Pythagoras and only speak of the computer after the whole axiomatic system, but it may clear, that in the preceding centuries we have bothered many children with abstractions before they were mature for them.

Mankind is not only apt to evade much complication, but also to overlook very simple solutions, to overlook his own feet.
Simple mathematics can be continued in two directions, a more complicated one and (or) a less complicated one, that leads us to the foundations. That is not interesting and consequently too difficult for young people. Perhaps my illustration is also difficult because even a unit fails; apparently it does not exist!
This first axiom must have a serious impact on our didactics: First a Pythagoras-geometry with the geoplan, restricted to natural numbers

(and some exceptional negative ones), followed by some scarce algebra.

THE AXIOM OF STRUCTURE

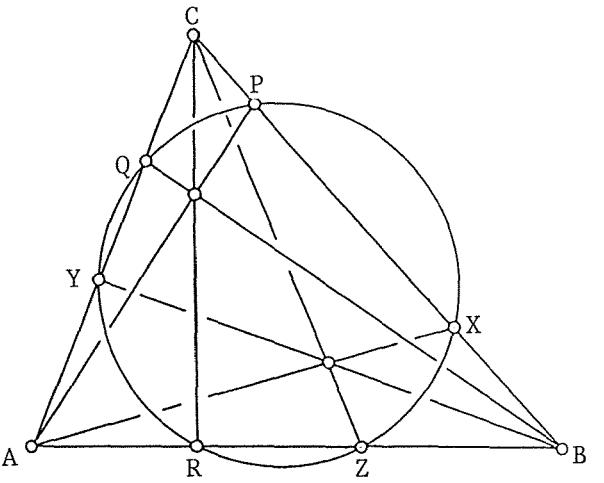
It is a habit of mankind, to draw the attention to exeptions. For a 4-years old child $3\frac{1}{2}$ is an exception in the set of whole numbers, but the exception has an *inverse position*. The same fallacy is repeated at the introduction of the irrational number. Continued fractions are a correct way to introduce them and a simple means to convince our pupils of the heavily exceptional position of rational numbers. I also consider the snowflake-curve (Helge von Koch) and its infinity of variations useful and necessary to show the exceptional position of smooth daily curves.

Theorems having exactly one inverse are exceptions, but our method of teaching gives the impression that this is a rule. We want examples of not invertible theorems and of multi-invertible ones.

Here is an example: In the triangle (15°, 75°, 90°) the longest side holds four times the shortest perpendicular. The triangles (8,12,18) and (12,18,27) even have five pairs of equal elements, but they are not congruent.

Here is a complicated chain of specialisation and generalisation, for advanced persons. We start Brianchon, six sides touch a conic, three main diagonals are concurrent.

Specialise to a circle.

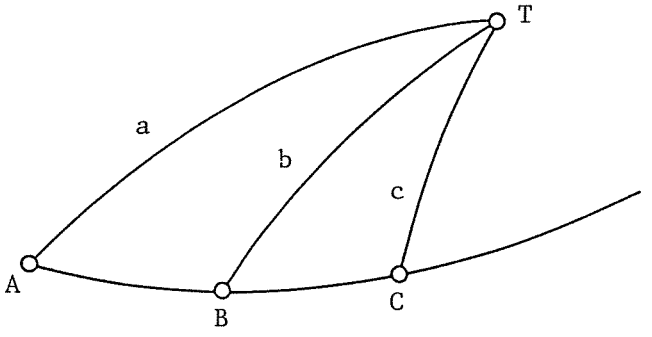


Three neighbouring pairs of sides coincide to three sides and give a triangle with one of the four touching circles. Now make a generalisation that maintains one common point of AP, BQ and CR.

Use the power-theorem and Ceva's inverse and prove, that also AX, BY and CR are concurrent (J.T. Groenman). Write the theorem as a product

of three doubleproportions (BCPX) ..., prove its inverse. Now make a central projection; we obtain a new theorem for conics generalised.

He, who studies sferical geometry and trigonometry should know how the notion of limit can give a specialisation to flat geometry. The Stewart-formula is a good example.



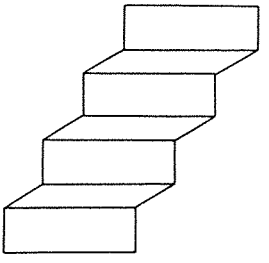
The sferical formula:
cos b sin(p+q) = cos a sin q + cos c sin p,
when moving T downwards to AB, turns into:
cos a sin(b-c)= cos b sin(c-a) + cos c sin(a-b) = 0
very regular!
If we proceed to the plain, we find:

$$a^2(b-c) = b^2(c-a) = c^2(a-b) + (b-c)(c-a)(a-b) = 0$$

and this leads us to the algebra. The factorising of the first symetrical part is usually performed using the theorem of the remainder.
Specialising the goniometric formula for c=0 leads us back to a well-known formula.

THE AXIOM OF REVERSABILITY

Concentratedly looking at a flight of steps suddenly gives us a new impression: looking upwards. It is called *change of structure.*



He, who can do this on purpose has a *reversable* mind. In mathematics it is a fertile means for problem-solving, also for a better understanding.

We often find a *threefold structure*:
transforming-solving-retransforming.
Examples are:
geometry-algebra-geometry, calculation-construction-calculation (Monge), multiplication-addition-multiplication (log), construction-inversion-construction, introduction of area for finding legant proofs of some geometrical relations, sliding back to plane geometry for the sake of a threedimensional problem. Young children should not only learn 1, 2, 3, ... in the ordinal conception (try to learn finnish or japanese and you will find that it is insufficient) but also the cardinal one: use cards and dominoes and dice! Later they must recognize ... - 6 = 7 as an addition, they have to know the division in two different structures, repeated subtraction and inverse multiplication. Understanding beats technical skill!
Children should not only think from question to answer, but also the other way: Compose in a few correct sentences a simple problem that requires the division 125/25 = 5. It gives a useful *diffusion* between maths and language. My pupils had to solve the problem:
Which is more, $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ or 4?
by starting:
$15 < 16$, so $\sqrt{15} < 4$, so $2\sqrt{15} < 8$ etc.,
be the demanded result.

Why do perpendiculars have a common point? They are the axes of another triangle. Why do the diagonals 1-5, 2-7 and 3-10 of a regular dodecagone coincide? They are bisectors in triangle 1-3-7 as well as perpendiculars in triangle 2-5-10.
A most fascinating reversability to Eulers theorem for a class of polyhedrons converts $E_0+E_2=E_1 + 2$ into a line that admits reduction to lower (too simple) dimensions, ending in 1-1=0, but also extension into higher dimensions, e.g. to the fourdimensional cube.

twodimensional	$1 - E_0 + E_1 - 1 = 0$
	(n points, n sides)
threedimensional	$1 - E_0 + E_1 - E_2 + 1 = 0$
	(Euler)
normal cube	$1 - 8 + 12 - 6 + 1 = 0$
fourdimensional	$1 - E_0 + E_1 - E_2 + E_3 - 1 = 0$
4-dimensional cube	$1 - 16 + 32 - 24 + 8 - 1 = 0$

The position of the digits fits in the following paragraph.

THE AXIOM OF PLACE

Time is one-dimensional, but place is two-dimensional, restricted to paper or blackbord. So place is more clarifying than time.
When treating a subject, our teachers pay attention to time: the sequence anticipation, treatise and repetition is wellknown, but I think that the correct place is often neglected. One of the improvements is the modern writing of the proportion, not in one-dimensional shape as a:b = c:d, but

in the shape of a matrix as:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$$

Suppose that a, b, c and d play a part in some way, we can clarify some or other reasoning in this way:

```
        a  <  b                 (here the argumentation)
              b  <  c           (here the argumentation)
                    c  <  d     (here the argumentation)
so      a        <        d
```

In an old geometrybook I found a reasoning that must have been very confusing for children. There was no talk of place and besides, it had been timed; the author started at the middle line.

The English roads show an ideal application of place. We read the distance in miles:

Xtown $2\frac{3}{4}$.

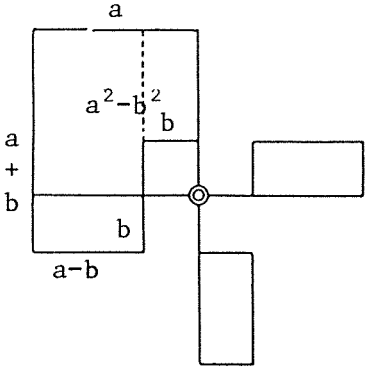
The digits 3 and 4 require less place than 2 and besides their places are so correct, that the divisionsign / is ommited, being superfluous, even troublesome.

THE AXIOM OF TRANSFER

The first food for a baby is given with much love. A person, who wants to teach mathematics to children has to give his knowledge with love. Before giving the abstract food, he has to check the quality and the quantity of the food, he should be fully qualified.

A cook tries to give more appetite to his guests. He also pleases the eyes of his guests. Here is one of the many examples to make the mathematical pie more agreable for children: We alter the difference $a^2 - b^2$ into a rectangle having sides a + b and a - b. Which is the centre of rotation? After having found it, we introduce two missing wings of the mill, that are, dry-mathematically speaking as superfluous as some suplementary cook's ingredients.

But children like it and we have found a name: *Millwing-formula*!



Our addition works like the paper, ribbon and knot of a birthdaypresent, that represents the love with which it has been given.
We can also compare our lessons with trade. It is sensible, starting from an ample harbour, stowing the merchandise carefully, sailing through a safe canal or channel, arriving in a storm-free harbour...
I am sorry that I am not entitled to give more and varied examples!
One remark may be very important:
When intending to give a present, we have a choice between two possibilities. We can give a present to be eaten or used at once or we can give an *instrument* that enables the receiver to make the wanted things himself.

Accepting this comparison, we find that *the mathematical methods are far more important than the mathematics themselves.*
This is a true word, because these methods can be used far outside of the field of maths.

Starting without Euclid gives us an ample audience.
Ending outside the frontiers of mathematics does the same. There is a realization of the *Mathematics for all.*

Jan Karel Timmer.
Hengelo/The Netherlands.

BARBARA RABIJEWSKA

CERTAINE TYPOLOGIE (CLASSIFICATION) DES EXERCICES DE MATHEMATIQUES ET DE L'EFFECTIVITE DE LEURS SOLUTIONS

DANS nos recherches, nous avons rattaché la notion d'exercice de mathématiques à celle du texte de la solution et du résultat final. La partie fondamentale du texte est d'ordinaire une recommandation (un ordre) ou une question. On peut admettre que le schéma des recommandations a la forme:

1. "Démontre que p", où p indique n'importe quelle phrase à l'indicative.
   Les questions peuvent être ou des questions en oui et non (décision tranchement) ou des questions de complément. Le schéma de telles questions peut être noté.
2. "Est-ce que p?"
3. "Pour quels x, F(x)?" ou F(x) est une forme adéquate de phrase.

Les exercices aux formes de schémas 1-3 seront respectivement appelés exercices de démonstration, de tranchement ou de complément.

Dans ce travail, nous avons exposé une classification d'un type d'exercices distinet à l'aide de la relation S_T relint les exercices étant donné leur texte en une 'triade'. Si les textes des exercices E_1, E_2, E_3 (de démonstration, de tranchement, de complément), sont respectivement désignés par T_1, T_2, T_3, la relation S_T est définie par les équivalences suivantes:

a. $E_1 S_T E_2 \iff \bigvee_p (T_1 = \text{"démontre que p"} \wedge T_2 = \text{"est-ce-que p?"})$

b. $E_1 S_T E_3 \iff \bigvee_p (T_1 = \text{"démontre que p"} \wedge T_3 = \text{"pour quels x, F(x)?"})$

c. $E_2 S_T E_3 \iff \bigvee_{F(x)} \bigvee_p (T_2 = \text{"est-ce-que p?"} \wedge T_3 = \text{"pour quels x, F(x)?"})$.

Il faut au lieu de p mettre F(a).

Pour nos considérations, il était également commode d'introduire la notion d'exercices équivalents, d'exercices équivalents dans un sans plus étroit et d'exercices presque équivalents. Entre les exercices équivalents dans chacune de ces significations il y a relation S_T ainsi que certains liens plus étroits. En particulier, nous avons introduit et exploité les notions de 'triades' d'exercices équivalents dans le sens α_1, α_2, et α_n ainsi que d'exercices presque équivalents.

TRIADES

1. Démontre, qu'on peut trouver les nombres a,b,c, pour lesquels $2x^3-9x-27$ et $(x-3)(ax^2+bx+c-a)$ sont égaux.
2. Est-ce qu'on peut trouver les nombres a,b,c, pour lesquels $2x^3-9x-27$ et

$(x-3)(ax^2+bx+c-a)$ sont égaux?
3. Pour quels nombres a,b,c $2x^2-9x-27$ et $(x-3)(ax^2+bx+c-a)$ sont égaux?

I

1. Démontre, qu'il existe les nombres naturels qui satisfont $\frac{\log(x+1)}{\log(x-1)} > 0$ (*)
2. Est-qu'il existe les nombres naturels qui satisfont (*)?
3. Pour quels nombres naturels (*) est-elle satisfait?

II

1. Démontre qu'un triangle isocéle a un axe de symétrie.
2. Est-ce qu'un triangle isocéle a un axe de symetrie?
3. Quels triangles ont des axes de symétrie?

III

1. Démontre que la relation d'égalité (congruence) des segments est d'une relation d'équivalence?
2. Est-ce que la relation d'égalité (congruence) des segments est d'une relation d'équivalence?
3. Quelles propriétés de la relation d'équivalence possède la relation d'égalité (congruence)?

La typologie introduite d'exercices a été utilisée dans études empiriques effectuées en trois étapes.

Les études liminaires de sondage ont été effectuées dans trois lycées généraux de Wroclaw. Les études fondamentales ont été effectuées dans la première moitié dans vingt-huit lycées de la Basse Silésie. Les études comparatives l'ont été dans la seconde moitié dans huit lycées de Wroclaw dans les classes au profil mathématique. Nous avons obtenu un tableau de la possession des connaissances mathématiques d'un grand nombre d'élèves dans diverses classes de lycée sur les exemples des domaines les plus importants du programme. Nous avons obtenu en particulier les distributions des nombres de points obtenus par les élèves englobés par nos recherches, la structure interne des groupes étudiés d'élèves de petites villes de grandes villes de Wroclaw ainsi que des élèves des classes au profil mathématique, ainsi que le pointage des divers exercices.

Ces amples matériaux (solutions d'environ 16.000 exercices) ont été utilisés pour vérifier l'influence du type de formulation sur l'effectivité de la solution de l'exercice. Il était opportun, et parfois nécessaire, d'appliquer à l'élaboration des recherches empiriques ainsi qu'à leur analyse les méthodes statistiques et celles de la technique électronique de calcul. Au cours de l'élaboration de ces études, l'analyse des donnés obtenues s'est déroulée en plusieurs étapes. A l'aide de la méthode des

statistiques mathématiques, nous avons obtenu les caractéristiques de groupes d'élèves et des classes d'exercices étudiés. Nous avons étudiés et démontré le caractère essentiel de l'influence de la formulation de l'exercice sur l'effectivité de la solution à l'aide du test 'chi-au carré'. L'analyse détaillée suivante de l'influence de la formulation de l'exercice a permis d'établir certaines règles et de tirer des conclusions practiques.

Habituer les élèves à résoudre des exercices formulés de manières diverses, les placer dans diverses situations garantit un développément général sous tous rapports de leur activité. En ce qui concerne les exercices se rapportant à des questions nouvellement introduites, résolus pour la première fois, il est plus rationnel de les formuler de manière complémentaire (avant tout complément du type α_1, α), de fournir la possibilité de donner des réponses partielles. Il faut ensuite passer par les autres formulations de tranchement et de démonstrations, afin de terminer à nouveau par résoudre des exercices de complément de types divers.

L'extension ou l'élargissement des problèmes. Les exercices de complément avies 3 (pour quels $x \in X$, $F(x)$?) sont commodes pour l'extension ou l'élargissement des problèmes méthode du prof.Wittmann. On peut construire:

a. un ensemble Y tel, que $X \subset Y$; X soit inclus dans Y,
b. ou un ensemble Z que $Z \subset X$.

Par exemple.

I

a. $X = N$, $Y = R$ et $X \subset Y$.
b. $X = N$, $Z = \{1,2,3,4,\}$ et $Z \subset X$.

Dans a et b F a toujours la même forme.

II

a. Nous pouvons changer X (les triangles) par quadritatères (ou autres figures).
c. Nous pouvons changer F et demander les autres éléments de triangles (hauteur).

III

b. Nous pouvons demander une propriété de relation type équivalence.

Les cas a,b, c sont les voies de variation d'un problème.

Barbara Rabijewska
l'Université de Wroclaw
Wroclaw/Pologne.

LIST OF PARTICIPANTS

ALGERIE

OBERMAYER, M. Philippe

ARGENTINA

ROSENBERG, Mme Diana

AUSTRALIA

SOUTHWELL, Mme Beth

BARBADOS

BROOMES, M. Desmond

BELGIQUE

FESTRAETS, M. Adolphe
FESTRAETS, Mme Claudine
FREMAL, Mme Mady
GUILLAUME, Mme Franc.
HARDY, M. André
HOUBEN, M. Jean Paul
MICHEL, M. Francis
NACHTERGAELE, M. Jean-Marie
POISSON, Mme Denise
SCHNEIDER-GILOT, Mme Maggy
SERVAIS, Mme Marie-France
SERVAIS, Mme Renée
TROEYER, M. Edmond de
TROMPLER, Mme Simone
VANHAMME, Mme Jacqueline
VANHAMME, Mme ?
WARBECQ, M. Alfred

CANADA

BEDNARZ, Mme Nadine
DUFOUR-JANVIER, Mme Bernadette
GAULIN, M. Claude
HERAUD, M. Bernard
HERAUD, Mme Diane

CHILE

RIVEROS, Mme Marta

DEUTSCHLAND(W)

ALLE, M. Gunter
ANDELFINGER, M. Bernhard
ANDELFINGER, Mme Christa
BAPTIST, M. Peter
BAPTIST, Mme Gabriele
BARDY, M. Peter
BENDER, M. Peter
BUNGARTZ, M. Paul
EBNETH, M. Gregor
GREMMEL, Mme Hana
HEINK, Mme Gisela
KEITEL-KREIDT, Mme Christine
KREIDT, M. Fritz
MOLLER, Mme Annelie
NEUBRAND, M. Michael
SPYRA, M. Reinhold
STOWASSER, M. Roland
WINTER, M. Martin
WITTMANN, M. Erich

ENGLAND

BOWIE, M. Peter
COCKCROFT, M. Wilfred

ESPANA

ALVAREZ GONZALEZ, Mme Gloria
BRANAS BARREIRO, Mme Victoria
CACHAFEIRO CHAMOSA, M. Luis C.
CENTENO, Mme J.
CONDE NUNEZ, M.Abelardo
CORBERO, Mme Victoria
CRESPO CORREA, M. Emilio
DIEZ BARRABES, Mme Mercedes
DORDA ABAUNZA, M. Guillermo
FALCON, M. ?
FALCON, Mme ?
FERNANDEZ DEL PINO, M. ?
FERNANDEZ DEL PINO, Mme ?
FERNANDEZ GARCIA, M. Angeles
FIGUERAS, Mme Pilar
FOIX TARRE, Mme Rosa
GIMENEZ, M. Joaquim

GIMENO, Mme Ascension
GIMENO, Mme Margarita
GIMENO-BLASCO, M. Lucas
GIRONDO PEREZ, Mme Luisa
LAMAS BUSSIERES, Mme Estela
LEIRA RODRIGUEZ, M. Antonio
MARQUES INSA, M. Jose L.
PRAT HURTADO, M. Fulgencio
PUIG ESPINOSA, M. Luis
ROMERO SANCHEZ, M. Sixto
SANTACRUZ HEDO, Mme Ascension
VILLARROYA, M. Florencio
ZUGAZAGOITIA LOPEZ, Mme Rosario

FRANCE

ADDA, Mme Josette
AUDIBERT, M. Gérard
AUDIBERT, Mme Hélène
BERDONNEAU, Mme Catherine
BERNEZ-TEMPEL, Mme Madeleine
BERTE, M. Amadou
BERTE, Mme Anne-Marie
BORIES, Mme Marguerite
BOROWCZYK, M. Jacques
CERQUETTI-ABERKANE, Mme Franc.
CHATAING, M. Guy
CHERAMY, Mme Nicole
CHRISTOFLEAU, M. Pierre
CREPIN, M. Roger
CREPIN, Mme Yvette
DOSSAT, Mme Luce
DUMOUSSEAU, M. Guy
ECHAVIDRE, Mme Claire
FELIX, Mme Lucienne
GARROUSTE, Mme Claude
GODICHEAU, Mme Monique
LAVALLADE, M. Didier
LOUPY, Mme Yvette
MACQ, Mme Monique
MAURIN, M. Roger
PAQUELIER, M. Yves
PEROL, M. Charles
PLUVINAGE, M. Francois
PORCEL, Mme Nicole
RONOT, Mme Josiane
ROURE, Mme Monique
THIERRY, M. Marc
THIERRY, Mme Sylvie
VEDRINE, Mme Jeanne
VIGIER, Mme Noële
WEBER, Mme Jeannine

IRAK

SHAGATI MOSHATTAT, M. Faisal

IRAN

FARMANESH, M. Mounesali
HESAMADDINY, M. Mohsen
JALILI, M. Mirza

IRELAND

DUIGNAN, Mme Mary

ITALIA

ASCOLI-BARTOLI, Mme Maria T.
BARRA, M. Mario
BARTOLI, Mme ?
BAZZINI, Mme Luciana
BOERO, M. Paolo
BOLLETTA, M. Raimondo
BOTTINO, Mme Rosa Maria
CASTELNUOVO, Mme Emma
CERRAI, Mme Paola
CHIARUGI, Mme Ivana
CODETTA RAITERI, M. Adalberto
CUSSEDDU, M. Enrico
EMMER, M. Michele
FASANO, Mme Margherita
FERRANTE, Mme Loretta
FEREIRA, M. Mario
FRACASSINA, Mme Grazia
GAMBOTTO MANZONE, Mme Anna
GHELARDINI, M. Alessandro
GIROLIMETTI, M. Giovanni
GRUGNETTI, Mme Lucia
INDOVINA, Mme Grazia
LAVIOSA, Mme Laura
MANCINI PROIA, Mme Lina
MANZONE, M. Benedetto
MARIOTTI, Mme M. Alessandra
MENGHINI, Mme Marta
MOSTACCI, Mme Cristina
NICETA, Mme Francesca
NUVOLI, Mme Lucia
ONNIS, Mme Antonella
ONNIS, Mme Daniela

ONNIS, Mme Lidia
ONNIS, M. Vincenzo
OSSOLA, Mme Adriana
OSSOLA, Mme Annarosa
PAGANI, Mme Bianca Maria
PARENTI, Mme Laura
PELLEREY, M. Michele
PESCI, Mme Angela
LA ROSA, Mme Emilia
LA ROSA, Mme Rosa
RUGGIU, Mme Rosanna
SACCHETTI, Mme Ida
SPAGNOLO. M. Filippo
STANCHINA, Mme Maria Luisa
TESTA, Mme Claudia
TORELLI, M. Giovanni
VALVASSORI, Mme Beatrice
VANNUCCI, Mme Anna

LUXEMBOURG

KIEFFER, M. Lucien

MEXICO

FUENLABRADA, Mme Irma R.
GARCIA MANCILLA, Mme Sylvia G.
MARTINEZ GARCIA, Mme Mercedes
NAVARRO DE MENDICUTI, Mme Teresa

NEDERLAND

BLIJ, M. Frederik van der
DEKKER, Mme Rijkje
FREUDENTHAL, M. Hans
HANEPEN, Mme Ellen
KINDT, M. Martin
KOOIJ, M. Henk van der
DE LANGE, M. Jan
SCHOEMAKER, M. George
TIMMER, M.Jan Karel
VERHAGE, Mme Heleen
QUERELLE, Mme Nanda

POLOGNE

CIOSEK, Mme Marianna
DALEK, Mme Krystyna
FELUCH, Mme Barbara
KRYGOWSKA, Mme Anna Zofia
RABIJEWSKA, Mme Barbara
SIERPINSKA, Mme Anna
ZAWADOWSKI, M. W.

PORTUGAL

ABRANTES, M. Paulo
ALVES, M. Horacio
ALVES, Mme Maria José
BACELAR BEGONHA, Mme M. de Jesus
BRAS S. ROSARIO, Mme Maria E.
CARVALHO, M. Raul Fernando
CONCEICAO DIAS, Mme Otilia M.
CORREIA VIEIRA, Mme Leonor
DUARTE, M. José Manuel
FERREIRA- MARTINS, Mme Maria O.
FILIPE, Mme Leonor
FONSECA, Mme Maria E.
FREITAS RIBEIRO, Mme Margarida
GROMICHO, M. Antonio
GROMICHO, Mme Fernanda
GUIMARAES, M. Henrique M.
GUIMARAES, Mme Maria Fatima
GUIMARAES, Mme Maria Zaida
LOBO DA FONSECA, M. Carlos J.
LOBO DA FONSECA, Mme Maria J.
MACIEL A. CORREIA, Mme Maria F.
MARQUES DA SILVA, Mme Marieta
MARTINS ALVES, Mme Edite
MATOS, M. José M.
MOREIRA, Mme Leonor
NARCISA DELMIRA, Mme Almeida
PAULA, Mme Isabel
PONTE, M. Joao
SANTOS, Mme Ana Cristina
SANTOS, Mme Ana Isabel
SANTOS, M. Nuno
SANTOS, Mme Maria Inez
SOARES, Mme Isabel
VARANDAS, Mme Leonor
VAZ, Mme Natália
VENTURA, M. Manuel
ZAMBUJO, Mme Cristina

SCOTLAND

HOUSTON, M. David

SUISSE (SWITZERLAND)

ARRIGO, M. Gianfranco

BERNET, Mme Anne-Florence
BERNET, M. Christian
BERNET, Mme Simone
BERNET, M. Théo
BERTOLETTI, M. Angelo
BERTONI, M. Maurice
CASLINI, Mme Luisa
CORTHESY, Mme Hélène
FERRARIO, M. Mario
FRIGERIO, M. Danilo
FROIDCOEUR, M. Maurice D.
JAQUET, M. Francois
JAQUIER, M. Pierre
DE JONGE, Mme Suzanne
MINSSEN, Mme Geneviève
PAHUD, Mme Sylviane
RONDELLI, M. Amedeo
LE ROY, Mme Dominique
LE ROY, M. Jacques
LE ROY, Mme Madeleine
RUSCA, M. Silvio
SCHEIBLER, M. André
SCHOPFER, Mme Evelyne
SCHOPFER, M. Jean-Francois
SCHOPFER, M. Olivier
SCHOPFER, M. Raoul
VOSICKI, Mme Jasmine
VOSICKI, Mme Nevenka
WERMUS, M. Henri
YERSIN, Mme Elisabeth

TAIWAN

HUANG WANG, Mme Ou Chu

TUNISIE

BEN BRAHIM, M. Bechir
BEN BRAHIM, Mme Dalila
KACHOUKH, M. Bechir
LASSOUED, M. Khaled

U.S.A.

WEINZWEIG, M. I.

ZAIRE

KAZADI, M. Mashinda

This publication is nr. 7 in a series on
Research on Mathematics Education published by
the Research Group on Mathematics Education and
Educational Computer Centre (OW & OC):

Nr 1 *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas*
(A. Dekker, H. ter Heege, A. Treffers)
Nr 2 *Oppervlakte bij Wiskobas en inzichtverwervend handelen*
(A. Dogger)
Nr 3 *Aanzet voor een nieuwe breukendidactiek volgens Wiskobas*
(L. Streefland)
Nr 4 *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren. Deel 1*
(H. Freudenthal)
Nr 5 *Wiskobas in methoden*
(R.A. de Jong)
Nr 6 *De baas over de computer*
Verslag van een ontwikkelingsonderzoek
(P. Bergervoet, A. Goddijn, E. Hoekx, N. Querelle, G. Schoemaker, M. Simons, L. Streefland, E. te Woerd)