

cijferend vermenigvuldigen en delen volgens wiskobas

A. Dekker
H. ter Heege
A. Treffers

cijferend vermenigvuldigen en delen volgens wiskobas



Freudenthal instituut
Archief

**cijferend
vermenigvuldigen
en delen
volgens wiskobas**

cijferend vermenigvuldigen en delen volgens wiskobas

*Voorbeelden uit de onderwijspraktijk van geïntegreerd
cijferen volgens progressieve schematisering*

A. Dekker
H. ter Heege
A. Treffers



**vakgroep onderzoek wiskunde onderwijs & onderwijs computercentrum
rijksuniversiteit utrecht**

Onderzoek wiskunde onderwijs

Publicatie nr. 1

bureauredactie: Betty Dekker
vormgeving & realisatie: Ton Voortman
druk: Princo, Culemborg

© vakgroep onderzoek wiskunde onderwijs & onderwijs computercentrum rijksuniversiteit utrecht

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, mikrofilm of op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de houder van het copyright.

Maar let wel, ze moesten het vak ook nog leren, en dat wisten ze ook. Het is deze wetenschap die hun sukses verklaart. In de wetenschap dat je nog van alles moet leren, stel je je open op, aanvaard je de man of vrouw voor de klas en het kind in de klas als je gelijke, zo niet als je leermeester, in het gemeenschappelijk leerproces dat onderwijsontwikkeling heet.

Hans Freudenthal (Pedomorfose)

*Opgedragen aan
het Wiskobas-team
van het voormalige
IOWO.*

INHOUD

Voorwoord	9
DEEL A: VERMENIGVULDIGEN	11
I Vermenigvuldigen volgens het herhaald-optel-model	13
1 Voorfase: startpunt cijferend vermenigvuldigen	14
2 De eerste lessen	25
3 Vervolg van schematisering en verkorting	34
4 Tussenstand na vijftien lessen	41
5 Voorwaarden eindfase	57
6 Stadia in de eindfase	65
7 Tussenstand na dertig lessen; uitzicht op eindstand	69
8 Overzicht en praktische wenken	76
II Vermenigvuldigen volgens het kruispunten-model	85
1 Contextfase	85
2 Bundelingsfase	96
3 Lijnenfase	104
4 Eindfase	126
5 Overzicht	130
DEEL B: DELEN	137
III De staartdeling volgens herhaald aftrekken	139
1 Overzicht	139
2 De eerste lessen	144
3 Verkortingen	150
4 Naar de eindalgoritmen	170
DEEL C: NABESCHOUWING EN DISCUSSIE	191
IV Nabeschuwing	193
V Nadere toelichting	203

VI	Overzicht onderzoek cijferen	214
1	Vier richtingen	214
2	Onderzoek traditioneel cijferen op mechanistische grondslag	216
3	Onderzoek wiskundig cijferen op inzichtelijke basis	217
4	Onderzoek geïntegreerd cijferen volgens progressieve schematisering	225
5	Onderzoek hoofdrekenbeweging	230
6	Onderzoek cijferonderwijs – een blinde vlek	234
7	Theorie van het cijferonderwijs	235
8	Tot besluit	236
	Noten	237
	Literatuur	243

VOORWOORD

My experience of in-service courses in the past twenty years is that if we cannot show different approaches in what teachers still regard as the core of their jobs, teaching algorithms, and show the relevance of concepts in that context, then there is no change in classroom style in any part of the teaching of mathematics (and who can blame them given all the pressures?). Succeed in this, and 'all else is added unto you'. Fail here, and the rest is looked on as a fringe activity.

Arthur Morley

Het voorliggende boek is een vervolg op 'Cijferend vermenigvuldigen en delen (1). Overzicht en achtergronden'. Het bevat voorbeelden en analyses van praktijkwerk uit onder meer de ontwerpsschool van Wiskobas. De ideeën die hier neergelegd zijn, werden in het IOWO-tijdperk (1971–1980) ontwikkeld en uitgewerkt. Het zal de opmerkelijke lezer niet ontgaan dat er in de loop van de tijd wat uitbreidingen en verdiepingen van de basisopdrachten over het principe van het cijferen volgens progressieve schematisering hebben plaatsgevonden met betrekking tot het begrip plaatswaarde, het gebruik van modellen, de plaats van contextproblemen in de cijferleergang en de relatie tussen cijferen en handig rekenen. De laatstgenoemde twee punten hebben we tot uitdrukking gebracht in de bijvoeging 'geïntegreerd' (cijferen) welke betrekking heeft op zowel de integratie van het cijferen met toepassingen als op het ineenvlechten van cijferen met flexibel rekenen. Wat het modelgebruik betreft, is aan het kruispuntenmodel nu het herhaald-optel-model toegevoegd. Het kruispuntenmodel stamt uit de eerste jaren van Wiskobas. Het was met name Van Bruggen die de globale ideeën van het Wiskobasteam op dit onderdeel concretiseerde. Later werd het idee van het herhaalde optellen nader uitgewerkt en op de valreep (1979–1980) nog object van ontwikkelingsonderzoek gemaakt. In het eerste hoofdstuk doen we daarvan verslag, en daar kan men tevens kennis nemen van een belangrijke nieuwe toevoeging in de vorm van een plaatswaarde-verhaal aan de gangbare werkwijzen met positie-materialen. Maar zoals gezegd, is het meest wezenlijke verdiepende onderdeel dat van de integratie van cijferen met flexibel rekenen en toepassen; hoewel we ons hier ten behoeve van de leesbaarheid van de tekst hoofdzakelijk tot het cijferen bepaald hebben – achteraf gezien zelfs misschien nog wat te veel! Met name zou het voor de juiste beeldvorming wellicht beter geweest zijn als we ons in de voorbeelden van de toetslessen niet alleen tot het 'kale' cijferen beperkt zouden hebben, juist ook omdat in het cijferonderwijs van een dergelijke beperking geen sprake was, of in ieder geval niet zou mogen zijn.

In de tekst wijzen we erop dat het hier geschetste cijferonderwijs niet eenvoudig in de

onderwijspraktijk te realiseren is. Het zal wenselijk zijn in opleidingsscholen, heroriënteringscursussen en kadervormingsbijeenkomsten expliciet aandacht aan het onderhavige cijferen te besteden, wil uitvoering ervan een redelijke kans van slagen hebben. De ideeën die eraan ten grondslag liggen, wijken dermate van het thans gangbare cijferen af (ook dat van de meeste wiskunde-methoden), dat een aparte didactische scholing op dit onderdeel noodzakelijk zal zijn. Maar het is onze stelling dat die moeite zal lonen, omdat men met de hier neergelegde grondgedachten van het Wiskobas-team ook in de toekomst uit de voeten zal kunnen als zakrekenmachines en vooral ook zakcomputers het beeld en de inhoud van het reken-wiskunde-onderwijs, waaronder dat van het cijferen, drastisch zullen doen wijzigen. *Grotere nadruk op handig rekenen, schatten, het kunnen maken van contextproblemen c.q. toepassingen, minder korte cijferprocedures gebruiken, dat alles past precies in het hier gepresenteerde concept van het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering.*

Wij dragen dit boek op aan het voormalige Wiskobasteam van het IOWO – het kruispuntenmodel van de onderwijsontwikkeling voor reken-wiskunde-onderwijs op de basisschool – waarvan nu nog slechts de zelfkant zichtbaar is. Ook als de hier gevolgde ideeën zullen blijken geslaagd te zijn, dan nog zal het adagium van Arthur Morley 'Succeed in this, and 'all else is added unto you'', niet meer op de Wiskobasgroep van toepassing kunnen zijn...

Voorts danken we het enthousiaste team van de Dr. W. Dreesschool te Arnhem, waarvan het vooral Marjan Buenk, Jopie Kotterman, Bert van Vuurden, Dik Groote Haar en Ans Zwiers geweest zijn die met het hier beschreven cijferprogramma werkten en werken, en hun persoonlijke invloed op de ontwikkeling ervan gehad hebben. En tenslotte danken we Betty Dekker voor de bureau-redactie (typewerk, lay-out, drukaanwijzingen) welke met de haar bekende voortvarendheid werd aangevat.

Deel A

Vermenigvuldigen

I VERMENIGVULDIGEN VOLGENS HET HERHAALD-OPTEL-MODEL

De start van de leergang vermenigvuldigen die hier beschreven wordt, ligt bij het maken van 'lange' optellingen. In het eerste hoofdstuk worden de kenmerken van het optellen van meerdere getallen onder elkaar beschreven alsmede de voorwaarden waaraan voldaan moet zijn willen de kinderen leergang met succes kunnen volgen.

Het tweede hoofdstuk bevat een uitgebreide beschrijving van de eerste lessen van de leergang. Het zogenaamde 'sultanverhaal' vormt de kern van het onderwijs van deze eerste lessen. De inwisselproblematiek wordt via deze vertelling geïntroduceerd en er worden duidelijke aangrijpingspunten verschaft voor het correct inwisselen. Voor sommige kinderen blijft dit verhaal het hele derde leerjaar houvast bieden.

Het derde hoofdstuk bevat de eerste uitermate belangrijke elementen van schematisering en verkorting die zich bij het herhaald optellen voordoen. Sommige kinderen voltrekken die verkortingen vrijwel geheel zelf, andere kinderen moeten wat dat aangaat meer geleid worden. Er zijn ook duidelijke verschillen te constateren op allerlei kleinere en grotere onderdelen bij het rekenen en noteren van de oplossingen. Dit laatste blijkt vooral ook als we de tussenstand na $\pm$ vijftien lessen opmaken.

In het vierde hoofdstuk wordt uitgebreid aandacht besteed aan de niveaus waarop de kinderen uit de experimenteergroep de opgaven oplossen, welke fouten ze maken, hoe het gesteld is met de rekenvaardigheid e.d. Meer nog dan in de volgende hoofdstukken kan men zich een beeld vormen van de prestaties uit het gepresenteerde leerlingenmateriaal zelf. Ook staat hier een korte waarde-bepaling van het gegeven onderwijs beschreven.

Aan de hand van de resultaten van de tussenstand na vijftien lessen wordt in het vijfde hoofdstuk aandacht besteed aan de voorwaarden die vervuld moeten worden, ten einde de eindfase van de schematisering en verkorting in te kunnen gaan. Daarbij komen onder meer de rekenvaardigheden, het inwisselen, het noteren, het flexibel rekenen en het maken van toepassingen ter sprake.

In de eindfase kunnen nog verschillende stadia onderscheiden worden. We beschrijven deze in het zesde hoofdstuk.

Via het bepalen van de tussenstand na dertig lessen wordt in het zevende hoofdstuk dan vastgesteld in welk stadium de kinderen zich bevinden en welke weg de kinderen nog moeten afleggen om de eindvorm van de standaardalgoritme te bereiken.

Het laatste hoofdstuk bevat een overzicht van het geheel en een samenvatting van de praktische wenken die her en der in de tekst staan.

De volgende beschrijving wijkt enigszins af van die voor het kruispuntenmodel en het delen. Wij kunnen namelijk met het herhaalde optellen slechts bogen op de ervaring van één schooljaar met een groep van veertien kinderen. Deze ervaring was echter in een aantal opzichten zodanig positief en bevestigde op zulk een overtuigende wijze

wat we in vooronderzoek reeds ontdekt hadden, namelijk dat deze wijze van cijferend vermenigvuldigen goed aansluit bij de natuurlijke werkwijze van kinderen, dat we besloten hebben de resultaten van het onderwijsexperiment uitgebreid op te tekenen. In een tweede ronde zouden we de leergang slechts op enkele ondergeschikte punten wijzigen. Dit nu blijkt uit de begeleidende tekst. En daarop willen we de lezer attent maken. We hebben namelijk de kinderen uitermate veel vrijheid gegeven om hun eigen weg van schematisering en verkorting te kiezen. Op zich is dat een goede zaak geweest. Maar toch zouden we bij een herhaling ten aanzien van het noteren wat striktere eisen stellen, omdat gebleken is dat met name het niet duidelijk scheiden van enkele deelsuitkomsten tot onnodige fouten leidt. We moeten er echter wel nadrukkelijk voor waken om de kinderen wat dit betreft in een strak keurslijf te wringen, want dat zou volledig in tegenspraak zijn met het principe van de progressieve schematisering waarop de leergang is gegrondvest.

Voor het overige zal ook hier duidelijk worden dat de manier van het leren cijferen sterk afwijkt van hetgeen thans gebruikelijk is. We kunnen ook zeggen dat het onderwijs moeilijk is, in die zin dat we moeten leren systematisch leerprocessen te observeren en te begeleiden: niet de leerstof maar het leerproces staat centraal en dat is wat het cijferen aangaat beslist ongewoon. Maar ook uitermate boeiend, zoals uit het volgende moge blijken.

1 VOORFASE: STARTPUNT CIJFEREND VERMENIGVULDIGEN

In dit deel zullen we nagaan hoe kinderen grote vermenigvuldigingen aanpakken als ze nog niet over de cijfermethode – de algoritme – beschikken. We zijn wellicht geneigd aan te nemen dat kinderen deze opgaven nog niet kunnen maken als ze daarvoor nog geen oplossingsmethode hebben geleerd. Soms is deze aanname onjuist, zoals zal blijken. We zullen twee lessen beschrijven van kinderen die nog met het cijferend vermenigvuldigen moeten beginnen. Het eerste voorbeeld is die van een klas die het abacusprogramma voor optellen en aftrekken heeft gevolgd, bij benadering op de manier zoals beschreven in de publikatie 'De abakus'.¹⁾ Het tweede voorbeeld is die van een klas die op traditionele wijze heeft leren optellen en aftrekken.

Waarom zijn deze ervaringen zo interessant en van belang? Wel, om meerdere redenen. De eerste noemden we reeds: het blijkt dat kinderen grote vermenigvuldigingen kunnen maken zonder dat ze de beschikking hebben over de algoritme. Ze gebruiken daarbij individuele oplossingsmethoden, die het best gekarakteriseerd kunnen worden als 'persoonlijke interpretaties van herhaald optellen'.

Ten tweede benadrukken we de kern van deze didactiek: confronteer kinderen met een probleem dat ze (nog) niet geleerd hebben op te lossen en gebruik dit als startpunt voor een nieuw leerproces. In ons geval is dat hier het leren cijferend vermenigvuldigen volgens een proces van toenemende schematisering met de methode van het herhaalde optellen. Deze werkwijze sluit nauw aan bij de 'natuurlijke' aanpak van kinderen, zoals uit het vervolg zal blijken.

¹⁾ Jong, R. de (red.), *De abakus*. Utrecht: IOWO, 1977.

We beschrijven twee verschillende startpunten, i.c. twee onderwijsomstandigheden waarvan de voorwaarden uiteenlopen. Daarna vergelijken we deze onderwijssituaties om dan vervolgens wat algemener op de kwestie van de voorwaarden in te gaan.

1.1 een startpunt vanuit het wiskundeonderwijs

We verplaatsen ons naar het begin derde leerjaar – zeg oktober. Op dit moment is het abacusprogramma nagenoeg afgerond: de kinderen kunnen optellen en aftrekken met de papieren of mentale abacus, dus met behulp van getekende positiestrepen of zonder strepen. Bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 7 & 11 \\ 8 & 1 \end{array} + \quad \text{of} \quad \begin{array}{r} 35 \\ 46 \\ 81 \end{array} +$$

De tafels zijn aangeboden en redelijk goed gememoriseerd. We vertellen het volgende verhaal:

‘De familie Eekhoorn bestaat uit acht eekhoorns (ze worden bij naam genoemd). Oh, sorry, ik zou opa Eekhoorn bijna vergeten. Maar ja, die is al zo oud. Hij kan nagenoeg niets meer: geen eikels verzamelen bijvoorbeeld. Nu gaat het verhaal dat opa Eekhoorn de eikels moet tellen die de andere acht eekhoorns naar de geheime wintervoorraad brengen. Op een dag, als iedereen erg zijn best doet, verzamelt elk van de eekhoorns 23 eikels. Dus Sprintje, 23, Wippertje 23, ... enz. Hoeveel eikels zal opa die dag tellen?’

Let erop dat de formulering van dit probleem niet in de vorm van een vermenigvuldiging is gegoten. Het is duidelijk dat de oplossingen op vele manieren kan worden gevonden, maar dat we niet mogen verwachten dat de vermenigvuldigalgoritme wordt gebruikt. Hoe lossen deze kinderen dit probleem nu op?

Sommige kinderen maken gebruik van de zogenaamde verdubbelingsmethode:

Handwritten student work showing the doubling method for 8 x 23. The work includes the following calculations:

$$\begin{array}{r} 46 \\ 46 + \\ \hline 92 \end{array} \quad \begin{array}{r} 46 \\ 46 + \\ \hline 92 \end{array} \quad \begin{array}{r} 92 \\ 92 + \\ \hline 184 \end{array} \quad \begin{array}{r} 23 \\ 23 \\ \hline 46 \end{array}$$

Below these calculations, the number 150 is written and circled. There is also a simple drawing of a landscape with hills and a path.

Opvallend is hier hoe gemakkelijk het dubbele van 23 wordt berekend: de leerling schrijft direkt 46 op. Hierdoor blijft een en ander overzichtelijk. Het optellen gebeurt op het hoogste niveau, zonder positiestrepen, met direkte inwisselingen.

Het volgende voorbeeld is van een leerling die een splitsing aanbrengt, aangegeven door het streepje onder de vijfde 23:

$$\begin{array}{r}
 23 \times 8 = 23 \times 100 \\
 23 \quad 100 \\
 23 \quad 75 \\
 23 \quad 60 \\
 23 \quad 9 \\
 \hline
 23 \quad 174 \\
 23 \quad 104 \\
 23
 \end{array}$$

Ze telt eerst de tientallen boven dit streepje ($20 + 20 + 20 + 20 + 20 = 100$), dan de eenheden ($3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$) en vervolgens hetzelfde onder het streepje. Daarna worden de vier deelprodukten opgeteld, waarbij de leerling geen positiestrepn trekt, maar ze wel denkt.

Er is een aantal kinderen dat positielijnen gebruikt en stapsgewijs inwisselt. Deze wijze van werken – door kinderen spontaan ontwikkeld – ligt zeer dicht bij de start van de algoritmeleergang voor het vermenigvuldigen zoals wij ons die voorstellen – waarover straks meer.

Een voorbeeld:

		2	3
		2	3
		2	3
		2	3
		2	3
		2	3
		2	3
		2	3
		2	3
		2	3
		16	24
		18	4
	1	8	4

Eén leerling schrijft 160 op, maar als antwoord van 2×80 en niet van 8×20 ! In hoeverre dit helemaal begrepen wordt, is niet geheel duidelijk, maar het is waarschijn-

lijk dat deze leerling de kwestie van de commutativiteit (verwisselbaarheid) niet doorziet. Zie de uitwerking:

$$\begin{array}{r} 2 \times 80 = 160 \\ 8 \times 3 = 24 \\ \hline 160 \\ 24 \\ \hline 184 \end{array}$$

Dat leerlingen precies weten wat ze doen en dit soms ook in hun werk tonen, kunnen we in het volgende voorbeeld zien. Deze leerling heeft tientallen opgeteld. Deze methode komt overeen met die van het gebruik van de positiekaart welke hiervoor gegeven werd:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 3 \\ 2 \quad 3 \\ 2 \quad 3 \\ 2 \quad 3 \\ 2 \quad 3 \\ 2 \quad 3 \\ 2 \quad 3 \\ 2 \quad 3 \\ 2 \quad 3 \\ 2 \quad 3 \\ \hline 160 \quad 24 \\ 184 \end{array}$$

Sommige leerlingen proberen het probleem tellend op te lossen. We tonen allereerst een extreem voorbeeld hiervan:

1	24	47	07
2	25	48	71
3	26	49	72
4	27	50	73
5	28	51	74
6	29	52	75
7	30	53	76
8	31	54	77
9	32	55	78
10	33	56	79
11	34	57	80
12	35	58	81
13	36	59	82
14	37	60	83
15	38	61	84
16	39	62	85
17	40	63	86
18	41	64	87
19	42	65	88
20	43	66	89
21	44	67	90
22	45	68	91
23	46	69	92

Deze leerling zet om de 23 een streepje in de telrij (let op: 03 in plaats van 30, enz.). Bij 92 (4 × 23) aangekomen, besluit ze het resultaat te verdubbelen, een voorbeeld van een spontane niveauverkorting ‘uit de nood geboren’.

Uit het werk kunnen we opmaken dat deze methode (te) veel tijd en concentratievermogen vergt. Het antwoord ontbreekt.

1.2 een startpunt vanuit het rekenonderwijs

In het tweede voorbeeld gaat het eveneens om een derde klas, zij het een met een traditionele rekenmethode. De tafels zijn in deze school in de tweede klas geïntroduceerd en bij vele leerlingen ook gememoriseerd. Ook in deze klas vertellen we een verhaal, dat weliswaar veel gecompliceerder is dan in het vorige voorbeeld, maar dat tevens de vermenigvuldigoperatie in zich sluit, zonder deze overigens expliciet te noemen via het signaal 'keer'.

Het verhaal luidt globaal als volgt:

'Ik kom bij een dierenwinkel. Ze verkopen goudvissen. In het aquarium zwemmen er 27. De jongen van de dierenwinkel zegt dat hij kuikens nodig heeft. Er staat een klant in de winkel die zegt dat hij voor kuikens kan zorgen. Hij wil ze ruilen voor goudvissen. Ze spreken af dat elke goudvis acht kuikens zou kosten.

Hoeveel kuikens krijgt de jongen van de dierenwinkel voor zijn 27 goudvissen?'

Op het bord staat als steuntje:

- 27 goudvissen in het aquarium;
- elke goudvis kost acht kuikens.

De eerste oplossingen lijken op het noteren van de tafel van acht. Maar dan doorgezet tot 28×8 . Vanaf 11×8 is dit eigenlijk een herhaald optelstrategie, omdat er steeds acht bijgeteld wordt.

Zie hier een uitwerking:

1	8
2	16
3	24
4	32
enz.	
26	208
27	216
28	224

Er treden hierbij zeer opvallende fouten op, die of als doodgewone vergissingen of als incidentele leemten in de basisvaardigheden zijn te duiden. Twee voorbeelden van fouten:

11	88
12	86
13	94
14	106

De gemaakte fout wordt dus meegenomen tot het eind van de herhaalde optelling toe. Zoals ook in een voorbeeld, waarin een leerling alleen de tafelpakketten opschrijft:

Eén leerling noteert de uitwerking zeer uitvoerig. Maar binnen deze omslachtige werkwijze functioneren de tafels:

[illegible]

1 6 216

20

$$10 \times 8 = 80$$

$$10 \times 8 = 80$$

$$160$$

$$216$$

$$1 \times 8 = 8$$

$$2 \times 8 = 16$$

$$3 \times 8 = 24$$

$$4 \times 8 = 32$$

$$5 \times 8 = 40$$

$$6 \times 8 = 48$$

$$7 \times 8 = 56$$

Ook andere kinderen zitten op deze lijn. Alleen het gebruik van de tafels wordt efficiënter, zoals blijkt uit:

$$10 \times 8 = 80$$

en

samen is dat 160

$$10 \times 8 = 80$$

en

$$7 \times 8 = 56$$

$$is 216$$

De distributieve eigenschap ($7 \times 28 = 7 \times 20 + 7 \times 8$) wordt hier gebruikt, de rol van de $10 \times \dots$ als makkelijke en handige tafel is belangrijk. Qua denkproces herkennen we vele elementen die ook in de herhaald-optelmethode zitten.

De volgende oplossing:

$$20 \times 8 = 160$$

$$8 \times 7 = 64$$

$$160 + 64 = 224$$

Het opvallende is de commutativiteit die gebruikt wordt: $8 \times 7 = 7 \times 8$. Daarnaast zit er een tafelfout in $8 \times 7 = 64$.

1.3 vergelijking startpunten

Vergelijking van de twee startpunten levert een aantal saillante gegevens op. Het blijkt, dat in beide derde leerjaren geen problemen bestaan met het oplossen van een grote vermenigvuldig-opgave, die later algoritmisch wordt gemaakt. In beide klassen hebben de leerlingen enig begrip van vermenigvuldigen: niemand geeft een oplossing in de geest van $8 + 23 = 31$ of $8 + 27 = 35$.

De verschillen treden op als we naar de uitwerkingen kijken. In het eerste geval is het aantal verschillende oplossingen groter dan in het tweede. De breedte van de oplossingswijzen in het eerste geval geeft aan dat de kinderen een flexibel aanpakgedrag vertonen. In het tweede geval is dit weliswaar minder, maar toch ook verrassend veel. Duidelijk is de voorgeschiedenis van de beide klassen zichtbaar. De leerlingen uit het tweede voorbeeld kennen de tafels beter dan de leerlingen uit het eerste. In ieder geval blijken de tafels in het tweede voorbeeld te functioneren. Men maakt daarbij veelvuldig gebruik van de distributiviteit, hetgeen begrijpelijk is, omdat de kinderen naar hanteerbare tafelopgaven zoeken. Deze worden dank zij de distributieve eigenschap gevonden:

$$\begin{array}{l} 8 \times 27 = 8 \times 20 + 8 \times 7 \\ 27 \times 8 = 20 \times 8 + 7 \times 8 \end{array}$$

Zowel in het tweede als in het eerste voorbeeld blijken ideeën overeenkomend met herhaalde optel-strategieën voor te komen, hoewel in het eerste voorbeeld wat sterker.

Uit het tweede voorbeeld wordt duidelijk hoe uit de herhaald-optel-strategie de tafelaanpak met gebruik van de distributiviteit als vanzelf voortvloeit. Het onderscheid tussen de twee methoden wordt bepaald door de mate waarin men de tafels beheerst en door het functioneel kunnen gebruiken ervan. Niveauverhogingen kunnen we dus ook bewerkstelligen door functioneel gebruik van de tafels. Dit geeft aan dat oefenen, met name van tafels, inzake het aligmiseren een belangrijke ondersteunende functie heeft.

Mede op grond van bovenstaande ervaringen kiezen we voor de progressieve schematisering als methode om te leren cijferen. Uit het voorgaande kan men afleiden dat daarbij de ingang van het herhaald optellen zeer wel aansluit bij hetgeen kinderen geneigd zijn uit zichzelf te doen. In ieder geval menen we te mogen stellen dat de hier voorgestelde werkwijze kindgericht is en minder bepaald wordt door de 'blinde' cijfertruc c.q. de leerstof.

Men dient echter vanaf het startpunt de voorwaarden in de gaten te houden die nodig zijn om de leergang van de progressieve schematisering te voltrekken.

1.4 voorwaarden

In dit onderdeel zullen we ruime aandacht besteden aan de voorwaarden voor het leren vermenigvuldigen met behulp van het model van het herhaald optellen. Het begrip 'voorwaarden' moet hier niet als noodzakelijke voorwaarden worden begrepen. We geven hiermee veeleer wenselijkheden aan, die gerealiseerd dienen te wor-

den. Het invoeren van het programma cijferend vermenigvuldigen via herhaald optellen heeft zeker consequenties voor het onderwijs dat daaraan vooraf gaat. De eerste voorwaarde is uiteraard die van het vlot kunnen optellen. Bij het optellen zijn minstens twee elementen belangrijk. We lichten dit toe aan de hand van de volgende voorbeelden:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{H} & \text{T} & \text{E} \\
 & 3 & 7 \\
 & \underline{9} & \underline{6} \\
 1 & 12 & 13 \\
 & 3 & 3 \\
 & & 120
 \end{array}
 \quad \text{of} \quad
 \begin{array}{r}
 37 \\
 \underline{96} \\
 13 \\
 + \\
 120
 \end{array}$$

In de hier als voorbeeld genomen optelling is het optellen en het inwisselen gescheiden. Het optellen komt neer op het optellen van een eenvoudig type, dat tot de basisvaardigheden dient te behoren: $7 + 6 = 13$ en $3 + 9 = 12$. Deze basisoptellingen moeten redelijk gekend worden, dat wil zeggen dat we moeten kunnen verwachten dat leerlingen ze in principe foutloos kunnen optellen. Deze vaardigheid en de begripmatige achtergrond ervan leren de kinderen voornamelijk in het eerste en tweede leerjaar. Het inwisselen is evenzeer een belangrijke voorwaarde, al is het aanvankelijk niet nodig dat dit ook direkt gebeurt – integendeel. We proberen hiermee het inzicht in wat er bij het optellen gebeurt zo lang mogelijk bewust te houden, wat met deze uitgestelde inwisselprocedure mogelijk is. Anderzijds moeten we ervoor waken, dat het cijferen niet in deze uitgestelde inwisselprocedure blijft steken. Tot de eerste voorwaarde die we hier uitdrukkelijk willen noemen, behoren ook de optellingen van meer dan twee getallen, die we voor het gemak lange optellingen zullen noemen. Waarom we deze apart noemen, wordt aan de hand van twee optellingen duidelijk:

$$\begin{array}{rcl}
 1) & & 3 \quad 7 \quad \text{of} \quad 37 \\
 & & \underline{9} \quad \underline{6} \\
 & & 12 \quad 13 + \\
 1 & 3 & 3 \quad \underline{120} + \\
 \\
 2) & 1 & 8 \quad 5 \quad \text{of} \quad 185 \\
 & & 7 \quad 9 \quad 79 \\
 & 4 & 8 \quad 4 \quad 484 \\
 & & 4 \quad 6 \quad 46 \\
 & & \underline{6} \quad \underline{8} \\
 & 5 & 33 \quad 32 + \\
 & 8 & 6 \quad 2 \quad 330 \\
 & & & \underline{500} +
 \end{array}$$

Optellingen met twee getallen leveren binnen de kolommen nooit een som op die groter is dan 19 ($7 + 6 = 13$, $3 + 9 = 12$). Dit heeft voor het inwisselen uiteraard consequenties. Er gaat immers hoogstens één tiental naar de volgende kolom over. De kinderen zouden kunnen denken dat dit altijd zo is – tenminste als ze vrijwel uitsluitend dit type opgaven zouden krijgen. In het tweede voorbeeld is echter duidelijk dat dertig eenheden, drie tientallen moeten worden en dertig tientallen drie honderden. Er dreigen nu fouten bij het inwisselen als:

$$\begin{array}{ccc} : & 5 & : 33 : 32 : \\ : & & : \\ : & 6 & : 4 : 2 : \end{array}$$

of, om het in stappen te doen:

$$\begin{array}{ccc} : & 5 & : 33 : 32 : \\ : & & : \\ : & 5 & : 34 : 2 : \\ : & & : \\ : & 6 & : 4 : 2 : \end{array}$$

We komen hier direct nog op terug.

Resumerend zouden we willen zeggen, dat 'gewone' optellingen en 'lange' optellingen in de periode voor de start van het vermenigvuldigen ruimschoots aandacht moeten krijgen.

Een tweede belangrijke voorwaarde is het kennen van basisvaardigheden. Onder basisvaardigheden verstaan we in dit verband allereerst de opteltafels ($1 + 1$, $1 + 2$, $1 + 3$, ..., $7 + 9$, $8 + 9$, $9 + 9$) die volledig gememoriseerd moeten zijn. Maar ook de tafels van vermenigvuldiging behoren er toe. Ten aanzien van deze tafels geldt echter: ze moeten geïntroduceerd zijn met begripsmatige inbeddingen, ze moeten redelijk gekend zijn en mogelijk gememoriseerd. In de leergang cijferend vermenigvuldigen door herhaald optellen wordt echter de vaardigheid in de vermenigvuldig-tafels verder geoefend.

Tenslotte als derde voorwaarde het begrip vermenigvuldigen. In een voorbereidend programma op het cijferend vermenigvuldigen wordt breedsporig begrip van de vermenigvuldig-operatie gekweekt. We gaan hierop in het kader van deze publicatie niet dieper in. We bedoelen, dat in klas één en twee, alsmede in de eerste maanden van klas drie, regelmatig problemen en opgaven worden gegeven die door vermenigvuldigen kunnen worden opgelost. Bekend zijn de telproblemen, opgaven dus waarin door handig tellen de oplossing kan worden verkregen. Daarbij speelt een groot aantal modellen een rol. Aan deze modellen is reeds eerder aandacht besteed.¹⁾

Het vermenigvuldigen wordt in de hier beschreven opzet gebaseerd op het herhaalde optellen. Het is daarom van belang om nog even terug te keren tot de zogenoemde lange optellingen die als onderdeel van de eerste voorwaarde genoemd werden. En dan vooral om hierbij een waarschuwingsbord te plaatsen. Deze optellingen verdienen voorafgaande aan het cijferend vermenigvuldigen aparte aandacht. Het is namelijk noodzakelijk om de begripsmatige grondslag van het optellen met 'inwisselen' voor dit specifieke geval nog eens op concrete wijze met behulp van inwisselmateriaal te leggen. Men kan hierbij gebruik maken van MAB-materiaal of inpakmateriaal, maar ook grootheden als geld (centen, dubbeltjes, guldens) lengte (cm, dm, m) of gewicht (een gram, tien gram, honderd gram) kunnen als zodanig dienst doen. Hierbij kan het noteren geschieden met behulp van positiestrepen, maar ook direct met eenheden, tientallen, etc, dus met nullen, zoals we straks lieten zien.

In ieder geval is het belangrijk om de trits materiaalgebruik-positiestrepen-gewone

¹⁾ Treffers, A. (ed.): *Cijferend vermenigvuldigen en delen (1)*, Utrecht: IOWO, 1979, pag. 48–55.

notatie in acht te nemen en niet te snel door te stoten naar de gewone notatie, omdat dan de begripsmatige grondslag kan verdwijnen. Met name is daarbij van belang het directe uit-het-hoofd-inwisselen niet te forceren, omdat dan ook het werkgeheugen nog eens sterk belast wordt. Let wel: aanvankelijk. Op den duur is het bij de progressieve schematisering uiteraard wel de bedoeling om de notatiewijze te verkorten en ook de rekenwijze. En dat laatste niet alleen met het oog op het inwisselen, maar vooral ook door het efficiënt gebruik maken van de tafels, wat overigens ook weer in de notatiewijzen tot uitdrukking komt, zoals we later zullen zien.

Kortom, we waarschuwen ervoor om niet direkt van inwisselmateriaal, gebruik van de abacus met optellingen van twee getallen en notatie met behulp van positiekaart over te stappen op lange optellingen, maar om deze weg nog eens opnieuw af te leggen. De abacus kan daarbij nu gevoeglijk weggelaten worden, omdat de staven immers maar twintig kralen bevatten en dat is te weinig. Zou men echter toch een abacus willen gebruiken, dan zal dit een 'gedachte' moeten zijn met lange staven, waarop dertig, veertig of nog meer kralen gedacht kunnen worden. Onze ervaringen met zo'n 'mentale' abacus met lange staven zijn echter niet bijzonder gunstig. Beter lijkt het om, zoals gezegd, te starten met inwisselmateriaal. En wat dan als vervolg heel goed voldoet is 'gedacht' inwisselmateriaal.

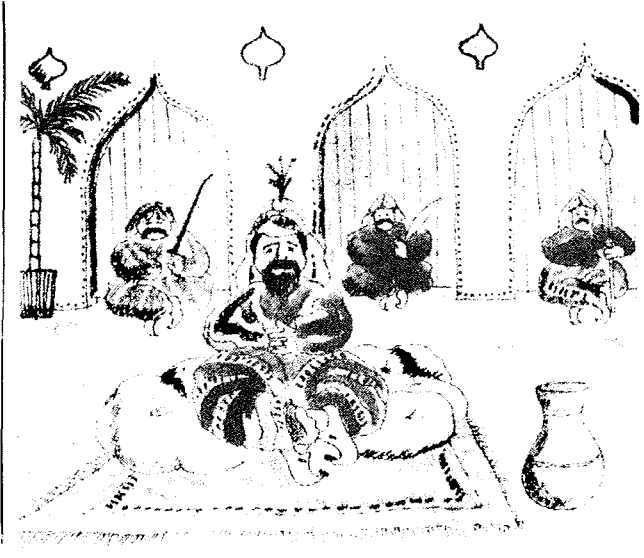
Bij dit 'voorgestelde' inwisselen nu begint onze introductieles, die als start van de leergang cijferend vermenigvuldigen kan gelden – een start dus vanaf één van de hiervoor beschreven startpunten.

2 DE EERSTE LESSEN

De eerste lessen staan allen in het teken van het 'inwissel-verhaal' over de 'Sultan van Bagdad', waarin de problematiek van de lange optellingen aan de orde gesteld wordt. Dit verhaal, dat men uiteraard op allerlei wijzen kan variëren, vormt de ondergrond van de totale leergang cijferend vermenigvuldigen. In het voorgaande is beschreven dat met het 'verhalen' over inwisselen het daadwerkelijke handelen verbonden dient te worden, opdat de kinderen zich de betekenis van dit contextverhaal volledig kunnen voorstellen – dit is dus zeggend de diepere ondergrond van het sultan-verhaal. Bij de introductieles gaat het nog niet over vermenigvuldigen in de zin van herhaald optellen, maar in de vervollessen die sterk op dit verhaal voortbouwen, is dit wel het geval. Aanvankelijk wordt de herhaalde optelling nog volledig uitgeschreven, maar al snel ontdekken de kinderen dat ze zowel het uitrekenen als het noteren korter kunnen doen door gebruik te maken van hun min of meer gememoriseerde kennis van de tafels van vermenigvuldiging. Aldus wordt het proces van verkorting en schematisering in gang gezet wat zo kenmerkend is voor het leren cijferen volgens het didactische principe van de progressieve schematisering. In het volgende wordt een impressie van het eerste deel van het onderwijstraject beschreven.

2.1 introductieles: de sultan van Bagdad

We starten met het volgende plaatswaarde-verhaal.



'Er was eens een sultan in een ver Oosters land. Je weet hoe sultans eruit zien, met tulband op en allerlei gewaden om. Nou, die sultan zat dagelijks op zijn troon, net zo als ik nu voor jullie zit. In plaats van kinderen zag de sultan allemaal dienaren. Hij was knotsrijk, die sultan. Nou woonde in dezelfde stad Bagdad een man, die net zo machtig en rijk wilde zijn als de sultan. Hij probeerde op allerlei manieren aan geld te komen. Daarbij was hij niet altijd even eerlijk en daarom werd hij de dief van Bagdad genoemd. Nou had die dief van Bagdad al heel wat goudstukken te pakken gekregen, maar of 'ie al even rijk was als de sultan wist hij niet.

De sultan wist precies hoeveel goudstukken hij had. Die had namelijk drie schatkamers waarin ze opgeborgen lagen. In de eerste schatkamer werden de goudstukken gebracht die binnenkwamen. Voor die schatkamer zat een bewaker met een snor en die hoefde alleen maar de deur van het slot te doen als er goudstukken naar binnen moesten. Maar al gauw kreeg hij er een taak bij. Toen namelijk bleek dat de schatkamer al voller werd, moest hij goudstukken naar de tweede schatkamer brengen. Eerst liep hij met een handvol naar de tweede schatkamer, maar de bewaker van deze schatkamer zei tegen hem: 'De sultan heeft bevolen dat je voortaan tien goudstukken moet brengen, want die passen precies in een doosje.' Op deze manier werd er dus voortaan gewerkt. De goudstukken werden verpakt in doosjes van tien. Af en toe bracht hij er twintig tegelijk.

Maar ook deze schatkamer werd al voller en daarom moest de bewaker van de schatkamer met de dozen al gauw naar de derde schatkamer.

Voor schatkamer drie zat, en dat zul je zeker begrijpen, een enorm grote bewaker

met een geweldige snor. Die bewaker moest de dozen in kisten doen. Hij zei daarom: 'Je moet steeds tien doosjes brengen, want die passen precies in een kist.' Zo had de rijke sultan op een dag in zijn schatkamer:

kisten	dozen	goudstukken
7	5	9

Hij had nog net geen tien goudstukken natuurlijk, want anders... Je weet nu wat de sultan bezat. Eigenlijk wist niemand in het land precies hoeveel de sultan bezat, maar de dief van Bagdad was er stiekem achter gekomen en mompelde: zeven kisten, vijf dozen en nog negen goudstukken. Nou kan ik vanavond stiekem in het donker eens kijken of ik al even veel heb als de sultan, dacht hij. Zo begon de dief, toen het donker was, bij een klein kaarsje zijn goudstukken te tellen. Hij kwam tot 468. Wie zou er meer hebben, de dief of de sultan?'

De bedoeling van deze vraag is om nog eens te laten verwoorden dat de sultan inderdaad rijker is. Dat zal niet voor alle kinderen even duidelijk zijn. De meeste kinderen zeggen ogenblikkelijk: 'De sultan is rijker.' De onderwijsgevende kan de vraag stellen: 'Waarom denk je dat?' Uit het volgende stukje lesprotocol wordt nog eens duidelijk dat het verwoorden erg zinvol is en dat het vaak moeizaam gebeurt.

'Waarom denk je dat?'

K1: 'Zeven is meer dan vier' (zonder verdere uitleg, maar wel demonstreren dat het begrepen is).

K2: 'De dief heeft er 468 en de sultan ruim 700.'

(Het aantal kisten, dozen en goudstukken van de sultan stond achter op het bord, want dat mocht eigenlijk niemand weten).

We draaien het bord om: 'Is dat dan 759? Dat zijn toch zeven kisten, vijf dozen en negen goudstukken? Wie legt dat even uit?'

K1: 'In een kist zitten tien dozen met negen goudstukken erin, dus honderd goudstukken etc.'

K2: 'In elke kist zitten dus honderd goudstukken en daarom ruim zevenhonderd goudstukken.'

(We laten na deze korte uitleg de inwisselproblematiek aan de volgende voorbeelden nog eens beleven. We vervolgen met het verhaal).

'Een verslaggever van de Bagdadse krant heeft gehoord hoe de sultan zijn goudstukken opgeborgen had in zijn drie schatkamers. Hij schrijft dat verhaal in de krant, omdat hij het een verstandige manier van opbergen vindt. De dief van Bagdad leest dat verhaal en denkt bij zichzelf: 'Als ik nu mijn goudstukken eens net zo inpak als de sultan, dan weet ik zeker of ik er evenveel heb.' De volgende nacht haalt de dief weer al zijn goudstukken tevoorschijn om ze in te pakken.'

De onderwijsgevende noteert op het bord.

De kinderen mogen om beurten vertellen wat er inmiddels ingepakt is en hoe dat ging. Op het bord verschijnt deze tabel:

kisten	dozen	goudstukken
		468
	1	458
	2	448
	3	438
	?	408
	10	?

Op deze wijze wordt het inwisselen nog eens onder de aandacht gebracht. Het verwoorden van deze situatie is van groot belang, juist ook voor de zwakkere leerlingen. Uiteindelijk verschijnt al verhalend deze tabel:

kisten	dozen	goudstukken
		468
	1	458
	2	448
	3	438
	6	408
	10	368
1		368
1	1	358
1	2	348
1	10	268
2		268
→ 3		168
→ 4		68
4	6	8

In het begin vraagt de onderwijsgevende zelf door middel van 'sprongen' in de tabel naar antwoorden. Verderop geven de kinderen naar analogie van het voorgaande aan hoe je snel kunt 'inpakken' door er als het ware direct zoveel mogelijk tientallen of zelfs honderdtallen vanaf te halen. De strategieën verschillen zeer sterk. De vraag die steeds gesteld wordt in iedere regel is: 'Wat heeft de dief gedaan?' Of: 'Kan de dief nog wel dozen vullen?'

Met nog een paar voorbeelden wordt gezamenlijk geoefend in het 'snel inpakken'. De kinderen bepalen zelf, via degene die de beurt heeft, wat er ingepakt wordt en in welke volgorde. Als je nu 26 dozen en 49 goudstukken hebt, ben je rijker dan de dief van Bagdad.

Op het bord verschijnt uiteindelijk:

kisten	dozen	goudstukken
	26	49
2	6	49
2	10	9
3	0	9

'En hoe zit dat als je drie kisten en 153 goudstukken hebt?'

kisten	dozen	goudstukken
3		153
3	15	3
4	5	3

Nu mogen de kinderen zelf op een blaadje dit soort inwisselprobleempjes doen.
We geven tenslotte de volgende opdracht:

‘In de Bagdadse krant stond een lijstje van rijke inwoners van de stad. Zoeken jullie nu eens uit wie het rijkste van deze mensen is.

De kalief heeft : 1 kist, 26 dozen, 93 goudstukken.

De pottenbakker : 85 dozen, 16 goudstukken.

De vrouw van de dief: 47 dozen, 183 goudstukken.

De schaaпsherder : 1 kist, 36 goudstukken.’

De kinderen gaan aan het werk. Het blijkt, dat het inwisselen hier en daar moeilijkheden oplevert. Er zijn duidelijke niveauverschillen tussen leerlingen waarneembaar. Sommige hebben veel, andere weinig tussenstappen nodig bij het ‘inpakken’ van goudstukken. Sommige kinderen realiseren zich bij iedere stap wat er in de context van de schatkamers van de sultan gebeurt, anderen lossen de inwisselprobleempjes abstracter op.

Een veel voorkomende fout is hierbij bijvoorbeeld:

kisten	dozen	goudstukken
	85	16
	95	6

Dit is een fout die met behulp van het zich realiseren wat er in feite gebeurt tamelijk eenvoudig hersteld kan worden. Desgewenst kan men voor deze kinderen nog weer het MAB-materiaal laten gebruiken of ander inwisselmateriaal wat reeds in de voorfase gehanteerd werd.

2.2 les 2: de rekenmeester van de sultan

We vervolgen ons verhaal.

‘De sultan van Bagdad wil graag iedere dag precies weten hoeveel hij bezit. De bewakers van de schatkamers komen hem dat aan het eind van de dag vertellen. Nu vond de sultan, dat hij erg lang moest wachten voordat hij wist wat hij bezat. Bovendien was hij er niet zeker van dat de dienaren geen fouten maakten bij het inpakken. Daarom benoemde de sultan een rekenmeester, die alles op moest schrijven wat het paleis binnen gebracht werd aan goudstukken. Deze rekenmeester moest heel snel uitrekenen hoeveel goudstukken er bijkwamen, zodat dan meteen bekend was hoeveel kisten, dozen en goudstukken er moesten zijn. De rekenmeester kreeg een groot vel papier waarop hij kon schrijven en een plaatsje vlak bij de ingang van het paleis. Zo kon hij iedereen naar binnen zien komen en dan vroeg hij: ‘Hoeveel bent U de sultan schuldig?’ Er waren een heleboel mensen die de sultan goudstukken kwamen brengen, zodat de rekenmeester het enorm druk had. Eerst rekende de rekenmeester

uit hoeveel goudstukken er in drie schatkamers moesten zijn. De drie bewakers hadden de avond te voren nog niet alles ingepakt en opgegeven hoeveel goudstukken, dozen en kisten er waren. Kijk, dit delen ze de rekenmeester mee.'

Voor kinderen op niveau 1 en voor kinderen die fouten maken, is het nodig het verhaal van het inpakken nog eens op te halen. Hoe gaat dat inpakken? Hoeveel dozen kunnen er gevuld worden? Hoeveel gevulde dozen zijn er al? Hoeveel dozen zijn er dan uiteindelijk? Natuurlijk, het zich realiseren van wat er gebeurt, is uiterst belangrijk als we willen dat kinderen in een later stadium de inwisselingen mentaal kunnen maken. Concreet werken met fiches, MAB-blokjes e.d. is in de meeste gevallen niet nodig, maar blijft in remediërende zin uiteraard mogelijk. Samen wordt op het bord nog even gesproken over handige rekenmeesters, die toch verschillend werken. Eén van de kinderen kan zijn oplossing op het bord schrijven. De groep kan dan vertellen hoe er gewerkt is en of het misschien handiger kan.

Na deze korte herhaling van de inwisselproblematiek gaat de onderwijsgevende zelf op het bord demonstreren hoe de rekenmeester van de sultan werkte. Uitvoerig doen we dit voor het volgende geval: de dienaar van de eerste schatkamer brengt veertien goudstukken naar de dienaar van de tweede schatkamer. Hij wordt echter terug gestuurd: 'Pak ze eerst maar een netjes in dozen.' Dat gebeurt. Hoeveel dozen heeft die nu? Hoeveel goudstukken heeft de eerste dienaar nu? Deze gang van zaken is ervoor bedoeld om ook zwakke rekenaars in de gelegenheid te stellen aansluiting te vinden. We hebben zo dezelfde problematiek drie keer aan de orde gesteld en wel steeds op een andere manier.

Op het bord verschijnt:

kisten	dozen	goudstukken
5	23	67

De kinderen nemen dit op een blaadje over en wisselen goudstukken en dozen in. Er zijn weer twee niveaus van oplossen:

Niveau 1:

kisten	dozen	goudstukken
5	23	67
5	24	57
5	25	47
⋮	⋮	⋮
5	29	7
6	19	7
7	9	7

Niveau 2 (hoog):

kisten	dozen	goudstukken
5	23	67
5	29	7
7	9	7

Bovendien zullen er weer fouten gemaakt worden, zoals:

kisten	dozen	goudstukken
5	23	67
5	83	7

2.3 les 3: handig rekenen met de rekenmeester

We eindigen het verhaal als volgt.

*‘Op die dag kwamen acht mensen die de sultan huur van hun huis moesten betalen. Ieder moest 37 goudstukken betalen. De rekenmeester noteerde dat zo: K D G
Wat zou de rekenmeester daarmee bedoelen?’*

K: ‘kisten, dozen en goudstukken.’

O: ‘Prima. Hij schreef dat niet helemaal meer op.’

K	D	G
	3	7
	3	7
	3	7
	3	7
	3	7
	3	7
	3	7
	3	7

De rekenmeester schreef de 37 goudstukken zo op. Hij dacht natuurlijk als die goudstukken ingepakt worden, dan... (kinderen vullen aan.)

Wellicht is het goed erop te wijzen, dat de manier van noteren van de rekenmeester een handige manier was. Er zijn kinderen die op een andere manier noteren:

K	D	G
		37
		37

We vragen aan de groep, waarom het eerste handiger is. Het antwoord zal zijn: ‘Het lijkt wel of de rekenmeester de goudstukken al direkt probeert in te pakken.’ Aansluitend aan dit verhaal komt de vraag, die als het begin van het cijferend vermenigvuldigen kan worden beschouwd: ‘Hoeveel verdient de sultan die dag?’ Let erop dat in dit stadium nog niet wordt gesproken over de manier van uitrekenen. Er zullen verschillen in aanpak tussen de leerlingen zijn, die we kunnen gebruiken voor niveauverhogingen bij de hele groep. Dit houdt in, dat het observeren van individuele leerlingen van groot belang is. Grofweg zullen er twee strategieën zijn.

Ten eerste de doortel-strategie: ‘zeven en zeven is veertien en zeven is eenentwintig en zeven is achtentwintig, ...’

Ten tweede, met behulp van het bekende tafelproduct $8 \times 7 = 56$ en $8 \times 3 = 24$.

Van meet af aan werkten we naar verkortingen en handige oplossingen toe. Daarom

We willen onderscheid maken tussen het aanleren van de vermenigvuldigalgoritme als procedurehandeling en het vaardig kunnen maken van vermenigvuldigingen als rekenhandeling. De basisvaardigheden zullen apart veel aandacht moeten krijgen om een goede ondersteuning te kunnen bieden aan de algoritme-leergang. Om de algoritme te leren, is immers slechts een beperkt aantal oefenmateriaal nodig, dus worden de basisvaardigheden daarbinnen relatief weinig geoefend. Om deze vaardigheid binnen het vermenigvuldigen te verhogen, zijn dus aparte oefenlessen nodig. We koppelen zodoende heel nadrukkelijk lessen die de voortgang in het schematiseringsproces beogen aan oefenlessen waarin de vaardigheden centraal staan.

We pleiten, zoals gezegd, voor een beperkt aantal opgaven bij de algoritme-leergang. Dat heeft de volgende redenen:

- 1 in korte lessen van twintig minuten tot een half uur mag je van kinderen een 'optimale' aandacht verlangen. Een aandacht, die nodig is om het leerproces van verkorten en schematiseren het best tot zijn recht te laten komen;
- 2 | te veel opgaven werken een verkeerde attitude in de hand. Verveeld sommen maken die je al lang kunt, is geen plezierige en nuttige bezigheid en werkt slordigheidsfoutjes in de hand. Voor een goede vaardigheid moet anders en apart geoefend worden, iets wat in het traditionele rekenen vanaf het derde leerjaar vaak niet systematisch plaatsvindt.

De opzet van de algoritmelessen is zodanig, dat aanvankelijk twee keer per week een les van twintig à dertig minuten gegeven wordt. In de beginfase krijgt de inwisselproblematiek en de manier van noteren van de herhaalde optelling sterk de aandacht. In de nabespreking wordt ook steeds op handigheidjes, zoals: tafelgebruik, commutativiteit, distributieve eigenschap en dergelijke gewezen. Als het gaat om inzicht in de inwisselproblematiek, speelt de context van het sultanverhaal steeds een hoofdrol.

Oefenopgaven van de volgende soort worden gemaakt:

- zes mensen brengen elk 58 goudstukken
- twaalf mensen brengen elk 37 goudstukken
- 37 mensen brengen elk 8 goudstukken
(dit is in deze context essentieel anders dan '8 mensen brengen 37 goudstukken').
De commutatieve eigenschap die vanuit de tafels bekend is, moet wel speciaal aandacht krijgen, maar wordt hier niet bewust aangepakt.
- negen mensen brengen elk 53 goudstukken
- tien mensen brengen elk 87 goudstukken

De laatste opgaven kunnen door kinderen handig opgelost worden. (We komen op deze kwestie nog terug). Meestal geven we een vijf- à zestal opgaven. We denken als vervolg op de eerste drie lessen, zoals die in het voorgaande zijn beschreven, vijf à zes korte lessen waarin een en ander wordt geoefend en geconsolideerd.

We geven een aantal aanvullende ideeën, waarin deze oefenlessen kunnen worden gegoten. Alle suggesties zijn hier binnen de sultan-context gekozen, maar dat is uiteraard niet beslist nodig.

'De sultan kreeg bezoek van twee boeren die hun land aan de sultan wilden verkopen. De sultan is zeer geïnteresseerd, want hij wil wel land kopen voor zijn kleinzoon. Maar hij zal moeten kiezen: of het land bij de rivier of het land in de bergen.'

'Hoeveel kost Uw land?', vraagt de sultan aan de boer die hem het land bij de rivier wil verkopen. Deze antwoordt: 'Vijftien goudstukken.' De sultan luistert maar half verder. 'Maar vijftien goudstukken?' 'Nee', zegt de boer, 'vijftien goudstukken voor een stuk land dat ik in één dag kan ploegen.' 'Oh, dus in één dag ploegt U een stuk land dat vijftien goudstukken waard is? Maar hoe groot is Uw land dan eigenlijk?' De boer antwoordt: 'Met de osseploeg kan ik mijn land in dertien dagen ploegen. ...' Even later komt de wilde bergboer binnen. 'Hoeveel kost Uw land?', vraagt de sultan. 'Mijn land kost zes goudstukken voor een stuk land dat in één dag kan worden geploegd.' Op de vraag hoe groot zijn land dan wel is, zegt de bergboer dat hij zijn land in 27 dagen kan ploegen. ...'

'De sultan betaalt een keer per jaar aan zijn dienaren hun salaris uit. Hij heeft drie soorten dienaren. Je zult zien dat het er niet erg eerlijk aan toe gaat:

138 gewone dienaren, die 9 goudstukken per jaar verdienen,

45 hogere dienaren, die 20 goudstukken per jaar verdienen,

en maar 17 allerhoogste dienaren, die 63 goudstukken per jaar verdienen.' ...

'Elke dag sjokken er ezels en kamelen door de woestijn op weg naar de markt in de stad waar de sultan de baas is. Deze ezels en kamelen worden daar verkocht. Deze dag kwamen er 34 ezels en 29 kamelen door de stadspoort binnen. Voor een ezel moet bij de stadspoort drie goudstukken belasting betaald worden. Maar als ze niet verkocht worden, worden er twee goudstukken terugbetaald. Een ezel kost op de markt negen goudstukken. Een kameel kost twaalf goudstukken belasting aan de stadspoort, maar als hij niet verkocht wordt, krijg je negen goudstukken terug. Een kameel kost op de markt 26 goudstukken. Alle ezels en kamelen worden die dag verkocht. ...'

3 HET VERVOLG VAN DE SCHEMATISERING EN VERKORTING

Nu we een start hebben gemaakt met de algoritme van de vermenigvuldiging en en passant de inwisselproblematiek hebben herhaald en verdiept, is het zaak de notatie los te maken van de door ons gebruikte context. De goudstukkentabel, die een passende vorm is voor de positiekaart, heeft in principe zijn waarde gehad. Het is de bedoeling de lange optellingen nu te koppelen aan de positiekaart. In de context hebben de kinderen de opgave: 'zes mensen brengen elk 42 goudstukken' genoteerd als:

4	2
4	2
4	2
4	2
4	2
4	2
4	2

Korte notatie: $6 \times 42!$

Nu kiezen we een andere contextopgave om de goudstukken-tabel te vervangen door de positiekaart. De rol van de goudstukken-context is hiermee beëindigd. Ze blijft

echter oproepbaar. Sterker nog: het blijkt van groot belang om deze context langer te gebruiken als mocht blijken dat inwisselingen met de positiekaart problemen opleveren. Eigenlijk willen we benadrukken dat de beslissing om de context van de sultan in te wisselen voor de positiekaart, een beslissing is die de onderwijzer op eigen verantwoording moet nemen met het oog op zijn leerlingen. Met andere woorden: men zou zich steeds af moeten vragen of niet te snel bepaalde resultaten worden gewenst. Want te snel gaan betekent dat sommige kinderen uit de boot gaan vallen, dat het schematiseringsproces overhaast, dus onvoldoende door de kinderen voltrokken moet worden. Dit ter attentie vooraf bij de beschrijving van de voortgaande schematisering en verkorting.

3.1 notatie met stippellijn; gebruik van tafels

Enkele problemen als start.

‘Mijn broer Wim spaart postzegels. Hij heeft een prachtig album waarin hij ze keurig heeft opgeplakt. Steeds heeft hij er zes naast elkaar op een rij en zo heeft hij op elke bladzijde vier rijen zitten.

Wie weet hoeveel postzegels er op een blaadje zitten?

Op een dag bladerde Wim door zijn album en dacht: ‘Ik heb al aardig wat postzegels verzameld. Ik zal ze eens tellen voor de aardigheid.’ Wim telde alle volle bladzijden uit zijn album en zei: ‘Nou, dat zijn er al achttien. Kan ik uitrekenen hoeveel postzegels ik heb?’

Wie zou dat ook snel kunnen uitrekenen?’

Samen met de kinderen wordt bedacht dat je ‘gewoon’ 18×24 moet uitrekenen. Zonder verdere uitleg gaan de kinderen aan het werk. Uit het leerlingenwerk blijkt dat vele kinderen de oplossing zoeken met behulp van de goudstukkentabel. In de bespreking leggen we vervolgens het accent op de positiekaart.

Met positiestrepen kunnen we alles overzichtelijk noteren:

18 {	H	T	L
		2	4
		2	4
		2	4
		2	4
		⋮	⋮
		⋮	⋮
		⋮	⋮

Hoeveel vieren komen er op deze manier bij de lossen (of eenheden) te staan? Juist: 18! Eigenlijk hoef ik die vieren niet allemaal te noteren. Ik stippel en zet vooraan erbij hoeveel er eigenlijk moeten staan. We bepalen samen met de groep de som van achttien vieren. Tien vieren en nog acht vieren. Dan inwisselen. Tenslotte laten we zien dat je dit soort altijd zo noteren kan, bijvoorbeeld:

$$12 \times 48:$$

	H	T	L
{		4	8
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.

De belangrijke verandering die hiermee beoogd wordt, is dat er stipeltjes worden gezet. Dit heeft vergaande consequenties. Niet zozeer in begripsmatig opzicht, maar wel ten aanzien van het uitrekenen, oftewel het gebruik van de tafels. Omdat niet alle cijfers er meer staan, wordt het moeilijker de opgave met doortellen op te lossen: 8 en 8 is 16 en 8 is 24 en 8 is 32, enz. Je kunt de cijfers immers niet meer aanwijzen. Dit moeten we proberen mee te nemen in het vervolg: laat kinderen die de tafels nog niet zodanig goed kennen dat ze deze functioneel gebruiken in de lange optelling, gerust alles noteren. Maar bedenk wel, dat dit een lager niveau is en dat het gebruik van stipeltjes een hoger niveau van schematisering is, waar we nu toch vrij snel naar toe willen. Forceer daarom de nieuwe notatiewijzen weliswaar niet, maar stimuleer de kinderen wel zoveel mogelijk om naar deze kortere notatie over te gaan.

Een tweede onderdeel voor het vervolg betreft het inwisselen. Hier gebeurt het inwisselen los van de sultan-context. Kinderen die met het inwisselen moeite hebben, zijn er echter mee gebaat de sultan-context te mogen gebruiken. Wijs ook vanaf nu regelmatig op het snelle directe inwisselen, zonder dit overigens al van alle kinderen te eisen.

Aan een les als zojuist beschreven, kunnen enkele oefenopgaven worden toegevoegd. Zoals reeds gezegd, beogen we hiermee de consolidering van de niveauverhoging die in de les centraal heeft gestaan. We geven een voorbeeld van een aantal oefenvormen in deze fase:

– voor iedereen:

$$6 \times 43$$

$$8 \times 67$$

$$63 \times 9$$

$$12 \times 57$$

$$16 \times 68$$

– als de leerling klaar is:

$$18 \times 23$$

$$17 \times 30$$

$$8 \times 96$$

Motivering:

- de eerste twee zijn van een betrekkelijk gemakkelijk type waar iedereen iets van moet kunnen maken;
- $63 \times 9 = 9 \times 63$. Het kind moet het zien en het ook leren zien! Als hij het door heeft, is het verder niet zo moeilijk;
- 9×63 en 12×57 , twee sommen van hetzelfde type. We kunnen namelijk in beide gevallen van $10 \times \dots$ uitgaan. Bij 9×63 kunnen we $630 - 63$ uitrekenen; bij

12×57 : $570 + (57 + 57)$. Deze opgaven gebruiken we om een volgende niveauverhoging in te leiden, namelijk die van de factor '10'.

3.2 de factor 10

De rol van de factor 10 is in deze deelleergang uiterst belangrijk. Aan de hand van de opgave 12×57 lichten we dit toe. Deze opgave wordt door de kinderen veelal zo opgeschreven:

$12 \times$
{

H	T	L
	5	7
	.	.
	.	.
	.	.
	.	.
	.	.
	.	.

De moeilijkheid hierbij is nu, dat de tafel van zeven, respectievelijk vijf niet tot 12×7 en 12×5 gekend wordt. Dit levert een moeilijkheid op, die in het geval van 12×57 nog wel te overbruggen is, maar er moet toch een andere weg gezocht worden om 67×57 te kunnen maken. Deze andere weg is die, waarbij de factor 10 een grote rol speelt. De kinderen noteren de opgave 12×57 zó:

12
{

H	T	L
	5	7
	5	7
	.	.
	.	.
	.	.
	5	7
	5	7
	60	84
	68	4
6	8	4

Er worden stippeltjes gezet voor tien keer 57, daaronder wordt nog twee keer 57 genoteerd. Om te benadrukken dat de lange optelling gesplitst is in 10×57 en 2×57 – een zeer natuurlijke manier van doen, die door de kinderen zelf wordt aangegeven – zetten we een streepje. Dit streepje betekent: ‘tot hier toe noteren we tien keer 57, eronder volgt de rest.’

Hoe dienen de kinderen dit nu uit te rekenen?

- alle kinderen moeten gaan inzien dat tot het streepje geldt: $10 \times 7 = 70$, respectievelijk $10 \times 5 = 50$;
- daarna kan men twee kanten op:
 - a) $2 \times 7 = 14$, er zijn dus $70 + 14 = 84$ eenheden;
 - b) doortellen, waarbij de zeven eenheden onder de streep aangewezen worden: $70 - 77 = 84$. Hetzelfde voor de tientallen.

Het is gewenst de kinderen in enige oefenlessen de gelegenheid te geven zich dit niveau eigen te maken, waarbij het accent ligt op de functie van het streepje. Met andere woorden: de nadruk ligt op de factor 10.

Geschikte oefenopgaven zijn die, waarbij de vermenigvuldiger 11, 12 of 13 is, dus:

$$12 \times 57, 12 \times 43, 12 \times 69, \text{ enz.}$$

$$11 \times 57, 11 \times 43, 11 \times 69, \text{ enz.}$$

$$13 \times 23, 13 \times 32, \text{ enz.}$$

In verschillende lessen wordt dus aandacht besteed aan de factor 10 bij vermenigvuldigingen, zoals hiervoor beschreven. We willen nu echter op een wat andere manier de factor 10 binnen de herhaalde optelling aan de orde stellen. Daartoe nodigen we de kinderen uit om de opgave ' 10×63 ' uit te werken.

H	T	L
	6	3
	6	3
	.	.
	.	.
	.	.
	.	.
	60	30
	63	0
6	3	0

In deze les proberen we de kinderen nog eens bewust te maken van wat het betekent met tien te vermenigvuldigen en hen de regel met de nul te laten ontdekken ofwel het opschuiven van de cijfers met één plaats naar links.

In eerste instantie zullen de meeste kinderen in elke kolom het tienvoud van het getal uit de kolom zetten, waarna ze zullen inwisselen. Dit is bij de uitwerking van de opgave 10×63 op deze wijze gedaan. We willen er, zoals gezegd, naar toe werken dat de kinderen inzien dat er bij 10×63 niets uitgerekend hoeft te worden: je ziet immers direkt dat er 630 uitkomt. Let op! We geven de truc niet! Via de herhaalde optelling wordt duidelijk dat de regel 'met 10 vermenigvuldigen betekent er een nul achter zetten' hier ook opgaat. Net zoals bijvoorbeeld bij de tafels: $10 \times 7 = 70$, een nul achter de zeven.

Geschikte oefensommen hiervoor zijn:

$$10 \times 63$$

$$10 \times 47$$

$$10 \times 84$$

maar ook: 10×213 , enzovoort.

Steeds vragen we in de nabespreking: 'Wat valt je op als je naar het antwoord kijkt?' 'Hoe komt dat, denk je?'

Daarna worden opgaven gegeven om van deze eigenschap gebruik te maken.

Op het bord verschijnt 17×68 :

$17 \times \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline H & T & L \\ \hline & 6 & 8 \\ & 6 & 8 \\ & \vdots & \vdots \\ & 6 & 8 \\ & 6 & 8 \\ & 6 & 8 \\ & 6 & 8 \\ & 6 & 8 \\ & 6 & 8 \\ & 6 & 8 \\ \hline & 42 & 56 \\ & 47 & 6 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 8 & 0 \\ \hline \end{array} \right.$

– 680 of $10 \times 68 = 680$ (plus gebaar in de lucht om de lange optelling aan te geven)

$7 \times 68 = \underline{476} +$

De onderwijsgevende legt nu de verbinding met het voorgaande door te zeggen: ‘Je weet wat dat streepje betekent, wie kan een antwoord bij het streepje zetten?’ ‘Je weet toch wel hoeveel 10×68 is?’ Zo komt er bij het streepje 680 te staan. ‘Je hoeft eigenlijk alleen maar 7×68 uit te rekenen’, zullen de kinderen zeggen. Het is duidelijk dat 17×68 dus $680 + 476$ moet zijn. Ook hier geldt overigens weer, dat iedereen weliswaar begrepen heeft wat er op het bord staat, maar het nog niet direct zal toepassen bij zijn eigen uitwerkingen. Maar ook hier geldt dat met individuele hulp en stimulans de kinderen deze verkorting snel zullen gaan toepassen. Er volgt weer een aantal oefenlessen, waarbij met name ook op het noteren gelet wordt.

Een verkorte notatie van het herhaald optellen is de volgende:

16×68

68	
⋮	
⋮	
—	680
68	408
68	1088
68	
68	
68	
68	
68	
68	
—	
3648	
408	

of: 68

⋮
⋮
—
680
408
1088
⋮
⋮
408

of: $10 \times 68 =$

of: $6 \times 68 =$
(plus gebaar in de lucht)

Deze verkorte notatie wordt door een aantal leerlingen spontaan gehanteerd. We zouden daar gebruik van kunnen maken om deze verhoging in het niveau van schematisering te bewerkstelligen. De meeste leerlingen hebben in dit opzicht een duwtje in de rug nodig. Hoe we dit duwtje kunnen geven, laten we aan de hand van het bovenstaande voorbeeld zien. De vraag die tot de verkorte notatie leidt, is: ‘Hoe kun je dit korter opschrijven?’ We moeten ons ervan bewust zijn dat er wel informatie verloren gaat. Namelijk die zegt hoeveel keer 68 er staat: het streepje geeft 10 maal

aan. De rest moet op een of andere manier genoteerd worden. Dat kan met een accolade, een boogje of gewoon alleen met het aantal ervoor. Hier is dat 6 maal. Het is niet nodig om in één les van iedere leerling deze niveauverhoging te eisen. Zonder veel problemen kunnen we er regelmatig even op wijzen als in de volgende lessen de gelegenheid daartoe zich voordoet.

3.3 de factor 10 (vervolg)

De zo belangrijke stap in het leerproces met de factor 10 heeft een vervolg in opgaven met een aantal keren de factor 10. We laten dit zien aan het voorbeeld: 20×46 . Ook hier kan de werkwijze weer zijn: één of enkele kinderen op het bord laten werken, de rest op een blaadje. We kunnen drie typen uitwerkingen verwachten:

46	en	46	en	$10 \times 46 =$
⋮		⋮		$10 \times 46 =$
— 460		— 460		
46		46 460		
⋮		46 920		
⋮		46		
— 460		46		
920		46		
		46		
		46		
		46		
		46		
		46		
		46		
		— 46		
		460		

Confrontatie van deze notatiewijzen werkt goed om de verschillen nog eens duidelijk te maken. Het doel is om de uitwerking links te gaan hanteren. Dit is noodzakelijk voor een sommetje als 40×78 , dat in een gesprek door ons op het bord wordt gezet. Hoe begin je?

78		
⋮		
⋮		
— 780		Wat nu?
78		
⋮		
⋮		
— 780		Hoeveel keer heb ik dat eigenlijk onder elkaar gezet?
⋮		
⋮		
— 780		Wat moet er nu nog verder?
⋮		
⋮		
— 780		Zijn we nu klaar? Wat is het antwoord dan?

Deze vragen bij de opbouw van zo’n som geven iedereen houvast om zo’n sprong te maken. We laten daarna op het blaadje uitrekenen wat er nu eigenlijk uitkomt. Aansluitend geven we weer een aantal oefenopgaven:

30×38	20×46
50×42	80×23

En natuurlijk weer een som die op de volgende fase vooruit loopt:

$$41 \times 78$$

Het is voorts gewenst geruime tijd stil te staan bij dit niveau van schematisering, dus een flink aantal oefenlessen in te lassen. Steeds geven we daarbij oefeningen van het bovenstaande type (30×38 , enz.), maar ook van het type 58×40 , waarbij de commutativiteit gebruikt kan worden. Ook, preluderend op het vervolg, komen sommen van deze typen voor:

$$\begin{array}{ll} 41 \times 53 & 29 \times 64 \\ 61 \times 23 & 39 \times 48 \end{array}$$

In deze opgaven mikken we weer op ontdekkingen in de zin van:

$$\begin{array}{l} 41 \times 53 = 40 \times 53 \text{ plus } 53. \\ 29 \times 63 = 30 \times 64 \text{ min } 64. \end{array}$$

Flexibiliteit en gebruik van eigenschappen zijn vereist. Ook contextopgaven passen hier.

4 TUSSENSTAND NA VIJFTIEN LESSEN

In het onderwijs, waarin het leren van een cijferalgoritme beoogd wordt – een langdurig leerproces derhalve – past op geregelde momenten een peiling. De bedoeling hiervan is nauwkeurig na te gaan, hoe de stand van zaken op een bepaald moment is: op welk niveau kinderen werken, waar eventuele leemten kunnen worden gesignaleerd, of er veel (te veel) fouten worden gemaakt... De vorm waarin we zo'n peiling houden is die van de toetsles. Daaronder verstaan we uitdrukkelijk geen buitensporige situatie waarin getoetst wordt, maar veeleer een normale lessituatie. Alleen de sommen worden met een speciale bedoeling samengesteld en gemaakt. Het enige verschil met een normale les is, dat hulp van medeleerlingen nu niet toegestaan is. Wijzelf als onderwijsgevendenden helpen op verzoek wel, omdat deze hulp ons evenzeer informatie oplevert die we op het oog hebben met een peiling. Kern van de toetsles is dat we van iedere leerling informatie willen hebben over zijn niveau van werken. Kinderen moeten weten dat fouten maken op zich niet zo erg is, maar dat die fouten ons in staat stellen hen te helpen. We staan de kinderen bij in hun pogingen de algoritme te leren. Fouten spelen daarin nu eenmaal een essentiële en leerzame rol. De sommen van de peiling worden zeer zorgvuldig gekozen, rekening houdend met de fase waarin het leerproces zich bevindt. We kunnen de sommen op twee bladen schrijven: een A-blad, met sommen die iedereen binnen de gestelde tijd af zou moeten hebben (een tempo- en niveau-aanduiding dus) en een B-blad voor kinderen die snel werken.

De lengte van een toetsles is afhankelijk van de samenstelling van de bladen met sommen, maar ook van de situatie zoals die zich in de les ontwikkelt. Over het algemeen verdient een korte toetsles van minder dan dertig minuten de voorkeur. In de beschikbare tijd hoeven niet per sé veel sommen gemaakt te worden. We mikken

aanvankelijk immers niet allereerst op grote vaardigheid en snelheid, maar laten een behoorlijke mate van verschil in oplossingsmethoden toe – uiteraard, zouden we bijna zeggen, want dat is nu juist het kenmerk van de progressieve schematisering.

4.1 voorbeeld van een toets

Een voorbeeld van een peiling, die werd gehouden nadat de kinderen ruim twee maanden gedurende twee lessen per week met het leren vermenigvuldigen volgens het herhaald optellen bezig waren – dus in de buurt van de hiervoor beschreven fase aangeland – is de volgende.

A-deel	B-deel
7×43	62×45
12×29	8×416
84×8	17×68
60×35	59×89

We lopen ze even langs:

- 7×43 : een betrekkelijk eenvoudige vermenigvuldiging om te beginnen.
- 12×29 : ook vrij eenvoudig; op te lossen door 10 keer 29 en nog 2 keer 29 uit te rekenen of door 12 keer 29 op te tellen.
- 84×8 : als opgave 1 in geval de commutativiteit gebruikt wordt; anders wordt dit een lastige opgave.
- 60×35 : enige keren de factor 10 'afpassen'.
- 62×45 : deze opgave loopt vooruit op het vervolg. Enige keren de factor 10 en 2×45 , wat eventueel nog uit het hoofd kan.
- 8×416 : een opgave die nauwelijks moeilijker is dan 8×84 ; het verschil zit 'm in één keer meer inwisselen.
- 17×68 : deze opgave is wat lastiger dan 12×29 .
- 59×86 : veruit de moeilijkste opgave. De leerlingen kunnen hier 60×86 min 86 uitrekenen. Deze opgave is er duidelijk een van het type waar de leerlingen in een volgende fase mee geconfronteerd worden.

Het zal de lezer overigens opvallen dat de opgaven naar traditionele maatstaven gerekend bijzonder complex zijn als men in ogenschouw neemt dat de deelleergang pas vijftien lessen loopt. We hebben ons bepaald tot kale cijfersommen, omdat we hier speciaal naar de vorderingen in de schematisering en notatie-wijze willen kijken.

Maar het zal duidelijk zijn dat hier evengoed relatief enkelvoudige verhaaltjessommen gebruikt hadden kunnen worden. In dat geval zouden de contexten in een aantal gevallen 'Ruis' veroorzaakt hebben. Op zich uiteraard geen bezwaar, maar voor onze peiling wat storend. Vandaar.

De fouten hebben we op de volgende manier in typen onderscheiden:

- a) fouten in het berekenen van de tafelpakketten;
- b) fouten in het vermenigvuldigen met factor 10;
- c) fouten in het niet samennemen van alle deelpakketten;
- d) fouten in het optellen van de deelpakketten;
- e) fouten in het gebruik van het schema (opbouw van de algoritme);
- f) inwisselfout bij het vermenigvuldigen of optellen;
- g) slordigheidsfouten;
- h) rest-serie van fouten waarvan de herkomst niet zonder meer te achterhalen is.

Van ieder van deze fouten zullen we aan het eind een voorbeeld geven. Bij foutentype f) dient overigens opgemerkt te worden, dat uit de uitwerking meestal niet blijkt of de kinderen de tafels hebben gebruikt of herhaald opgeteld hebben.

De categorieën die we onderscheiden zijn:

Categorie 1: fouten die terug te voeren zijn tot de basisvaardigheden, zoals tafelpakketten en basisoptellingen (type a), soms type b) en d)).

Categorie 2: fouten die te maken hebben met begrip van de algoritme, zowel vermenigvuldig- als optelfouten zitten daarbij (type c), e), f), soms b) en d)).

Categorie 3: slordigheidsfouten (type g)).

We zullen nu eerst een totaalbeeld geven van het aantal en de typen fouten die gemaakt zijn in blad A. Daarna maken we een collage van typerende fouten.

De eerste kolom in de volgende tabel geeft het totaal aantal fouten weer. De kolommen onder a, b, c, d, e, f, g en h geven het aantal fouten van ieder kind aan van het betreffende type:

Naam:	A	a	b	c	d	e	f	g	h
Mariëlle V.	1				1				
Eric	0								
Stefien	0								
Hans	0								
Max	2		1					1	
Mariëlle B.	0								
Pascal	0								
Arnold	2		1					1	
Marjolijn	1	1							
Myrna	0								
Dennis	1							1	
Patricia	2	1		1					
Ingrid	0								
Johnny	4	1				2	1		
Fouten van		7 × 43			12 × 29		84 × 8		60 × 35
Aantal kinderen		2			3		4		4

Hetzelfde voor het B-blad:

Naam:	B	a	b	c	d	e	f	g	h
Mariëlle V.	2				1			1	
Eric	0								
Stefien	0								
Hans	0								
Max	2		2						
Mariëlle B.	1				1				
Pascal	1								1
Arnold	1						1		
Marjolijn	2			1			1		
Myrna	1				1				
Dennis	3			1	2				
Patricia	2	1					1		
Ingrid	1			1					
Johnny*									

*) Johnny heeft geen B-opgaven gemaakt (hij is vanwege privé-omstandigheden nogal wat achterop geraakt).

Fouten van	62×45	8×416	17×68	59×86
Aantal kinderen	5	0	6	5

Alvorens voorbeelden van fouten te laten zien, eerst een opmerking. Bij het bepalen van het type fout is de interpretatie van degene die de foutenanalyse maakte soms voor discussie vatbaar. Het is met andere woorden niet altijd even duidelijk tot welk type fout je een bepaald geval moet rekenen. Binnen het geleverde werk speelt mee of een fout incidenteel voorkomt of niet. Verder kan het beeld wat de onderwijsgevende uit de voorgaande lessen van een bepaald kind heeft een rol spelen. Dat houdt in, dat een kind met een bepaalde moeilijkheid in de afgelopen periode veel is geholpen en dat de onderwijsgevende daardoor kan weten dat dit kind om die reden een bepaalde opgave verkeerd maakt.

Type a): fouten in het berekenen van tafelprodukten:

$$84 \times 8 = 512 \quad \checkmark$$

$$\begin{array}{r}
 84 \\
 84 \\
 84 \\
 84 \\
 84 \\
 84 \\
 84 \\
 84 \\
 \hline
 4932 \\
 512
 \end{array}$$

Het is niet altijd gemakkelijk om dit type fout te constateren. Vaak kun je aan het geleverde werk niet zien of de tafels gebruikt zijn of dat er gewoon opgeteld is. In dit voorbeeld lijkt het dat hier wel sprake is van een verkeerd tafelprodukt, namelijk $8 \times 8 = 48$.

Type b): fouten in het vermenigvuldigen met factor 10:

$$60 \times 35 = 210 \quad \checkmark$$

$$\begin{array}{r} 10 \times 35 \\ 10 \times 35 \\ 10 \times 35 \\ 10 \times 35 \\ 10 \times 35 \\ 10 \times 35 \\ \hline 210 \end{array}$$

Er komen meerdere variaties van dit type fouten voor, maar deze hoort zeker bij de fouten die kunnen voorkomen – maar die op zich niet verontrustend zijn, omdat blijkt dat kinderen ze makkelijk herstellen. Ze zijn als het ware even ‘vergeten’ waarmee ze bezig zijn.

Type c): fouten in het niet samennemen van alle deelprodukten:

$$17 \times 68 = 296 \quad \checkmark$$

$$\begin{array}{r} 68 \\ \hline 68 \\ 68 \\ 68 \\ 68 \\ 68 \\ 68 \\ 68 \\ \hline 24156 \\ 296 \end{array}$$

Deze fout komt in het begin veel voor. De kinderen zijn zo gericht op het uitrekenen van het tweede deel dat, als die deelsom af is, dit direkt als antwoord genoteerd wordt. Er zit hier overigens ook nog een ‘omkeringsfout’ in: $7 \times 6 = 24$.

Type d): fouten in het optellen van de deelprodukten:

$59 \times 86 = 4374$
 $\begin{array}{r} 59 \\ \times 86 \\ \hline 54 \\ 472 \\ \hline 4374 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 86 \\ \times 59 \\ \hline 774 \\ 4937 \\ \hline 4374 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 860 \\ \div 59 \\ \hline 14 \\ \text{R } 14 \end{array}$

In dit geval is duidelijk te zien dat het bezwaarlijk is om 50×86 niet apart uit te rekenen. Vandaar dat bij het samennemen van de honderdtallen op deze manier de tafels moeilijker gebruikt kunnen worden. Let ook op het niveau van oplossen van 9×86 : de tafels worden wel gebruikt, maar er wordt nog niet direkt ingewisseld.

Type e): fouten in het gebruik van het schema:

[illegible]

Bij de oplossing is duidelijk te zien hoe het kind zich voorstelt eruit te komen. Eerst wordt de commutatieve eigenschap geprobeerd en dan wordt 80×8 in schema gezet.

Er komen allerlei soorten slordigheden voor. We geven twee voorbeelden: De fout zit hier in het uitrekenen van 2×29 . De manier van noteren speelt een rol bij dit soort fouten.

$$\begin{array}{r}
 12 \times 29 = \begin{array}{r} k \quad D \quad g \\ 2 \quad 9 \\ \vdots \quad \vdots \quad 290 \\ \hline 2 \quad 9 \quad 29 \\ 2 \quad 9 \quad 290 \\ \quad 29 \\ 2119 \\ 319- \end{array}
 \end{array}$$

Dit kind heeft het schema goed opgezet. Bij het overschrijven is echter maar één keer 29 overgenomen bij het samennemen van de 'deelsommen'.

4.4 niveaus van oplossen

In het onderwijs is steeds de manier van oplossen nauwlettend in de gaten gehouden. Ook bij de toetsles valt op dat de kinderen enorme verschillen vertonen bij hun oplossen. Het is goed om dit vast te stellen, omdat daaruit conclusies kunnen worden getrokken voor een mogelijke voortgang. Daarom is het dienstig om eens te bekijken wat van belang is bij het observeren en analyseren van leerlingenwerk.

Daartoe bekijken we van alle leerlingen dezelfde opgave uit de toetsles, te weten ' 62×45 '.

Er zijn twee punten die van essentieel belang zijn voor het niveau van oplossen: dat zijn de notatiewijze van de leerlingen en de manier van uitrekenen daarbij. Deze kenmerken staan niet los van elkaar: de manier van noteren werkt een bepaalde rekenwijze in de hand. Zelfs worden bepaalde fouten zo opgewekt. We zullen, om dit nauwkeurig te kunnen aangeven, het leerlingenwerk onder de loep nemen.

Bij ieder van de uitwerkingen zullen we een kort didactisch commentaar geven.

Maar het zal de lezer niet moeilijk vallen er zijn eigen kanttekeningen aan toe te voegen.

1

$$62 \times 45 = 2790$$

Dit kind heeft eerst de commutatieve eigenschap willen toepassen, maar kwam daar niet uit. Bij de uitwerking ernaast blijkt dat er nauwkeurig het aantal keren de factor 10 genoteerd is. Alles moet nog wel opgetekend worden, vandaar dat twee keer 45 opnieuw wordt opgeschreven. 6×450 en 2×45 worden apart uitgerekend en daarna samengenomen. Opvallend is echter dat 6×450 op een veel hoger nivo uitgerekend is dan 2×45 . Hieruit blijkt dat het inwisselen nog niet altijd tegelijk met de optelhandeling wordt uitgevoerd.

- 2 Dit kind lost net als bij '1' 6×450 en 2×45 apart op. Het kan 2×45 wel uit het hoofd. En het inwisselen gebeurt direct met onthouden ($6 \times 4 + 3 = 27$). Kortom, er is hier sprake van een relatief hoog niveau van noteren:

$$62 \times 45 = 2790$$

- 3 Hier een wat andere notatiewijze, waarin de herhaalde optelling toch duidelijk herkenbaar is. Alles wordt keurig genoteerd, alleen wordt 6×450 en 2×45 niet apart 'opgeteld' en dan pas samengenomen:

$$62 \times 45 = 2\,490 \quad \checkmark$$

$$10 \times 45 = 450$$

$$10 \times 45 = 450$$

$$10 \times 45 = 450$$

$$10 \times 45 = 450$$

$$10 \times 45 = 450$$

$$10 \times 45 = 450$$

$$\begin{array}{r} 2 \times 45 = 90 \\ \hline 2490 \end{array}$$

Dit kan problemen geven bij het gebruik van tafels, waardoor het optellen in de hand wordt gewerkt. Alle getallen zijn immers niet gelijk. Pas onder die voorwaarde is het gebruik van tafels adequaat. Het kan best zijn dat daardoor de 3 van 39 niet meer is onthouden!

- 4 Dit kind heeft de commutatieve eigenschap toegepast en kwam er daarna niet uit. Hier ook een voorbeeld van de manier van werken die door de notatievorm beïnvloed wordt. Bij de uitwerking blijkt 62×62 genoteerd te zijn. Een vergissing?

$$62 \times 45 = 1800$$

62	620
62	620
62	620
62	620
62	620
62	620
62	620
62	620
62	620
62	620

- 5 Duidelijk genoteerd en apart uitgerekend. Alleen 2×45 gebeurt niet ineens:

$$62 \times 45 = 2790$$

$10 \times 45 = 450$	2700
$10 \times 45 = 450$	90
$10 \times 45 = 450$	
$10 \times 45 = 450$	2790
$10 \times 45 = 450$	
$10 \times 45 = 450$	
2700	

(2x)

$$\begin{array}{r} 1 \times 45 = 45 \\ 1 \times 45 = 45 \\ \hline 90 \end{array}$$

- 6 Dit kind noteert alles nog helemaal binnen de context van de inwisselproblematiek. Het verhaal van de sultan die schatkamers had voor goudstukken, dozen met tien goudstukken, kisten met tien dozen erin enz. geeft steun bij het oplossen. Aan de linkerkant wordt het een en ander met veel moeite op een relatief laag niveau uitgerekend. Het inwisselen lukt met behulp van de gegeven context wel enigermate. Dat het geheel veel moeite kost, is ook duidelijk uit het feit, dat 2×45 niet volledig aan bod komt. Merk op dat $5 + 5$ nog wel in de optelling verwerkt is, maar $4 + 4$ niet in de tientallen. Al met al heeft deze uitermate zwakke leerling toch een behoorlijke prestatie geleverd. (We komen later uitgebreid op hem terug bij de bespreking van remediërend werk).

$62 \times 45 =$	2790	
450	1	450
450	.	450
450	.	450
450	.	450
450	.	450
450	.	450
450	.	450
2790	.	450
2400	.	245
2710	.	45
2710	.	0

- 7 Een instructief geval, waarin nog eens duidelijk wordt dat de manier van noteren het uitrekenen sterk beïnvloedt. 2×45 wordt niet duidelijk apart opgeschreven, maar gebruikt uit de bovenaan genoteerde getallen. Zodoende is het kind zich waarschijnlijk niet meer bewust dat het 2×45 uitrekende. Want omdat de nul 'vergeten' werd, komt er 9 uit. Opvallend is dat 6×450 op een hoger niveau goed uitgerekend wordt:

$$62 \times 45 = 2709 \checkmark$$

$$\begin{array}{r}
 62 \left\{ \begin{array}{l} 45 \\ 450 \\ -450 \\ 450 \\ -450 \\ 450 \\ -450 \\ 450 \end{array} \right. + \\
 \hline
 2700 \\
 8110 \\
 \hline
 2709 \\
 2709 +
 \end{array}$$

- 8 Deze leerling noteert wel alles, maar rekent niet alles uit. De notatiewijze werkt de verkeerde berekening in de hand:

$$\begin{array}{r}
 62 \times 45 = 360 \checkmark \\
 10 \times 45 \\
 10 \times 45 \\
 10 \times 45 \\
 10 \times 45 \\
 10 \times 45 \\
 10 \times 45 \\
 \hline
 270 \\
 90 \\
 \hline
 360
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 45 \\
 45 \\
 \hline
 900
 \end{array}$$

12 De commutatieve eigenschap is hier wel goed toegepast. Het inwisselen wordt ook hier ondersteund door het noteren van wat onthouden moet worden (zie het ééntje bij 5×62).

4×620 wordt niet eerst uitgerekend met alle mogelijke problemen bij het vermenigvuldigen en het tafelgebruik die zich daarbij kunnen voordoen, zoals we hiervoor reeds opmerkten:

$$62 \times 45 = 2790 \quad \text{?}$$

$$\begin{array}{l} 10 \times 62 = 620 \\ 10 \times 62 = 620 \\ 10 \times 62 = 620 \\ 10 \times 62 = 620 \\ 310 + \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 62 \overline{) 2790} \end{array}$$

$$62$$

$$62$$

$$62$$

$$62$$

$$310$$

13 Dit kind heeft nog het houvast van de positiekaart nodig. Het antwoord wordt in duizend-, honderd-, tientallen en lossen genoteerd. Ook hier worden de deelprodukten niet eerst apart uitgerekend:

$$62 \times 45 = 2790 \quad \text{?}$$

$$\begin{array}{r} 62 \overline{) 450} \\ \underline{450} \\ 450 \\ \underline{450} \\ 450 \\ \underline{450} \\ 450 \\ \underline{450} \\ 450 \\ \underline{450} \\ 90 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 10} \\ 90 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \overline{) 390} \\ 2790 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2790 \end{array}$$

14 Een bekende oplossings- en notatiewijze:

$$62 \times 45 = 2790 \text{ €}$$

$$\begin{array}{r} 10 \times 45 = 450 \\ 10 \times 45 = 450 \\ 10 \times 45 = 450 \\ 10 \times 45 = 450 \\ 10 \times 45 = 450 \\ 10 \times 45 = 450 \\ 2 \times 45 = 90 \\ \hline 2790 \end{array}$$

4.5 terugblik op peiling, waardebeoordeling van onderwijs

We constateren dat er een groot aantal verschillen is tussen de veertien kinderen met betrekking tot het uitrekenen en noteren van de berekening van de produkten. Dit is mede een gevolg van de grote mate van vrijheid die we de kinderen gelaten hebben met als gevolg een grote diversiteit in oplossingsgedrag.

Hoe moeten we dit onderwijs waarderen?

Wel, niet in alle opzichten positief, hoewel deze werkwijze van de progressieve schematisering van de herhaalde optelling als geheel goed voldoet. Men dient namelijk te bedenken dat de kinderen al na vijftien lessen in staat zijn relatief lastige opgaven met redelijk succes aan te pakken. Vergelijk dat eens met vijftien lessen in het gangbare cijferonderwijs! Dit alles neemt echter niet weg dat aan bepaalde punten in het onderwijs vooralsnog onvoldoende aandacht besteed is. Als meest algemeen punt noemen we de zojuist genoemde vrijheid met betrekking tot het uitrekenen en noteren. Ten eerste werden daardoor, zoals we gezien hebben, bepaalde fouten in de hand gewerkt, die betrekkelijk eenvoudig vermeden kunnen worden, ten tweede wordt het voor de onderwijsgevende nogal lastig om overzicht over de hele groep te houden, en ten derde is het aansluiten op de werkwijze van ieder kind afzonderlijk ook niet altijd even eenvoudig. Kortom, het lijkt verstandig om in het vervolg van de leerang bepaalde manieren van werken en noteren wat meer te richten en te uniformeren. Het bezwaar daarvan is, dat de spontaniteit en de persoonlijke 'uitvindingen' van de kinderen voor een (klein) deel verloren zullen gaan, maar er staan voordelen van overzichtelijkheid, uniformiteit, vermijden van onnodige fouten e.d. tegenover.

In het volgende deel zullen we onder het kopje 'voorwaarden' meer in detail op de correcties ingaan die we juist voor de eindfase van de leerang willen aanbrengen. Daarbij zullen tal van deelproblemen die we bij de bespreking van het leerlingewerk

tegen kwamen in principiële zin behandeld worden. Niet wat 'is' zal dan voorop staan, maar wat 'moet zijn'.

5 VOORWAARDEN EINDFASE

In dit hoofdstuk haken we in op de resultaten van de toetsles. We doen dit onder het kopje 'voorwaarden', te verstaan als voorwaarden waaraan voldaan moet zijn wil de leerling de eindfase van de progressieve schematisering kunnen voltooien. Ze hebben vooral betrekking op de 'technische' kant van het rekenen: de rekenvaardigheid. We volgen bij de bespreking van de voorwaarden de indeling in foutentypen, die in het vorige hoofdstuk gemaakt werd, te weten:

- Basisvaardigheden (tafels e.d.).
- Rekenen met nullen ($10 \times$ e.d.).
- Deelprodukten apart uitrekenen.
- Deelprodukten samenvoegen.
- Schema van de herhaalde optelling.
- Inwisselen.
- Slordigheid en netheid.
- Rest-categorie.

5.1 basisvaardigheden

Na vijftien lessen zijn er twee leerlingen uit de groep van veertien die de tafels van vermenigvuldiging nog niet volledig beheersen. Zij zien echter wel degelijk in dat ze die moeten kennen, omdat het zonder die kennis vrijwel ondoenlijk is de opgaven in redelijke tijd foutloos te maken. Het voordeel is dat deze kinderen nu wel sterk gemotiveerd zijn de tafels te leren, dit in tegenstelling tot enkele weken geleden. We helpen de kinderen door ze de steunpuntenmethode te laten gebruiken. Dat gaat zo:

D: (over zeven keer zeven in een lange optelling): '*Jammer dat ik deze tafel niet ken.*'

O: '*Weet je 10×7 ?*'

D: '*Ja, dat is 70.*'

O: '*Weet je 5×7 dan ook?*'

D: (na enig denken, verkregen door halveren): '*35.*'

O: '*Als je 5×7 weet, weet je dan misschien 6×7 ?*'

D: '*Ja, $35 + 7 = 42$.*'

O: '*En 7×7 ?*'

D: '*Weer 7 erbij: $42 + 7 = 49$.*'

Op deze manier wordt de tafel natuurlijk niet direkt gememoriseerd, maar al doende leert men steeds meer steunpunten uit het hoofd en ook om deze efficiënt te gebruiken. Het is dan echter wel zaak regelmatig te oefenen. Want het kennen van de tafels van vermenigvuldiging is een noodzakelijke voorwaarde om naar de eindfase te kunnen doorstoten. In deze fase vinden immers de verkortingen in de notatiewijze plaats, met als gevolg dat de lange optelling niet meer zichtbaar is. Nu zou dat in principe geen belemmering hoeven te zijn om toch die lange optelling 'erachter' te denken en

hem rekenend uit te voeren. Maar dan wordt het een uitermate tijdrovende procedure met veel kans op vergissingen. Vandaar dat kennis van de tafels van vermenigvuldiging (en ook van de optelling) in feite onontbeerlijk is.

5.2 rekenen met nullen

In het algemeen levert het rekenen met nullen niet veel problemen op. $10 \times$ eigenlijk helemaal niet, maar ook $7 \times 30 = 210$ e.d. meestal niet. Toch is het van belang dit na te gaan, omdat soms een enkele leerling niet handig met nullen blijkt te kunnen rekenen. In dat geval is het goed om de weg terug naar het begrip te volgen en aan te sluiten bij het gedane onderzoek naar 10 keer in een van de eerste lessen.

Eén keer signaleerden we een eigenaardige fout (vergissing), die we als aangrijpingspunt voor een nabespreking in een ‘foutenles’ gebruikten, waarbij de nullenkwestie uitgebreid aan bod kwam:

$$\begin{array}{r}
 70 \times 73 \\
 73 \\
 \cdot \\
 \hline
 730 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \hline
 7300 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \hline
 73000 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \hline
 730000 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \hline
 7300000 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \hline
 73000000 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \hline
 730000000
 \end{array}$$

Hoe moet het antwoord uitgesproken worden?

Wat komt uit 100×73 ?

Komt uit 70×73 meer of minder dan 7300?

Met hoeveel keer is 73 in het bovenstaande vermenigvuldigd?

Wat komt uit 200×73 ? En uit 600×73 ?

Dit soort vragen werd naar aanleiding van het ‘incident’ gesteld. Ook voor dit geval geldt, dat de kinderen makkelijk en inzichtelijk met nullen moeten rekenen, willen ze de verregaande schematisering in de eindfase kunnen voltrekken. We hoeven op dit moment – dus na vijftien lessen en aan het begin van de eindfase – echter nog niet zover te zijn dat als harde voorwaarde gesteld moet worden dat de kinderen bijvoorbeeld 40×73 direkt kunnen uitrekenen via 4×370 . Maar juist voor het schatten vooraf van de uitkomst is deze kwestie uiterst belangrijk.

5.5 gebruik van het schema

Correct gebruik van het schema van de herhaalde optelling is uiteraard noodzakelijk. Slechts bij een zeldzame gelgenheid werd het schema niet juist gebruikt. Anders gezegd: in vrijwel alle gevallen realiseerden de kinderen zich heel precies welke lange optelling zich achter de opgave aftekende, ofwel wat de betekenis van de vermenigvuldiging in termen van herhaald optellen was. Na ongeveer zeven lessen merkten we bij een leerling de volgende fout bij de opgave 17×48 :

$$\begin{array}{r} 10 \times 48 = 480 \\ 10 \times 48 = 480 \\ 10 \times 48 = 480 \\ 10 \times 48 = 480 \\ 10 \times 48 = 480 \\ 10 \times 48 = 480 \\ 10 \times 48 = \underline{480} \\ 3220 \end{array}$$

Wat blijkt? Deze leerling zit in een groepje van vier kinderen. De andere drie werkten als volgt:

$$\begin{array}{r} 10 \times 48 = 480 \\ 7 \times 48 = \underline{336} \\ 816 \end{array}$$

Deze verkorte werkwijze zonder het plaatsen van stippen wordt geïmiteerd, maar zonder begrip. De betreffende leerling is nog niet aan dit oplossingsniveau toe. Het gevolg van deze 'vervroegde' schematiseringsstap is, dat de leerling zich niet realiseert wat hij doet: er wordt blind gecijferd. In de nabespreking wordt de weg-terug naar de stippennotatie gewezen. Dit voorbeeld van een incidentele misser bevat een belangrijke moraal: *zorg bij een toenemende schematisering dat de kinderen zich de herhaalde optelling 'achter' de notatiewijze realiseren*. We kunnen nagaan of het 'zich realiseren' gebeurt door de kinderen te laten verwoorden wat ze verkort noteren, door ze te laten anticiperen op het genoteerde schema, door ze vooruit te laten denken op wat komen gaat, maar ook terug te laten denken aan wat niet uitgebreid meer genoteerd wordt – het vorige stadium.

Wat is nu ongeveer het gewenste niveau van uitrekenen en noteren bij de start van de eindfase? Zonder over een harde voorwaarde te willen spreken, lijkt het gewenst dat de kinderen nu een niveau van noteren bereiken dat vergelijkbaar is met de volgende:

$$\begin{array}{r} 32 \times 47 \\ 47 \\ \vdots \\ \hline 10 \times 470 \\ \vdots \\ \hline 10 \times 470 \\ \vdots \\ 10 \times \underline{470} \quad 47 \quad 1410 \\ \quad \quad \underline{47} \quad \underline{94} \\ \quad \quad 1410 \quad 94 \quad 1504 \end{array}$$

Zo'n vergelijkbare variant daarvan is bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{rcl}
 10 \times 47 & = & 470 \\
 10 \times 47 & = & 470 \\
 10 \times 47 & = & 470 \\
 \hline
 & & 1410
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 2 \times 47 & = & 94 \\
 & & 1410 \\
 & & \underline{94} \\
 & & 1504
 \end{array}$$

(Merk op, dat in beide gevallen de deelluitkomsten goed gescheiden zijn. De lange optelling is dus nu verknipt in grote en kleine delen).

Nu moet men de term 'vergelijkbaar' ruim opvatten, want het is beslist niet de bedoeling om in dit opzicht een strakke uniformiteit na te streven, dat zou namelijk een aantasting van het fundamentele onderwijsprincipe van de progressieve schematisering betekenen! Als men de oplossingen van de kinderen uit de toetsles bekijkt, zal men trouwens opmerken dat die notatiewijzen in de grond sterk overeenkomen en dat de grootste verschillen in de wijze van uitrekenen zitten.

Met name het eerder genoemde belangrijke punt van het al dan niet apart noteren van de uitkomsten van de deelprodukten springt daarbij in het oog. Ook het efficiënte gebruik van de tafels lijkt nogal te verschillen, gelet op het al dan niet volledig uitschrijven van de termen in de herhaalde optelling. Maar er is nog meer waarin de berekening kan verschillen. Daarover in het volgende een korte beschrijving.

Wat het notatie-schema betreft hebben we dus geen strakke voorwaarde gegeven maar slechts een globale indicatie (die overigens niet geheel los van de wijze van berekenen gezien kan worden).

5.6 inwisselen

Het is een voorwaarde dat de kinderen vrijwel direkt inwisselen, dus inwisselen met onthouden c.q. overdragen. Al moet men ook deze voorwaarde niet te strak hantieren. Enkele kinderen blijken namelijk grote problemen met het onthouden te hebben. Ze zijn vrijwel niet in staat om het te onthouden getal even 'op te bergen', vervolgens een korte, vrijwel gememoriseerde berekening te maken van een tafelprodukt, dan het te onthouden getal uit het werkgeheugen te halen, op te tellen bij de uitkomst van het tafelprodukt, het laatste getal te noteren, het volgende weer op te bergen in het werkgeheugen etc. Want dit is wat bij een vermenigvuldiging als

$$\begin{array}{r}
 470 \\
 \underline{3} \times
 \end{array}$$

dient te gebeuren, en ook bij een optelling van deelluitkomsten bij bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{r}
 94 \\
 \underline{1880} +
 \end{array}$$

Sommige kinderen lossen de aangeduide moeilijkheden op door het te onthouden getal boven de betreffende kolom te plaatsen. Maar dat biedt niet voor iedere leerling soelaas. Zo is een bepaalde leerling die uitermate veel problemen met rekenen heeft, aanvankelijk niet in staat om in het volgende voorbeeld snel in te wisselen:

Hij gaat als volgt te werk:

5	23	67
5	24	57
5	25	47
5	26	37
5	27	27
5	28	17
5	29	7
6	19	7
7	9	7

Het heeft geen zin hier te forceren. Enkele lessen later gaat het misschien met deze leerling al veel beter. Waarmee maar gezegd wil zijn, dat de voorwaarde van het direkt inwisselen niet te strikt opgevat dient te worden. Indien enigszins mogelijk, dient men echter wel ferm op direkt inwisselen aan te sturen, omdat daardoor de voortgang in de schematisering pas echt mogelijk wordt.

5.7 slordigheid–nethheid

Slordig noteren kan een uiting van weinig geconcentreerd, zeg ‘slordig’ denken zijn. Uit het gepresenteerde leerlingenmateriaal blijkt, dat in dit opzicht nog wel wat arbeid verricht moet worden. Vooral het nauwkeurig onder elkaar plaatsen van de termen is een noodzakelijke voorwaarde. Tevens mogen we van de kinderen een overzichtelijk schema eisen, ook al laten we persoonlijk getinte notaties toe. We willen er echter met klem op wijzen, dat een bepaalde mate van spontaniteit en ongebondenheid noodzakelijk is en dat een uniforme steriele nethheid bij het noteren, de wiskundige denkwijze die inherent is aan de progressieve schematisering kan verstikken. Het zijn met name de zwakke leerlingen die aanvankelijk veel moeite hebben om hun kolossale krachtsinspanning ordentelijk op papier te zetten. Zij zitten met:

- de context van de goudstukken;
- de positiestrepen;
- onvoldoende beheersing van de tafels;
- uitgebreide notatie-wijzen als noodzaak;
- inwisselproblemen, die in meerdere stappen opgelost moeten worden;
- het bij elkaar plaatsen van deeltkomsten die moeilijk terug te vinden zijn.

Men moet hier enige clementie betrachten en spoedig zal blijken dat zij meer vooruitgang boeken in het netjes noteren naar mate ze minder moeilijkheden met allerlei ‘technische’ rekenproblemen krijgen. Dit alles neemt niet weg, dat van iedere leerling het optimale aan nethheid geëist moet worden. Bedenk echter dat ook hierin aanzienlijke individuele verschillen bestaan.

5.8 rest-categorie

De voorwaarden die we in de rest-categorie willen plaatsen, hebben betrekking op:

- het flexibel rekenen;

- het maken van toepassingen;
- het toelaten van afwijkende rekenstrategieën.

Allereerst het flexibel rekenen. Het zou niet zo mogen zijn dat opgaven die eenvoudig uit het hoofd of door middel van het handig gebruikmaken van eigenschappen uitgerekend kunnen worden, door de kinderen automatisch cijfermatig aangepakt worden. Het cijferen mag het handig rekenen niet verstikken; dat zou een verkeerde attitude in de hand werken. Wie kent in dit opzicht niet een ontsporing als:

$$\begin{array}{r} 43 \\ \underline{2000} \times \\ 00 \\ 00 \\ 00 \\ 86 \\ \hline 86000 \end{array}$$

Als we rigiditeit willen voorkomen, zullen we in het cijferprogramma vanaf het begin een zekere openheid naar niet-cijfermatige oplossingen moeten houden. Dit kan bijvoorbeeld door de kinderen attent te maken op de commutatieve eigenschap (verwisselen van de volgorde van de factoren), zoals bij 43×8 , of bij een opgave als 59×86 , waarin van de lange optelling 60×86 afgehaald wordt 1×86 . Maar ook moeten we kinderen uit het starre cijferschema trekken bij een opgave als 2×45 , dus niet zo:

$$\begin{array}{r} 45 \\ \underline{2} \times \\ 8 \quad 10 \\ 9 \quad 0 \end{array}$$

maar direct via hoofdrekenen

$$\begin{array}{r} 45 \\ \underline{2} \times \\ 90 \end{array}$$

Uit de toetsles blijkt wel, dat het beslist noodzakelijk is om de kinderen hierop te attenderen.

Cijferen is geen doel in zich – althans niet uitsluitend. De kinderen moeten de cijferprocedures die ze geleerd hebben ook kunnen toepassen op reële problemen die niet in de vorm van een ‘kaal’ rekenopgave gesteld zijn, maar die in de sfeer van een of andere context geplaatst zijn. We gaan later uitgebreid in op de vraag, hoe de scheiding tussen ‘kaal’ rekenen en toegepast rekenen uit de weg geruimd kan worden. Op dit moment volstaan we met te stellen dat van meet af aan deze toepassingsproblemen bij het cijferen betrokken dienen te worden en dat juist de progressieve schematisering een goede verbinding tussen formeel en reëel rekenen kan bewerkstelligen.

Het bestaan van individuele strategieën is inherent aan het principe van de progressieve schematisering, waarop de onderhavige leergang stoelt. Maar er zijn grenzen. Alleen is het moeilijk precies vast te stellen waar die liggen. Neem bijvoorbeeld de leerling waarvan het werk als nummer 8 in het vorige hoofdstuk gepresenteerd is:

$$\begin{aligned}
 62 \times 45 &= 27.90 \\
 60 \times 40 &= 24.00 \\
 60 \times 5 &= 300 \text{ --- } 2790 \\
 2 \times 45 &= 90
 \end{aligned}$$

We hebben hier te doen met een uiterst originele leerling, die steeds eigen strategieën ontwikkelt, onafhankelijk van de rest van de groep. Wat moeten we met deze aanpak? Uit observaties blijkt dat hij zich goed realiseert wat hij doet. Anders gezegd: dit kind heeft wel degelijk de lange optelling voor ogen. Maar op den duur kan hij met deze werkwijze vastlopen, omdat het niet rechtstreeks naar de standaardalgoritme voert. Dus maar niet ingrijpen en geen andere werkwijze proberen af te dwingen? Inderdaad. Althans voorlopig niet. Hadden we echter met een andere leerling te doen, dan namen we wellicht een andere beslissing.

Met de kinderen die minder ingrijpend eigen vondsten gedaan hebben en globaal binnen het raam van herhaald optellen werkten, hebben we vanzelfsprekend geen enkele moeite. ...

En tenslotte nog een opmerking over de tegenvoeters van de kleine uitvinders, namelijk de kinderen die klakkeloos een werkwijze van een medeleerling proberen over te nemen, zonder dat ze die methode 'begrijpen', dus niet in staat zijn het verband met de lange optelling te zien of het benodigde 'technische' rekenwerk (nog) niet aankunnen. Welnu, deze kinderen laten we een stap terug zetten in het schematiseringsproces. En pas als ze op dat niveau een zekere vastheid van werken hebben en in staat zijn hun handelingen te verwoorden, moeten ze gestimuleerd worden de volgende stap te zetten. Want te lang op één niveau werken, is even ondeugdelijk als te kort!

Samengevat zijn de punten die hier de revue passeerden:

- de cijfermatige houding regelmatig doorbreken met opgaven die eenvoudiger met handig rekenen opgelost kunnen worden;
- de verbinding tussen cijferen en het maken van toepassingsproblemen in stand houden;
- de persoonlijk-getinte aanpak zoveel mogelijk in tact laten.

Als voorwaarden geformuleerd:

- de kinderen moeten cijferen en handig rekenen kunnen combineren;
- de kinderen moeten de cijferprocedures ook kunnen toepassen op problemen die niet als zodanig gepresenteerd zijn;
- de kinderen moeten passende oplossingsmethoden gebruiken, zowel passend bij het cijferschema als passend bij hun niveau, zodat ze zich kunnen realiseren wat ze doen, waardoor een voortgezette schematisering mogelijk wordt.

5.9 samenvatting voorwaarden

Al met al zijn hier in zijn totaliteit drie grote categorieën voorwaarden besproken namelijk:

- 1 Voorwaarden samenhangend met het notatieschema, dus de wijze van noteren.
- 2 Voorwaarden met betrekking tot de rekenvaardigheid in ruime zin genomen.

3 Voorwaarden betreffende de relatie tussen het cijferen en andere rekengebieden. Niet in alle gevallen werden de voorwaarden 'hard' gesteld als beslist noodzakelijke condities, maar meer als begunstigde voorwaarden en geen strijdpunten! Men kan er dus in individuele gevallen – tijdelijk – van afwijken, indien dit om een of andere reden noodzakelijk mocht zijn.

6 STADIA IN DE EINDFASE

We geven in het volgende eerst een fasering van notatiemogelijkheden aan met betrekking tot de eenhedenfactor (dus van 64×37 , het onderdeel 4×37), dan de tientallenfactor (het onderdeel 60×37), vervolgens het geheel (64×37) en tenslotte merken we nog wat op over notaties van produkten met getallen van meer dan twee cijfers. Het betreft een 'klinische' analyse, dus een ontleding van mogelijkheden die zich op rationele wijze laten ordenen, maar die zich in werkelijkheid van het onderwijs veelal niet 'volgens het boekje' zullen voordoen. Bij de beschrijving van de eindfasering zal deze analyse stevig houvast kunnen bieden. Vandaar dat we er aandacht aan willen besteden ter introductie van de beschrijving van de verschillende stadia in de eindfase.

6.1 notatiewijzen

Notatiewijzen eenhedenfactor 4×37 :

1 lange optelling

$$\begin{array}{r} 37 \\ 37 \\ 37 \\ \hline 37 \\ . \end{array}$$

2 stippeltjesnotatie met 'keergetal'

$$\begin{array}{r} 37 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline . \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 37 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline . \end{array}} \right\} 4 \times$$

3 standaardvorm per onderdeel

$$\begin{array}{r} 37 \\ 4 \\ \hline . \end{array} \times$$

(4×37 kan ook wel maar is in verband met de eindalgoritme minder ter zake, vandaar dat we de schrijfwijze onder elkaar prefereren).

De berekeningswijzen die hieraan gekoppeld zijn, richten zich op het efficiënt gebruik van de tafels en het directe inwisselen bij het vermenigvuldigen. Algemeen gesproken hoort bij de meest verkorte notatiewijze c.q. de standaardvorm ook de

Notatiewijzen tientallen-factor 60×37

1 lange optelling

$$\begin{array}{rcl} \text{--- } 37 & & \\ \vdots & & \\ \text{--- } 10 \times 370 & \text{of } 10 \times 37 = & \\ \vdots & & \\ \text{--- } 10 \times 370 & \text{of } 10 \times 37 = & \\ \vdots & & \\ \text{--- } 10 \times 370 & \text{of } 10 \times 37 = & \\ \vdots & & \\ \text{--- } 10 \times 370 & \text{of } 10 \times 37 = & \\ \vdots & & \\ \text{--- } 10 \times 370 & \text{of } 10 \times 37 = & \end{array}$$

2 stippeltjesnotatie met keergetal

$$\begin{array}{r} \text{\scriptsize 37} \\ \cdot \\ \hline 370 \\ \cdot \\ \hline \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} \text{\scriptsize 37} \\ \cdot \\ \hline 370 \\ \cdot \\ \hline \end{array}} \right\} 6 \times$$

3 standaardvorm per onderdeel

$$\begin{array}{r} 370 \\ \underline{6} \times \end{array} \quad \text{of} \quad \begin{array}{r} 37 \\ \underline{60} \times \end{array}$$

66

$$\begin{array}{r} 37 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 37 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}} \right\} 60 \times \quad \begin{array}{r} 370 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 370 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}} \right\} 6 \times$$

Ook tussen het tweede en derde punt zijn er allerlei tussenvormen. Een subtiel verschil als:

$$\begin{array}{r} 370 \\ \hline \end{array} 6 \times \quad \text{met} \quad \begin{array}{r} 370 \\ \hline \end{array} 6 \times$$

waarbij in het eerste geval als het ware in gedachten nog ruimte gelaten is voor de lange optelling.

Het spreekt vanzelf, dat dit soort nuances uitermate belangrijk is bij het zich eigen maken van de cijferhandelingen. Als onderwijsgevende biedt men globaal een notatieschema aan, maar de kinderen bepalen zelf het niveau en de precieze invulling.

Notatiewijzen 64×37

De zojuist beschreven niveaus van noteren kunnen in theorie willekeurig met elkaar gecombineerd worden, maar in de praktijk is daarvan natuurlijk geen sprake, omdat de niveaus van een en ander sterk samenhangen. Met andere woorden: een lange optelling bij de eenheden zal veelal vergezeld gaan met een lange optelling bij de tientallen. Er kunnen echter tijdelijk wel enige verschillen bestaan, omdat het zich realiseren van lange optellingen met groepen van tien wat uitdrukkelijker gebeuren moet, wat een meer volledig uitschrijven tot gevolg kan hebben, aanvankelijk. Voor het overige zijn de drie notatie-niveaus behoorlijk goed gesynchroniseerd of te synchroniseren en samen te stellen in één overzichtelijk schema. Dit samenstellen leidt tenslotte tot de standaardalgoritme:

4 volledige standaardvorm

$$\begin{array}{r} 37 \\ 64 \\ \hline 148 \\ 220 \\ \hline 2368 \end{array} \times \quad \text{of} \quad \begin{array}{r} 37 \\ 64 \\ \hline 2220 \\ 148 \\ \hline 2368 \end{array} \times$$

Hiermee zijn de uitkomsten ineengevlochten. De eerste werkwijze verdient lichte voorkeur: dit is de zuivere standaardvorm die door geleidelijke opklimming van het aantal nullen minder risico's voor vergissingen in zich bergt bij het vermenigvuldigen van grote getallen dan de tweede werkwijze, waarbij de nullen in eerste ronde uitgeteld moeten worden. Wat het rekenwerk aangaat, dient vooral in de beginfase op het apart uitrekenen van de deelprodukten gelet te worden. Dit in verband met de toegang naar de eindvorm en het efficiënt rekenen – we hebben hierop reeds herhaaldelijk gewezen.

Notatiewijzen 'grote' vermenigvuldigingen: 264×537

Pas als alle kinderen van de groep tenminste in het onder punt 2 genoemde niveau van noteren en uitrekenen hebben, wat betekent dat enkelen reeds de standaardvorm van

het vierde stadium bij gevallen als 64×37 beheersen en velen dicht tegen dat stadium aanzitten, worden de honderdtallen nu meer systematisch in het onderwijs betrokken. Incidenteel kan in een eerder stadium een opgave als 164×37 als onderzoeksprobleem gesteld worden.

We hoeven voor deze grote vermenigvuldigingen echter geen principieel nieuwe notatie- en berekeningswijze toe te voegen.

6.2 stadia in de eindfase

We kunnen na de uitgebreide beschrijvingswijze over voorwaarden en notatieniveaus bij de beschrijving van de stadia in de eindfasering met trefwoorden volstaan.

In het *eerste stadium* van de eindfase is er speciaal aandacht voor:

- een correcte uitvoering van de notatiewijze volgens ‘de herhaalde optelling’ of van een notatiewijze die hier dicht bij ligt of reeds tendeert naar het volgende niveau, met betrekking tot getallen met twee cijfers zoals bijvoorbeeld 64×37 ;
- het memoriseren van de tafels (zonodig) en het toepassen van die kennis op de betreffende opgaven;
- het handig rekenen met nullen ($10 \times$) en globaal schatten van de uitkomst;
- het apart berekenen van de deelprodukten en het samennemen van de uitkomsten;
- het (streven naar) direkt inwisselen bij het bepalen van de deelprodukten en het optellen van de deeluitkomsten;
- het gebruik maken van de commutatieve eigenschap om berekeningen sterk te vereenvoudigen en bekorten bij bijvoorbeeld 43×8 en 63×40 ;
- het verbinden van cijferen met handig rekenen bij opgaven als 59×64 en 19×82 ;
- het verbinden van cijferen met toepassingsrekenen bij opgaven die in een reële context gesteld zijn en betrekking hebben op alle mogelijk verschijningsvormen van vermenigvuldigingen bij:
 - herhaald optellen;
 - combineren;
 - kruisen;
 - ‘rechthoeken’;
 - groeperen;
 - verhoudingen;
 - grote hoeveelheden.

In het *tweede stadium* van de eindfase is er speciaal aandacht voor:

- een correcte uitvoering van de notatiewijze volgens ‘de stippeltjesnotatie met keertal’ of een notatiewijze die daarmee verwant is of reeds tendert naar het volgende niveau, met betrekking tot getallen met twee cijfers, zoals bijvoorbeeld 64×37 ;
- controle op rekenvaardigheid, i.c. tafels, nullen, inwisselen en vooral ook apart oefenen van opgaven als 100×34 , 30×47 , 20×30 , ter voorbereiding op volgende stadia en het systematisch vooraf schatten van de uitkomst;

- voortgaand oefenen van handig rekenen, nu met bijvoorbeeld 100×64 , 99×64 , 43×100 , e.d.;
- regelmatig cijferen aan de hand van toepassingsproblemen.

In het *derde stadium* aandacht voor:

- een correcte uitvoering van de notatiewijze volgens de ‘standaardvorm per onderdeel’ met betrekking tot getallen met twee cijfers zoals bijvoorbeeld 64×37 en ook met 164×37 en 164×237 ;
- bijhouden van de rekenvaardigheid in brede zin (memoriseren, hoofdrekenen, handig rekenen, schatten vooraf);
- maken van toepassingsproblemen met relatief grote getallen, waarmee de kinderen in het cijferprogramma vertrouwd zijn gemaakt.

In het *vierde stadium* wordt gelet op:

- een correcte uitvoering van de notatiewijze volgens de ‘volledige standaardvorm’ met alle mogelijke getallen;
- het bijhouden van de rekenvaardigheid, waaronder het schatten vooraf;
- het maken van toepassingsproblemen met alle mogelijke getallen, in principe zonder beperking van de grootte van die getallen (op de rol van de zakrekenmachine en de zakcomputer gaan we in een ander verband nog in).

Voor de groep als geheel kan niet zo’n strakke indeling gelden, daarvoor zijn de verschillen te groot tussen de kinderen. Deze diversiteit kan het best beheersbaar blijven door in de groep op de middenmotors te mikken en de algemene uitleg en notatiewijze op die groep af te stemmen, eventueel op de ‘zwakke’ zijde van de middenmoot. Aangezien de aangeboden problemen in de verschillende stadia niet wezenlijk verschillen, blijft het toch ook bij tamelijk grote verschillen in rekenvaardigheid, niveau van noteren en flexibel rekenen, zeer wel mogelijk om samen op te trekken in de progressieve schematisering. Dat is met name ook bij het maken van toepassingsproblemen waardevol.

In de volgende paragraaf zullen we de tussenstand na zo’n dertig lessen beschrijven en nagaan hoe groot de verschillen tussen de kinderen zijn en in welk stadium van de eindfase ze verkeren.

7 TUSSENSTAND NA DERTIG LESSEN; UITZICHT OP EINDSTAND

We geven een korte beschrijving van de tussenstand na dertig lessen en letten daarbij vooral op de stadia waarin de kinderen verkeren en de mogelijke foutenbronnen. We besluiten met een vergezicht op de eindstand.

7.1 *stadia*

Na ongeveer dertig lessen van 30 à 45 minuten kan het volgende gezegd worden over de stadia van noteren en oplossen waarin de dertien kinderen verkeren (één zeer zwakke leerling die ook grote moeite had met lezen, is verplaatst naar een andere groep).

Voorbeeld: 39×45

Twee kinderen lossen dit als volgt op:

$$\begin{array}{r}
 45 \\
 \text{---} \quad 450 \\
 \text{---} \quad 450 \\
 \text{---} \quad 450 \\
 \hline
 1350
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 45 \\
 45 \\
 45 \\
 45 \\
 45 \\
 45 \\
 45 \quad 1350 \\
 \hline
 45 \quad 405 \\
 \hline
 405 \quad 1755
 \end{array}$$

Deze kinderen wisselen uit het hoofd in, gebruiken de tafels, en hanteren een overzichtelijk schema. Opvallend is, dat ze alle factoren volledig uitschrijven. Kortom, ze verkeren nog in stadium 1 van de eindfase, maar qua rekenvaardigheid en overzichtelijkheid van werken zijn ze toe aan een snelle overgang naar stadium 2.

Twee kinderen zijn vergeleken met de vorige iets verder wat het noteren betreft, maar liggen rekentechnisch wat achter, met name bij het mentale inwisselen (één van hen was ook later, toen hij vrijwel op standaardniveau werkte, nog niet goed in staat vlug in te wisselen uit het hoofd!). Zij werkten als volgt:

$$\begin{array}{r}
 45 \\
 \vdots \\
 \hline
 \vdots \\
 \hline
 \vdots \\
 \hline
 45 \\
 \vdots \\
 \hline
 36 \quad 45 \\
 405
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{c} 45 \\ \vdots \\ \hline \vdots \\ \hline \vdots \\ \hline 45 \\ \vdots \\ \hline 36 \quad 45 \\ 405 \end{array}} \right\} 9 \times
 \begin{array}{r}
 450 \\
 450 \\
 450 \\
 12/15/0 \\
 13 \ 5 \ 0 \\
 405 \\
 \hline
 1755
 \end{array}$$

De ‘stippelnotatie met keertal’ wordt voor een deel gebruikt: de kinderen zijn dus duidelijk op weg naar stadium 2. De wijze van noteren is bepaald niet overzichtelijk en dat is vooral te wijten aan het niet duidelijk scheiden van de eenheden- en tientallenfactor. We moeten dit overigens vooral onszelf als onderwijsgevers aanrekenen. We kunnen namelijk in de leergang veel eerder suggereren om de hele lange rij te verknippen in grote stukken (tientallen) en kleine stukken (eenheden) en deze onderdelen duidelijk apart te berekenen, zoals het eerst genoemde tweetal deed. Hun werk kan ten voorbeeld gesteld worden aan de laatste twee.

Eén leerling zit vrijwel in stadium 2. Zij combineert als het ware de overzichtelijke werkwijze van het eerste tweetal en de aanzet tot een verkorte schrijfwijze van het tweede duo in de volgende berekening:

$$\begin{array}{r}
 450 \quad 45 \\
 450 \quad . \\
 450 \quad . \\
 \hline
 1350 \quad 405
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{c} 450 \\ 450 \\ 450 \end{array}} \right\} 9 \times
 \begin{array}{r}
 405 \\
 1355 \\
 \hline
 1755
 \end{array}$$

Zes kinderen bevinden zich in stadium 2 en kunnen waarschijnlijk met wat hulp eenvoudig de stap naar de twee volgende stadia maken (daarover direkt meer). Zij rekenen als volgt:

$$\begin{array}{r} 450 \\ \hline 1350 \\ 405 \\ \hline 1755 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 450 \\ 1350 \\ 405 \\ 1755 \end{array}} \right\} 3 \times \qquad \begin{array}{r} 45 \\ \hline 405 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 45 \\ 405 \end{array}} \right\} 9 \times$$

We hebben er reeds eerder op gewezen dat men goed moet afwegen of de kinderen van klein naar groot of van groot naar klein uitrekenen, dit in verband met de standaardprocedure. De werkwijze van groot naar klein – dus eerst honderdtallen berekenen, dan tientallen en dan eenhedenfactoren – is voor de kinderen natuurlijker. Daarom zou men tot stadium 3 die werkwijze in tact kunnen laten en pas bij het ineen-schuiven van de deelprodukten de volgorde van klein naar groot vaststellen, of de oorspronkelijke werkwijze handhaven.

Twee kinderen berekenen 39×45 via $40 \times 45 - 1 \times 45$. Het ene gebruikt een korte notatie, het andere (in dit geval bij uitzondering) een langere:

$$\begin{array}{r} 450 \\ \hline 1800 \\ 45 \\ \hline 1845 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 450 \\ 1800 \\ 45 \\ 1845 \end{array}} \right\} 4 \times \qquad \text{en} \qquad \begin{array}{r} 450 \\ 450 \\ 450 \\ 450 \\ \hline 1800 \\ 45 \\ \hline 1845 \end{array}$$

Ook deze kinderen verkeren in stadium 2.

Al met al is de rekenvaardigheid van de groep van dertien voldoende: twee kinderen wisselen nog niet direkt in, maar ze kennen allemaal de tafels en passen die kennis toe. Twee van de dertien kinderen gebruiken nog niet de verkorte notatie, drie nog slechts gedeeltelijk en negen kinderen zijn duidelijk aan de standaardvorm van noteren toe. Vanuit deze tussenstand na dertig lessen kan dan ook vrij nauwkeurig ingeschat worden dat het merendeel van de groep na 45 lessen de standaardprocedure zal toepassen. Dat wil dus globaal zeggen, dat de kinderen na exact één leerjaar de deel-leergang van het cijferend vermenigvuldigen doorlopen hebben, uitgaande van één les cijferen per week. Het is trouwens niet nodig om daar precies de hand aan te houden. Maar het is niet onbelangrijk dat het totale onderwijsleerproces door één onderwijsgevende geleid wordt, dit om didactische discontinuïteiten te voorkomen. Indien dit niet mogelijk is, moet men met het schoolteam duidelijke afspraken maken. Dit is overigens ook om andere redenen belangrijk, want het cijferend rekenen houdt niet op in de middenklassen (kommagetallen!).

7.2 voorbeeld van een doorsnee-aanpak

Tenslotte nog een voorbeeld van een 'gemiddelde' werkwijze na dertig lessen met de opgave 127×81 :

$$127 \times 81 = 10287$$

$$\begin{array}{r} 1270 \\ \hline 10160 \end{array} \quad 8 \times$$

$$\begin{array}{r} 127 \\ \hline 127 \end{array} \quad 1 \times$$

$$\begin{array}{r} 10160 \\ 127 \\ \hline 10287 \end{array}$$

Ingrid cijfert handig: ze past de commutatieve eigenschap toe. Technisch gezien rekent ze ook vaardig: ze gebruikt de tafels en wisselt direct in met onthouden en bijvoegen. En de wijze van noteren is zodanig, dat ze slechts wat hulp nodig heeft om eenvoudig de overstap naar stadium 3 en stadium 4 te kunnen maken.

7.3 foutenbronnen

Nu nog enkele opmerkingen over fouten en foutenbronnen, te weten:

- slordigheidsfouten;
- insluipende algoritmefouten;
- incidentele verwarringen;
- eigen-aardige verkortingen.

We starten met een voorbeeld van een fout, die voortkomt uit het *slordig noteren* van het schema, naar onze mening de meest ernstige slordigheidsfout die kan voorkomen, omdat hij structureel kan worden en niet incidenteel voorkomt zoals bijvoorbeeld het verkeerd overschrijven van een opgave of een vergissing maken. Het voorbeeld is afkomstig van het werk van de zwakste leerling, die overigens goed z'n best doet en naar het einde van de leergang toe uitstekende vorderingen maakt:

$$\begin{array}{r} 48 \\ 48 \\ 48 \\ 48 \\ 48 \\ 48 \\ 48 \\ 3264 \\ 384 \\ 960 \\ 31441044 \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline 480 \\ 480 \\ 8160 \\ 960 \\ 1044 \\ 1044 \\ 101044 \\ 1104 \end{array}$$

Deze leerling heeft zowel 20×48 als 8×48 correct berekend. Maar bij het optellen van de tussenprodukten gaat het fout, en wel op twee manieren: eerst bij $384 + 960$ waar hij $9 + 3$ vergeet en dan telt hij twee keer 960 bij het antwoord van 8×48 en maakt daarbij weer een fout bij het inwisselen. De oorzaken van deze fout zijn tweemaal: allereerst is daar de slordige wijze van noteren in dit geval (het gebeurt niet altijd) en vooral ook de onoverzichtelijkheid van het schema, en ten tweede heeft deze leerling veel moeite met het (direkt) inwisselen, wat regelmatig fout gaat en waarbij hij zich steeds weer de context van het sultanverhaal te binnen moet brengen om geen fundamentele fouten te maken. Maar juist omdat hij deze problemen heeft, is het van belang om aan te dringen op netheid en overzichtelijkheid en wel speciaal bij het nog eens apart noteren van de deelluitkomsten en eventueel het gebruik van positiestrepen. Dat laatste is trouwens ook een les voor onszelf als onderwijsgeveden: meer aandacht voor het verknippen van de lange optelling, het scheiden van onderdelen en het opnieuw noteren van de deelluitkomsten onder elkaar!

Als tweede foutenbron noemden we *insluipende algoritmefouten* die, als ze niet tijdig gesignaleerd worden, zich kunnen vastzetten en aldus tot een verkeerde cijferprocedure leiden.

We geven één voorbeeld van zo'n sluipende fout:

$$\begin{array}{r}
 16 \times 34 = \\
 \begin{array}{r}
 34 \\
 2240 \\
 \hline
 2270
 \end{array}
 \end{array}$$

Dat hier niet louter sprake is van een incidentele vergissing blijkt uit het feit, dat ze ook bij andere opgaven zo'n omkering maakt. Als we met haar de weg-terug volgen en vragen naar de betekenis van de vermenigvuldiging in termen van optellen ziet ze haar fout in. Op deze wijze aandringen op het zich realiseren van de handeling kan de fout effectief bestrijden.

Incidentele verwarringen zijn door hun incidentele karakter minder gevaarlijk. Maar omdat ze zich in grote verscheidenheid vertonen, vormen ze kwantitatief bezien wel een belangrijke foutenbron. Eén voorbeeld uit de uitgebreide collectie van mogelijkheden: 28×48 :

$$\begin{array}{r}
 480 \quad 48 \quad 960 \\
 \vdots \quad \vdots \quad 384 \\
 480 \quad 48 \quad 3184 \\
 \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 \hline
 384
 \end{array}$$

Hier lopen optellen en vermenigvuldigen (incidenteel) wat door elkaar bij het samen-voegen van de deelprodukten 960 en 384:

$$0 + 4 = 4$$

$$8 \times 6 = 48, | 8 \text{ opschrijven, } 4 \text{ onthouden}$$

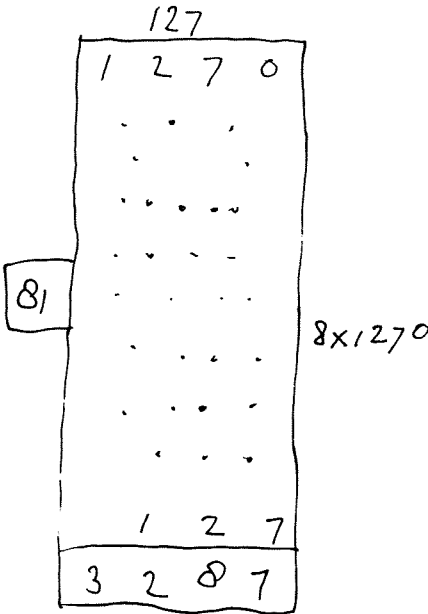
$$9 \times 3 = 27$$

$$27 + 4 = 31$$

Antwoord: 3184

Deze fout attendeert ons erop dat we in de leergang wat meer aandacht moeten besteden aan het schatten van de uitkomsten om aldus de kinderen een grof, maar zeer belangrijk controle-middel te geven. Ook om andere redenen is schatten van veel belang.

Tenslotte kunnen *eigen-aardige verkortingen* een bron van fouten zijn. Een veel voorkomend geval zijn we reeds tegen gekomen bij het niet eerst apart uitrekenen van de deelprodukten, waardoor het effectief gebruik van tafels belemmerd werd. In het volgende geven we een voorbeeld van een leerling die deze strategie trouw gebleven is, maar toch gebruik van de tafels maakt, met als gevolg dat de berekening uitermate gecompliceerd wordt door de zeer zware belasting van het korte geheugen (werkgeheugen). Allereerst gebruikt deze jongen de commutatieve eigenschap. Hij gaat dan als volgt verder: 81×127 wordt gesplitst in 80×127 en 1×127 . De laatste uitkomst schrijft hij op. Dan rekent hij 8×1270 op de gewone snelle manier uit en telt daar direkt per kolom de betreffende uitkomst van 127 bij op. Bij het onthouden gebruikt hij zijn vingers. Op het laatste punt maakt hij een fout (in plaats van $8 \times 1 + 2 = 10$, doet hij $1 + 2 = 3$).



Zo zie je maar, dat dit teveel van het goede is. Bij wat lastiger opgaven rekent hij de eenhedenfactor direkt uit (bijvoorbeeld $4 \times 127 = 508$ ineens) maar volgt daarna dezelfde weg als zojuist aangegeven. Hier is dus sprake van een eigen-aardige verkorting, die om meerdere redenen ongewenst is en die we eenvoudig kunnen herstellen bij een leerling die zo goed rekent.

7.4 hoofdpunten

Samenvattend noemen we nog eens enkele belangrijke punten op voor onszelf als onderwijsgeveden, die we uit het werk van de kinderen na een dertigtal lessen kunnen halen en waarmee we ons voordeel kunnen doen.

- 1 Er wordt op een aangepast niveau gewerkt, deze niveaus verschillen nogal, maar dit maakt samen werken niet onmogelijk. Integendeel, de samenwerking en het leren wordt door die diversiteit juist gestimuleerd.
- 2 Bij het noteren moet naast de netheid goed gelet worden op het uit elkaar halen van deelfactoren; de lange optelling moet tijdig verknipt worden in deelprodukten die apart uitgerekend moeten worden en dan nog eens apart opgeschreven bij het optellen. Maar ook hierbij moeten we allerlei variaties en tussenvormen toelaten en slechts de hoofdlijnen (overzichtelijkheid, gescheidenheid) in de gaten houden.
- 3 In het voorgaande is niet genoeg tot uitdrukking gebracht dat *steeds weer uitgaan moet worden van motiverende contextproblemen*. Gebeurt dit niet, dan kan de spanning van de progressieve schematisering afnemen, en wat vooral ook belangrijk is: dan komt het cijferen te zeer apart te staan en lopen we het risico dat de kinderen de geleerde algoritmen niet toepassen in de daartoe geëigende probleemsituaties.

7.5 uitzicht op eindstand

Uit de tussenstand na plusminus dertig lessen kan afgeleid worden dat vele kinderen nog hooguit een vijftiental lessen van de eindalgoritme verwijderd zijn. De ‘technische’ rekenbeheersing hebben de meesten, en ze realiseren zich wat ze doen, dus ze kunnen de schematisering ‘terugdraaien’. Kortom, er moeten nog slechts wat kleine verkortingen in de notatiewijzen aangebracht worden. Logisch gezien heeft deze laatste stap eigenlijk niets te betekenen. Maar psychologisch beschouwd kan een futiel verschil heel subtiel zijn.

Enkele voorbeelden van subtiele overgangen die futiel lijken, maar essentieel kunnen zijn voor bepaalde kinderen bij het zich realiseren van de vermenigvuldigalgoritme als verkorting van de herhaalde optelling:

- | | | |
|----|-----------|--------------|
| 1) | 48 | volledigheid |
| | 48 | |
| | 48 | |
| | 48 | |
| | 48 | |
| | <u>48</u> | |

- | | | |
|----|---|---|
| 2) | $\begin{array}{r} 48 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \hline \end{array}$ | goede 'lengte'
zes plaatsen, waarvan één uitgeschreven. |
| 3) | $\begin{array}{r} 48 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \hline \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 48 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \hline \end{array}} \right\} 6 \times$ | suggestie voor 'lengte'
6 ×-notatie een belangrijke verkorting |
| 4) | $\begin{array}{r} 48 \\ \hline \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 48 \\ \hline \end{array}} \right\} 6 \times$ | geen suggestie voor 'lengte'
wel open plaats |
| 5) | $\begin{array}{r} 48 \\ \hline 6 \times \end{array}$ | standaardvorm,
abstracte symbolisering |

In zes keer – indien uitgesproken – is de herhaalde opsomming nog herkenbaar. Dit om de noodzakelijk te nemen verkortingen niet te zeer te bagatelliseren. Aan de andere kant moeten de moeilijkheden beslist ook niet overschat worden. Voor vrijwel alle kinderen is het eindniveau van de standaardprocedure haalbaar. Het is echter de vraag of men de standaardwerkwijze ook echt als einddoelstelling zou moeten nemen. Wij vinden van wel. Tenminste als het maar enigszins mogelijk is. Het spreekt vanzelf dat men voor individuele gevallen uitzonderingen kan, ja moet maken. Men kan echter over die einddoelstelling van mening verschillen. Juist in ons tijdperk van zakrekenmachientjes en zakcomputers wordt de noodzaak van het beheersen van de standaardalgoritme door sommigen in twijfel getrokken. In brede kringen van het Nederlandse (basis-)onderwijs is men echter met ons van mening, dat om allerlei redenen niet aan die einddoelstelling getornd moet worden, al erkent men allerwegen dat voortdurende oefening met hele grote getallen niet meer in onze tijd past. Hoe het zij: ook degenen die de ontwikkeling van eigen 'primitieve' cijferprocedures door de kinderen zelf bepleiten, kunnen in de onderhavige leergang heel wat van hun gading vinden.

8 OVERZICHT EN PRAKTISCHE WENKEN

De belangrijkste principes van de leergang worden hier nog eens puntsgewijs en in een wat andere volgorde dan in het voorgaande toegelicht. Dit alles zullen we globaal in ons hoofd moeten hebben indien we het moeilijke karwei van het ontwikkelen van het cijferonderwijs volgens het principe van de progressieve schematisering willen aanvangen en aldus niet de leerstof maar het leerproces in het centrum van het onderwijs plaatsen.

8.1 context herhaalde optelling

We hebben een context gekozen van een verhaal – het verhaal van de sultan. Deze sultan had verschillende schatkamers: één met losse goudstukken, één schatkamer met dozen van tien goudstukken en één met kisten waar tien dozen in zaten. In deze

samenhang lieten we allerlei bedragen bij de sultan brengen (belasting) met als doel om de kinderen het inwisselen te leren en ook om ze voor later houvast te bieden over ‘hoe dat ook weer ging’. De kinderen speelden voor rekenmeester van de sultan. Er werd als volgt in een tabel opgeteld en ingewisseld met 48 en 87 en 36 en nog 97 goudstukken:

K	D	G
	4	8
	8	7
	3	6
	9	7
	24	28
	25	18
	26	8
2	6	8

Vanuit dezelfde context werd ook de herhaalde optelling geïntroduceerd. Zes kooplieden brachten 43 goudstukken bij de rekenmeester als huur voor een plaats op de markt van Bagdad. Aanvankelijk werd dit soort herhaalde optellingen in de goudstukken-tabel genoteerd, maar na een paar lessen verdween de context van het sultanverhaal naar de achtergrond en noteerden de meeste kinderen een opgave als zes keer 43 op de volgende wijze:

4	3
4	3
4	3
4	3
4	3
4	3
24	18

Het inwisselen wordt al na enkele lessen correct uitgevoerd door de meeste kinderen. En dat niet alleen: ze brengen ook al snel verkortingen aan:

LANG		MINDER LANG	KORT	
24	28	24	28	
25	18	26	8	2 6 8
26	8	2	6	8
2	6	8		

Echter niet bij alle leerlingen gaat dit snel. Er is zelfs één leerling in onze groep die tot het einde van de leergang moeite met het onderdeel bleef houden, ook al verliep de schematisering en berekening verder heel redelijk. Dit kind moest zich steeds weer de sultan-context te binnen brengen om geen belangrijke fouten te maken. De meest voorkomende is overigens deze:

24	28
44	8

Op deze wijze zijn we dus gestart en op weg gegaan om toe te werken naar verkortingen in het noteren en in het uitrekenen. Ook het handig rekenen wordt steeds onder

de aandacht van de kinderen gebracht, met als belangrijkste onderdelen het toepassen van de commutatieve eigenschap en het gebruiken van de 'min-strategie' (19 keer is 20 keer min 1 keer). Te algoritmisch werken blokkeert immers het flexibele rekenen. Bovendien past het handig rekenen zeer wel in het proces van verkorten zoals dat bij het cijferen wordt toegepast.

8.2 lessen: uitgangspunten en principes

Aan de volgende punten is bij voortduring aandacht besteed:

- gebruik van de tafels bij de herhaalde optelling. Voor heel wat kinderen is dit kunnen gebruiken van de tafels nogal een ontdekking, omdat het aanleren van tafels weinig met de toepassing ervan te maken heeft. Voor sommige kinderen die de tafels nog niet kennen, is het herhaalde optellen vooral ook een sterke stimulans.
- de factor 10 wordt in de vermenigvuldiging herontdekt en benut om handig te rekenen. Later gebeurt hetzelfde met de factor 100. De handigheid van het bijeenvoegen van de tien- en honderdtallen wordt uitdrukkelijk niet als 'truc' aangedragen door de onderwijsgevende, maar door de groep zelf als zodanig ingevoerd, nadat men eerst één of meer lessen 'onhandig' gerekend heeft via twaalfvouden, der tienvouden e.d.;
- de commutativiteit van de vermenigvuldiging wordt op een gegeven moment nog eens extra onder de aandacht gebracht. Deze eigenschap is de kinderen in samenhang met tafels wel bekend, maar door het gebruik van de context van het sultanverhaal is er een groot verschil tussen de opgave '38 mensen brengen 12 goudstukken' en '12 mensen brengen 38 goudstukken' ofwel ' 38×12 ' en ' 12×38 '. Dat is trouwens in toepassingssituaties meestal het geval. Vandaar dat we nog eens de aandacht voor deze eigenschap vragen;
- door de gehele leergang loopt als een rode draad de serie toepassingsproblemen, waarbij naast vermenigvuldigen, ook optellen, aftrekken en delen te pas komt, dit laatste om het blindelings toepassen te vermijden. Een voorbeeld. Ik ben deze maand al 18 keer van Arnhem naar Apeldoorn (afstand 43 km) geweest met de auto. Hoeveel km heb ik dan gereden? Na afloop van het eerste deel, waarin de berekening van 18×43 centraal staat, wordt een conflictsituatie ingebouwd: de weekteller wijst namelijk niet 774 aan maar 776. Hoe kan dat?
- ook het omgekeerde wordt af en toe gedaan, namelijk bij een gegeven rekenopgave een toepassingssituatie bedenken;
- één van de principes die steeds in het oog gehouden wordt is die van het verkorten van zowel de wijze van uitrekenen als de manier van noteren. Verkorting in het berekenen vooral door het gebruiken van de tafels en in het noteren door het afsplitsen van tientallen, het kort noteren van de serie herhaalde aftrekkingen, het verknippen en scheiden van 'positie-onderdelen' (eenheden-, tientallen-, honderdtallen-factoren) en het steeds meer gebruiken van de korte keer-notatie;
- een ander principe waar in het onderwijs voortdurend rekening mee gehouden moet worden, is dat de kinderen zich de handeling van de herhaalde optelling c.q. vermenigvuldiging heel goed realiseren. Dit maakt het dan namelijk mogelijk om tot een verdergaande schematisering en verkorting te komen van de rekenhande-

lingen. Zowel de weg terug – dus de meer uitgebreide notatie en berekening van het voorgaande stadium – als ook de wijze waarop, moeten de leerling helder voor ogen staan om tot een niveauverhoging te kunnen komen; dit streven naar het verhogen van het niveau van handelen i.c. het steeds verder schematiseren en verkorten tot aan de standaardvorm van het cijferend vermenigvuldigen, vormt het hoofdprincipe waarop de onderhavige leergang gebouwd is.

8.3 bakens in de leergang van ± 45 lessen

1) lange optelling (in goudenstukken-context)

K	D	G
	4	3
	8	7
	3	6

2) herhaalde optelling (in goudstukken-context)

[illegible]

3) factor 10 (afsplitsen en notatie met stippen)

$$\begin{array}{r}
 12 \times 87 \\
 87 \\
 \vdots \\
 \hline
 870 \\
 87 \quad 870 \\
 87 \quad 174 \\
 \hline
 174
 \end{array}
 \quad \text{of} \quad
 \begin{array}{r}
 10 \times 87 = \\
 2 \times 87 =
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{(plus gebaar in de lucht)} \\
 \text{(idem)}
 \end{array}$$

4) factoren 10 afsplitsen

$$\begin{array}{r}
 30 \times 38 \\
 38 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \hline
 380 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \hline
 380 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \hline
 380
 \end{array}
 \quad \text{of} \quad
 \begin{array}{r}
 10 \times 38 = \\
 10 \times 38 = \\
 10 \times 38 = \underline{\hspace{2cm}} +
 \end{array}
 \quad (\text{plus gebaar in de lucht})$$

5) notatie met stippen en keeraanduiding

$$\begin{array}{r}
 34 \times 48 \\
 48 \\
 \vdots \\
 \hline
 480 \\
 \vdots \\
 \hline
 1440 \\
 48 \\
 \vdots \\
 \hline
 192
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 3 \times
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{of } 10 \times 48 = \\
 10 \times 48 = \\
 10 \times 48 = \quad + \\
 4 \times 48 = \quad + \text{ (plus gebaar in de lucht)}
 \end{array}$$

6) knippen en verkorten (1) (onderaan starten)

$$\begin{array}{r}
 34 \times 48 \\
 48 \\
 \vdots \\
 \hline
 192
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 4 \times
 \quad
 \begin{array}{r}
 480 \\
 \vdots \\
 \hline
 1440
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 3 \times
 \quad
 \begin{array}{r}
 192 \\
 \hline
 1440
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{of } 30 \times 48 = \\
 4 \times 48 = \quad +
 \end{array}$$

7) knippen en verkorten (2)

$$\begin{array}{r}
 134 \times 48 \\
 48 \quad 48 \quad 148 \\
 \hline
 4 \times \quad 30 \times \quad 100 \times
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \dots \\
 \dots \\
 \dots
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{of } 100 \times 48 = \\
 30 \times 48 = \\
 4 \times 48 = \quad +
 \end{array}$$

8) deelprodukten ineenvlechten tot standaardvorm

$$\begin{array}{r}
 234 \times 548 \\
 548 \\
 234 \\
 \hline
 \vdots \\
 \vdots \\
 \hline
 \vdots
 \end{array}$$

P.S.: bij het bovenstaande gebruik maken van flexibel rekenen (handig rekenen, met gebruikmaking van tafels en eigenschappen, hoofdrekenen, mentaal inwisselen) en het steeds weer uitgaan van toepassingssituaties naast het 'kale' cijferende rekenen.

8.4 onderwijsgevende

Van de onderwijsgevende wordt gevraagd de kinderen volop gelegenheid te bieden het leerproces van het progressieve schematiseren geleidelijk en op een passend niveau te laten verlopen. Daartoe is een eerste vereiste om de kinderen goed te observeren en goed te luisteren naar oplossingen om van daaruit tot handiger berekeningsmanieren en kortere notatiewijzen te komen. Kinderen moeten aldus zelf in hun leerproces kunnen groeien. Dit in tegenstelling tot het voordoen- en nadoenprincipe. We dienen als onderwijsgevers een globaal beeld te hebben van het traject dat de kinderen af moeten leggen, ook al is deze weg niet voor alle kinderen precies dezelfde.

de. Met name de mogelijke 'sprongen' in het leerproces verschillen nogal.

Om de progressieve schematisering gaande te houden is het van belang om sommige opgaven samen (na) te bespreken. Daarbij wordt aan meerdere kinderen gevraagd hun oplossing op het bord te schrijven, en wel aan kinderen die op verschillend niveau werken. Aan de hand van de verschillende oplossingen kunnen kinderen gestimuleerd worden om een handiger en kortere manier te kiezen. Vaak zal het dan gebeuren dat die kinderen niet direct zo'n handiger werkwijze overnemen, maar pas na enige tijd. Dwang in een bepaalde richting werkt meestal averechts: de kinderen wordt hun zekerheid ontnomen, ze moeten op gezag van een ander op een te relatief hoog niveau werken. Overigens komt het ook wel voor dat kinderen uit zichzelf een te moeilijke werkwijze overnemen – bijvoorbeeld van iemand waar ze veel mee samen werken of uit een groep. Zo'n leerling moet dan de 'weg terug' gewezen worden naar een oplossingswijze die wel past bij het kind.

Aan de andere kant dient de onderwijsgevende het verkortingsproces gaande te houden en ervoor te zorgen dat een kind zich niet op een bepaald niveau vastzet. De moeilijkheid die zich kan voordoen is, wanneer je een kind moet stimuleren een volgende stap bij de leergang van de schematisering te zetten. Welnu, een goede manier daarbij is na te gaan, of zo'n kind een zekere vastheid van handelen op zijn actuele niveau van werken heeft. Dit kan gebeuren door zijn schriftelijke werk te analyseren, zijn denkwijze te ontleden en, wat heel betekenend is, door hem vóóraf zijn *handelingen* te laten *verwoorden*. Het verwoorden van de handeling zonder hem uit te voeren is namelijk lastiger dan de uitvoering op zich, en vormt een goede indicatie voor de vastheid van het handelen en van het zich realiseren van wat men doet. Op deze wijze kan men naar een kortere werkwijze toewerken.

Een voorbeeld. Een kind is op een gegeven moment in het leerproces op het niveau om 41×38 op de volgende wijze uit te rekenen en te noteren:

$$\begin{array}{r} 38 \\ \text{—} 380 \\ \text{—} 380 \\ \text{—} 380 \\ \text{—} 380 \\ \hline 38 \\ 12 \ 35 \ 8 \\ 15 \ 5 \ 8 \end{array}$$

Laat je hem nu vóóraf vertellen hoe hij de opgave oplost, dan vertelt hij het ongeveer zo: 'Ik zet 38 op mijn blaadje, dan zet ik stippen, een streepje en schrijf 380, dan ga ik verder en zet weer 380, en dan weer en nog eens, en dan nog eens 38 en dat tel ik bij elkaar.'

We kunnen dan vragen, waarom hij 380 opschrijft, waar dat getal vandaan komt. Dit om nog eens bewust te laten maken dat hier met een factor 10 vermenigvuldigd is. Daarna vragen we hoeveel keer 380 onder elkaar komt te staan en waarom. Antwoord: 'Vier keer.' Maar als je van te voren weet hoe vaak dat gebeurt – zo luidt ons commentaar – dan hoeft je dat niet iedere keer weer op te schrijven. Je kunt dan beter als volgt noteren:

$$\begin{array}{r}
 38 \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 380 \\
 \vdots \\
 12\ 32\ 0 \\
 15\ 2\ 0
 \end{array}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 380 \\ \vdots \\ 12\ 32\ 0 \\ 15\ 2\ 0 \end{array}} \right\} 4 \times
 \begin{array}{r}
 1520 \\
 38 \\
 \hline
 1558
 \end{array}$$

Daarna nog eens hetzelfde met 47×38 , en daarbij het knippen van de lange sliert aangeven om vervolgens de onderdelen samen te voegen. Ook hier weer vooraf laten verwoorden dat 4×380 ontstaat, en 7×38 . En vooral wijzen op het overzichtelijk noteren.

$$\begin{array}{r}
 38 \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 380 \\
 \vdots \\
 12\ 32\ 0 \\
 15\ 2\ 0
 \end{array}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 380 \\ \vdots \\ 12\ 32\ 0 \\ 15\ 2\ 0 \end{array}} \right\} 4 \times
 \begin{array}{r}
 38 \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 \vdots \\
 21\ 56 \\
 2\ 6\ 6
 \end{array}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 38 \\ \hline \vdots \\ 21\ 56 \\ 2\ 6\ 6 \end{array}} \right\} 7 \times
 \begin{array}{r}
 266 \\
 1520 \\
 \hline
 1786
 \end{array}$$

Wat de berekeningswijze betreft, sturen we natuurlijk aan op het direkt inwisselen. Het overgrote deel van de kinderen wisselt in dit stadium al direkt in. Het is duidelijk dat de bovenstaande kortere notatie bedoeld is om efficiënt de tafels te gebruiken en het herhaalde optellen te doen vermijden. Op deze wijze kan de onderwijsgevende op het juiste moment niveauverhogingen stimuleren. Dat stimuleren en 'sturen' kan zeer strak en uniform voor de hele groep geschieden of veel losser per persoon. Bij het invoeren van de progressieve schematisering is het aan te bevelen om aanvaankelijk wat strakker te werken met de hele groep. Dit om overzicht op de prestaties te kunnen houden. Bovendien zijn we als onderwijsgevende beter in staat om de mogelijkheden van de progressieve schematisering in de greep te krijgen. Laten we echter waken voor uniformiteit en de kinderen toestaan om tenminste op twee niveaus te werken (twee stadia in het onderwijs te betrekken), want ook dan kunnen we nog zeer wel het overzicht houden. En ook wat het inwisselen en het gebruik van de tafels betreft moeten we verschil toestaan, willen we de kern van de progressieve schematisering niet te zeer aantasten.

In het tweede jaar kunnen we dan een nog wat meer flexibele manier kiezen en nog wat grotere individuele verschillen tussen de kinderen toelaten, of beter, laten ontwikkelen.

Samenvattend enkele trefwoorden voor de taak van de onderwijsgevende:

- observeren van leerprocessen;
- stimuleren van verdergaande schematisering via:
 - verwoorden, voorspellen,
 - aangeven van de weg terug, om
 - vastheid van werkwijze op een bepaald niveau na te gaan;
- differentiatie in noteren en berekenen toelaten, met een spanwijdte van tenminste twee stadia.

8.5 kinderen

Uit het voorgaande is duidelijk dat de manier van onderwijzen vanuit de kinderen gevoed wordt. Behalve de invloed van de onderwijsgevende is ook de invloed van de kinderen op elkaar van enorm belang voor het leerproces van de progressieve schematisering. Daarom is het aan te bevelen om kinderen in groepjes aan opgaven te laten werken. Natuurlijk zit daarin het gevaar dat de kinderen daarbij reken- en notatiewijzen van elkaar overnemen zonder dat ze de essentie van de handeling of de verkorting begrepen hebben. Als dit al gebeurt – wat naar onze ervaring niet veel voorkomt – dan zal dit bij voortdurende observatie en zeker bij de toetsles snel ontdekt worden en dan kunnen passende maatregelen genomen worden om de kinderen de weg terug te laten volgen en een aangepaste werkwijze te zoeken.

Hoezeer de werkwijzen van de kinderen kunnen verschillen, blijkt bijvoorbeeld uit een opgave als 29×48 . De grootste groep ‘knipt’ deze lange optelling in stukken van 20 keer 48 en 9 keer 48 en berekent deze onderdelen apart (hoewel niet altijd, zoals uit het voorbeeld blijkt). De notatie- en berekeningswijzen kunnen aanzienlijk verschillen qua:

- uitgebreidheid van noteren;
- al dan niet gebruik van de tafels;
- de wijze van inwisselen, direkt of niet direkt en in het laatste geval nog kort of minder kort met tussenstappen.

Er zijn echter ook kinderen die 30 keer 48 berekenen en dan van de uitkomst 48 aftrekken. Maar ook hier zijn naast de voorgaande weer allerlei nuanceverschillen. Vooral bij het aftrekken verschilt de werkwijze, hoewel deze niet uit de notatie hoeft te blijken:

$$\begin{array}{r} 33 \\ 1440 \\ \underline{48} \\ 1392 \end{array}$$

De bovenstaande werkwijze is cijferend opgelost, maar er zijn ook kinderen die het uit het hoofd doen. Ook al doen ze het cijferend, en noteren ze op deze wijze, dan nog is er groot onderscheid in oplossingswijzen mogelijk. Sommigen lenen 10 en voeren dan eerst een aftrekking uit en dan nog een optelling ($10 - 4 = 6$; $6 + 3 = 9$ in de tweede kolom), anderen eerst een optelling en dan een aftrekking met een tekort als uitkomst en dan een optelling ($3 - 4 = -1$ tekort, dan 10 lenen en daarvan het tekort afhalen). Dit alles gevoed vanuit de sultan-context!

Kortom, er zijn enorme persoonlijke verschillen in oplossingsstrategieën, berekeningswijzen, notatie-niveaus. Iedere individuele manier dient – in het ideale geval – als aangrijpingspunt voor het onderwijs. In de realiteit leggen we de kinderen bepaalde beperkingen op om het onderwijs uitvoerbaar te houden, maar in redelijke mate, want we willen dat onze leerlingen organisch leren, dat wil zeggen kennis en vaardigheden integreren, zich eigen maken en geen wezensvreemde strategieën leren.

8.6 leerstof

Om de weg naar de uiteindelijke algoritme begaanbaar te maken voor progressieve schematisering is naast een goede observatie en aangepaste hulp ook een aangepaste leerstofkeuze van groot belang. We hebben in de voorgaande hoofdstukken – met name ook bij de toetslessen – daarvan een duidelijk beeld proberen te geven.

We willen hier nog enkele algemene keuze-criteria noemen. Allereerst zijn daar de context-opgaven. Deze dienen zowel bij de start als in toepassingssituaties te fungeren. Vooral bij het inwisselen kan de sultan-context houvast bieden. En in de toepassingen komt de herhaalde optelling sterk naar voren. Ten tweede is de moeilijkheidsgraad van de opgaven essentieel. We kiezen als opgaven die, welke passen bij een bepaald niveau van oplossen, maar ook die de naastbij gelegen fase kunnen aanduiden en ondersteunen.

Voorbeelden:

- herhaalde optelling – dan 7×43 ;
- 12×48 zonder $10 \times$ expliciet te maken aanvankelijk;
- 20×43 nadat $10 \times$ expliciet aan de orde gesteld is.

Dit steeds appelleren aan het naast-liggende niveau dient om de niveauverhoging en verkorting uit te lokken. Ten derde is daar de kwestie van de basisvaardigheden. Omdat de kinderen relatief weinig sommen maken bestaat het gevaar, dat de basisvaardigheden onvoldoende gememoriseerd worden. Dit houdt in dat naast het cijferen (1 les per week) bewust veel aandacht aan de basisvaardigheden besteed moet worden – zeg door dagelijks ongeveer tien minuten aandacht te schenken aan tafels, handig rekenen, rekenen met nullen en ‘sommen naast elkaar’ als 37–15 e.d. Van belang daarbij is dus:

- variatie in oefenstof;
- variatie aan aanbiedingswijzen (bijvoorbeeld met tabellen, pijldiagrammen e.d.);
- regelmatige oefening;
- in korte, felle lesjes.

8.7 rest

Voor het overige hebben we aandacht besteed aan:

- het fenomeen van de toetsles;
- de foutenles, waarin bepaalde leerzame fouten besproken worden, deze fouten kunnen ook als zelfstandige opgaven fungeren die men door de leergang ‘strooit’ ter lering en vermaak;
- de aard van de fouten: schemafouten, inwisselen, basisvaardigheden, optellen, aftrekken, slordige notatie, factor 10, 100, etc., ...

Op enkele kwesties zoals:

- toepassingen,
 - gebruik van de zakrekenmachine,
 - remediërend werk,
- komen we nog kort terug in deel C.

II VERMENIGVULDIGEN VOLGENS HET KRUISPUNTENMODEL

Het kruispuntenmodel is een geschikt hulpmiddel om kinderen te leren vermenigvuldigen. Het heeft, zoals ieder model, zijn voor- en nadelen. In vergelijking met andere modellen is dit model het meest ingrijpend voor de manier van werken en observeren van kinderen. Daarom is de keuze ervoor geen vrijblijvende zaak, maar een kwestie van het hele team. Uit het vervolg zal duidelijk worden dat het aanleren van vermenigvuldigen met het kruispuntenmodel door enige leerjaren van de basisschool kan heenlopen, maar ook in kortere tijd z'n beslag kan krijgen. Een voorwaarde om op deze manier te gaan werken is, dat de onderwijsgevende steeds heel bewust zelf zijn sommen kiest. Dat betekent, dat de rekenmethode die in gebruik is in het algemeen gesproken geen programma geeft om het vermenigvuldigen met het kruispuntenmodel te leren.

In de volgende beschrijving en in het overzicht aan het eind wordt houvast gegeven om te weten welke leerstof in iedere fase gekozen kan worden. Tevens wordt steeds in een globale richttijd aangegeven, hoe lang kinderen in een bepaalde fase werken om een zekere vastheid van handelen te kunnen hebben. Daarnaast worden er in de lesprotocollen en in dit overzicht ook didactische aanwijzingen gegeven om kinderen in een hogere fase van schematisering te brengen.

Centraal bij deze aanpak staat het observeren van kinderen teneinde snel hulp te kunnen bieden. Foutenanalyse is daarbij uiteraard noodzakelijk. Men dient zich ervan bewust te zijn dat op het gebied van het oefenen andere dingen gevraagd worden dan in het gangbare cijferprogramma. Basisvaardigheden en rekenen met nullen zijn belangrijke pijlers, waarop de kruispuntenleergang rust.

Tenslotte zal duidelijk worden dat de differentiatie van eindniveau een groot winstpunt ten opzichte van de traditionele algoritme betekent. Onderwijsgevendens die met behulp van het kruispuntenmodel willen gaan werken, zullen na lezing van de hele beschrijving van lesprotocollen, didactische tips etc. veel steun kunnen vinden van het overzicht aan het eind. Speciale aandacht wordt gevraagd voor de paragraaf over de toetsles.

1 CONTEXTFASE

In de fase waarin het kruispuntenmodel geïntroduceerd wordt als een mogelijke manier om vermenigvuldigingsproblemen op te lossen, is de terugkoppeling naar een verhaal (context) van groot belang. Het plaatje is in deze fase een schematisering van bepaalde aspecten van dat verhaal. Vandaar dat de context die hier gekozen wordt aan zekere eisen moet voldoen. Van belang is namelijk dat die context het 'handig tellen' en het lijnenschema met kruispunten als visualisering oproepen.

De eerste lessen kunnen gekenschetst worden als een samen op weg gaan om het kruispuntenmodel te verkennen. De onderwijsgevende heeft hierbij een centrale rol en speelt in op de reacties van de kinderen. Het plaatje op het bord is daarbij van essentieel belang. De tekening ontstaat als het ware op aanwijzingen uit de klas, terwijl de onderwijsgevende zo nodig bepaalde suggesties uit de klas oproept. Laten we zo'n les eens van dichtbij beschouwen.

1.1 les 1

Het is begin december. Buiten is het echt herfstweer. De juf uit klas 3 van de Dreeschool begint een gesprek over een stukje actualiteit uit de krant van de vorige dag.

'O: Gisteren las ik in de krant jongens, dat er volgend jaar sportwedstrijden gehouden zullen worden in Arnhem. Mèt deelnemers uit de hele wereld. Wie heeft dat ook gelezen?

K: Ja juf en het was ook op het journaal.

O: Dat heb ik niet gezien, maar wat voor wedstrijden zijn dit dan?

K: Dat zijn wedstrijden voor gehandicapten.

O: Ja precies. Die wedstrijden worden gehouden op Papendal.'

N.B.: Even wordt gesproken over gehandicapten en over de deelnemers. Dan vervolgt juf:

'O: Nou las ik dat ze bij deze grote wedstrijden een mascotte hebben die goed bij Papendal past.'

Na een korte explicatie van het begrip mascotte gingen de kinderen raden wat voor mascotte er gekozen was voor de spelen voor gehandicapten, want niemand had 't gelezen. De gissingen liepen uiteen van mier, giraf tot olifant toe. Zonder overigens aan te geven waarom die bij Papendal zouden passen.

'O: Nee jongens, jullie hebben het allemaal mis. Juf zal het je vertellen. Gekozen is voor de eekhoorn.'

Het noemen van de eekhoorn was overigens voldoende om de kinderen te laten vertellen waarom deze keuze goed bij de bosrijke omgeving van Papendal past. Kort komen de volgende aspecten daarbij aan de orde: Waar leven eekhoorns? Waarvan leven ze? Hoe zien ze eruit?

De onderwijzeres neemt zelf de draad weer op:

'Ja ik hoor wel dat jullie al heel wat van eekhoorns afweten. Toch zal ik jullie eens iets vertellen over een eekhoornfamilie wat jullie nog niet weten. In dit jaargetijde, de herfst dus, verzamelen eekhoorns voedsel, wat dan volop aanwezig is in het bos. Dit voedsel verbergen ze in oude vogelnesten of holle bomen om 's winters op te kunnen eten. Vaak zijn ze vergeten waar ze zo'n voorraadplaats gemaakt hebben, maar toch zijn het slimme diertjes. Vlakbij mijn huis in Velp heb ik zo'n slimme eekhoornfamilie wonen.'

De onderwijzeres gaat over op een fantasieverhaal, wat ze later meerdere keren uit-

buit als een context voor het vermenigvuldigen. De kinderen hebben al gauw de overgang naar de fantasiewereld begrepen, maar leven zich graag in deze situatie in.

'Die familie Eekhoorn bestond uit zeven eekhoorns: een oude opa, een moeder, een vader, een hele vlugge, die hebben we maar Sprint genoemd, een hele luie noemden we Slome, een hele magere Spriet en een prachtige eekhoorn met een mooi vacht Roodrug. Deze eekhoornfamilie deed alles samen. Ieder deed het werk wat hij het beste aankon. Ik kon m'n ogen haast niet geloven. Opa, die vorig jaar uit de boom gevallen was en nog steeds niet goed kon lopen, hoefde daarom niet met eikels en noten te sjouwen. Hij kende het bos op z'n duimpje en wist mooie plekjes om alles op te bergen. De andere eekhoorns zouden samen noten sjouwen en bij het hol dat opa aanwees, komen brengen. Opa zou de noten tellen, zodat ze wisten hoeveel ze er samen hadden. Zo begon ieder aan z'n werk. Opa ging op z'n gemak in de dichtstbijzijnde boom bij het hol zitten.

K: *Juf, maar als je van de noten eet, dan weet je toch niet meer hoeveel je er nog hebt?*

O: Dat is misschien wel zo, maar als je weet hoeveel er zijn kun je wel eerlijk delen. Opa schreef dat trouwens op een bordje en zette dat bij de ingang van het hol. Moet je horen hoe dat ging. Vader eekhoorn is het eerst terug met 23 noten. Ook moeder is vlug en zeult er zoveel mogelijk mee. Ze merkt niet eens dat ze er een paar onderweg verliest. Ook zij heeft er 23 bij zich. De slome had er niet zo veel, maar vond de noten die moeder verloren had en had er toen ook 23. Sprint, heel vlug, had ook 23 noten en hij had zelfs nog even met een vriendje gespeeld in de grote eik. Toen uiteindelijk de anderen ook terug waren bleek dat ze allemaal evenveel noten meegebracht hadden. Opa, die de hele tijd op de uitkijk had gezeten, vond het een hele voorraad. Tjonge, wat is er gewerkt! Maar nu moest opa zelf aan de gang. Hij had beloofd om de noten te tellen en het aantal op te schrijven. Nou was het tellen niet één van opa's sterkste punten. Op de eekhoornschool had hij het heel lang geleden wel geleerd.'

De onderwijsgevende laat zien, hoe moeilijk het opa afging en tekent daarbij de noten als stippen op het bord.

Vader: ○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

Al tellend raakt opa in de war. Hij krijgt gauw assistentie van de andere eekhoorns. Juf en de kinderen spelen dit na. Samen komen ze op het idee om de noten anders neer te leggen. Op het bord tekent juf de rij noten zo:

Vader: ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○

Op deze manier met het groeperen van tien, is het makkelijk tellen: je ziet zo dat er 23 zijn. Eén van de kinderen mag de noten van moeder eronder tekenen op het bord.

Vader: ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○ ○○○

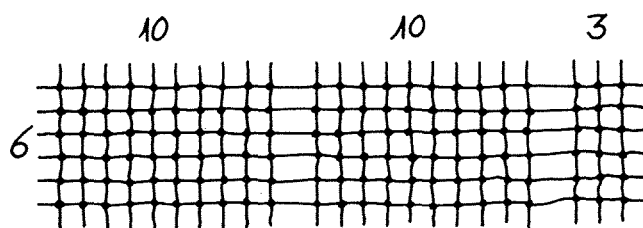
Moeder: 0000000000 0000000000 000

De kinderen uit de klas geven zelf commentaar: 'Zo is het nog niet duidelijk. Je kunt veel beter er precies onder tekenen, dan hoef je ook niet meer te tellen.'

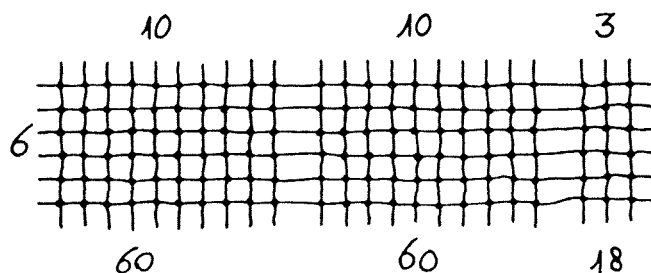
Zo ontstaat op het bord deze tekening, die de juf op aanwijzingen uit de klas vlug klaar heeft, zonder te tellen.

Vader	:	o o o o o o o o o o	o o o o o o o o o o	o o o
Moeder	:	o o o o o o o o o o	o o o o o o o o o o	o o o
Slome	:	o o o o o o o o o o	o o o o o o o o o o	o o o
Sprint	:	o o o o o o o o o o	o o o o o o o o o o	o o o
Roodrug	:	o o o o o o o o o o	o o o o o o o o o o	o o o
Spriet	:	o o o o o o o o o o	o o o o o o o o o o	o o o

Juf gaat nu lijnen trekken, terwijl ze het verhaal in het kort herhaalt. Bij de horizontale lijnen noemt ze de eekhoorns (*halers*) en bij de verticale lijnen telt ze het aantal noten en schrijft de getallen erbij. Zo ontstaat de eerste kruispuntentekening op het bord:



Het is nu gemakkelijk om het totaal uit te rekenen. Juf zet een kring om het eerste blok in de tekening en zegt: 'Hoeveel noten heeft Opa hier liggen?' Zo ontstaat uiteindelijk de volgende oplossing:



Steeds wordt het sommetje erbij genoemd: 10×6 of 6×10 .

'K: $6 \times 3 \rightarrow 18$ noten.

O: Hoeveel noten hebben ze samen opgehaald?

K: $60 + 60 + 18 = 138$. Dus $6 \times 23 = 138$.'

De onderwijzeres ziet dat de introductie tot nu toe al ruim een half uur in beslag nam. Toch wil ze de kinderen nu zelf ook een tekening laten maken. Ze vervolgt aldus:

‘De eekhoornkinderen vonden het knap dat Opa er toch nog uitgekomen was. Daarom spreken ze af de volgende dag nog meer noten aan te dragen. In de haast die ze maakten viel de Slome over zijn eigen staart. Hij had zich zo bezeerd, dat verder lopen onmogelijk was. Zo was er weer een sjouwer minder. De andere eekhoorns hadden gesjouwd wat ze konden en ieder had 29 noten verzameld.

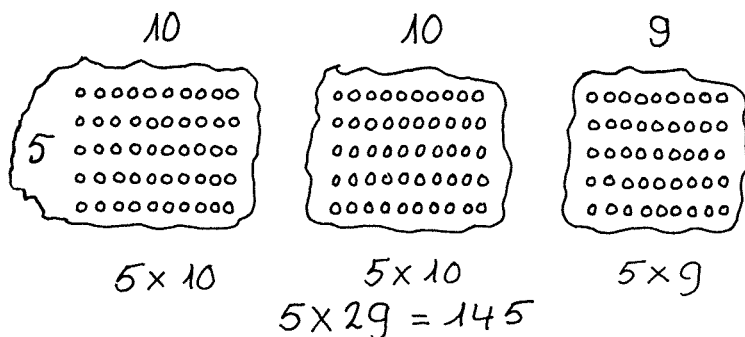
O: Wat moest Opa nu uitrekenen? Je mag het zelf tekenen op je blaadje.

K: Je moet 5×29 uitrekenen.

O: Nou doe dat dan maar.’

Een paar kinderen hadden het antwoord al gauw zonder het plaatje te tekenen. Een kind zei: ‘ $10 \times 29 = 290$ dus $5 \times 29 = 145$.’

Juf vindt de oplossing prima, maar vraagt toch of de kinderen net zo’n tekening willen maken als Opa deed. Vrijwel alle kinderen tekenen het sommetje zo:



De enige aanwijzing die de juf aan veel kinderen moet geven, is het aantal erbij te zetten. Je kunt juist in dit voorbeeld niet direkt zien hoe groot ieder ‘blok’ is: je moet tellen om het onderscheid tussen 10 en 9 te kunnen bepalen! Vandaar dat je steeds de aantallen erbij moet schrijven in je tekening. De les geeft nu voldoende aanknopingspunten om de ingeslagen weg later te vervolgen.

Deze introductieles van ruim drie kwartier toont duidelijk wat problemen. De context slaat bij de kinderen goed aan. Ze leven zich goed in de situatie in. Maar de kindertekeningen laten zien, dat op deze manier de kruispunten niet getekend hoeven te worden. Bovendien: de noodzaak van het noteren van de aantallen bij de tekening wordt door de kinderen niet als zodanig ervaren. Deze twee aspecten doen de juf besluiten om de volgende keer een andere context te kiezen. Later komt ze dan wel weer op de eekhoornfamilie terug.

1.2 les 2

Een week later wordt de tweede introductieles gegeven. De kinderen hebben dan de gelegenheid gehad om de geïntroduceerde stof wat te laten bezinken. In de contextfase wordt de opbouw rustig opgezet. Er hoeft nu ook niet geoefend te worden, omdat nog geen algoritmisch gedrag beoogd wordt. Wel wordt in deze tijd geoefend met de tafels van vermenigvuldiging (zie oefenprogramma). Naar aanleiding van de ervaringen in de eerste les wordt nu een les gegeven waar kruispunten (wegennet) ook als

zodanig getekend zullen worden. Bovendien wordt bij het introductievoorbeeld zo'n grote vermenigvuldiging gekozen, dat er wel getekend moet worden om de opgave te kunnen uitrekenen.

Voor de klas hangt een wereldkaart. Deze kaart is in een eerder stadium al eens bekeken. Verschillende werelddelen zijn daarbij aangewezen. Dit wordt kort herhaald. Bij Amerika aangekomen wordt het verhaal van Columbus weer even in herinnering gebracht. Hier pakt de onderwijsgevende zelf de draad weer op en vertelt het volgende.

'Nadat Columbus en later ook anderen deze nieuwe wereld ontdekt hadden, zijn er uit Europa mensen naar dat gebied getrokken. Deze mensen gingen om veiliger te wonen en om steun aan elkaar te hebben, bij elkaar wonen. Zo zijn daar op den duur ook grote steden ontstaan. Toch zagen die steden er anders uit dan de onze. De straten zijn daar ruim en veel rechter als hier. Bovendien hebben ze die straten nummers gegeven en geen namen. Je kunt ze daardoor gemakkelijker vinden. Bij ons gebeurt dat in nieuwbouwwijken bij sommige steden ook (bijvoorbeeld Nijmegen).'

Zo wordt in het kort het bij de kinderen bekende stadsplan in herinnering gebracht. (In pakketjes als 'Sproeteldam' en 'De Kamping' is het stadsplan met lanen en straten uitvoeriger aan de orde geweest op deze school).

Een Amerikaanse stad heeft 24 straten die gekruist worden door 35 lanen. Als je op ieder kruispunt een verkeersagent zou zetten, hoeveel agenten heb je dan nodig? Maak maar een tekening!

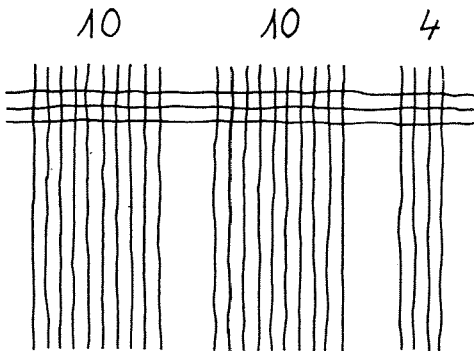
Terwijl één van de kinderen op het bord gaat tekenen en de overigen op een vel papier, zegt één van de kinderen:

'Juf, ik hoef het niet te tekenen, want ik weet het al.'

O: Wat weet je al?

K: Er komt 59 uit.'

Op het bord is de tekening inmiddels een eindje gevorderd:



Juf gaat naar de tekening en zegt, omdat blijkt dat meerdere kinderen de vraagstelling nog niet door hadden:

'Kijk eens naar dit gedeelte van de stad, alle straten zijn al getekend. Hoeveel lanen zijn er al getekend?'

K: Drie.

O: Hoeveel lanen moeten we tekenen?

K: 35.

O: Wijs eens aan, waar een agent komt te staan? Ja, precies daar. Hoeveel agenten zijn er nu al nodig? Zou 59 goed zijn?'

Vrijwel iedereen begrijpt nu de vraagstelling. Bovendien ziet iedereen in dat niet eenvoudigweg opgeteld moet worden.

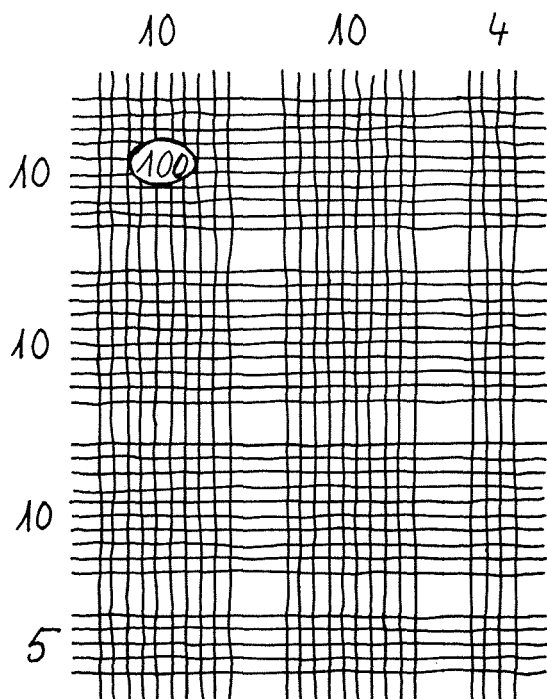
Eén kind verwoordt het als volgt:

'In de bovenste laan heb je 24 agenten nodig. In alle lanen staan 24 agenten, dus 35×24 agenten.

K₁: 24×35 is 4×30 en 20×5 .

K₂: Nou gewoon $5 \times 4 = 20$, nul opschrijven, twee onthouden en $3 \times 2 = 6$.

*O: Nee jongens. Kijk nou eens naar de tekening op het bord (die inmiddels nage-
noeg af is):*



Hoeveel agenten in dit stukje van de stad?'

Juf wijst op het eerste blok van 10 bij 10. Al gauw is ieder het ermee eens dat daar 100 kruispunten zijn. Op deze manier worden ook de overige blokken bekeken en berekend. Opvallend daarbij is, dat een grote groep kinderen direkt gebruik maakt van de bekende tafelprodukten, terwijl een andere groep eerst nog telt om er zeker van te zijn. Bijvoorbeeld bij het blok links onderaan (5 bij 10) zijn er kinderen die zeggen: $5 \times 10 = 50$, maar ook die de rijen aanwijzen en zeggen: 10, 20, 30, 40, 50. En er zijn kinderen die de bovenste rij tellen: 1, 2, 3, 4, ..., 10. Vragen als: Moet je ze nog wel tellen? Kun je het in de tekening ook zien dat er 10 zijn?, geven een goede ondersteuning. Ook het verwoorden van iemand die snel de oplossing zag, is hierbij van belang. Tevens kan nu nog ingegaan worden op eerdere suggesties als $24 \times 35 = 4 \times 30 + 20 \times 5$. Het plaatje speelt daarbij een belangrijke rol. De onderwijsgevende leidt vervolgens zelf het invullen van het aantal kruispunten van de overige blokken. Op deze wijze kan namelijk direkt op niveauverhogingen bij de kinderen aangestuurd worden.

'O: Hoeveel verkeersagenten schat je dat er nodig zijn als je naar de tekening kijkt?

K: 1000 zijn het er zeker.

K: Ik denk nog veel meer.

O: Wie ziet er nog een blok van 100?'

De kinderen wijzen op het bord nog meer van die blokken aan. Aan een zwakkere leerling vraagt juf:

'Waarom zitten er 100 kruispunten in dit blok?

K: Nou er zijn er steeds 10 zo (wijst verticaal) en 10 zo (wijst horizontaal).

O: Prima. Toch hebben we alle kruispunten nog niet aangewezen. Wijs nog eens een blok aan.'

Een blok van 4 bij 10 wordt aangewezen. Door veel kinderen wordt nog tot 40 geteld.

'O: Hoe kan ik vlug 'weten' dat er 40 in dit blok zitten?

K: Kun je zo zien, want er zijn maar 4 straten zo (wijst verticaal).'

Bij het invullen van de overige blokken wordt vanaf dit moment veel minder geteld. Uiteindelijk staan alle tussenprodukten in de blokken geschreven. Vervolgens worden ze opgeteld.

Tot slot van deze les geeft juf nog een opdracht die ze zelf mogen tekenen:

'Je ziet in zo'n grote stad kun je niet op ieder kruispunt een verkeersagent zetten. In een kleiner stadje zou het misschien wel gaan, maar je hebt ze daar natuurlijk niet nodig. Het is daar ook niet zo druk. Hoeveel verkeersagenten zou je nodig hebben voor een stadje met 12 lanen en 14 straten? Bedenk zelf een naam voor het stadje en teken de kruispunten. Je hoeft het niet precies recht te tekenen, dus zonder liniaal, maar wel vlug.'

Iedereen kreeg ruim de tijd om de tekening te maken. Juf kijkt hoe ze tekenen en geeft hier en daar aanwijzingen.

Opvallende dingen zijn:

- niet alle kinderen zien dat het handig is om een splitsing bij 10 te maken in de tekening;
- bij degenen die wel ‘blokken’ tekenen wordt de kennis van de tafelpakketten niet steeds toegepast. Er wordt dus nog onnodig geteld;
- vanuit het eekhoornverhaal is er een enkeling die stippen (verkeersagenten) tekent in plaats van kruispunten;

Vanuit deze observaties wordt de conclusie getrokken om de volgende les speciaal op deze punten te letten.

1.3 les 3

Terug naar het eekhoornverhaal.

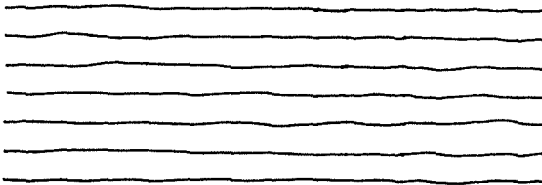
De derde les in de contextfase van het vermenigvuldigen wordt gebruikt om ervaringen van les 1 en les 2 bij elkaar te brengen.

O: Een tijdje geleden heb ik jullie een verhaal verteld over een slimme eekhoornfamilie. Opa eekhoorn zette een bordje bij het hol, zodat de eekhoornfamilie nog wist waar de noten opgeborgen waren en hoeveel er in het hok zaten. Hoe telde opa die noten ook weer?

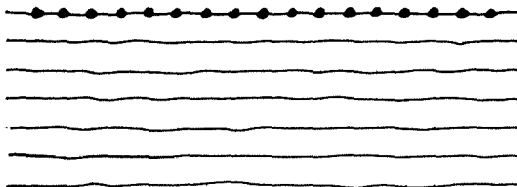
K: Alle eekhoorns hadden evenveel noten gebracht.

K: Opa legde er tien op een rij. Dertig legde hij zo: tien en dan weer tien en nog eens tien.

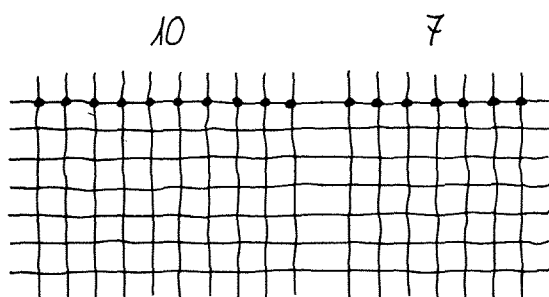
O: Juist, opa legde de nootjes in rijen. Dat was trouwens een heel werk. Eerst moest hij de noten neerleggen en dan weer in het hol terugleggen. Daar had opa iets op bedacht. Eigenlijk heb ik de noten er niet bij nodig, die kan ik ook wel tekenen, zei hij tegen zichzelf. Zo had opa op een dag toen zeven eekhoorns ieder 17 noten bij opa brachten, het volgende gedaan: in het natte zand tekende hij met een stokje een gleufje voor iedere eekhoorn:



Nu had iedere looper zijn gleuf. Hij tekende 17 kuultjes in de eerste gleuf op de plaats waar de nootjes moesten liggen. Zo ging dat voor de noten van vader eekhoorn:



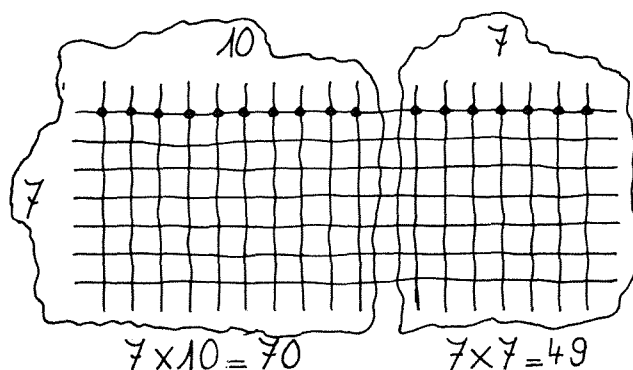
Toen dacht opa: als ik nu lijntjes naar beneden teken voor de andere eekhoorns, kan ik zo zien dat ieder er evenveel gebracht heeft. Dus zó:



De onderwijzeres laat in haar bordtekening de kruispunten nog eens verklaren. De derde eekhoorn (3e lijn van boven) heeft dus hoeveel noten gebracht...?

'O: Opa hoefde dus niet alle kuiltjes te maken, omdat hij wist dat ze precies onder elkaar zaten. Toch kon hij nu zien hoeveel noten ieder gebracht had. Zo had opa veel gauwer gevonden hoeveel noten er waren, zonder de noten zelf te gebruiken.'

N.B.: Het steeds meer schematiseren in een tekening heeft hier een aanvang genomen.



Nog even wordt aandacht geschonken aan de vermenigvuldiging bij het invullen van de blokken.

'O: Hoeveel noten staan er getekend in het eerste blok (7 bij 10)?

K: 70.

O: Hoe weet je dat zo vlug?

K: Zeven rijen van 10.

O: Je kunt er dus bij schrijven: 7×10 .

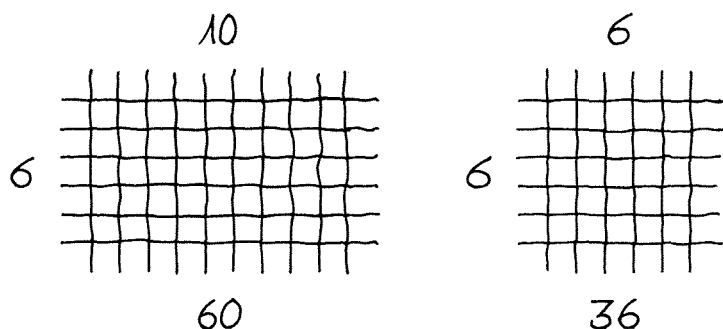
Hoeveel zijn er in het tweede blok?'

Zo komen ze samen op $7 \times 7 = 49$.

‘Tekenen jullie nu eens voor het geval er op donderdag zes eekhoorns 23 noten en op vrijdag negen eekhoorns 19 noten verzamelen. Op welke dag werden de meeste noten verzameld, denk je? En reken eens uit hoeveel meer.’

Het is belangrijk dat kinderen nu zelf zo’n tekening mogen maken en het verhaal erbij vertellen. Het blijkt, dat het zelf doen voor velen nog een probleem is. Meedenken bij het verhaal van juf is veel eenvoudiger. Daarom geeft juf al rondlopend allerlei aanwijzingen.

Bianca tekent het volgende plaatje bij het sommetje over donderdag 6×23 . Het is één voorbeeld van meerdere soortgelijke gevallen, die je al observerend tegenkomt.



Opvallend is dat ‘de gleuven’ doorgetrokken zijn. Vanaf het tweede blok heeft ze zich niet meer gerealiseerd dat verticaal ‘noten’ getekend moesten worden. De zes verticale lijnen slaan op het aantal eekhoorns. Juf laat Bianca haar tekening ‘terugvertellen’. Al gauw ziet ze zelf in dat het verhaal niet klopt en ze zegt: ‘Ik heb de noten niet goed getekend.’ Juf wijst erop, dat de gleuven ook beter aan elkaar getekend kunnen worden, anders zou ze misschien denken dat ze van verschillende eekhoorns zijn. Het is duidelijk dat het van belang is om in deze fase zo snel mogelijk dit soort ‘fouten’ in de tekening te herstellen. Op deze manier wordt het plaatje van het kruispuntenmodel voor ieder duidelijk.

1.4 vervolg

De opbouwfase wordt voortgezet met het maken van sommetjes. En wel met verhaaltjes waaruit de vermenigvuldiging zelf naar voren gehaald moet worden, maar ook kale vermenigvuldigingen, zoals bijvoorbeeld 8×48 en 6×63 komen aan bod. Het is ook goed om kinderen zo af en toe zelf een verhaaltje bij een kale vermenigvuldiging te laten bedenken. Op deze manier dien je de opbouw van deze contextfase, terwijl je naast het inoefenen van de algoritme tevens zorgt dat kinderen toepassingen, waarbij de algoritme gebruikt moet worden gemakkelijker kunnen herkennen. Op het bord wordt steeds kort nabesproken hoe een sommetje handig gedaan kan worden. Drie punten worden daarbij steeds goed in het oog gehouden, namelijk:

- of er een goede tekening bij het verhaaltje staat;
- of de tekening goed en handig gegroepeerd is;
- of de opgave en de aantallen bij het schema gezet zijn.

In deze opbouwfase van zes à acht weken worden nog geen specifieke peilingen of toetsen afgenomen. De observatie van de onderwijsgevende en het daaruit voortvloeiende lesverloop vanuit die observaties, maken dit in deze fase overbodig.

Om de kinderen zelfstandig de opgaven te laten verwerken, worden in deze contextfase vermenigvuldigen gekozen, waarbij de ene factor kleiner dan tien is en de andere kleiner dan honderd. De reden van deze keuze ligt voor de hand. De toepassingen zijn dan nog niet te ingewikkeld, terwijl bovendien de bekende tafelproducten in de opgaven makkelijker herkend worden.

In een apart hoofdstuk zullen we aandacht besteden aan de kwestie van het oefenen van basisvaardigheden, zoals tafelproducten, basisoptellingen en -aftrekkingen.

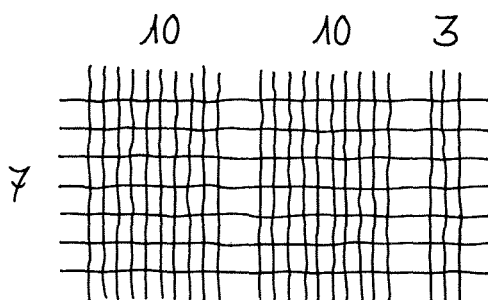
Een algoritmeles dient kort te zijn, hoewel lessen die, zoals hierboven beschreven, voor de opbouw van een bepaalde fase noodzakelijk zijn, in het algemeen wat langer mogen duren. Dit betekent voor de vermenigvuldigingsalgoritme, dat een 'gewone' les hooguit een half uur duurt, maar liever twintig minuten, terwijl een 'opbouwles' twee keer zoveel tijd kan beslaan. De ervaring heeft uitgewezen dat drie keer twintig minuten cijferen effectiever is dan twee keer een half uur. Dat houdt dan wel in dat de meeste kinderen per les niet meer dan drie opgaven maken, dat wil zeggen tekenen en uitrekenen. Gemiddeld worden twee lessen per week gegeven. De hoeveelheid opgaven die gemaakt wordt, is dus niet groot. Wel mag nu van de leerlingen geëist worden dat ze weinig fouten maken, omdat het tempo geen belangrijke rol speelt. Toch dient de snelheid van uitvoering c.q. de vaardigheid niet uit het oog verloren te worden. En doordat er veel minder opgaven gemaakt worden dan in het traditionele programma, dient er nu ook wat meer aandacht geschonken te worden aan het oefenen van de basisvaardigheden. (We komen op deze kwestie nog terug in het kader van het oefenen).

Ziehier in vogelvlucht de opbouwfase van het leren cijferend vermenigvuldigen. U hebt een indruk kunnen krijgen van de introductie van het cijferen, de problemen die zich kunnen voordoen, de aard van de opgaven en vooral ook van het onderscheid met de gebruikelijke aanpak. Om nu de progressie in de schematisering van het cijferwerk te schetsen, geven we in het volgende een overzicht van de fase die op de introductie met contextopgaven volgt, namelijk de bundelingsfase.

2 BUNDELINGSFASE

De overgang van de contextfase naar de bundelingsfase wordt – afhankelijk van de vorderingen – na zes à acht weken gemaakt, dus na twaalf tot zestien betrekkelijk korte algoritmelessen. In het begin van de contextfase worden de tekeningen door de kinderen nauwkeurig gemaakt. Dat wil niet zeggen dat alle lijnen keurig recht getekend worden, want dat is niet essentieel. Vandaar ook dat geen linialen bij de tekeningen gebruikt mogen worden. Nauwkeurig tekenen slaat in dit geval op het feit dat precies alle lijntjes getekend worden. Maar omdat er al gauw niet meer geteld wordt en de blokken met kruispunten uitgerekend worden met behulp van de tafelproducten, worden de tekeningen bij sommige leerlingen vanzelf al onnauwkeuriger. Een

factor die de onnauwkeurigheid in de hand werkt, is het feit dat bij de tekening steeds het aantal gezet wordt.



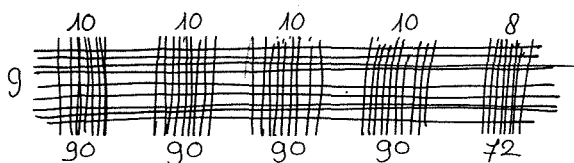
Vanwege het feit dat de aantallen er toch bij staan is het ook niet noodzakelijk om alle lijntjes nauwkeurig te tekenen. Als onderwijsgevende moet je blij zijn met deze 'slordigheid', want dat betekent dat de kinderen het plaatje al niet meer zo nodig hebben. Ze weten dat er tien lijnen staan en tekenen er misschien maar acht of negen. Deze 'nalatigheid' nu wordt uitgebuit om de kinderen naar een hoger niveau van schematisering te tillen. Hoe kun je dit nu doen?

Laten we de eerste bundelingsles eens van nabij bekijken. In dit cursusjaar (1979) werd deze les ongeveer half januari in het derde leerjaar gegeven, terwijl de eerste les in de contextfase veertien dagen voor de Kerstvakantie viel. Deze kinderen hadden dus vier weken wat geoefend met vermenigvuldigen, gemiddeld twee korte lessen per week.

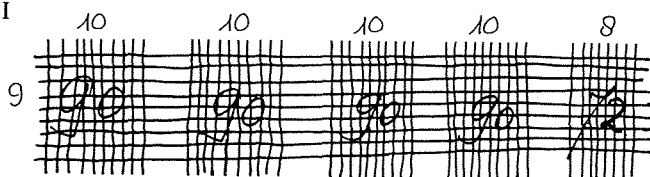
2.1 les 1

Juf schrijft op het bord een vermenigvuldiging van het type dat ze de laatste weken regelmatig gemaakt hebben. Reken uit: 9×48 . Op een ruim tekenblad gaan de kinderen tekenen en rekenen. Juf loopt rond en observeert de aan het werk zijnde kinderen goed. Dit heeft ze trouwens de afgelopen weken regelmatig gedaan en zo weet ze precies wat ze verwachten kan. Nu loopt ze rond met een speciale bedoeling. Ze wil namelijk drie kinderen hun manier van werken op het bord laten zien. Daarvoor kiest ze zorgvuldig die kinderen uit, die ze als voorbeeld gebruiken kan om de hele groep naar een hoger schematiseringsniveau te krijgen. Al gauw is de opgave op papier klaar en juf stuurt drie kinderen naar het bord om hun manier te demonstreren. Ze moeten wel precies hetzelfde op het bord tekenen, als wat ze op papier hebben gezet.

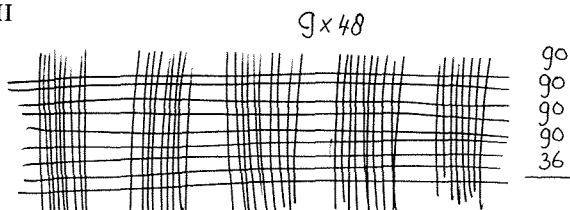
Tekening I



Tekening II



Tekening III



Op het eerste gezicht is wellicht niet duidelijk waarom juf deze drie tekeningen van hetzelfde sommetje op het bord liet maken.

Wel, tekening I wil ze gebruiken om straks naar de niveauverhoging te komen. Er is slordig getekend en het tellen van kruispunten is niet eens meer mogelijk.

Tekening II is nog een nauwkeurige tekening, waarin je zelfs de kruispunten nog kunt tellen. Dit kind telde overigens niet meer.

Tekening III lijkt erg op tekening I, maar er staan geen getallen bij het plaatje. De juf zag bij het laatste tussenprodukt 36 staan en dat gaf haar aanleiding om ook deze tekening ter discussie te stellen.

Alle drie de tekeningen worden nu samen even bekeken:

O: Wie ziet er wat bijzonders aan de sommetjes op het bord?

K: Bij tekening III is het niet goed.

O: Wat is er niet goed bij tekening III?

K: 36 juf, en er staat ook niets bij de tekening.

O: Nou, laten we eerst tekening III eens goed bekijken. Inderdaad, er staat niets bij de lijntjes. Is dat erg?

K: Nee, je weet toch wat er bij moet.'

Juf is bang dat het plaatje bij dit kind niet functioneert. Daarom zegt ze:

O: Aan de antwoorden die ernaast staan kun je zien of je weet wat er bij de tekening hoort te staan. Wat heb je uitgerekend?

K: Nou, $9 \times 10 = 90$ en nog eens en ...

O: Hoe kom je dan aan 36?

K: Nou 9×4 .'

Nu blijkt dat het kind erboven naar 9×48 heeft gekeken en in plaats van 9×8 nog eens 9×4 (4 van de tien) heeft genomen.

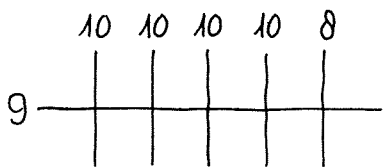
O: Daarom is het goed om bij de tekening de aantallen te zetten, dan had je kunnen zien dat er geen 48 waren.'

Verder gaat juf er niet op in, maar ze is van plan dit kind individueel er nog eens op te attenderen. Tegen de hele groep ging ze verder:

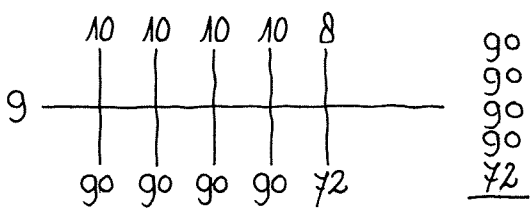
- O: Wie ziet er verschil tussen tekening I en tekening II?*
- K: Bij tekening I kun je de lijntjes niet goed zien.*
- K: Ja, slordig getekend hè?’*

De jongen die de tekening gemaakt had begon zich te verdedigen: ‘Dat geeft toch niks, want het staat er bij hoeveel er zijn. Hoeveel kruispunten er zijn heb ik eronder gezet, want anders kun je het niet goed zien. Ja of je moet het met een kleurenstift doen.’ De onderwijzeres neemt de draad zelf weer op en zegt: ‘Ja eigenlijk heb je gelijk. Je hoeft niet zo precies te tekenen als je erbij schrijft hoeveel er zijn. Trouwens, als dat waar is kun je misschien een nog veel eenvoudiger tekening maken. Wie weet een eenvoudiger tekening?’

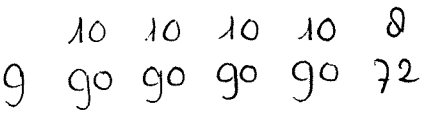
Eén van de jongens tekent op het bord dit plaatje:



Meteen vult hij de tussenprodukten op de kruisingen in en zo ontstaat deze tekening:



De anderen in de klas vinden het goed, maar zeggen: ‘Juf dan kan het nog veel eenvoudiger.’ Een meisje zet het volgende op het bord:



Ze laat de tekening helemaal weg en krijgt eigenlijk de tabelvorm:

x	10	10	10	10	8
9	90	90	90	90	72

N.B.: Van hieruit is een overstap naar de tabelvorm wel te realiseren.

Een ander kind zegt: 'Dan kan ik het nog gemakkelijker.' Ze schrijft op het bord:

$$\begin{array}{r} 90 \\ 90 \\ 90 \\ 90 \\ \hline 72 \end{array}$$

N.B.: Het herhaald optellen is tenslotte ook mogelijk.

Een reactie van een ander kind hierop was: 'Hoe weet je dan wat je op moet schrijven?'

K: *'Nou toch gewoon:*

$$\begin{array}{l} 9 \times 10 = \\ 9 \times 10 = \\ 9 \times 10 = \\ 9 \times 10 = \\ 9 \times 8 = \end{array}$$

O: *'Ja ik heb een heleboel oplossingen gekregen ineens. Toch lijkt het me goed om wel een tekeningetje er bij te zetten. Je hoeft dan niet alle kruispunten meer te tekenen. Als je er maar bijzet hoeveel er zijn, maar je mag het nog wel.'*

Op het bord komen nog een paar 'kale' vermenigvuldigingen te staan:

$$\begin{array}{l} 6 \times 36 \\ 9 \times 45 \\ 8 \times 61 \\ 5 \times 55 \end{array}$$

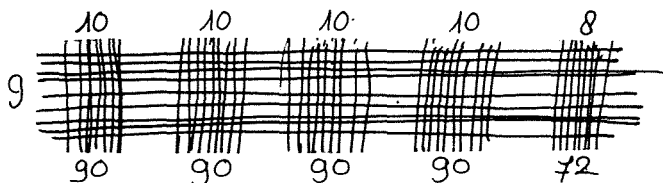
Het merendeel van de klas maakt de nieuwe tekening (bundeling), waarbij de lijnen niet allemaal meer getekend worden. Degenen die dat nog niet doen, zijn overigens heel goed in staat om de bundeling en het plaatje daarvan te verklaren. Toch geven ze de voorkeur aan de vertrouwde manier van werken. Het zal echter niet lang meer duren voordat ook zij naar de meer schematische tekening zullen overstappen.

Het zal duidelijk zijn dat de zojuist beschreven bundelingsles niet altijd op deze manier zal verlopen. Daarom is het goed om van te voren precies te weten waar het in deze les om gaat. De kinderen *moeten* verder op het pad van de schematisering. De eerste fase mag niet te lang duren, omdat sommige kinderen dan de neiging vertonen zich volledig in die werkwijze vast te zetten.

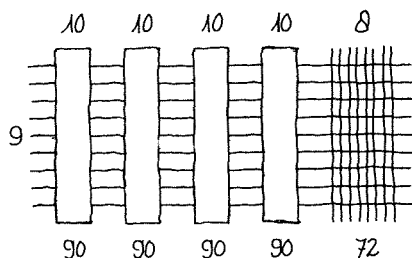
Het volgende niveau van de schematisering moet juist een aansporing voor de kinderen zijn om korter en handiger te werken. In buitengewone omstandigheden (remedial-werk) heb je de mogelijkheden om het schematiseringsproces langzamer te laten verlopen. Vandaar dat de aangegeven tijden bij de verschillende fasen altijd maar van betrekkelijke waarde zijn. Met andere woorden: de eigen onderwijssituatie is mede bepalend voor de voortgang van het proces van schematisering. Toch kunnen de aangegeven tijden goed als algemene leidraad dienen.

2.2 suggesties

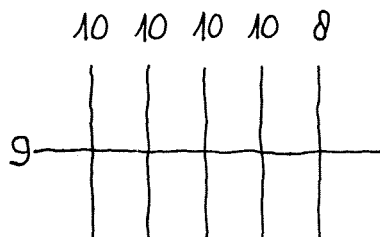
Hoe kan een onderwijsgevende het schematiseringsproces op gang houden als de kinderen zelf niet op suggesties komen zoals in bovenbeschreven les? Vanuit het feit dat kinderen vrij gauw de tafelprodukten gebruiken bij het invullen van de tussenprodukten, en doordat er ieder leerjaar 'slordige tekeningen' gemaakt worden, is de volgende meer opgelegde manier van schematisering mogelijk. Beschouw nog eens tekening I (9×48)



Essentieel in deze tekening is dat er niet meer geteld kan worden. Daarom kan de onderwijsgevende nu ook best met behulp van een vlak gehouden krijtje de bundel van tien zelf suggereren. Dan komt bovenstaande tekening er dus als volgt uit te zien:



De slordige tekening wordt vervangen door een tekening waarin de vorige tekening duidelijk herkenbaar blijft. Dit als tussenstap naar de nog meer schematische voorstelling uit de beschreven bundelingsles I.

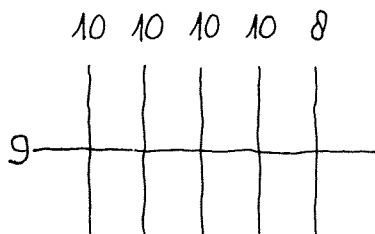
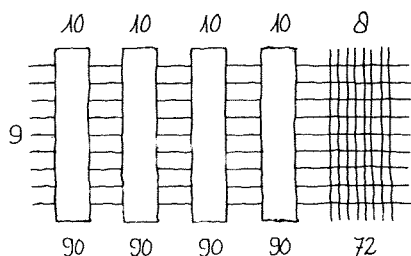


Bij deze tekening speelt het plaatje geen rol, maar het zich realiseren van de dingen 'achter' de tekening blijft mogelijk. Om het proces van schematisering gaande te hou-

den, is het van belang om de kinderen regelmatig in de gelegenheid te stellen zich te realiseren wat er getekend moet worden.

Een voorbeeld: bij het sommetje 9×48 kun je in de periode vlak voor de overgang naar de bundelingsfase aan de kinderen vragen stellen als: Wie weet hoeveel bundels van tien je moet tekenen? Hoeveel losse lijnen teken je horizontaal? Dit soort vragen – gesteld voordat je de tekening laat maken – verhogen het voorstellingsvermogen, wat je later nog nodig hebt bij de verdere schematisering. Deze vragen moet ieder kind dan voor zich (niet hardop!) beantwoorden, voordat de tekening gemaakt wordt om vervolgens na te gaan of de gedachte goed was. Dergelijke ‘mentale’ vragen zijn trouwens bij iedere niveauverhoging in verschillende fasen van belang en we zullen ze in het vervolg dan ook steeds weer aanduiden. Tevens is het belangrijk om in korte nabesprekingen de verschillende niveaus van oplossingen naast elkaar op het bord te zetten en te bespreken.

We beschouwen daartoe de zojuist getekende plaatjes van het sommetje 9×48 nog eens:



Vragen bij deze tekening:

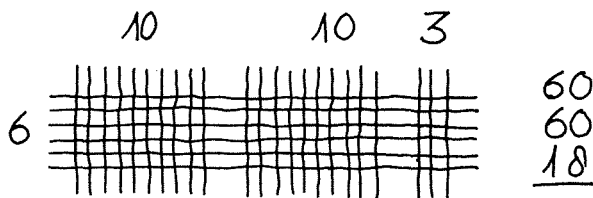
- 1 Wat voor verschil zie je in beide tekeningen?
- 2 Waar kun je nog kruispunten tellen?
- 3 Waar kun je niet meer tellen?
- 4 Moet je eigenlijk wel tellen?
- 5 Hoe kun je ‘weten’ dat er 72 kruispunten zijn in de tweede tekening?
- 6 Wat is ‘gemakkelijker’ te tekenen?
- 7 Als je net zo’n plaatje maakt als bij tekening 2, hoeveel lijntjes moet je van boven naar beneden tekenen bij het sommetje 5×34 ? Doe het dan eens!

2.3 vervolg

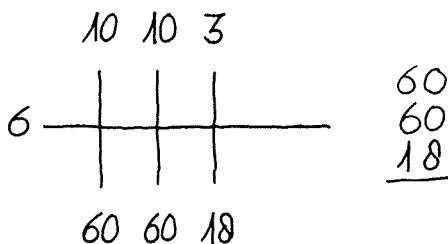
10 10 10 2

60
60
60
12

Kruispunttekening



Bundelingsplaatje



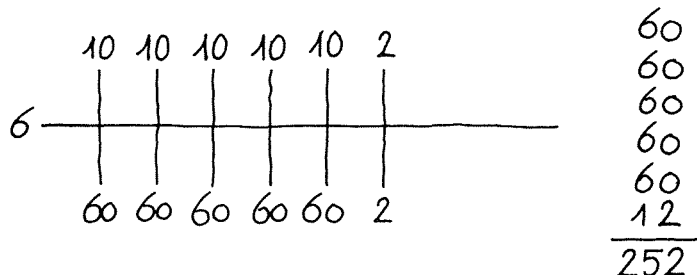
Belangrijk is wel als kinderen het bundelingsplaatje niet meer 'begrijpen', dus zich niet meer realiseren wat ze doen, dat de weg terug naar de kruispunttekening weer vrij gemaakt wordt door aan te geven hoe de bundels uit de kruispunten ontstaan zijn.

3 LIJNENFASE

Na ongeveer acht weken 'bundelen' is vrijwel ieder kind in staat om vlot een vermenigvuldiging te maken met behulp van het betreffende model. De vermenigvuldigingen zijn nog niet gecompliceerd ($a \times b$ waarbij $a < 10$ en $b < 100$). Het wordt nu tijd het proces van schematiseren te vervolgen omdat de bundelingshandeling anders te vast wordt ingeslepen en bovendien willen we zo langzamerhand ook wat grotere vermenigvuldigingen aan de orde stellen. Hoe nu verder?

3.1 les 1

Eén van de kinderen had het sommetje 6×52 als volgt getekend en uitgerekend:



Juf laat de tekening en de berekening op het bord zetten om naar een volgende niveau van verhoging te komen. Met andere woorden, er wordt een verdere stap gezet op de weg van de schematisering. Het plaatje uit de bundelingsfase is goed. Het noteren van de tussenprodukten levert ook geen problemen op. Alleen het antwoord geeft aan wat er mogelijk verkeerd ging. Juf laat de betrokken leerling zelf aan het woord. Bij de berekening geeft hij op de vraag van de onderwijzeres hoe hij het gedaan heeft, het volgende commentaar.

K: Nou gewoon $4 \times 6 + 1 = 25$ tien en nog 2 lossen.

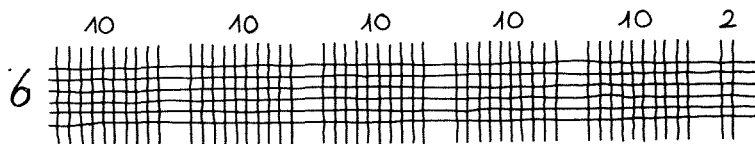
O: Kijk eens goed naar wat je opschreef.

K: Oh nee, er staan vijf zessen. Dan moet 't 31 zijn.

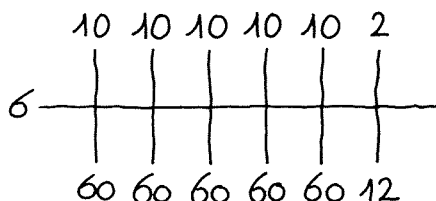
O: Prima, snel opgeteld. Hij heeft erg handig opgeteld. Hij heeft een kort maniertje gevonden om nog sneller te werken.'

In het kort geeft juf de weg van de schematisering nog eens aan. Een terugblik is nuttig om de weg-terug open te houden. Als kinderen problemen hebben in een bepaalde fase, is een herbewustmaking vaak alweer voldoende om de zekerheid terug te geven.

Eerst tekenden we 6×52 zo:

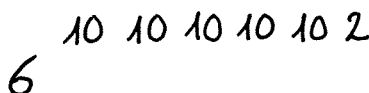


Je ziet wel, dat duurt veel te lang en dan hebben we geluk dat er maar 6×52 getekend moest worden. Stel je voor dat je 9×99 zo moest tekenen. Toen hebben we gezegd 'je hoeft niet alles te tekenen want het staat er toch bij', en daarom heb jij zo getekend.



Het zou fijn zijn als we een nog makkelijker tekening en kortere manier van rekenen hadden. Wie kan er een kortere manier bedenken? Op deze vraag komen suggesties naar voren die een paar weken daarvoor bij de leergang naar de bundelingsfase al aan bod kwamen. Opvallend is wel, dat de suggesties nu veel sneller komen en ook veel vlugger op hun juiste waarde geschat worden.

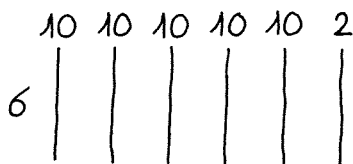
De eerste tekenaar op het bord laat dit zien:



'K: Ja, maar dan heb je helemaal geen lijnen.'

O: Juist. Ik wil wel graag een plaatje blijven zien.'

Toen deze tekening, zonder dwarslijn:



'O: Ja het is wel iets korter, maar ik zie hier ook geen kruispunten meer.'

Juf gaat zelf helpen. Ze wijst op het plaatje uit de contextfase en op het plaatje van de bundelingsfase en zegt: 'Kijk eens naar de 'lossen'.

In het eerste plaatje zie je er twee en in het andere plaatje hebben we ze 'samengenomen'. Je ziet er geen twee meer, maar je weet dat er twee zijn. Zou je nu in het plaatje

hier (bundelingsfase) niet nog wat samen kunnen nemen?' Een leerling komt schuchter naar het bord en tekent dit:

$$\begin{array}{r}
 20 \quad 20 \quad 10 \quad 2 \\
 6 \overline{) \begin{array}{c} 120 \\ 120 \\ 60 \\ 12 \end{array} }
 \end{array}$$

Het invullen van de tussenprodukten en het ernaast noteren van de deelprodukten geeft geen problemen. De onderwijsgevende vergelijkt de beide tekeningen en berekeningen en zegt: 'Ja dit is prima; het is korter en minder schrijfwerk. Wie kan het nog korter?' Zo verschijnt op het bord dit:

$$\begin{array}{r}
 52 \\
 6 \overline{) \text{ [shaded box] }}
 \end{array}$$

'O: Ja, dit is heel kort, maar hoe weet ik dan wat ik erbij moet schrijven?'

Een ander tekent:

$$\begin{array}{r}
 30 \quad 30 \\
 6 \overline{) \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} }
 \end{array}$$

'O: Hoeveel ga je er dan tekenen?'

K: Oh nee, er zijn er al te veel.'

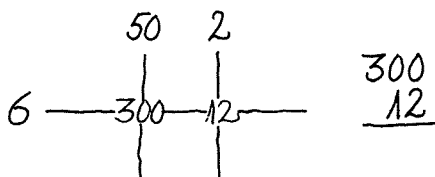
(Een belangrijke ervaring dat de splitsing niet groter dan het getal moet zijn!). Ze herstelt het zo:

$$\begin{array}{r}
 30 \quad 20 \quad 2 \\
 6 \overline{) \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} }
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 180 \\
 120 \\
 \hline
 12
 \end{array}$$

'O: Ja, dat is nog korter dan de vorige tekening.'

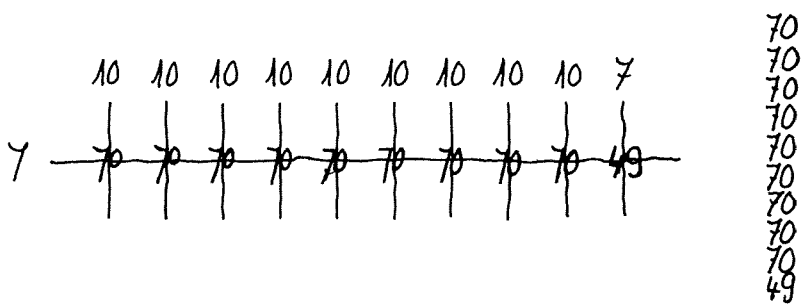
Maar je kunt ook alle tien en samen nemen. Zo kwam uiteindelijk op het bord:



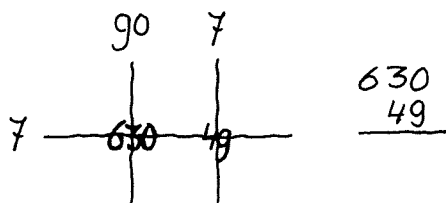
'K: Juf dat is veel moeilijker, want ik weet niet wat 6×50 is.'

(Deze opmerking kan aanleiding geven om nu goed aandacht te schenken aan de tafelpakketten 'met nullen'. Verstandiger lijkt het echter om deze pakketten vooraf al in het oefenprogramma van de tafels op te nemen. Eventueel kan men aanvankelijk ook nog deelsplitsingen toelaten, zoals bijvoorbeeld 50 opgesplitst in 30 en 20, zoals één van de leerlingen dat straks deed. Toch moet nu snel tot het efficiënt gebruiken van de tafels overgegaan worden). De onderwijzeres laat aan het eind van de les het verschil tussen de beide tekeningen en uitwerkingen nog eens zien.

Als je 7×97 moet uitrekenen, dan kan dat zo:



Maar als je de tien en samen neemt, krijg je dit plaatje:



Je moet natuurlijk wel weten hoeveel 7×90 is.

'O: Je mag nu zelf weten hoe je de tekening maakt en het sommetje uitrekent. Reken maar eens uit:

$$9 \times 37$$

$$8 \times 82$$

$$4 \times 71$$

$$7 \times 98$$

(De helft van de kinderen werkt meteen op de nieuwe en kortere manier).

3.2 observeren en analyseren

Vanaf het begin van de leergang is het belangrijk om de leerlingen aan het werk te zien en ook om na de les hun werk te bekijken. Dit om de voortgang van het proces van schematiseren goed in het oog te kunnen houden. Van daaruit worden namelijk steeds beslissingen genomen om bepaalde kwesties in de nabespreking aan de orde te stellen. Ook in individuele gevallen kan dan meteen ingegrepen worden. Tevens kun je op deze manier een bepaald voorbeeld gebruiken om in een gezamenlijke bespreking naar een niveauverhoging toe te werken. Nu het samennemen van de tientallen in de lijnenfase aan de orde is gesteld, ontstaan er grotere verschillen in de werkwijzen van de kinderen. Dat wil zeggen, dat het niveau van werken nog meer kan divergeren dan hiervoor het geval was. Al rondlopend ziet de onderwijsgevende al gauw hoe en op welk niveau er gewerkt wordt. Fouten die gemaakt worden, kunnen aanleiding geven om individueel of per groep in te grijpen. Met een paar voorbeelden willen we dit nu duidelijk maken. Er zijn tal van fouten mogelijk. Daarom is het niet alleen van belang om naar het aantal fouten te kijken, maar vooral ook de aard van de fouten is belangrijk. De aard van de fouten geeft namelijk inzicht in het feit of het gaat om fouten van incidentele aard of om fundamentele fouten.

Wat voor fouten komen in deze fase voor? We kunnen ze onderscheiden in zes typen.

Type a:

Fouten in het berekenen van tafelprodukten ($2 \times 3 = 5$; $8 \times 7 = 54$). Worden er veel fouten van dit type gemaakt, dan moet dit aanleiding zijn om extra aandacht te schenken aan tafeloefeningen.

Type b:

Fouten in het werken met nullen, bijvoorbeeld:

$$7 \times 97 = 112:$$

$$\begin{array}{r} 90 \quad 7 \\ 7 \times \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 63 \\ 49 \\ \hline 112 \end{array}$$

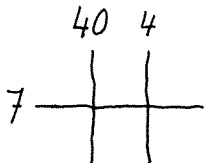
Deze fouten nemen uiteraard toe naarmate vermenigvuldigingen met grotere getallen aan de orde komen, dus als tussenprodukten (bijvoorbeeld 60×90) uitgerekend

moeten worden. Dit kan aanleiding geven om tafels met nullen onder de aandacht te brengen.

Type c:

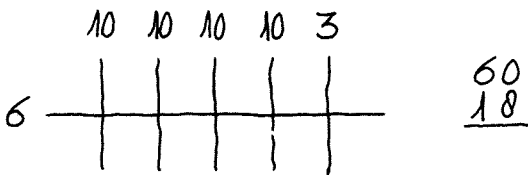
Fouten in de betekenis van de kruispunten of de juistheid van de deelprodukten. Bijvoorbeeld:

$7 \times 48 = 308$



(Verkeerde splitsing)

$6 \times 43 = 78$



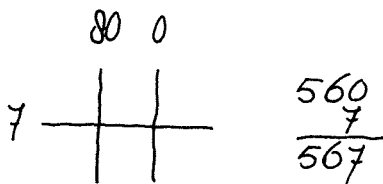
(Niet alle tussenprodukten opgeteld)

Dit kunnen fundamentele fouten in de vermenigvuldig-algoritme zijn. Hier zal met individuele hulp gauw resultaat te verwachten zijn door het ontstaan van de tekening nog eens bewust te maken.

Type d:

Fouten in het vermenigvuldigen met nul, bijvoorbeeld:

$7 \times 80 = 567$



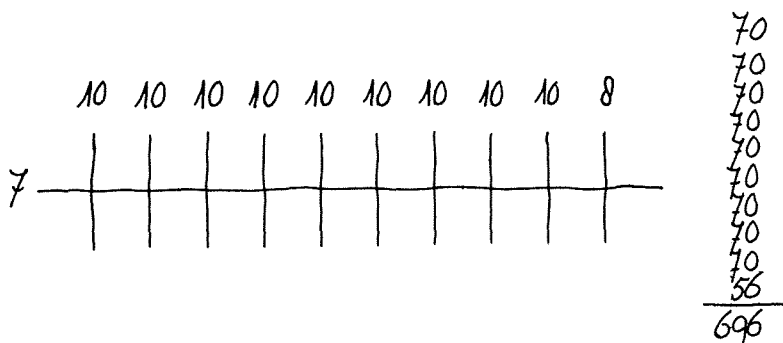
Aan dit geval dient apart aandacht besteed te worden. Men kan de tekening op twee manieren uitwerken, namelijk door wel of geen splitsing met nul toe te laten. Tekent men als hierboven (uit gewoonte!), dan kan men denken 'ik had niets hoeven teke-

nen' en men schrijft nul op. Men kan echter ook daadwerkelijk niets tekenen. Beide manieren zijn legitiem.

Type e:

Fouten in het optellen van de deelprodukten, bijvoorbeeld:

$$7 \times 98 = 696$$



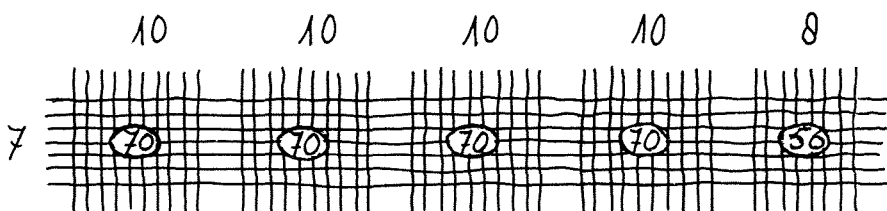
Het oefenen van 'lange optellingen' is voor vermenigvuldigen een noodzaak, zoals we al eerder stelden.

Type f:

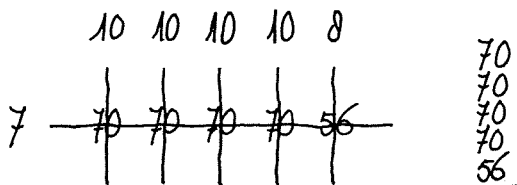
Slordigheidsfouten hebben vaak niet speciaal met rekenen te maken. Het zijn overschrijffouten, fouten ontstaan door verkeerd lezen van de opgave, etc. Zijn ze bij een bepaalde leerling niet incidenteel, maar veel voorkomend, dan dient er speciaal aandacht aan geschonken te worden. Er is echter geen algemeen recept volgens welke ze snel uitgebannen kunnen worden.

Als het tijdstip aangebroken is om naar het samennemen van tientallen over te stappen, dan mag je redelijkerwijs aannemen dat iedere leerling in twintig minuten à een half uur ongeveer vijf sommen kan maken. Mocht het tempo bij het merendeel lager liggen, dan is aan te bevelen meer aandacht te schenken aan de basisvaardigheden (tafels, tafels met nullen, optellingen en aftrekkingen tot twintig en lange optellingen). Het vermenigvuldigen met grotere getallen is in feite het enige wat nog aan de orde gesteld moet worden. Tot nu toe is namelijk uitsluitend gewerkt met verticale bundelingen. Steeds werden er sommetjes gekozen van het type als $a \times b$, waarbij a kleiner dan tien was en b tussen de tien en de honderd gekozen werd. De opgave 7×48 bijvoorbeeld werd in de verschillende fasen als volgt uitgerekend.

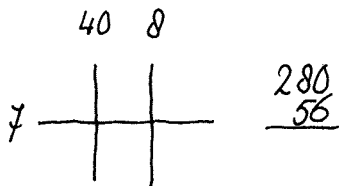
Contextfase:



Bundelingsfase:



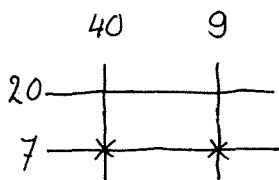
Lijnenfase:



Het samennemen kreeg door de keuze van de sommetjes alleen 'verticaal' aandacht. Het voordeel daarvan is, dat de tekeningen niet gecompliceerd zijn en dat de producten (tafels) direkt herkend worden. Maar grotere vermenigvuldigingen mogen nu niet langer gemeden worden. Daarbij duikt echter wel een specifieke moeilijkheid op, namelijk die van de tweezijdige bundeling.

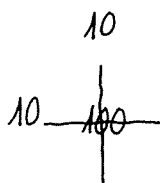
3.3 op weg naar tweezijdige bundeling

Tot nu toe werd uitsluitend ‘verticaal’ gebundeld. Echter bij een vraagstuk als 27×49 zal nu ook ‘horizontaal’ samengenomen moeten worden:

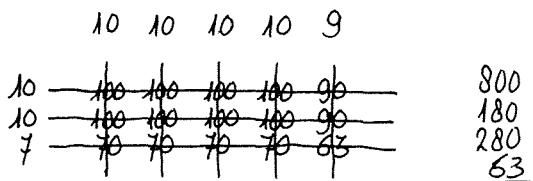


Vandaar dat we spreken van tweezijdig bundelen. De vraag is nu hoe we bij het laatstgenoemde type vraagstukken de kinderen tot een dergelijke tweezijdige bundeling kunnen brengen. Wel, dit kan het beste door de nieuwe opgave 27×49 weer op het eerste niveau aan de orde te stellen, dat wil zeggen in de kruispuntenfase waarin alle lijntjes getekend worden. Vervolgens nemen we ‘verticaal’ bosjes van tien samen om de berekening te vereenvoudigen. Daarmee wordt ook de ‘horizontale’ bundeling als probleem gesteld. Er zijn kinderen die zonder hulp op het idee komen om horizontaal

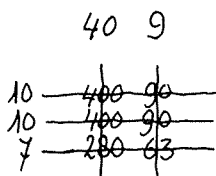
te gaan bundelen en vervolgens vaststellen dat op deze wijze honderd kruispunten ingesloten worden bij iedere 'gebundelde' kruising:



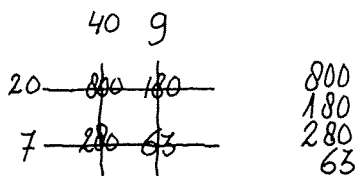
De opgave 27×49 geeft volgens deze werkwijze het volgende plaatje met bijbehorende tekening:



En nu de lijnenfase. Het getal 49 wordt verticaal gesplitst in 40 en 9. De vraag is nu wat we horizontaal kunnen doen. Allereerst kunnen natuurlijk de 10-bundels blijven staan, want dat geeft op zich al een vereenvoudiging ten opzichte van het voorgaande:

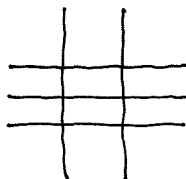


Na wat aandringen komt onder meer de suggestie om nog verder te gaan vereenvoudigen door ook horizontaal de tien te bundelen. We krijgen dan:



Kortom, we komen langs deze weg samen met de kinderen tot de slotsom dat we opgaven van het type 27×49 kunnen uitrekenen door tweezijdig te bundelen. Tenslotte geeft de onderwijsgevende enkele oefensommen van hetzelfde type.

Na enkele lessen krijgt de juf het verzoek van de kinderen om nu eens een 'echt moeilijke' vermenigvuldiging op te geven. Eéntje over de honderd! De onderwijzeres gaat op dit verzoek in en onder gejuich van de klas schrijft ze 112×43 op het bord. Samen bepalen ze eerst het aantal lijnen dat je moet tekenen.

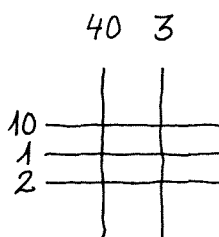


Iedereen tekent het aantal lijnen goed op zijn blaadje.

'O: Wat moeten we er nu bij schrijven?'

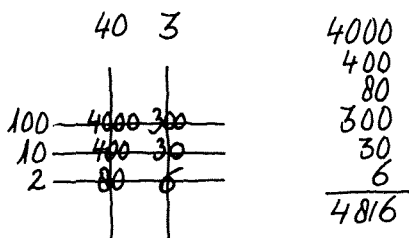
Niet iedereen is direkt in staat om het goed in te vullen.

Een voorbeeld:



Horizontaal geven deze getallen niet 112 aan. Snel wordt de tekening gerepareerd.

'O: Zorg er wel goed voor dat de eenheden, tienten en honderden goed onder elkaar staan.'



Tot slot gaan ze samen nog een paar opgaven maken:

$$\begin{array}{l} 86 \times 75 \\ 23 \times 76 \\ 256 \times 25 \end{array}$$

Een zwakke leerling mag de eerste som achterop het bord maken. Opvallend is, dat vrijwel iedere leerling een goed schema tekent. Eén kind tekende bij het eerste sommetje nog 't volgende:

$$\begin{array}{r} 70 \quad 5 \\ 8 \\ 6 \end{array}$$

Individuele hulp was in dit geval geboden. De onderwijzeres liet nog twee kinderen het sommetje 23×76 tekenen:

$$\begin{array}{r} 20 \quad 3 \\ 70 \\ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 70 \quad 6 \\ 20 \\ 3 \end{array}$$

Samen werd nog even besproken of de verschillen eigenlijk wel wat uitmaken voor de uitkomst. (De onderwijzeres kwam trouwens op het idee om deze kwestie even aan de orde te stellen, omdat één van de kinderen zelf dacht dat het fout getekend had, omdat het ineens een andere tekening op het bord zag staan.)

Nu werd opnieuw ervaren dat 23×76 evenveel is als 76×23 . Bovendien als je het plaatje een kwartslag draait heb je hetzelfde, zo werd uit de klas geopperd.

De opgave 256×25 werd door iedereen goed getekend:

$$\begin{array}{r} 20 \quad 5 \\ 200 \\ 50 \\ 6 \end{array}$$

Speciale problemen met de honderdtallen zijn er eigenlijk niet. Wel is het rekenen met nullen aanvankelijk niet altijd even gemakkelijk.

Van nu af breekt een periode van oefenen aan met allerlei typen opgaven. Nu horizontaal en verticaal samennemen van tientallen en zelfs honderdtallen aan de orde geweest is, wil dit nog niet zeggen dat iedereen even vlot en op dezelfde manier werkt. Vandaar dat er regelmatig twee à drie keer per week gedurende twintig à dertig minuten algoritmelessen gegeven worden. De oefeningen hebben ten doel om een eenmaal verworven oplossingsniveau op peil te houden en geleidelijk aan te verhogen. De niveauverhoging kan plaatsvinden door individueel te helpen, maar ook door met de hele groep sommige dingen kort na te bespreken en erop te wijzen dat bepaalde verkortingen het rekenwerk kunnen vereenvoudigen. De opgave voor de onderwijsgevende bestaat eruit de kinderen voldoende tijd te geven om naar een hoger niveau toe te groeien. Voorwaar geen eenvoudige opgave: forceren is uit den boze, stimuleren en helpen om het handiger te doen daarentegen zeer wenselijk. Tevens hebben de oefeningen ten doel om de vaardigheid op een acceptabel niveau te houden. Het is belangrijker dat de kinderen een vermenigvuldigingopgave kunnen maken, dan dat het aantal vermenigvuldigingen per half uur zo hoog mogelijk opgevoerd wordt. Aan de andere kant is het ook niet acceptabel dat in een half uur, zeg maar één som gemaakt kan worden. Dit betekent dat zowel het niveau waarop gewerkt wordt als ook de beheersing van de basisvaardigheden (tafels, rekenen met nullen, lange optellingen) voortdurend in het oog gehouden moeten worden en zonodig opgevoerd tot een hoger niveau en een betere beheersing. Dit brengt ons bij de kwestie van het evalueren.

3.4 voorbeeld van een toetsles

Uit het hiervoor beschreven gedeelte is al duidelijk gebleken dat evaluatie een belangrijke rol speelt in het onderwijzen van vermenigvuldigen met behulp van het kruispuntenmodel. In het voorgaande is ook beschreven dat de observatie van de werkende kinderen van belang is, evenals het nakijken van de geleverde prestaties. Dit in verband met het bewerkstelligen van niveauverhogingen en het doceren van oefeningen in de basisvaardigheden. Mede door middel van toetslessen willen we een zo zuiver mogelijk beeld zien te krijgen hoe het gesteld is met het technisch element van het cijferend vermenigvuldigen. Daartoe kiezen we kale cijfersommen als toetsstenen. We laten hier bewust contextproblemen, ingeklede opgaven en toepassingen weg, omdat we in de eerste plaats geïnteresseerd zijn in het niveau van schematisering en naar het oplossingsgedrag. Om te kunnen zien hoe het rekenwerk aangepast wordt, zorgen we ervoor dat de kinderen voldoende werktijd krijgen. De manier van uitwerken is immers nu het belangrijkste wat we willen analyseren, omdat het informatie geeft over de voortgang die de kinderen geboekt hebben op de weg van het schematiseren.

Wat wordt er getoetst en op welke manier gebeurt dat? In dit geval willen we aan het begin van klas vier (september) nagaan hoe ver de kinderen zijn op de weg van de progressieve schematisering bij het vermenigvuldigen. Ruim een half jaar daarvoor zijn de kinderen begonnen aan het cijferende vermenigvuldigen met behulp van het kruispuntenmodel. De school werkt in jaarklassen en de onderwijsgevendenden hebben ervaring in het geven van lessen volgens het principe van de progressieve schematisering.

De opgaven van de toets zijn bedoeld voor een les van dertig minuten. Daarna kan nog tien minuten aandacht gevraagd worden voor specifieke problemen die bij de observatie aan het licht zijn gekomen. Bij de keuze van de toetsopgaven wordt ervoor gezorgd dat alle moeilijkheidsgraden voorkomen.

De toets bestaat uit drie onderdelen:

- | | | | |
|---|-------------------|--------------------|------------------|
| A | $6 \times 23 =$ | $15 \times 17 =$ | $38 \times 32 =$ |
| | $24 \times 9 =$ | $14 \times 29 =$ | |
| B | $28 \times 12 =$ | $23 \times 74 =$ | $48 \times 36 =$ |
| | $13 \times 23 =$ | $90 \times 24 =$ | |
| C | $36 \times 94 =$ | $107 \times 84 =$ | |
| | $112 \times 38 =$ | $312 \times 215 =$ | |

De indeling in drie onderdelen is niet alleen gekozen om voldoende tijd te reserveren voor de uitwerkingen, maar ook om ieder kind het gevoel te geven dat het in ieder geval na enige tijd een bepaalde taak afheeft. De hoeveelheid sommen die gemaakt wordt is niet van primair belang.

Bij de *start van de les* wordt in de korte uitleg van de bedoeling op dit laatste punt duidelijk gewezen. Het gaat om de informatie die we willen hebben over de individuele prestatie. We beoordelen het werk niet door er een cijfer voor te geven. Het gaat erom een beeld te krijgen van het leerproces van ieder kind. Vandaar dat het de kinderen duidelijk moet zijn dat het in de eerste plaats gaat om het zo goed mogelijk maken van de opgaven en zeker niet om de snelheid waarmee dat gebeurt. We laten de kinderen in de normale opstelling in de klas zitten om geen nerveuze toets sfeer op te roepen. Bovendien mogen de kinderen best hulp invoeren als er problemen zijn. Alleen mogen ze geen hulp vragen aan medeleerlingen, omdat de onderwijsgevende anders belangrijke informatie over de manier van werken en ieders problemen mist. Als de kinderen klaar zijn met deel A, leveren ze dit in en krijgen dan deel B. Vervolgens gebeurt hetzelfde met B en C. Onderaan ieder blad wordt het tijdstip van het inleveren genoteerd; dit om toch een globaal beeld te krijgen van de snelheid van werken.

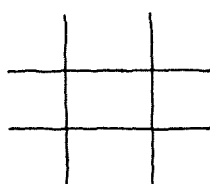
Observatie: als eenieder aan het werk is, observeren we de klas. Het is namelijk van belang om van een toetsles een zo'n duidelijk mogelijk beeld te hebben. Hoe was de motivatie en het enthousiasme waarmee gewerkt werd? Hoe zat het met de concentratie bij het werk? Werd er veel om steun gevraagd door individuele leerlingen? Al dit soort gegevens kunnen ons helpen bij de beslissingen die we nemen over de voortgang van deze deelleergang. Bovendien geeft het laatstgenoemde punt over de steun aan individuele leerlingen meteen voeding aan de beslissing of een korte nabespreking noodzakelijk is en welk probleem er dan mogelijk aan bod moet komen. Een dergelijke gang van zaken is overigens bij een gewone algoritmeles ook gebruikelijk. Na de les kan een korte notitie gemaakt worden over deze bevindingen bij de observatie ten aanzien van concentratie, motivatie en dergelijke.

Uit de observatie bij de onderhavige toetsles bleek, dat de kinderen geconcentreerd werkten. De concentratie verslaptte enigszins aan het eind van de les, toen de eerste

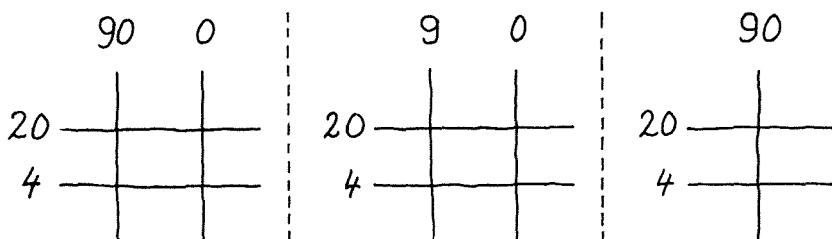
kinderen klaar waren en even een indruk wilden hebben hoever de andere kinderen waren. (Uiteraard was er wel voor gezorgd dat iedereen met ander werk verder kon). Fouten door gebrek aan concentratie zullen dan ook niet veel voorkomen, zo dachten we. In de loop van de les werd door meerdere kinderen hulp gevraagd bij het sommetje 90×24 (zie nabespreking). Ook bleek, dat er kinderen waren die het aankruisen in de tekening gedachtenloos deden. Beide punten werden in een korte nabespreking van ongeveer tien minuten aan de orde gesteld. Na zes minuten is de eerste leerling klaar met het A-gedeelte. Na een kwartier zijn nog vier kinderen bezig aan deel A. De laatste is klaar na 24 minuten. Zes kinderen hebben het B-gedeelte niet af gekregen. Elf van de dertig kinderen hebben aan het eind van het half uur ook het C-gedeelte af, terwijl tweederde van de hele groep het C-gedeelte voor de helft of meer af heeft.

In de korte *nabespreking* hebben we op grond van de observatie tijdens het werk twee dingen centraal gesteld. Ten eerste de opgave 90×24 , welke enkele kinderen grote problemen gaf. En ten tweede het aankruisen van deelprodukten in de tekening, ter controle van de tussenprodukten die uitgerekend zijn. Bovendien is aandacht besteed aan het uitspreken van grote getallen, omdat bij de nabespreking bleek dat daar ook problemen lagen.

Drie kinderen geven hun oplossing van 90×24 op het bord weer:



Veel kinderen tekenen direkt vier lijntjes. Ze zijn gewend om steeds opgaven van de soort 37×48 te maken. Dus als ze twee cijfers maal twee cijfers zien geeft dat het signaal om een lijntekening als hieronder te maken.



Deze drie gevallen kwamen ter sprake. De eerste tekening is op zich wel juist, maar de vraag is hier vooral wat er dan bij de kruisingen (deelprodukten) van de nullijn komt te staan. Bij het tweede schema zag het kind zelf in dat de tekening niet goed kon zijn, want je rekent nu eigenlijk 9×24 uit. Het derde schema is uiteraard ook

juist. De vraag die nu ter discussie staat is of de eerste tekening of de derde het best bruikbaar is. Het kind dat de eerste tekening gemaakt heeft, had bij de tussenprodukten 0×20 en 0×4 respectievelijk de antwoorden 20 en 4 ingevuld. Al gauw werd duidelijk dat dat niet kon. Dus dan komt er in feite niks te staan. Nou, dan hoef je het ook niet zo te tekenen – kan het commentaar zijn. Ook vanuit 9×24 is duidelijk dat in het plaatje de nul weggelaten kan worden.

	90	3
20		
4		

Wil je de lijn toch tekenen, dan moet je echter wel op de uitkomst letten! Om genoemde fouten te voorkomen is het gewenst veel variatie in de keuzen van de opgaven te maken.

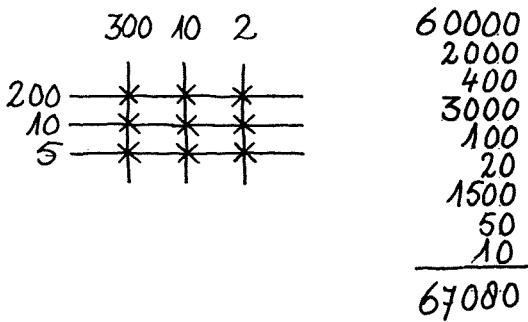
Voor de bespreking van het tweede punt over het aankruisen maken we gezamenlijk nog eens de laatste som van het C-blad. Dit omdat de meeste kinderen die nog niet gemaakt hebben. Bovendien is het een opgave waarbij het aankruisen zeker zinvol is. Daarbij kunnen de kinderen die deze som wel reeds gemaakt hebben zien of ze het goed gedaan hadden. Dus 312×215 :

	300	10	2
200	*		
10			*
5			

60000
⋮
⋮

De bedoeling van het aankruisen van de deelprodukten (kruisingen) in de tekening is om er zeker van te zijn dat je ze allemaal gehad hebt. De antwoorden worden naast het plaatje genoteerd. Als nu de kinderen de zin van het aankruisen niet ervaren hebben, kan het volgende gebeuren: of ze kruisen niet aan en kunnen op die manier deelprodukten vergeten, of ze kruisen van te voren alle kruispunten aan, omdat het moet, wat dan dezelfde gevolgen heeft. Behalve het feit dat deelprodukten vergeten worden, kan het aankruisen steun bieden bij het nauwgezet aflezen van het sommetje dat bij het betreffende deelprodukt hoort. Met het plaatje van de opgave 312×215 is dat gemakkelijk te oefenen. Je wijst willekeurig een kruispunt aan en vraagt het sommetje erbij en je wijst de kinderen erop, dat een kruisje zetten betekent het antwoord ernaast zetten.

Uiteindelijk stond het volledige plaatje met de kruisprodukten in de volgorde die afgesproken was op het bord:



Bij het uitspreken van dit grote getal bleek, dat de meeste kinderen grote moeite hadden met de juiste aanduiding. De antwoorden die gegeven werden:

- zevenenzestigduizend-honderd-tachtig;
- zesmiljoen-zevenduizend-tachtig;
- zesduizend-zeventienhonderd-tachtig;
- zevenenzestig-honderd-tachtig;
- zesduizend-zevenhonderd-tachtig;
- zesmiljoen-zevenhonderd-tachtig;
- zevenenzestig-duizend-tachtig.

Het nog eens bewust maken van de plaatswaarde van de getallen met behulp van de abacus gaf ineens weer de mogelijkheid grote getallen te lezen en te schrijven.

3.5 analyse van leerlingenwerk

Naam	Aantal fouten				A						B			C			Aantal fouten per opgave	
	A	B	C	tot.	a	b	c	d	e	f								
Irma	1	1	0	2					1			1					A	Totaal
Arjan	0	0	1	1										1			6 × 23	4
Joris	0	1	0	1								1					24 × 9	5
Selma	0	0	0	0													15 × 17	5
Hugo	0	0	1	1										1			14 × 29	10
Tamara	4	1	3	8	2	2					1			3			38 × 32	9
Bianca	0	3	1	4							1	1	1		1			
Paulien	0	0	0*	0														
Savannah	1	0	0*	1				1									B	
Pascalie	0	0	0*	0													28 × 12	7
Astrid	0	1	1*	2							1			1			13 × 23	4
Sylvia	1	1	0*	2				1			1						23 × 74	3
Stefan	1	3	1	5	1						1	1	1	1			90 × 24	8
André	0	1	0*	1							1						48 × 36	8
Sjoerd	1	0	1	2				1						1				

Hannie	1	1	0	2		1	1					C		
Barbara	0	0	0*	0										
Linda	0	1	2	3				1		1	1		36×94	2
Yvonne	1	2	0*	3	1		1	1					112×38	4
Martin	1	1	0*	2		1	1						107×84	5
Tracy	0	0	0*	0									312×215	6
Simone	5	3*	-	8		5		3						
Marjolein	0	0	1*	1						1				
Ilse	1	0*	-	1			1							
Ellen	1	2	1*	4		1		1	1		1			
Leen	3	5	3*	11		3		5			3			
Jan	2	0*	-	2			1	1						
Elles	5	2*	-	7	1	1	1	2						
Stefan	1	0*	-	1		1			2					
Sandra	4	1*	-	5	2	1	1							

* niet af

- niet gemaakt

De analyse van het werk verschaft ons erg veel informatie die van belang is voor het vervolg van het onderwijs. Beschouwen we het aantal fouten in de hele groep, dan zien we dat in de drie gedeelten gemiddeld één fout is gemaakt. Daarbij dienen we rekening te houden met het feit, dat deel C door elf kinderen voor minder dan de helft af was. Deel B was door vrijwel iedereen gemaakt, slechts in één geval werd van deel B maar één opgave gemaakt. Het is in dit geval dus moeilijk om consequenties te verbinden aan het gemiddelde aantal fouten. Kijken we naar het aantal fouten per kind, dan zien we dat de opklimming in moeilijkheid, die in de peiling was aangebracht, niet tot uitdrukking komt in een toenemend aantal fouten. Zo zien we dat Bianca in deel A nul, in deel B drie en in deel C één fout maakt. Hannie maakt in het moeilijker C-deel geen fout en in deel A en B ieder één fout, net als Irma. Twee dingen zijn echter opmerkelijk. Ten eerste dat er grote verschillen zijn in tempo. Dit hoeft echter niet te betekenen dat de algoritme niet beheerst wordt. Ilse heeft in een half uur acht sommen gemaakt, waarvan één fout, evenals Stefan van L. Ten tweede valt op, dat een groepje kinderen om verschillende redenen wat extra hulp nodig heeft, omdat het aantal fouten erg hoog is.

Vanuit de hierboven beschreven gegevens over aantallen fouten kan men geen goed beeld krijgen van ieders prestaties. We zullen ook de aard van de gemaakte fouten moeten beschouwen. Uit het bestuderen en analyseren van het leerlingewerk zijn we tot zes typen fouten gekomen.

Type a: fouten in het berekenen van tafelprodukten.

Type b: fouten in het vermenigvuldigen met tientallen en honderdtallen, dus in het zogenaamde ‘aanplakken van nullen’.

Type c: fouten in het vermenigvuldigen met nul.

Type d: fouten in het kruispuntenschema of in het juiste aantal deelprodukten.

Type e: fouten in het optellen van de deelprodukten.

Type f: slordigheidsfouten zoals: verkeerd overschrijven of slecht lezen.

Deze zes typen fouten kunnen we in drie categorieën onderbrengen.

Categorie 1:

Hiertoe rekenen we de fouten van het type a, b, c en soms e. Deze fouten hebben te maken met het niet adequaat functioneren van de basisvaardigheden.

Categorie 2:

Hiertoe rekenen we de fouten van het type d en gedeeltelijk type e. Het zijn fouten, die te maken hebben met de algoritme van de bewerkingen vermenigvuldigen (type d) en optellen (type e).

Categorie 3:

Slordigheidsfouten.

Het zal duidelijk zijn dat niet altijd direct vastgesteld kan worden tot welke categorie een gemaakte fout behoort. Een gesprek met het kind dat de fout maakte, zal vaak opheldering kunnen verschaffen.

Als we de categorieën aan een nadere, algemene beschouwing onderwerpen zullen we de slordigheidsfouten buiten beschouwing laten. Deze fouten zijn voor het specifieke algoritmiseren niet van essentieel belang. Ze hebben in sommige gevallen een meer algemene oorzaak, maar zijn ook vaak van incidentele aard.

Fouten uit de eerste categorie zijn vaak ernstiger. Als er echter in één of enkele lessen aandacht aan wordt besteed, kan in vele gevallen het probleem grotendeels de wereld uit zijn. Dit geldt met name voor het vermenigvuldigen met nul.

Fouten van de tweede categorie zijn essentiële fouten, zoals die van het type d en e, waarbij vermeld dient te worden dat alle fouten van het type e hier voor het gemak meegerekend zijn. (Er is dus geen onderscheid gemaakt in principiële fouten ten aanzien van de optelalgoritme, zoals verkeerd inwisselen, en fouten in het automatiseren van de opteltafels).

Lichten we deze fouten uit de resultatentabel, dan zien we:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>type d</i> :	12	9	10
<i>type e</i> :	11	7	0

Opvallend bij deze fouten is, dat ze in hoofdzaak, wat betreft type d, door vijf kinderen gemaakt worden. De overige fouten van dit type zijn incidenteel. Bij type b is nergens sprake van consequent voorkomende fouten: het aantal fouten is verspreid over een grotere groep leerlingen. Deze groep van vijf zullen we kortere of langere tijd extra hulp moeten geven.

Laten we eerst eens wat uitgebreider ingaan op gemaakte fouten. Enige voorbeelden van het type a:

$$\begin{aligned}8 \times 30 &= 210 \\2 \times 30 &= 50 \\5 \times 7 &= 49 \\2 \times 8 &= 8 \\8 \times 2 &= 26\end{aligned}$$

De laatste drie kunnen ook tot categorie 3 behoren, omdat ze wellicht oorzaak zijn van verkeerd aflezen of van een verschrijving.

Fouten van het type b:

$$\begin{aligned} 8 \times 30 &= 24 \\ 10 \times 7 &= 700 \\ 20 \times 90 &= 180 \\ 300 \times 10 &= 300 \\ 4 \times 7 &= 280 \end{aligned}$$

Fouten van het type c:

$$\begin{aligned} 0 \times 7 &= 7 \\ 20 \times 0 &= 200 \end{aligned}$$

Fouten van het type d die we signaleerden zijn:

1) 90×24

Dit kind wist geen raad met deze opgave. De tweestrijd is terug te vinden in de uitwerking.

2) 107×84

Dit voorbeeld vertoont meerdere fouten:

- 107 is verkeerd gesplitst, misschien verkeerd gelezen, want het kwam incidenteel voor bij dit kind;
- hoewel alle tussenprodukten aangekruist zijn, is één antwoord niet genoteerd;
- bovendien zijn de genoteerde deelprodukten verkeerd opgeteld.

(Overigens een goed voorbeeld om aan te tonen hoe moeilijk het is om de fouten te categoriseren).

Deze twee voorbeelden geven een beeld van de fouten die incidenteel voorkwamen.

Voorbeeld 1: 14×29

Handwritten multiplication:

$$\begin{array}{r} 209 \\ \times 4 \\ \hline 80 \\ 80 \\ 36 \\ \hline 376 \end{array}$$

Voorbeeld 2: 15×17

$$\begin{array}{r}
 100 \\
 70 \\
 50 \\
 35 \\
 \hline
 455
 \end{array}$$

Voorbeeld 3: 38×32

$$\begin{array}{r} 5 \quad 30 \quad 2 \quad 900 \\ 30 \quad 240 \\ 0 \quad 16 \\ \hline 3016 \end{array}$$

123

Bij de optelling zijn de tientallen nog eens bij de negen honderdtallen geteld. Bovendien zijn de twee honderdtallen van 240 gezien als twee duizendtallen.

Voorbeeld 4: 28×12

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 20 & 8 \\
 \hline
 10 & \\
 \hline
 2 & \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 200 \\
 160 \\
 200 \\
 16 \\
 \hline
 376
 \end{array}
 \end{array}$$

Nog een geval van slordig noteren en daardoor verkeerd aflezen. De vier tientallen van 40 en het ene tiental van 16 zijn aan elkaar geschreven en gelezen als 9.

Voorbeeld 5: 14×29

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 10 & 4 \\
 \hline
 20 & \\
 \hline
 9 & \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 200 \\
 36 \\
 180 \\
 36 \\
 \hline
 296
 \end{array}
 \end{array}$$

In dit voorbeeld is behalve een optelfout ook een 'nullenfout' te constateren. De tientallen zijn niet goed opgeteld.

Voorbeeld 6: 48×36

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 30 & 6 \\
 \hline
 40 & \\
 \hline
 8 & \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 1200 \\
 240 \\
 240 \\
 48 \\
 \hline
 2728
 \end{array}
 \end{array}$$

Bij de duizendtallen is analoog aan het voorgaande ook één bijgeteld.

Deze optelfouten komen incidenteel voor en geven weinig reden tot ongerustheid. Op één aspect moet zowel bij het optellen als het vermenigvuldigen gewezen worden. We moeten kinderen namelijk leren om niet alleen maar cijferend te rekenen. Daarom is het goed om ook tijdens algoritmelessen vaak eerst het antwoord te laten schatten.

Bijvoorbeeld 38×32 kan grof geschat worden tussen (30×30) 900 en (40×40) 1600. En 14×29 ligt tussen 290 (10×29) en 580 (20×29) en dan dichterbij 290.

Als wij kinderen leren op verschillende manieren tegen een berekening aan te kijken en niet steeds dit soort opgaven cijferend te maken, dienen we meerdere doelen tegelijkertijd. Het schatten is later vooral ook van groot belang bij het delen.

Tot slot nog enkele voorbeelden van slordigheidsfouten bij type f. Ilse heeft bij de berekening van 8×2 '61' genoteerd. Jan heeft een keer een verkeerd antwoord overgeschreven van zijn werkblaadje.

Dit zijn de enige slordigheidsfouten die ook in de resultatentabel geregistreerd zijn. Eén fout, die wij bij het type d ondergebracht hebben is de volgende.

$$\begin{array}{r}
 300 \times 10 \times 5 \\
 300 \times 10 \times 5 \\
 10 \times 10 \times 5 \\
 2 \times 10 \times 5 \\
 \hline
 65000
 \end{array}$$

Eén tussenprodukt is niet genoteerd, maar ook niet aangekruist. Hieruit blijkt dat dit kind bewust aankruist wat ze ernaast uitrekent.

Onze algemene conclusie luidt, dat regelmatig toetslessen afnemen noodzakelijk is om een nauwkeurig beeld van de prestaties van ieder kind te krijgen. De observatie tijdens de gewone lessen geeft al wel een globaal beeld van vaardigheid en oplossingsniveau, maar toetslessen en de bijbehorende analyse van het werk geven in bepaalde opzichten een duidelijker neerslag van beheersing van het cijferen en bijgevolg ook meer aangrijpingspunten voor gerichte steun – in ieder geval krijgen we een aanvulling op de observatiegegevens die we tijdens het onderwijzen verzameld hebben.

Analyse van de toets leerde ons dat weinig kinderen fundamentele problemen hebben. Ook is echter duidelijk bij enkele leerlingen te constateren dat regelmatig geïfend moet worden met allerlei opgaven van verschillende moeilijkheidsgraad.

Vervolgens valt op dat er nogal veel aandacht besteed is aan het trucmatig uitrekenen met nullen. Het verwoorden van wat er uitgerekend moet worden is daardoor wat te zeer naar de achtergrond verdwenen. Bij zwakke leerlingen kan dat trucmatig rekenen zeer storend werken. Het blijft raadzaam om in deze periode regelmatig aandacht te besteden aan de basisvaardigheden (tafels en lange optellingen). Hierdoor kan het werktempo hoger worden.

Uit het werk van de leerlingen is duidelijk op te maken dat in deze groep vrijwel ieder kind op hetzelfde niveau van oplossen werkt. Het is begrijpelijk dat de onderwijzer, teneinde een goed overzicht te houden, ervoor waakt, dat er te grote verschillen ontstaan. Door een wat gestuurde aanpak kan hij zorgen voor een niet al te grote spreiding. Bij deze toetsles blijkt echter ook duidelijk dat het op precies één niveau werken nadelige kanten heeft. Zo zien we dat sommige kinderen kennelijk te snel de verschillende fasen moeten doorlopen, terwijl er ook kinderen zijn die te kennen geven op een hoger niveau te willen en kunnen werken. De kinderen die te snel door de verschillende fasen gegaan zijn, hebben niet de gelegenheid gekregen om hun verkregen inzicht in de voorgaande fase vast te leggen. Ze moesten te vlug algoritmisch gaan werken en daardoor is inzichtelijkheid in de cijferhandeling geblokkeerd geraakt. Het leertraject zou in dit geval weer geheel of gedeeltelijk afgelegd moeten worden. Het laten verwoorden van de handelingsprincipes tenslotte is noodzakelijk om die

weg terug in het leerproces open te houden. Bij de beschrijving van de kinderen die extra help nodig hadden bleek dit zonneklaar. Aldus verschaften de resultaten ons niet alleen informatie over het leerproces, maar vooral ook over het onderwijsproces. Dus niet alleen de kinderen, maar ook de onderwijsgevende zelf komt hiermee in beeld. Een dergelijke spiegeling is echter een uitstekend middel om op de voortgang van het onderwijs te reflecteren.

4 EINDFASE

In de loop van het vierde leerjaar wordt toegewerkt naar de eindfase. Deze eindfase hoeft niet voor iedereen dezelfde te zijn. Aan de hand van een voorbeeld zullen we laten zien welke eindniveaus er redelijkerwijs te verwachten zijn. Mocht 47×273 uitgerekend moeten worden, dan zijn er drie vormen die vanuit het kruispuntenmodel als eindfase tevoorschijn komen. (Overigens dient opgemerkt te worden, dat er gestreefd wordt iedere leerling op zich het hoogst mogelijke eindniveau te laten bereiken).

Zeer zwakke leerlingen lossen 47×273 als volgt op (dit gebeurt echter slechts bij hoge uitzondering):

$$\begin{array}{r}
 200 \quad 70 \quad 3 \\
 \begin{array}{c}
 | \quad | \quad | \\
 40 - * - * - * - \\
 | \quad | \quad | \\
 7 \quad - * - * - * - \\
 | \quad | \quad |
 \end{array}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 8000 \\
 2800 \\
 120 \\
 1400 \\
 490 \\
 \hline
 21 \\
 \hline
 12831
 \end{array}$$

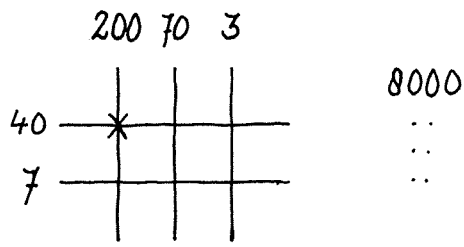
Vrijwel iedere leerling kan minstens het volgende niveau bereiken:

$$\begin{array}{r}
 273 \\
 \underline{47} \times \\
 21 \\
 490 \\
 1400 \\
 120 \\
 2800 \\
 \underline{8000} \\
 12831
 \end{array}$$

De meeste kinderen kunnen echter, zoals bekend, de traditionele algoritme leren:

$$\begin{array}{r}
 273 \\
 \underline{47} \times \\
 1911 \\
 10920 \\
 \hline
 12831
 \end{array}$$

Het zal ieder duidelijk zijn dat de eerst aangegeven eindvorm overeenkomt met de lijnenfase. Het schema blijft zichtbaar en met behulp daarvan worden alle tussenprodukten genoteerd.



Opgemerkt dient te worden dat het enige verschil met het schema van de lijnenfase eruit bestaat, dat nu de tussenprodukten niet meer in het plaatje geschreven worden. De kinderen hebben geleerd met een kruisje aan te geven welk tussenprodukt uitgerekend is en het gevonden antwoord naast het plaatje te zetten.

Bij de eerst aangegeven eindvorm is het plaatje uit de lijnenfase verdwenen. Het plaatje is wel gebruikt bij de overgang naar deze fase. Zonder het plaatje te tekenen wordt aan de kinderen gevraagd: Hoeveel tussenprodukten komen er naast het plaatje? Vanuit het antwoord ‘zes’, wordt gevraagd, om welke sommen het dan gaat. Oplossing: 40×3 ; 40×70 ; 40×200 ; 7×200 ; 7×70 ; 7×3 .

Het opnoemen van de sommetjes bij de tussenprodukten geeft soms wat problemen. Daarom wordt de schrijfwijze van de opgave nu zó ingevoerd:

$$\begin{array}{r} 273 \\ 47 \times \\ \hline 7 \times 3 = 21 \\ 7 \times 70 = 490 \\ 7 \times 200 = 1400 \\ 40 \times 3 = 120 \\ 40 \times 70 = 2800 \\ 40 \times 200 = \underline{8000} \end{array}$$

Bij het voorspellen van het aantal tussenprodukten aan de hand van het plaatje uit de lijnenfase dient, zoals gesteld, speciaal aandacht besteed te worden aan het volgende type sommen: 60×478 ; 68×407 ; 53×870 .

Verreweg de meeste kinderen kunnen leren vermenigvuldigen volgens de traditionele algoritme:

$$\begin{array}{r} 273 \\ 47 \times \\ \hline 1911 \\ 10920 \\ \hline 12831 \end{array}$$

Om de overstap naar dit niveau aan te geven, keren we even terug naar de lijnenfase.

$$\begin{array}{r}
 200 \ 70 \ 3 \\
 \hline
 40 \times 8000 \ 2800 \ 120 \rightarrow 10920 \\
 7 \times 1400 \ 490 \ 21 \rightarrow 1911
 \end{array}$$

In de 'horizontale' opstelling van de tussenprodukten verschijnen de twee getallen die ook in de traditionele algoritme opduiken. Op deze manier kunnen we laten zien dat we een nog kortere manier van werken kunnen volgen. Je telt de tussenprodukten van zeven alvast bij elkaar en dan die van veertig of omgekeerd. Daarna hoeft je alleen die twee uitkomsten nog samen te nemen.

'7 ×' levert de volgende drie tussenprodukten op:

$$\begin{array}{r}
 273 \\
 47 \times \\
 21 \\
 490 \\
 1400
 \end{array}$$

Als je nu tegelijk met het vermenigvuldigen de tussenprodukten optelt, kan dat zo:

$$\begin{array}{r}
 273 \\
 7 \times \\
 1911
 \end{array}$$

Verhaal erbij: $7 \times 3 = 21$. De twee tien van 21 doen we bij de andere tien, alleen de één noteren we. 7×7 tien is 49 tien en 2 tien is 51 tien (510). Hierbij zijn 5 honderden die we meteen bij de andere honderden doen, dus we noteren één tien. 7×2 honderden is 14 honderden plus 5 honderden is 19 honderden.

Het verhaal bij de vermenigvuldigings- en optellingshandeling lijkt veel op het bekende verhaal:

$$\begin{array}{r}
 273 \quad 7 \times 3 = 21 \quad 1 \text{ opschrijven, } 2 \text{ onthouden.} \\
 7 \times 7 = 49 (+2 = 51) \quad 1 \text{ opschrijven, } 5 \text{ onthouden.} \\
 1911 \times \quad 7 \times 2 = 14 (+5 = 19)
 \end{array}$$

Toch is er verschil. Vanuit de opbouw zijn de kinderen zich bewust van de waarde van het getal door de plaats die het inneemt. Er is geen sprake van 7×7 , maar van 7×70 of 7×7 tien. Dit verschil wordt nog meer merkbaar als nu nog de deelprodukten van $40 \times$ bij elkaar genomen worden. Er wordt dan gebruik gemaakt van de wetenschap dat $40 \times$ een getal hetzelfde is als $4 \times 10 \times$ dat getal. Het verklaren van de nul en dan vermenigvuldigen is dan ook geen probleem meer. Als de deelprodukten van $40 \times$ apart genoteerd worden, dan is duidelijk dat er geen eenheden zijn.

$$\begin{array}{r} 273 \\ \underline{40} \times \\ 120 \\ 2800 \\ \underline{8000} \end{array}$$

Als we nu meteen gaan optellen bij de vermenigvuldiging met 40, kan het volgende verhaal erbij verteld worden.

$$\begin{array}{r} 273 \\ \underline{40} \times \\ 10920 \end{array}$$

$40 \times 3 = 3 \times 4$ tien = 12 tien, dat is 2 tien en 1 honderd. De tien noteer ik, de honderd tel ik bij de honderden.

$40 \times 70 = 28$ honderden plus 1 honderd is 29 honderden, 9 honderden noteer ik en dan doe ik 2 duizenden bij de duizenden.

40 is 200 is 8 duizenden plus 2 duizenden is 10 duizenden.

Deze manier van werken zal in een aantal korte lessen van circa een half uur aan de orde moeten komen. Al gauw zal het verhaal eraan verdwijnen om plaats te maken voor de algoritme. Het merendeel van de kinderen is goed in staat om op den duur op het hoogste niveau te vermenigvuldigen. De weg ernaar toe is een lange weg geweest. Toch is het de moeite waard deze weg af te lopen. Aan het eind ervan ben je als onderwijsgevende heel eenvoudig in staat om fouten, die kinderen gaan maken, doeltreffend te bestrijden. We hebben maar een gedeelte van de weg af te leggen om een fout in het algoritmisch werken bewust te maken en dus te herstellen. Dat is een grote winst en daarnaast hoeft niet iedereen op het hoogste niveau te cijferen. Uit toetslessen is gebleken, dat de vaardigheid, ook als op het niveau van de lijnenfase gewerkt wordt, redelijk goed is en de snelheid van werken acceptabel. De leergang naar de eindfase toe moet vanaf het begin bepaald worden door het voortdurend samen zoeken naar een kortere en handiger werkwijze. Ook de laatste stap wordt gemotiveerd door te laten zien dat je met wat handigheid alvast wat optelt zonder alle tussenproducten nog te noteren. Toch blijft *goed* werken in principe belangrijker dan het oplossen op de snelste manier. Het blijven kijken naar de *oorzaak* van de fouten is voor remediërende hulp noodzakelijk. Kort en intensief oefenen van zowel de basisvaardigheden als de algoritme in een bepaald jaar, kan heel wat fouten, veroorzaakt door concentratiegebrek, voorkomen.

Let wel: onze stellingname berust op een keuze van de einddoelstellingen van de cijferprocedures. Het gaat niet om zo snel mogelijk werken met de meest verkorte procedures – wat ons betreft. Men kan echter over dit punt anders oordelen, dat is duidelijk.

Om meerdere redenen is het echter aan te bevelen om de basisvaardigheden te blijven oefenen.

5 OVERZICHT

In dit overzicht zullen we de belangrijkste punten op een rijtje zetten en tevens een korte karakteristiek van de verschillende fasen geven.

5.1 voorwaarden

Voorafgaande aan het aanleren van de algoritme voor vermenigvuldigen, hebben de kinderen kennis genomen van de bewerking vermenigvuldigen in allerlei toepassingssituaties, teneinde het aspect van de bewerking te onderbouwen. Allerlei contexten en oefenvarianties zijn daartoe gebruikt. De stroom van oefenvarianties zet zich met en naast het cijferende werken in midden- en bovenbouw van de basisschool voort. Bovendien worden op gezette tijden contextproblemen aangeboden, opdat de toepassingen niet los van het algoritmisch werken komen te staan. Voordat kinderen cijferend leren vermenigvuldigen dienen de tafels van vermenigvuldiging (tafels van 1 t/m 10) aangeboden en in bepaalde mate ingeoefend te zijn.

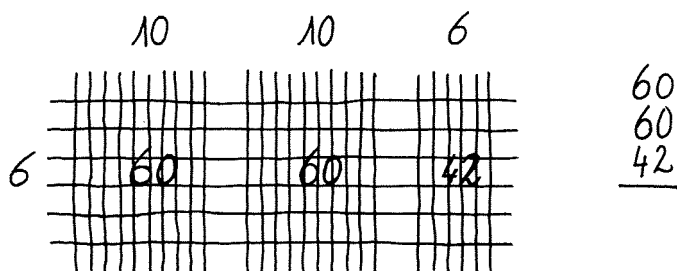
Verder dienen kinderen geen grote problemen meer te hebben met de algoritmen van het optellen en het aftrekken.

De vaardigheid, die nodig is voor vermenigvuldigen en delen, wordt verhoogd door in de middenbouw dagelijks tien minuten speciale oefenlesjes te geven.

5.2 contextfase

Kenmerk

Deze fase wordt gekenmerkt door de belangrijke bijdrage van de context welke de opbouw van de kruispunttekening en daarmee de start van de vermenigvuldigingsalgoritme ondersteunt. Het verhaal dient op een natuurlijke manier in een kruispunttekening vertaald te kunnen worden. Stadsplan en eekhoornverhaal voldoen beiden aan die voorwaarden, waarbij echter opgemerkt dient te worden dat het stadsplan uiteraard natuurlijker tot de kruispunttekening leidt. Het eekhoornverhaal is gemakkelijker over een wat langere periode te gebruiken. In deze fase wordt bij een verhaal een kruispunttekening gemaakt en omgekeerd bij een kruispunttekening een verhaal bedacht of gedacht.



Tijd

Om verwarring te voorkomen, willen we erop wijzen dat tijdsaanduidingen altijd bedoeld zijn als *richttijden*. De onderwijsgevende beslist in zijn eigen situatie steeds:

- 1 of aan de voorwaarden om een nieuw fase in te gaan voldaan is;
- 2 of er meer tijd aan het oefenen van de basisvaardigheden besteed dient te worden;
- 3 of bepaalde kinderen over kunnen stappen naar een volgende fase.

Om voldoende gelegenheid te geven de juiste voorwaarden te scheppen als hiervoor beschreven, kan het best met de vermenigvuldigingsalgoritme gestart worden omstreeks de kerstvakantie in het derde leerjaar. Introductielessen duren ruim drie kwartier tot een uur. Oefenlessen steeds twintig minuten tot een half uur. Aan vermenigvuldigen wordt gedurende de zogenoemde inoefenperiode gemiddeld twee keer per week aandacht geschonken. Bij de overgang naar een andere fase kan echter gedurende één à twee weken het aantal lessen wat frequenter zijn. De contextfase als geheel duurt zes à acht weken.

Leerstof

Het aantal te maken sommen is in deze fase niet van primair belang, temeer omdat één of twee verhalen al heel wat tijd vragen. Bij de keuze van de verhaaltjes wordt om twee redenen gekozen voor sommen van het type 7×34 , waarvan dus het ene getal onder de tien en het andere onder de honderd genomen wordt, dit om de tekening overzichtelijk te houden en om de herkenbaarheid van de tafels bij de deelprodukten te bevorderen.

Oefening

Dagelijks korte oefeningen van ongeveer tien minuten, met name in de basisvaardigheden. Basisvaardigheden zijn in dit geval tafels van vermenigvuldiging, 'tafels met nullen', optellingen en aftrekkingen tot twintig en langere optellingen.

Didactische aantekeningen

Laat tekeningen maken zonder hulpmateriaal (zoals liniaal). Gebruik steeds een groot vel A4-papier. Slordige tekeningen wijzen erop, dat er niet meer geteld wordt en dat een verdere schematisering van de tekening mogelijk kan zijn. Laat de kinderen regelmatig het verband tussen de tekening en de berekening verwoorden. Houdt de gemeenschappelijk nabespreking kort. Hierbij wordt voor sommige kinderen de mogelijkheid tot een verdere schematisering geboden. Laat af en toe de kinderen vooraf vertellen hoe ze gaan tekenen, om het daarna pas uit te voeren. Ze krijgen dan de gelegenheid om hun eigen gedachten-handeling te verifiëren.

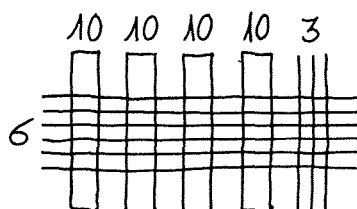
5.3 bundelingsfase

Kenmerk

Kinderen willen op den duur vlugger gaan werken en gaan derhalve slordiger tekenen. Precies het aantal lijnen tekenen is niet noodzakelijk, omdat het aantal erbij genoteerd is. Aan het einde van de contextfase wordt door de meeste leerlingen niet meer geteld: de tafelprodukten spelen nu een overheersende rol. Op een gegeven

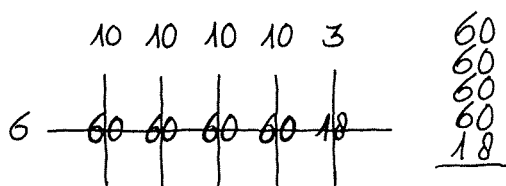
moment kan op natuurlijke wijze de overgang gemaakt worden naar het samen-
men van tientallen: we zijn dan in de bundelingsfase beland. De context van de opga-
ven wordt in deze fase al meer naar de achtergrond verschoven. Als uit de tekening
blijkt, dat een kind de bundeling niet goed door heeft, wordt steeds teruggegrepen
naar de voorafgaande fase. Dat wil zeggen, er wordt dan een context, een verhaal,
gebruikt om het ontstaan van de tekening nog eens bewust te maken.

Plaatje:



of:

$$6 \times 43$$

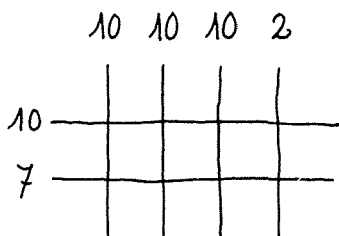


Tijd

Ook in de bundelingsfase werken de kinderen zes à acht weken om een zekere vast-
heid van handelen te krijgen. Twee à drie keer per week wordt er kort geoefend. De
overgangslessen naar deze fase duren ongeveer een uur.

Leerstof

Hetzelfde type sommen als in de contextfase wordt gegeven, bijvoorbeeld 6×43 of
 43×6 . Het is in deze fase wel mogelijk om geleidelijk naar wat grotere vermenigvul-
digen te gaan, bijvoorbeeld 17×32 , waarbij dan op de bundeling naar twee kan-
ten gelet moet worden.



Oefenen

Het oefenen gebeurt op dezelfde wijze als in de contextfase.

Denk in deze fase speciaal aan het vermenigvuldigen met nullen. Dit ter voorbereiding op de volgende fase.

Didactische aantekeningen

Hier gelden dezelfde opmerkingen als bij de contextfase. Laat vooral af en toe voorspellen hoeveel lijnen het plaatje gaat bevatten, alvorens de vermenigvuldiging uit te voeren. Bijvoorbeeld 6×23 : twee lijnen van tien en nog één van drie van boven naar beneden (verticaal); één lijn van zes horizontaal of van links naar rechts. Of andersom! Denk ook nu aan het verwoorden van de handelingen. Het nabespreken draagt bij tot een verdere schematisering. Wijs nadrukkelijk op de verwissel-eigenschap ($6 \times 23 = 23 \times 6$), die ook uit het schema te lezen valt.

5.4 lijnenfase

Kenmerk

De term geeft wellicht reden tot verwarring, omdat in de andere fasen ook lijnen getekend werden. Het kenmerk van deze fase is echter, dat nu één simpel lijntje staat voor een grote hoeveelheid lijnen uit de voorgaande fasen. De context die nodig was bij de opbouw van het model is nu verdwenen, al worden er wel steeds contextproblemen in de sfeer van het toepassen gebruikt. Aan kruispunten wordt nu overigens niet meer gedacht: het lijntje is zomaar een lijntje geworden, vandaar ook de term lijnenfase. Toch is het wel noodzakelijk om, indien er in deze fase fouten geconstateerd worden, de weg terug naar de voorgaande fase af te leggen. Het rekenen met nullen speelt een belangrijke rol bij de overgang naar de lijnenfase.

Grotere vermenigvuldigingen zijn nu mogelijk:

23×43

	40	3	
20	800	60	800 60 120 9 989
3	120	9	

of:

	40	3	
20	*	*	800 60
3			

De kruisjes geven tussenprodukten aan, waarvan de uitkomsten naast het schema genoteerd worden.

Tijd en leerstof

Deze fase wordt bereikt eind klas drie en wordt enkele maanden gehandhaafd. Voor een enkele leerling is dit tevens de eindfase van de vermenigvuldigingsalgoritme. In korte lesjes worden nu één à twee keer per week allerlei typen sommetjes gemaakt. Ook contextproblemen in allerlei toepassingssituaties blijven een belangrijke rol spelen.

Oefenen

Het oefenen van de basisvaardigheden blijft evenzeer belangrijk. Gezien het feit dat veel minder indirect geoefend wordt in specifieke algoritmelessen, omdat er minder opgaven gemaakt worden, moet nu veel aandacht besteed worden aan het oefenen van de basisvaardigheden in korte lesjes van tien minuten.

Didactische aantekeningen

Het laten zien van verschillende aanpakken speelt een belangrijke rol bij de niveauverhoging. De diversiteit in oplossingsniveaus is nu ook groter. Verwoorden, voorstellen en nabespreken van handige(r) werkwijzen blijft ook in deze fase van belang.

5.5 eindfase

Kenmerk

Niet alle kinderen leren dezelfde eindalgoritme. Drie vormen zijn in het algemeen haalbaar:

- 1) bijvoorbeeld 68×208 :

$$\begin{array}{r}
 200 \ 8 \\
 \begin{array}{cc}
 60 & \begin{array}{|c|c|} \hline * & * \\ \hline \end{array} \\
 8 & \begin{array}{|c|c|} \hline * & * \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 12000 \\
 480 \\
 1600 \\
 \hline
 64
 \end{array}$$

- 2)
$$\begin{array}{r}
 208 \\
 \underline{68} \times \\
 64 \\
 1600 \\
 480 \\
 \underline{12000}
 \end{array}$$

Systematisch alle tussenprodukten noteren zonder plaatje.

$$\begin{array}{r}
 3) \quad \begin{array}{r} 208 \\ 68 \\ \hline 1664 \end{array} \times \\
 \begin{array}{r} 12480 \\ \hline 14144 \end{array}
 \end{array}$$

Tijd

Bij de overstap naar de eindfase, zoals bij punt 3 is het wenselijk om sommetjes van verschillend type in korte lessen aan de orde te stellen. Medio klas vier kan deze stap gezet worden door gedurende twee à drie weken vrijwel dagelijks circa twintig minuten hieraan te werken en daarna nog één keer per week te oefenen.

Leerstof

Bij de overstap naar de vorm onder punt 3 eerst een paar sommen van het type: 7×238 ; 6×64 . Later: 40×68 ; 60×368 . Dan: 47×68 ; 47×683 . Tenslotte dient er ook aandacht besteed te worden aan verschillende sommen met nullen, zoals: 47×860 ; 43×807 ; 403×87 ; 403×807 .

Oefenen

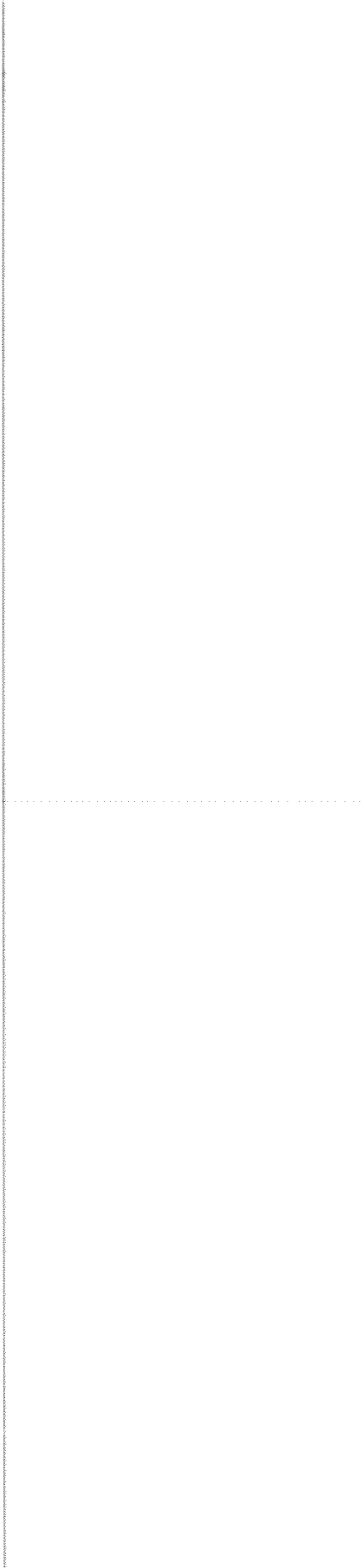
Juist doordat het aantal algoritmelessen terug gaat lopen, omdat het niet wenselijk is kinderen vaak dingen te laten doen die ze al kunnen, moet er ook in de bovenbouw van het basisschoolprogramma geoefend blijven worden op de basisvaardigheden.

Didactische aantekeningen

Bij alle niveauverhogingen is steeds gewezen op bewuste oefeningen op het gebied van het zich realiseren vooraf. Vanuit de vastheid van handeling kan, zonder de handeling echt uit te voeren, verwoord worden wat er dient te gebeuren. De uitvoering van de handeling laat dan zien of er goed 'voorgedacht' is, en geeft meteen inzicht waar en waarom de voorspelling niet goed was. Gebruik bij de overgang naar de eindfase aanvankelijk veelvuldig het plaatje uit de lijnenfase ter ondersteuning. Zeker als er zonder plaatje fouten begaan worden, maar ook om gevallen met nullen te verduidelijken. Tenslotte gaan we over tot de gangbare algoritme, dat dan ook op de gangbare wijze ingeoefend wordt. Toch is er een belangrijk verschil met de traditionele aanpak: in het algoritmeprogramma ligt een brede begripslaag onder deze 'trucs' en is de weg terug naar concretere vorige fasen open.

Deel B

Delen



III DE STAARTDELING VOLGENS HERHAALD AFTREKKEN

We zullen dit deel B beginnen met een korte, fasegewijze beschrijving van het leren delen volgens de cijfermethode. Later zullen we de fasen uitdiepen en voorzien van vele microdidactische opmerkingen. Het hele proces van het leren (cijferend) delen beslaat ongeveer drie jaar. Met de begripsmatige inbedding – wat is delen? – maken we een start in klas één à twee. De nadruk op de algoritme ligt echter in het vierde leerjaar. In de eerste maanden van dat leerjaar wordt met de algoritmisering gestart, aan het einde van dat leerjaar is de eindfase bereikt.

1 OVERZICHT

1.1 fase 1

De start van de algoritme vindt in het begin van het vierde leerjaar plaats door verdeelproblemen aan de orde te stellen. Bij de wijze van oplossen, aanvankelijk geheel vrij, wordt meer en meer het principe van het herhaald aftrekken gebruikt om de delingsalgoritme op te zetten. De verdelingen worden daadwerkelijk uitgevoerd met materiaal als centen, fiches, blokjes, knopen, stenen, wat men maar wil. Na enige problemen zo te hebben opgelost, wordt de deling genoteerd. Deze notatie is zeer eenvoudig herkenbaar als herhaald aftrekken, bijvoorbeeld:

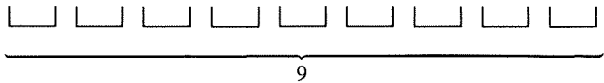
Hier staat de deling $122 : 9 = 13$, over 5:

$$\begin{array}{r} 122 \\ 9 \\ \hline 113 \\ 9 \\ \hline 104 \\ 9 \\ \hline 95 \\ 9 \\ \hline 86 \\ 9 \\ \hline 77 \\ 9 \\ \hline 68 \\ \text{enz.} \end{array}$$

Uiterst belangrijk in deze manier van doen is de betekenis van ‘– 9’.

Deze betekent immers dat er negen kinderen met hun handje open stonden en dat de verdeler in elke hand één voorwerp heeft gelegd. Na dit uitdeelrondje was hij er

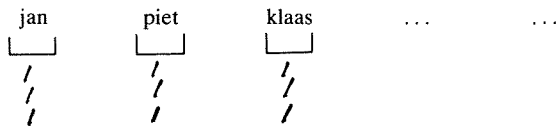
negen kwijt uit de pot met te verdelen voorwerpen. Die kinderen worden met bakjes of handjes gesymboliseerd:



In elk bakje wordt bij elke ronde aangetekend dat er een voorwerp is uitgedeeld:



of:

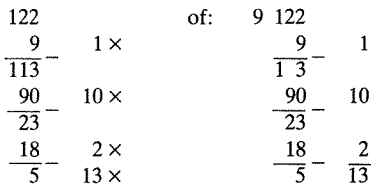


Deze notatiewijze wordt in de eerste fase naast de lange staart genoteerd (zie de straks volgende beschrijvingen).

1.2 fase 2

De ontwikkeling van de algoritme gaat voort door een verdere schematisering. In de eerste plaats raakt de context meer op de achtergrond, bijvoorbeeld door in de lessen ook contextloze oefenopgaven in te lassen. Maar nog belangrijker zijn de vaak spontaan optredende verkortingen. Een leerling merkt bijvoorbeeld op: ‘Je kunt net zo goed in één keer tien knikkers weggeven aan alle kinderen.’

Dit geeft aanleiding tot een niveauverhoging: we proberen – nog chaotisch en zoals het uitkomt – grotere happen uit te delen. De bijbehorende notatie ziet er dan bijvoorbeeld zó uit:



Ook in deze fase kan men de bakjes waarin uitgedeeld wordt nog naast de ‘staart’ noteren (zie eveneens de volgende beschrijving).

1.3 fase 3

In de traditionele didactiek nam het ‘afschatten’ een grote plaats in. Hier komt dat –

zij het doorzichtiger – terug. We streven er nu naar dat de happen geordend in volgorde van grootte – bijvoorbeeld honderdtallen, tientallen en eenheden – genomen worden. Een voorbeeld van de notatie van een deling in deze fase is:

$$\begin{array}{r|l}
 14 \overline{)1935} & \\
 \underline{1400} & 100 \\
 535 & \\
 \underline{140} & 10 \\
 395 & \\
 \underline{140} & 10 \\
 255 & \\
 \underline{140} & 10 \\
 115 & \\
 \underline{14} & 1 \\
 101 & \\
 \underline{28} & 2 \\
 73 & \\
 \underline{28} & 2 \\
 45 & \\
 \underline{28} & 2 \\
 17 & \\
 \underline{14} & 1 \\
 3 & \underline{138}
 \end{array}
 \quad \text{of:} \quad
 \begin{array}{r|l}
 14 \overline{)1935} & \\
 \underline{1400} & 100 \\
 535 & \\
 \underline{380} & 20 \\
 255 & \\
 \underline{140} & 10 \\
 115 & \\
 \underline{70} & 5 \\
 45 & \\
 \underline{28} & 2 \\
 17 & \\
 \underline{14} & 1 \\
 3 & \underline{138}
 \end{array}$$

Hier ligt de nadruk op het verkorten van de staarten. Daarvoor zijn drie dingen nodig, die ook geoefend moeten worden, in ieder geval sterke aandacht moeten hebben, te weten:

- de kwestie van het afschatten, dus:

$$\begin{array}{r|l}
 14 \overline{)1935} & \\
 \underline{1400} & 100
 \end{array}$$

De kinderen zien direct dat het antwoord in de honderden zal zijn. Ze beginnen niet met een hap in tientallen of eenheden;

- de kwestie van het rekenen met nullen, gebaseerd op het kennen van de tafels, omdat:

$$\begin{array}{l}
 4 \times 9 = 36, \text{ is} \\
 40 \times 9 = 360 \\
 4 \times 90 = 360 \\
 40 \times 90 = 3600 \\
 4 \times 900 = 3600 \\
 400 \times 9 = 3600
 \end{array}$$

- de kwestie van het handig en flexibel rekenen. Dit houdt in, dat kinderen gemakkelijk kunnen halveren en verdubbelen van getallen, dus:

$$100 \times 95 = 9500 \rightarrow 50 \times 95 = 4750$$

of eenvoudiger

$$100 \times 27 = 2700 \rightarrow 50 \times 27 = 1350$$

en:

$$\begin{aligned} 10 \times 18 &= 180 \rightarrow 20 \times 18 = 360 \\ 20 \times 18 &= 360 \rightarrow 40 \times 18 = 720 \\ 40 \times 18 &= 720 \rightarrow 80 \times 18 = 1440 \end{aligned}$$

Dit flexibel rekenen maakt het mogelijk kwesties als hoofdrekenen en eigenschapsrekenen te combineren met het leren van de delingsalgoritme. We willen vermijden, dat kinderen 50×4 als volgt uitrekenen:

$$\begin{array}{r} 50 \\ 4 \\ \hline 200 \end{array} \times \quad \text{of:} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 50 \\ 0 \\ \hline 200 \\ 200 \end{array} \times \quad \text{of:} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 50 \\ 0 \\ \hline 20. \\ 200 \end{array} \times$$

50×4 moeten kinderen ‘zo’ weten: 200. Ze kunnen er allerlei zaken achter denken, bijvoorbeeld:

- de helft van 400 (100×4);
- $5 \times 4 = 20$ met een nul;
- 4 kwartjes is 100. Twee maal 4 kwartjes is 200.

Ook een opgave als $4 \times 54 = 4 \times 50 + 4 \times 4 = 216$ moeten de kinderen op den duur, dus in de laatste fase, uit het hoofd kunnen uitrekenen. Dit kan eventueel ook zo ‘uit het hoofd’:

$$\begin{array}{r} 54 \\ 4 \\ \hline 216 \end{array} \times$$

dus cijferend met ‘onthouden’.

Zowel de verdubbelingsmethode als het uit het hoofd berekenen van dergelijke cijfersommen zijn belangrijke steunpunten bij het kunnen verwerven van de eindalgoritme van de staartdeling. De contexten waarin we vooral in fase 1 de delingen hebben ingebed, zijn in deze fase geheel naar de achtergrond gedrongen. Wel is het zo dat het model van het herhaald aftrekken en de context van het verdelen zonnodig en desgewenst weer opgeroepen zouden kunnen worden. Dit is niet alleen in de remediërende zin van betekenis, maar ook voor het onderwijs van alledag. We dienen ons dan wel tot enkelvoudige contextproblemen te bepalen. (Zie ook hfdst. 5).

1.4 fase 4

In deze fase zijn we aangeland bij de traditioneel bekende deling. De weg naar deze eindfase verschilt dus essentieel van de bekende gang van zaken. De schrijfwijze van de staartdeling is wel enigszins anders dan in een aantal traditionele rekenmethoden gebruikelijk is.

Een aantal voorbeelden van de notatiewijze die kinderen zullen hanteren:

$$\begin{array}{r|l}
 8 \overline{)953} & 100 \\
 \underline{800} & \\
 153 & \\
 \underline{80} & 10 \\
 73 & \\
 \underline{72} & 9 \\
 1 & 119
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 14 \overline{)1336} & 90 \\
 \underline{1260} & \\
 76 & \\
 \underline{70} & 5 \\
 6 & 95
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 27 \overline{)12636} & 400 \\
 \underline{10800} & \\
 1836 & \\
 \underline{1620} & 60 \\
 216 & \\
 \underline{216} & 8 \\
 0 & 468
 \end{array}$$

Soms zullen kinderen hulptabellen moeten maken, bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{ll}
 1 \rightarrow 27 & 8 \rightarrow 216 \\
 2 \rightarrow 54 & 10 \rightarrow 270 \\
 4 \rightarrow 108 & 5 \rightarrow 135
 \end{array}$$

Van hieruit kunnen de overige basisgetallen uitgerekend worden:

$$\begin{array}{l}
 3 \rightarrow 54 + 27 = 81 \\
 6 \rightarrow 54 + 108 = 162 \\
 \text{of: } 135 + 27 = 189 \\
 7 \rightarrow 162 + 27 = 189 \\
 \text{of: } 216 - 27 = 189 \\
 9 \rightarrow 216 + 27 = 243 \\
 \text{of: } 270 - 27 = 243
 \end{array}$$

Het rekenen met nullen geeft verder alle nodige tussenprodukten voor de deling. We zullen er echter ook naar moeten streven om opgaven als $4 \times 27 = \dots$ uit het hoofd te laten berekenen door ofwel de distributieve eigenschap te gebruiken ' $4 + 20 + 4 \times 7$ ' ofwel cijferend via de algoritme ' 4×7 is 28, 8 opschrijven, $4 \times 2 = 8$ plus 2 is 10, dus $4 \times 27 = 108$ '. In het algemeen verdient de distributieve werkwijze aanvankelijk de voorkeur, omdat niet alle leerlingen dan reeds cijferend kunnen vermenigvuldigen.

1.5 algemene opmerkingen

Als we de fasen aan tijd binden, komen we tot de volgende indicatie.

fase 1: augustus en september van het vierde leerjaar;

fase 2: oktober;

fase 3: vanaf november;

fase 4: vanaf de laatste maanden van het vierde leerjaar, eventueel doorlopend tot in het vijfde.

In de gehele fase-aanduiding die we hierboven hebben gegeven, is een niet-strakke opbouw weergegeven. Dat is bewust gedaan, omdat het mogelijk is de inbreng van kinderen te honoreren, waardoor de niveaus in de klas uit elkaar gaan lopen. In hoeverre we deze toelaten, moeten we als onderwijsgevende zelf beslissen en is mede afhankelijk van het vertrouwen dat we hebben in de specifieke aanpak. Vooral in het begin zullen we behoefte hebben aan een maximale greep op de voortgang die de klas maakt en wensen we dus een goed overzicht over de prestaties van de kinderen. Maar ook in klassikale lessen kunnen we de inbreng van de kinderen aangrijpen om de voortgang te beoordelen. De mogelijkheden om te differentiëren zijn dus volop aan-

wezig en het hangt van de mate waarin wij de algoritme in de vingers hebben af in hoe-verre we de gelegenheden ook gebruiken.

Tijdens de lessen geven we oefensommen. We dienen ons daarin echter te beperken. Een som als: $4567891032 : 6543$ heeft in deze kale vorm gesteld, geen enkele betekenis en is voor het beheersen van de algoritme op zich niet van belang. Bovendien ronden we bij dit soort zaken in de realiteit de getallen vaak af, bijvoorbeeld op miljoenen en rekenen daarmee verder.

2 DE EERSTE LESSEN

2.1 les 1: centen verdelen

Voor de klas staat een grote spaarpot. Het is de spaarpot van oma, die er de centen instopt die ze in haar portemonnaie heeft. Ze spaart die centen voor haar kleinkinderen. Vandaag is oma jarig en haar kleinkinderen zijn op visite. De spaarpot wordt geleegd, want oma wil de centen onder haar kleinkinderen verdelen. Karel mag alle centen tellen.

Eén van de kinderen uit de klas leegt de spaarpot en telt de centen. Het blijken er 275 te zijn.

Anita, één van de oma's kleinkinderen, vraagt zich af hoeveel centen zij zal krijgen. Dan vragen we aan de klas: weten jullie dat misschien? Nee, dat weten ze niet. Sommige kinderen zeggen dat je dan eerst moet weten hoeveel kleinkinderen oma heeft. Andere kinderen begrijpen dat eerst niet, maar als Wouter het uitlegt, is het hen ook duidelijk. 'Als oma twee kleinkinderen heeft, krijgt Anita toch veel meer dan als ze met z'n tien zijn?' Hoeveel kleinkinderen heeft oma? We schrijven hun namen op het bord:

Karel
Anita
Wouter
Bart
Els
Frida
Wilma

Zeven in totaal!

We herhalen de vraag: 'Hoeveel centen zal Anita krijgen?'

De klas krijgt even de gelegenheid naar oplossingen te zoeken. Misschien lukt het een aantal kinderen om zelf het antwoord te vinden. De antwoorden die genoemd worden, schrijven we zonder commentaar op het bord. 'Wie weet een manier om het uit te rekenen?'

Er zullen kinderen zijn die daar ideeën over hebben. We gaan er nadrukkelijk op in: 'Meindert, wat denk jij ervan?' Meindert geeft aan dat honderd centen voor ieder veel te veel is 'want dan zouden er zevenhonderd centen in de spaarpot moeten zitten: $7 \times 100 = 700$.' De weg die Meindert aangeeft, kan door andere kinderen worden opgepakt.

Willy schat dat ieder kleinkind er 23 krijgt, maar de vermenigvuldiging 7×23 geeft zijn ongelijk aan: $7 \times 23 = 161$.

Andere kinderen geven andere strategieën. Zo zegt Bart: 'Laten we de centen gewoon uitdelen.' Dit idee wordt uitgevoerd. We vragen zeven kinderen voor de klas te komen en de kleinkinderen van oma voor te stellen. Monique wordt gevraagd de centen te verdelen, zoals oma dat zou doen. We doen dat vooral niet zelf, omdat we dan – onbewust – handige uitdeelstrategieën zouden kunnen gebruiken, wat het leerproces zou verstoren.

Monique deelt uit: ieder een cent, dan een tweede ronde van ieder een cent. Al gauw krijgt Monique, evenals de klas, in de gaten dat het sneller, effectiever kan. Ze deelt iedere ronde twee centen aan ieder uit, later tien centen. Rommelend en probeerend verdeelt Monique de inhoud van de spaarpot: 'Hé, er blijft nog wat over. Ik kan niet meer verdelen.' We gaan na of ieder kleinkind wel evenveel heeft. Het blijkt eerlijk verdeeld te zijn. Ieder kreeg 39 centen.

Commentaar

De oplossing is gevonden. De oplossingsstrategie heeft de gewenste aandacht gekregen. De start van het leren delen met een staart is gemaakt. Het is van eminent belang dat de kinderen de probleemstelling aan den lijve hebben ondervonden en geparticipeerd hebben in de oplossing. Ze hebben de oplossingen aangedragen, ze hebben de verdeelsituatie nauwlettend gevolgd. Dit kon gebeuren door de specifieke situatie die we hebben gecreëerd, door de inleiding op het probleem en door het gebruik van echte centen. Niets is funester dan dat de les, zoals die hier beschreven is, door ons 'even' wordt verteld, afgeraffeld dus. We kunnen zelfs nog verder gaan en zeggen dat dit verhaal van oma's spaarpot dat in iedere willekeurige klas gedaan zou kunnen worden, vervangen zou kunnen worden door een nog levensechter verhaal, dat de kinderen nog meer bij het geheel betreft – een op de eigen situatie van de klas toegespitste context dus. Essentieel is tevens dat de oplossing door de kinderen wordt aangedragen en niet door onszelf. Het woord 'delen' is nergens gevallen, de situatie spreekt in dit opzicht voor zich.

2.2 les 2: knikkers verdelen

Enkele dagen later zetten we de deelleergang voort door een situatie te scheppen die qua vormgeving veel op de vorige lijkt.

Voor de klas staat een schoenendoos met knikkers. Daar vertellen we het volgende verhaal bij:

'De schoenendoos is van een jongen uit de straat waar ik woon. Hij is al vijftien jaar. Gerrit heet 'ie. Op een dag ruimde hij zijn kamer op en vond de schoenendoos onder z'n bed staan. Hij was vergeten dat 'ie een doos met knikkers had. Het was zeker drie jaar geleden dat hij er voor het laatst mee had geknikkerd. Daarom besloot hij de knikkers weg te geven. Of, nee, misschien zouden Sjoerd of Bart ze wel willen hebben, zijn buurjongens. Buiten speelden zes jongens met knikkers: Sjoerd, Bart, Stefan, Sander, Bauke en Jan. Gerrit besloot zijn knikkers onder de jongens te verdelen. En hier zie je nu de doos met knikkers van Gerrit.'

We vragen: ‘Zitten er veel knikkers in de doos?’ De klas raadt, maar we laten het daarbij. Aan het eind van de les bekijken we hoeveel het er zijn. ‘Hoeveel knikkers zouden de jongens elk krijgen?’ Deze vraag is niet te beantwoorden, zal de klas terecht vinden. We stellen voor om de doos met knikkers maar eens te verdelen. Daarvoor wijzen we zes leerlingen aan die voor de klas komen te staan. Een meisje, spelend voor de moeder van Sjoerd, deelt de knikkers uit. Op het bord staan de namen van de jongens die meedelen:

Sjoerd	Bart	Stefan	Sander	Bauke	Jan
--------	------	--------	--------	-------	-----

Eén leerling krijgt de taak te noteren hoeveel ieder er krijgt, om later te kunnen controleren of het wel eerlijk gegaan is. Carla, die de moeder van Sjoerd voorstelt, begint uit te delen: ze geeft iedere jongen tien knikkers. Op het bord wordt genoteerd:

Sjoerd	Bart	Stefan	Sander	Bauke	Jan
10	10	10	10	10	10

Het feit dat Carla direct tien knikkers aan iedere jongen geeft, heeft te maken met het leereffect van de vorige les. Het zou mogelijk geweest zijn dat Carla de uitdeling begonnen zou zijn met één knikker. Maar de kans dat de klas daarop aanmerkingen zou maken is groot. Als iedere jongen tien knikkers heeft gekregen, vragen we: ‘Hoeveel knikkers heeft Carla nu uitgedeeld?’ Het antwoord is eenvoudig: $6 \times 10 = 60$. We zetten dit voort, ook als er meerdere ronden zijn geweest, bijvoorbeeld:

Sjoerd	Bart	Stefan	Sander	Bauke	Jan
10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10

Carla heeft er al $4 \times 60 = 240$ weggegeven: vier ronden van 60 knikkers. ‘Hoeveel knikkers hebben de jongens nu?’ Elke jongen heeft er nu 40. Met hun zessen dus $6 \times 40 = 240$. De uitdeling wordt voortgezet, waarbij deze notatie op het bord ontstaat:

Sjoerd	Bart	Stefan	Sander	Bauke	Jan
10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10
5	5	5	5	5	5
5	5	5	5	5	5
10	10	10	10	10	10
3	3	3	3	3	3
1	1	1	1	1	1

De beslissing van Carla om in de zesde ronde vijf in plaats van tien knikkers uit te delen, heeft te maken met de schatting die zij maakt hoeveel knikkers er nog in de doos zitten. ‘Ik denk niet dat ik er nog tien aan ieder kan geven.’ Daarom moeten we de doos regelmatig aan de kinderen laten zien en vragen: ‘Kan Carla er nog tien aan ieder geven, denk je?’ Aan het slot van de verdeling volgt weer de vraag: ‘Hoeveel

heeft ieder?’ De jongens tellen en verifiëren deze uitkomst. En: ‘Hoeveel heeft Carla er uitgedeeld?’ Omdat we dit ronde voor ronde hebben bijgehouden, is het antwoorden gemakkelijk: ‘444’. ‘Hoeveel knikkers zaten er in de doos van Gerrit?’

Commentaar

Het moet ons duidelijk zijn, dat we de kinderen de staartdeling leren door ‘herhaald aftrekken’. Elke ronde halen we een portie knikkers uit de doos die we daarna verdeelen. Op dit moment wordt dit nog niet expliciet genoteerd, maar in de hele situatie is dit de kern van de zaak. Onze vragen tenderen hier ook steeds naar. Spontaan worden vanuit de kinderen verkortingen aangebracht. Ook al in deze fase! De wens om immers iedere jongen happen van tien, vijf enz. te geven, houdt een effectieve verkorting van het werk in. We mogen verwachten dat nagenoeg alle leerlingen de idee achter deze verkortingen begrijpen, ook al zullen niet alle kinderen het in dit stadium al vanzelf doen. Zo zien we dat het uitdelen nog weleens problemen oplevert, waardoor natellen en noteren op het bord zeer gewenst is. We zijn nu al een heel eind op weg naar de staartdeling!

2.3 les 3: symbolisch verdelen

Kort na beide voorgaande lessen gaan we voort met de deelleergang. Het zal de laatste maal zijn dat we door concreet verdelen een deelprobleem oplossen. Het is van belang dat alle kinderen die concrete verdeelsituatie ‘aan den lijve’ hebben meegemaakt, voordat we op een schematischer wijze overgaan. Het is niet de verantwoordelijkheid van een methode of van een buitenaf komende ‘autoriteit’ die de werkwijze oplegt. Het is vanzelfsprekend dat we zelf – verantwoordelijk voor het onderwijs – moeten beslissen hoeveel lessen we aan de concrete verdeelsituatie zullen besteden en wanneer we tot een schematischer werkwijze zullen overgaan. Vooral in de remediërende sfeer zullen we meer van deze concrete verdeellessen achter de hand moeten hebben. Dit is gewenst, omdat hiermee de begripsinbedding plaatsvindt en bovendien de notatiewijze wordt begonnen.

‘In de kast van Gerrit stond nog een doos. Toen Gerrit de doos tevoorschijn haalde, moest hij erg lachen. ‘Lucifermerken’, zei hij. Gerrit stond ernaar te kijken en dacht na over wat hij met de doos zou gaan doen. ‘Lucifermerken sparen is veel te kinderachtig voor een jongen van 15’, dacht hij. ‘Misschien ook wel iets voor mijn buurjongens.’ Gerrit loopt met de doos onder zijn arm naar buiten. Enkele jongens vinden het prachtig. Zij willen de verzameling graag hebben: Sjoerd, Bauke, Bart en Jan. De anderen sparen al sleutelhangers en stickers. Gerrit zet de doos op de stoep en zegt: ‘Verdeel ze maar, Sjoerd.’’

We laten een doos zien. ‘Wat zit hierin?’ ‘Lucifermerken’, roept de klas. ‘Bijna goed. Er zitten evenveel fiches (knopen) in als er lucifersmerken in de doos van Gerrit zaten. Het zijn er 324.’ De kernvraag is weer: ‘Hoeveel krijgt iedere jongen?’ We creëren opnieuw een situatie waarin de fiches concreet onder vier jongens worden verdeeld. De kinderen in de klas noteren de gang van zaken, zoals dat ook op het bord gebeurt:

324 : 4

	Sjoerd	Bauke	Bart	Jan
324				
<u>40</u> ←	10	10	10	10
284				
<u>200</u> ←	50	50	50	50
84				
<u>40</u> ←	10	10	10	10
44				
<u>44</u> ←	11	11	11	11
0				

Hierbij horen vragen als:

- hoeveel deel je in deze ronde uit? Kan dat wel?
- hoeveel geef je in deze ronde weg?
- hoeveel heb je er nog over in de doos?

Commentaar

Belangrijk is het noteren van de ‘staart’ en het gebruik van tafels om tussenprodukten te berekenen ($4 \times 50 = 200$). Bij het laatste speelt het werken met nullen een grote rol. De situatie is nu zo dat we dit hier aanzetten en in de loop van het leerproces steeds verder uitbouwen. Weliswaar is het kennen van de tafels gewenst, maar de kinderen krijgen in de loop van dit leerjaar voldoende gelegenheid de vaardigheid in dit opzicht te vergroten.

2.4 les 4: een verhaaltje

In de volgende les verlaten we de concrete verdeelsituaties die we tot op heden in de lessen hebben ingebouwd. Het verhaal is als volgt:

‘Op de verjaardag van Lieneke komen twaalf kinderen. Na afloop van het feestje krijgen de kinderen elk een zakje snoep mee naar huis. Moeder heeft een grote zak met snoep gekocht, die Lieneke over twaalf zakjes mag verdelen. In de zak die moeder heeft gekocht zitten 425 snoepjes.’

En de vraag: Hoeveel snoepjes krijgt ieder kind?

We nemen de voor de kinderen grote stap om de verdeling alleen schriftelijk te laten plaatsvinden: de resultaten worden op het bord genoteerd, de kinderen schrijven op hun blaadje mee. Zó bijvoorbeeld:

425												
<u>12</u> ←	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
413												
<u>12</u> ←	1	1	1	1	1	1						
401												
<u>12</u> ←	1	1	1	1	1	1						
389												
<u>120</u> ←	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
269												
enz.												

De bakjes stellen kinderen voor. Eronder wordt genoteerd hoeveel snoepjes elk kind krijgt. Omdat de klas heeft ervaren dat voor het eerste kind hetzelfde geldt als voor alle andere, wordt er met stippeltjes gewerkt die dan betekenen ‘voor hen net zo’. Hoeveel er elke ronde wordt uitgedeeld, laten we over aan de klas. Het kan ons een indicatie geven omtrent het niveau van diverse kinderen. Sommige zullen immers per ronde 10, 20 of wat dan ook willen uitdelen. Andere kinderen komen maar tot 1 snoepje per ronde. We kunnen die niveauverhoging uitlokken, als ze niet spontaan komt, door vragen te stellen als: ‘Kan het ook nog op een snellere manier?’ We bereiken ermee dat de kinderen gaan zoeken naar verkortingen in het verdeelproces. We letten overigens in deze fase vooral ook op het verwoorden van wat er gebeurt: de kinderen moeten zich immers goed realiseren waarom het precies gaat. Ook voor het vervolg is dit van belang.

2.5 terugblik op fase 1

Met deze introductielessen is een week of drie, vier gemoeid. We hebben de algoritme vanuit een verdeelsituatie aangezet en de problemen steeds verder geschematiseerd. De notatiewijze lijkt al vrij veel op de definitieve schrijfwijze, de verdere tijd die voor dit algoritme nodig is, zal vooral besteed moeten worden aan verkortingen in de ‘staart’. Zoals al eerder is opgemerkt, kan het belangrijk zijn meerdere lessen in de geest van het hierboven beschreven onderwijs te geven. Ze kunnen van belang zijn om vrijwel alle leerlingen, ook de moeilijk-lerende, mee te krijgen en ze hebben als zodanig een functie in remediërende zin. Verhalen met sommen als $522 : 6$, $168 : 13$ en de boven beschreven notatiewijze behoren tot de mogelijkheden – let wel ook verhalen die door de leerlingen zelf verzonnen zijn! Na deze eerste lessen verwachten we van de klas het volgende niveau in het leerproces van het cijferend delen:

- 1 een deelsituatie wordt herkend. De kinderen kunnen het deelprobleem door concreet verdelen oplossen;
- 2 de kinderen begrijpen het notatiesysteem, waarin verkortingen kunnen zijn opgenomen, bijvoorbeeld:

252	of	252				
$\frac{4}{248}$		$\frac{4}{248}$	1	1	1	1
$\frac{4}{244}$		$\frac{40}{208}$	10	10	10	10
$\frac{4}{240}$		$\frac{40}{168}$	10	10	10	10
enz.		enz.				

met bakjes of een tabel, waarin aangegeven wordt wat ieder die meedeelt ontvangen heeft;

- 3 de kinderen begrijpen dat een verdeling ook op papier kan plaatsvinden waarbij het notatiesysteem onontbeerlijk is.

In deze zin zou er een toetsles gepland kunnen worden. Als belangrijkste toets-element gebruiken we observaties en analyses van hetgeen de kinderen in de mee-

— — —

les 1: 275 : 7,
les 2: 444 : 6,
les 3: 324 : 4,
les 4: 425 : 12,

347
 6 ← 1 1

347						
<u>6</u>	←	1	1			
341						
<u>6</u>	←	1				
335						
<u>6</u>	←	1				
329						
<u>6</u>	←	1				
323						
<u>6</u>	←	1				
317						
<u>6</u>	←	1				
311						
<u>6</u>	←	1				
305						

347 : 6

347						
<u>18</u>	3	.	.	.	.	.
329	3					
<u>18</u>	3				enz.	
311						
enz.						

Vergelijken we deze oplossing met die van de vorige keer, dan is voor de leerlingen vrij gemakkelijk in te zien dat deze werkwijze effectiever is: je bent nu in één ronde waar je de vorige keer drie ronden voor nodig had. Nog effectiever is het uitdelen van tien per ronde aan ieder:

347						
<u>60</u>	10	.	.	.	.	.
287						
<u>60</u>	10					
227						
enz.						

Effectiever, omdat nu de som in een overzichtelijk aantal stappen is gekraakt. Het kan nu tenminste op het bord. Vanwege de herkenbaarheid, vanwege de mogelijkheid de kennis van de tafels te gebruiken, kozen we dus sommen met hanteerbare delers. Hoewel dit strikt genomen voor het verdelen in een concrete situatie niet nodig is, mikten we dus van het begin af aan op gemakkelijk te schematiseren situaties.

3.2 naar één verdelingsbakje

We starten dus nu een periode in het leerproces dat te karakteriseren is als het zoeken naar verkortingen van de staart van de deling. Deze periode sluit aan op de introductieperiode en duurt enkele maanden. Er wordt regelmatig op die verkortingen gemikt, maar er wordt ook flink geoefend. Het oefenen heeft twee aspecten, namelijk het inoefenen van de eenmaal bereikte niveauverhogingen binnen de algoritme en de ondersteunende oefeningen van een aantal basisvaardigheden. Het eerste type oefeningen wordt binnen de algoritmelessen meegenomen. De basisvaardigheden worden ook nog apart geoefend. Daarnaast is het van belang regelmatig met opdrachten te werken die op toepassingen van het geleerde neerkomen. Het gaat in de volgende les om het sommetje $432 : 6$. We laten de context vanaf dit moment een beduidend minder grote rol spelen. Enerzijds wordt die context vastgehouden, zij het op de achtergrond, als er problemen inzake het begripsmatige zijn. In die gevallen wordt de concrete verdeelsituatie uit de herinnering terug geroepen. 'Hoe ging dat ook al weer?' 'Hoe kwamen we daaraan?' Dit soort vragen kunnen beantwoord worden met verwijzing naar een verdeelcontext. Het is te verwachten dat deze procedure in deze periode van het delen een aantal keren noodzakelijk of wenselijk zal zijn, maar wel van afnemende betekenis is. De context speelt echter een essentiële rol in toepassingen, in thema's, in opdrachten en vooral ook in speciaal geconstrueerde context- of redactieopgaven, waarvan we een aantal voorbeelden zullen geven.

Met het sommetje $432 : 6$ proberen we niet alleen een begin te maken met het zoeken naar kortere staarten, maar ook de procedure te vereenvoudigen. Immers, het schema dat bij deze som hoort ziet er zó uit:

$$\begin{array}{r|l} 6 \overline{)432} & \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \\ \underline{60} & \leftarrow 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \\ 372 & \\ \underline{60} & \leftarrow 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \\ 312 & \text{enz.} \end{array}$$

Maar we kunnen naar een versimpelde procedure toe door slechts één voorbeeld-bak ('superbak') te tekenen die voor elk van de personen die meedeelt geldt:

$$\begin{array}{r|l} 6 \overline{)432} & \boxed{} \\ \underline{60} & \leftarrow 10 \\ 372 & \\ \underline{60} & \leftarrow 10 \\ 312 & \text{enz.} \end{array}$$

Dit is een uiterst belangrijke leerstap in de totale leergang. We bereidden deze reeds voor door stippeltjes te zetten onder de andere bakken, die betekenden 'voor hen net zo'. We moeten deze stap niet onderschatten. Kon namelijk tot nu toe het tussenprodukt nog 'gezien' worden, nu is dat niet meer mogelijk. De kinderen moeten onthouden hoeveel personen meedeelden, voor hoeveel personen de superbak staat. In dit geval voor zes: $6 \times 10 = 60$. Het is goed als we aan dit probleem regelmatig aandacht besteden, bijvoorbeeld via de vraag: 'Hoeveel bakjes had ik eigenlijk moeten tekenen?', opdat de concrete achtergrond van de verdeling niet te snel verdwijnt.

Hoeveel we per ronde uitdelen, hoeveel we per ronde in de bakjes stoppen, wordt nog steeds aan de kinderen overgelaten. Als we hierin te veel sturen en te snel naar een eindfase toewerken, dreigt het gevaar dat een te groot aantal kinderen de zaak niet meer kan volgen. Juist in dit opzicht zal ons verrassen hoe snel de verschillen in niveaus van oplossen zullen toenemen. Sommige kinderen zien al gauw een oplossing als:

$$\begin{array}{r|l} 6 \overline{)432} & \boxed{} \\ \underline{300} & \leftarrow 50 \\ 132 & \\ \underline{120} & \leftarrow 20 \\ 12 & \\ \underline{12} & \leftarrow 2 \\ 0 & \end{array}$$

Andere, zich wat minder zeker voelende kinderen, zullen eerder geneigd zijn met rondjes van één te beginnen:

$$\begin{array}{r|l} 6 \overline{)432} & \boxed{} \\ \underline{6} & \leftarrow 1 \\ 426 & \\ \underline{6} & \leftarrow 1 \\ 420 & \text{enz.} \end{array}$$

Deze kinderen hebben uiteraard veel meer tijd nodig om de som te maken. Beduidend meer tijd zelfs. Een tussenniveau is, met een aantal mogelijke varianten:

$$\begin{array}{r|l}
 6 \overline{)432} & \boxed{} \\
 \underline{60} & \leftarrow 10 \\
 372 & \\
 \underline{60} & \leftarrow 10 \\
 312 & \\
 \underline{60} & \leftarrow 10 \\
 252 & \\
 \underline{120} & \leftarrow 20 \\
 132 & \text{enz.}
 \end{array}$$

Het is duidelijk dat de natuurlijke differentiatie hier als vanzelf naar voren komt. Het grote probleem wordt dan natuurlijk hoe we als onderwijzer hierop inhaken. We kunnen de verschillen proberen af te remmen door de hapen per ronde voor te schrijven. Misschien doen we dit wel eens, maar ook dan blijft het nog een probleem. Op de volgende wijze kunnen we hier echter adequaat op inspelen. De kinderen maken individueel een oefenopgave na het klassikale gedeelte van de les. De oefenopgave moet aansluiten bij het niveau van het klassikale gedeelte, tenminste in deze fase van het leerproces. De oefenopgave in deze les luidt: $312 : 4 =$. We nodigen drie kinderen uit de oefenopgave niet op een blaadje te maken, maar op het bord. Als we kinderen kiezen die op verschillende niveaus werken, komen er op het bord drie verschillende oplossingen te staan, die onderling vergeleken kunnen worden in de nabespreking. In tegenstelling tot wat in het traditionele rekenonderwijs min of meer gewoonte is, wordt hier naast de vraag of de som goed uitgerekend is, de vraag naar de manier van oplossen gevraagd. We krijgen bijvoorbeeld de volgende drie oplossingen op het bord staan:

$$\begin{array}{r|l}
 4 \overline{)321} & \\
 \underline{4} & \leftarrow 1 \\
 308 & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 268 & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 228 & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 188 & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 148 & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 108 & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 68 & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 28 & \\
 \underline{4} & \leftarrow 1 \\
 24 & \\
 \underline{4} & \leftarrow 1 \\
 20 & \\
 \underline{20} & \leftarrow \frac{5}{78} \\
 0 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 4 \overline{)312} & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 272 & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 232 & \\
 \underline{32} & \leftarrow 8 \\
 200 & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 160 & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 120 & \\
 \underline{120} & \leftarrow \frac{30}{78} \\
 0 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 4 \overline{)312} & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 272 & \\
 \underline{80} & \leftarrow 20 \\
 192 & \\
 \underline{160} & \leftarrow 40 \\
 32 & \\
 \underline{32} & \leftarrow \frac{8}{78} \\
 0 &
 \end{array}$$

Het is duidelijk, dat de verschillen in de drie onderscheiden oplossingen groot zijn. In de nabespreking gaan we erop in door met de klas na te gaan of elk van de drie opgaven goed is. Zijn er ook fouten gemaakt en zo ja, waarop berusten die fouten. Er zijn grofweg twee fouten te onderscheiden, namelijk fouten in de aanpak (het kind heeft de algoritme niet begrepen, maakt fouten in zijn niveau van aanpak) of fouten in de basisvaardigheden. We gaan hier bij de peilingen nog dieper op in. We stellen vragen als:

- welke oplossing is handiger, en waarom vind je dat?
- hoe komt Joop aan 50 keer (rond gedeeld)?
- hoe rekende hij dat gemakkelijk uit?

Met deze werkwijze beogen we dus een aanvankelijk spontaan leerproces te ondersteunen en te leiden, waarbij kinderen in principe uit eigen beweging verkortingen aanbrengen. Ze gaan langzamerhand over op slimmere, kortere oplossingen.

Nogmaals waarschuwen we ervoor niet te snel dit resultaat te willen opdringen. Laat de leerlingen hierin groeien. We menen dat dit groeiproces twee à drie maanden in beslag kan nemen. We zijn dan in de tweede helft van het leerjaar aangekomen en verplicht om na te gaan of iedere leerling voldoende vooruit gegaan is of dat er wat meer druk achter niveauverhogingen moet worden gezet.

De hier beschreven didactische principes hebben ook consequenties voor de les die we beschreven ($312 : 4 = \dots$).

We keren terug naar de werkwijze waarin de oplossingsniveaus op het bord staan en besproken worden. Essentieel bij de bespreking van de oplossingen op het bord is dat elke oplossing serieus wordt genomen en gewaardeerd. Het is immers zo dat iedere leerling probeert *op zijn/haar niveau* een oplossing te geven die goed is. Kritiek op de oplossing zou kunnen inhouden dat we de oplossing op een te laag niveau vinden staan, maar gaat er tevens van uit dat het kind beter, meer, zou kunnen. En dit laatste is in deze aanpak twijfelachtig. Willen we het 'groeiproces' stimuleren, dan wordt van ons verwacht dat we momenten in dit groeiproces weten te waarderen.

Aan het slot van de les geven we een aantal oefenopgaven op twee niveaus. De reden hiervan is na de bovenstaande uiteenzetting duidelijk: we sluiten hiermee aan op de natuurlijke differentiatie welke is opgetreden.

Bijvoorbeeld:

- een oefenopgave voor iedereen: $776 : 9$; $329 : 7$;
- een oefenopgave voor leerlingen die klaar zijn met de eerste twee sommen: $928 : 8$; $1222 : 13$.

Gedurende de tijd dat de kinderen aan deze opgaven werken, hebben wij de gelegenheid uitvoerige observaties te doen. Deze zijn belangrijk om te weten of er bij de hele klas of bij individuele kinderen sprake is van een zekere vooruitgang. Waar die vooruitgang ook na meerdere lessen uitblijft, dienen we in te grijpen en op grond van de observaties remediërend werk of herhalingen in te lassen. Observaties in deze zin hebben dus minder een beoordelend karakter en zijn meer een aanleiding om lacunes op te sporen en te verhelpen. Deze observaties zijn binnen dit leerproces dan ook opgenomen in het onderwijs zelf. Het nakijken van het leerlingenwerk kan klassikaal gebeuren of en-passant door de onderwijzer of achteraf, maar mag in ieder geval het observeren van de leerlingen niet belemmeren.

3.3 terugblik en vooruitblik

Als we deze eerste les in de fase 'het zoeken naar korte staarten' nog eens de revue laten passeren, blijkt dat we de les in drie delen hebben opgebouwd:

- 1 een klassikale introductie (waarin één deelsom gemaakt wordt).
- 2 een individuele opdracht met een nabespreking (één som, waarvan drie oplossingen op het bord);
- 3 een oefengedeelte (vier sommen in twee niveaus met de nadruk op een ruime mogelijkheid tot observeren).

De les, zoals hier beschreven, vergt 45 à 60 minuten. We hebben de les zo uitvoerig beschreven, omdat hij model staat voor een groot aantal andere lessen die in deze fase worden gegeven.

Een groot deel van de overige lessen kan echter korter zijn, met name door de nummers 1 en 2 van de gegeven indeling samen te voegen. Zo'n les duurt dan 30 minuten. Een aantal lessen beschrijven we uitvoerig. Wat vindt er plaats nadat we gestart zijn met de fase 'verkorten van de staart'? Het is uiteraard ondoenlijk alle lessen te beschrijven. De algemene wijze waarop onderwezen wordt, is reeds uitvoerig aan de orde geweest. Er zijn echter nog vele moeilijke klippen te omzeilen. Graag geven we daar aanwijzingen en suggesties voor. In onze stofkeuze moet een zekere opklimming in moeilijkheidsgraad zijn aangaande de volgende twee aspecten:

- het verkorten van de staart;
- in moeilijkheid opklimmende typen sommen.

Over de eerste kwestie hebben we reeds uitvoerig geschreven.

Ten aanzien van de in moeilijkheid opklimmende typen merken we op, dat de eindfase zal moeten zijn, dat kinderen in een aanvaardbaar aantal stappen een som als $47936 : 28 \dots$ kunnen oplossen. Deze fase moet eind klas vier, begin klas vijf bereikt worden. We beschrijven enkele lessen, die qua stofkeuze tot deze einddoelstelling moeten leiden.

Geval a: bijvoorbeeld $1000 : 15 = 67$ over 4.

Kenmerkend is dat we een deler kiezen die niet meer met de geautomatiseerde tafels tot tien gehanteerd kan worden.

Geval b: bijvoorbeeld $2204 : 19 = 166$.

Kenmerkend is dat het quotiënt groter is dan honderd.

Geval c: bijvoorbeeld $1744 : 16 = 109$ of $2996 : 13 = 230$ over 6.

Kenmerkend is dat in het quotiënt geen tientallen of eenheden voorkomen. Anders gezegd: de nullen spelen hier een complicerende rol.

Geval d: bijvoorbeeld $1534 : 59 = 26$.

Kenmerkend is dat de deler een groot getal is, wat problemen geeft bij het berekenen van tussenprodukten. Een apart eenvoudig geval zou een deling kunnen zijn als: $4913 : 60 \dots$

Geval e: we geven hier een type deling aan dat we als einddoelstelling ervaren. Een kind dat deze deling in betrekkelijk korte tijd kan maken, heeft zich de algoritme eigen gemaakt en kan – in principe – elke gewenste deling maken, hoewel men voor sommige leerlingen ook het eindniveau wat lager kan stellen, namelijk bij geval d. Voorbeelden: $16514 : 46 = 359$, of $20867 : 321 = 65$ over 2.

We hebben hiermee echter wel een aantal typen onderscheiden, die in het onderwijs door elkaar lopen.

In de paragraaf 'verkorting van de staarten' beschrijven we de lessen met delingen tot en met type b. De laatste twee behandelen we in de volgende paragraaf.

3.4 bijvoorbeeld: $1009 : 15$

We nemen als kernopgave, waaraan we alle opmerkingen ophangen, de deling:

$$1009 : 15 =$$

Deze deling is vooral een moeilijke opgave vanwege de grote deler. Met deze deler kunnen de tussenprodukten niet simpelweg uitgerekend worden door gebruik te maken van de tafels van vermenigvuldiging.

Het eerste probleem dat zich opdringt is de kwestie van het vermenigvuldigen met tien, met honderd, met duizend. Met andere woorden: het moet de kinderen duidelijk zijn of nog eens duidelijk worden gemaakt, dat naar analogie van $10 \times 6 = 60$ en $10 \times 7 = 7 \times 10 = 70$, ook geldt:

$$10 \times 15 = 15 \times 10 = 150 \text{ (15 met een nul erachter),}$$

$$10 \times 23 = 23 \times 10 = 230,$$

$$10 \times 97 = 97 \times 10 = 970.$$

En, in aansluiting daarop, geldt:

$$100 \times 6 = 6 \times 100 = 600 \text{ (6 met twee nullen),}$$

$$100 \times 15 = 15 \times 100 = 1500,$$

$$100 \times 23 = 23 \times 100 = 2300,$$

$$100 \times 97 = 97 \times 100 = 9700.$$

Deze kwestie van het rekenen met nullen wordt gerekend tot de voorwaarde van het beheersen van de basisvaardigheden. Ze zijn als zodanig onderwerp van oefening in oefenlessen. In het aanleren van de tafels in klas twee en drie wordt deze kwestie reeds bewust meegenomen en later uitgebreid. Nu echter, in de setting van deze algoritmeles, hebben we alle mogelijkheden om er nog eens aandacht aan te schenken. Het blijkt namelijk dat er altijd kinderen zijn die hier fouten maken. Hoe besteden we er aandacht aan? Eén mogelijkheid is de analogie-rij op het bord te schrijven en de kinderen de antwoorden te laten invullen:

$$10 \times 6 = \dots$$

$$10 \times 7 = \dots$$

$$10 \times 8 = \dots$$

$$10 \times 9 = \dots$$

$$10 \times 10 = \dots$$

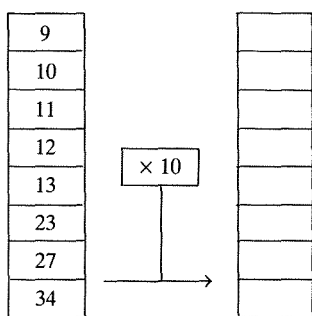
$$10 \times 11 = \dots$$

$$10 \times 12 = \dots$$

Wat zal 10×14 zijn? En 10×23 ?

Merk vooral op, dat de uitkomst door een omkering duidelijk gemaakt kan worden met de abacus: $10 \times 23 = 23 \times 10 = \dots$

Deze gang van zaken combineren we met het opzeggen van zo'n analogie- of 'familie'-rij.



De deling $1009 : 15$ kan met deze kennis, die de leerlingen eigenlijk al vanaf begin klas drie hebben, als volgt gemaakt worden:

$$\begin{array}{r}
 15 \overline{)1009} \\
 \underline{150} \quad 10 \\
 859 \\
 \underline{150} \quad 10 \\
 709 \\
 \underline{150} \quad 10 \\
 559 \\
 \underline{150} \quad 10 \\
 409 \\
 \underline{150} \quad 10 \\
 259 \\
 \underline{150} \quad 10 \\
 109 \\
 \underline{15} \quad 1 \\
 94 \\
 \underline{15} \quad 1 \\
 79 \quad \text{enz.}
 \end{array}$$

Maar het zal duidelijk zijn dat we hoger mikken. Dit brengt ons op het tweede probleem dat in dit soort lessen in deze fase aan de orde komt. Hoe rekenen we tussenprodukten van de deling uit? Wel, in dit opzicht maken we gebruik van flexibel rekenen, waarin het eigenschapsrekenen en vooral het hoofdrekenen een voorname rol speelt. Het zal aan het eind van het verhaal duidelijk zijn, dat de verzorging van dit onderdeel veel tijd vergt. Maar het is het waard, omdat het voor een goede progressie in de delingsalgoritme van bijzondere betekenis is, maar ook omdat het op zich grote waarde heeft voor de kinderen. Deze uitspraak adstrueren we nader.

Als we de opgave $1009 : 15$ door de klas laten maken, kan het gebeuren dat er kinderen zijn die de oplossing als volgt beginnen:

$$\begin{array}{r}
 15 \overline{)1009} \\
 \underline{750} \quad 50 \\
 259 \\
 \underline{150} \quad 10 \\
 \text{enz.}
 \end{array}
 \quad \text{of:} \quad
 \begin{array}{r}
 15 \overline{)1009} \\
 \underline{450} \quad 30 \\
 559 \\
 \underline{450} \quad 30 \\
 \text{enz.}
 \end{array}$$

Hoe komen deze kinderen aan respectievelijk $50 \times 15 = 750$ en $30 \times 15 = 450$? Er zijn

vele mogelijkheden, waarvan we er twee uitpikken. Ten eerste: $50 \times 15 = 750$ kan worden gevonden omdat de kinderen $100 \times 15 = 1500$ (15 met twee nullen) weten. 50×15 is de helft van 100×15 , dus het antwoord is te vinden door de helft van 1500 te nemen. De helft van 1500, of 1500 in twee gelijke delen splitsen, levert voor sommige kinderen nog wel enige problemen op. We kunnen die als volgt oppakken:

- van 1500 de helft nemen is niet zo makkelijk. Wie weet een getal in de buurt van 1500 waarvan je wel gemakkelijk de helft weet?

De kinderen antwoorden bijvoorbeeld:

- a) 1400: de helft is 700. En de helft van 100? Want $1500 = 1400 + 100$;
de helft van 100 is 50. Dus $700 + 50 = 750$;
- b) 1600: analoog aan boven;
- c) $1000 \rightarrow 500$
 $500 \rightarrow 250$

Sommige kinderen zien dit zo, vooral als ze de abacus gebruikt hebben.

Let erop, dat de notatie in tabelvorm op het bord zeer overzichtelijk en bevattelijk is, zoals:

1600	$\rightarrow$	800
100	$\rightarrow$	50
1500	$\rightarrow$	750

Ten tweede: $30 \times 15 = 450$ wordt soms door kinderen als volgt uitgerekend:

$30 \times 15 = 3 \times 15$ met een nul (familiesom), en:
 $3 \times 15 = 3 \times 10 + 3 \times 5 = 30 + 15 = 45$.

Ook deze werkwijze is uitermate belangrijk, omdat ze later tot verkortingen en snelle berekeningen kan voeren.

Uit het bovenstaande wordt duidelijk dat het hoofdrekenen en het eigenschapsrekenen op vele manieren een rol kan spelen bij het leren van de delingsalgoritme. We gaan nu terug naar de les waarin de deling $1009 : 15$ centraal gesteld is. We laten de kinderen individueel deze opgave maken en observeren ze om na te gaan of er zijn die verkortingen in de boven aangeduide zin maken. Eén of meer kinderen die er blijk van geven te werken met $50 \times$, $20 \times$, $30 \times$ of iets dergelijks, laten we de som, zoals zij die hebben opgelost, op het bord schrijven. Stel, dat de volgende oplossing op het bord komt te staan:

15	$\overline{)1009}$	
	<u>150</u>	10
	859	
	<u>300</u>	20
	559	
	<u>450</u>	30
	109	
	enz.	

We kunnen aannemen dat dit een oplossingsniveau is, dat voor de meeste kinderen nogal hoog gegrepen is. We gaan er als volgt op in: Hoe ben je aan 20 keer gekomen?

De leerling zal kunnen uitleggen dat hij uitgegaan is van 10 keer en toen verdubbeld heeft. We schrijven op het bord:

$$\begin{array}{l} 10 \rightarrow 150 \\ 20 \rightarrow 300 \end{array}$$

En we wijzen aan:

$$2 \times \begin{array}{l} 10 \rightarrow 150 \\ 20 \rightarrow 300 \end{array} \quad \text{dus ook } 2 \times$$

Hier staat dus het begin van een soort verhoudingstabel.

We gaan voort: Maar dan weet je ook wel hoeveel 40×15 is? Bord:

$$\begin{array}{l} 10 \rightarrow 150 \\ 20 \rightarrow 300 \\ 40 \rightarrow 600 \text{ (weer verdubbelen)} \end{array}$$

Wie weet nog een gemakkelijke vermenigvuldiging te bedenken? De klas komt met:

$$\begin{array}{l} 10 \rightarrow 150 \\ 20 \rightarrow 300 \\ 40 \rightarrow 600 \\ 80 \rightarrow 1200 \text{ (weer verdubbelen)} \end{array}$$

Of met:

$$\begin{array}{l} 10 \rightarrow 150 \\ 20 \rightarrow 300 \\ 40 \rightarrow 600 \\ 30 \rightarrow 450 \text{ (?) } \end{array}$$

De kinderen leggen uit:

$$\begin{array}{l} 10 \rightarrow 150 \\ 20 \rightarrow 300 \end{array}$$

Nu optellen:

$$30 \rightarrow 450$$

We vervolgen op het bord:

$$\begin{array}{l} 10 \rightarrow 150 \\ 20 \rightarrow 300 \\ 40 \rightarrow 600 \\ 30 \rightarrow 450 \\ 100 \rightarrow ? \end{array}$$

Gemakkelijk: 1500. En dan:

$$\begin{array}{l} 10 \rightarrow 150 \\ 20 \rightarrow 300 \\ 40 \rightarrow 600 \\ 30 \rightarrow 450 \\ 100 \rightarrow 1500 \\ 50 \rightarrow ? \end{array}$$

Nu rijzen problemen, totdat een van de kinderen zegt: ' $50 = 10 + 40$, dus optellen: $150 + 600 = 750$.'

Valt het kinderen op dat het de helft van 1500 is?

Dit inzicht kunnen we uitlokken door te vragen: ' $150 + 600 = 750$. Maar kun je hier nog op een andere manier aan komen? Wie ziet het?'

De kinderen komen met ' $300 + 450 = 750$ ' en ook met 'de helft van 1500 is 750.' Zo niet, dan wijzen we zelf nadrukkelijk op het laatste.

Zo bouwen we de verhoudingstabel, behorend bij de tafel van 15, op. Sommige kinderen zien in dat je dat even goed als volgt kunt doen:

1 → 15
2 → 30
4 → 60
enz.

Wil je nu 40×15 hebben, dan plak je er een nul aan.

Deze verhoudingstabel, zó op het bord genoteerd, geeft de kinderen alle steun om de tussenprodukten uit te rekenen. De gang van zaken staat model voor de didactische aanpak, die veel gebruikt zal moeten worden in het vervolg van het leerproces van de delingsalgoritme en aan te duiden als 'de methode van het verdubbelen en halveren' of 'de verhoudingstabel'. Vooruitlopend op latere fasen in het leerproces, kunnen we nu reeds zeggen dat de verhoudingstabel met het distributieve hoofdrekenen de rode draden zijn waaraan de kinderen zich, ook in veel moeilijker gevallen, steeds kunnen vastklampen, zoals bijvoorbeeld een deling met de deler 89. Daarnaast blijft, zoals gezegd, de methode van $7 \times 15 = 70 + 35 = 105$ van belang. Ook aan deze wijzen van distributief hoofdrekenen besteden we regelmatig aandacht, evenals de verdubbelsmethode.

Aan het slot van de les geven we weer een aantal oefenopgaven, liefst van twee of drie niveau-typen. Bijvoorbeeld:

<i>a-niveau:</i>	<i>b-niveau:</i>	<i>c-niveau:</i>
$516 : 8 =$	$1085 : 15 =$	$1955 : 17 =$
$1003 : 17 = *$	$624 : 16 =$	$1824 : 19 =$

Indien observaties daartoe aanleiding geven, gebruiken we de opgave, gemerkt met * om de oplossingsmanier nog eens voor de hele groep door te nemen, inclusief het opzetten van de verhoudingstabel en het distributieve hoofdrekenen. We beginnen opzettelijk met een oefenopgave die gemakkelijk is ($516 : 8$), om ook de langzaam lerende kinderen mee te krijgen en het nodige vertrouwen te geven.

Voor een les zoals hierboven beschreven, hebben we ongeveer 50 minuten nodig. Vooral de introductie van de verhoudingstabel zal nogal wat tijd vergen:

- 1 De kinderen proberen $1009 : 15$ te maken (5 à 10 minuten).
- 2 We bespreken de oplossingen, waarbij de verhoudingstabel een rol speelt (25 à 30 minuten).
- 3 De kinderen maken de oefenopgave in drie niveaus (10 à 15 minuten).
- 4 Eventuele nabespreking (10 à 15 minuten).

De bovenstaande les kan model staan voor drie à vier soortgelijke lessen. Geleidelijk

gaan we over op moeilijker gevallen. Maar we moeten hetgeen eerder aan de orde is geweest, steeds weer meenemen om iedereen de gelegenheid te geven zich de delingsalgoritme eigen te maken.

3.5 bijvoorbeeld: $2204 : 19$

In de volgende lesbeschrijving stellen we de deling $2204 : 19$ centraal. De werkwijze is analoog aan de zojuist beschreven aanpak. De kinderen zijn inmiddels vertrouwd geraakt met de verhoudingstabel. De meeste kinderen kunnen deze tabel ook opzetten, zij het dat er soms nog fouten in voorkomen. Als we op het bord schrijven $2204 : 19$ en de kinderen vragen dit uit te rekenen, kunnen we verwachten dat er meerdere oplossingen voorkomen. Op het bord laten we twee kinderen de opgave maken:

19 $\overline{)2204}$	100	19 $\overline{)2204}$	10
<u>1900</u>		<u>190</u>	
304		2014	
<u>190</u>	10	<u>380</u>	20
114		1634	
<u>95</u>	5	<u>760</u>	40
19		874	
<u>19</u>	1	<u>760</u>	40
0	116	114	
		<u>76</u>	4
		38	
		<u>38</u>	2
		0	116

- Welke oplossing vind je het handigst? Waarom?
- Had je al direkt kunnen zien dat het antwoord meer dan 100 zou zijn?

Kinderen zullen aangeven, dat $100 \times 19 = 1900$ (19 met twee nullen). Of anders gezegd en terug grijpend op de vroegere fasen, dat je er aan alle 19 kinderen best 100 kunt geven in één uitdeelrondje. Voor de ‘lange’ oplossingen maken we gebruik van de verdubbelsmethode en de verhoudingstabel:

$$\begin{aligned} 10 &\rightarrow 190 \\ 20 &\rightarrow 380 \\ 40 &\rightarrow 760 \end{aligned}$$

verkregen door verdubbelen. Deze tabel is afgeleid van de basistabel:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 19 \\ 2 &\rightarrow 38 \\ 4 &\rightarrow 76 \end{aligned}$$

Ook wijzen we hier op het distributieve hoofdrekenen: $4 \times 19 = 40 + 36 = 76$ om de uitkomsten vlug te bepalen en op de aanpak $4 \times (20 - 1)$.

We laten vervolgens weer enige oefenopgaven in niveaus maken. Bijvoorbeeld:

<i>a-niveau:</i>	<i>b-niveau:</i>
1258 : 16 =	1963 : 17 =
1677 : 14 =	3866 : 18 =

Daarvan bespreken we een of meerdere oplossingen. Zo is de laatste opgave geschikt om snel naar een volgend niveau door te stoten:

$$\begin{array}{r|l}
 18 \overline{) 3866} & \\
 \underline{1800} & 100 \\
 2066 & \\
 \underline{1800} & 100 \\
 266 & \\
 \underline{180} & 10 \\
 86 & \\
 \underline{72} & 4 \\
 14 & 214
 \end{array}$$

De eerste opmerking zal zijn: 'Het antwoord is meer dan 100, want $100 \times 18 = 1800$.' Vervolgens zal een aantal kinderen al bij voorbaat inzien dat het zelfs 200 keer kan: $200 \times 18 = 3600$, want $2 \times 18 = 36$. Tenslotte is het voor de kinderen betrekkelijk eenvoudig in deze fase de deling af te maken op de kortste manier. Het is zo langzamerhand gewent en noodzakelijk dat we eisen gaan stellen aan de korthed van de oplossingen. We moeten immers trachten te voorkomen dat een kind te lang in één fase blijft hangen. Want, gebeurt dit, dan blijkt het leerproces sterk afgeremd te worden. Soms hebben we bij bepaalde kinderen de indruk dat ze veel meer kunnen, maar om allerlei reden toch op een te laag niveau blijven steken. We moeten ze dwingen op hoger niveau te gaan werken. Dit kan door ze opdracht te geven de staart van de deling op de kortste manier op te schrijven en vooral ook door ze al veel eerder te leren om te schatten welke grote happen eraf gehaald kunnen worden. Een andere versnelling en verkorting die we beogen, is om de kinderen 4×18 uit het hoofd te laten uitrekenen. Hierbij speelt het zogenaamde werkgeheugen, dus het onthouden tijdens het werken, zoals bijvoorbeeld bij het cijferend optellen, een belangrijke rol. Om 4×18 uit het hoofd uit te rekenen, staan de kinderen immers in principe twee procedures ter beschikking, namelijk:

- 18 verdubbelen, onthouden 36, 36 verdubbelen (hierbij speelt het werkgeheugen geen voorname rol);
- $4 \times 18 = 4 \times 10 + 4 \times 8$.
Tafelprodukt: $4 \times 10 = 40$ opslaan in het werkgeheugen.
Tafelprodukt: $4 \times 8 = 32$ opslaan in het werkgeheugen.
Uit het werkgeheugen '40' halen en vermeerderen met '32' en vervolgens: $40 + 32 = 72$ (bij deze methode speelt het werkgeheugen dus wel een belangrijke rol).

3.6 een toetsles aan het einde van fase 2

We vragen ons af, hoe het op dit moment staat met de voortgang in het leren delen. We zijn in september met de delingsalgoritme gestart. In een maand hebben we een vier- à vijftal introductielessen gegeven en waren we toe aan de start van de tweede fase, getiteld 'het werken aan verkortingen van de staart'. Deze fase duurt tot ongeveer november.

De kinderen hebben in deze periode in ieder geval geleerd hoe je een deling aanpakt,

zodat zij in principe alle denkbare delingen kunnen maken. Waar het nog aan ontbreekt is de optimale effectiviteit, i.c. korte staarten en de daarbij horende vaardigheid in het berekenen van tussenprodukten. In deze verkorte procedures kunnen we grote verschillen tussen de leerlingen constateren. Het gevaar, dat we wellicht het overzicht zullen gaan missen als er sprake is van een te grote spreiding van het niveau waarop de leerlingen werken, proberen we op te lossen door veelvuldig te observeren en de inbreng van leerlingen te gebruiken bij de voortgang van het cijferen. Af en toe hebben we behoefte om de kinderen individueel werk te laten leveren, dat ons inzicht moet verschaffen over de wijze waarop de kinderen werken en in het type fouten dat zij maken. Daartoe verrichten we met een zekere regelmaat peilingen. De resultaten van deze peilingen worden zeer zorgvuldig geanalyseerd. Vervolgens trekken we uit de analyses conclusies, die dan van belang zijn voor het vervolg: we lassen corrigerend werk in, gaan op de ingeslagen weg voort, besluiten wat meer te oefenen, enzovoort. Deze analyses en conclusies kunnen zowel op de klas als geheel, alsook op individuele leerlingen slaan.

We maakten een peiling met vier delingsopgaven en besloten er maximaal 30 minuten voor uit te trekken. De opgaven zijn in twee niveaus ingedeeld. Het A-niveau is voor iedereen, het B-niveau is het vervolg voor de leerlingen die met het A-blad klaar zijn. Ook in de vorm lijkt deze aanpak op die welke gewoonlijk in de klas plaatsvindt. De moeilijkheidsgraad is als volgt:

- 862 : 7 is een deling op betrekkelijk eenvoudig niveau. Iedereen moet deze opgave kunnen maken.
- 6394 : 12 is een deling op het niveau dat we beogen bereikt te hebben, en waarover we uitsluitel willen hebben.
- 965 : 14 is van dezelfde orde als de voorgaande.
- 5894 : 23 is een deling die door een deel van de klas gemaakt moet kunnen worden.

Wellicht ten overvloede merken we op, dat we vier opgaven voldoende achten om inzicht te krijgen in de stand van zaken. We mikten immers nu nog niet op de snelheid. Tijdens de peiling observeren we de kinderen en helpen de kinderen die daarom vragen. We nemen enkele observaties in onze beschrijving op.

De les duurde ongeveer 25 minuten. Na 17 minuten waren alle leerlingen klaar met het A-gedeelte. Na 25 minuten hadden slechts zeven van de 21 leerlingen het B-gedeelte nog niet af. We vonden dit een opvallend en positief te waarderen resultaat. Weliswaar benadrukten we steeds, dat het niet om tempo gaat, maar het toont desalniettemin aan dat er geen kinderen zijn die met de opgaven totaal geen raad wisten. Er zijn kennelijk geen uitvallers, al zijn er verschillen. Deze conclusie wordt ondersteund door een globale indruk van het aantal fouten dat gemaakt wordt.

In het A-gedeelte maakt de hele klas slechts zes fouten, waarvan er twee duidelijk slordigheidsfouten zijn. In het B-gedeelte worden echter wel wat meer fouten gemaakt.

Een nadere analyse van het werk levert ons gegevens op over de aard van de fouten en over het niveau van werken. Ons interesseert vooral:

- a) of er 'principiële' fouten in het begrip van de delingsalgoritme worden gemaakt;
- b) of er fouten worden gemaakt in het gebruik van de basisvaardigheden.

Fouten die de basisvaardigheden betreffen, komen bijvoorbeeld in het werk van Annemieke voor. Zij heeft problemen met eenvoudige vermenigvuldigingen. De vermenigvuldiging 6×14 rekent ze uit door zes keer 14 op te tellen. Een te laag niveau! Andere kinderen maken fouten als:

$$7 \times 12 = 49$$

$$6 \times 14 = 74$$

$$5 \times 14 = 80$$

$$2 \times 23 = 466$$

In het werk van *Esther* zien we dat de 'nullenkwestie' nog veel problemen oplevert:

$$\begin{array}{r}
 23 \overline{) 5894} \\
 \underline{466} \\
 5498 \\
 \underline{466} \\
 5032 \\
 \underline{4080} \\
 4052 \\
 \underline{1080} \\
 3072 \\
 \underline{2060} \\
 1012
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 20 \\
 20 \\
 50 \\
 50 \\
 100
 \end{array}$$

Er komen merkwaardige, ogenschijnlijk onbelangrijke vergissingen voor, die mogelijk terug te voeren zijn tot concentratie-leemtes, zoals in *Wims* werk: ' $10 \times 12 = 84$ '. *Diana* schrijft eerst ' $30 \times 14 = 420$ ' op, maar twee regels verder schrijft ze: ' $3 \times 14 = 36$ '. De conclusie is gerechtvaardigd om dit 'onbelangrijke' fouten, of beter vergissingen te noemen. Ze zijn in ieder geval niet 'princiepelijk' en niet zo frequent voorkomend dat we daaruit tot corrigerende maatregelen zouden moeten besluiten.

Belangwekkender is het tweede aspect van de analyse, namelijk het niveau waarop de kinderen delen. We nemen daartoe als voorbeeld het werk van *Sonja* (B-blad). Dit meisje was als één van de eersten klaar.

$$\begin{array}{r}
 14 \overline{) 965} \\
 \underline{700} \\
 265 \\
 \underline{140} \\
 125 \\
 \underline{112} \\
 13
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 100 \rightarrow 1400 \\
 50 \rightarrow 700 \\
 10 \rightarrow 140 \\
 5 \rightarrow 70 \\
 1 \rightarrow 14
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 23 \overline{) 5894} \\
 \underline{4600} \\
 1294 \\
 \underline{1080} \\
 214 \\
 \underline{108} \\
 106 \\
 \underline{69} \\
 37 \\
 \underline{23} \\
 14
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 100 \rightarrow 2300 \\
 200 \\
 50 \\
 5 \\
 3 \\
 1
 \end{array}$$

Het valt op, dat Sonja veel gebruik maakt van de verhoudingstabel. Ze heeft op het B-blad de tabel die bij de tafel van 14 behoort opgeschreven, maar die van de tafel van 23 opgeschreven en later uitgegomd. Typerend is echter, dat ze de verhoudingstabel niet functioneel gebruikt. Ze kiest geen geschikte tussenprodukten uit om de deling op te lossen.

Immers, met deze hulptabel bij de hand zou je de deling als volgt kunnen maken:

$$\begin{array}{r|l}
 14 \overline{) 965} & \\
 \underline{840} & 60 \rightarrow \text{doet Sonja in twee stappen} \\
 125 & \\
 \underline{112} & 8 \\
 13 & 68
 \end{array}$$

Maar Sonja gebruikt de halveringsmethode:

$$\begin{array}{l}
 100 \rightarrow 1400 \\
 50 \rightarrow 700
 \end{array}$$

Ze beheerst die methode echter niet voldoende, hetgeen blijkt uit de tweede deling op haar blad:

$$\begin{array}{l}
 100 \rightarrow 2300 \\
 50 \rightarrow 1150
 \end{array}$$

Dit halveren is voor Sonja kennelijk te moeilijk, hetgeen onderstreept wordt door de aantekening onder aan het blad:

$$\begin{array}{r} 23 \\ 23 \\ \hline 72 \end{array}$$

Dit is verkregen door herhaald optellen en niet met behulp van de verhoudingstabel of door distributieve hoofdrekening. De conclusie uit deze analyse moet zijn, dat het voor Sonja (en voor sommige andere kinderen) belangrijk is de verhoudingstabel en het hoofdrekenen nog eens nadrukkelijk aan de orde te stellen.

Een zeer opvallende wijze van oplossen heeft *Wilco*. Het lijkt een hoog niveau van werken, maar bij nadere doordenking blijkt dat niet het geval. Het gaat om oplossingen zoals deze:

$$\begin{array}{r|l} 7 \overline{) 862} & \square \\ 86, & 123 \\ \hline & 128 \end{array}$$

Het 'verkeerde' in deze oplossing zit in de manier waarop Wilco het tussenprodukt uitrekt. Inderdaad, hij heeft de kortst denkbare staart gemaakt. Maar geen leerling kan ineens 7×123 uitrekenen, althans niet op het niveau van onze vierdeklassers. Hoe heeft Wilco dat gedaan? Hoewel we er niet zeker van zijn, menen we dat Wilco hier door proberen het antwoord heeft geraden. Proberen in de zin van een aantal vermenigvuldigingen maken, waarbij je probeert steeds dichterbij het deeltal te komen. Op deze wijze bijvoorbeeld: het deeltal is 862.

De afschatstrategie zou bijvoorbeeld zo kunnen beginnen:

$$7 \times 180$$

$$\begin{array}{r|l} 700 & 80 \\ 7 \overline{) 700} & \\ \hline & 560 \\ & 1260 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 700 \\ 560 \\ \hline 1260 \end{array}$$

Dit blijkt teveel te zijn.

Nu opnieuw proberen, maar minder dan 7×180 :

$$\begin{array}{r}
 100 \ 20 \\
 7 \overline{) \quad \quad \quad} \rightarrow \begin{array}{r} 700 \\ 140 \\ \hline 840 \end{array}
 \end{array}$$

Dit blijkt iets te weinig zijn, enzovoort.

De methode die hier gehanteerd wordt is op zich natuurlijk niet verkeerd. Maar ze is niet effectief en leidt niet tot een algoritme voor het delen.

We kunnen aan Wilco's werk ook zien dat zijn werkwijze nu al tot problemen leidt:

$$\begin{array}{r}
 14 \overline{) 965} \quad 0 \\
 \underline{700} \quad 50 \\
 265 \\
 \underline{259} \quad 217 \\
 6
 \end{array}$$

Wilco schrijft 217 op, maar dat is een schrijffout. Hij bedoelt 17, want hij heeft als antwoord 67 rest 6. Maar 17×14 is geen 259: de afschatstrategie heeft hier gefaald.

Hoe lossen de kinderen de sommen nu in het algemeen op? We tonen een aantal oplossingen en geven commentaar:

$$\begin{array}{r}
 12 \overline{) 6394} \\
 \underline{1200} \quad 100 \\
 5194 \\
 \underline{1200} \quad 100 \\
 3994 \\
 \underline{1200} \quad 100 \\
 2794 \\
 \underline{1200} \quad 100 \\
 1594 \\
 \underline{1200} \quad 100 \\
 394 \\
 \underline{120} \quad 10 \\
 274 \\
 \underline{120} \quad 10 \\
 154 \\
 \underline{120} \quad 10 \\
 34 \\
 \underline{24} \quad 2 \\
 10
 \end{array}$$

We hebben hier te maken met een zekere oplossingsstrategie, (te) zeker, (te) langzaam en nog met weinig gevoeligheid voor getallen.

Het volgende voorbeeld bevat die gevoeligheid al wel enigszins:

$$\begin{array}{r}
 12 \overline{) 6394} \quad \square \\
 \underline{2400} \quad 200 \\
 3994 \quad 200 \\
 \underline{2400} \quad 100 \\
 1594 \\
 \underline{1200} \quad 30 \\
 394 \\
 \underline{360} \quad 2 \\
 34 \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 532 \text{ R } 10 \\
 \underline{24} \\
 10
 \end{array}$$

Er wordt gebruik gemaakt van de verdubbelingsmethode. Nog niet extreem, maar het begin is er. De leerling heeft er geen uitgeschreven verhoudingstabel voor nodig. Het kan ook heel anders, wat uit het volgende voorbeeld blijkt.

$$\begin{array}{r}
 12 \overline{) 6394} \quad 500 \\
 \underline{6000} \\
 394 \quad 25 \\
 \underline{300} \\
 94 \\
 \underline{80} \quad 10 \\
 14
 \end{array}$$

Deze leerling maakt gebruik van de halveringsstrategie:

$$\begin{aligned}
 1000 \times 12 &= 12000 \rightarrow 500 \times 12 = 6000, \text{ dus:} \\
 50 \times 12 &= 600 \rightarrow 25 \times 12 = 300.
 \end{aligned}$$

Een vermenging van halverings- en verdubbelingsstrategieën laat het volgende voorbeeld zien:

$$\begin{array}{r}
 12 \overline{) 6394} \quad \begin{array}{l} 500 \\ 40 \end{array} \\
 \underline{6000} \\
 394 \\
 \underline{380} \\
 14 \\
 \underline{12} \\
 2
 \end{array}$$

Maar met een fout: $40 \times 12 = 360$. Dit komt wellicht omdat je de stap $20 \times 12 = 240$ op het moment dat je 40×12 wilt weten, nog niet hebt opgeschreven.

De conclusie uit het bovenstaande is, dat we in korte lesjes het 'handig rekenen' regelmatig aan de orde moeten stellen, met name het verdubbelen, halveren, rekenen met nullen en het distributieve hoofdrekenen ($4 \times 23 = 80 + 12 = 92$).

Een voorbeeld van zo'n kort lesje kan de nabespreking van de peiling zijn. We besluiten deze beschrijving met enkele momenten uit die korte nabespreking, waarin het accent op het handig rekenen komt te liggen.

Geerten had de deling als volgt gemaakt:

$$\begin{array}{r}
 23 \overline{) 5894} \\
 \underline{4600} \quad 200 \\
 1294 \\
 \underline{1150} \quad 50
 \end{array}$$

De vraag luidde: 'is die hap van 50 wel goed?'

Kennelijk was deze stap voor Geerten moeilijk. Op de vraag, hoe hij het uitgerekend had, was zijn antwoord nogal verrassend – zeker gezien de voorafgaande lessen waarin verdubbelen de nadruk had gekregen: 'Wel, $50 \times 3 + 50 \times 20 = 150 + 1000 = 1150$.'

De oplossing van Geerten is uiteraard acceptabel, heel goed zelfs, maar biedt de gelegenheid om er nu op terug te komen. Als op het bord wordt geschreven:

$$23 \overline{) 5894}$$

zegt een leerling: 'Dat gaat 200 keer.' 'Hoe weet je dit antwoord zo gauw?' De leerling antwoordt: 100 keer is 2300, 200 keer is het dubbele.'

De som op het bord wordt verder ingevuld:

$$\begin{array}{r}
 23 \overline{) 5894} \\
 \underline{4600} \quad 200 \\
 1294
 \end{array}$$

Geerten schrijft 50 keer op. Hij rekende $50 \times 3 + 50 \times 20$. Kan dat ook anders?

Een leerling neemt de uitdaging aan. Hij zegt:

... '100 keer is 2300.

... 50 keer is de helft, dus 1150.'

Vervolgens wordt de som afgemaakt. De les wordt daarop beëindigd. We beoogden

hiermee bij een aantal kinderen een verbetering van het rekenen te bewerkstelligen betreffende het handig rekenen met behulp van halveren en verdubbelen, en het distributieve hoofdrekenen. De vrijheid die we de kinderen laten om die handigheden op te pikken en toe te passen bij het cijferen, betekent dat we ze niet tot die stap dwingen, maar ze volop gelegenheid geven om deze werkwijze te benutten.

4 NAAR DE EINDALGORITME

4.1 vooruitblik

De vorige paragraaf heette ‘verkortingen’. In die beschrijving vormden twee kernpunten de hoofdmoot.

Ten eerste:

- Hoe gaat het met zo’n staartdeling?
- Wat moet ik erachter denken? (Het model van verdelen).
- Hoe schrijf ik de staartdeling op?

Ten tweede:

- Hoe kan ik de staartdeling effectiever oplossen? (Verkorten van de staart).
- Welke rekenmiddelen staan mij daarbij ten dienste? (Het handig rekenen en de basisvaardigheden).

We moeten ons er goed van bewust zijn dat de kinderen in principe delingen kunnen maken en dat het leerproces nu in een ander stadium is, namelijk dat van consolidatie en aanscherping van het geleerde. Het is de bedoeling dat dit plaatsvindt in de resterende periode van het vierde leerjaar. De kinderen moeten nu leren ‘alle’ voorkomende opgaven handig en snel op te lossen. Een belangrijk moment in de opbouw van de algoritme was toen de verhoudingstabel en/of het distributieve hoofdrekenen gebruikt moesten worden om deelprodukten te berekenen. Het uitrekenen van een tussenprodukt als 7×79 zal immers vaak niet geheel uit het hoofd kunnen gebeuren, maar veelal via een genoteerde verhoudingstabel of met behulp van de distributieve eigenschap, dus als volgt:

$$7 \times 79 = 7 \times 70 + 7 \times 9 = 490 + 63 = 553, \text{ of via } 7 \times (80 - 1) = \dots$$

De hierboven bedoelde aanscherping van de algoritme betreft sommen van het type:

$$\begin{aligned} 1534 : 59 &= 26 \\ 4913 : 60 &= 81 \text{ over } 53 \\ 16514 : 46 &= 359 \end{aligned}$$

en op de grens van wat we nog zinvol achten:

$$20867 : 321 = 65 \text{ over } 2.$$

We zullen een beperkt aantal lessen beschrijven. Wat uitvoerig aan de orde zal komen, is het fenomeen van de toetsles, gevolgd door een analyse van het werk van de leerlingen. Peilingen stellen ons immers in staat – evenals de tijdens de lessen plaatsvindende observaties – om zowel het leerproces van de totale groep als dat van de in-

dividuele leerlingen bij te sturen. In deze periode ligt de nadruk op contextproblemen in het rekenonderwijs, die we tussen de algoritmelessen door strooien.

4.2 voorbeeld van een les

Een voorbeeldles in het tweede semester van het vierde leerjaar. We starten de les met een verhaal.

‘In de haven worden schepen gelost en geladen. Er is zojuist een kustvaarder uit Midden Amerika binnengekomen. Wat er in het ruim zit? Je raadt het al: bananen! Ze zitten in kisten, die met een kraan uit het ruim worden gehesen. Eén voor één, een heel werk. Maar na een dag werken staat de hele lading toch op de kade. Het zijn precies 1534 kisten. Daar komt de eerste vrachtauto al. Er gaan op de vrachtauto 59 kisten. Als de chauffeur van de hefruc probeert er nog één op te krijgen, valt die kist eraf. Het gaat niet. De vrachtauto vertrekt.’

De vraag luidt: ‘Hoeveel vrachtauto’s zullen er voor deze lading nodig zijn?’ De kinderen krijgen volop de gelegenheid te reageren. Ze hebben het erover dat je dat nooit kunt zeggen. Waarom niet? Wel, de ene vrachtvragen is de andere niet, is het juiste antwoord van één van de leerlingen. Misschien stapelen ze de kisten de volgende keer wel beter, zegt een ander. Ook goed. Een derde leerling zegt, dat de vraag dan helemaal niet te beantwoorden is. Kunnen ze het met tien vrachtwagens af? Nee, dat lijkt wat weinig. Waarom? Erik legt dat uit. Het is voor de meesten moeilijk te volgen, maar het komt erop neer dat hij zegt: ‘Laten we aannemen dat er op alle auto’s zestig kisten gaan, dan kun je met tien vrachtauto’s zeshonderd kisten vervoeren. Maar er waren er 1534.’ Laten we nu eens zeggen dat elke vrachtauto precies 59 kisten kan vervoeren, omdat ze van hetzelfde type zijn, of dat één auto voor het vervoer zorgt. Hoeveel vrachtauto’s heb je dan nodig? Of: hoeveel keer moet die ene auto rijden? Na amper twee minuten zijn de eerste kinderen klaar en weer twee minuten later laten we de hele groep stoppen, hoewel nog niet iedereen het antwoord al heeft gevonden. De twee kinderen die voor het bord mogen komen, laten de volgende oplossingen zien:

a) $26 \times 59 = 1534$

	50	9	
20			1000
			180
6			300
			54
			1534

b)

$$\begin{array}{r} 59 \overline{) 1534} \\ \underline{1180} \\ 354 \\ \underline{354} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 20 \\ 6 \\ 26 \end{array}$$

Deze aanpakken waren te verwachten, gezien de opbouw van de les en de vraag 'Kunnen ze het met tien vrachtwagens af?' Deze vraag leidt namelijk tot een benaderingsprocedure in de geest van 'tien vrachtwagens zijn te weinig, honderd te veel, maar dertig is ook te veel', enzovoort.

Hierbij wordt het produkt 'afschattend' berekend:

$$\begin{array}{ll} 10 \times 59 = 590 & \text{en} \quad 100 \times 59 = 5900 \\ 20 \times 59 = 1080 & \text{en} \quad 30 \times 59 = 1770 \end{array}$$

De tweede oplossing is de bekende en zo langzamerhand zeer vertrouwde oplossing die binnen de algoritmeleergang valt. In dit geval leggen we hier de nadruk op. Ze geeft ons de mogelijkheid om met de leerlingen de in dit geval vrij eenvoudige verhoudingstabel op te bouwen:

$$\begin{array}{ll} 1 \rightarrow 59 & 3 \rightarrow 177 \\ 2 \rightarrow 118 & 6 \rightarrow 354 \end{array}$$

En ook om nog eens te wijzen op de distributieve werkwijze $3 \times 59 = 150 + 27$ of $3 \times 60 - 3 \times 1$.

We geven vervolgens een aantal oefenopgaven.

$$\begin{array}{lll} 1633 : 16 = & 5841 : 17 = & 14672 : 37 = \\ 5372 : 65 = & 4639 : 88 = & 9378 : 46 = \end{array}$$

Deze sommen worden door de leerlingen individueel gemaakt, waarbij wij steun bieden waar dat gewenst is en waarbij we vooral observeren, om die observaties weer te gebruiken bij de volgende bespreking van één of meer sommen uit de collectie.

Laten we eens kijken naar de som $5841 : 17$. In de eerste plaats willen we dat leerlingen grofweg het antwoord weten.

Dus vragen we:

- Schat het antwoord eens.
- Zal het antwoord meer dan 100, meer dan 1000 zijn?
- Zal het antwoord meer dan 200, 300, 500 enzovoort zijn?

De groep zal hierop kunnen reageren door te zeggen dat:

- 1 Het antwoord meer dan 100 zal zijn, want $100 \times 17 = 1700$ (100 ronden; je bent er dan in de eerste rond 1700 kwijt; je hebt dan nog genoeg over).
- 2 Het antwoord minder dan 1000 zal zijn, want $1000 \times 17 = 17000$. Zoveel zijn er niet te verdelen.
- 3 Het antwoord tussen de 100 en 1000 zal liggen.

Een enkele leerling zal misschien direkt, ook zonder opgeschreven verhoudingstabel, zeggen dat het meer dan 200 keer gaat, omdat $200 \times 17 = 3400$. En misschien

zijn er kinderen die al kunnen zeggen dat het meer dan 300 keer zal gaan, omdat $300 \times 17 = 5100$.

Dit soort schattingen is uiteraard belangrijk. We maken de deling af, waarbij dit op het bord komt te staan:

$$\begin{array}{r|l} 17 \overline{)5841} & \\ \underline{5100} & 300 \\ 741 & \\ \underline{680} & 40 \\ 61 & \\ \underline{51} & 3 \\ 10 & 343 \end{array}$$

De 'happen' kunnen gevonden worden met behulp van de verdubbelingstabel of door middel van hoofdrekenen ($3 \times 17 = 30 + 21 = \dots$). Beide methoden zijn goed bruikbaar. Deze les staat model voor een groot aantal analoge lessen. We achten het gewenst per week één les met dit type te laten rekenen.

Een voorbeeld:

$$\begin{array}{r|l} 17 \overline{)5841} & \\ \underline{5100} & 300 \\ 741 & \\ \underline{680} & 40 \\ 61 & \\ \underline{51} & 3 \\ 10 & 343 \end{array} \quad \text{accoord!}$$

En:

$$\begin{array}{r|l} 17 \overline{)5841} & \\ \underline{4250} & 250 \\ 1591 & \\ \underline{850} & 50 \\ 741 & \text{enzovoort; niet accoord!} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1000 \rightarrow 17000 \\ 500 \rightarrow 8500 \\ 250 \rightarrow 4250 \end{array}$$

De verhoudingstabel moeten de kinderen kunnen maken, maar in eenvoudige gevallen streven we ernaar de vermenigvuldiging uit het hoofd te laten maken ($4 \times 17 = 40 + 28 = 68$).

Binnen de algoritmelessen bouwen we steeds oefenmomenten in, waarin leerlingen zich een hoog niveau van werken eigen kunnen maken. 'Hoog' in de relatieve zin, tegen de achtergrond van hun eigen voorafgaande prestaties en niet vergeleken met die van anderen. We bieden de leerlingen steeds volop gelegenheid om de geleerde algoritme aan te scherpen en te verbeteren. Zowel in het gedeelte van de les, waarin we van het groepsproces of van het idee van een enkeling gebruik maken om de hele groep verder te krijgen, als in het individuele werk van de kinderen.

4.3 toetslessen

Het onderwijsleerproces heeft in het tweede deel van het vierde leerjaar een ander karakter dan in het eerste deel. De delingsalgoritme komt minder aan bod, het leerproces is minder intensief. Daardoor ontstaat het gevaar dat we het overzicht verliezen over de vorderingen die de groep maakt en die individuele leerlingen maken. Het blijft gewenst om regelmatig zeer nadrukkelijk na te gaan of het niveau van werken op peil blijft of zelfs een zekere progressie vertoont. We beschrijven in het volgende twee toetslessen die in het vierde leerjaar gehouden zijn en besteden uitvoerig aandacht aan de conclusies en consequenties die we uit beide peilingen hebben getrokken.

Let wel; het betreft hier een andere klas dan die in de derde paragraaf beschreven werd!

Een peiling in het vierde leerjaar

We besluiten om tussen sinterklaas en kerstmis in klas vier een peiling te houden. De peiling vindt plaats in een lesje van dertig minuten. We stellen twee werkbladen samen. Het is de bedoeling dat de kinderen met het A-blad beginnen. We verwachten dat de hele klas de vier sommetjes binnen een half uur af zal hebben. De vier sommetjes zijn opklimmend in moeilijkheid. Het B-blad bevat zes sommetjes, waarvan de laatste naar onze smaak de lastigste is. Een in beide bladen voorkomend principe is het opnemen van zowel opgaande als niet-opgaande delingen.

Naam:	tijd:	A
Wat iedereen af moet hebben:		
$573 : 8 =$	$666 : 18 =$	
$1966 : 12 =$	$8749 : 28 =$	
Reken hier uit:		

Naam:	tijd:	B
Voor als je klaar bent:		
$980 : 7 =$	$17005 : 9 =$	
$1635 : 15 =$	$6237 : 54 =$	
$2977 : 14 =$	$34796 : 28 =$	
Reken hier uit:		

Het niveau van de opgaven schatten we als volgt in:

Niveau 1: 573 : 8 (A-blad)

980 : 7 (B-blad)

Niveau 2: 1966 : 12 (A-blad)

666 : 18 (A-blad)

1635 : 15 (B-blad)

2977 : 14 (B-blad)

Niveau 3: 8749 : 26 (A-blad)

17005 : 9 (B-blad)

6237 : 54 (B-blad)

Niveau 4: 34796 : 28 (B-blad)

De niveau-bepaling hangt af van de grootte van de getallen, de 'nullen', de grootte van de uitkomst e.d., en is door ons grofweg in vier hoogte-bepalingen samengesteld. In zekere zin is de indeling discutabel, omdat voor verschillende kinderen verschillende moeilijkheden een ander gewicht hebben. We letten op werkwijze en tempo. Tot en met niveau 2 moeten naar onze schatting de opgaven door iedere leerling gemaakt kunnen worden. Niveau 4 moet voor een redelijk aantal kinderen haalbaar zijn.

We proberen de les in een ontspannen sfeer te laten beginnen. We leggen onze bedoelingen uitvoerig uit. De situatie die ontstaat is niet optimaal. De groep is gewoonlijk nogal rumoerig, snel afgeleid en weinig gemotiveerd. Het blijkt dat twee leerlingen aanvankelijk geen serieuze poging willen doen om het werk goed te maken. We zetten de groep aan het werk en wenden ons tot de twee slecht gemotiveerde kinderen. Eén wordt van het groepje waarin hij zit losgemaakt en apart gezet. Het lukt om ook deze leerlingen redelijk te motiveren.

Tijdens het werk valt het op dat vele leerlingen steun vragen aan de onderwijzer. Het is van groot belang dat we die steun geven, maar ook dat we opschrijven waaruit die hulp bestaat, welke problemen de kinderen hebben.

De resultaten van het werk van de kinderen vallen niet mee. Het A-gedeelte dat slechts vier sommen bevatte, levert voor een deel van de leerlingen grote problemen op. Uit de lijst met het aantal fouten blijkt, dat slechts zes leerlingen het A-gedeelte foutloos maakten, waaronder één leerling die de volle dertig minuten voor deze sommen nodig heeft (Monique W.). Eén leerling heeft niets goed (Monique S.): zij heeft één deling gemaakt en deze bevat fouten. Het is duidelijk dat deze peiling ons verplicht tot het nemen van maatregelen. Welke dat zijn, zal ons de analyse van de gemaakte fouten moeten leren.

Op grond van analyse van het werk signaleren we vier categorieën fouten, waarvan we een aantal nader specificeren kunnen. We laten deze de revue passeren.

Categorie A: vermenigvuldigfouten

– type a₁: fouten in de tafels en het hoofdrekenen, bijvoorbeeld:

$$6 \times 7 = 41, \text{ of}$$

$$6 \times 18 = 126$$

- type a_2 : fouten in het rekenen met nullen bij het vermenigvuldigen, bijvoorbeeld:

$$3 \times 160 = 48, \text{ of} \\ 30 \times 20 = 60$$

- type a_3 : fouten in het berekenen van tussenprodukten, bijvoorbeeld:

$$12 \times 18 = 186,$$

eventueel met het kruispuntenmodel berekend

Categorie B: fouten in het aftrekken

- type b_1 : fouten in de basisvaardigheden, bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{r} 195 \\ 73 \\ \hline 112 \end{array}$$

- type b_2 : fouten in de algoritme van de aftrekking, bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{r} 8749 \\ 7800 \\ \hline 549 \end{array}$$

of:

$$\begin{array}{r} 36 \\ 18 \\ \hline 28 \end{array}$$

Categorie C: fouten in de algoritme van de deling

Categorie D: slordigheidsfouten

De onderscheiding van de fouten in categorieën en typen is niet eenduidig. Soms weet men niet hoe een fout moet worden beoordeeld. Nemen we Faisel als voorbeeld, dan zien we deze fouten:

$$6 \times 18 = 126 \quad \text{en} \quad 7 \times 26 = 162.$$

Dit zijn misschien fouten van het type a_1 , misschien ook van het type a_3 (berekenen van tussenprodukten). Een fout als $10 \times 26 = 160$ zal wel een slordigheidsfout zijn, maar is $3 \times 12 = 39$ dat ook?

We hebben een lijst van leerlingen gemaakt en naar de fouten gekeken. De volgorde van de namen in de lijst is die van het tijdstip van inleveren. ‘Onder de streep’ staan de kinderen die zelfs het A-gedeelte niet af hadden. We beperken ons in het volgende tot het A-gedeelte, omdat dit reeds voldoende informatie verschaft.

		aantal fouten	fouten-typen							niveau van algoritmiseren				
			a ₁	a ₂	a ₃	b ₁	b ₂	c	d	A	B	C	D	E
Conchita		0												x
Faisel	4	2	x		x	x								x
Koen	..	2							x			x		
Saskia	..	1						x					x	
Simone	..	0										x		
Marco	..	0										x		
Eddy	..	2					x						x	
Annelies	..	0										x		
Laura	..	1						x					x	
Marvin	..	1			x								x	
Jan-Willem	..	1			x							x		
Petra	..	0										x		
Peter	..	2			x				x			x		
Diana	..	0										x		
Loes	..	3						x	x			x		
Marcel	..	3			x		x					x		
Berry	..	2			x								x	
Christiaan	..	1							x			x		
Gladys	..	2			x						x			
Lucienne	..	2	x					x				x		
Brenda	..	2	x						x			x		
Erwin	..	2			x		x					x		
Monique W.	4	0										x		
Kees	3	2			x				x			x		
Angelique	3	2	x		x							x		
Jopie	3	3	x					x	x		x			
Monique S.	1	1							x		x			

Uit de analyse van het werk valt direct het relatief grote aantal fouten van het type a₃ en b₂ op, fouten die te maken hebben met het berekenen van deelprodukten en het aftrekken. De fouten van b₂ zijn 'begrijpelijk', omdat de aftrekkingen het kernpunt van de delingsalgoritme uitmaken – er komen dus heel veel aftrekkingen in deze opgaven voor. We geven een aantal voorbeelden van deze fouten (type a₃):

$$\begin{array}{r}
 26 \overline{) 290749} \\
 \underline{7800} \quad 300 \\
 949 \\
 \underline{7800} \quad 30 \\
 169 \\
 \underline{156} \quad 5 \\
 1335
 \end{array}$$

(Jan Willem)

Het werk van Berry:

$$\begin{array}{r|l}
 26 \overline{) 8749} & \\
 \underline{7800} & 300 \\
 949 & \\
 \underline{780} & 30 \\
 169 & \\
 \underline{156} & 5 \\
 13 & 335
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 16 \\
 \underline{26} \times \\
 36 \\
 60 \\
 \underline{120} \\
 200 \\
 \hline
 416
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 1 \times 26 = 26 \\
 2 \times 26 = 52 \\
 4 \times 26 = 104 \\
 8 \times 26 = 208 \\
 16 \times 26 = 416
 \end{array}$$

Berry laat iets bijzonders zien: hij schrijft de 'tabel van 26 op' in machten van twee, dus door verdubbeling. Maar 16×26 rekt hij cijferend uit (zie recht boven op zijn werkblad). Hij heeft dezelfde fout gemaakt als Jan-Willem. Overgeschreven?

Type b_2 :

Het werk van Erwin:

$$\begin{array}{r|l}
 12 \overline{) 1966} & \\
 \underline{1200} & 100 \\
 766 & \\
 \underline{480} & 20 \\
 386 & \\
 \underline{240} & 20 \\
 146 & \\
 \underline{120} & 10 \\
 26 & \\
 \underline{24} & 2 \\
 2 & 152
 \end{array}$$

Het werk van Laura:

$$\begin{array}{r}
 26 \overline{) 8749} \\
 \underline{7800} \quad 300 \\
 549 \\
 \underline{520} \quad 20 \\
 29 \\
 \underline{26} \quad 4 \\
 3324
 \end{array}$$

Behalve het aantal fouten en de typering van de fouten, is het niveau van algoritmisering waarop de leerlingen zich bevinden van belang. We constateren een aantal niveaus van algoritmisch gedrag. Ook deze zullen we categoriseren. We onderscheiden:

Niveau A: de leerling heeft moeite met het begrip deling en weet niet of nauwelijks hoe de deling moet worden opgeschreven.

Niveau B: de leerling gebruikt het principe van de herhaalde aftrekking op een laag niveau.

Niveau C: de leerling neemt 'happen' van honderd, tien en eenheden in deze volgorde.

Niveau D: de leerling neemt in één keer 'happen' van honderdtallen, tientallen en eenheden.

Niveau E: de leerling rekt de deling op een standaard-niveau uit.

We geven enkele voorbeelden.

Het werk van Lucienne:

$$\begin{array}{r}
 26 \overline{) 8749} \\
 \underline{2600} \quad 100 \\
 6199 \\
 \underline{2600} \quad 100 \\
 3549 \\
 \underline{2600} \quad 100 \\
 949 \\
 \underline{1300} \quad 50 \\
 649 \\
 \underline{260} \quad 10 \\
 389
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 389 \\
 \underline{260} \quad 10 \\
 129 \\
 \underline{104} \quad (50) \\
 25 \\
 375
 \end{array}$$

Het werk van Martin:

$$\begin{array}{r}
 26 \overline{) 8749} \\
 \underline{8400} \quad 400 \\
 349 \\
 \underline{2600} \quad 10 \\
 89 \\
 \underline{844} \\
 5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 1 \times 26 = 260 \\
 2 \times 26 = 52 \\
 3 \times 26 = 78 \\
 4 \times 26 = 104 \\
 5 \times 26 = 130 \\
 6 \times 26 = 156 \\
 7 \times 26 = 182
 \end{array}$$

Dit is een oplossing op niveau D. Martin schrijft naast de deling de tafel van 26 en schrijft ook deelprodukten met nullen op.

Het werk van Jopie:

$$\begin{array}{r}
 12 \overline{) 1966} \quad 20 \\
 \underline{240} \\
 1726 \\
 \underline{260} \quad 10 \\
 1460 \\
 \underline{260} \quad 10 \\
 1200 \\
 \underline{520} \quad 40 \\
 720 \\
 \underline{510} \quad 40 \\
 200 \\
 \underline{120} \quad 10 \\
 1709 \\
 60 \\
 \underline{58} \quad 5 \\
 38 \\
 \underline{24} \quad 2 \\
 14 \\
 \underline{12} \quad 1 \\
 2
 \end{array}$$

Jopie heeft deze deling op niveau B opgelost.

Het werk van Loes:

$$\begin{array}{r}
 26 \overline{) 879} \\
 \underline{5200} \quad 200 \\
 3549 \\
 \underline{1300} \quad 50 \\
 2249 \\
 \underline{1300} \quad 50 \\
 949 \\
 \underline{260} \quad 10 \\
 689 \\
 \underline{260} \quad 10 \\
 429 \\
 \underline{260} \quad 10 \\
 179 \\
 \underline{130} \quad 5 \\
 49
 \end{array}$$

x5

$$\begin{array}{r}
 26 \\
 \times 200 \\
 \hline
 1200 \\
 4000 \\
 \hline
 5200
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 26 \\
 \times 50 \\
 \hline
 300 \\
 1000 \\
 \hline
 1300 \quad (10)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 26 \overline{) 49} \\
 \underline{26} \quad 1 \\
 2336
 \end{array}$$

Dit is een oplossing op niveau C. De tussenprodukten worden niet door verdubbeling en halvering berekend, maar met behulp van het kruispuntenmodel.

Het werk van Koen:

$$\begin{array}{r}
 12 \overline{) 1966} \\
 \underline{1200} \quad 100 \\
 766 \\
 \underline{600} \quad 50 \\
 166 \\
 \underline{120} \quad 10 \\
 46 \\
 \underline{38} \quad 3 \\
 08163
 \end{array}$$

Dit is eveneens werk op C-niveau.

Een apart geval is Gladdys, die de sommen op D-niveau uitrekent, maar zeer veel problemen heeft met het berekenen van de tussenprodukten en met het aftrekken. Alle tussenprodukten worden met een concrete kruispuntentekening uitgerekend. Bij het aftrekken worden de inwisselingen concreet door doorstrepen en erboven schrijven gedaan. Dit geeft een chaotisch beeld van het werk, dat een voortzetting van het proces van algoritmiseren zou kunnen blokkeren.

Een andere opvallende leerling is Marcel. Hij volgt de verdubbelingsmethode om tussenprodukten te berekenen in uiterste consequentie:

$$\begin{array}{r}
 8 \overline{) 573} \\
 \underline{128} \\
 445 \\
 \underline{256} \\
 289 \\
 \underline{256} \\
 33 \\
 \underline{32} \\
 1
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 16 \quad 1 \times 8 = 8 \\
 \quad 2 \times 8 = 16 \\
 \quad 4 \times 8 = 32 \\
 \quad 8 \times 8 = 64 \\
 \quad 16 \times 8 = 128 \\
 \quad 32 \times 8 = 256
 \end{array}$$

Het sommetje bevat een aftrekfout. Toch beheerst Marcel ook de halveringsstrategie.

$$\begin{array}{r}
 12 \overline{) 1966} \\
 \underline{1200} \\
 766 \\
 \underline{580} \\
 186 \\
 \underline{173} \\
 14 \\
 \underline{12} \\
 2
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 100 \quad 1 \times 12 = 12 \\
 50 \quad 2 \times 12 = 24 \\
 1 \quad 3 \times 12 = 36 \\
 6 \quad 4 \times 12 = 48 \\
 170 \quad 5 \times 12 = 60 \\
 172 \quad 6 \times 12 = 72
 \end{array}$$

Het is moeilijk dit niveau in de onderscheiden niveaus in te passen. De peiling geeft dus aan dat er meer aandacht moet worden besteed aan deze delingssommen. De basisvaardigheden, in dit geval de tafels van vermenigvuldiging, en de aftrekkingen onder de twintig blijken weliswaar nauwelijks fouten op te leveren, maar zullen toch

in de aandacht moeten blijven om de routine en de vaardigheid te vergroten. Maar we zullen ook meer aandacht moeten besteden aan de algoritme zelf: het aftrekken en het handig rekenen binnen het vermenigvuldigen. Daarbij moeten we het rekenen met nullen niet vergeten. Om een optimaal resultaat te krijgen, lijkt het 't beste veel korte lesjes te geven. Dus elke dag drie sommen op het bord, afgesloten door een korte bespreking waarin de nadruk valt op bovenstaande zaken. Meer lesjes dus, maar in totaliteit niet beduidend meer tijd. We zullen over een maand of twee bekijken of deze werkwijze resultaat heeft gehad.

Opnieuw een peiling

Nu we ruim twee maanden verder zijn en op grond van de uitkomsten van de december-peiling meer nadruk hebben gelegd op korte algoritmelesjes en in versterkte mate oefeningen in de basisvaardigheden hebben ingelast, willen we nagaan hoe het niveau van de klas is. Hebben de inspanningen tot resultaten geleid? De peiling bevat een A-blad met de volgende opgaven:

- $794 : 9 =$
- $1558 : 23 =$
- $2568 : 17 =$

en een B-blad met:

- $4832 : 16 =$
- $13956 : 26 =$
- $9634 : 44 =$

De algemene indruk tijdens de peiling is, dat de motivatie goed is en dat er betrekkelijk weinig hulp wordt gevraagd. Het tempo ligt ook vrij hoog. In vergelijking met de peiling van december zelfs opvallend hoog. De drie sommen van het A-gedeelte kost negen van de 29 kinderen minder dan tien minuten en slechts twee kinderen hebben er meer dan vijftien voor nodig. Van de 29 kinderen hebben dertien ook de sommen van het B-gedeelte in 25 minuten af. Een diepgaande analyse van het werk bevestigt de beschreven indruk. We gaan opnieuw – evenals in de december-analyse – de fouten na die de kinderen maken, en gaan in op het niveau van werken, zoals dat in de beschrijving van de december-peiling is opgenomen. Voor een goed begrip herhalen we nog even de fouten-categorieën die we eerder onderscheidden:

Categorie A: vermenigvuldigfouten

- a₁: tafels, basisvaardigheden
- a₂: rekenen met nullen
- a₃: berekenen van de tussenprodukten

Categorie B: aftrekfouten

- b₁: basis-kennis
- b₂: aftrek-algoritme

Categorie C: delingsalgoritme

Categorie D: slordigheidsfouten

Bovendien geven we een overzicht van de gehanteerde niveau-indeling:

Niveau A: de leerling heeft moeite met de deling en weet niet of nauwelijks hoe de deling moet worden opgeschreven.

Niveau B: de leerling gebruikt het principe van de herhaalde aftrekking op laag niveau.

Niveau C: de leerling neemt 'happen' van honderd, tien en eenheden in deze volgorde.

Niveau D: de leerling neemt in één keer 'happen' van honderd, tien en eenheden.

Niveau E: de leerling deelt op de traditionele wijze.

Om deze niveaus goed te bekijken, hebben we de sommen van het B-gedeelte nodig, omdat daarin ook 'happen' van honderden kunnen worden genomen.

We geven een fouten-typering, dan het aantal fouten in het A- en B-gedeelte en tenslotte het niveau van oplossing, zoals hiervoor beschreven. In de laatste kolom tenslotte geven we een indruk van de vooruitgang, met name in niveau per leerling ten opzichte van de december-peiling.

Enige voorbeelden van opvallend werk.

In het werk komen nog te veel fouten voor, al zijn er geen principiële fouten meer in de delingsalgoritme, zoals die in het december-werk naar voren kwamen. De belangrijkste winst is gelegen in het feit, dat de kinderen die in december het slechtste werk leverden (weinig begrip en laag tempo) nu bijgekomen zijn. Het tempo is bij iedereen redelijk. Iedereen weet precies hoe er gehandeld moet worden.

- maartpeiling

	fouten-type							aantal fouten in		niveau van werken				
	a ₁	a ₂	a ₃	b ₁	b ₂	c	d	A	B	A	B	C	D	E
Jan-Willem			x				x	2	1				x	+
Faisel							x	1	0					○
Saskia			x					1	0				x	○
Petra					x			1	2			x		○
Angelique								0	2				x	+
Erwin			x					1	3			x		+
Eddy								0	1				x	+
Simone			x					1	0				x	○
Martin			x					1	0				x	○
Koen			x				x	2	1				x	○
Loes							x	2	0			x		○
Laura								0	0				x	○
Brenda								0	1				x	+
Annelies			x					1	2			x		○
Marcel							x	1	1			x		+
Peter	x						x	2	2			x		○
Diana							x	1	1			x		○
Sander						x	x	3	2			x		?
Christiaan	x							1	0			x		○
Berry			x				x	2	1				x	○
Monique W.								0	1			x		○
Monique S.	x		x					2	2			x		+
Robert		x	x					2	1			x		?

	fouten-type								aantal fouten in		niveau van werken					
	a ₁	a ₂	a ₃	b ₁	b ₂	c	d	A	B	A	B	C	D	E		
Monique A.	×							1	0			×		?		
Marco								0	1			×		○		
Jopie	×			×				2	2			×		+		
Kees			×					1	0			×		+		
Lucienne			×			×		3	1			×		○		
Gladys						×		2	-			×		+		

+: vooruitgang is duidelijk

-: geen vooruitgang

○: vooruitgang twijfelachtig, maar geen achteruitgang

? : deze kinderen deden in de december-peiling niet mee

De fouten worden gemaakt in aftrekkingen en het berekenen van deelprodukten. Deze conclusie geldt voor de hele groep. Op twee punten zijn we nog niet tevreden. Ten eerste blijkt, dat er toch nog veel kinderen zijn die te hoog grijpen en ten tweede is het aantal fouten in de deelprodukten nog te groot.

Nummer één: Berry en Marco.

Berry schreef in december de produkten geheel of gedeeltelijk op, bij voorbeeld door te verdubbelen:

$$1 \times 26 = 26$$

$$2 \times 16 = 52$$

$$4 \times 26 = 104 \text{ enz.}$$

Hij heeft het halveren geleerd, hetgeen in één oplossing duidelijk te zien is:

$$\begin{array}{r|l} 9 \overline{) 794} & 85 \\ \underline{765} & \\ 20 & \\ \underline{18} & 2 \\ 2 & 87 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 100 \times 9 = 900 \\ 50 \times 9 = 450 \\ 25 \times 9 = 225 \end{array}$$

Hoe komt Berry aan $85 \times 9 = 765$? Wel, dat is aan de rechterkant van zijn blaadje te lezen:

$$50 \times 9 = 450 \text{ (halveren)}$$

$$25 \times 9 = 225 \text{ (opnieuw halveren)}$$

$$10 \times 9 = 90$$

$$85 \times 9 = 765 +$$

Waarom mogen we met deze werkwijze toch niet zo gelukkig zijn, ook al rekent Berry hier zeer flexibel? Wel, het leidt in moeilijker gevallen vaak tot fouten. Berry heeft er ook een 'kladje' voor nodig. Maar een doorzichtig opgebouwd delingsalgoritme kan zonder kladje.

Ook Marco maakt eigenaardige misstappen:

$$\begin{array}{r|l}
 44 \overline{) 9634} & 200 \\
 \underline{8800} & \\
 834 & 15 \\
 \underline{620} & \\
 214 & \\
 \underline{176} & 4 \\
 48 & \\
 44 & 1 \\
 4 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 44 \\
 15 \\
 \hline
 20 \\
 200 \\
 400 \\
 600
 \end{array}$$

Niet doorzichtig. Hij heeft een vermenigvuldiging nodig om een deelprodukt uit te rekenen. Hij doet dat in dit geval niet goed:

$$\begin{array}{r}
 44 \\
 15 \\
 \hline
 20 \times \\
 200 \\
 40 \leftarrow \\
 400 \\
 \hline
 660
 \end{array}$$

Nummer twee: Laura en Gladys:

Eerst het werk van Gladys

$$\begin{array}{r|l}
 9 \overline{) 794} & 80 \\
 \underline{720} & \\
 174 & \\
 \underline{180} & 8 \\
 2 & 88
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{9}{36} \quad \frac{9}{45} \quad \frac{9}{54} \quad \frac{9}{63} \quad \frac{9}{72} \\
 \frac{9}{27} \quad \frac{9}{18} \quad \frac{9}{9}
 \end{array}$$

Laura:

$$\begin{array}{r}
 44 \overline{) 9634} \quad 200 \\
 \underline{8800} \\
 834 \\
 \underline{440} \quad 10 \\
 394 \\
 \underline{352} \quad 8 \\
 42 \quad 218
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5 \\
 44 \\
 \hline
 20 \\
 200 \\
 \hline
 220
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 6 \\
 44 \\
 \hline
 24 \\
 240 \\
 \hline
 264
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 7 \\
 44 \\
 \hline
 28 \\
 280 \\
 \hline
 308
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 8 \\
 44 \\
 \hline
 32 \\
 320 \\
 \hline
 352
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 9 \\
 44 \\
 \hline
 36 \\
 360 \\
 \hline
 396
 \end{array}$$

Deze meisjes rekenen niets uit het hoofd uit. Opvallend is vooral dat ze ook niet 'onthouden'. Is hier sprake van gemakzucht?

Opvallend is het relatief grote aantal fouten in het uitrekenen van de deelprodukten. Het is vrijwel onmogelijk om altijd precies te zeggen hoe deze fouten tot stand komen. Soms lijkt het een kwestie van het kennen van de tafels, soms is het een niet goed hanteren van de verdubbels- en halveringswerkwijze. We geven een selectie. We zien bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{l}
 40 \times 23 = 820 \\
 9 \times 44 = 372 \\
 12 \times 44 = 550
 \end{array}$$

Koen rekent: $25 \times 17 = 700$. Maar hoe hij er aan komt, is onduidelijk. Hij rekent bovendien $7 \times 17 = 84$, waarbij hij waarschijnlijk deze fout maakt:

$$7 \times 17 = 7 \times 10 + 7 \times 7 = 70 + (7 + 7) = 70 + 14 = 84.$$

$$\begin{array}{r}
 23 \overline{) 1558} \\
 \underline{1380} \\
 178 \\
 \underline{164} \\
 14
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 60 \overline{) 123} \\
 \underline{115} \\
 8
 \end{array}$$

1 × 23	23
2 × 23	46
3 × 23	69
5	115
6	138
7	161
8	164
9	87

We kunnen vele van deze en soortgelijke fouten en slordigheden opnemen, zonder dat we de juiste oorzaak kunnen omschrijven. Ook vinden we kinderen die de deelprodukten op de wijze van Diana uitrekenen.

$ \begin{array}{r} 44 \\ 19 \\ \hline 36 \\ 360 \\ 400 \\ \hline 400 \\ \hline 836 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 44 \\ 18 \\ \hline 32 \\ 320 \\ 40 \\ 400 \\ \hline 792 \end{array} $
---	--

We beoordeelden dit al eerder als een ondoorzichtige en daarom verkeerde aanpak die fouten in de hand werkt. De conclusie is dat we in de toekomst een poging moeten doen om de delingen 'doorzichtig' te laten oplossen, met gebruikmaking van handig rekenen.

Tot slot geven we een voorbeeld van een kind dat vooruit gegaan is ten opzichte van december.

december

$\begin{array}{r l} 18 & \\ \hline 666 & 32 \\ 378 & \\ \hline 190 & \\ \hline 72 & 4 \\ 18 & \\ \hline 0 & 37 \\ \hline \end{array}$	$\begin{aligned} 1 \times 18 &= 18 \\ 2 \times 18 &= 36 \\ 4 \times 18 &= 72 \\ 8 \times 18 &= 144 \\ 16 \times 18 &= 288 \\ 32 \times 18 &= 576 \end{aligned}$
---	---

maart

$\begin{array}{r l} 44/891634 & \\ \hline 8800 & 200 \\ \hline 78134 & \\ \hline 440 & 10 \\ \hline 3914 & \\ \hline 356 & 9 \\ \hline 28 & 219 \end{array}$	
--	--

Het werk van Peter vertoont een overgang van niveau C naar niveau D. In december heeft Peter, gebruikmakend van de verdubbelmethode, het tussenprodukt $4 \times 18 = 72$ uitgerekend. Hij kan dan nog 1×18 weggeven. Hij heeft de verhoudingstabel gebruikt, maar is er niet mee aan het werk geweest. Ook in maart heeft hij bij een aantal delingen de verhoudingstabel gebruikt, maar hij heeft die tabel gebruikt om ook tussengelegen deelprodukten te berekenen, en wel als volgt:

$$\begin{aligned} 1 \times 44 &= 44 \\ 2 \times 44 &= 88 \text{ (verdubbelen)} \\ 4 \times 44 &= 176 \text{ (verdubbelen)} \\ 8 \times 44 &= 352 \text{ (verdubbelen)} \end{aligned}$$

Peter heeft nu 9×44 ineens uitgerekend door de optelling $44 + 352$ te berekenen, waarbij overigens wel een fout gemaakt is.

We hebben een idee gekregen hoe de groep van december tot maart heeft gewerkt. Het opvallende is, dat de in december 'hopeloos' geachte gevallen in maart helemaal bij gekomen zijn en de aansluiting hebben herkreten.

Maar wat vooral duidelijk geworden is: de basisvaardigheden worden in deze klas onvoldoende beheerst en de kinderen kunnen onvoldoende hoofdrekenen. Kortom, er is in de middenklassen te weinig aandacht aan het handig en snel rekenen besteed. Eveneens is duidelijk geworden hoezeer de progressieve schematisering van de delingsalgoritme afhankelijk is van de basisvaardigheden.

4.4 afsluiting van de algoritmeleergang

De afsluiting van de algoritme kan nu gemaakt worden. Er zullen enkele kinderen zijn die nooit verder komen dan de oplossing van het type:

$$\begin{array}{r|l}
 47 \overline{)15965} & \\
 \underline{4700} & 100 \\
 11265 & \\
 \underline{4700} & 100 \\
 6565 & \\
 \underline{4700} & 100 \\
 1865 & \\
 \underline{470} & 10 \\
 1395 & \\
 \underline{470} & 10 \\
 925 & \\
 \underline{470} & 10 \\
 455 & \\
 \text{enz.} &
 \end{array}$$

Bedenk echter wel, dat ook dit kind zo'n deling kan maken. Uit de hiervoor beschreven peilingen blijkt dat dit niveau door alle kinderen reeds is gepasseerd. We willen stipuleren dat niet alle kinderen noodzakelijkerwijs tot hetzelfde eindniveau hoeven te komen. Toch mogen we verwachten dat vrijwel alle kinderen tot een werkwijze komen, waarin honderden, tienten en eenheden ineens worden afgetrokken, dus als volgt:

$$\begin{array}{r|l}
 47 \overline{)15965} & \\
 \underline{14100} & 300 \\
 1865 & \\
 \underline{1410} & 30 \\
 455 & \\
 \underline{423} & 9 \\
 32 & 339
 \end{array}$$

We beschouwen deze aanpak als een aanvaardbaar eindniveau. Er is geen reden om nu nog de stap naar de thans gangbare standaardvorm te zetten: deze vergt namelijk onevenredig veel inspanning en tijd.

tenmodel ontstaat. En wat ook uitermate belangrijk is: stimuleer een korte notatie-wijze van de deelprodukten waar de lange optelling als het ware achter gedacht, gestreep of geësticuleerd wordt.

Na een tiental lessen komt dan een vermenigvuldiging als 23×57 als volgt op papier:

$$10 \times 57 =$$

$$10 \times 57 =$$

$$3 \times 57 =$$

Na een twintigtal lessen verschijnt hier en daar:

$$20 \times 57 = \dots$$

$$3 \times 57 = \begin{array}{r} \dots \\ \dots \end{array} +$$

De eindfase is al in zicht!

Wat echter essentieel is, is de langzaam opgebouwde startfase waarin de kinderen de lange optelling wel degelijk helemaal uitschrijven en langzaam in de gaten krijgen dat ze de tafels (die ze ten dele beheersen) kunnen gebruiken en dat het handig is om eenvoudig tien-tafels te benutten en de lange optelling te verknippen in hapen van tien (honderd)... Steeds wordt in de beginfase van elementaire contextproblemen uitgegaan, want deze bieden de concrete ondergrond en de motivatie voor het rekenwerk.

Dit is in vogelvlucht de kern van het herhaald-optel-model in z'n definitieve versie. Hoewel men ook in deze aanpak op kleine didactische valletjes bedacht moet zijn – zoals bijvoorbeeld op het feit dat de kinderen aanvankelijk vergeten de tussenprodukten samen te voegen – lijkt een dergelijke werkwijze de voordelen van beide genoemde modellen in zich te verenigen. Dit is althans de mening van de ontwikkelaars en de praktijkmensen van de experimenteeschool.

Wat betreft het belang van het verbinden van cijferen en toepassen verwijzen we naar het volgende hoofdstuk.

Afsluitend deze opmerking: men dient bij het kiezen zowel de algoritme-ontwikkeling als de toepasbaarheid van de algoritme in de afweging te betrekken. Deze beide elementen hebben ons doen besluiten voor het herhaald-optel-model te kiezen met de zojuist genoemde visuele ondersteuning, maar deze keuze is niet voor ieder van de door ons geraadpleegde onderwijsdeskundigen zo duidelijk bepaald!

Over toepassingen gesproken: de kwestie van de *contextproblemen* vormde het belangrijkste thema van de gesprekken die wij met de onderzoekers, begeleiders en onderwijsgeevenden voerden. Van verschillende zijden wijst men erop dat de plaats en de functie van toepassingsproblemen in de leergang, zoals die in het boek geschetst wordt, niet duidelijk genoeg uit de verf komt.¹² We kunnen dus niet anders dan deze kwestie hier nog eens wat nader onder de loep nemen, dit als vervolg op hetgeen daarover in het tweede hoofdstuk van 'Cijferend vermenigvuldigen en delen (1)' reeds geschreven werd.

Welnu, globaal gesproken kunnen we drie soorten opgaven onderscheiden die voor de cijferleergang van vermenigvuldigen en delen van belang zijn.

Categorie I : kale cijfersommen.

dukten en verdubbelingstabellen naast de opgave te plaatsen, zoals in de wat minder verkorte eindvorm gebeurt.

De vraag is echter of deze (kleine) verandering in einddoelstelling landelijk wordt aanvaard. Afgaand op de geluiden die in het tijdperk van zakrekenmachine en zak-computer steeds luider klinken en ons oproepen het cijferen helemaal af te schaffen, doet dit voorstel zelfs wellicht eerder te behoudend dan te progressief aan (zie ook het volgende hoofdstuk).

Overigens merkt een van de ervaren onderwijsmensen op, dat de delingsalgoritme vroeger vele kinderen voor onoverkomelijke hindernissen stelde, terwijl in de hier geschetste aanpak met het zojuist gestelde einddoel van de minder verkorte algoritme die problemen er in het geheel niet meer zijn – dus waar praten we eigenlijk over, aldus is haar zienswijze.⁹

Ook de keuze van een *vermenigvuldigingsmodel* is onderwerp van gesprek geweest. Algemeen uitte men waardering voor het kruispuntenmodel: het geeft visuele aangrijpingspunten, de leergang is uiteen te rafelen in tal van duidelijk geordende tussenfasen, zwakke leerlingen kunnen er goed mee overweg, er worden geen al te hoge eisen aan het rekenwerk gesteld.¹⁰ Maar men onderkende evenzeer de problemen waartoe dit model aanleiding kan geven als het gaat om toepassingen. In contextopgaven doet zich immers een vermenigvuldiging meestal niet als een ‘kruising’ voor, met het gevolg dat er een kloof kan ontstaan tussen de procedure die bij het ‘kale’ vermenigvuldigen gehanteerd wordt en de werkwijzen die de kinderen bij het oplossen van contextopgaven volgen, welke veelal op een of andere vorm van herhaald optellen neerkomen. Op deze wijze ontstaat het gevaar dat het kruispuntenmodel zich als het ware verzelfstandigt en los komt te staan van de realiteit, dus de realiteit van hun speciale werkwijzen met reële problemen.

Gechargeerd gesteld: de kinderen leren met het kruispuntenmodel wel efficiënt en probleemloos de vermenigvuldigingsprocedure, maar niet om die procedure toe te passen, en om dat laatste gaat het vooral!

Aan de andere kant wordt gesteld dat de afstand tussen het herhaalde optellen en de eindprocedure wel erg groot is. Ook zijn de tussenfasen naar de eindalgoritmen niet zo duidelijk te markeren. En dit heeft weer tot gevolg dat met name de zwakke leerlingen minder houvast hebben als ze de-weg-terug van de voorafgaande fase moeten volgen als ze vastlopen.

Dus in het herhaald-optel-model is de aansluiting met contextopgaven er wel degelijk vanwege de herhaalde optelling, maar nu wordt de cijferprocedure op zich weer bemoeilijkt!¹¹

Is er geen verbinding tussen het ene en andere model te leggen?

Dat is precies waarnaar wij gezocht hebben tijdens de ontwikkeling van de leergang volgens het herhaald-optel-model in onze eerste experimenteerronde. En we menen de oplossing gevonden te hebben, zoals uit het voorgaande mag blijken. We herhalen met steekwoorden de nieuwe accenten: laat de lange optelling al snel voorstellen door een streep-in-de-lucht-gebaar, beeldt hem vervolgens uit door het zetten van een streep-op-papier, en geef daarin door middel van kruisstrepen de happen van veeltallen (honderdtallen, tientallen, eenheden) aan, waardoor een soort kruispun-

naar het standaardschema:

$$\begin{array}{r} 251 \\ \underline{134} \times \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} + \begin{array}{r} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$$

welke niet per se nodig is, maar door vele leerlingen zeer wel gezet kan worden. Maar het is vooral de overgang van het ene schema naar het andere bij het delen dat problemen kan opleveren. We doelen hier enerzijds op de notatie van de factoren onder elkaar en anderzijds op de standaardnotatie:

$$\begin{array}{r} 28/20272 \setminus \\ \underline{19600} \quad 700 \\ 672 \\ \underline{560} \quad 20 \\ 112 \\ \underline{112} \quad 4 \\ 0 \quad 724 \end{array}$$

Deze kan omgezet worden in:

$$\begin{array}{r} 28/20272 \setminus 724 \quad \text{of} \quad 28/\overline{20272} \setminus \\ \underline{196} \quad \underline{196} \\ 67 \quad 67 \\ \underline{56} \quad \underline{56} \\ 112 \quad 112 \\ \underline{112} \quad \underline{112} \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

Deze transformatie lijkt op papier probleemloos, maar in werkelijkheid blijken er belangrijke obstakels te zijn, die zich trouwens ook bij het vermenigvuldigen kunnen voordoen. We gaan in het bovenstaande immers uit van de veronderstelling dat kinderen de deelprodukten en deelquotiënten direkt op de aangegeven wijze (kunnen) uitvoeren. Maar dat is zeker bij het delen niet altijd het geval. Nu laat de wat minder verkorte notatiewijze toe dat kinderen die een verkeerde afschatting gemaakt hebben – bijvoorbeeld zes honderdtallen afgehaald in plaats van zeven – deze gemakkelijk kunnen herstellen door er nog eens een hap van dezelfde orde van grootte af te nemen, maar een dergelijke ‘fout’ levert bij standaardnotatie grote problemen op (kinderen schrijven dan bijvoorbeeld eerst een zes op een plaats en daar dan nog ‘n één achter!)⁸ We kunnen het ook anders zeggen: de minder verkorte werkwijze stelt minder hoge eisen aan zowel het noteren als het (hoofd-)rekenen en tevens kunnen de onderscheiden notaties op tal van (onverwachte) onderdelen interfereren, terwijl in de tijd gezien de laatste verkortingsstap vrijwel geen leerwinst bij het uitrekenen oplevert, maar juist wel een enorme onderwijstijd vergt!

Gelet op dit alles, lijkt het aan te bevelen om als regel de één na laatste trede van de verkortingsstrap als einddoel te kiezen, en de laatste standaardtrede als uitzondering voor die kinderen die goed kunnen hoofdrekenen en het niet nodig hebben tafelpro-

worden? Wat zijn de voordelen van de traditionele cijfermethoden in dit opzicht? Hoe kan men meer greep op het hier geschetste onderwijs krijgen?

Men zal allereerst vooraf beslissingen moeten nemen over:

- de beoogde eindvorm van de algoritmen van vermenigvuldigen en delen;
- het model dat men bij het vermenigvuldigen wil volgen;
- de voorwaarden ten aanzien van de basisvaardigheden bij de start van de leergang;
- de mate van strakheid die men wil hanteren in het onderwijs wat betreft de differentiatie in niveaus;
- de oefenstof en wel speciaal de contextproblemen.

Zoals gezegd kan men in eerste ronde een manier van werken volgen die heel dicht bij de thans gangbare ligt, dus een strak geleid onderwijstraject afleggen dat vooral door de onderwijsgevende zelf (vooraf) is uitgestippeld en uitkomt op de gebruikelijke standaardalgoritmen. Men verschaft zich dan alle zekerheden die ook het traditionele cijferonderwijs kenmerken – zekerheden dan weliswaar gezien vanuit het oogpunt van de onderwijsgevende. Deze handelwijze is op zich legitiem, maar in z'n uiterste consequentie strijdig met de uitgangspunten van de progressieve schematisering omdat daarin de progressie in de leergang primair door de kinderen zelf bepaald wordt. Hoezeer een zekere mate van strakheid in een eerste onderwijsrunde ook te verdedigen ja zelfs aan te bevelen is, toch zouden we op enkele punten een zekere versoepeling willen bepleiten, zonder overigens de behoefte aan een stevig houvast te bagatelliseren. In de twee discussiebijeenkomsten vormden de zojuist genoemde punten over einddoelstellingen, modelkeuze, voorwaarden, 'strakheid' en contextproblemen de belangrijkste gespreksthema's.

De algemene instelling van de onderwijsgevende en de kwestie van de voorwaarden zijn in het voorgaande reeds beschreven. In het volgende zullen de overige kernpunten besproken worden, te beginnen met de einddoelstellingen.

Zoals aangeduid, is ons oogmerk daarbij om duidelijke didactische oriëntatiepunten in de cijferleergang van de progressieve schematisering te plaatsen, voorzover dat na al het voorgaande nog nodig mocht zijn.

Over de *eindvormen van de algoritmen* kan men verschillend denken. En dat gebeurt dan ook. Kiest men als eindalgoritme de thans gangbare standaardalgoritmen, dan doet men dit voornamelijk omdat de ouders zulks wensen.⁷ Didactisch gezien is het echter bijzonder inefficiënt om ook de allerlaatste verkortingsstap te willen zetten, blijkens ervaring en onderzoek (zie daartoe de overzichtspublicaties van Suydam en Dessart en van Sowder, welke in het volgende hoofdstuk aangehaald worden).

Welke is die laatste stap?

Voor vermenigvuldigen is dit in geval van bijvoorbeeld 134×251 , de stap van de volgende notatiewijze:

$$\begin{array}{r} 100 \times 251 = \\ 30 \times 251 = \\ 4 \times 251 = \text{————} + \end{array}$$

van de belangrijkste oorzaken van de onvoldoende beheersing van de tafels wordt het te lang uitstellen van het inoefenen beschouwd: vanaf het begin van het derde leerjaar is het rekenonderwijs in vele methoden (helaas) steeds meer een ‘papieren’ onderwijs, een individuele aangelegenheid.⁴ Het gevolg daarvan is dat de kansen om gemeenschappelijk te oefenen steeds kleiner worden – een voor vele kinderen funest gang van zaken.

Kortom: start in de tweede helft van het tweede leerjaar met het memoriseren van de tafels van vermenigvuldiging en begin in het derde leerjaar met het automatiseren van de ‘tafels’ van getallen boven de tien, dus met het cijferen, en vervolg het cijferen met ‘tafels’ waarvan de vermenigvuldiger groter dan tien is. Zodoende vormt het memoriseren de grondslag voor het automatiseren en komt het cijferen goed op tafel.

Sterk geïndividualiseerde methoden leiden tot een *papieren* rekenonderwijs, waarin de onderwijsgevende voornamelijk de functie van *administrateur* vervult. Er is ook een *uitbeeldende* werkwijze waarin de onderwijsgevende voornamelijk uitlegt en de rol van *explicateur* speelt. Het hier bedoelde reken-wiskundeonderwijs verdraagt echter noch de papieren aanpak noch de beeldende werkwijze, maar vraagt veeleer een *fluwelen* onderwijshand. Deze onderscheidt zich door een grote terughoudendheid en ingetogenheid ten aanzien van het uitleggen hoe iets ‘zit’ of hoe iets moet. Onderwijs wordt aldus opgevat als een sociaal gebeuren, waarin ieder kind kan samenwerken met ieder ander, kennis kan nemen van verschillende werkwijzen en gelegenheid krijgt om vooruitgang te boeken. De onderwijsgevende stimuleert, lokt nieuwe werkwijzen uit, waardeert een bepaalde methode, maakt gedifferentieerd werken mogelijk, kortom doet alles wat een ‘*educateur*’ betaamt.

Deze attitude nu kan het grote struikelblok vormen bij het in praktijk brengen van onder meer het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering. Het vraagt immers van de onderwijsgevende een andere instelling dan thans algemeen gebruikelijk is, namelijk het mogelijk maken van zelf-ontdekken, het zelf-uitvinden van algoritmen door het vermijden van instant-uitleg en het aangrijpen van kinderlijke werkwijzen voor het sturen van het onderwijs over langere termijnen.⁵ Daarbij wordt de kinderen gelegenheid gegeven over elkaars werkwijzen te praten en te reflecteren; er is in het onderwijs ruimte voor dialoog en voor samenwerking.

Nu zou dit alles niet veel meer dan holle agogische praat zijn wanneer deze ideeën niet inhoudelijk onderbouwd waren en niet verweven zijn met concrete leerstof. Dit nu is met het cijferen volgens het hier gepresenteerde concept duidelijk wel het geval.

Men doet er als onderwijsgevende of als schoolteam het beste aan, indien men deze aanpak zou willen invoeren, om te starten met het delen, omdat de wijze waarop deze algoritme aangeleerd wordt, nog het dichtst bij de traditionele methode ligt.

Nu kan men niet verhelten dat het gevaar aanwezig is dat met het onderhavige cijferprogramma een belangrijk deel van de (schijnbare?) *zekerheid* die het huidige cijferonderwijs uitstraalt, ondergraven wordt.⁶ We zetten ‘schijnbare’ tussen haakjes, omdat verschillende van de discussianten menen dat de huidige problemen in het cijferonderwijs verdoezeld worden en onder het tapijt van het papieren quasi-geïndividualiseerde onderwijs geveegd worden. Waardoor kan die zekerheid ondergraven

V NADERE TOELICHTING

We bespreken hier de kritische punten van het onderhavige boek, die in twee discussiebijeenkomsten met een aantal onderwijsmensen naar voren gebracht zijn.¹ Aan de hand daarvan proberen we onze denkbeelden hier en daar nog wat nader toe te lichten of aan te scherpen. Let wel: we presenteren hier onze eigen opvattingen en geven geen verslag van de gevoerde discussies. Wel is het zo dat we vrijwel in alle gevallen ook de mening van een of meer van de geraadpleegde deskundigen vertolken.

Er wordt vastgesteld dat de *bedoeling* wellicht nog te weinig expliciet naar voren komt: het gaat hier niet alleen om het aanleren van algoritmen, maar vooral ook om de ontwikkeling van algoritmen. En in verbinding daarmee ook om hoofdrekenen, schatten en het maken van toepassingen. Om die reden dient de effectiviteit van de geschetste leergang ten opzichte van de traditionele aanpak dan ook niet te zeer beklemtoond te worden: het gaat immers om meer dan alleen het boeken van tijdswinst, hoe belangrijk dat op zich ook mag zijn.²

Thans wordt het onderwijs in de middenklassen beheerst door trucmatig werken, wat de vorming van een anti-wiskundige attitude in de hand werkt (zie ook het volgende hoofdstuk). Juist ook door het uitstellen van het algoritmiseren, en door het cijferen te beschouwen als een vorm van handig (c.q. handiger) rekenen, kan dit gevaar dat van het overheersende mechanistische rekenen uitgaat, bezworen worden. Hetgeen overigens niet wil zeggen dat de kinderen geen algoritmen zouden moeten leren. Zeker niet. Maar ze leren die algoritmen niet algoritmisch en niet los van de overige rekenactiviteiten, zoals flexibel rekenen en toepassen – dat is de kern!

Vooraf ook de door ons ondervraagde praktijkmensen beklemtonen het belang van de *basisvaardigheden* en wel speciaal kennis van de tafels.³ Aan het einde van het tweede en het begin van het derde leerjaar kunnen de tafels van vermenigvuldiging (en deling) het beste ingeoefend worden. Men moet er vooral voor zorgen dat er geen tijdsruimte tussen het leren van de tafels en de start van het cijferend vermenigvuldigen ligt. Het oefenen van de tafels moet dus aansluiten op de cijferleergang, of beter: ze moet deze leergang overlappen. Sommige kinderen worden namelijk vooral door het cijferen gemotiveerd de tafels in te slijpen. Nog nauwkeuriger gezegd: het leren van de tafels en het leren cijferen lopen naadloos in elkaar over, beide aangezet vanuit enkelvoudige toepassingsproblemen. Wacht men te lang met het aanleren van tafels (bijvoorbeeld tot het vierde leerjaar of nog later) dan lukt het bijna niet meer om ze te memoriseren, start men te vroeg dan zakt de kennis weer weg en kan men bij het cijferen opnieuw met het memoriseren beginnen.

Vrijwel iedere deskundige op het gebied van het rekenonderwijs is het erover eens dat het belang van de basisvaardigheden thans niet allerwegen onderkend wordt. Als één

- elementaire contextproblemen laten fungeren als bron maar ook als toe-passingen;
- uitstellen van het cijferen, aansluiten bij tafels;
- alle aspecten van de operaties in contextproblemen betrekken;
- relatie tussen noteren, verwoorden en mentaal handelen;
- informele en formele rekenwijzen: aansluiten bij de werkwijzen van kinderen;
- beperking van niveaus en schematiseringen;
- basisvaardigheden en inzichten als noodzakelijke voorwaarden;
- progressieve schematisering en het leerboek;
- mogelijkheden voor het zelf ontwikkelen van een leergang;
- de relatie tussen een plaatswaarde-verhaal en plaatswaarde-materiaal;
- mogelijkheden voor remediërend werk;
- de toekomst van het gangbare cijferen gericht op standaard-algoritmen;
- tijdwinst...

riaal nauwkeurig op elkaar af te stemmen. Naar onze ervaring en ook uit onderzoek blijkt dat zo'n verhaal geweldig veel houvast biedt voor kinderen. Het maakt als het ware de overgang tussen verschillende niveaus van handelen eenvoudiger en het handelen met M.A.B. en op de abacus ligt erin verankerd en wordt erdoor gemotiveerd. In de basistekst zijn oefeningen aangegeven voor het inwisselen, dit met het oog op lange optellingen. Op een gegeven ogenblik is dit inderdaad uitermate belangrijk om te oefenen. Maar er moeten tal van oefeningen aan vooraf gaan waaraan we in dit boek geen aandacht hebben geschonken omdat ze betrekking hebben op optellen en aftrekken. Zoals:

kisten	dozen	goudstukken	
2	17	8	
1	13	18	+

Of:

2	17	8	
1	21	18	-

Vooraf het voorgestelde of gedachte handelen in samenhang met het plaatswaarde-verhaal moet aangemoedigd worden, hoewel aanvankelijk nog inwisselmateriaal en een abacus gehanteerd dienen te worden.

Zoals gezegd, kan deze werkwijze ook in remediërende zin gebruikt worden. Daarnaast is het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering zeer geschikt om te gebruiken bij kinderen die problemen hebben met toepassingen en ook voor de zwakke rekenaars die vrijwel niet in staat zijn om de standaard-vormen voor vermenigvuldigen en delen te leren. In het laatste geval kan dan op minder verkorte procedures als eindniveau gemikt worden.

En voor het overige zijn de genoemde aanwijzingen over basisvoorwaarden, notaties, e.d. ook in remediërend onderwijs bruikbaar.

Tenslotte een serie *etiketten* van onderwerpen en onderdelen die in samenhang met het hier gepresenteerde gezien kunnen worden, zonder verder commentaar neergezet ter nadere overdenking:

- zakrekenmachientjes en zakcomputers in verband met cijferen en toepassen;
- progressieve schematisering tegenover progressieve complicering;
- variabele eindniveaus;
- geïntegreerd cijferen;
- cijferen als een vorm van handig rekenen;
- zelf-overtuigende algoritmen;
- trucmatig cijferen en een a-wiskundige attitude;
- lange optelling, een vingerwijzing in de lucht en een strepenschema op papier;
- kruispuntenmodel en herhaald-optel-model: voor- en nadelen;
- inwisselen en lenen: de belasting van het werkgeheugen;
- bij alle markeringspunten in de leergang van vermenigvuldigen en delen steeds contextproblemen als uitgangspunt kiezen;

Ziehier de belangrijkste *steunpunten* van de voortgang van het leren, gesteld in de vorm van vragen:

- Is de weg terug open?
- Worden de basisvaardigheden beheerst – inwisselen, lange optelling, tafels?
- Kunnen de kinderen in gedachten een voorstelling maken van de actuele berekening en dus als het ware op papier een stap overslaan, kunnen ze hun handelen verwoorden?
- Hebben ze een vastheid van werken op het bestaande niveau, dat wil zeggen voeren ze de berekeningen betrekkelijk eenvoudig uit?
- En daarbij eventueel gevoegd: kunnen ze contextopgaven cijferend berekenen op het hoogste niveau wat ze op dat moment bereikt hebben en bovendien ook zelf van dit soort opgaven bedenken?

Kan men niet op alle vragen een bevestigend antwoord geven, dan is het niet vanzelfsprekend zo dat op een verdere verkorting aangedrongen wordt op dat moment. Maar het is natuurlijk niet uitgesloten om daartoe toch te besluiten als op een minder essentieel onderdeel nog niet aan de voorwaarden is voldaan, bijvoorbeeld op het direkt (mentaal) kunnen inwisselen.

Let er dus bij verdergaande verkorting op of:

- de ‘verlenging’ de leerling nog voor ogen staat (de weg-terug);
- de basisvaardigheden beheerst worden;
- begrip van plaatswaarde in verband met de basisoperaties aanwezig is;
- het zich kunnen voorstellen dat verdergaande verkortingen mogelijk zijn;
- de beheersingsraad op het actuele niveau voldoet c.q. verwoord kan worden;
- de relatie met toepassingen en contextproblemen gelegd kan worden.

In het algemeen heeft de leerling niet veel *oefenstof* voor het specifieke cijferen nodig – tenminste in vergelijking met het huidige of traditionele cijferonderwijs. Wel is het zaak om de basisvaardigheden apart te oefenen in korte tien-minuten-lesjes, juist ook omdat minder cijfervraagstukken gemaakt worden – in de voorgaande basistekst is herhaaldelijk en met nadruk op dit punt gewezen.

Op kwesties van het vrijlaten van notaties, eindniveaus e.d. zijn we reeds ingegaan. Dit zijn vooral ook onderdelen waarop de onderwijsgevenden zelf beslissingen moeten nemen. Onze aanbevelingen hieromtrent waren: hanteer in het begin beperkte vrijheidsgraden en stuur uiteindelijk zoveel mogelijk op de standaard-algoritmen aan in de laatste fase van de schematisering (dit kan overigens nog een belangrijke tijds-winst opleveren!).

In de leergang zoals die hier geschetst is, liggen tal van aangrijpingspunten voor *remediërend werk*. Om te beginnen iets over *plaatswaarde*, *optellen* en *afrekken*, dus wat aan het cijferend vermenigvuldigen en delen vooraf gaat.

Als basis voor de ontwikkeling van plaatswaarde kan het beste een *plaatswaardeverhaal* gebruikt worden, direkt verbonden met het gebruik van *inwisselmateriaal* als bijvoorbeeld M.A.B.; tekeningen van dit materiaal en wat later de *abacus*.

In het voorgaande werd daarvan een voorbeeld gegeven in de vorm van een sultan-verhaal. Het verdient aanbeveling om de doos-verpakking langwerpig te nemen (dus de vorm van een staafje) en de kist plat (dus als een platte), dit om verhaal en mate-

getallen zijn de genoemde modellen zeer nuttig. Maar zoals gezegd, specifiek voor het cijferen bedoeld, verdient de herhaald-optel-methode wellicht toch de voorkeur, zij het ondersteund door gebaar en beeld van resp. streep-in-de-lucht en lijn-op-papier, en een daaraan gekoppelde korte notatiewijze.

Dan nog een enkele opmerking over het delen. De delingsalgoritme is hier gebonden aan het verdelen. Maar het zal duidelijk zijn dat ook de verhoudingsdeling (het groepjes maken) bij het herhaald-af trek-model past. Het is zelfs zo, dat in vele leerboeken de laatstgenoemde betrekking geprefereerd wordt (de zogenaamde Greenwood-methode). Wij gaan uit van verdeelsituaties maar betrekken al snel ook verhoudingsdelingen in de deelleegang.

Dus zowel voor vermenigvuldigen als voor delen geldt dat wel één model gekozen wordt, maar dat in de contextproblemen toch alle aspecten van de twee bewerkingen vervat liggen. Welke aspecten dat kunnen zijn, werd in 'Cijferend vermenigvuldigen en delen 1' opgenomen – daar gaan we dus nu niet verder op in.

Naast de kwestie van de modellenkeuze is een veelgehoorde vraag welke aanwijzingen men de onderwijsgevende kan aanbieden of beter welk *didactisch houvast* men kan geven bij het onderwijzen in de cijferleergang zoals hier geschetst. Wanneer is een leerling aan het volgende niveau van schematisering toe? Wanneer moeten we een kind stimuleren tot een verdergaande verkorting en wanneer afremmen? Hoeveel oefenstof is noodzakelijk in een bepaalde fase? In hoeverre moeten we de kinderen vrijlaten in hun notatiewijzen en ook in hun oplossingswijzen? En wat te zeggen van de eindniveaus: hoeveel tijd moet geïnvesteerd worden in het bereiken van de standaard-algoritmen i.c. de meest verkorte cijferprocedures; wat is verantwoord en wat niet meer? ...

Zonder in detail op alle vragen in te gaan, volgen hier samenvattend wat didactische tips – in de voorgaande basistekst staan uitgebreidere aanwijzingen en in een aantal gevallen ligt de keuze bij het schoolteam zelf, namelijk als er sprake is van een keuze van de doelstellingen.

Welnu, van belang is dat kinderen vastheid van werken op een bepaald niveau van schematisering hebben. Stel dat bijvoorbeeld een leerling na 20 lessen een vermenigvuldiging als 32×56 uitrekent en noteert via happen van tien:

$$\begin{array}{l} 2 \times 56 = \\ 10 \times 56 = \\ 10 \times 56 = \\ 10 \times 56 = \end{array}$$

Het is dan van belang om te weten of dat kind de weg-terug naar de lange optelling nog ziet. Vervolgens of de eenheden-vermenigvuldiging direkt uitgerekend wordt, en de lange optelling evenzeer met vlot inwisselen gebeurt. Is dat het geval – er is dan sprake van inzicht en voldoende vaardigheid – dan kan de aanzet tot het direkt samenemen van de tientallen-vermenigvuldigingen gegeven worden. Men kan dit doen door het kind in gedachten de drie-tientallenoptelling te laten uitvoeren. Lukt dit, dan is het kind aan het volgende niveau van schematisering en verkorting toe – men kan dat ontdekken door het kind die handeling te laten verwoorden.

volgen over de keuze van modellen, het belang van plaatswaarde e.d. Bovenal zal men zich in de geest die achter deze werkwijze steekt moeten kunnen vinden, welke tot uitdrukking komt in respectievelijk het tegengaan van sterk op 'trucs' en algoritmen gericht onderwijs dat immers een funeste invloed op de wiskundige attitude heeft, het proberen te voorkomen dat informele kinderlijke oplossingsstrategieën van contextopgaven en formele rekenkundige methoden uit elkaar groeien en gescheiden naast elkaar blijven staan, het verhogen van de toepasbaarheid van de cijferprocedures en het optimale gebruik van de rekenmachine en de zakcomputer, en het opvatten van cijferen als een vorm van handig rekenen dat niet per se voor alle kinderen naar de standaard-algoritmen hoeft te leiden.

Voorzichtigheid is dus geboden. Bovendien verwachten we dat binnen afzienbare tijd steeds meer methoden op de hier geschetste werkwijzen of varianten ervan zullen overgaan. Trouwens ook in dat geval zal de onderwijslast toch in hoofdzaak bij de onderwijsgevende komen te liggen. Want in tegenstelling tot de aloude cijferleergang, die door het leerboek bepaald was, is het hier geschetste cijferonderwijs kindgericht en vooral ook een groepsactiviteit waarin voor de onderwijsgevende een belangrijke taak is weggelegd.

Wat is nu de conclusie met betrekking tot de onderwijsbaarheid? Grote mogelijkheden, niet geringe moeilijkheden: er moet aan verschillende voorwaarden voldaan worden. Het onderhavige boek richt zich op ontwikkelaars i.c. methodenschrijvers, werkplanontwikkelaars van schoolteams e.a., maar tevens op studenten en onderzoekers en uiteraard op geïnteresseerde onderwijsgeven, doch daarbij de laatstgenoemden niet in de eerste plaats als ontwikkelaars beschouwend. We willen geen overspannen verwachtingen scheppen en niet suggereren dat men het cijferen in een handomdraai zou kunnen veranderen: vernieuwing is geen spectaculaire actie maar een noeste ambachtelijke bezigheid. Wel zal het mogelijk zijn om eens te starten met bijvoorbeeld delen – dus om niet direkt alles te veranderen! Sterker nog: dit boek kan hiertoe juist een stimulans zijn.

Dit gezegd hebbende, richten we ons vervolgens op de keuze van de *meest geëigende modellen* voor de cijferprocedures van de basisoperaties vermenigvuldigen en delen, dat wil zeggen eigenlijk alleen op het vermenigvuldigen, omdat we bij het delen geen duidelijke alternatieven hebben doch slechts kleinere nuance-verschillen. Vermenigvuldigen volgens het kruispuntenmodel of via herhaald-optellen? Beide modellen zijn goed bruikbaar – zoals uit de voorgaande hoofdstukken moge blijken. Als we nu alles overziend, zouden moeten kiezen, zou *onze keuze* die van *het herhaalde optellen* zijn. De twee belangrijkste redenen daarvoor zijn de volgende: ten eerste sluit deze aanpak goed aan bij die van het delen zodat in feite alle basisbewerkingen van het cijferen op elkaar afgestemd zijn, en ten tweede past herhaald optellen beter bij de 'natuurlijke' werkwijze die kinderen bij het maken van contextproblemen hanteren – consistentie en toepasbaarheid zijn dus de belangrijkste motieven. Het kruispuntenmodel en het rechtshoeksmodel zijn daarnaast uiteraard belangrijke modellen waarmee de kinderen bij de begripsvorming van vermenigvuldigen in aanraking gebracht (moeten) worden: belangrijke eigenschappen kunnen ermee zichtbaar worden gemaakt, grootheden kunnen ermee 'gekruist' worden en later bij breuken en komma-

Bij het delén zijn de verschillende notatiewijzen reeds heel precies in de voorgaande basistekst aangegeven.

We spraken zojuist over *rekenvaardigheid* in de zin van rekenvoorwaarden voor het leren cijferen. Ook dit punt is van uitzonderlijk belang en verdient aparte aandacht, omdat er verschillende standpunten over mogelijk zijn die ieder belangrijke consequenties voor de cijferleergang als geheel hebben. De meest *strikte opvatting* die trouwens het meeste is aan te bevelen indiën men de hier geschetste leergang voor het eerst volgt, gaat ervan uit dat *alle kinderen bij de start van het cijferen de tafels moeten beheersen* (ook de tafels van de tientallen) *en direkt moeten kunnen inwisselen en lenen*. Deze opvatting is daarom zo aantrekkelijk omdat op basis van deze vaardigheden snel voortgang geboekt kan worden indien men eenmaal aan het ‘echte’ cijferen begint – dat is één.

Maar ten tweede zullen op deze grondslag de niveauverschillen bij het cijferen veel kleiner zijn dan wanneer men aan die vaardigheidsvoorwaarden minder strak de hand houdt en ook toelaat dat de kinderen tijdens het leren cijferen de rekenvaardigheid met betrekking tot tafels, inwisselen en lenen verder opvoeren. Dit laatste hebben wij in feite gedaan. Maar achteraf bezien, is deze werkwijze in de eerste onderwijsronde niet aan te bevelen, omdat dan inderdaad de *niveauverschillen zeer groot* worden – er zijn tenslotte heel wat kinderen die spelenderwijs memoriseren maar evenzeer zijn er die veel tijd en vlijt nodig hebben om de basisvaardigheden in te slijpen. Toch is ook een al te strikt vasthouden aan rekenvoorwaarden niet aan te bevelen. We noemden het al: voor sommige kinderen vormt het cijferen op basis van contextproblemen en het daarmee verbonden handige rekenen pas een echte stimulans om allerlei vaardigheden te leren. Niettemin stellen we ons op het standpunt dat *redelijkerwijs* zoveel mogelijk aan de strikte rekenvoorwaarden vastgehouden moet worden, alvorens aan het cijferen te beginnen – zeker in eerste instantie. Redelijkerwijs betekent in dit verband dat met name het direkte inwisselen en lenen niet van alle kinderen geëist mag worden, eenvoudigweg omdat ze dit niet in enkele weken kunnen klaarspelen (te grote belasting van het werkgeheugen).

Hiermee zijn we bij de *onderwijsbaarheid* van het door ons voorgestane cijferen beland. Kun je zo’n leergang zomaar, dus los van een leerboek starten? Het antwoord daarop luidt in z’n algemeenheid: nee, niet zomaar! Er zal een plan ontwikkeld en uitgewerkt moeten worden om het cijferen van leerjaar 3 t/m leerjaar 5 te vervangen en dat is een heel karwei. Zoals gezegd, een karwei dat in het algemeen heel zwaar is voor een schoolteam alleen, want er zit nogal wat aan vast: naast het cijferen dienen ook het hoofdrekenen en het maken van toepassingsproblemen uit de bestaande methode gelicht te worden. Kortom, een belangrijk deel van de methode van de middenklassen is dan onbruikbaar geworden... Maar in wat groter verband en met ondersteuning van bijvoorbeeld begeleiders zou men het aan kunnen pakken – tenminste als alle leden van het team de werkplanontwikkeling van harte ondersteunen en zich nauwgezet op de hoogte stellen van de hiervoor genoemde punten betreffende toepassingen, eindvormen, rekenvaardigheden als voorwaarden, notatiewijzen, volgorde van opgaven, functies van contextproblemen, en van onderdelen die nog

stract zijn en de werkwijze van de betreffende leerling niet dekken. (Men kan dit vooral signaleren als men de kinderen hun handelwijzen laat verwoorden en verantwoorden!). Er kan nog een derde klip genoemd worden, die vlak bij de eerste ligt. Indien er namelijk niet een zekere uniformiteit in het noteren is, kunnen de kinderen elkaar niet makkelijk meer begrijpen en dat moet als een ernstige handicap aangemerkt worden, omdat het heel belangrijk is bij het progressieve schematiseren dat de kinderen met elkaars oplossingen geconfronteerd worden.

In de tekst van het gedeelte over vermenigvuldigen volgens herhaald optellen kan men lezen hoe lastig het is deze klippen te omzeilen.

Achteraf gezien hadden we na het begin met de lange optelling al wat direkter op de volgende notatiewijze kunnen aansturen:

$$56 \times 28 =$$

$$6 \times 28 =$$

$$10 \times 28 =$$

$$10 \times 28 =$$

$$10 \times 28 =$$

$$10 \times 28 =$$

$$10 \times 28 =$$

Na ongeveer vijftien lessen bleken verschillende kinderen hier namelijk duidelijk aan toe te zijn. Deze notatie zou met een *vingerwijzing in de lucht* gepaard kunnen gaan om de relatie met de lange optelling vast te leggen en eventueel *een strepenschema op papier*.

$6 \times 28 =$	28
	+ 6
$10 \times 28 =$	+ 10
$10 \times 28 =$	+ 10
enz.	

De volgende notatiestap zou dan zijn:

$$\begin{array}{l} 6 \times 28 = \\ 50 \times 28 = \text{---} + \end{array}$$

Maar deze kan alleen gezet worden indien de rekenvaardigheid zover gevorderd is dat deze deelprodukten uit het hoofd uitgerekend kunnen worden – zie hier weer de samenhang tussen noteren en uitrekenen.

Zodoende krijgen we de volgende notatiestappen:

- lange optelling geheel uitgeschreven;
- lange optelling gedeeltelijk uitgeschreven;
- lange optelling gedeeltelijk uitgeschreven in happen van tien, ondersteund door streep-in-de-lucht en strepenschema op papier;
- lange optelling kort uitgeschreven in onderdelen, ondersteund door streep-in-de-lucht en strepenschema op papier;
- verdere verkorting door eenheden, tientallen, honderdtallen direkt samen te nemen.

ren zelf zal de band tussen vermenigvuldigen en herhaald optellen, en delen en herhaald aftrekken stevig aangehaald moeten worden, en wel te beginnen bij de tafels! In het eerste deel over vermenigvuldigen hebben we kunnen waarnemen dat Christiaan c.s. allerlei vindingrijke oplossingswijzen voor een contextprobleem ontwikkelden, maar daarbij geen optimaal gebruik maakten van de tafels, net zo min als bij het goudvissenprobleem 27×8 vanzelf afsplitsingen van 10×8 gemaakt werden. Welnu, het is zaak om de startlijn van het handig rekenen – of zo men wil: het cijferen – ongeveer hier te trekken. Laat uiteraard strategieën van tellen, verdubbelen, turven e.d. toe. Maar wijs ook op de werkwijzen van de kinderen die de tafels gebruiken, tien-tafels afsplitsen en handig inwisselen. En we zullen constateren dat ook voor de zwakke leerlingen de laatstgenoemde werkwijzen overtuigend zijn, omdat ze zoveel handiger tot het juiste antwoord voeren. Het gevolg is dat na korte of langere tijd de kinderen, indien ze daartoe aangemoedigd worden, die aanpak ook gaan volgen. En zolang ze nog informele manieren zouden gebruiken, kan trouwens niet gezegd worden dat ze niet zinvol bezig zijn, omdat dit voor hen toch ook een vorm van handig rekenen is – er is dus geen enkele reden om te forceren! Maar, zoals gezegd, zal in de praktijk van het onderwijs blijken dat vrijwel alle kinderen na enige tijd, als in de opgaven grotere getallen verschijnen, de tafels (ook die van tien!) gaan gebruiken en omgekeerd aan de contextopgaven een stimulans ontleen om de tafels te memoriseren. Voor het delen geldt in grote lijnen hetzelfde. Dus ook hier wordt het gangbare formele cijferen aanvankelijk wat uitgesteld, waardoor het informele rekenen aan de hand van elementaire contextopgaven niet te snel in het keurslijf van de algoritmen gewrongen wordt, met alle ongewenste gevolgen vandien.

In de grote lijn van de leergang *gebruiken we contextproblemen op twee verschillende manieren*, namelijk als uitgangspunt voor en als toepassing van de cijferprocedures. En wel op de volgende wijze: steeds weer wordt bij ieder belangrijk nieuw geval uitgegaan van een contextopgave, zoals bij 8×23 , 23×8 , 23×58 , 123×12 , en ook worden bij het inoefenen steeds weer contextproblemen naast ‘kale’ cijfersommen gesteld. Bij het delen idem dito.

Zoals eerder aangeduid is het gebruik van contextproblemen als bron voor de begripsvorming van het cijferen een betrekkelijk nieuwe aanpak. De waarde ervan ligt, naar onze ervaring, zowel bij het cijferen als ook bij het toepassen. Voor het cijferen geeft zo’n reëel probleem houvast omdat de kinderen daaraan hun rekenhandelingen kunnen oriënteren, en voor het toepassen ligt de betekenis in de verbinding met de korte rekenwijzen van het cijferen en daarmee in de begripsvorming van vermenigvuldigen en delen in relatie tot herhaald optellen en herhaald aftrekken.

Het *noteren* (en verwoorden) van de steeds meer verkorte rekenwijze is een teer punt. De notatiewijze vormt tot op zekere hoogte de uitdrukking van het denken, de manier van aanpak, de rekenstrategie: kinderen die een sterk verkorte rekenwijze toepassen, zullen gewoonlijk de oplossing ook kort noteren. Tot op zekere hoogte... Hier liggen twee gevaren. Ten eerste kunnen niet alle zelf-gevonden notatiewijzen gehonoreerd worden om de eenvoudige reden dat zo’n notatie op den duur wel eens blokkerend kan werken voor nog verdere verkortingen. En ten tweede kunnen opgelegde notaties wel eens remmend werken vanwege het feit dat ze te formeel, te ab-

Wel, in het vigerende cijferonderwijs wordt per deelgeval, eventueel via tussenstappen, steeds direkt op de standaard-vorm aangestuurd. Eerst wordt bijvoorbeeld een getal met één cijfer vermenigvuldigd met een getal van twee cijfers leidend naar de standaard-vorm, dan een één-cijfergetal met een drie-cijfergetal voerend tot de standaard-algoritme, idem dito met een vier-cijfergetal, vervolgens een twee bij twee, een twee bij drie, een twee bij vier vermenigvuldiging. En steeds gaat men pas naar de complexere gevallen indien het voorgaande minder complexe geval beheerst wordt, dus op standaard-niveau uitgevoerd kan worden. We noemen dit leren cijferen volgens *progressieve complicering*. Leren cijferen volgens *progressieve schematisering* vormt hiervan het spiegelbeeld. De zojuist opgenoemde deelgevallen worden nu niet zover in de tijd uitgestreken, doch ongeveer tegelijkertijd behandeld. Maar de oplossingen worden op een laag niveau van schematisering en verkorting opgelost, bijvoorbeeld in het geval van een vermenigvuldiging: een lange optelling maken met daaruit happen van tien nemen. Later worden dan dezelfde opgaven korter getoeterd en sneller uitgerekend: de aparte happen van tien, honderd enz. worden nu samengenomen. Kortom, deze leergang wordt in grote lijnen bepaald door schematisering en verkorting en niet door de complexiteit van de opgaven. Dit is niet het enige verschil.

Het tweede onderscheid zit 'm in de toepassingen, ofwel *de plaats van de contextproblemen* in de cijferleergang. In het gangbare cijferonderwijs zijn toepassingen als het ware toe-passingen achteraf; ze staan in feite los van de cijferleergang, zijn er niet mee geïntegreerd. In sommige methoden, zoals bijvoorbeeld 'Naar zelfstandig rekenen' (nieuwe versie) is het aantal toe-passingen beperkt tot enkele tientallen per leerjaar, terwijl in andere methoden vrij veel verhaaltjessommen in de middenbouw gemaakt worden, zoals bijvoorbeeld in 'Elementair wiskundig rekenen'. Maar veel of weinig, ze staan zoals gezegd naast de leergang. In het cijferonderwijs zoals ons dat voor ogen staat zijn contextproblemen echter geïntegreerd met het cijferen: ze vormen de bron van het cijferen en worden daarnaast ook als toepassingen benut.

Ziehier twee belangrijke verschilpunten: leerstofordenig en toepassingen. Het door ons voorgestelde cijferen is, we noemden het al, kort te typeren als geïntegreerd cijferen volgens progressieve schematisering, waarbij 'geïntegreerd' zowel betrekking heeft op cijferen vervlochten met handig rekenen als op cijferen verweven met contextproblemen. Op het laatstgenoemde gaan we nu apart in.

In onderzoek is vastgesteld dat leerlingen van de basisschool nogal wat moeite hebben om de bewerkingen van *vermenigvuldigen en delen in elementaire contextopgaven* te onderkennen. Ongeveer de helft van de kinderen heeft aan het einde van de basisschool moeilijkheden met die bewerkingen. Het gevolg is dat die kinderen ook de cijferprocedures niet (altijd) in de geëigende gevallen toepassen.

Hoe kan men nu de toepasbaarheid verhogen? Door meer contextproblemen te geven? Er zijn methoden die het probleem van de toepasbaarheid onderkennen zoals bijvoorbeeld 'Elementair wiskundig rekenen', die het inderdaad in verhoging van de kwantiteit zoekt en dat op zich op heel acceptabele wijze doet in de vorm van korte onderwijsverhaaltjes. Wij zijn echter van oordeel dat dit nog onvoldoende tegemoet komt aan wat de kinderen nodig hebben – althans de zwakke rekenaars. In het cijfe-

IV NABESCHOUWING

Deze nabeschuwing is een echte *na-beschuwing*. Wat is achteraf gezien, na zo'n jaar of acht werken, ons standpunt over het beste cijferonderwijs? Dat is de vraag die we hier willen beantwoorden. Wat in de voorgaande hoofdstukken beschreven staat, was vrijwel definitief. Maar met name het experiment over vermenigvuldigen volgens herhaald optellen was nog niet geheel voltooid: als we het konden overdoen dan zouden we op kleine punten nog wat veranderingen aanbrengen in de zin zoals hier beschreven. Het volgende is wat ons betreft dus een afsluiting. Men zou wellicht ook kunnen zeggen dat het het begin kan vormen van nieuwe ontwikkelingen op het terrein van het cijferen die passen bij het huidige tijdsgewricht waarin kinderen de beschikking hebben over zakrekenmachientjes en -computers.

Globaal gesteld is onze opvatting dat de ontwikkeling van deze rekenautomaten een appèl op ons onderwijs doet: namelijk niet zozeer het snelle cijferen volgens de meest verkorte algoritme-vormen (zoals bijvoorbeeld de korte staartdeling) is nu primair, als wel het schatten, handig rekenen, hoofdrekenen en speciaal het kunnen toepassen van de cijferprocedures op de geëigende contextproblemen, dat is waar het vooral om gaat.

Nu gaan er de laatste tijd steeds meer stemmen op om het cijferen af te schaffen. Is dit de consequentie van ons standpunt? Nee, dat is niet zo. *Wij zijn er niet voor om het cijferen af te schaffen*. En de wegen die in het voorgaande geschetst werden, leiden wat ons betreft naar de standaarduitvoeringen. Maar... indien men van mening zou zijn dat de kinderen de standaard-algoritmen niet hoeven te leren – en die opvattingen zijn we de laatste jaren ook in de onderwijspraktijk herhaaldelijk tegengekomen – dan kan men toch het met contextproblemen geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering zoals dat hier beschreven is, ook heel goed volgen. Alleen stoot men in dat geval niet helemaal naar het eindniveau van de leergang door.

We zullen in de toekomst de cijferleergang zoals hier geschetst niet helemaal kunnen ontberen. *Cijferen is in onze zin namelijk vooral een vorm van handig rekenen* – zo is het althans in het eerste deel van de leergang. En dit handig rekenen c.q. schatten, hoofdrekenen, gebruik maken van de tafels en van eigenschappen, dat is nu exact wat we in de toekomst (ook) nodig zullen hebben. Vandaar dat we durven te stellen: *het cijferen aldus opgevat, vormt een leergang waarmee verschillende eind-leerdoelen gediend kunnen worden*. Extreem gesteld kan het zowel voor het handig rekenen (niet-cijferen) als het standaard-cijferen gebruikt worden.

Maar kan dit met het gangbare cijferen ook niet? *Wat is nu precies het verschil tussen de gebruikelijke methodiek en de hier geschetste aanpak?*

Type f: slordigheidsfouten zoals: verkeerd overschrijven of slecht lezen.

Deze zes typen fouten kunnen we in drie categorieën onderbrengen.

Categorie 1:

Hiertoe rekenen we de fouten van het type a, b, c en soms e. Deze fouten hebben te maken met het niet adequaat functioneren van de basisvaardigheden.

Categorie 2:

Hiertoe rekenen we de fouten van het type d en gedeeltelijk type e. Het zijn fouten, die te maken hebben met de algoritme van de bewerkingen vermenigvuldigen (type d) en optellen (type e).

Categorie 3:

Slordigheidsfouten.

Het zal duidelijk zijn dat niet altijd direct vastgesteld kan worden tot welke categorie een gemaakte fout behoort. Een gesprek met het kind dat de fout maakte, zal vaak opheldering kunnen verschaffen.

Als we de categorieën aan een nadere, algemene beschouwing onderwerpen zullen we de slordigheidsfouten buiten beschouwing laten. Deze fouten zijn voor het specifieke algoritmiseren niet van essentieel belang. Ze hebben in sommige gevallen een meer algemene oorzaak, maar zijn ook vaak van incidentele aard.

Fouten uit de eerste categorie zijn vaak ernstiger. Als er echter in één of enkele lessen aandacht aan wordt besteed, kan in vele gevallen het probleem grotendeels de wereld uit zijn. Dit geldt met name voor het vermenigvuldigen met nul.

Fouten van de tweede categorie zijn essentiële fouten, zoals die van het type d en e, waarbij vermeld dient te worden dat alle fouten van het type e hier voor het gemak meegerekend zijn. (Er is dus geen onderscheid gemaakt in principiële fouten ten aanzien van de optelalgoritme, zoals verkeerd inwisselen, en fouten in het automatiseren van de opteltafels).

Lichten we deze fouten uit de resultatentabel, dan zien we:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>type d</i> :	12	9	10
<i>type e</i> :	11	7	0

Opvallend bij deze fouten is, dat ze in hoofdzaak, wat betreft type d, door vijf kinderen gemaakt worden. De overige fouten van dit type zijn incidenteel. Bij type b is nergens sprake van consequent voorkomende fouten: het aantal fouten is verspreid over een grotere groep leerlingen. Deze groep van vijf zullen we kortere of langere tijd extra hulp moeten geven.

Laten we eerst eens wat uitgebreider ingaan op gemaakte fouten. Enige voorbeelden van het type a:

$$\begin{aligned}8 \times 30 &= 210 \\2 \times 30 &= 50 \\5 \times 7 &= 49 \\2 \times 8 &= 8 \\8 \times 2 &= 26\end{aligned}$$

De laatste drie kunnen ook tot categorie 3 behoren, omdat ze wellicht oorzaak zijn van verkeerd aflezen of van een verschrijving.

Fouten van het type b:

$$\begin{aligned} 8 \times 30 &= 24 \\ 10 \times 7 &= 700 \\ 20 \times 90 &= 180 \\ 300 \times 10 &= 300 \\ 4 \times 7 &= 280 \end{aligned}$$

Fouten van het type c:

$$\begin{aligned} 0 \times 7 &= 7 \\ 20 \times 0 &= 200 \end{aligned}$$

Fouten van het type d die we signaleerden zijn:

1) 90×24

Dit kind wist geen raad met deze opgave. De tweestrijd is terug te vinden in de uitwerking.

2) 107×84

Dit voorbeeld vertoont meerdere fouten:

- 107 is verkeerd gesplitst, misschien verkeerd gelezen, want het kwam incidenteel voor bij dit kind;
- hoewel alle tussenprodukten aangekruist zijn, is één antwoord niet genoteerd;
- bovendien zijn de genoteerde deelprodukten verkeerd opgeteld.

(Overigens een goed voorbeeld om aan te tonen hoe moeilijk het is om de fouten te categoriseren).

Deze twee voorbeelden geven een beeld van de fouten die incidenteel voorkwamen.

Fouten van het type e komen ook zeer verspreid en incidenteel voor bij een grote groep kinderen. We zullen aan een paar voorbeelden laten zien om wat voor fouten het hier gaat.

Voorbeeld 1: 14×29

$$\begin{array}{r}
 20 \quad 9 \\
 \hline
 5 \times 20 = 200 \\
 4 \times 20 = 80 \\
 5 \times 9 = 45 \\
 4 \times 9 = 36 \\
 \hline
 200 + 80 + 45 + 36 = 376
 \end{array}$$

De tussenprodukten zijn goed uitgerekend, maar waarschijnlijk heeft dit kind niet alle tientallen opgeteld. (Het getal ‘5’ geeft het nummer van de opgave aan).

Voorbeeld 2: 15×17

$$\begin{array}{r}
 10 \quad 5 \\
 \hline
 10 \times 10 = 100 \\
 7 \times 10 = 70 \\
 10 \times 5 = 50 \\
 7 \times 5 = 35 \\
 \hline
 100 + 70 + 50 + 35 = 255
 \end{array}$$

De tussenprodukten zijn goed en duidelijk opgeschreven. Hoe komt dit kind aan vier honderdtallen?

Voorbeeld 3: 38×32

$$\begin{array}{r}
 5 \quad 30 \quad 2 \\
 \hline
 30 \times 5 = 150 \\
 8 \times 5 = 40 \\
 0 \times 5 = 0 \\
 30 \times 30 = 900 \\
 8 \times 30 = 240 \\
 0 \times 30 = 0 \\
 2 \times 5 = 10 \\
 2 \times 30 = 60 \\
 2 \times 2 = 4 \\
 \hline
 150 + 40 + 0 + 900 + 240 + 0 + 10 + 60 + 4 = 1304
 \end{array}$$

De tussenprodukten zijn goed uitgerekend, maar wat slordig onder elkaar geplaatst.

Bij de optelling zijn de tientallen nog eens bij de negen honderdtallen geteld. Bovendien zijn de twee honderdtallen van 240 gezien als twee duizendtallen.

Voorbeeld 4: 28×12

$$\begin{array}{r} 200 \\ 160 \\ 40 \\ 16 \\ \hline 336 \end{array}$$

Nog een geval van slordig noteren en daardoor verkeerd aflezen. De vier tientallen van 40 en het ene tiental van 16 zijn aan elkaar geschreven en gelezen als 9.

Voorbeeld 5: 14×29

$$\begin{array}{r} 200 \\ 36 \\ 180 \\ 36 \\ \hline 406 \end{array}$$

In dit voorbeeld is behalve een optelfout ook een 'nullenfout' te constateren. De tientallen zijn niet goed opgeteld.

Voorbeeld 6: 48×36

$$\begin{array}{r} 1200 \\ 240 \\ 240 \\ 48 \\ \hline 1728 \end{array}$$

Bij de duizendtallen is analoog aan het voorgaande ook één bijgeteld.

Deze optelfouten komen incidenteel voor en geven weinig reden tot ongerustheid. Op één aspect moet zowel bij het optellen als het vermenigvuldigen gewezen worden. We moeten kinderen namelijk leren om niet alleen maar cijferend te rekenen. Daarom is het goed om ook tijdens algoritmelessen vaak eerst het antwoord te laten schatten.

Bijvoorbeeld 38×32 kan grof geschat worden tussen (30×30) 900 en (40×40) 1600. En 14×29 ligt tussen 290 (10×29) en 580 (20×29) en dan dichterbij 290.

Als wij kinderen leren op verschillende manieren tegen een berekening aan te kijken en niet steeds dit soort opgaven cijferend te maken, dienen we meerdere doelen tegelijkertijd. Het schatten is later vooral ook van groot belang bij het delen.

Tot slot nog enkele voorbeelden van slordigheidsfouten bij type f. Ilse heeft bij de berekening van 8×2 '61' genoteerd. Jan heeft een keer een verkeerd antwoord overgeschreven van zijn werkblaadje.

Dit zijn de enige slordigheidsfouten die ook in de resultatentabel geregistreerd zijn. Eén fout, die wij bij het type d ondergebracht hebben is de volgende.

$$\begin{array}{r}
 300 \times 10 \times 5 \\
 300 \times 10 \times 5 \\
 10 \times 10 \times 5 \\
 2 \times 10 \times 5 \\
 \hline
 65000
 \end{array}$$

Eén tussenprodukt is niet genoteerd, maar ook niet aangekruist. Hieruit blijkt dat dit kind bewust aankruist wat ze ernaast uitrekent.

Onze algemene conclusie luidt, dat regelmatig toetslessen afnemen noodzakelijk is om een nauwkeurig beeld van de prestaties van ieder kind te krijgen. De observatie tijdens de gewone lessen geeft al wel een globaal beeld van vaardigheid en oplossingsniveau, maar toetslessen en de bijbehorende analyse van het werk geven in bepaalde opzichten een duidelijker neerslag van beheersing van het cijferen en bijgevolg ook meer aangrijpingspunten voor gerichte steun – in ieder geval krijgen we een aanvulling op de observatiegegevens die we tijdens het onderwijzen verzameld hebben.

Analyse van de toets leerde ons dat weinig kinderen fundamentele problemen hebben. Ook is echter duidelijk bij enkele leerlingen te constateren dat regelmatig geoefend moet worden met allerlei opgaven van verschillende moeilijkheidsgraad.

Vervolgens valt op dat er nogal veel aandacht besteed is aan het trucmatig uitrekenen met nullen. Het verwoorden van wat er uitgerekend moet worden is daardoor wat te zeer naar de achtergrond verdwenen. Bij zwakke leerlingen kan dat trucmatig rekenen zeer storend werken. Het blijft raadzaam om in deze periode regelmatig aandacht te besteden aan de basisvaardigheden (tafels en lange optellingen). Hierdoor kan het werktempo hoger worden.

Uit het werk van de leerlingen is duidelijk op te maken dat in deze groep vrijwel ieder kind op hetzelfde niveau van oplossen werkt. Het is begrijpelijk dat de onderwijzer, teneinde een goed overzicht te houden, ervoor waakt, dat er te grote verschillen ontstaan. Door een wat gestuurde aanpak kan hij zorgen voor een niet al te grote spreiding. Bij deze toetsles blijkt echter ook duidelijk dat het op precies één niveau werken nadelige kanten heeft. Zo zien we dat sommige kinderen kennelijk te snel de verschillende fasen moeten doorlopen, terwijl er ook kinderen zijn die te kennen geven op een hoger niveau te willen en kunnen werken. De kinderen die te snel door de verschillende fasen gegaan zijn, hebben niet de gelegenheid gekregen om hun verkregen inzicht in de voorgaande fase vast te leggen. Ze moesten te vlug algoritmisch gaan werken en daardoor is inzichtelijkheid in de cijferhandeling geblokkeerd geraakt. Het leertraject zou in dit geval weer geheel of gedeeltelijk afgelegd moeten worden. Het laten verwoorden van de handelingsprincipes tenslotte is noodzakelijk om die

weg terug in het leerproces open te houden. Bij de beschrijving van de kinderen die extra help nodig hadden bleek dit zonneklaar. Aldus verschaften de resultaten ons niet alleen informatie over het leerproces, maar vooral ook over het onderwijsproces. Dus niet alleen de kinderen, maar ook de onderwijsgevende zelf komt hiermee in beeld. Een dergelijke spiegeling is echter een uitstekend middel om op de voortgang van het onderwijs te reflecteren.

4 EINDFASE

In de loop van het vierde leerjaar wordt toegewerkt naar de eindfase. Deze eindfase hoeft niet voor iedereen dezelfde te zijn. Aan de hand van een voorbeeld zullen we laten zien welke eindniveaus er redelijkerwijs te verwachten zijn. Mocht 47×273 uitgerekend moeten worden, dan zijn er drie vormen die vanuit het kruispuntenmodel als eindfase tevoorschijn komen. (Overigens dient opgemerkt te worden, dat er gestreefd wordt iedere leerling op zich het hoogst mogelijke eindniveau te laten bereiken).

Zeer zwakke leerlingen lossen 47×273 als volgt op (dit gebeurt echter slechts bij hoge uitzondering):

$$\begin{array}{r}
 200 \quad 70 \quad 3 \\
 \begin{array}{c}
 | \quad | \quad | \\
 40 - * - * - * - \\
 7 - * - * - * - \\
 | \quad | \quad |
 \end{array}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 8000 \\
 2800 \\
 120 \\
 1400 \\
 490 \\
 \hline
 21 \\
 \hline
 12831
 \end{array}$$

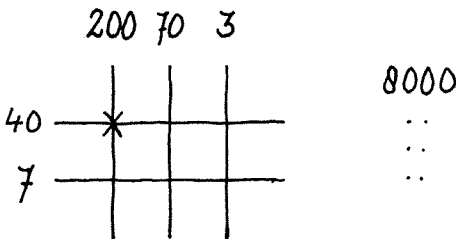
Vrijwel iedere leerling kan minstens het volgende niveau bereiken:

$$\begin{array}{r}
 273 \\
 \underline{47} \times \\
 21 \\
 490 \\
 1400 \\
 120 \\
 2800 \\
 \underline{8000} \\
 12831
 \end{array}$$

De meeste kinderen kunnen echter, zoals bekend, de traditionele algoritme leren:

$$\begin{array}{r}
 273 \\
 \underline{47} \times \\
 1911 \\
 10920 \\
 \hline
 12831
 \end{array}$$

Het zal ieder duidelijk zijn dat de eerst aangegeven eindvorm overeenkomt met de lijnenfase. Het schema blijft zichtbaar en met behulp daarvan worden alle tussenprodukten genoteerd.



Opgemerkt dient te worden dat het enige verschil met het schema van de lijnenfase eruit bestaat, dat nu de tussenprodukten niet meer in het plaatje geschreven worden. De kinderen hebben geleerd met een kruisje aan te geven welk tussenprodukt uitgerekend is en het gevonden antwoord naast het plaatje te zetten.

Bij de eerst aangegeven eindvorm is het plaatje uit de lijnenfase verdwenen. Het plaatje is wel gebruikt bij de overgang naar deze fase. Zonder het plaatje te tekenen wordt aan de kinderen gevraagd: Hoeveel tussenprodukten komen er naast het plaatje? Vanuit het antwoord ‘zes’, wordt gevraagd, om welke sommen het dan gaat. Oplossing: 40×3 ; 40×70 ; 40×200 ; 7×200 ; 7×70 ; 7×3 .

Het opnoemen van de sommetjes bij de tussenprodukten geeft soms wat problemen. Daarom wordt de schrijfwijze van de opgave nu zó ingevoerd:

$$\begin{array}{r} 273 \\ 47 \times \\ \hline 7 \times 3 = 21 \\ 7 \times 70 = 490 \\ 7 \times 200 = 1400 \\ 40 \times 3 = 120 \\ 40 \times 70 = 2800 \\ 40 \times 200 = \underline{8000} \end{array}$$

Bij het voorspellen van het aantal tussenprodukten aan de hand van het plaatje uit de lijnenfase dient, zoals gesteld, speciaal aandacht besteed te worden aan het volgende type sommen: 60×478 ; 68×407 ; 53×870 .

Verreweg de meeste kinderen kunnen leren vermenigvuldigen volgens de traditionele algoritme:

$$\begin{array}{r} 273 \\ 47 \times \\ \hline 1911 \\ 10920 \\ \hline 12831 \end{array}$$

Om de overstap naar dit niveau aan te geven, keren we even terug naar de lijnenfase.

$$\begin{array}{r}
 200 \ 70 \ 3 \\
 \hline
 40 \times 8000 \ 2800 \ 120 \rightarrow 10920 \\
 7 \times 1400 \ 490 \ 21 \rightarrow 1911
 \end{array}$$

In de 'horizontale' opstelling van de tussenprodukten verschijnen de twee getallen die ook in de traditionele algoritme opduiken. Op deze manier kunnen we laten zien dat we een nog kortere manier van werken kunnen volgen. Je telt de tussenprodukten van zeven alvast bij elkaar en dan die van veertig of omgekeerd. Daarna hoeft je alleen die twee uitkomsten nog samen te nemen.

'7 ×' levert de volgende drie tussenprodukten op:

$$\begin{array}{r}
 273 \\
 47 \times \\
 21 \\
 490 \\
 1400
 \end{array}$$

Als je nu tegelijk met het vermenigvuldigen de tussenprodukten optelt, kan dat zo:

$$\begin{array}{r}
 273 \\
 7 \times \\
 1911
 \end{array}$$

Verhaal erbij: $7 \times 3 = 21$. De twee tien van 21 doen we bij de andere tien, alleen de één noteren we. 7×7 tien is 49 tien en 2 tien is 51 tien (510). Hierbij zijn 5 honderden die we meteen bij de andere honderden doen, dus we noteren één tien. 7×2 honderden is 14 honderden plus 5 honderden is 19 honderden.

Het verhaal bij de vermenigvuldigings- en optellingshandeling lijkt veel op het bekende verhaal:

$$\begin{array}{r}
 273 \quad 7 \times 3 = 21 \quad 1 \text{ opschrijven, } 2 \text{ onthouden.} \\
 7 \times 7 = 49 (+2 = 51) \quad 1 \text{ opschrijven, } 5 \text{ onthouden.} \\
 1911 \times \quad 7 \times 2 = 14 (+5 = 19)
 \end{array}$$

Toch is er verschil. Vanuit de opbouw zijn de kinderen zich bewust van de waarde van het getal door de plaats die het inneemt. Er is geen sprake van 7×7 , maar van 7×70 of 7×7 tien. Dit verschil wordt nog meer merkbaar als nu nog de deelprodukten van $40 \times$ bij elkaar genomen worden. Er wordt dan gebruik gemaakt van de wetenschap dat $40 \times$ een getal hetzelfde is als $4 \times 10 \times$ dat getal. Het verklaren van de nul en dan vermenigvuldigen is dan ook geen probleem meer. Als de deelprodukten van $40 \times$ apart genoteerd worden, dan is duidelijk dat er geen eenheden zijn.

$$\begin{array}{r} 273 \\ \underline{40} \times \\ 120 \\ 2800 \\ \underline{8000} \end{array}$$

Als we nu meteen gaan optellen bij de vermenigvuldiging met 40, kan het volgende verhaal erbij verteld worden.

$$\begin{array}{r} 273 \\ \underline{40} \times \\ 10920 \end{array}$$

$40 \times 3 = 3 \times 4$ tien = 12 tien, dat is 2 tien en 1 honderd. De tien noteer ik, de honderd tel ik bij de honderden.

$40 \times 70 = 28$ honderden plus 1 honderd is 29 honderden, 9 honderden noteer ik en dan doe ik 2 duizenden bij de duizenden.

40 is 200 is 8 duizenden plus 2 duizenden is 10 duizenden.

Deze manier van werken zal in een aantal korte lessen van circa een half uur aan de orde moeten komen. Al gauw zal het verhaal eraan verdwijnen om plaats te maken voor de algoritme. Het merendeel van de kinderen is goed in staat om op den duur op het hoogste niveau te vermenigvuldigen. De weg ernaar toe is een lange weg geweest. Toch is het de moeite waard deze weg af te lopen. Aan het eind ervan ben je als onderwijsgevende heel eenvoudig in staat om fouten, die kinderen gaan maken, doeltreffend te bestrijden. We hebben maar een gedeelte van de weg af te leggen om een fout in het algoritmisch werken bewust te maken en dus te herstellen. Dat is een grote winst en daarnaast hoeft niet iedereen op het hoogste niveau te cijferen. Uit toetslessen is gebleken, dat de vaardigheid, ook als op het niveau van de lijnenfase gewerkt wordt, redelijk goed is en de snelheid van werken acceptabel. De leergang naar de eindfase toe moet vanaf het begin bepaald worden door het voortdurend samen zoeken naar een kortere en handiger werkwijze. Ook de laatste stap wordt gemotiveerd door te laten zien dat je met wat handigheid alvast wat optelt zonder alle tussenproducten nog te noteren. Toch blijft *goed* werken in principe belangrijker dan het oplossen op de snelste manier. Het blijven kijken naar de *oorzaak* van de fouten is voor remediërende hulp noodzakelijk. Kort en intensief oefenen van zowel de basisvaardigheden als de algoritme in een bepaald jaar, kan heel wat fouten, veroorzaakt door concentratiegebrek, voorkomen.

Let wel: onze stellingname berust op een keuze van de einddoelstellingen van de cijferprocedures. Het gaat niet om zo snel mogelijk werken met de meest verkorte procedures – wat ons betreft. Men kan echter over dit punt anders oordelen, dat is duidelijk.

Om meerdere redenen is het echter aan te bevelen om de basisvaardigheden te blijven oefenen.

5 OVERZICHT

In dit overzicht zullen we de belangrijkste punten op een rijtje zetten en tevens een korte karakteristiek van de verschillende fasen geven.

5.1 voorwaarden

Voorafgaande aan het aanleren van de algoritme voor vermenigvuldigen, hebben de kinderen kennis genomen van de bewerking vermenigvuldigen in allerlei toepassingssituaties, teneinde het aspect van de bewerking te onderbouwen. Allerlei contexten en oefenvarianties zijn daartoe gebruikt. De stroom van oefenvarianties zet zich met en naast het cijferende werken in midden- en bovenbouw van de basisschool voort. Bovendien worden op gezette tijden contextproblemen aangeboden, opdat de toepassingen niet los van het algoritmisch werken komen te staan. Voordat kinderen cijferend leren vermenigvuldigen dienen de tafels van vermenigvuldiging (tafels van 1 t/m 10) aangeboden en in bepaalde mate ingeoefend te zijn.

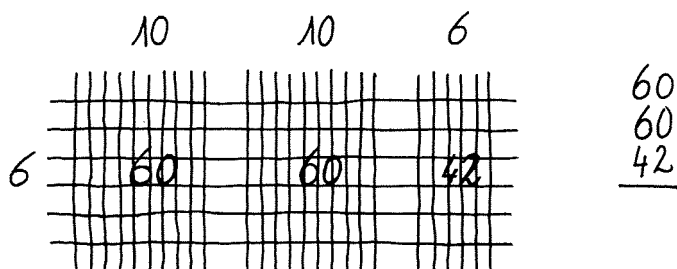
Verder dienen kinderen geen grote problemen meer te hebben met de algoritmen van het optellen en het aftrekken.

De vaardigheid, die nodig is voor vermenigvuldigen en delen, wordt verhoogd door in de middenbouw dagelijks tien minuten speciale oefenlesjes te geven.

5.2 contextfase

Kenmerk

Deze fase wordt gekenmerkt door de belangrijke bijdrage van de context welke de opbouw van de kruispunttekening en daarmee de start van de vermenigvuldigingsalgoritme ondersteunt. Het verhaal dient op een natuurlijke manier in een kruispunttekening vertaald te kunnen worden. Stadsplan en eekhoornverhaal voldoen beiden aan die voorwaarden, waarbij echter opgemerkt dient te worden dat het stadsplan uiteraard natuurlijker tot de kruispunttekening leidt. Het eekhoornverhaal is gemakkelijker over een wat langere periode te gebruiken. In deze fase wordt bij een verhaal een kruispunttekening gemaakt en omgekeerd bij een kruispunttekening een verhaal bedacht of gedacht.



Tijd

Om verwarring te voorkomen, willen we erop wijzen dat tijdsaanduidingen altijd bedoeld zijn als *richttijden*. De onderwijsgevende beslist in zijn eigen situatie steeds:

- 1 of aan de voorwaarden om een nieuw fase in te gaan voldaan is;
- 2 of er meer tijd aan het oefenen van de basisvaardigheden besteed dient te worden;
- 3 of bepaalde kinderen over kunnen stappen naar een volgende fase.

Om voldoende gelegenheid te geven de juiste voorwaarden te scheppen als hiervoor beschreven, kan het best met de vermenigvuldigingsalgoritme gestart worden omstreeks de kerstvakantie in het derde leerjaar. Introductielessen duren ruim drie kwartier tot een uur. Oefenlessen steeds twintig minuten tot een half uur. Aan vermenigvuldigen wordt gedurende de zogenoemde inoefenperiode gemiddeld twee keer per week aandacht geschonken. Bij de overgang naar een andere fase kan echter gedurende één à twee weken het aantal lessen wat frequenter zijn. De contextfase als geheel duurt zes à acht weken.

Leerstof

Het aantal te maken sommen is in deze fase niet van primair belang, temeer omdat één of twee verhalen al heel wat tijd vragen. Bij de keuze van de verhaaltjes wordt om twee redenen gekozen voor sommen van het type 7×34 , waarvan dus het ene getal onder de tien en het andere onder de honderd genomen wordt, dit om de tekening overzichtelijk te houden en om de herkenbaarheid van de tafels bij de deelprodukten te bevorderen.

Oefening

Dagelijks korte oefeningen van ongeveer tien minuten, met name in de basisvaardigheden. Basisvaardigheden zijn in dit geval tafels van vermenigvuldiging, 'tafels met nullen', optellingen en aftrekkingen tot twintig en langere optellingen.

Didactische aantekeningen

Laat tekeningen maken zonder hulpmateriaal (zoals liniaal). Gebruik steeds een groot vel A4-papier. Slordige tekeningen wijzen erop, dat er niet meer geteld wordt en dat een verdere schematisering van de tekening mogelijk kan zijn. Laat de kinderen regelmatig het verband tussen de tekening en de berekening verwoorden. Houdt de gemeenschappelijk nabespreking kort. Hierbij wordt voor sommige kinderen de mogelijkheid tot een verdere schematisering geboden. Laat af en toe de kinderen vooraf vertellen hoe ze gaan tekenen, om het daarna pas uit te voeren. Ze krijgen dan de gelegenheid om hun eigen gedachten-handeling te verifiëren.

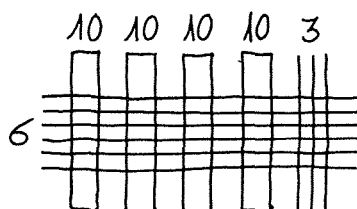
5.3 bundelingsfase

Kenmerk

Kinderen willen op den duur vlugger gaan werken en gaan derhalve slordiger tekenen. Precies het aantal lijnen tekenen is niet noodzakelijk, omdat het aantal erbij genoteerd is. Aan het einde van de contextfase wordt door de meeste leerlingen niet meer geteld: de tafelprodukten spelen nu een overheersende rol. Op een gegeven

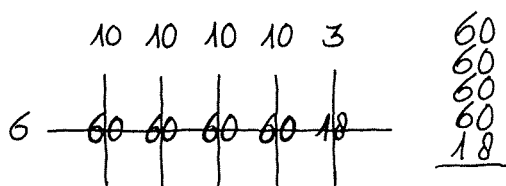
moment kan op natuurlijke wijze de overgang gemaakt worden naar het samen-
men van tientallen: we zijn dan in de bundelingsfase beland. De context van de opga-
ven wordt in deze fase al meer naar de achtergrond verschoven. Als uit de tekening
blijkt, dat een kind de bundeling niet goed door heeft, wordt steeds teruggegrepen
naar de voorafgaande fase. Dat wil zeggen, er wordt dan een context, een verhaal,
gebruikt om het ontstaan van de tekening nog eens bewust te maken.

Plaatje:



of:

$$6 \times 43$$

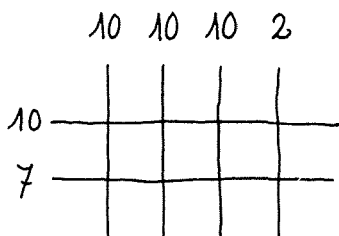


Tijd

Ook in de bundelingsfase werken de kinderen zes à acht weken om een zekere vast-
heid van handelen te krijgen. Twee à drie keer per week wordt er kort geoefend. De
overgangslessen naar deze fase duren ongeveer een uur.

Leerstof

Hetzelfde type sommen als in de contextfase wordt gegeven, bijvoorbeeld 6×43 of
 43×6 . Het is in deze fase wel mogelijk om geleidelijk naar wat grotere vermenigvul-
digen te gaan, bijvoorbeeld 17×32 , waarbij dan op de bundeling naar twee kan-
ten gelet moet worden.



Oefenen

Het oefenen gebeurt op dezelfde wijze als in de contextfase.

Denk in deze fase speciaal aan het vermenigvuldigen met nullen. Dit ter voorbereiding op de volgende fase.

Didactische aantekeningen

Hier gelden dezelfde opmerkingen als bij de contextfase. Laat vooral af en toe voorspellen hoeveel lijnen het plaatje gaat bevatten, alvorens de vermenigvuldiging uit te voeren. Bijvoorbeeld 6×23 : twee lijnen van tien en nog één van drie van boven naar beneden (verticaal); één lijn van zes horizontaal of van links naar rechts. Of andersom! Denk ook nu aan het verwoorden van de handelingen. Het nabespreken draagt bij tot een verdere schematisering. Wijs nadrukkelijk op de verwissel-eigenschap ($6 \times 23 = 23 \times 6$), die ook uit het schema te lezen valt.

5.4 lijnenfase

Kenmerk

De term geeft wellicht reden tot verwarring, omdat in de andere fasen ook lijnen getekend werden. Het kenmerk van deze fase is echter, dat nu één simpel lijntje staat voor een grote hoeveelheid lijnen uit de voorgaande fasen. De context die nodig was bij de opbouw van het model is nu verdwenen, al worden er wel steeds contextproblemen in de sfeer van het toepassen gebruikt. Aan kruispunten wordt nu overigens niet meer gedacht: het lijntje is zomaar een lijntje geworden, vandaar ook de term lijnenfase. Toch is het wel noodzakelijk om, indien er in deze fase fouten geconstateerd worden, de weg terug naar de voorgaande fase af te leggen. Het rekenen met nullen speelt een belangrijke rol bij de overgang naar de lijnenfase.

Grotere vermenigvuldigingen zijn nu mogelijk:

23×43

	40	3	
20	800	60	800 60 120 9 989
3	120	9	

of:

	40	3	
20	*	*	800 60
3			

De kruisjes geven tussenprodukten aan, waarvan de uitkomsten naast het schema genoteerd worden.

Tijd en leerstof

Deze fase wordt bereikt eind klas drie en wordt enkele maanden gehandhaafd. Voor een enkele leerling is dit tevens de eindfase van de vermenigvuldigingsalgoritme. In korte lesjes worden nu één à twee keer per week allerlei typen sommetjes gemaakt. Ook contextproblemen in allerlei toepassingssituaties blijven een belangrijke rol spelen.

Oefenen

Het oefenen van de basisvaardigheden blijft evenzeer belangrijk. Gezien het feit dat veel minder indirect geoefend wordt in specifieke algoritmelessen, omdat er minder opgaven gemaakt worden, moet nu veel aandacht besteed worden aan het oefenen van de basisvaardigheden in korte lesjes van tien minuten.

Didactische aantekeningen

Het laten zien van verschillende aanpakken speelt een belangrijke rol bij de niveauverhoging. De diversiteit in oplossingsniveaus is nu ook groter. Verwoorden, voorstellen en nabespreken van handige(r) werkwijzen blijft ook in deze fase van belang.

5.5 eindfase

Kenmerk

Niet alle kinderen leren dezelfde eindalgoritme. Drie vormen zijn in het algemeen haalbaar:

- 1) bijvoorbeeld 68×208 :

$$\begin{array}{r}
 200 \ 8 \\
 \begin{array}{cc}
 60 & \begin{array}{|c|c|} \hline * & * \\ \hline \end{array} \\
 8 & \begin{array}{|c|c|} \hline * & * \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 12000 \\
 480 \\
 1600 \\
 \hline
 64
 \end{array}$$

- 2)
- $$\begin{array}{r}
 208 \\
 \underline{68} \times \\
 64 \\
 1600 \\
 480 \\
 \underline{12000}
 \end{array}$$

Systematisch alle tussenprodukten noteren zonder plaatje.

$$\begin{array}{r}
 3) \quad \begin{array}{r} 208 \\ 68 \\ \hline 1664 \end{array} \times \\
 \begin{array}{r} 12480 \\ \hline 14144 \end{array}
 \end{array}$$

Tijd

Bij de overstap naar de eindfase, zoals bij punt 3 is het wenselijk om sommetjes van verschillend type in korte lessen aan de orde te stellen. Medio klas vier kan deze stap gezet worden door gedurende twee à drie weken vrijwel dagelijks circa twintig minuten hieraan te werken en daarna nog één keer per week te oefenen.

Leerstof

Bij de overstap naar de vorm onder punt 3 eerst een paar sommen van het type: 7×238 ; 6×64 . Later: 40×68 ; 60×368 . Dan: 47×68 ; 47×683 . Tenslotte dient er ook aandacht besteed te worden aan verschillende sommen met nullen, zoals: 47×860 ; 43×807 ; 403×87 ; 403×807 .

Oefenen

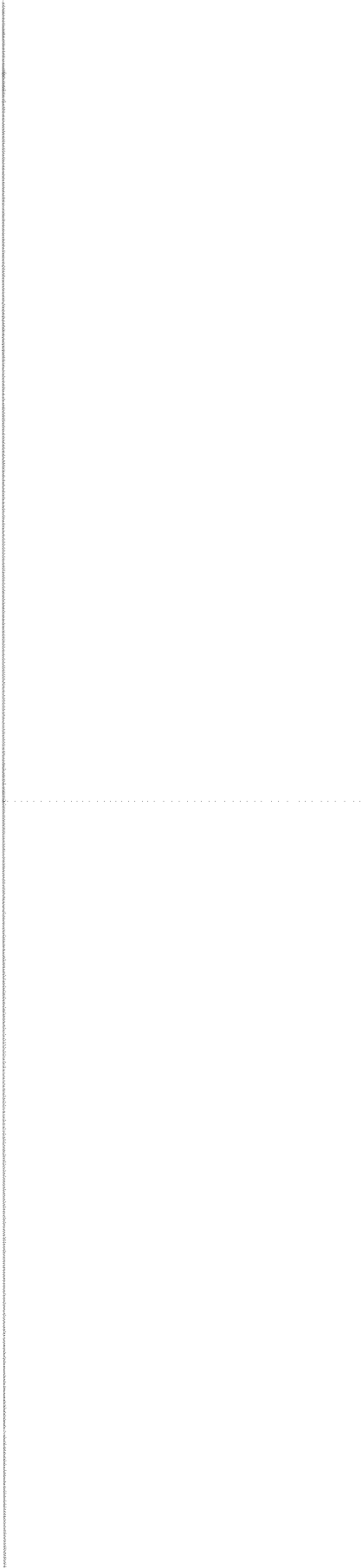
Juist doordat het aantal algoritmelessen terug gaat lopen, omdat het niet wenselijk is kinderen vaak dingen te laten doen die ze al kunnen, moet er ook in de bovenbouw van het basisschoolprogramma geoefend blijven worden op de basisvaardigheden.

Didactische aantekeningen

Bij alle niveauverhogingen is steeds gewezen op bewuste oefeningen op het gebied van het zich realiseren vooraf. Vanuit de vastheid van handeling kan, zonder de handeling echt uit te voeren, verwoord worden wat er dient te gebeuren. De uitvoering van de handeling laat dan zien of er goed 'voorgedacht' is, en geeft meteen inzicht waar en waarom de voorspelling niet goed was. Gebruik bij de overgang naar de eindfase aanvankelijk veelvuldig het plaatje uit de lijnenfase ter ondersteuning. Zeker als er zonder plaatje fouten begaan worden, maar ook om gevallen met nullen te verduidelijken. Tenslotte gaan we over tot de gangbare algoritme, dat dan ook op de gangbare wijze ingeoefend wordt. Toch is er een belangrijk verschil met de traditionele aanpak: in het algoritmeprogramma ligt een brede begripsslaag onder deze 'trucs' en is de weg terug naar concretere vorige fasen open.

Deel B

Delen



III DE STAARTDELING VOLGENS HERHAALD AFTREKKEN

We zullen dit deel B beginnen met een korte, fasegewijze beschrijving van het leren delen volgens de cijfermethode. Later zullen we de fasen uitdiepen en voorzien van vele microdidactische opmerkingen. Het hele proces van het leren (cijferend) delen beslaat ongeveer drie jaar. Met de begripsmatige inbedding – wat is delen? – maken we een start in klas één à twee. De nadruk op de algoritme ligt echter in het vierde leerjaar. In de eerste maanden van dat leerjaar wordt met de algoritmisering gestart, aan het einde van dat leerjaar is de eindfase bereikt.

1 OVERZICHT

1.1 fase 1

De start van de algoritme vindt in het begin van het vierde leerjaar plaats door verdeelproblemen aan de orde te stellen. Bij de wijze van oplossen, aanvankelijk geheel vrij, wordt meer en meer het principe van het herhaald aftrekken gebruikt om de delingsalgoritme op te zetten. De verdelingen worden daadwerkelijk uitgevoerd met materiaal als centen, fiches, blokjes, knopen, stenen, wat men maar wil. Na enige problemen zo te hebben opgelost, wordt de deling genoteerd. Deze notatie is zeer eenvoudig herkenbaar als herhaald aftrekken, bijvoorbeeld:

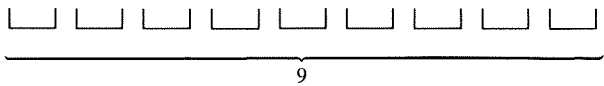
Hier staat de deling $122 : 9 = 13$, over 5:

$$\begin{array}{r} 122 \\ 9 \\ \hline 113 \\ 9 \\ \hline 104 \\ 9 \\ \hline 95 \\ 9 \\ \hline 86 \\ 9 \\ \hline 77 \\ 9 \\ \hline 68 \\ \text{enz.} \end{array}$$

Uiterst belangrijk in deze manier van doen is de betekenis van ‘– 9’.

Deze betekent immers dat er negen kinderen met hun handje open stonden en dat de verdeler in elke hand één voorwerp heeft gelegd. Na dit uitdeelrondje was hij er

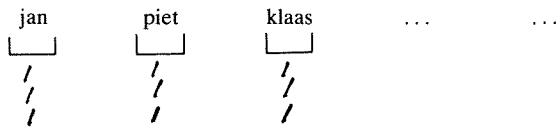
negen kwijt uit de pot met te verdelen voorwerpen. Die kinderen worden met bakjes of handjes gesymboliseerd:



In elk bakje wordt bij elke ronde aangetekend dat er een voorwerp is uitgedeeld:



of:

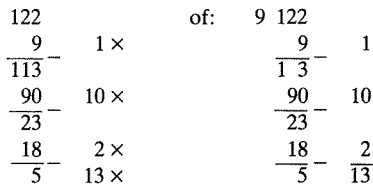


Deze notatiewijze wordt in de eerste fase naast de lange staart genoteerd (zie de straks volgende beschrijvingen).

1.2 fase 2

De ontwikkeling van de algoritme gaat voort door een verdere schematisering. In de eerste plaats raakt de context meer op de achtergrond, bijvoorbeeld door in de lessen ook contextloze oefenopgaven in te lassen. Maar nog belangrijker zijn de vaak spontaan optredende verkortingen. Een leerling merkt bijvoorbeeld op: ‘Je kunt net zo goed in één keer tien knikkers weggeven aan alle kinderen.’

Dit geeft aanleiding tot een niveauverhoging: we proberen – nog chaotisch en zoals het uitkomt – grotere happen uit te delen. De bijbehorende notatie ziet er dan bijvoorbeeld zó uit:



Ook in deze fase kan men de bakjes waarin uitgedeeld wordt nog naast de ‘staart’ noteren (zie eveneens de volgende beschrijving).

1.3 fase 3

In de traditionele didactiek nam het ‘afschatten’ een grote plaats in. Hier komt dat –

zij het doorzichtiger – terug. We streven er nu naar dat de happen geordend in volgorde van grootte – bijvoorbeeld honderdtallen, tientallen en eenheden – genomen worden. Een voorbeeld van de notatie van een deling in deze fase is:

$$\begin{array}{r|l}
 14 \overline{)1935} & \\
 \underline{1400} & 100 \\
 535 & \\
 \underline{140} & 10 \\
 395 & \\
 \underline{140} & 10 \\
 255 & \\
 \underline{140} & 10 \\
 115 & \\
 \underline{14} & 1 \\
 101 & \\
 \underline{28} & 2 \\
 73 & \\
 \underline{28} & 2 \\
 45 & \\
 \underline{28} & 2 \\
 17 & \\
 \underline{14} & 1 \\
 3 & \underline{138}
 \end{array}
 \quad \text{of:} \quad
 \begin{array}{r|l}
 14 \overline{)1935} & \\
 \underline{1400} & 100 \\
 535 & \\
 \underline{380} & 20 \\
 255 & \\
 \underline{140} & 10 \\
 115 & \\
 \underline{70} & 5 \\
 45 & \\
 \underline{28} & 2 \\
 17 & \\
 \underline{14} & 1 \\
 3 & \underline{138}
 \end{array}$$

Hier ligt de nadruk op het verkorten van de staarten. Daarvoor zijn drie dingen nodig, die ook geoefend moeten worden, in ieder geval sterke aandacht moeten hebben, te weten:

- de kwestie van het afschatten, dus:

$$\begin{array}{r|l}
 14 \overline{)1935} & \\
 \underline{1400} & 100
 \end{array}$$

De kinderen zien direct dat het antwoord in de honderden zal zijn. Ze beginnen niet met een hap in tientallen of eenheden;

- de kwestie van het rekenen met nullen, gebaseerd op het kennen van de tafels, omdat:

$$\begin{array}{l}
 4 \times 9 = 36, \text{ is} \\
 40 \times 9 = 360 \\
 4 \times 90 = 360 \\
 40 \times 90 = 3600 \\
 4 \times 900 = 3600 \\
 400 \times 9 = 3600
 \end{array}$$

- de kwestie van het handig en flexibel rekenen. Dit houdt in, dat kinderen gemakkelijk kunnen halveren en verdubbelen van getallen, dus:

$$100 \times 95 = 9500 \rightarrow 50 \times 95 = 4750$$

of eenvoudiger

$$100 \times 27 = 2700 \rightarrow 50 \times 27 = 1350$$

en:

$$\begin{aligned} 10 \times 18 &= 180 \rightarrow 20 \times 18 = 360 \\ 20 \times 18 &= 360 \rightarrow 40 \times 18 = 720 \\ 40 \times 18 &= 720 \rightarrow 80 \times 18 = 1440 \end{aligned}$$

Dit flexibel rekenen maakt het mogelijk kwesties als hoofdrekenen en eigenschapsrekenen te combineren met het leren van de delingsalgoritme. We willen vermijden, dat kinderen 50×4 als volgt uitrekenen:

$$\begin{array}{r} 50 \\ 4 \\ \hline 200 \end{array} \times \quad \text{of:} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 50 \\ 0 \\ \hline 200 \\ 200 \end{array} \times \quad \text{of:} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 50 \\ 0 \\ \hline 20. \\ 200 \end{array} \times$$

50×4 moeten kinderen ‘zo’ weten: 200. Ze kunnen er allerlei zaken achter denken, bijvoorbeeld:

- de helft van 400 (100×4);
- $5 \times 4 = 20$ met een nul;
- 4 kwartjes is 100. Twee maal 4 kwartjes is 200.

Ook een opgave als $4 \times 54 = 4 \times 50 + 4 \times 4 = 216$ moeten de kinderen op den duur, dus in de laatste fase, uit het hoofd kunnen uitrekenen. Dit kan eventueel ook zo ‘uit het hoofd’:

$$\begin{array}{r} 54 \\ 4 \\ \hline 216 \end{array} \times$$

dus cijferend met ‘onthouden’.

Zowel de verdubbelingsmethode als het uit het hoofd berekenen van dergelijke cijfersommen zijn belangrijke steunpunten bij het kunnen verwerven van de eindalgoritme van de staartdeling. De contexten waarin we vooral in fase 1 de delingen hebben ingebed, zijn in deze fase geheel naar de achtergrond gedrongen. Wel is het zo dat het model van het herhaald aftrekken en de context van het verdelen zonnodig en desgewenst weer opgeroepen zouden kunnen worden. Dit is niet alleen in de remediërende zin van betekenis, maar ook voor het onderwijs van alledag. We dienen ons dan wel tot enkelvoudige contextproblemen te bepalen. (Zie ook hfdst. 5).

1.4 fase 4

In deze fase zijn we aangeland bij de traditioneel bekende deling. De weg naar deze eindfase verschilt dus essentieel van de bekende gang van zaken. De schrijfwijze van de staartdeling is wel enigszins anders dan in een aantal traditionele rekenmethoden gebruikelijk is.

Een aantal voorbeelden van de notatiewijze die kinderen zullen hanteren:

$$\begin{array}{r|l}
 8 \overline{)953} & 100 \\
 \underline{800} & \\
 153 & \\
 \underline{153} & \\
 0 & 10 \\
 \underline{0} & \\
 0 & 9 \\
 \underline{0} & \\
 0 & 119
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 14 \overline{)1336} & 90 \\
 \underline{1260} & \\
 76 & \\
 \underline{70} & 5 \\
 6 & 95
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 27 \overline{)12636} & 400 \\
 \underline{10800} & \\
 1836 & \\
 \underline{1620} & 60 \\
 216 & \\
 \underline{216} & \\
 0 & 8 \\
 & 468
 \end{array}$$

Soms zullen kinderen hulptabellen moeten maken, bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{ll}
 1 \rightarrow 27 & 8 \rightarrow 216 \\
 2 \rightarrow 54 & 10 \rightarrow 270 \\
 4 \rightarrow 108 & 5 \rightarrow 135
 \end{array}$$

Van hieruit kunnen de overige basisgetallen uitgerekend worden:

$$\begin{array}{l}
 3 \rightarrow 54 + 27 = 81 \\
 6 \rightarrow 54 + 108 = 162 \\
 \text{of: } 135 + 27 = 189 \\
 7 \rightarrow 162 + 27 = 189 \\
 \text{of: } 216 - 27 = 189 \\
 9 \rightarrow 216 + 27 = 243 \\
 \text{of: } 270 - 27 = 243
 \end{array}$$

Het rekenen met nullen geeft verder alle nodige tussenprodukten voor de deling. We zullen er echter ook naar moeten streven om opgaven als $4 \times 27 = \dots$ uit het hoofd te laten berekenen door ofwel de distributieve eigenschap te gebruiken ' $4 + 20 + 4 \times 7$ ' ofwel cijferend via de algoritme ' 4×7 is 28, 8 opschrijven, $4 \times 2 = 8$ plus 2 is 10, dus $4 \times 27 = 108$ '. In het algemeen verdient de distributieve werkwijze aanvankelijk de voorkeur, omdat niet alle leerlingen dan reeds cijferend kunnen vermenigvuldigen.

1.5 algemene opmerkingen

Als we de fasen aan tijd binden, komen we tot de volgende indicatie.

fase 1: augustus en september van het vierde leerjaar;

fase 2: oktober;

fase 3: vanaf november;

fase 4: vanaf de laatste maanden van het vierde leerjaar, eventueel doorlopend tot in het vijfde.

In de gehele fase-aanduiding die we hierboven hebben gegeven, is een niet-strakke opbouw weergegeven. Dat is bewust gedaan, omdat het mogelijk is de inbreng van kinderen te honoreren, waardoor de niveaus in de klas uit elkaar gaan lopen. In hoeverre we deze toelaten, moeten we als onderwijsgevende zelf beslissen en is mede afhankelijk van het vertrouwen dat we hebben in de specifieke aanpak. Vooral in het begin zullen we behoefte hebben aan een maximale greep op de voortgang die de klas maakt en wensen we dus een goed overzicht over de prestaties van de kinderen. Maar ook in klassikale lessen kunnen we de inbreng van de kinderen aangrijpen om de voortgang te beoordelen. De mogelijkheden om te differentiëren zijn dus volop aan-

wezig en het hangt van de mate waarin wij de algoritme in de vingers hebben af in hoe-verre we de gelegenheden ook gebruiken.

Tijdens de lessen geven we oefensommen. We dienen ons daarin echter te beperken. Een som als: $4567891032 : 6543$ heeft in deze kale vorm gesteld, geen enkele betekenis en is voor het beheersen van de algoritme op zich niet van belang. Bovendien ronden we bij dit soort zaken in de realiteit de getallen vaak af, bijvoorbeeld op miljoenen en rekenen daarmee verder.

2 DE EERSTE LESSEN

2.1 les 1: centen verdelen

Voor de klas staat een grote spaarpot. Het is de spaarpot van oma, die er de centen instopt die ze in haar portemonnaie heeft. Ze spaart die centen voor haar kleinkinderen. Vandaag is oma jarig en haar kleinkinderen zijn op visite. De spaarpot wordt geleegd, want oma wil de centen onder haar kleinkinderen verdelen. Karel mag alle centen tellen.

Eén van de kinderen uit de klas leegt de spaarpot en telt de centen. Het blijken er 275 te zijn.

Anita, één van de oma's kleinkinderen, vraagt zich af hoeveel centen zij zal krijgen. Dan vragen we aan de klas: weten jullie dat misschien? Nee, dat weten ze niet. Sommige kinderen zeggen dat je dan eerst moet weten hoeveel kleinkinderen oma heeft. Andere kinderen begrijpen dat eerst niet, maar als Wouter het uitlegt, is het hen ook duidelijk. 'Als oma twee kleinkinderen heeft, krijgt Anita toch veel meer dan als ze met z'n tien zijn?' Hoeveel kleinkinderen heeft oma? We schrijven hun namen op het bord:

Karel
Anita
Wouter
Bart
Els
Frida
Wilma

Zeven in totaal!

We herhalen de vraag: 'Hoeveel centen zal Anita krijgen?'

De klas krijgt even de gelegenheid naar oplossingen te zoeken. Misschien lukt het een aantal kinderen om zelf het antwoord te vinden. De antwoorden die genoemd worden, schrijven we zonder commentaar op het bord. 'Wie weet een manier om het uit te rekenen?'

Er zullen kinderen zijn die daar ideeën over hebben. We gaan er nadrukkelijk op in: 'Meindert, wat denk jij ervan?' Meindert geeft aan dat honderd centen voor ieder veel te veel is 'want dan zouden er zevenhonderd centen in de spaarpot moeten zitten: $7 \times 100 = 700$.' De weg die Meindert aangeeft, kan door andere kinderen worden opgepakt.

Willy schat dat ieder kleinkind er 23 krijgt, maar de vermenigvuldiging 7×23 geeft zijn ongelijk aan: $7 \times 23 = 161$.

Andere kinderen geven andere strategieën. Zo zegt Bart: 'Laten we de centen gewoon uitdelen.' Dit idee wordt uitgevoerd. We vragen zeven kinderen voor de klas te komen en de kleinkinderen van oma voor te stellen. Monique wordt gevraagd de centen te verdelen, zoals oma dat zou doen. We doen dat vooral niet zelf, omdat we dan – onbewust – handige uitdeelstrategieën zouden kunnen gebruiken, wat het leerproces zou verstoren.

Monique deelt uit: ieder een cent, dan een tweede ronde van ieder een cent. Al gauw krijgt Monique, evenals de klas, in de gaten dat het sneller, effectiever kan. Ze deelt iedere ronde twee centen aan ieder uit, later tien centen. Rommelend en probeerend verdeelt Monique de inhoud van de spaarpot: 'Hé, er blijft nog wat over. Ik kan niet meer verdelen.' We gaan na of ieder kleinkind wel evenveel heeft. Het blijkt eerlijk verdeeld te zijn. Ieder kreeg 39 centen.

Commentaar

De oplossing is gevonden. De oplossingsstrategie heeft de gewenste aandacht gekregen. De start van het leren delen met een staart is gemaakt. Het is van eminent belang dat de kinderen de probleemstelling aan den lijve hebben ondervonden en geparticipeerd hebben in de oplossing. Ze hebben de oplossingen aangedragen, ze hebben de verdeelsituatie nauwlettend gevolgd. Dit kon gebeuren door de specifieke situatie die we hebben gecreëerd, door de inleiding op het probleem en door het gebruik van echte centen. Niets is funester dan dat de les, zoals die hier beschreven is, door ons 'even' wordt verteld, afgeraffeld dus. We kunnen zelfs nog verder gaan en zeggen dat dit verhaal van oma's spaarpot dat in iedere willekeurige klas gedaan zou kunnen worden, vervangen zou kunnen worden door een nog levensechter verhaal, dat de kinderen nog meer bij het geheel betreft – een op de eigen situatie van de klas toegespitste context dus. Essentieel is tevens dat de oplossing door de kinderen wordt aangedragen en niet door onszelf. Het woord 'delen' is nergens gevallen, de situatie spreekt in dit opzicht voor zich.

2.2 les 2: knikkers verdelen

Enkele dagen later zetten we de deelleergang voort door een situatie te scheppen die qua vormgeving veel op de vorige lijkt.

Voor de klas staat een schoenendoos met knikkers. Daar vertellen we het volgende verhaal bij:

'De schoenendoos is van een jongen uit de straat waar ik woon. Hij is al vijftien jaar. Gerrit heet 'ie. Op een dag ruimde hij zijn kamer op en vond de schoenendoos onder z'n bed staan. Hij was vergeten dat 'ie een doos met knikkers had. Het was zeker drie jaar geleden dat hij er voor het laatst mee had geknikkerd. Daarom besloot hij de knikkers weg te geven. Of, nee, misschien zouden Sjoerd of Bart ze wel willen hebben, zijn buurjongens. Buiten speelden zes jongens met knikkers: Sjoerd, Bart, Stefan, Sander, Bauke en Jan. Gerrit besloot zijn knikkers onder de jongens te verdelen. En hier zie je nu de doos met knikkers van Gerrit.'

We vragen: ‘Zitten er veel knikkers in de doos?’ De klas raadt, maar we laten het daarbij. Aan het eind van de les bekijken we hoeveel het er zijn. ‘Hoeveel knikkers zouden de jongens elk krijgen?’ Deze vraag is niet te beantwoorden, zal de klas terecht vinden. We stellen voor om de doos met knikkers maar eens te verdelen. Daarvoor wijzen we zes leerlingen aan die voor de klas komen te staan. Een meisje, spelend voor de moeder van Sjoerd, deelt de knikkers uit. Op het bord staan de namen van de jongens die meedelen:

Sjoerd	Bart	Stefan	Sander	Bauke	Jan
--------	------	--------	--------	-------	-----

Eén leerling krijgt de taak te noteren hoeveel ieder er krijgt, om later te kunnen controleren of het wel eerlijk gegaan is. Carla, die de moeder van Sjoerd voorstelt, begint uit te delen: ze geeft iedere jongen tien knikkers. Op het bord wordt genoteerd:

Sjoerd	Bart	Stefan	Sander	Bauke	Jan
10	10	10	10	10	10

Het feit dat Carla direct tien knikkers aan iedere jongen geeft, heeft te maken met het leereffect van de vorige les. Het zou mogelijk geweest zijn dat Carla de uitdeling begonnen zou zijn met één knikker. Maar de kans dat de klas daarop aanmerkingen zou maken is groot. Als iedere jongen tien knikkers heeft gekregen, vragen we: ‘Hoeveel knikkers heeft Carla nu uitgedeeld?’ Het antwoord is eenvoudig: $6 \times 10 = 60$. We zetten dit voort, ook als er meerdere ronden zijn geweest, bijvoorbeeld:

Sjoerd	Bart	Stefan	Sander	Bauke	Jan
10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10

Carla heeft er al $4 \times 60 = 240$ weggegeven: vier ronden van 60 knikkers. ‘Hoeveel knikkers hebben de jongens nu?’ Elke jongen heeft er nu 40. Met hun zessen dus $6 \times 40 = 240$. De uitdeling wordt voortgezet, waarbij deze notatie op het bord ontstaat:

Sjoerd	Bart	Stefan	Sander	Bauke	Jan
10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10
5	5	5	5	5	5
5	5	5	5	5	5
10	10	10	10	10	10
3	3	3	3	3	3
1	1	1	1	1	1

De beslissing van Carla om in de zesde ronde vijf in plaats van tien knikkers uit te delen, heeft te maken met de schatting die zij maakt hoeveel knikkers er nog in de doos zitten. ‘Ik denk niet dat ik er nog tien aan ieder kan geven.’ Daarom moeten we de doos regelmatig aan de kinderen laten zien en vragen: ‘Kan Carla er nog tien aan ieder geven, denk je?’ Aan het slot van de verdeling volgt weer de vraag: ‘Hoeveel

heeft ieder?’ De jongens tellen en verifiëren deze uitkomst. En: ‘Hoeveel heeft Carla er uitgedeeld?’ Omdat we dit ronde voor ronde hebben bijgehouden, is het antwoorden gemakkelijk: ‘444’. ‘Hoeveel knikkers zaten er in de doos van Gerrit?’

Commentaar

Het moet ons duidelijk zijn, dat we de kinderen de staartdeling leren door ‘herhaald aftrekken’. Elke ronde halen we een portie knikkers uit de doos die we daarna verdeelen. Op dit moment wordt dit nog niet expliciet genoteerd, maar in de hele situatie is dit de kern van de zaak. Onze vragen tenderen hier ook steeds naar. Spontaan worden vanuit de kinderen verkortingen aangebracht. Ook al in deze fase! De wens om immers iedere jongen happen van tien, vijf enz. te geven, houdt een effectieve verkorting van het werk in. We mogen verwachten dat nagenoeg alle leerlingen de idee achter deze verkortingen begrijpen, ook al zullen niet alle kinderen het in dit stadium al vanzelf doen. Zo zien we dat het uitdelen nog weleens problemen oplevert, waardoor natellen en noteren op het bord zeer gewenst is. We zijn nu al een heel eind op weg naar de staartdeling!

2.3 les 3: symbolisch verdelen

Kort na beide voorgaande lessen gaan we voort met de deelleergang. Het zal de laatste maal zijn dat we door concreet verdelen een deelprobleem oplossen. Het is van belang dat alle kinderen die concrete verdeelsituatie ‘aan den lijve’ hebben meegemaakt, voordat we op een schematischer wijze overgaan. Het is niet de verantwoordelijkheid van een methode of van een buitenaf komende ‘autoriteit’ die de werkwijze oplegt. Het is vanzelfsprekend dat we zelf – verantwoordelijk voor het onderwijs – moeten beslissen hoeveel lessen we aan de concrete verdeelsituatie zullen besteden en wanneer we tot een schematischer werkwijze zullen overgaan. Vooral in de remediërende sfeer zullen we meer van deze concrete verdeellessen achter de hand moeten hebben. Dit is gewenst, omdat hiermee de begripsinbedding plaatsvindt en bovendien de notatiewijze wordt begonnen.

‘In de kast van Gerrit stond nog een doos. Toen Gerrit de doos tevoorschijn haalde, moest hij erg lachen. ‘Lucifermerken’, zei hij. Gerrit stond ernaar te kijken en dacht na over wat hij met de doos zou gaan doen. ‘Lucifermerken sparen is veel te kinderachtig voor een jongen van 15’, dacht hij. ‘Misschien ook wel iets voor mijn buurjongens.’ Gerrit loopt met de doos onder zijn arm naar buiten. Enkele jongens vinden het prachtig. Zij willen de verzameling graag hebben: Sjoerd, Bauke, Bart en Jan. De anderen sparen al sleutelhangers en stickers. Gerrit zet de doos op de stoep en zegt: ‘Verdeel ze maar, Sjoerd.’’

We laten een doos zien. ‘Wat zit hierin?’ ‘Lucifermerken’, roept de klas. ‘Bijna goed. Er zitten evenveel fiches (knopen) in als er lucifersmerken in de doos van Gerrit zaten. Het zijn er 324.’ De kernvraag is weer: ‘Hoeveel krijgt iedere jongen?’ We creëren opnieuw een situatie waarin de fiches concreet onder vier jongens worden verdeeld. De kinderen in de klas noteren de gang van zaken, zoals dat ook op het bord gebeurt:

324 : 4

	Sjoerd	Bauke	Bart	Jan
324				
<u>40</u> ←	10	10	10	10
284				
<u>200</u> ←	50	50	50	50
84				
<u>40</u> ←	10	10	10	10
44				
<u>44</u> ←	11	11	11	11
0				

Hierbij horen vragen als:

- hoeveel deel je in deze ronde uit? Kan dat wel?
- hoeveel geef je in deze ronde weg?
- hoeveel heb je er nog over in de doos?

Commentaar

Belangrijk is het noteren van de ‘staart’ en het gebruik van tafels om tussenprodukten te berekenen ($4 \times 50 = 200$). Bij het laatste speelt het werken met nullen een grote rol. De situatie is nu zo dat we dit hier aanzetten en in de loop van het leerproces steeds verder uitbouwen. Weliswaar is het kennen van de tafels gewenst, maar de kinderen krijgen in de loop van dit leerjaar voldoende gelegenheid de vaardigheid in dit opzicht te vergroten.

2.4 les 4: een verhaaltje

In de volgende les verlaten we de concrete verdeelsituaties die we tot op heden in de lessen hebben ingebouwd. Het verhaal is als volgt:

‘Op de verjaardag van Lieneke komen twaalf kinderen. Na afloop van het feestje krijgen de kinderen elk een zakje snoep mee naar huis. Moeder heeft een grote zak met snoep gekocht, die Lieneke over twaalf zakjes mag verdelen. In de zak die moeder heeft gekocht zitten 425 snoepjes.’

En de vraag: Hoeveel snoepjes krijgt ieder kind?

We nemen de voor de kinderen grote stap om de verdeling alleen schriftelijk te laten plaatsvinden: de resultaten worden op het bord genoteerd, de kinderen schrijven op hun blaadje mee. Zó bijvoorbeeld:

425												
<u>12</u> ←	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
413												
<u>12</u> ←	1	1	1	1	1	1						
401												
<u>12</u> ←	1	1	1	1	1	1						
389												
<u>120</u> ←	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
269												
enz.												

De bakjes stellen kinderen voor. Eronder wordt genoteerd hoeveel snoepjes elk kind krijgt. Omdat de klas heeft ervaren dat voor het eerste kind hetzelfde geldt als voor alle andere, wordt er met stippeltjes gewerkt die dan betekenen ‘voor hen net zo’. Hoeveel er elke ronde wordt uitgedeeld, laten we over aan de klas. Het kan ons een indicatie geven omtrent het niveau van diverse kinderen. Sommige zullen immers per ronde 10, 20 of wat dan ook willen uitdelen. Andere kinderen komen maar tot 1 snoepje per ronde. We kunnen die niveauverhoging uitlokken, als ze niet spontaan komt, door vragen te stellen als: ‘Kan het ook nog op een snellere manier?’ We bereiken ermee dat de kinderen gaan zoeken naar verkortingen in het verdeelproces. We letten overigens in deze fase vooral ook op het verwoorden van wat er gebeurt: de kinderen moeten zich immers goed realiseren waarom het precies gaat. Ook voor het vervolg is dit van belang.

2.5 terugblik op fase 1

Met deze introductielessen is een week of drie, vier gemoeid. We hebben de algoritme vanuit een verdeelsituatie aangezet en de problemen steeds verder geschematiseerd. De notatiewijze lijkt al vrij veel op de definitieve schrijfwijze, de verdere tijd die voor dit algoritme nodig is, zal vooral besteed moeten worden aan verkortingen in de ‘staart’. Zoals al eerder is opgemerkt, kan het belangrijk zijn meerdere lessen in de geest van het hierboven beschreven onderwijs te geven. Ze kunnen van belang zijn om vrijwel alle leerlingen, ook de moeilijk-lerende, mee te krijgen en ze hebben als zodanig een functie in remediërende zin. Verhalen met sommen als $522 : 6$, $168 : 13$ en de boven beschreven notatiewijze behoren tot de mogelijkheden – let wel ook verhalen die door de leerlingen zelf verzonnen zijn! Na deze eerste lessen verwachten we van de klas het volgende niveau in het leerproces van het cijferend delen:

- 1 een deelsituatie wordt herkend. De kinderen kunnen het deelprobleem door concreet verdelen oplossen;
- 2 de kinderen begrijpen het notatiesysteem, waarin verkortingen kunnen zijn opgenomen, bijvoorbeeld:

252	of	252				
$\frac{4}{248}-$		$\frac{4}{248}-$	1	1	1	1
$\frac{4}{244}-$		$\frac{40}{208}-$	10	10	10	10
$\frac{4}{240}-$		$\frac{40}{168}-$	10	10	10	10
enz.		enz.				

met bakjes of een tabel, waarin aangegeven wordt wat ieder die meedeelt ontvangen heeft;

- 3 de kinderen begrijpen dat een verdeling ook op papier kan plaatsvinden waarbij het notatiesysteem onontbeerlijk is.

In deze zin zou er een toetsles gepland kunnen worden. Als belangrijkste toets-element gebruiken we observaties en analyses van hetgeen de kinderen in de mee-

werksituatie opschrijven. Op dit moment mogen we echter niet verwachten dat ieder kind individueel een deelsom op papier kan maken.

3 VERKORTINGEN

3.1 Stand van zaken

In de vorige paragraaf zijn de volgende delingen genomen om de algoritme van het cijferend delen te ontwikkelen:

- les 1: 275 : 7,
- les 2: 444 : 6,
- les 3: 324 : 4,
- les 4: 425 : 12,

plus enkele ‘reservelessen’ van hetzelfde soort en dezelfde moeilijkheidsgraad. We kozen dit type sommen mede omdat verkortingen eenvoudig in te zien waren. We verklaren ons nader aan de hand van de deling 347 : 6. Het eenvoudigste is elke ronde één aan ieder te geven. De bijbehorende notatie wordt dan:

$$\begin{array}{r} 347 \\ \underline{6} \\ 341 \\ \underline{6} \\ 335 \\ \underline{6} \\ 329 \\ \underline{6} \\ 323 \\ \underline{6} \\ 317 \\ \underline{6} \\ 311 \\ \underline{6} \\ 305 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \leftarrow 1 \quad 1 \quad \\ \leftarrow 1 \quad \\ \leftarrow 1 \quad \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow 1 \end{array}$$

De leerlingen ervaren dit, evenals wijzelf trouwens, als een enorm omslachtige werkwijze. Vandaar dat over het algemeen vanuit de kinderen zelf voorstellen komen om de werkwijze te vereenvoudigen. Wij gaven reeds aan dat we die vereenvoudigingen op kunnen roepen door de vragen: ‘Moet dat nou zo? Kan dat niet handiger? Korter?’ Uit de klas komen voorstellen: geef er twee per ronde, drie per ronde. Of, en dit kan men als een doorbraak ervaren: geef er tien per ronde. Waarom is dit nu zo belangrijk? Wel, de kinderen kunnen dit ook waarmaken, omdat ze de tafels kunnen gebruiken. En een uiterst slim gebruik van de tafels is $10 \times \dots$, zó slim zelfs dat dit tot die ‘ontdekkingen’ binnen de deelleergang behoort, die binnen het bereik van nagenoeg alle leerlingen zal liggen – al kunnen we uiteraard niet verwachten dat iedereen dit de tweede of derde les al zal bereiken. Wat krijgen we bijvoorbeeld?

347 : 6

347						
<u>18</u>	3	.	.	.	.	.
329	3					
<u>18</u>	3				enz.	
311						
enz.						

Vergelijken we deze oplossing met die van de vorige keer, dan is voor de leerlingen vrij gemakkelijk in te zien dat deze werkwijze effectiever is: je bent nu in één ronde waar je de vorige keer drie ronden voor nodig had. Nog effectiever is het uitdelen van tien per ronde aan ieder:

347						
<u>60</u>	10	.	.	.	.	.
287						
<u>60</u>	10					
227						
enz.						

Effectiever, omdat nu de som in een overzichtelijk aantal stappen is gekraakt. Het kan nu tenminste op het bord. Vanwege de herkenbaarheid, vanwege de mogelijkheid de kennis van de tafels te gebruiken, kozen we dus sommen met hanteerbare delers. Hoewel dit strikt genomen voor het verdelen in een concrete situatie niet nodig is, mikten we dus van het begin af aan op gemakkelijk te schematiseren situaties.

3.2 naar één verdelingsbakje

We starten dus nu een periode in het leerproces dat te karakteriseren is als het zoeken naar verkortingen van de staart van de deling. Deze periode sluit aan op de introductieperiode en duurt enkele maanden. Er wordt regelmatig op die verkortingen gemikt, maar er wordt ook flink geoefend. Het oefenen heeft twee aspecten, namelijk het inoefenen van de eenmaal bereikte niveauverhogingen binnen de algoritme en de ondersteunende oefeningen van een aantal basisvaardigheden. Het eerste type oefeningen wordt binnen de algoritmelessen meegenomen. De basisvaardigheden worden ook nog apart geoefend. Daarnaast is het van belang regelmatig met opdrachten te werken die op toepassingen van het geleerde neerkomen. Het gaat in de volgende les om het sommetje $432 : 6$. We laten de context vanaf dit moment een beduidend minder grote rol spelen. Enerzijds wordt die context vastgehouden, zij het op de achtergrond, als er problemen inzake het begripsmatige zijn. In die gevallen wordt de concrete verdeelsituatie uit de herinnering terug geroepen. 'Hoe ging dat ook al weer?' 'Hoe kwamen we daaraan?' Dit soort vragen kunnen beantwoord worden met verwijzing naar een verdeelcontext. Het is te verwachten dat deze procedure in deze periode van het delen een aantal keren noodzakelijk of wenselijk zal zijn, maar wel van afnemende betekenis is. De context speelt echter een essentiële rol in toepassingen, in thema's, in opdrachten en vooral ook in speciaal geconstrueerde context- of redactieopgaven, waarvan we een aantal voorbeelden zullen geven.

Met het sommetje $432 : 6$ proberen we niet alleen een begin te maken met het zoeken naar kortere staarten, maar ook de procedure te vereenvoudigen. Immers, het schema dat bij deze som hoort ziet er zó uit:

$$\begin{array}{r|l} 6 \overline{)432} & \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \\ \underline{60} & \leftarrow 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \\ 372 & \\ \underline{60} & \leftarrow 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \\ 312 & \text{enz.} \end{array}$$

Maar we kunnen naar een versimpelde procedure toe door slechts één voorbeeld-bak ('superbak') te tekenen die voor elk van de personen die meedeelt geldt:

$$\begin{array}{r|l} 6 \overline{)432} & \boxed{} \\ \underline{60} & \leftarrow 10 \\ 372 & \\ \underline{60} & \leftarrow 10 \\ 312 & \text{enz.} \end{array}$$

Dit is een uiterst belangrijke leerstap in de totale leergang. We bereidden deze reeds voor door stippeltjes te zetten onder de andere bakken, die betekenden 'voor hen net zo'. We moeten deze stap niet onderschatten. Kon namelijk tot nu toe het tussenproduct nog 'gezien' worden, nu is dat niet meer mogelijk. De kinderen moeten onthouden hoeveel personen meedeelden, voor hoeveel personen de superbak staat. In dit geval voor zes: $6 \times 10 = 60$. Het is goed als we aan dit probleem regelmatig aandacht besteden, bijvoorbeeld via de vraag: 'Hoeveel bakjes had ik eigenlijk moeten tekenen?', opdat de concrete achtergrond van de verdeling niet te snel verdwijnt.

Hoeveel we per ronde uitdelen, hoeveel we per ronde in de bakjes stoppen, wordt nog steeds aan de kinderen overgelaten. Als we hierin te veel sturen en te snel naar een eindfase toewerken, dreigt het gevaar dat een te groot aantal kinderen de zaak niet meer kan volgen. Juist in dit opzicht zal ons verrassen hoe snel de verschillen in niveaus van oplossen zullen toenemen. Sommige kinderen zien al gauw een oplossing als:

$$\begin{array}{r|l} 6 \overline{)432} & \boxed{} \\ \underline{300} & \leftarrow 50 \\ 132 & \\ \underline{120} & \leftarrow 20 \\ 12 & \\ \underline{12} & \leftarrow 2 \\ 0 & \end{array}$$

Andere, zich wat minder zeker voelende kinderen, zullen eerder geneigd zijn met rondjes van één te beginnen:

$$\begin{array}{r|l} 6 \overline{)432} & \boxed{} \\ \underline{6} & \leftarrow 1 \\ 426 & \\ \underline{6} & \leftarrow 1 \\ 420 & \text{enz.} \end{array}$$

Deze kinderen hebben uiteraard veel meer tijd nodig om de som te maken. Beduidend meer tijd zelfs. Een tussenniveau is, met een aantal mogelijke varianten:

$$\begin{array}{r|l}
 6 \overline{)432} & \boxed{} \\
 \underline{60} & \leftarrow 10 \\
 372 & \\
 \underline{60} & \leftarrow 10 \\
 312 & \\
 \underline{60} & \leftarrow 10 \\
 252 & \\
 \underline{120} & \leftarrow 20 \\
 132 & \text{enz.}
 \end{array}$$

Het is duidelijk dat de natuurlijke differentiatie hier als vanzelf naar voren komt. Het grote probleem wordt dan natuurlijk hoe we als onderwijzer hierop inhaken. We kunnen de verschillen proberen af te remmen door de hapen per ronde voor te schrijven. Misschien doen we dit wel eens, maar ook dan blijft het nog een probleem. Op de volgende wijze kunnen we hier echter adequaat op inspelen. De kinderen maken individueel een oefenopgave na het klassikale gedeelte van de les. De oefenopgave moet aansluiten bij het niveau van het klassikale gedeelte, tenminste in deze fase van het leerproces. De oefenopgave in deze les luidt: $312 : 4 =$. We nodigen drie kinderen uit de oefenopgave niet op een blaadje te maken, maar op het bord. Als we kinderen kiezen die op verschillende niveaus werken, komen er op het bord drie verschillende oplossingen te staan, die onderling vergeleken kunnen worden in de nabespreking. In tegenstelling tot wat in het traditionele rekenonderwijs min of meer gewoonte is, wordt hier naast de vraag of de som goed uitgerekend is, de vraag naar de manier van oplossen gevraagd. We krijgen bijvoorbeeld de volgende drie oplossingen op het bord staan:

$$\begin{array}{r|l}
 4 \overline{)321} & \\
 \underline{4} & \leftarrow 1 \\
 308 & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 268 & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 228 & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 188 & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 148 & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 108 & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 68 & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 28 & \\
 \underline{4} & \leftarrow 1 \\
 24 & \\
 \underline{4} & \leftarrow 1 \\
 20 & \\
 \underline{20} & \leftarrow \frac{5}{78} \\
 0 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 4 \overline{)312} & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 272 & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 232 & \\
 \underline{32} & \leftarrow 8 \\
 200 & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 160 & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 120 & \\
 \underline{120} & \leftarrow \frac{30}{78} \\
 0 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 4 \overline{)312} & \\
 \underline{40} & \leftarrow 10 \\
 272 & \\
 \underline{80} & \leftarrow 20 \\
 192 & \\
 \underline{160} & \leftarrow 40 \\
 32 & \\
 \underline{32} & \leftarrow \frac{8}{78} \\
 0 &
 \end{array}$$

Het is duidelijk, dat de verschillen in de drie onderscheiden oplossingen groot zijn. In de nabespreking gaan we erop in door met de klas na te gaan of elk van de drie opgaven goed is. Zijn er ook fouten gemaakt en zo ja, waarop berusten die fouten. Er zijn grofweg twee fouten te onderscheiden, namelijk fouten in de aanpak (het kind heeft de algoritme niet begrepen, maakt fouten in zijn niveau van aanpak) of fouten in de basisvaardigheden. We gaan hier bij de peilingen nog dieper op in. We stellen vragen als:

- welke oplossing is handiger, en waarom vind je dat?
- hoe komt Joop aan 50 keer (rond gedeeld)?
- hoe rekende hij dat gemakkelijk uit?

Met deze werkwijze beogen we dus een aanvankelijk spontaan leerproces te ondersteunen en te leiden, waarbij kinderen in principe uit eigen beweging verkortingen aanbrengen. Ze gaan langzamerhand over op slimmere, kortere oplossingen.

Nogmaals waarschuwen we ervoor niet te snel dit resultaat te willen opdringen. Laat de leerlingen hierin groeien. We menen dat dit groeiproces twee à drie maanden in beslag kan nemen. We zijn dan in de tweede helft van het leerjaar aangekomen en verplicht om na te gaan of iedere leerling voldoende vooruit gegaan is of dat er wat meer druk achter niveauverhogingen moet worden gezet.

De hier beschreven didactische principes hebben ook consequenties voor de les die we beschreven ($312 : 4 = \dots$).

We keren terug naar de werkwijze waarin de oplossingsniveaus op het bord staan en besproken worden. Essentieel bij de bespreking van de oplossingen op het bord is dat elke oplossing serieus wordt genomen en gewaardeerd. Het is immers zo dat iedere leerling probeert *op zijn/haar niveau* een oplossing te geven die goed is. Kritiek op de oplossing zou kunnen inhouden dat we de oplossing op een te laag niveau vinden staan, maar gaat er tevens van uit dat het kind beter, meer, zou kunnen. En dit laatste is in deze aanpak twijfelachtig. Willen we het 'groeiproces' stimuleren, dan wordt van ons verwacht dat we momenten in dit groeiproces weten te waarderen.

Aan het slot van de les geven we een aantal oefenopgaven op twee niveaus. De reden hiervan is na de bovenstaande uiteenzetting duidelijk: we sluiten hiermee aan op de natuurlijke differentiatie welke is opgetreden.

Bijvoorbeeld:

- een oefenopgave voor iedereen: $776 : 9$; $329 : 7$;
- een oefenopgave voor leerlingen die klaar zijn met de eerste twee sommen: $928 : 8$; $1222 : 13$.

Gedurende de tijd dat de kinderen aan deze opgaven werken, hebben wij de gelegenheid uitvoerige observaties te doen. Deze zijn belangrijk om te weten of er bij de hele klas of bij individuele kinderen sprake is van een zekere vooruitgang. Waar die vooruitgang ook na meerdere lessen uitblijft, dienen we in te grijpen en op grond van de observaties remediërend werk of herhalingen in te lassen. Observaties in deze zin hebben dus minder een beoordelend karakter en zijn meer een aanleiding om lacunes op te sporen en te verhelpen. Deze observaties zijn binnen dit leerproces dan ook opgenomen in het onderwijs zelf. Het nakijken van het leerlingenwerk kan klassikaal gebeuren of en-passant door de onderwijzer of achteraf, maar mag in ieder geval het observeren van de leerlingen niet belemmeren.

3.3 terugblik en vooruitblik

Als we deze eerste les in de fase 'het zoeken naar korte staarten' nog eens de revue laten passeren, blijkt dat we de les in drie delen hebben opgebouwd:

- 1 een klassikale introductie (waarin één deelsom gemaakt wordt).
- 2 een individuele opdracht met een nabespreking (één som, waarvan drie oplossingen op het bord);
- 3 een oefengedeelte (vier sommen in twee niveaus met de nadruk op een ruime mogelijkheid tot observeren).

De les, zoals hier beschreven, vergt 45 à 60 minuten. We hebben de les zo uitvoerig beschreven, omdat hij model staat voor een groot aantal andere lessen die in deze fase worden gegeven.

Een groot deel van de overige lessen kan echter korter zijn, met name door de nummers 1 en 2 van de gegeven indeling samen te voegen. Zo'n les duurt dan 30 minuten. Een aantal lessen beschrijven we uitvoerig. Wat vindt er plaats nadat we gestart zijn met de fase 'verkorten van de staart'? Het is uiteraard ondoenlijk alle lessen te beschrijven. De algemene wijze waarop onderwezen wordt, is reeds uitvoerig aan de orde geweest. Er zijn echter nog vele moeilijke klippen te omzeilen. Graag geven we daar aanwijzingen en suggesties voor. In onze stofkeuze moet een zekere opklimming in moeilijkheidsgraad zijn aangaande de volgende twee aspecten:

- het verkorten van de staart;
- in moeilijkheid opklimmende typen sommen.

Over de eerste kwestie hebben we reeds uitvoerig geschreven.

Ten aanzien van de in moeilijkheid opklimmende typen merken we op, dat de eindfase zal moeten zijn, dat kinderen in een aanvaardbaar aantal stappen een som als $47936 : 28 \dots$ kunnen oplossen. Deze fase moet eind klas vier, begin klas vijf bereikt worden. We beschrijven enkele lessen, die qua stofkeuze tot deze einddoelstelling moeten leiden.

Geval a: bijvoorbeeld $1000 : 15 = 67$ over 4.

Kenmerkend is dat we een deler kiezen die niet meer met de geautomatiseerde tafels tot tien gehanteerd kan worden.

Geval b: bijvoorbeeld $2204 : 19 = 166$.

Kenmerkend is dat het quotiënt groter is dan honderd.

Geval c: bijvoorbeeld $1744 : 16 = 109$ of $2996 : 13 = 230$ over 6.

Kenmerkend is dat in het quotiënt geen tientallen of eenheden voorkomen. Anders gezegd: de nullen spelen hier een complicerende rol.

Geval d: bijvoorbeeld $1534 : 59 = 26$.

Kenmerkend is dat de deler een groot getal is, wat problemen geeft bij het berekenen van tussenprodukten. Een apart eenvoudig geval zou een deling kunnen zijn als: $4913 : 60 \dots$

Geval e: we geven hier een type deling aan dat we als einddoelstelling ervaren. Een kind dat deze deling in betrekkelijk korte tijd kan maken, heeft zich de algoritme eigen gemaakt en kan – in principe – elke gewenste deling maken, hoewel men voor sommige leerlingen ook het eindniveau wat lager kan stellen, namelijk bij geval d. Voorbeelden: $16514 : 46 = 359$, of $20867 : 321 = 65$ over 2.

We hebben hiermee echter wel een aantal typen onderscheiden, die in het onderwijs door elkaar lopen.

In de paragraaf 'verkorting van de staarten' beschrijven we de lessen met delingen tot en met type b. De laatste twee behandelen we in de volgende paragraaf.

3.4 bijvoorbeeld: $1009 : 15$

We nemen als kernopgave, waaraan we alle opmerkingen ophangen, de deling:

$$1009 : 15 =$$

Deze deling is vooral een moeilijke opgave vanwege de grote deler. Met deze deler kunnen de tussenprodukten niet simpelweg uitgerekend worden door gebruik te maken van de tafels van vermenigvuldiging.

Het eerste probleem dat zich opdringt is de kwestie van het vermenigvuldigen met tien, met honderd, met duizend. Met andere woorden: het moet de kinderen duidelijk zijn of nog eens duidelijk worden gemaakt, dat naar analogie van $10 \times 6 = 60$ en $10 \times 7 = 7 \times 10 = 70$, ook geldt:

$$10 \times 15 = 15 \times 10 = 150 \text{ (15 met een nul erachter),}$$

$$10 \times 23 = 23 \times 10 = 230,$$

$$10 \times 97 = 97 \times 10 = 970.$$

En, in aansluiting daarop, geldt:

$$100 \times 6 = 6 \times 100 = 600 \text{ (6 met twee nullen),}$$

$$100 \times 15 = 15 \times 100 = 1500,$$

$$100 \times 23 = 23 \times 100 = 2300,$$

$$100 \times 97 = 97 \times 100 = 9700.$$

Deze kwestie van het rekenen met nullen wordt gerekend tot de voorwaarde van het beheersen van de basisvaardigheden. Ze zijn als zodanig onderwerp van oefening in oefenlessen. In het aanleren van de tafels in klas twee en drie wordt deze kwestie reeds bewust meegenomen en later uitgebreid. Nu echter, in de setting van deze algoritmeles, hebben we alle mogelijkheden om er nog eens aandacht aan te schenken. Het blijkt namelijk dat er altijd kinderen zijn die hier fouten maken. Hoe besteden we er aandacht aan? Eén mogelijkheid is de analogie-rij op het bord te schrijven en de kinderen de antwoorden te laten invullen:

$$10 \times 6 = \dots$$

$$10 \times 7 = \dots$$

$$10 \times 8 = \dots$$

$$10 \times 9 = \dots$$

$$10 \times 10 = \dots$$

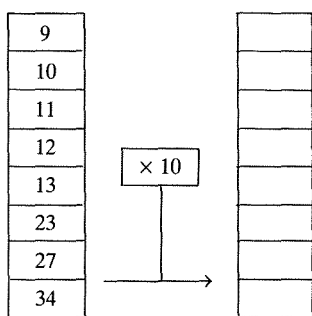
$$10 \times 11 = \dots$$

$$10 \times 12 = \dots$$

Wat zal 10×14 zijn? En 10×23 ?

Merk vooral op, dat de uitkomst door een omkering duidelijk gemaakt kan worden met de abacus: $10 \times 23 = 23 \times 10 = \dots$

Deze gang van zaken combineren we met het opzeggen van zo'n analogie- of 'familie'-rij.



De deling $1009 : 15$ kan met deze kennis, die de leerlingen eigenlijk al vanaf begin klas drie hebben, als volgt gemaakt worden:

$$\begin{array}{r}
 15 \overline{)1009} \\
 \underline{150} \quad 10 \\
 859 \\
 \underline{150} \quad 10 \\
 709 \\
 \underline{150} \quad 10 \\
 559 \\
 \underline{150} \quad 10 \\
 409 \\
 \underline{150} \quad 10 \\
 259 \\
 \underline{150} \quad 10 \\
 109 \\
 \underline{15} \quad 1 \\
 94 \\
 \underline{15} \quad 1 \\
 79 \quad \text{enz.}
 \end{array}$$

Maar het zal duidelijk zijn dat we hoger mikken. Dit brengt ons op het tweede probleem dat in dit soort lessen in deze fase aan de orde komt. Hoe rekenen we tussenprodukten van de deling uit? Wel, in dit opzicht maken we gebruik van flexibel rekenen, waarin het eigenschapsrekenen en vooral het hoofdrekenen een voorname rol speelt. Het zal aan het eind van het verhaal duidelijk zijn, dat de verzorging van dit onderdeel veel tijd vergt. Maar het is het waard, omdat het voor een goede progressie in de delingsalgoritme van bijzondere betekenis is, maar ook omdat het op zich grote waarde heeft voor de kinderen. Deze uitspraak adstrueren we nader.

Als we de opgave $1009 : 15$ door de klas laten maken, kan het gebeuren dat er kinderen zijn die de oplossing als volgt beginnen:

$$\begin{array}{r}
 15 \overline{)1009} \\
 \underline{750} \quad 50 \\
 259 \\
 \underline{150} \quad 10 \\
 \text{enz.}
 \end{array}
 \quad \text{of:} \quad
 \begin{array}{r}
 15 \overline{)1009} \\
 \underline{450} \quad 30 \\
 559 \\
 \underline{450} \quad 30 \\
 \text{enz.}
 \end{array}$$

Hoe komen deze kinderen aan respectievelijk $50 \times 15 = 750$ en $30 \times 15 = 450$? Er zijn

vele mogelijkheden, waarvan we er twee uitpikken. Ten eerste: $50 \times 15 = 750$ kan worden gevonden omdat de kinderen $100 \times 15 = 1500$ (15 met twee nullen) weten. 50×15 is de helft van 100×15 , dus het antwoord is te vinden door de helft van 1500 te nemen. De helft van 1500, of 1500 in twee gelijke delen splitsen, levert voor sommige kinderen nog wel enige problemen op. We kunnen die als volgt oppakken:

- van 1500 de helft nemen is niet zo makkelijk. Wie weet een getal in de buurt van 1500 waarvan je wel gemakkelijk de helft weet?

De kinderen antwoorden bijvoorbeeld:

- a) 1400: de helft is 700. En de helft van 100? Want $1500 = 1400 + 100$;
de helft van 100 is 50. Dus $700 + 50 = 750$;
- b) 1600: analoog aan boven;
- c) $1000 \rightarrow 500$
 $500 \rightarrow 250$

Sommige kinderen zien dit zo, vooral als ze de abacus gebruikt hebben.

Let erop, dat de notatie in tabelvorm op het bord zeer overzichtelijk en bevattelijk is, zoals:

1600	$\rightarrow$	800
100	$\rightarrow$	50
1500	$\rightarrow$	750

Ten tweede: $30 \times 15 = 450$ wordt soms door kinderen als volgt uitgerekend:

$30 \times 15 = 3 \times 15$ met een nul (familiesom), en:
 $3 \times 15 = 3 \times 10 + 3 \times 5 = 30 + 15 = 45$.

Ook deze werkwijze is uitermate belangrijk, omdat ze later tot verkortingen en snelle berekeningen kan voeren.

Uit het bovenstaande wordt duidelijk dat het hoofdrekenen en het eigenschapsrekenen op vele manieren een rol kan spelen bij het leren van de delingsalgoritme. We gaan nu terug naar de les waarin de deling $1009 : 15$ centraal gesteld is. We laten de kinderen individueel deze opgave maken en observeren ze om na te gaan of er zijn die verkortingen in de boven aangeduide zin maken. Eén of meer kinderen die er blijk van geven te werken met $50 \times$, $20 \times$, $30 \times$ of iets dergelijks, laten we de som, zoals zij die hebben opgelost, op het bord schrijven. Stel, dat de volgende oplossing op het bord komt te staan:

15	$\overline{)1009}$	
	<u>150</u>	10
	859	
	<u>300</u>	20
	559	
	<u>450</u>	30
	109	
	enz.	

We kunnen aannemen dat dit een oplossingsniveau is, dat voor de meeste kinderen nogal hoog gegrepen is. We gaan er als volgt op in: Hoe ben je aan 20 keer gekomen?

De leerling zal kunnen uitleggen dat hij uitgegaan is van 10 keer en toen verdubbeld heeft. We schrijven op het bord:

$$\begin{array}{l} 10 \rightarrow 150 \\ 20 \rightarrow 300 \end{array}$$

En we wijzen aan:

$$2 \times \begin{array}{l} 10 \rightarrow 150 \\ 20 \rightarrow 300 \end{array} \quad \text{dus ook } 2 \times$$

Hier staat dus het begin van een soort verhoudingstabel.

We gaan voort: Maar dan weet je ook wel hoeveel 40×15 is? Bord:

$$\begin{array}{l} 10 \rightarrow 150 \\ 20 \rightarrow 300 \\ 40 \rightarrow 600 \text{ (weer verdubbelen)} \end{array}$$

Wie weet nog een gemakkelijke vermenigvuldiging te bedenken? De klas komt met:

$$\begin{array}{l} 10 \rightarrow 150 \\ 20 \rightarrow 300 \\ 40 \rightarrow 600 \\ 80 \rightarrow 1200 \text{ (weer verdubbelen)} \end{array}$$

Of met:

$$\begin{array}{l} 10 \rightarrow 150 \\ 20 \rightarrow 300 \\ 40 \rightarrow 600 \\ 30 \rightarrow 450 \text{ (?) } \end{array}$$

De kinderen leggen uit:

$$\begin{array}{l} 10 \rightarrow 150 \\ 20 \rightarrow 300 \end{array}$$

Nu optellen:

$$30 \rightarrow 450$$

We vervolgen op het bord:

$$\begin{array}{l} 10 \rightarrow 150 \\ 20 \rightarrow 300 \\ 40 \rightarrow 600 \\ 30 \rightarrow 450 \\ 100 \rightarrow ? \end{array}$$

Gemakkelijk: 1500. En dan:

$$\begin{array}{l} 10 \rightarrow 150 \\ 20 \rightarrow 300 \\ 40 \rightarrow 600 \\ 30 \rightarrow 450 \\ 100 \rightarrow 1500 \\ 50 \rightarrow ? \end{array}$$

Nu rijzen problemen, totdat een van de kinderen zegt: ' $50 = 10 + 40$, dus optellen: $150 + 600 = 750$.'

Valt het kinderen op dat het de helft van 1500 is?

Dit inzicht kunnen we uitlokken door te vragen: ' $150 + 600 = 750$. Maar kun je hier nog op een andere manier aan komen? Wie ziet het?'

De kinderen komen met ' $300 + 450 = 750$ ' en ook met 'de helft van 1500 is 750.' Zo niet, dan wijzen we zelf nadrukkelijk op het laatste.

Zo bouwen we de verhoudingstabel, behorend bij de tafel van 15, op. Sommige kinderen zien in dat je dat even goed als volgt kunt doen:

1 → 15
2 → 30
4 → 60
enz.

Wil je nu 40×15 hebben, dan plak je er een nul aan.

Deze verhoudingstabel, zó op het bord genoteerd, geeft de kinderen alle steun om de tussenprodukten uit te rekenen. De gang van zaken staat model voor de didactische aanpak, die veel gebruikt zal moeten worden in het vervolg van het leerproces van de delingsalgoritme en aan te duiden als 'de methode van het verdubbelen en halveren' of 'de verhoudingstabel'. Vooruitlopend op latere fasen in het leerproces, kunnen we nu reeds zeggen dat de verhoudingstabel met het distributieve hoofdrekenen de rode draden zijn waaraan de kinderen zich, ook in veel moeilijker gevallen, steeds kunnen vastklampen, zoals bijvoorbeeld een deling met de deler 89. Daarnaast blijft, zoals gezegd, de methode van $7 \times 15 = 70 + 35 = 105$ van belang. Ook aan deze wijzen van distributief hoofdrekenen besteden we regelmatig aandacht, evenals de verdubbelsmethode.

Aan het slot van de les geven we weer een aantal oefenopgaven, liefst van twee of drie niveau-typen. Bijvoorbeeld:

<i>a-niveau:</i>	<i>b-niveau:</i>	<i>c-niveau:</i>
$516 : 8 =$	$1085 : 15 =$	$1955 : 17 =$
$1003 : 17 = *$	$624 : 16 =$	$1824 : 19 =$

Indien observaties daartoe aanleiding geven, gebruiken we de opgave, gemerkt met * om de oplossingsmanier nog eens voor de hele groep door te nemen, inclusief het opzetten van de verhoudingstabel en het distributieve hoofdrekenen. We beginnen opzettelijk met een oefenopgave die gemakkelijk is ($516 : 8$), om ook de langzaam lerende kinderen mee te krijgen en het nodige vertrouwen te geven.

Voor een les zoals hierboven beschreven, hebben we ongeveer 50 minuten nodig. Vooral de introductie van de verhoudingstabel zal nogal wat tijd vergen:

- 1 De kinderen proberen $1009 : 15$ te maken (5 à 10 minuten).
- 2 We bespreken de oplossingen, waarbij de verhoudingstabel een rol speelt (25 à 30 minuten).
- 3 De kinderen maken de oefenopgave in drie niveaus (10 à 15 minuten).
- 4 Eventuele nabespreking (10 à 15 minuten).

De bovenstaande les kan model staan voor drie à vier soortgelijke lessen. Geleidelijk

gaan we over op moeilijker gevallen. Maar we moeten hetgeen eerder aan de orde is geweest, steeds weer meenemen om iedereen de gelegenheid te geven zich de delingsalgoritme eigen te maken.

3.5 bijvoorbeeld: 2204 : 19

In de volgende lesbeschrijving stellen we de deling 2204 : 19 centraal. De werkwijze is analoog aan de zojuist beschreven aanpak. De kinderen zijn inmiddels vertrouwd geraakt met de verhoudingstabel. De meeste kinderen kunnen deze tabel ook opzetten, zij het dat er soms nog fouten in voorkomen. Als we op het bord schrijven 2204 : 19 en de kinderen vragen dit uit te rekenen, kunnen we verwachten dat er meerdere oplossingen voorkomen. Op het bord laten we twee kinderen de opgave maken:

19	2204		19	2204
	1900	100		190
	304			2014
	190	10		380
	114			1634
	95	5		760
	19			874
	19	1		760
	0	116		114
				76
				38
				38
				0
				116

- Welke oplossing vind je het handigst? Waarom?
- Had je al direkt kunnen zien dat het antwoord meer dan 100 zou zijn?

Kinderen zullen aangeven, dat $100 \times 19 = 1900$ (19 met twee nullen). Of anders gezegd en terug grijpend op de vroegere fasen, dat je er aan alle 19 kinderen best 100 kunt geven in één uitdeelrondje. Voor de 'lange' oplossingen maken we gebruik van de verdubbelsmethode en de verhoudingstabel:

10	→	190
20	→	380
40	→	760

verkregen door verdubbelen. Deze tabel is afgeleid van de basistabel:

1	→	19
2	→	38
4	→	76

Ook wijzen we hier op het distributieve hoofdrekenen: $4 \times 19 = 40 + 36 = 76$ om de uitkomsten vlug te bepalen en op de aanpak $4 \times (20 - 1)$.

We laten vervolgens weer enige oefenopgaven in niveaus maken. Bijvoorbeeld:

<i>a-niveau:</i>	<i>b-niveau:</i>
1258 : 16 =	1963 : 17 =
1677 : 14 =	3866 : 18 =

Daarvan bespreken we een of meerdere oplossingen. Zo is de laatste opgave geschikt om snel naar een volgend niveau door te stoten:

$$\begin{array}{r|l}
 18 \overline{) 3866} & 100 \\
 \underline{1800} & \\
 2066 & \\
 \underline{1800} & 100 \\
 266 & \\
 \underline{180} & 10 \\
 86 & \\
 \underline{72} & 4 \\
 14 & 214
 \end{array}$$

De eerste opmerking zal zijn: 'Het antwoord is meer dan 100, want $100 \times 18 = 1800$.' Vervolgens zal een aantal kinderen al bij voorbaat inzien dat het zelfs 200 keer kan: $200 \times 18 = 3600$, want $2 \times 18 = 36$. Tenslotte is het voor de kinderen betrekkelijk eenvoudig in deze fase de deling af te maken op de kortste manier. Het is zo langzamerhand gewent en noodzakelijk dat we eisen gaan stellen aan de korthed van de oplossingen. We moeten immers trachten te voorkomen dat een kind te lang in één fase blijft hangen. Want, gebeurt dit, dan blijkt het leerproces sterk afgeremd te worden. Soms hebben we bij bepaalde kinderen de indruk dat ze veel meer kunnen, maar om allerlei reden toch op een te laag niveau blijven steken. We moeten ze dwingen op hoger niveau te gaan werken. Dit kan door ze opdracht te geven de staart van de deling op de kortste manier op te schrijven en vooral ook door ze al veel eerder te leren om te schatten welke grote happen eraf gehaald kunnen worden. Een andere versnelling en verkorting die we beogen, is om de kinderen 4×18 uit het hoofd te laten uitrekenen. Hierbij speelt het zogenaamde werkgeheugen, dus het onthouden tijdens het werken, zoals bijvoorbeeld bij het cijferend optellen, een belangrijke rol. Om 4×18 uit het hoofd uit te rekenen, staan de kinderen immers in principe twee procedures ter beschikking, namelijk:

- 18 verdubbelen, onthouden 36, 36 verdubbelen (hierbij speelt het werkgeheugen geen voorname rol);
- $4 \times 18 = 4 \times 10 + 4 \times 8$.
Tafelprodukt: $4 \times 10 = 40$ opslaan in het werkgeheugen.
Tafelprodukt: $4 \times 8 = 32$ opslaan in het werkgeheugen.
Uit het werkgeheugen '40' halen en vermeerderen met '32' en vervolgens: $40 + 32 = 72$ (bij deze methode speelt het werkgeheugen dus wel een belangrijke rol).

3.6 een toetsles aan het einde van fase 2

We vragen ons af, hoe het op dit moment staat met de voortgang in het leren delen. We zijn in september met de delingsalgoritme gestart. In een maand hebben we een vier- à vijftal introductielessen gegeven en waren we toe aan de start van de tweede fase, getiteld 'het werken aan verkortingen van de staart'. Deze fase duurt tot ongeveer november.

De kinderen hebben in deze periode in ieder geval geleerd hoe je een deling aanpakt,

zodat zij in principe alle denkbare delingen kunnen maken. Waar het nog aan ontbreekt is de optimale effectiviteit, i.c. korte staarten en de daarbij horende vaardigheid in het berekenen van tussenprodukten. In deze verkorte procedures kunnen we grote verschillen tussen de leerlingen constateren. Het gevaar, dat we wellicht het overzicht zullen gaan missen als er sprake is van een te grote spreiding van het niveau waarop de leerlingen werken, proberen we op te lossen door veelvuldig te observeren en de inbreng van leerlingen te gebruiken bij de voortgang van het cijferen. Af en toe hebben we behoefte om de kinderen individueel werk te laten leveren, dat ons inzicht moet verschaffen over de wijze waarop de kinderen werken en in het type fouten dat zij maken. Daartoe verrichten we met een zekere regelmaat peilingen. De resultaten van deze peilingen worden zeer zorgvuldig geanalyseerd. Vervolgens trekken we uit de analyses conclusies, die dan van belang zijn voor het vervolg: we lassen corrigerend werk in, gaan op de ingeslagen weg voort, besluiten wat meer te oefenen, enzovoort. Deze analyses en conclusies kunnen zowel op de klas als geheel, alsook op individuele leerlingen slaan.

We maakten een peiling met vier delingsopgaven en besloten er maximaal 30 minuten voor uit te trekken. De opgaven zijn in twee niveaus ingedeeld. Het A-niveau is voor iedereen, het B-niveau is het vervolg voor de leerlingen die met het A-blad klaar zijn. Ook in de vorm lijkt deze aanpak op die welke gewoonlijk in de klas plaatsvindt. De moeilijkheidsgraad is als volgt:

- 862 : 7 is een deling op betrekkelijk eenvoudig niveau. Iedereen moet deze opgave kunnen maken.
- 6394 : 12 is een deling op het niveau dat we beogen bereikt te hebben, en waarover we uitsluitel willen hebben.
- 965 : 14 is van dezelfde orde als de voorgaande.
- 5894 : 23 is een deling die door een deel van de klas gemaakt moet kunnen worden.

Wellicht ten overvloede merken we op, dat we vier opgaven voldoende achten om inzicht te krijgen in de stand van zaken. We mikten immers nu nog niet op de snelheid. Tijdens de peiling observeren we de kinderen en helpen de kinderen die daarom vragen. We nemen enkele observaties in onze beschrijving op.

De les duurde ongeveer 25 minuten. Na 17 minuten waren alle leerlingen klaar met het A-gedeelte. Na 25 minuten hadden slechts zeven van de 21 leerlingen het B-gedeelte nog niet af. We vonden dit een opvallend en positief te waarderen resultaat. Weliswaar benadrukten we steeds, dat het niet om tempo gaat, maar het toont desalniettemin aan dat er geen kinderen zijn die met de opgaven totaal geen raad wisten. Er zijn kennelijk geen uitvallers, al zijn er verschillen. Deze conclusie wordt ondersteund door een globale indruk van het aantal fouten dat gemaakt wordt.

In het A-gedeelte maakt de hele klas slechts zes fouten, waarvan er twee duidelijk slordigheidsfouten zijn. In het B-gedeelte worden echter wel wat meer fouten gemaakt.

Een nadere analyse van het werk levert ons gegevens op over de aard van de fouten en over het niveau van werken. Ons interesseert vooral:

- a) of er 'principiële' fouten in het begrip van de delingsalgoritme worden gemaakt;
- b) of er fouten worden gemaakt in het gebruik van de basisvaardigheden.

Fouten die de basisvaardigheden betreffen, komen bijvoorbeeld in het werk van Annemieke voor. Zij heeft problemen met eenvoudige vermenigvuldigingen. De vermenigvuldiging 6×14 rekent ze uit door zes keer 14 op te tellen. Een te laag niveau! Andere kinderen maken fouten als:

$$7 \times 12 = 49$$

$$6 \times 14 = 74$$

$$5 \times 14 = 80$$

$$2 \times 23 = 466$$

In het werk van *Esther* zien we dat de 'nullenkwestie' nog veel problemen oplevert:

$$\begin{array}{r}
 23 \overline{) 5894} \\
 \underline{466} \\
 5498 \\
 \underline{466} \\
 5032 \\
 \underline{4080} \\
 4052 \\
 \underline{1080} \\
 3072 \\
 \underline{2060} \\
 1012
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 20 \ 0 \\
 20 \ 0 \\
 50 \\
 50 \\
 1 \ 00
 \end{array}$$

Er komen merkwaardige, ogenschijnlijk onbelangrijke vergissingen voor, die mogelijk terug te voeren zijn tot concentratie-leemtes, zoals in *Wims* werk: ' $10 \times 12 = 84$ '. *Diana* schrijft eerst ' $30 \times 14 = 420$ ' op, maar twee regels verder schrijft ze: ' $3 \times 14 = 36$ '. De conclusie is gerechtvaardigd om dit 'onbelangrijke' fouten, of beter vergissingen te noemen. Ze zijn in ieder geval niet 'princiepelijk' en niet zo frequent voorkomend dat we daaruit tot corrigerende maatregelen zouden moeten besluiten.

Belangwekkender is het tweede aspect van de analyse, namelijk het niveau waarop de kinderen delen. We nemen daartoe als voorbeeld het werk van *Sonja* (B-blad). Dit meisje was als één van de eersten klaar.

$$\begin{array}{r}
 14 \overline{) 965} \\
 \underline{700} \\
 265 \\
 \underline{140} \\
 125 \\
 \underline{112} \\
 13
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 100 \rightarrow 1400 \\
 50 \rightarrow 700 \\
 10 \rightarrow 140 \\
 5 \rightarrow 70 \\
 1 \rightarrow 14
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 23 \overline{) 5894} \\
 \underline{4600} \\
 1294 \\
 \underline{1080} \\
 214 \\
 \underline{108} \\
 106 \\
 \underline{69} \\
 37 \\
 \underline{23} \\
 14
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 100 \rightarrow 2300 \\
 200 \\
 50 \\
 5 \\
 3 \\
 1
 \end{array}$$

Het valt op, dat Sonja veel gebruik maakt van de verhoudingstabel. Ze heeft op het B-blad de tabel die bij de tafel van 14 behoort opgeschreven, maar die van de tafel van 23 opgeschreven en later uitgegomd. Typerend is echter, dat ze de verhoudingstabel niet functioneel gebruikt. Ze kiest geen geschikte tussenprodukten uit om de deling op te lossen.

Immers, met deze hulptabel bij de hand zou je de deling als volgt kunnen maken:

$$\begin{array}{r|l}
 14 \overline{) 965} & \\
 \underline{840} & 60 \rightarrow \text{doet Sonja in twee stappen} \\
 125 & \\
 \underline{112} & 8 \\
 13 & 68
 \end{array}$$

Maar Sonja gebruikt de halveringsmethode:

$$\begin{array}{l}
 100 \rightarrow 1400 \\
 50 \rightarrow 700
 \end{array}$$

Ze beheerst die methode echter niet voldoende, hetgeen blijkt uit de tweede deling op haar blad:

$$\begin{array}{l}
 100 \rightarrow 2300 \\
 50 \rightarrow 1150
 \end{array}$$

Dit halveren is voor Sonja kennelijk te moeilijk, hetgeen onderstreept wordt door de aantekening onder aan het blad:

$$\begin{array}{r} 23 \\ 23 \\ \hline 72 \end{array}$$

Dit is verkregen door herhaald optellen en niet met behulp van de verhoudingstabel of door distributieve hoofdrekening. De conclusie uit deze analyse moet zijn, dat het voor Sonja (en voor sommige andere kinderen) belangrijk is de verhoudingstabel en het hoofdrekenen nog eens nadrukkelijk aan de orde te stellen.

Een zeer opvallende wijze van oplossen heeft *Wilco*. Het lijkt een hoog niveau van werken, maar bij nadere doordenking blijkt dat niet het geval. Het gaat om oplossingen zoals deze:

$$\begin{array}{r|l} 7 & \boxed{862} \quad \square \\ & 86, \quad 123 \\ \hline & 1 \quad 128 \end{array}$$

Het 'verkeerde' in deze oplossing zit in de manier waarop Wilco het tussenprodukt uitrekt. Inderdaad, hij heeft de kortst denkbare staart gemaakt. Maar geen leerling kan ineens 7×123 uitrekenen, althans niet op het niveau van onze vierdeklassers. Hoe heeft Wilco dat gedaan? Hoewel we er niet zeker van zijn, menen we dat Wilco hier door proberen het antwoord heeft geraden. Proberen in de zin van een aantal vermenigvuldigingen maken, waarbij je probeert steeds dichterbij het deeltal te komen. Op deze wijze bijvoorbeeld: het deeltal is 862.

De afschatstrategie zou bijvoorbeeld zo kunnen beginnen:

$$7 \times 180$$

$$\begin{array}{c} 700 \quad 80 \\ 7 \quad \left| \quad \right| \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 700 \\ 560 \\ \hline 1260 \end{array} \end{array}$$

Dit blijkt teveel te zijn.

Nu opnieuw proberen, maar minder dan 7×180 :

$$\begin{array}{r}
 100 \ 20 \\
 7 \overline{) \quad \quad \quad} \rightarrow \begin{array}{r} 700 \\ 140 \\ \hline 840 \end{array}
 \end{array}$$

Dit blijkt iets te weinig zijn, enzovoort.

De methode die hier gehanteerd wordt is op zich natuurlijk niet verkeerd. Maar ze is niet effectief en leidt niet tot een algoritme voor het delen.

We kunnen aan Wilco's werk ook zien dat zijn werkwijze nu al tot problemen leidt:

$$\begin{array}{r}
 14 \overline{) 1965} \quad 0 \\
 \underline{700} \quad 50 \\
 265 \\
 \underline{259} \quad 217 \\
 6
 \end{array}$$

Wilco schrijft 217 op, maar dat is een schrijffout. Hij bedoelt 17, want hij heeft als antwoord 67 rest 6. Maar 17×14 is geen 259: de afschatstrategie heeft hier gefaald.

Hoe lossen de kinderen de sommen nu in het algemeen op? We tonen een aantal oplossingen en geven commentaar:

$$\begin{array}{r}
 12 \overline{) 6394} \\
 \underline{1200} \quad 100 \\
 5194 \\
 \underline{1200} \quad 100 \\
 3994 \\
 \underline{1200} \quad 100 \\
 2794 \\
 \underline{1200} \quad 100 \\
 1594 \\
 \underline{1200} \quad 100 \\
 394 \\
 \underline{120} \quad 10 \\
 274 \\
 \underline{120} \quad 10 \\
 154 \\
 \underline{120} \quad 10 \\
 34 \\
 \underline{24} \quad 2 \\
 10
 \end{array}$$

We hebben hier te maken met een zekere oplossingsstrategie, (te) zeker, (te) langzaam en nog met weinig gevoeligheid voor getallen.

Het volgende voorbeeld bevat die gevoeligheid al wel enigszins:

$$\begin{array}{r}
 12 \overline{) 6394} \quad \square \\
 \underline{2400} \quad 200 \\
 3994 \quad 200 \\
 \underline{2400} \quad 100 \\
 1594 \\
 \underline{1200} \quad 30 \\
 394 \\
 \underline{360} \quad 2 \\
 34 \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 532 \text{ R } 10 \\
 \underline{24} \\
 10
 \end{array}$$

Er wordt gebruik gemaakt van de verdubbelingsmethode. Nog niet extreem, maar het begin is er. De leerling heeft er geen uitgeschreven verhoudingstabel voor nodig. Het kan ook heel anders, wat uit het volgende voorbeeld blijkt.

$$\begin{array}{r}
 12 \overline{) 6394} \quad 500 \\
 \underline{6000} \\
 394 \quad 25 \\
 \underline{300} \\
 94 \\
 \underline{80} \quad 10 \\
 14
 \end{array}$$

Deze leerling maakt gebruik van de halveringsstrategie:

$$\begin{aligned}
 1000 \times 12 &= 12000 \rightarrow 500 \times 12 = 6000, \text{ dus:} \\
 50 \times 12 &= 600 \rightarrow 25 \times 12 = 300.
 \end{aligned}$$

Een vermenging van halverings- en verdubbelingsstrategieën laat het volgende voorbeeld zien:

$$\begin{array}{r}
 12 \overline{) 6394} \quad \begin{array}{l} 500 \\ 40 \end{array} \\
 \underline{6000} \\
 394 \\
 \underline{380} \\
 14 \\
 \underline{12} \\
 2
 \end{array}$$

Maar met een fout: $40 \times 12 = 360$. Dit komt wellicht omdat je de stap $20 \times 12 = 240$ op het moment dat je 40×12 wilt weten, nog niet hebt opgeschreven.

De conclusie uit het bovenstaande is, dat we in korte lesjes het 'handig rekenen' regelmatig aan de orde moeten stellen, met name het verdubbelen, halveren, rekenen met nullen en het distributieve hoofdrekenen ($4 \times 23 = 80 + 12 = 92$).

Een voorbeeld van zo'n kort lesje kan de nabespreking van de peiling zijn. We besluiten deze beschrijving met enkele momenten uit die korte nabespreking, waarin het accent op het handig rekenen komt te liggen.

Geerten had de deling als volgt gemaakt:

$$\begin{array}{r}
 23 \overline{) 5894} \\
 \underline{4600} \quad 200 \\
 1294 \\
 \underline{1150} \quad 50
 \end{array}$$

De vraag luidde: 'is die hap van 50 wel goed?'

Kennelijk was deze stap voor Geerten moeilijk. Op de vraag, hoe hij het uitgerekend had, was zijn antwoord nogal verrassend – zeker gezien de voorafgaande lessen waarin verdubbelen de nadruk had gekregen: 'Wel, $50 \times 3 + 50 \times 20 = 150 + 1000 = 1150$.'

De oplossing van Geerten is uiteraard acceptabel, heel goed zelfs, maar biedt de gelegenheid om er nu op terug te komen. Als op het bord wordt geschreven:

$$23 \overline{) 5894}$$

zegt een leerling: 'Dat gaat 200 keer.' 'Hoe weet je dit antwoord zo gauw?' De leerling antwoordt: 100 keer is 2300, 200 keer is het dubbele.'

De som op het bord wordt verder ingevuld:

$$\begin{array}{r}
 23 \overline{) 5894} \\
 \underline{4600} \quad 200 \\
 1294
 \end{array}$$

Geerten schrijft 50 keer op. Hij rekende $50 \times 3 + 50 \times 20$. Kan dat ook anders?

Een leerling neemt de uitdaging aan. Hij zegt:

... '100 keer is 2300.

... 50 keer is de helft, dus 1150.'

Vervolgens wordt de som afgemaakt. De les wordt daarop beëindigd. We beoogden

hiermee bij een aantal kinderen een verbetering van het rekenen te bewerkstelligen betreffende het handig rekenen met behulp van halveren en verdubbelen, en het distributieve hoofdrekenen. De vrijheid die we de kinderen laten om die handigheden op te pikken en toe te passen bij het cijferen, betekent dat we ze niet tot die stap dwingen, maar ze volop gelegenheid geven om deze werkwijze te benutten.

4 NAAR DE EINDALGORITME

4.1 vooruitblik

De vorige paragraaf heette ‘verkortingen’. In die beschrijving vormden twee kernpunten de hoofdmoot.

Ten eerste:

- Hoe gaat het met zo’n staartdeling?
- Wat moet ik erachter denken? (Het model van verdelen).
- Hoe schrijf ik de staartdeling op?

Ten tweede:

- Hoe kan ik de staartdeling effectiever oplossen? (Verkorten van de staart).
- Welke rekenmiddelen staan mij daarbij ten dienste? (Het handig rekenen en de basisvaardigheden).

We moeten ons er goed van bewust zijn dat de kinderen in principe delingen kunnen maken en dat het leerproces nu in een ander stadium is, namelijk dat van consolidatie en aanscherping van het geleerde. Het is de bedoeling dat dit plaatsvindt in de resterende periode van het vierde leerjaar. De kinderen moeten nu leren ‘alle’ voorkomende opgaven handig en snel op te lossen. Een belangrijk moment in de opbouw van de algoritme was toen de verhoudingstabel en/of het distributieve hoofdrekenen gebruikt moesten worden om deelprodukten te berekenen. Het uitrekenen van een tussenprodukt als 7×79 zal immers vaak niet geheel uit het hoofd kunnen gebeuren, maar veelal via een genoteerde verhoudingstabel of met behulp van de distributieve eigenschap, dus als volgt:

$$7 \times 79 = 7 \times 70 + 7 \times 9 = 490 + 63 = 553, \text{ of via } 7 \times (80 - 1) = \dots$$

De hierboven bedoelde aanscherping van de algoritme betreft sommen van het type:

$$\begin{aligned} 1534 : 59 &= 26 \\ 4913 : 60 &= 81 \text{ over } 53 \\ 16514 : 46 &= 359 \end{aligned}$$

en op de grens van wat we nog zinvol achten:

$$20867 : 321 = 65 \text{ over } 2.$$

We zullen een beperkt aantal lessen beschrijven. Wat uitvoerig aan de orde zal komen, is het fenomeen van de toetsles, gevolgd door een analyse van het werk van de leerlingen. Peilingen stellen ons immers in staat – evenals de tijdens de lessen plaatsvindende observaties – om zowel het leerproces van de totale groep als dat van de in-

dividuele leerlingen bij te sturen. In deze periode ligt de nadruk op contextproblemen in het rekenonderwijs, die we tussen de algoritmelessen door strooien.

4.2 voorbeeld van een les

Een voorbeeldles in het tweede semester van het vierde leerjaar. We starten de les met een verhaal.

‘In de haven worden schepen gelost en geladen. Er is zojuist een kustvaarder uit Midden Amerika binnengekomen. Wat er in het ruim zit? Je raadt het al: bananen! Ze zitten in kisten, die met een kraan uit het ruim worden gehesen. Eén voor één, een heel werk. Maar na een dag werken staat de hele lading toch op de kade. Het zijn precies 1534 kisten. Daar komt de eerste vrachtauto al. Er gaan op de vrachtauto 59 kisten. Als de chauffeur van de hefruc probeert er nog één op te krijgen, valt die kist eraf. Het gaat niet. De vrachtauto vertrekt.’

De vraag luidt: ‘Hoeveel vrachtauto’s zullen er voor deze lading nodig zijn?’ De kinderen krijgen volop de gelegenheid te reageren. Ze hebben het erover dat je dat nooit kunt zeggen. Waarom niet? Wel, de ene vrachtvragen is de andere niet, is het juiste antwoord van één van de leerlingen. Misschien stapelen ze de kisten de volgende keer wel beter, zegt een ander. Ook goed. Een derde leerling zegt, dat de vraag dan helemaal niet te beantwoorden is. Kunnen ze het met tien vrachtwagens af? Nee, dat lijkt wat weinig. Waarom? Erik legt dat uit. Het is voor de meesten moeilijk te volgen, maar het komt erop neer dat hij zegt: ‘Laten we aannemen dat er op alle auto’s zestig kisten gaan, dan kun je met tien vrachtauto’s zeshonderd kisten vervoeren. Maar er waren er 1534.’ Laten we nu eens zeggen dat elke vrachtauto precies 59 kisten kan vervoeren, omdat ze van hetzelfde type zijn, of dat één auto voor het vervoer zorgt. Hoeveel vrachtauto’s heb je dan nodig? Of: hoeveel keer moet die ene auto rijden? Na amper twee minuten zijn de eerste kinderen klaar en weer twee minuten later laten we de hele groep stoppen, hoewel nog niet iedereen het antwoord al heeft gevonden. De twee kinderen die voor het bord mogen komen, laten de volgende oplossingen zien:

a) $26 \times 59 = 1534$

	50	9	
20			1000
			180
6			300
			54
			1534

b)

$$\begin{array}{r} 59 \overline{) 1534} \\ \underline{1180} \\ 354 \\ \underline{354} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 20 \\ 6 \\ 26 \end{array}$$

Deze aanpakken waren te verwachten, gezien de opbouw van de les en de vraag 'Kunnen ze het met tien vrachtwagens af?' Deze vraag leidt namelijk tot een benaderingsprocedure in de geest van 'tien vrachtwagens zijn te weinig, honderd te veel, maar dertig is ook te veel', enzovoort.

Hierbij wordt het produkt 'afschattend' berekend:

$$\begin{array}{ll} 10 \times 59 = 590 & \text{en} \quad 100 \times 59 = 5900 \\ 20 \times 59 = 1080 & \text{en} \quad 30 \times 59 = 1770 \end{array}$$

De tweede oplossing is de bekende en zo langzamerhand zeer vertrouwde oplossing die binnen de algoritmeleergang valt. In dit geval leggen we hier de nadruk op. Ze geeft ons de mogelijkheid om met de leerlingen de in dit geval vrij eenvoudige verhoudingstabel op te bouwen:

$$\begin{array}{ll} 1 \rightarrow 59 & 3 \rightarrow 177 \\ 2 \rightarrow 118 & 6 \rightarrow 354 \end{array}$$

En ook om nog eens te wijzen op de distributieve werkwijze $3 \times 59 = 150 + 27$ of $3 \times 60 - 3 \times 1$.

We geven vervolgens een aantal oefenopgaven.

$$\begin{array}{lll} 1633 : 16 = & 5841 : 17 = & 14672 : 37 = \\ 5372 : 65 = & 4639 : 88 = & 9378 : 46 = \end{array}$$

Deze sommen worden door de leerlingen individueel gemaakt, waarbij wij steun bieden waar dat gewenst is en waarbij we vooral observeren, om die observaties weer te gebruiken bij de volgende bespreking van één of meer sommen uit de collectie.

Laten we eens kijken naar de som $5841 : 17$. In de eerste plaats willen we dat leerlingen grofweg het antwoord weten.

Dus vragen we:

- Schat het antwoord eens.
- Zal het antwoord meer dan 100, meer dan 1000 zijn?
- Zal het antwoord meer dan 200, 300, 500 enzovoort zijn?

De groep zal hierop kunnen reageren door te zeggen dat:

- 1 Het antwoord meer dan 100 zal zijn, want $100 \times 17 = 1700$ (100 ronden; je bent er dan in de eerste rond 1700 kwijt; je hebt dan nog genoeg over).
- 2 Het antwoord minder dan 1000 zal zijn, want $1000 \times 17 = 17000$. Zoveel zijn er niet te verdelen.
- 3 Het antwoord tussen de 100 en 1000 zal liggen.

Een enkele leerling zal misschien direkt, ook zonder opgeschreven verhoudingstabel, zeggen dat het meer dan 200 keer gaat, omdat $200 \times 17 = 3400$. En misschien

zijn er kinderen die al kunnen zeggen dat het meer dan 300 keer zal gaan, omdat $300 \times 17 = 5100$.

Dit soort schattingen is uiteraard belangrijk. We maken de deling af, waarbij dit op het bord komt te staan:

$$\begin{array}{r|l} 17 \overline{)5841} & \\ \underline{5100} & 300 \\ 741 & \\ \underline{680} & 40 \\ 61 & \\ \underline{51} & 3 \\ 10 & 343 \end{array}$$

De 'happen' kunnen gevonden worden met behulp van de verdubbelingstabel of door middel van hoofdrekenen ($3 \times 17 = 30 + 21 = \dots$). Beide methoden zijn goed bruikbaar. Deze les staat model voor een groot aantal analoge lessen. We achten het gewenst per week één les met dit type te laten rekenen.

Een voorbeeld:

$$\begin{array}{r|l} 17 \overline{)5841} & \\ \underline{5100} & 300 \\ 741 & \\ \underline{680} & 40 \\ 61 & \\ \underline{51} & 3 \\ 10 & 343 \end{array} \quad \text{accoord!}$$

En:

$$\begin{array}{r|l} 17 \overline{)5841} & \\ \underline{4250} & 250 \\ 1591 & \\ \underline{850} & 50 \\ 741 & \text{enzovoort; niet accoord!} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1000 \rightarrow 17000 \\ 500 \rightarrow 8500 \\ 250 \rightarrow 4250 \end{array}$$

De verhoudingstabel moeten de kinderen kunnen maken, maar in eenvoudige gevallen streven we ernaar de vermenigvuldiging uit het hoofd te laten maken ($4 \times 17 = 40 + 28 = 68$).

Binnen de algoritmelessen bouwen we steeds oefenmomenten in, waarin leerlingen zich een hoog niveau van werken eigen kunnen maken. 'Hoog' in de relatieve zin, tegen de achtergrond van hun eigen voorafgaande prestaties en niet vergeleken met die van anderen. We bieden de leerlingen steeds volop gelegenheid om de geleerde algoritme aan te scherpen en te verbeteren. Zowel in het gedeelte van de les, waarin we van het groepsproces of van het idee van een enkeling gebruik maken om de hele groep verder te krijgen, als in het individuele werk van de kinderen.

4.3 toetslessen

Het onderwijsleerproces heeft in het tweede deel van het vierde leerjaar een ander karakter dan in het eerste deel. De delingsalgoritme komt minder aan bod, het leerproces is minder intensief. Daardoor ontstaat het gevaar dat we het overzicht verliezen over de vorderingen die de groep maakt en die individuele leerlingen maken. Het blijft gewenst om regelmatig zeer nadrukkelijk na te gaan of het niveau van werken op peil blijft of zelfs een zekere progressie vertoont. We beschrijven in het volgende twee toetslessen die in het vierde leerjaar gehouden zijn en besteden uitvoerig aandacht aan de conclusies en consequenties die we uit beide peilingen hebben getrokken.

Let wel: het betreft hier een andere klas dan die in de derde paragraaf beschreven werd!

Een peiling in het vierde leerjaar

We besluiten om tussen sinterklaas en kerstmis in klas vier een peiling te houden. De peiling vindt plaats in een lesje van dertig minuten. We stellen twee werkbladen samen. Het is de bedoeling dat de kinderen met het A-blad beginnen. We verwachten dat de hele klas de vier sommetjes binnen een half uur af zal hebben. De vier sommetjes zijn opklimmend in moeilijkheid. Het B-blad bevat zes sommetjes, waarvan de laatste naar onze smaak de lastigste is. Een in beide bladen voorkomend principe is het opnemen van zowel opgaande als niet-opgaande delingen.

Naam:	tijd:	A
Wat iedereen af moet hebben:		
$573 : 8 =$	$666 : 18 =$	
$1966 : 12 =$	$8749 : 28 =$	
Reken hier uit:		

Naam:	tijd:	B
Voor als je klaar bent:		
$980 : 7 =$	$17005 : 9 =$	
$1635 : 15 =$	$6237 : 54 =$	
$2977 : 14 =$	$34796 : 28 =$	
Reken hier uit:		

Het niveau van de opgaven schatten we als volgt in:

Niveau 1: 573 : 8 (A-blad)

980 : 7 (B-blad)

Niveau 2: 1966 : 12 (A-blad)

666 : 18 (A-blad)

1635 : 15 (B-blad)

2977 : 14 (B-blad)

Niveau 3: 8749 : 26 (A-blad)

17005 : 9 (B-blad)

6237 : 54 (B-blad)

Niveau 4: 34796 : 28 (B-blad)

De niveau-bepaling hangt af van de grootte van de getallen, de 'nullen', de grootte van de uitkomst e.d., en is door ons grofweg in vier hoogte-bepalingen samengesteld. In zekere zin is de indeling discutabel, omdat voor verschillende kinderen verschillende moeilijkheden een ander gewicht hebben. We letten op werkwijze en tempo. Tot en met niveau 2 moeten naar onze schatting de opgaven door iedere leerling gemaakt kunnen worden. Niveau 4 moet voor een redelijk aantal kinderen haalbaar zijn.

We proberen de les in een ontspannen sfeer te laten beginnen. We leggen onze bedoelingen uitvoerig uit. De situatie die ontstaat is niet optimaal. De groep is gewoonlijk nogal rumoerig, snel afgeleid en weinig gemotiveerd. Het blijkt dat twee leerlingen aanvankelijk geen serieuze poging willen doen om het werk goed te maken. We zetten de groep aan het werk en wenden ons tot de twee slecht gemotiveerde kinderen. Eén wordt van het groepje waarin hij zit losgemaakt en apart gezet. Het lukt om ook deze leerlingen redelijk te motiveren.

Tijdens het werk valt het op dat vele leerlingen steun vragen aan de onderwijzer. Het is van groot belang dat we die steun geven, maar ook dat we opschrijven waaruit die hulp bestaat, welke problemen de kinderen hebben.

De resultaten van het werk van de kinderen vallen niet mee. Het A-gedeelte dat slechts vier sommen bevatte, levert voor een deel van de leerlingen grote problemen op. Uit de lijst met het aantal fouten blijkt, dat slechts zes leerlingen het A-gedeelte foutloos maakten, waaronder één leerling die de volle dertig minuten voor deze sommen nodig heeft (Monique W.). Eén leerling heeft niets goed (Monique S.): zij heeft één deling gemaakt en deze bevat fouten. Het is duidelijk dat deze peiling ons verplicht tot het nemen van maatregelen. Welke dat zijn, zal ons de analyse van de gemaakte fouten moeten leren.

Op grond van analyse van het werk signaleren we vier categorieën fouten, waarvan we een aantal nader specificeren kunnen. We laten deze de revue passeren.

Categorie A: vermenigvuldigfouten

– type a₁: fouten in de tafels en het hoofdrekenen, bijvoorbeeld:

$$6 \times 7 = 41, \text{ of}$$

$$6 \times 18 = 126$$

- type a_2 : fouten in het rekenen met nullen bij het vermenigvuldigen, bijvoorbeeld:

$$3 \times 160 = 48, \text{ of} \\ 30 \times 20 = 60$$

- type a_3 : fouten in het berekenen van tussenprodukten, bijvoorbeeld:

$$12 \times 18 = 186,$$

eventueel met het kruispuntenmodel berekend

Categorie B: fouten in het aftrekken

- type b_1 : fouten in de basisvaardigheden, bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{r} 195 \\ 73 \\ \hline 112 \end{array}$$

- type b_2 : fouten in de algoritme van de aftrekking, bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{r} 8749 \\ 7800 \\ \hline 549 \end{array}$$

of:

$$\begin{array}{r} 36 \\ 18 \\ \hline 28 \end{array}$$

Categorie C: fouten in de algoritme van de deling

Categorie D: slordigheidsfouten

De onderscheiding van de fouten in categorieën en typen is niet eenduidig. Soms weet men niet hoe een fout moet worden beoordeeld. Nemen we Faisel als voorbeeld, dan zien we deze fouten:

$$6 \times 18 = 126 \quad \text{en} \quad 7 \times 26 = 162.$$

Dit zijn misschien fouten van het type a_1 , misschien ook van het type a_3 (berekenen van tussenprodukten). Een fout als $10 \times 26 = 160$ zal wel een slordigheidsfout zijn, maar is $3 \times 12 = 39$ dat ook?

We hebben een lijst van leerlingen gemaakt en naar de fouten gekeken. De volgorde van de namen in de lijst is die van het tijdstip van inleveren. ‘Onder de streep’ staan de kinderen die zelfs het A-gedeelte niet af hadden. We beperken ons in het volgende tot het A-gedeelte, omdat dit reeds voldoende informatie verschaft.

		aantal fouten	fouten-typen							niveau van algoritmiseren				
			a ₁	a ₂	a ₃	b ₁	b ₂	c	d	A	B	C	D	E
Conchita		0												x
Faisel	4	2	x		x	x								x
Koen	..	2							x		x			
Saskia	..	1					x						x	
Simone	..	0									x			
Marco	..	0									x			
Eddy	..	2				x							x	
Annelies	..	0									x			
Laura	..	1					x						x	
Marvin	..	1			x								x	
Jan-Willem	..	1			x							x		
Petra	..	0									x			
Peter	..	2			x				x		x			
Diana	..	0									x			
Loes	..	3					x		x		x			
Marcel	..	3			x		x					x		
Berry	..	2			x								x	
Christiaan	..	1							x		x			
Gladys	..	2			x					x				
Lucienne	..	2	x				x				x			
Brenda	..	2	x						x		x			
Erwin	..	2			x		x				x			
Monique W.	4	0										x		
Kees	3	2			x				x			x		
Angelique	3	2	x		x							x		
Jopie	3	3	x				x		x		x			
Monique S.	1	1						x		x				

Uit de analyse van het werk valt direct het relatief grote aantal fouten van het type a_3 en b_2 op, fouten die te maken hebben met het berekenen van deelprodukten en het aftrekken. De fouten van b_2 zijn 'begrijpelijk', omdat de aftrekkingen het kernpunt van de delingsalgoritme uitmaken – er komen dus heel veel aftrekkingen in deze opgaven voor. We geven een aantal voorbeelden van deze fouten (type a_3):

$$\begin{array}{r}
 26 \overline{) 290749} \\
 \underline{7800} \quad 300 \\
 949 \\
 \underline{7800} \quad 30 \\
 169 \\
 \underline{156} \quad 5 \\
 1335
 \end{array}$$

(Jan Willem)

Het werk van Berry:

$$\begin{array}{r|l}
 26 \overline{) 8749} & \\
 \underline{7800} & 300 \\
 949 & \\
 \underline{780} & 30 \\
 169 & \\
 \underline{156} & 5 \\
 13 & 335
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 16 \\
 \underline{26 \times} \\
 36 \\
 60 \\
 \underline{120} \\
 200 \\
 \underline{416}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 1 \times 26 = 26 \\
 2 \times 26 = 52 \\
 4 \times 26 = 104 \\
 8 \times 26 = 208 \\
 16 \times 26 = 416
 \end{array}$$

Berry laat iets bijzonders zien: hij schrijft de 'tabel van 26 op' in machten van twee, dus door verdubbeling. Maar 16×26 rekt hij cijferend uit (zie recht boven op zijn werkblad). Hij heeft dezelfde fout gemaakt als Jan-Willem. Overgeschreven?

Type b_2 :

Het werk van Erwin:

$$\begin{array}{r|l}
 12 \overline{) 1966} & \\
 \underline{1200} & 100 \\
 766 & \\
 \underline{480} & 20 \\
 386 & \\
 \underline{240} & 20 \\
 146 & \\
 \underline{120} & 10 \\
 26 & \\
 \underline{24} & 2 \\
 2 & 152
 \end{array}$$

Het werk van Laura:

$$\begin{array}{r}
 26 \overline{) 8749} \\
 \underline{7800} \quad 300 \\
 549 \\
 \underline{520} \quad 20 \\
 29 \\
 \underline{26} \quad 4 \\
 3324
 \end{array}$$

Behalve het aantal fouten en de typering van de fouten, is het niveau van algoritmisering waarop de leerlingen zich bevinden van belang. We constateren een aantal niveaus van algoritmisch gedrag. Ook deze zullen we categoriseren. We onderscheiden:

Niveau A: de leerling heeft moeite met het begrip deling en weet niet of nauwelijks hoe de deling moet worden opgeschreven.

Niveau B: de leerling gebruikt het principe van de herhaalde aftrekking op een laag niveau.

Niveau C: de leerling neemt 'happen' van honderd, tien en eenheden in deze volgorde.

Niveau D: de leerling neemt in één keer 'happen' van honderdtallen, tientallen en eenheden.

Niveau E: de leerling rekt de deling op een standaard-niveau uit.

We geven enkele voorbeelden.

Het werk van Lucienne:

$$\begin{array}{r}
 26 \overline{) 8749} \\
 \underline{2600} \quad 100 \\
 6199 \\
 \underline{2600} \quad 100 \\
 3549 \\
 \underline{2600} \quad 100 \\
 949 \\
 \underline{1300} \quad 50 \\
 649 \\
 \underline{260} \quad 10 \\
 389
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 389 \\
 \underline{260} \quad 10 \\
 129 \\
 \underline{104} \quad (50) \\
 25 \\
 375
 \end{array}$$

Het werk van Martin:

$$\begin{array}{r}
 26 \overline{) 8749} \\
 \underline{8400} \\
 349 \\
 \underline{2600} \\
 89 \\
 \underline{844} \\
 5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 1 \times 26 = 260 \\
 2 \times 26 = 52 \\
 3 \times 26 = 78 \\
 4 \times 26 = 104 \\
 5 \times 26 = 130 \\
 6 \times 26 = 156 \\
 7 \times 26 = 182
 \end{array}$$

Dit is een oplossing op niveau D. Martin schrijft naast de deling de tafel van 26 en schrijft ook deelprodukten met nullen op.

Het werk van Jopie:

$$\begin{array}{r}
 12 \overline{) 1966} \\
 \underline{240} \\
 1726 \\
 \underline{260} \\
 1460 \\
 \underline{260} \\
 1200 \\
 \underline{520} \\
 720 \\
 \underline{510} \\
 200 \\
 \underline{120} \\
 1709 \\
 60 \\
 \underline{58} \\
 38 \\
 \underline{24} \\
 14 \\
 \underline{12} \\
 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 20 \\
 20 \\
 20^{10} \\
 20 \\
 40 \\
 40 \\
 10 \\
 10 \\
 5 \\
 2 \\
 1
 \end{array}$$

Jopie heeft deze deling op niveau B opgelost.

Het werk van Loes:

$$\begin{array}{r}
 26 \overline{) 879} \\
 \underline{5200} \quad 200 \\
 3549 \\
 \underline{1300} \quad 50 \\
 2249 \\
 \underline{1300} \quad 50 \\
 949 \\
 \underline{260} \quad 10 \\
 689 \\
 \underline{260} \quad 10 \\
 429 \\
 \underline{260} \quad 10 \\
 179 \\
 \underline{130} \quad 5 \\
 49
 \end{array}$$

x5

$$\begin{array}{r}
 26 \\
 \times 200 \\
 \hline
 1200 \\
 4000 \\
 \hline
 5200
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 26 \\
 \times 50 \\
 \hline
 300 \\
 1000 \\
 \hline
 1300
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 26 \overline{) 49} \\
 \underline{26} \quad 1 \\
 2336
 \end{array}$$

Dit is een oplossing op niveau C. De tussenprodukten worden niet door verdubbeling en halvering berekend, maar met behulp van het kruispuntenmodel.

Het werk van Koen:

$$\begin{array}{r}
 12 \overline{) 1966} \\
 \underline{1200} \quad 100 \\
 766 \\
 \underline{600} \quad 50 \\
 166 \\
 \underline{120} \quad 10 \\
 46 \\
 \underline{38} \quad 3 \\
 08163
 \end{array}$$

Dit is eveneens werk op C-niveau.

Een apart geval is Gladdys, die de sommen op D-niveau uitrekent, maar zeer veel problemen heeft met het berekenen van de tussenprodukten en met het aftrekken. Alle tussenprodukten worden met een concrete kruispuntentekening uitgerekend. Bij het aftrekken worden de inwisselingen concreet door doorstrepen en erboven schrijven gedaan. Dit geeft een chaotisch beeld van het werk, dat een voortzetting van het proces van algoritmiseren zou kunnen blokkeren.

Een andere opvallende leerling is Marcel. Hij volgt de verdubbelingsmethode om tussenprodukten te berekenen in uiterste consequentie:

$$\begin{array}{r}
 8 \overline{) 573} \\
 \underline{128} \\
 445 \\
 \underline{256} \\
 289 \\
 \underline{256} \\
 33 \\
 \underline{32} \\
 1
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 16 \quad 1 \times 8 = 8 \\
 \quad 2 \times 8 = 16 \\
 \quad 4 \times 8 = 32 \\
 \quad 8 \times 8 = 64 \\
 \quad 16 \times 8 = 128 \\
 \quad 32 \times 8 = 256
 \end{array}$$

Het sommetje bevat een aftrekfout. Toch beheerst Marcel ook de halveringsstrategie.

$$\begin{array}{r}
 12 \overline{) 1966} \\
 \underline{1200} \\
 766 \\
 \underline{580} \\
 186 \\
 \underline{173} \\
 13 \\
 \underline{12} \\
 1
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 100 \quad 1 \times 12 = 12 \\
 50 \quad 2 \times 12 = 24 \\
 25 \quad 3 \times 12 = 36 \\
 12 \quad 4 \times 12 = 48 \\
 6 \quad 5 \times 12 = 60 \\
 3 \quad 6 \times 12 = 72
 \end{array}$$

Het is moeilijk dit niveau in de onderscheiden niveaus in te passen. De peiling geeft dus aan dat er meer aandacht moet worden besteed aan deze delingssommen. De basisvaardigheden, in dit geval de tafels van vermenigvuldiging, en de aftrekkingen onder de twintig blijken weliswaar nauwelijks fouten op te leveren, maar zullen toch

in de aandacht moeten blijven om de routine en de vaardigheid te vergroten. Maar we zullen ook meer aandacht moeten besteden aan de algoritme zelf: het aftrekken en het handig rekenen binnen het vermenigvuldigen. Daarbij moeten we het rekenen met nullen niet vergeten. Om een optimaal resultaat te krijgen, lijkt het 't beste veel korte lesjes te geven. Dus elke dag drie sommen op het bord, afgesloten door een korte bespreking waarin de nadruk valt op bovenstaande zaken. Meer lesjes dus, maar in totaliteit niet beduidend meer tijd. We zullen over een maand of twee bekijken of deze werkwijze resultaat heeft gehad.

Opnieuw een peiling

Nu we ruim twee maanden verder zijn en op grond van de uitkomsten van de december-peiling meer nadruk hebben gelegd op korte algoritmelesjes en in versterkte mate oefeningen in de basisvaardigheden hebben ingelast, willen we nagaan hoe het niveau van de klas is. Hebben de inspanningen tot resultaten geleid? De peiling bevat een A-blad met de volgende opgaven:

- $794 : 9 =$
- $1558 : 23 =$
- $2568 : 17 =$

en een B-blad met:

- $4832 : 16 =$
- $13956 : 26 =$
- $9634 : 44 =$

De algemene indruk tijdens de peiling is, dat de motivatie goed is en dat er betrekkelijk weinig hulp wordt gevraagd. Het tempo ligt ook vrij hoog. In vergelijking met de peiling van december zelfs opvallend hoog. De drie sommen van het A-gedeelte kost negen van de 29 kinderen minder dan tien minuten en slechts twee kinderen hebben er meer dan vijftien voor nodig. Van de 29 kinderen hebben dertien ook de sommen van het B-gedeelte in 25 minuten af. Een diepgaande analyse van het werk bevestigt de beschreven indruk. We gaan opnieuw – evenals in de december-analyse – de fouten na die de kinderen maken, en gaan in op het niveau van werken, zoals dat in de beschrijving van de december-peiling is opgenomen. Voor een goed begrip herhalen we nog even de fouten-categorieën die we eerder onderscheidden:

Categorie A: vermenigvuldigfouten

- a₁: tafels, basisvaardigheden
- a₂: rekenen met nullen
- a₃: berekenen van de tussenprodukten

Categorie B: aftrekfouten

- b₁: basis-kennis
- b₂: aftrek-algoritme

Categorie C: delingsalgoritme

Categorie D: slordigheidsfouten

Bovendien geven we een overzicht van de gehanteerde niveau-indeling:

Niveau A: de leerling heeft moeite met de deling en weet niet of nauwelijks hoe de deling moet worden opgeschreven.

Niveau B: de leerling gebruikt het principe van de herhaalde aftrekking op laag niveau.

Niveau C: de leerling neemt 'happen' van honderd, tien en eenheden in deze volgorde.

Niveau D: de leerling neemt in één keer 'happen' van honderd, tien en eenheden.

Niveau E: de leerling deelt op de traditionele wijze.

Om deze niveaus goed te bekijken, hebben we de sommen van het B-gedeelte nodig, omdat daarin ook 'happen' van honderden kunnen worden genomen.

We geven een fouten-typering, dan het aantal fouten in het A- en B-gedeelte en tenslotte het niveau van oplossing, zoals hiervoor beschreven. In de laatste kolom tenslotte geven we een indruk van de vooruitgang, met name in niveau per leerling ten opzichte van de december-peiling.

Enige voorbeelden van opvallend werk.

In het werk komen nog te veel fouten voor, al zijn er geen principiële fouten meer in de delingsalgoritme, zoals die in het december-werk naar voren kwamen. De belangrijkste winst is gelegen in het feit, dat de kinderen die in december het slechtste werk leverden (weinig begrip en laag tempo) nu bijgekomen zijn. Het tempo is bij iedereen redelijk. Iedereen weet precies hoe er gehandeld moet worden.

- maartpeiling

	fouten-type							aantal fouten in		niveau van werken				
	a ₁	a ₂	a ₃	b ₁	b ₂	c	d	A	B	A	B	C	D	E
Jan-Willem			x				x	2	1				x	+
Faisel							x	1	0					○
Saskia			x					1	0				x	○
Petra					x			1	2			x		○
Angelique								0	2				x	+
Erwin			x					1	3			x		+
Eddy								0	1				x	+
Simone			x					1	0				x	○
Martin			x					1	0				x	○
Koen			x				x	2	1				x	○
Loes							x	2	0			x		○
Laura								0	0				x	○
Brenda								0	1				x	+
Annelies			x					1	2			x		○
Marcel							x	1	1			x		+
Peter	x						x	2	2			x		○
Diana							x	1	1			x		○
Sander						x	x	3	2			x		?
Christiaan	x							1	0			x		○
Berry			x				x	2	1				x	○
Monique W.								0	1			x		○
Monique S.	x		x					2	2			x		+
Robert		x	x					2	1			x		?

	fouten-type								aantal fouten in		niveau van werken					
	a ₁	a ₂	a ₃	b ₁	b ₂	c	d	A	B	A	B	C	D	E		
Monique A.	×							1	0			×			?	
Marco								0	1			×			○	
Jopie	×			×				2	2			×			+	
Kees			×					1	0			×			+	
Lucienne			×			×		3	1			×			○	
Gladys						×		2	-			×			+	

+: vooruitgang is duidelijk

-: geen vooruitgang

○: vooruitgang twijfelachtig, maar geen achteruitgang

? : deze kinderen deden in de december-peiling niet mee

De fouten worden gemaakt in aftrekkingen en het berekenen van deelprodukten. Deze conclusie geldt voor de hele groep. Op twee punten zijn we nog niet tevreden. Ten eerste blijkt, dat er toch nog veel kinderen zijn die te hoog grijpen en ten tweede is het aantal fouten in de deelprodukten nog te groot.

Nummer één: Berry en Marco.

Berry schreef in december de produkten geheel of gedeeltelijk op, bij voorbeeld door te verdubbelen:

$$1 \times 26 = 26$$

$$2 \times 16 = 52$$

$$4 \times 26 = 104 \text{ enz.}$$

Hij heeft het halveren geleerd, hetgeen in één oplossing duidelijk te zien is:

$$\begin{array}{r|l} 9 \overline{) 794} & 85 \\ \underline{765} & \\ 20 & \\ \underline{18} & 2 \\ 2 & 87 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 100 \times 9 = 900 \\ 50 \times 9 = 450 \\ 25 \times 9 = 225 \end{array}$$

Hoe komt Berry aan $85 \times 9 = 765$? Wel, dat is aan de rechterkant van zijn blaadje te lezen:

$$50 \times 9 = 450 \text{ (halveren)}$$

$$25 \times 9 = 225 \text{ (opnieuw halveren)}$$

$$10 \times 9 = 90$$

$$85 \times 9 = 765 +$$

Waarom mogen we met deze werkwijze toch niet zo gelukkig zijn, ook al rekent Berry hier zeer flexibel? Wel, het leidt in moeilijker gevallen vaak tot fouten. Berry heeft er ook een 'kladje' voor nodig. Maar een doorzichtig opgebouwd delingsalgoritme kan zonder kladje.

Ook Marco maakt eigenaardige misstappen:

$$\begin{array}{r}
 44 \overline{) 9634} \quad 200 \\
 \underline{8800} \\
 834 \\
 \underline{620} \quad 15 \\
 214 \\
 \underline{176} \quad 4 \\
 48 \\
 44 \quad 1 \\
 4
 \end{array}$$

Niet doorzichtig. Hij heeft een vermenigvuldiging nodig om een deelprodukt uit te rekenen. Hij doet dat in dit geval niet goed:

$$\begin{array}{r}
 44 \\
 \frac{15}{20} \times \\
 200 \\
 40 \leftarrow \\
 \frac{400}{660}
 \end{array}$$

Nummer twee: Laura en Gladys:
Eerst het werk van Gladys

$$\begin{array}{r}
 9 \overline{) 794} \\
 \underline{720} \quad 80 \\
 174 \\
 \underline{72} \quad 8 \\
 2 \quad 88
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \frac{9}{4} & \frac{9}{5} & \frac{9}{6} & \frac{9}{7} & \frac{9}{8} \\
 \frac{9}{36} & \frac{9}{45} & \frac{9}{54} & \frac{9}{63} & \frac{9}{72} \\
 \frac{9}{27} & \frac{9}{18} & \frac{9}{9} & &
 \end{array}$$

Laura:

$$\begin{array}{r}
 44 \overline{) 9634} \quad 200 \\
 \underline{8800} \\
 834 \\
 \underline{440} \quad 10 \\
 394 \\
 \underline{352} \quad 8 \\
 42 \quad 218
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5 \\
 44 \\
 \hline
 20 \\
 200 \\
 \hline
 220
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 6 \\
 44 \\
 \hline
 24 \\
 240 \\
 \hline
 264
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 7 \\
 44 \\
 \hline
 28 \\
 280 \\
 \hline
 308
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 8 \\
 44 \\
 \hline
 32 \\
 320 \\
 \hline
 352
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 9 \\
 44 \\
 \hline
 36 \\
 360 \\
 \hline
 396
 \end{array}$$

Deze meisjes rekenen niets uit het hoofd uit. Opvallend is vooral dat ze ook niet 'onthouden'. Is hier sprake van gemakzucht?

Opvallend is het relatief grote aantal fouten in het uitrekenen van de deelprodukten. Het is vrijwel onmogelijk om altijd precies te zeggen hoe deze fouten tot stand komen. Soms lijkt het een kwestie van het kennen van de tafels, soms is het een niet goed hanteren van de verdubbels- en halveringswerkwijze. We geven een selectie. We zien bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{l}
 40 \times 23 = 820 \\
 9 \times 44 = 372 \\
 12 \times 44 = 550
 \end{array}$$

Koen rekent: $25 \times 17 = 700$. Maar hoe hij er aan komt, is onduidelijk. Hij rekent bovendien $7 \times 17 = 84$, waarbij hij waarschijnlijk deze fout maakt:

$$7 \times 17 = 7 \times 10 + 7 \times 7 = 70 + (7 + 7) = 70 + 14 = 84.$$

$$\begin{array}{r}
 23 \overline{) 1558} \\
 \underline{1380} \\
 178 \\
 \underline{164} \\
 14
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 60 \overline{) 13} \\
 \underline{12} \\
 1
 \end{array}$$

1x23	23
2x23	46
3x23	69
5	115
6	138
7	141
8	164
9	87

We kunnen vele van deze en soortgelijke fouten en slordigheden opnemen, zonder dat we de juiste oorzaak kunnen omschrijven. Ook vinden we kinderen die de deelprodukten op de wijze van Diana uitrekenen.

$ \begin{array}{r} 44 \\ 19 \\ \hline 36 \\ 360 \\ 400 \\ \hline 400 \\ \hline 836 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 44 \\ 18 \\ \hline 32 \\ 320 \\ 40 \\ \hline 400 \\ \hline 792 \end{array} $
---	--

We beoordeelden dit al eerder als een ondoorzichtige en daarom verkeerde aanpak die fouten in de hand werkt. De conclusie is dat we in de toekomst een poging moeten doen om de delingen 'doorzichtig' te laten oplossen, met gebruikmaking van handig rekenen.

Tot slot geven we een voorbeeld van een kind dat vooruit gegaan is ten opzichte van december.

december

$\begin{array}{r l} 18 & \\ \hline 666 & 32 \\ 378 & \\ \hline 190 & \\ \hline 72 & 4 \\ 18 & \\ \hline 0 & 37 \\ \hline \end{array}$	$\begin{aligned} 1 \times 18 &= 18 \\ 2 \times 18 &= 36 \\ 4 \times 18 &= 72 \\ 8 \times 18 &= 144 \\ 16 \times 18 &= 288 \\ 32 \times 18 &= 576 \end{aligned}$
---	---

maart

$\begin{array}{r l} 44/891634 & \\ \hline 8800 & 200 \\ \hline 78134 & \\ \hline 440 & 10 \\ \hline 37914 & \\ \hline 356 & 9 \\ \hline 28 & 219 \end{array}$	
---	--

Het werk van Peter vertoont een overgang van niveau C naar niveau D. In december heeft Peter, gebruikmakend van de verdubbelmethode, het tussenprodukt $4 \times 18 = 72$ uitgerekend. Hij kan dan nog 1×18 weggeven. Hij heeft de verhoudingstabel gebruikt, maar is er niet mee aan het werk geweest. Ook in maart heeft hij bij een aantal delingen de verhoudingstabel gebruikt, maar hij heeft die tabel gebruikt om ook tussengelegen deelprodukten te berekenen, en wel als volgt:

$$\begin{aligned} 1 \times 44 &= 44 \\ 2 \times 44 &= 88 \text{ (verdubbelen)} \\ 4 \times 44 &= 176 \text{ (verdubbelen)} \\ 8 \times 44 &= 352 \text{ (verdubbelen)} \end{aligned}$$

Peter heeft nu 9×44 ineens uitgerekend door de optelling $44 + 352$ te berekenen, waarbij overigens wel een fout gemaakt is.

We hebben een idee gekregen hoe de groep van december tot maart heeft gewerkt. Het opvallende is, dat de in december 'hopeloos' geachte gevallen in maart helemaal bij gekomen zijn en de aansluiting hebben herkreten.

Maar wat vooral duidelijk geworden is: de basisvaardigheden worden in deze klas onvoldoende beheerst en de kinderen kunnen onvoldoende hoofdrekenen. Kortom, er is in de middenklassen te weinig aandacht aan het handig en snel rekenen besteed. Eveneens is duidelijk geworden hoezeer de progressieve schematisering van de delingsalgoritme afhankelijk is van de basisvaardigheden.

4.4 afsluiting van de algoritmeleergang

De afsluiting van de algoritme kan nu gemaakt worden. Er zullen enkele kinderen zijn die nooit verder komen dan de oplossing van het type:

$$\begin{array}{r|l}
 47 \overline{)15965} & \\
 \underline{4700} & 100 \\
 11265 & \\
 \underline{4700} & 100 \\
 6565 & \\
 \underline{4700} & 100 \\
 1865 & \\
 \underline{470} & 10 \\
 1395 & \\
 \underline{470} & 10 \\
 925 & \\
 \underline{470} & 10 \\
 455 & \\
 \text{enz.} &
 \end{array}$$

Bedenk echter wel, dat ook dit kind zo'n deling kan maken. Uit de hiervoor beschreven peilingen blijkt dat dit niveau door alle kinderen reeds is gepasseerd. We willen stipuleren dat niet alle kinderen noodzakelijkerwijs tot hetzelfde eindniveau hoeven te komen. Toch mogen we verwachten dat vrijwel alle kinderen tot een werkwijze komen, waarin honderden, tienten en eenheden ineens worden afgetrokken, dus als volgt:

$$\begin{array}{r|l}
 47 \overline{)15965} & \\
 \underline{14100} & 300 \\
 1865 & \\
 \underline{1410} & 30 \\
 455 & \\
 \underline{423} & 9 \\
 32 & 339
 \end{array}$$

We beschouwen deze aanpak als een aanvaardbaar eindniveau. Er is geen reden om nu nog de stap naar de thans gangbare standaardvorm te zetten: deze vergt namelijk onevenredig veel inspanning en tijd.

Deel C

Nabeschouwing en discussie

IV NABESCHOUWING

Deze nabeschuwing is een echte *na-beschouwing*. Wat is achteraf gezien, na zo'n jaar of acht werken, ons standpunt over het beste cijferonderwijs? Dat is de vraag die we hier willen beantwoorden. Wat in de voorgaande hoofdstukken beschreven staat, was vrijwel definitief. Maar met name het experiment over vermenigvuldigen volgens herhaald optellen was nog niet geheel voltooid: als we het konden overdoen dan zouden we op kleine punten nog wat veranderingen aanbrengen in de zin zoals hier beschreven. Het volgende is wat ons betreft dus een afsluiting. Men zou wellicht ook kunnen zeggen dat het het begin kan vormen van nieuwe ontwikkelingen op het terrein van het cijferen die passen bij het huidige tijdsgewricht waarin kinderen de beschikking hebben over zakrekenmachientjes en -computers.

Globaal gesteld is onze opvatting dat de ontwikkeling van deze rekenautomaten een appèl op ons onderwijs doet: namelijk niet zozeer het snelle cijferen volgens de meest verkorte algoritme-vormen (zoals bijvoorbeeld de korte staartdeling) is nu primair, als wel het schatten, handig rekenen, hoofdrekenen en speciaal het kunnen toepassen van de cijferprocedures op de geëigende contextproblemen, dat is waar het vooral om gaat.

Nu gaan er de laatste tijd steeds meer stemmen op om het cijferen af te schaffen. Is dit de consequentie van ons standpunt? Nee, dat is niet zo. *Wij zijn er niet voor om het cijferen af te schaffen.* En de wegen die in het voorgaande geschetst werden, leiden wat ons betreft naar de standaarduitvoeringen. Maar... indien men van mening zou zijn dat de kinderen de standaard-algoritmen niet hoeven te leren – en die opvattingen zijn we de laatste jaren ook in de onderwijspraktijk herhaaldelijk tegengekomen – dan kan men toch het met contextproblemen geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering zoals dat hier beschreven is, ook heel goed volgen. Alleen stoot men in dat geval niet helemaal naar het eindniveau van de leergang door.

We zullen in de toekomst de cijferleergang zoals hier geschetst niet helemaal kunnen ontberen. *Cijferen is in onze zin namelijk vooral een vorm van handig rekenen* – zo is het althans in het eerste deel van de leergang. En dit handig rekenen c.q. schatten, hoofdrekenen, gebruik maken van de tafels en van eigenschappen, dat is nu exact wat we in de toekomst (ook) nodig zullen hebben. Vandaar dat we durven te stellen: *het cijferen aldus opgevat, vormt een leergang waarmee verschillende eind-leerdoelen gediend kunnen worden.* Extreem gesteld kan het zowel voor het handig rekenen (niet-cijferen) als het standaard-cijferen gebruikt worden.

Maar kan dit met het gangbare cijferen ook niet? *Wat is nu precies het verschil tussen de gebruikelijke methodiek en de hier geschetste aanpak?*

Wel, in het vigerende cijferonderwijs wordt per deelgeval, eventueel via tussenstappen, steeds direkt op de standaard-vorm aangestuurd. Eerst wordt bijvoorbeeld een getal met één cijfer vermenigvuldigd met een getal van twee cijfers leidend naar de standaard-vorm, dan een één-cijfergetal met een drie-cijfergetal voerend tot de standaard-algoritme, idem dito met een vier-cijfergetal, vervolgens een twee bij twee, een twee bij drie, een twee bij vier vermenigvuldiging. En steeds gaat men pas naar de complexere gevallen indien het voorgaande minder complexe geval beheerst wordt, dus op standaard-niveau uitgevoerd kan worden. We noemen dit leren cijferen volgens *progressieve complicering*. Leren cijferen volgens *progressieve schematisering* vormt hiervan het spiegelbeeld. De zojuist opgenoemde deelgevallen worden nu niet zover in de tijd uitgestreken, doch ongeveer tegelijkertijd behandeld. Maar de oplossingen worden op een laag niveau van schematisering en verkorting opgelost, bijvoorbeeld in het geval van een vermenigvuldiging: een lange optelling maken met daaruit happen van tien nemen. Later worden dan dezelfde opgaven korter getoet en sneller uitgerekend: de aparte happen van tien, honderd enz. worden nu samengenomen. Kortom, deze leergang wordt in grote lijnen bepaald door schematisering en verkorting en niet door de complexiteit van de opgaven. Dit is niet het enige verschil.

Het tweede onderscheid zit 'm in de toepassingen, ofwel *de plaats van de contextproblemen* in de cijferleergang. In het gangbare cijferonderwijs zijn toepassingen als het ware toe-passingen achteraf; ze staan in feite los van de cijferleergang, zijn er niet mee geïntegreerd. In sommige methoden, zoals bijvoorbeeld 'Naar zelfstandig rekenen' (nieuwe versie) is het aantal toe-passingen beperkt tot enkele tientallen per leerjaar, terwijl in andere methoden vrij veel verhaaltjessommen in de middenbouw gemaakt worden, zoals bijvoorbeeld in 'Elementair wiskundig rekenen'. Maar veel of weinig, ze staan zoals gezegd naast de leergang. In het cijferonderwijs zoals ons dat voor ogen staat zijn contextproblemen echter geïntegreerd met het cijferen: ze vormen de bron van het cijferen en worden daarnaast ook als toepassingen benut.

Ziehier twee belangrijke verschilpunten: leerstofordening en toepassingen. Het door ons voorgestelde cijferen is, we noemden het al, kort te typeren als geïntegreerd cijferen volgens progressieve schematisering, waarbij 'geïntegreerd' zowel betrekking heeft op cijferen vervlochten met handig rekenen als op cijferen verweven met contextproblemen. Op het laatstgenoemde gaan we nu apart in.

In onderzoek is vastgesteld dat leerlingen van de basisschool nogal wat moeite hebben om de bewerkingen van *vermenigvuldigen en delen in elementaire contextopgaven* te onderkennen. Ongeveer de helft van de kinderen heeft aan het einde van de basisschool moeilijkheden met die bewerkingen. Het gevolg is dat die kinderen ook de cijferprocedures niet (altijd) in de geëigende gevallen toepassen.

Hoe kan men nu de toepasbaarheid verhogen? Door meer contextproblemen te geven? Er zijn methoden die het probleem van de toepasbaarheid onderkennen zoals bijvoorbeeld 'Elementair wiskundig rekenen', die het inderdaad in verhoging van de kwantiteit zoekt en dat op zich op heel acceptabele wijze doet in de vorm van korte onderwijsverhaaltjes. Wij zijn echter van oordeel dat dit nog onvoldoende tegemoet komt aan wat de kinderen nodig hebben – althans de zwakke rekenaars. In het cijfe-

ren zèlf zal de band tussen vermenigvuldigen en herhaald optellen, en delen en herhaald aftrekken stevig aangehaald moeten worden, en wel te beginnen bij de tafels! In het eerste deel over vermenigvuldigen hebben we kunnen waarnemen dat Christiaan c.s. allerlei vindingrijke oplossingswijzen voor een contextprobleem ontwikkelen, maar daarbij geen optimaal gebruik maakten van de tafels, net zo min als bij het goudvissenprobleem 27×8 vanzelf afsplitsingen van 10×8 gemaakt werden. Welnu, het is zaak om de startlijn van het handig rekenen – of zo men wil: het cijferen – ongeveer hier te trekken. Laat uiteraard strategieën van tellen, verdubbelen, turven e.d. toe. Maar wijs ook op de werkwijzen van de kinderen die de tafels gebruiken, tien-tafels afsplitsen en handig inwisselen. En we zullen constateren dat ook voor de zwakke leerlingen de laatstgenoemde werkwijzen overtuigend zijn, omdat ze zoveel handiger tot het juiste antwoord voeren. Het gevolg is dat na korte of langere tijd de kinderen, indien ze daartoe aangemoedigd worden, die aanpak ook gaan volgen. En zolang ze nog informele manieren zouden gebruiken, kan trouwens niet gezegd worden dat ze niet zinvol bezig zijn, omdat dit voor hen toch ook een vorm van handig rekenen is – er is dus geen enkele reden om te forceren! Maar, zoals gezegd, zal in de praktijk van het onderwijs blijken dat vrijwel alle kinderen na enige tijd, als in de opgaven grotere getallen verschijnen, de tafels (ook die van tien!) gaan gebruiken en omgekeerd aan de contextopgaven een stimulans ontleen om de tafels te memoriseren. Voor het delen geldt in grote lijnen hetzelfde. Dus ook hier wordt het gangbare formele cijferen aanvankelijk wat uitgesteld, waardoor het informele rekenen aan de hand van elementaire contextopgaven niet te snel in het keurslijf van de algoritmen gewrongen wordt, met alle ongewenste gevolgen vandien.

In de grote lijn van de leergang *gebruiken we contextproblemen op twee verschillende manieren*, namelijk als uitgangspunt voor en als toepassing van de cijferprocedures. En wel op de volgende wijze: steeds weer wordt bij ieder belangrijk nieuw geval uitgegaan van een contextopgave, zoals bij 8×23 , 23×8 , 23×58 , 123×12 , en ook worden bij het inoefenen steeds weer contextproblemen naast ‘kale’ cijfersommen gesteld. Bij het delen idem dito.

Zoals eerder aangeduid is het gebruik van contextproblemen als bron voor de begripsvorming van het cijferen een betrekkelijk nieuwe aanpak. De waarde ervan ligt, naar onze ervaring, zowel bij het cijferen als ook bij het toepassen. Voor het cijferen geeft zo’n reëel probleem houvast omdat de kinderen daaraan hun rekenhandelingen kunnen oriënteren, en voor het toepassen ligt de betekenis in de verbinding met de korte rekenwijzen van het cijferen en daarmee in de begripsvorming van vermenigvuldigen en delen in relatie tot herhaald optellen en herhaald aftrekken.

Het *noteren* (en verwoorden) van de steeds meer verkorte rekenwijze is een teer punt. De notatiewijze vormt tot op zekere hoogte de uitdrukking van het denken, de manier van aanpak, de rekenstrategie: kinderen die een sterk verkorte rekenwijze toepassen, zullen gewoonlijk de oplossing ook kort noteren. Tot op zekere hoogte... Hier liggen twee gevaren. Ten eerste kunnen niet alle zelf-gevonden notatiewijzen gehonoreerd worden om de eenvoudige reden dat zo’n notatie op den duur wel eens blokkerend kan werken voor nog verdere verkortingen. En ten tweede kunnen opgelegde notaties wel eens remmend werken vanwege het feit dat ze te formeel, te ab-

stract zijn en de werkwijze van de betreffende leerling niet dekken. (Men kan dit vooral signaleren als men de kinderen hun handelwijzen laat verwoorden en verantwoorden!). Er kan nog een derde klip genoemd worden, die vlak bij de eerste ligt. Indien er namelijk niet een zekere uniformiteit in het noteren is, kunnen de kinderen elkaar niet makkelijk meer begrijpen en dat moet als een ernstige handicap aangemerkt worden, omdat het heel belangrijk is bij het progressieve schematiseren dat de kinderen met elkaars oplossingen geconfronteerd worden.

In de tekst van het gedeelte over vermenigvuldigen volgens herhaald optellen kan men lezen hoe lastig het is deze klippen te omzeilen.

Achteraf gezien hadden we na het begin met de lange optelling al wat direkter op de volgende notatiewijze kunnen aansturen:

$$56 \times 28 =$$

$$6 \times 28 =$$

$$10 \times 28 =$$

$$10 \times 28 =$$

$$10 \times 28 =$$

$$10 \times 28 =$$

$$10 \times 28 =$$

Na ongeveer vijftien lessen bleken verschillende kinderen hier namelijk duidelijk aan toe te zijn. Deze notatie zou met een *vingerwijzing in de lucht* gepaard kunnen gaan om de relatie met de lange optelling vast te leggen en eventueel *een strepenschema op papier*.

$6 \times 28 =$	28
	+ 6
$10 \times 28 =$	+ 10
$10 \times 28 =$	+ 10
enz.	+ 10

De volgende notatiestap zou dan zijn:

$$\begin{array}{l} 6 \times 28 = \\ 50 \times 28 = \text{---} + \end{array}$$

Maar deze kan alleen gezet worden indien de rekenvaardigheid zover gevorderd is dat deze deelprodukten uit het hoofd uitgerekend kunnen worden – zie hier weer de samenhang tussen noteren en uitrekenen.

Zodoende krijgen we de volgende notatiestappen:

- lange optelling geheel uitgeschreven;
- lange optelling gedeeltelijk uitgeschreven;
- lange optelling gedeeltelijk uitgeschreven in happen van tien, ondersteund door streep-in-de-lucht en strepenschema op papier;
- lange optelling kort uitgeschreven in onderdelen, ondersteund door streep-in-de-lucht en strepenschema op papier;
- verdere verkorting door eenheden, tientallen, honderdtallen direkt samen te nemen.

Bij het delén zijn de verschillende notatiewijzen reeds heel precies in de voorgaande basistekst aangegeven.

We spraken zojuist over *rekenvaardigheid* in de zin van rekenvoorwaarden voor het leren cijferen. Ook dit punt is van uitzonderlijk belang en verdient aparte aandacht, omdat er verschillende standpunten over mogelijk zijn die ieder belangrijke consequenties voor de cijferleergang als geheel hebben. De meest *strikte opvatting* die trouwens het meeste is aan te bevelen indiën men de hier geschetste leergang voor het eerst volgt, gaat ervan uit dat *alle kinderen bij de start van het cijferen de tafels moeten beheersen* (ook de tafels van de tientallen) *en direkt moeten kunnen inwisselen en lenen*. Deze opvatting is daarom zo aantrekkelijk omdat op basis van deze vaardigheden snel voortgang geboekt kan worden indien men eenmaal aan het 'echte' cijferen begint – dat is één.

Maar ten tweede zullen op deze grondslag de niveauverschillen bij het cijferen veel kleiner zijn dan wanneer men aan die vaardigheidsvoorwaarden minder strak de hand houdt en ook toelaat dat de kinderen tijdens het leren cijferen de rekenvaardigheid met betrekking tot tafels, inwisselen en lenen verder opvoeren. Dit laatste hebben wij in feite gedaan. Maar achteraf bezien, is deze werkwijze in de eerste onderwijsronde niet aan te bevelen, omdat dan inderdaad de *niveauverschillen zeer groot* worden – er zijn tenslotte heel wat kinderen die spelenderwijs memoriseren maar evenzeer zijn er die veel tijd en vlijt nodig hebben om de basisvaardigheden in te slijpen. Toch is ook een al te strikt vasthouden aan rekenvoorwaarden niet aan te bevelen. We noemden het al: voor sommige kinderen vormt het cijferen op basis van contextproblemen en het daarmee verbonden handige rekenen pas een echte stimulans om allerlei vaardigheden te leren. Niettemin stellen we ons op het standpunt dat *redelijkerwijs* zoveel mogelijk aan de strikte rekenvoorwaarden vastgehouden moet worden, alvorens aan het cijferen te beginnen – zeker in eerste instantie. Redelijkerwijs betekent in dit verband dat met name het direkte inwisselen en lenen niet van alle kinderen geëist mag worden, eenvoudigweg omdat ze dit niet in enkele weken kunnen klaarspelen (te grote belasting van het werkgeheugen).

Hiermee zijn we bij de *onderwijsbaarheid* van het door ons voorgestane cijferen beland. Kun je zo'n leergang zomaar, dus los van een leerboek starten? Het antwoord daarop luidt in z'n algemeenheid: nee, niet zomaar! Er zal een plan ontwikkeld en uitgewerkt moeten worden om het cijferen van leerjaar 3 t/m leerjaar 5 te vervangen en dat is een heel karwei. Zoals gezegd, een karwei dat in het algemeen heel zwaar is voor een schoolteam alleen, want er zit nogal wat aan vast: naast het cijferen dienen ook het hoofdrekenen en het maken van toepassingsproblemen uit de bestaande methode gelicht te worden. Kortom, een belangrijk deel van de methode van de middenklassen is dan onbruikbaar geworden... Maar in wat groter verband en met ondersteuning van bijvoorbeeld begeleiders zou men het aan kunnen pakken – tenminste als alle leden van het team de werkplanontwikkeling van harte ondersteunen en zich nauwgezet op de hoogte stellen van de hiervoor genoemde punten betreffende toepassingen, eindvormen, rekenvaardigheden als voorwaarden, notatiewijzen, volgorde van opgaven, functies van contextproblemen, en van onderdelen die nog

volgen over de keuze van modellen, het belang van plaatswaarde e.d. Bovenal zal men zich in de geest die achter deze werkwijze steekt moeten kunnen vinden, welke tot uitdrukking komt in respectievelijk het tegengaan van sterk op 'trucs' en algoritmen gericht onderwijs dat immers een funeste invloed op de wiskundige attitude heeft, het proberen te voorkomen dat informele kinderlijke oplossingsstrategieën van contextopgaven en formele rekenkundige methoden uit elkaar groeien en gescheiden naast elkaar blijven staan, het verhogen van de toepasbaarheid van de cijferprocedures en het optimale gebruik van de rekenmachine en de zakcomputer, en het opvatten van cijferen als een vorm van handig rekenen dat niet per se voor alle kinderen naar de standaard-algoritmen hoeft te leiden.

Voorzichtigheid is dus geboden. Bovendien verwachten we dat binnen afzienbare tijd steeds meer methoden op de hier geschetste werkwijzen of varianten ervan zullen overgaan. Trouwens ook in dat geval zal de onderwijslast toch in hoofdzaak bij de onderwijsgevende komen te liggen. Want in tegenstelling tot de aloude cijferleergang, die door het leerboek bepaald was, is het hier geschetste cijferonderwijs kindgericht en vooral ook een groepsactiviteit waarin voor de onderwijsgevende een belangrijke taak is weggelegd.

Wat is nu de conclusie met betrekking tot de onderwijsbaarheid? Grote mogelijkheden, niet geringe moeilijkheden: er moet aan verschillende voorwaarden voldaan worden. Het onderhavige boek richt zich op ontwikkelaars i.c. methodenschrijvers, werkplanontwikkelaars van schoolteams e.a., maar tevens op studenten en onderzoekers en uiteraard op geïnteresseerde onderwijsgegenden, doch daarbij de laatstgenoemden niet in de eerste plaats als ontwikkelaars beschouwend. We willen geen overspannen verwachtingen scheppen en niet suggereren dat men het cijferen in een handomdraai zou kunnen veranderen: vernieuwing is geen spectaculaire actie maar een noeste ambachtelijke bezigheid. Wel zal het mogelijk zijn om eens te starten met bijvoorbeeld delen – dus om niet direkt alles te veranderen! Sterker nog: dit boek kan hiertoe juist een stimulans zijn.

Dit gezegd hebbende, richten we ons vervolgens op de keuze van de *meest geëigende modellen* voor de cijferprocedures van de basisoperaties vermenigvuldigen en delen, dat wil zeggen eigenlijk alleen op het vermenigvuldigen, omdat we bij het delen geen duidelijke alternatieven hebben doch slechts kleinere nuance-verschillen. Vermenigvuldigen volgens het kruispuntenmodel of via herhaald-optellen? Beide modellen zijn goed bruikbaar – zoals uit de voorgaande hoofdstukken moge blijken. Als we nu alles overziend, zouden moeten kiezen, zou *onze keuze* die van *het herhaalde optellen* zijn. De twee belangrijkste redenen daarvoor zijn de volgende: ten eerste sluit deze aanpak goed aan bij die van het delen zodat in feite alle basisbewerkingen van het cijferen op elkaar afgestemd zijn, en ten tweede past herhaald optellen beter bij de 'natuurlijke' werkwijze die kinderen bij het maken van contextproblemen hanteren – consistentie en toepasbaarheid zijn dus de belangrijkste motieven. Het kruispuntenmodel en het rechtshoeksmodel zijn daarnaast uiteraard belangrijke modellen waarmee de kinderen bij de begripsvorming van vermenigvuldigen in aanraking gebracht (moeten) worden: belangrijke eigenschappen kunnen ermee zichtbaar worden gemaakt, grootheden kunnen ermee 'gekruist' worden en later bij breuken en komma-

getallen zijn de genoemde modellen zeer nuttig. Maar zoals gezegd, specifiek voor het cijferen bedoeld, verdient de herhaald-optel-methode wellicht toch de voorkeur, zij het ondersteund door gebaar en beeld van resp. streep-in-de-lucht en lijn-op-papier, en een daaraan gekoppelde korte notatiewijze.

Dan nog een enkele opmerking over het delen. De delingsalgoritme is hier gebonden aan het verdelen. Maar het zal duidelijk zijn dat ook de verhoudingsdeling (het groepjes maken) bij het herhaald-aftrek-model past. Het is zelfs zo, dat in vele leerboeken de laatstgenoemde betrekking geprefereerd wordt (de zogenaamde Greenwood-methode). Wij gaan uit van verdeelsituaties maar betrekken al snel ook verhoudingsdelingen in de deelleergang.

Dus zowel voor vermenigvuldigen als voor delen geldt dat wel één model gekozen wordt, maar dat in de contextproblemen toch alle aspecten van de twee bewerkingen vervat liggen. Welke aspecten dat kunnen zijn, werd in 'Cijferend vermenigvuldigen en delen 1' opgenomen – daar gaan we dus nu niet verder op in.

Naast de kwestie van de modellenkeuze is een veelgehoorde vraag welke aanwijzingen men de onderwijsgevende kan aanbieden of beter welk *didactisch houvast* men kan geven bij het onderwijzen in de cijferleergang zoals hier geschetst. Wanneer is een leerling aan het volgende niveau van schematisering toe? Wanneer moeten we een kind stimuleren tot een verdergaande verkorting en wanneer afremmen? Hoeveel oefenstof is noodzakelijk in een bepaalde fase? In hoeverre moeten we de kinderen vrijlaten in hun notatiewijzen en ook in hun oplossingswijzen? En wat te zeggen van de eindniveaus: hoeveel tijd moet geïnvesteerd worden in het bereiken van de standaard-algoritmen i.c. de meest verkorte cijferprocedures; wat is verantwoord en wat niet meer? ...

Zonder in detail op alle vragen in te gaan, volgen hier samenvattend wat didactische tips – in de voorgaande basistekst staan uitgebreidere aanwijzingen en in een aantal gevallen ligt de keuze bij het schoolteam zelf, namelijk als er sprake is van een keuze van de doelstellingen.

Welnu, van belang is dat kinderen vastheid van werken op een bepaald niveau van schematisering hebben. Stel dat bijvoorbeeld een leerling na 20 lessen een vermenigvuldiging als 32×56 uitrekent en noteert via happen van tien:

$$\begin{array}{l} 2 \times 56 = \\ 10 \times 56 = \\ 10 \times 56 = \\ 10 \times 56 = \end{array}$$

Het is dan van belang om te weten of dat kind de weg-terug naar de lange optelling nog ziet. Vervolgens of de eenheden-vermenigvuldiging direkt uitgerekend wordt, en de lange optelling evenzeer met vlot inwisselen gebeurt. Is dat het geval – er is dan sprake van inzicht en voldoende vaardigheid – dan kan de aanzet tot het direkt samenemen van de tientallen-vermenigvuldigingen gegeven worden. Men kan dit doen door het kind in gedachten de drie-tientallenoptelling te laten uitvoeren. Lukt dit, dan is het kind aan het volgende niveau van schematisering en verkorting toe – men kan dat ontdekken door het kind die handeling te laten verwoorden.

Ziehier de belangrijkste *steunpunten* van de voortgang van het leren, gesteld in de vorm van vragen:

- Is de weg terug open?
- Worden de basisvaardigheden beheerst – inwisselen, lange optelling, tafels?
- Kunnen de kinderen in gedachten een voorstelling maken van de actuele berekening en dus als het ware op papier een stap overslaan, kunnen ze hun handelen verwoorden?
- Hebben ze een vastheid van werken op het bestaande niveau, dat wil zeggen voeren ze de berekeningen betrekkelijk eenvoudig uit?
- En daarbij eventueel gevoegd: kunnen ze contextopgaven cijferend berekenen op het hoogste niveau wat ze op dat moment bereikt hebben en bovendien ook zelf van dit soort opgaven bedenken?

Kan men niet op alle vragen een bevestigend antwoord geven, dan is het niet vanzelfsprekend zo dat op een verdere verkorting aangedrongen wordt op dat moment. Maar het is natuurlijk niet uitgesloten om daartoe toch te besluiten als op een minder essentieel onderdeel nog niet aan de voorwaarden is voldaan, bijvoorbeeld op het direkt (mentaal) kunnen inwisselen.

Let er dus bij verdergaande verkorting op of:

- de ‘verlenging’ de leerling nog voor ogen staat (de weg-terug);
- de basisvaardigheden beheerst worden;
- begrip van plaatswaarde in verband met de basisoperaties aanwezig is;
- het zich kunnen voorstellen dat verdergaande verkortingen mogelijk zijn;
- de beheersingsraad op het actuele niveau voldoet c.q. verwoord kan worden;
- de relatie met toepassingen en contextproblemen gelegd kan worden.

In het algemeen heeft de leerling niet veel *oefenstof* voor het specifieke cijferen nodig – tenminste in vergelijking met het huidige of traditionele cijferonderwijs. Wel is het zaak om de basisvaardigheden apart te oefenen in korte tien-minuten-lesjes, juist ook omdat minder cijfervraagstukken gemaakt worden – in de voorgaande basistekst is herhaaldelijk en met nadruk op dit punt gewezen.

Op kwesties van het vrijlaten van notaties, eindniveaus e.d. zijn we reeds ingegaan. Dit zijn vooral ook onderdelen waarop de onderwijsgevenden zelf beslissingen moeten nemen. Onze aanbevelingen hieromtrent waren: hanteer in het begin beperkte vrijheidsgraden en stuur uiteindelijk zoveel mogelijk op de standaard-algoritmen aan in de laatste fase van de schematisering (dit kan overigens nog een belangrijke tijds-winst opleveren!).

In de leergang zoals die hier geschetst is, liggen tal van aangrijpingspunten voor *remediërend werk*. Om te beginnen iets over *plaatswaarde*, *optellen* en *afrekken*, dus wat aan het cijferend vermenigvuldigen en delen vooraf gaat.

Als basis voor de ontwikkeling van plaatswaarde kan het beste een *plaatswaardeverhaal* gebruikt worden, direkt verbonden met het gebruik van *inwisselmateriaal* als bijvoorbeeld M.A.B.; tekeningen van dit materiaal en wat later de *abacus*.

In het voorgaande werd daarvan een voorbeeld gegeven in de vorm van een sultan-verhaal. Het verdient aanbeveling om de doos-verpakking langwerpiger te nemen (dus de vorm van een staafje) en de kist plat (dus als een platte), dit om verhaal en mate-

riaal nauwkeurig op elkaar af te stemmen. Naar onze ervaring en ook uit onderzoek blijkt dat zo'n verhaal geweldig veel houvast biedt voor kinderen. Het maakt als het ware de overgang tussen verschillende niveaus van handelen eenvoudiger en het handelen met M.A.B. en op de abacus ligt erin verankerd en wordt erdoor gemotiveerd. In de basistekst zijn oefeningen aangegeven voor het inwisselen, dit met het oog op lange optellingen. Op een gegeven ogenblik is dit inderdaad uitermate belangrijk om te oefenen. Maar er moeten tal van oefeningen aan vooraf gaan waaraan we in dit boek geen aandacht hebben geschonken omdat ze betrekking hebben op optellen en aftrekken. Zoals:

kisten	dozen	goudstukken	
2	17	8	
1	13	18	+

Of:

2	17	8	
1	21	18	-

Vooraf het voorgestelde of gedachte handelen in samenhang met het plaatswaarde-verhaal moet aangemoedigd worden, hoewel aanvankelijk nog inwisselmateriaal en een abacus gehanteerd dienen te worden.

Zoals gezegd, kan deze werkwijze ook in remediërende zin gebruikt worden. Daarnaast is het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering zeer geschikt om te gebruiken bij kinderen die problemen hebben met toepassingen en ook voor de zwakke rekenaars die vrijwel niet in staat zijn om de standaard-vormen voor vermenigvuldigen en delen te leren. In het laatste geval kan dan op minder verkorte procedures als eindniveau gemikt worden.

En voor het overige zijn de genoemde aanwijzingen over basisvoorwaarden, notaties, e.d. ook in remediërend onderwijs bruikbaar.

Tenslotte een serie *etiketten* van onderwerpen en onderdelen die in samenhang met het hier gepresenteerde gezien kunnen worden, zonder verder commentaar neergezet ter nadere overdenking:

- zakrekenmachientjes en zakcomputers in verband met cijferen en toepassen;
- progressieve schematisering tegenover progressieve complicering;
- variabele eindniveaus;
- geïntegreerd cijferen;
- cijferen als een vorm van handig rekenen;
- zelf-overtuigende algoritmen;
- trucmatig cijferen en een a-wiskundige attitude;
- lange optelling, een vingerwijzing in de lucht en een strepenschema op papier;
- kruispuntenmodel en herhaald-optel-model: voor- en nadelen;
- inwisselen en lenen: de belasting van het werkgeheugen;
- bij alle markeringspunten in de leergang van vermenigvuldigen en delen steeds contextproblemen als uitgangspunt kiezen;

- elementaire contextproblemen laten fungeren als bron maar ook als toe-passingen;
- uitstellen van het cijferen, aansluiten bij tafels;
- alle aspecten van de operaties in contextproblemen betrekken;
- relatie tussen noteren, verwoorden en mentaal handelen;
- informele en formele rekenwijzen: aansluiten bij de werkwijzen van kinderen;
- beperking van niveaus en schematiseringen;
- basisvaardigheden en inzichten als noodzakelijke voorwaarden;
- progressieve schematisering en het leerboek;
- mogelijkheden voor het zelf ontwikkelen van een leergang;
- de relatie tussen een plaatswaarde-verhaal en plaatswaarde-materiaal;
- mogelijkheden voor remediërend werk;
- de toekomst van het gangbare cijferen gericht op standaard-algoritmen;
- tijdwinst...

V NADERE TOELICHTING

We bespreken hier de kritische punten van het onderhavige boek, die in twee discussiebijeenkomsten met een aantal onderwijsmensen naar voren gebracht zijn.¹ Aan de hand daarvan proberen we onze denkbeelden hier en daar nog wat nader toe te lichten of aan te scherpen. Let wel: we presenteren hier onze eigen opvattingen en geven geen verslag van de gevoerde discussies. Wel is het zo dat we vrijwel in alle gevallen ook de mening van een of meer van de geraadpleegde deskundigen vertolken.

Er wordt vastgesteld dat de *bedoeling* wellicht nog te weinig expliciet naar voren komt: het gaat hier niet alleen om het aanleren van algoritmen, maar vooral ook om de ontwikkeling van algoritmen. En in verbinding daarmee ook om hoofdrekenen, schatten en het maken van toepassingen. Om die reden dient de effectiviteit van de geschetste leergang ten opzichte van de traditionele aanpak dan ook niet te zeer beklemtoond te worden: het gaat immers om meer dan alleen het boeken van tijdswinst, hoe belangrijk dat op zich ook mag zijn.²

Thans wordt het onderwijs in de middenklassen beheerst door trucmatig werken, wat de vorming van een anti-wiskundige attitude in de hand werkt (zie ook het volgende hoofdstuk). Juist ook door het uitstellen van het algoritmiseren, en door het cijferen te beschouwen als een vorm van handig (c.q. handiger) rekenen, kan dit gevaar dat van het overheersende mechanistische rekenen uitgaat, bezworen worden. Hetgeen overigens niet wil zeggen dat de kinderen geen algoritmen zouden moeten leren. Zeker niet. Maar ze leren die algoritmen niet algoritmisch en niet los van de overige rekenactiviteiten, zoals flexibel rekenen en toepassen – dat is de kern!

Vooraf ook de door ons ondervraagde praktijkmensen beklemtonen het belang van de *basisvaardigheden* en wel speciaal kennis van de tafels.³ Aan het einde van het tweede en het begin van het derde leerjaar kunnen de tafels van vermenigvuldiging (en deling) het beste ingeoefend worden. Men moet er vooral voor zorgen dat er geen tijdsruimte tussen het leren van de tafels en de start van het cijferend vermenigvuldigen ligt. Het oefenen van de tafels moet dus aansluiten op de cijferleergang, of beter: ze moet deze leergang overlappen. Sommige kinderen worden namelijk vooral door het cijferen gemotiveerd de tafels in te slijpen. Nog nauwkeuriger gezegd: het leren van de tafels en het leren cijferen lopen naadloos in elkaar over, beide aangezet vanuit enkelvoudige toepassingsproblemen. Wacht men te lang met het aanleren van tafels (bijvoorbeeld tot het vierde leerjaar of nog later) dan lukt het bijna niet meer om ze te memoriseren, start men te vroeg dan zakt de kennis weer weg en kan men bij het cijferen opnieuw met het memoriseren beginnen.

Vrijwel iedere deskundige op het gebied van het rekenonderwijs is het erover eens dat het belang van de basisvaardigheden thans niet allereerst onderkend wordt. Als één

van de belangrijkste oorzaken van de onvoldoende beheersing van de tafels wordt het te lang uitstellen van het inoefenen beschouwd: vanaf het begin van het derde leerjaar is het rekenonderwijs in vele methoden (helaas) steeds meer een 'papieren' onderwijs, een individuele aangelegenheid.⁴ Het gevolg daarvan is dat de kansen om gemeenschappelijk te oefenen steeds kleiner worden – een voor vele kinderen funeste gang van zaken.

Kortom: start in de tweede helft van het tweede leerjaar met het memoriseren van de tafels van vermenigvuldiging en begin in het derde leerjaar met het automatiseren van de 'tafels' van getallen boven de tien, dus met het cijferen, en vervolg het cijferen met 'tafels' waarvan de vermenigvuldiger groter dan tien is. Zodoende vormt het memoriseren de grondslag voor het automatiseren en komt het cijferen goed op tafel.

Sterk geïndividualiseerde methoden leiden tot een *papieren* rekenonderwijs, waarin de onderwijsgevende voornamelijk de functie van *administrateur* vervult. Er is ook een *uitbeeldende* werkwijze waarin de onderwijsgevende voornamelijk uitlegt en de rol van *explicateur* speelt. Het hier bedoelde reken-wiskundeonderwijs verdraagt echter noch de papieren aanpak noch de beeldende werkwijze, maar vraagt veeleer een *fluwelen* onderwijshand. Deze onderscheidt zich door een grote terughoudendheid en ingetogenheid ten aanzien van het uitleggen hoe iets 'zit' of hoe iets moet. Onderwijs wordt aldus opgevat als een sociaal gebeuren, waarin ieder kind kan samenwerken met ieder ander, kennis kan nemen van verschillende werkwijzen en gelegenheid krijgt om vooruitgang te boeken. De onderwijsgevende stimuleert, lokt nieuwe werkwijzen uit, waardeert een bepaalde methode, maakt gedifferentieerd werken mogelijk, kortom doet alles wat een '*educateur*' betaamt.

Deze attitude nu kan het grote struikelblok vormen bij het in praktijk brengen van onder meer het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering. Het vraagt immers van de onderwijsgevende een andere instelling dan thans algemeen gebruikelijk is, namelijk het mogelijk maken van zelf-ontdekken, het zelf-uitvinden van algoritmen door het vermijden van instant-uitleg en het aangrijpen van kinderlijke werkwijzen voor het sturen van het onderwijs over langere termijnen.⁵ Daarbij wordt de kinderen gelegenheid gegeven over elkaars werkwijzen te praten en te reflecteren; er is in het onderwijs ruimte voor dialoog en voor samenwerking.

Nu zou dit alles niet veel meer dan holle agogische praat zijn wanneer deze ideeën niet inhoudelijk onderbouwd waren en niet verweven zijn met concrete leerstof. Dit nu is met het cijferen volgens het hier gepresenteerde concept duidelijk wel het geval.

Men doet er als onderwijsgevende of als schoolteam het beste aan, indien men deze aanpak zou willen invoeren, om te starten met het delen, omdat de wijze waarop deze algoritme aangeleerd wordt, nog het dichtst bij de traditionele methode ligt.

Nu kan men niet verhelen dat het gevaar aanwezig is dat met het onderhavige cijferprogramma een belangrijk deel van de (schijnbare?) *zekerheid* die het huidige cijferonderwijs uitstraalt, ondergraven wordt.⁶ We zetten 'schijnbare' tussen haakjes, omdat verschillende van de discussianten menen dat de huidige problemen in het cijferonderwijs verdoezeld worden en onder het tapijt van het papieren quasi-geïndividualiseerde onderwijs geveegd worden. Waardoor kan die zekerheid ondergraven

worden? Wat zijn de voordelen van de traditionele cijfermethoden in dit opzicht? Hoe kan men meer greep op het hier geschetste onderwijs krijgen?

Men zal allereerst vooraf beslissingen moeten nemen over:

- de beoogde eindvorm van de algoritmen van vermenigvuldigen en delen;
- het model dat men bij het vermenigvuldigen wil volgen;
- de voorwaarden ten aanzien van de basisvaardigheden bij de start van de leergang;
- de mate van strakheid die men wil hanteren in het onderwijs wat betreft de differentiatie in niveaus;
- de oefenstof en wel speciaal de contextproblemen.

Zoals gezegd kan men in eerste ronde een manier van werken volgen die heel dicht bij de thans gangbare ligt, dus een strak geleid onderwijstraject afleggen dat vooral door de onderwijsgevende zelf (vooraf) is uitgestippeld en uitkomt op de gebruikelijke standaardalgoritmen. Men verschaft zich dan alle zekerheden die ook het traditionele cijferonderwijs kenmerken – zekerheden dan weliswaar gezien vanuit het oogpunt van de onderwijsgevende. Deze handelwijze is op zich legitiem, maar in z'n uiterste consequentie strijdig met de uitgangspunten van de progressieve schematisering omdat daarin de progressie in de leergang primair door de kinderen zelf bepaald wordt. Hoezeer een zekere mate van strakheid in een eerste onderwijsrunde ook te verdedigen ja zelfs aan te bevelen is, toch zouden we op enkele punten een zekere versoepeling willen bepleiten, zonder overigens de behoefte aan een stevig houvast te bagatelliseren. In de twee discussiebijeenkomsten vormden de zojuist genoemde punten over einddoelstellingen, modelkeuze, voorwaarden, 'strakheid' en contextproblemen de belangrijkste gespreksthema's.

De algemene instelling van de onderwijsgevende en de kwestie van de voorwaarden zijn in het voorgaande reeds beschreven. In het volgende zullen de overige kernpunten besproken worden, te beginnen met de einddoelstellingen.

Zoals aangeduid, is ons oogmerk daarbij om duidelijke didactische oriëntatiepunten in de cijferleergang van de progressieve schematisering te plaatsen, voorzover dat na al het voorgaande nog nodig mocht zijn.

Over de *eindvormen van de algoritmen* kan men verschillend denken. En dat gebeurt dan ook. Kiest men als eindalgoritme de thans gangbare standaardalgoritmen, dan doet men dit voornamelijk omdat de ouders zulks wensen.⁷ Didactisch gezien is het echter bijzonder inefficiënt om ook de allerlaatste verkortingsstap te willen zetten, blijkens ervaring en onderzoek (zie daartoe de overzichtspublicaties van Suydam en Dessart en van Sowder, welke in het volgende hoofdstuk aangehaald worden).

Welke is die laatste stap?

Voor vermenigvuldigen is dit in geval van bijvoorbeeld 134×251 , de stap van de volgende notatiewijze:

$$\begin{array}{r} 100 \times 251 = \\ 30 \times 251 = \\ 4 \times 251 = \text{—————} + \end{array}$$

naar het standaardschema:

$$\begin{array}{r} 251 \\ 134 \times \\ \hline \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \hline \dots \\ \dots \end{array} +$$

welke niet per se nodig is, maar door vele leerlingen zeer wel gezet kan worden. Maar het is vooral de overgang van het ene schema naar het andere bij het delen dat problemen kan opleveren. We doelen hier enerzijds op de notatie van de factoren onder elkaar en anderzijds op de standaardnotatie:

$$\begin{array}{r} 28/20272 \setminus \\ \hline 19600 \quad 700 \\ 672 \\ \hline 560 \quad 20 \\ 112 \\ \hline 112 \quad 4 \\ 0 \quad 724 \end{array}$$

Deze kan omgezet worden in:

$$\begin{array}{r} 28/20272 \setminus 724 \\ \hline 196 \\ 67 \\ \hline 56 \\ 112 \\ \hline 112 \\ 0 \end{array} \quad \text{of} \quad \begin{array}{r} 724 \\ 28/20272 \setminus \\ \hline 196 \\ 67 \\ \hline 56 \\ 112 \\ \hline 112 \\ 0 \end{array}$$

Deze transformatie lijkt op papier probleemloos, maar in werkelijkheid blijken er belangrijke obstakels te zijn, die zich trouwens ook bij het vermenigvuldigen kunnen voordoen. We gaan in het bovenstaande immers uit van de veronderstelling dat kinderen de deelprodukten en deelquotiënten direkt op de aangegeven wijze (kunnen) uitvoeren. Maar dat is zeker bij het delen niet altijd het geval. Nu laat de wat minder verkorte notatiewijze toe dat kinderen die een verkeerde afschatting gemaakt hebben – bijvoorbeeld zes honderdtallen afgehaald in plaats van zeven – deze gemakkelijk kunnen herstellen door er nog eens een hap van dezelfde orde van grootte af te nemen, maar een dergelijke ‘fout’ levert bij standaardnotatie grote problemen op (kinderen schrijven dan bijvoorbeeld eerst een zes op een plaats en daar dan nog ‘n één achter!’)⁸ We kunnen het ook anders zeggen: de minder verkorte werkwijze stelt minder hoge eisen aan zowel het noteren als het (hoofd-)rekenen en tevens kunnen de onderscheiden notaties op tal van (onverwachte) onderdelen interfereren, terwijl in de tijd gezien de laatste verkortingsstap vrijwel geen leerwinst bij het uitrekenen oplevert, maar juist wel een enorme onderwijstijd vergt!

Gelet op dit alles, lijkt het aan te bevelen om als regel de één na laatste trede van de verkortingsstap als einddoel te kiezen, en de laatste standaardtrede als uitzondering voor die kinderen die goed kunnen hoofdrekenen en het niet nodig hebben tafelpro-

dukten en verdubbelingstabellen naast de opgave te plaatsen, zoals in de wat minder verkorte eindvorm gebeurt.

De vraag is echter of deze (kleine) verandering in einddoelstelling landelijk wordt aanvaard. Afgaand op de geluiden die in het tijdperk van zakrekenmachine en zak-computer steeds luider klinken en ons oproepen het cijferen helemaal af te schaffen, doet dit voorstel zelfs wellicht eerder te behoudend dan te progressief aan (zie ook het volgende hoofdstuk).

Overigens merkt een van de ervaren onderwijsmensen op, dat de delingsalgoritme vroeger vele kinderen voor onoverkomelijke hindernissen stelde, terwijl in de hier geschetste aanpak met het zojuist gestelde einddoel van de minder verkorte algoritme die problemen er in het geheel niet meer zijn – dus waar praten we eigenlijk over, aldus is haar zienswijze.⁹

Ook de keuze van een *vermenigvuldigingsmodel* is onderwerp van gesprek geweest. Algemeen uitte men waardering voor het kruispuntenmodel: het geeft visuele aangrijpingspunten, de leergang is uiteen te rafelen in tal van duidelijk geordende tussenfasen, zwakke leerlingen kunnen er goed mee overweg, er worden geen al te hoge eisen aan het rekenwerk gesteld.¹⁰ Maar men onderkende evenzeer de problemen waartoe dit model aanleiding kan geven als het gaat om toepassingen. In context-opgaven doet zich immers een vermenigvuldiging meestal niet als een 'kruising' voor, met het gevolg dat er een kloof kan ontstaan tussen de procedure die bij het 'kale' vermenigvuldigen gehanteerd wordt en de werkwijzen die de kinderen bij het oplossen van contextopgaven volgen, welke veelal op een of andere vorm van herhaald optellen neerkomen. Op deze wijze ontstaat het gevaar dat het kruispuntenmodel zich als het ware verzelfstandigt en los komt te staan van de realiteit, dus de realiteit van hun speciale werkwijzen met reële problemen.

Gechargeerd gesteld: de kinderen leren met het kruispuntenmodel wel efficiënt en probleemloos de vermenigvuldigingsprocedure, maar niet om die procedure toe te passen, en om dat laatste gaat het vooral!

Aan de andere kant wordt gesteld dat de afstand tussen het herhaalde optellen en de eindprocedure wel erg groot is. Ook zijn de tussenfasen naar de eindalgoritmen niet zo duidelijk te markeren. En dit heeft weer tot gevolg dat met name de zwakke leerlingen minder houvast hebben als ze de-weg-terug van de voorafgaande fase moeten volgen als ze vastlopen.

Dus in het herhaald-optel-model is de aansluiting met contextopgaven er wel degelijk vanwege de herhaalde optelling, maar nu wordt de cijferprocedure op zich weer bemoeilijkt!¹¹

Is er geen verbinding tussen het ene en andere model te leggen?

Dat is precies waarnaar wij gezocht hebben tijdens de ontwikkeling van de leergang volgens het herhaald-optel-model in onze eerste experimenteerronde. En we menen de oplossing gevonden te hebben, zoals uit het voorgaande mag blijken. We herhalen met steekwoorden de nieuwe accenten: laat de lange optelling al snel voorstellen door een streep-in-de-lucht-gebaar, beeldt hem vervolgens uit door het zetten van een streep-op-papier, en geef daarin door middel van kruisstrepen de happen van veeltallen (honderdtallen, tientallen, eenheden) aan, waardoor een soort kruispun-

tenmodel ontstaat. En wat ook uitermate belangrijk is: stimuleer een korte notatie-wijze van de deelprodukten waar de lange optelling als het ware achter gedacht, gestreept of geësticuleerd wordt.

Na een tiental lessen komt dan een vermenigvuldiging als 23×57 als volgt op papier:

$$10 \times 57 =$$

$$10 \times 57 =$$

$$3 \times 57 =$$

Na een twintigtal lessen verschijnt hier en daar:

$$20 \times 57 = \dots$$

$$3 \times 57 = \begin{array}{r} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} +$$

De eindfase is al in zicht!

Wat echter essentieel is, is de langzaam opgebouwde startfase waarin de kinderen de lange optelling wel degelijk helemaal uitschrijven en langzaam in de gaten krijgen dat ze de tafels (die ze ten dele beheersen) kunnen gebruiken en dat het handig is om eenvoudig tien-tafels te benutten en de lange optelling te verknippen in hapen van tien (honderd)... Steeds wordt in de beginfase van elementaire contextproblemen uitgegaan, want deze bieden de concrete ondergrond en de motivatie voor het rekenwerk.

Dit is in vogelvlucht de kern van het herhaald-optel-model in z'n definitieve versie. Hoewel men ook in deze aanpak op kleine didactische valletjes bedacht moet zijn – zoals bijvoorbeeld op het feit dat de kinderen aanvankelijk vergeten de tussenprodukten samen te voegen – lijkt een dergelijke werkwijze de voordelen van beide genoemde modellen in zich te verenigen. Dit is althans de mening van de ontwikkelaars en de praktijkmensen van de experimenteerschool.

Wat betreft het belang van het verbinden van cijferen en toepassen verwijzen we naar het volgende hoofdstuk.

Afsluitend deze opmerking: men dient bij het kiezen zowel de algoritme-ontwikkeling als de toepasbaarheid van de algoritme in de afweging te betrekken. Deze beide elementen hebben ons doen besluiten voor het herhaald-optel-model te kiezen met de zojuist genoemde visuele ondersteuning, maar deze keuze is niet voor ieder van de door ons geraadpleegde onderwijsdeskundigen zo duidelijk bepaald!

Over toepassingen gesproken: de kwestie van de *contextproblemen* vormde het belangrijkste thema van de gesprekken die wij met de onderzoekers, begeleiders en onderwijsgeevenden voerden. Van verschillende zijden wijst men erop dat de plaats en de functie van toepassingsproblemen in de leergang, zoals die in het boek geschetst wordt, niet duidelijk genoeg uit de verf komt.¹² We kunnen dus niet anders dan deze kwestie hier nog eens wat nader onder de loep nemen, dit als vervolg op hetgeen daarover in het tweede hoofdstuk van 'Cijferend vermenigvuldigen en delen (1)' reeds geschreven werd.

Welnu, globaal gesproken kunnen we drie soorten opgaven onderscheiden die voor de cijferleergang van vermenigvuldigen en delen van belang zijn.

Categorie I : kale cijfersommen.

Categorie II : enkelvoudige contextopgaven.

Categorie III: samengestelde contextopgaven.

De opgaven van categorie I van de soort 32×85 worden gebruikt voor het inoefenen van reeds geleerde cijferprocedures, maar dienen uitdrukkelijk niet als uitgangspunt voor de ontwikkeling van nieuwe procedures voor nieuwe deelgevallen, omdat ze de kinderen daartoe te weinig inhoudelijk houvast kunnen bieden.

De opgaven van categorie II kenmerken zich door hun eenvoud: ze betreffen één enkele bewerking, de leerling kan zich de probleemstelling makkelijk voorstellen, en er is weinig 'ruis' van de context.

Het gaat hier om opgaven van het type:

- in een doosje zitten 36 bonbons; hoeveel bonbons zitten er in 12 van die doosjes?
- in een restaurant worden 178 gasten verwacht, aan iedere tafel kunnen 12 personen zitten, hoeveel tafels zijn er nodig?

Welnu dit soort problemen wordt zowel voor het aanleren van nieuwe (verkorte) procedures gebruikt als voor het inoefenen van reeds geleerde werkwijzen. Stel bijvoorbeeld dat men in een bepaalde les tot de methode van het afsplitsen van een tiental wil komen, dan kan men daarvoor het bovengenoemde bonbon-probleem nemen. In ieder geval gaat men dan niet uit van het kale probleem van 12×36 . Ook wordt dit soort enkelvoudige contextopgaven voor het inoefenen van zo'n tiental-afsplijting gebruikt, naast de opgaven van categorie I.

De opgaven van categorie III zijn minder elementair dan die van categorie II: het gaat daarbij niet om één bewerking maar om een probleemstelling van meerdere operaties, de probleemstelling is bijgevolg ook minder simpel, ze ligt vaak ingebed in een ruimere tekst plus plaatjes, is soms verbonden met andere begrippen en bevat derhalve heel wat 'ruis' rond de rekenopgave.

Enkele voorbeelden:

- Het grootste aantal afleveringen van een tv-serie dat ooit verkocht is, is dat van 'Coronation Street', namelijk 1144 delen van ieder 25 minuten. Hoeveel dagen, uren en minuten zou men naar die serie kunnen kijken als die ononderbroken uitgezonden zou worden?
- John Wayne stierf 11 juni 1979. Hij liet 14 miljoen gulden na. Hij heeft 7 kinderen en is met 4 vrouwen getrouwd geweest. Zijn kinderen krijgen ieder f 7.500,- voor ieder jaar dat zij ouder zijn dan 21 jaar (op John Wayne's sterfdag). Zijn 4 vrouwen mogen de rest eerlijk delen. John Wayne's kinderen zijn respectievelijk op de volgende data geboren:
 - 7- 4-1940
 - 26- 3-1938
 - 30- 9-1935
 - 30- 8-1932
 - 6- 3-1930
 - 6-10-1927
 - 16-10-1926Hoeveel krijgt ieder kind?
Hoeveel krijgt iedere vrouw?
- 'In de tijd die U nodig heeft om deze zin te lezen, verdwijnt er 32.000 vierkante

meter bos van de aardbodem. Elke seconde verliezen we een bosoppervlak zo groot als een voetbalveld.' (Volkskrant, 19-6-1982). Klopt dit ongeveer?

- Het grootste reuzenrad van de wereld is ruim 60 meter hoog (Wenen). Het bevat 16 eerste-klas-schuitjes en 24 tweede-klas-schuitjes. In een eerste-klas-schuitje kunnen 28 mensen en in een tweede-klas-schuitje 40 mensen. Hoeveel mensen kunnen in één reuzen-zwaai-rit mee?
- Bamboe groeit snel. Sommige soorten bereiken een hoogte van 30 meter in ongeveer drie maanden. Hoe groot is de (gemiddelde) groeisnelheid per dag?
- Jan zegt: vandaag word ik 1 miljard seconden oud. Hoeveel jaar is Jan (ongeveer)?

Dit soort problemen wordt niet precies in de leergang van het cijferen geplaatst, maar wel in de buurt ervan. Ze hebben dus geen functie voor de ontwikkeling van de algoritme, maar behoren tot het domein van de toepassingen – schatten, afronden, 'globaal' rekenen kunnen daarbij soms een belangrijke rol spelen.

Voor de ontwikkeling en inoefening van de algoritmen zijn dus in eerste instantie de problemen behorend tot categorie II het meest van belang.

Nu zal het duidelijk zijn dat er geen exacte afgrenzing van de categorieën II en III te maken is.

Neem het volgende voorbeeld (naar aanleiding van Gravemeijer, 1982)¹³:

- Feyenoord moet binnenkort een belangrijke uitwedstrijd spelen tegen PSV. Het bestuur heeft er van alles aan gedaan om zoveel mogelijk supporters mee te krijgen. Er gaan 1751 personen mee. In een bus gaan 46 personen. De huur bedraagt 400 gulden per bus. Voor ieder tiental bussen krijgt men totaal f 100,- korting. Hoeveel moet men voor de bussen betalen?

De vraag is of dit probleem in de opbouwfase van de leergang van het cijferen past. Is dit een enkelvoudig contextprobleem uit categorie II? In ieder geval staat het daar dicht bij. Maar als men als onderwijsgevende vooral de gebruikswaarde ervan voor het leren van de cijferprocedure op het oog heeft, zitten er enkele elementen in de context die op dit moment verstoring kunnen werken. (Bijvoorbeeld: moet je voor drie passagiers een extra bus laten aanrukken, er kunnen immers nog wat supporters bij komen of weggaan, etc.). Wil men zich dus vooral op het cijferen concentreren, dan is de keuze van dit probleem op die plaats in de leergang wellicht onverstandig en zou men de probleemstelling wellicht wat kunnen gladstrijken. Gaat het echter om inoefenen en toepassen van een eerder geleerde procedure, dan is het juist een uitstekende opgave. Temeer omdat de informele werkwijzen die de kinderen bij het oplossen gebruiken – veelal een vorm van op-vermenigvuldigen – dicht tegen de delingsprocedure aanleunen.

Samenvattend stellen we vast dat de enkelvoudige opgaven van categorie II het hart van de cijferleergang vormen, omdat ze zowel als bron voor de algoritme-ontwikkeling gebruikt kunnen worden en tevens als toepassingen fungeren. Kale rekensommen hebben een functie bij de inoefening, en samengestelde contextopgaven bij de toepassing, zij het dat in het laatste geval ook vaak niet-cijfermatige werkwijzen gekozen worden, die echter sterk verwant zijn met de cijferprocedures, omdat ze berusten op 'additieve' methoden.

Met het voorgaande is getracht duidelijk te maken dat het dus bij het leren cijferen niet zonder meer om aansprekende contextproblemen gaat, maar dat aan contextproblemen op die plaats in de leergang ook bepaalde eisen van helderheid, eenvoud, 'niet-afleidendheid', passende getalgroottes en dergelijke gesteld moeten worden. In het algemeen zijn de aloude tekstopgaven, die een tamelijk eenvoudige structuur hebben en in een vrij zwakke context geplaatst zijn, zeer geschikt, mits men ze via een uitbeelding of verhaal wat dichterbij de kinderen brengt. Het Feyenoord-supportersprobleem in z'n meest eenvoudige vorm is daarvan een goed voorbeeld.

Het is onnodig, lijkt ons, om van dit soort opgaven voorbeelden te geven: vrijwel ieder leerboek bevat er wel wat en zo niet dan kan men ze eenvoudig zelf bedenken. Enkele trefwoorden als aanduidingen van opgaven uit categorie II:

- afbeelding van voorwerpen met prijskaartjes, zoveel van die, zoveel van die en zoveel van die, hoeveel kost dat;
- vierkantjes in rechthoekpatroon tellen, blokken in een blokkenberg, boeken, flessen in een doos, stoelen in een zaal, oppervlakte, inhoud;
- grote hoeveelheden: seconden per jaar, knikkers in een glazen pot, letters in een boek, druppels in een liter, graankorrels in een zak, tijd per jaar nodig voor eten, slapen, e.d.;
- verhoudingen: auto's van 1 : 12, hoeveel benzine voor zoveel km, snelheden van rijden, lezen, groeien, schaduwgrafieken, gewicht, geldkoers;
- combinaties maken: keuze van gerechten, samenstel van kleuren;
- verbinding met 'gemiddelde': sport, toeschouwers, snelheid;

Men kan deze opgaven los van elkaar aanbieden, maar soms is het ook mogelijk ze in een thematisch verband te plaatsen.

Als voorbeeld van een thema nemen we 'het boek' en geven met trefwoorden enkele probleem-aanduidingen:

- tellen van het totale aantal letters, het totale aantal woorden, strategieën daarbij;
- tellen van het aantal letters e , n , ...
- als alle regels achter elkaar geplakt zouden worden, welke lengte zou het 'boek' dan krijgen;
- idem met de pagina's achter elkaar, hoe lang de strook;
- stel ik heb een leessnelheid van ongeveer 20 pagina's per uur, hoe lang doe ik dan over dit boek;
- hoe meten we de dikte van een pagina;
- dit boek heeft een 16e druk, hoeveel exemplaren zijn er van verkocht;
- kan ik deze boeken kopen met zoveel boekenbonnen van die prijs;
- we gaan zelf een schoolkrant (boek) maken, hoeveel pakken papier moeten we dan kopen, gegeven het aantal leerlingen en de dikte van de krant;
- hoeveel kost het kopiëren van die pagina tot en met die pagina, als een copie 15 cent kost;
- hoe lang zou het duren om dit boek over te schrijven, over te tikken;
- het officiële uurrecord typen is 9316 woorden, hoe lang zou deze typist(e) erover doen;
- de snelste printer ter wereld kan 30.000 regels van 120 lettertekens per minuut weergeven, hoe lang zou die erover doen.

Let wel, we zeggen niet dat het per se thematisch moet, zeker niet, maar wel dat het soms zo kan.

Naast de genoemde onderwerpen als

- grote hoeveelheden,
- verhoudingen,
- combinatorische problemen,
- oppervlakte, inhoud,
- gemiddelde,

waarmee contextproblemen verbonden kunnen worden, is het ook dienstig om de twaalf modellen die in de Wiskobaspublicatie nr 10 genoemd worden in het oog te houden, omdat deze aangrijpingspunten voor problemen bieden (we doelen op het boomdiagram, de tweezijdige getallenlijn, het rechthoeksmodel, sprongen op de getallenlijn e.d.). Men is er dan van verzekerd dat zoveel mogelijk aspecten van de operaties vermenigvuldigen en delen verzorgd worden. Tevens maakt deze verscheidenheid van verschijningsvormen het mogelijk een grote variatie in de verzameling enkelvoudige contextopgaven aan te brengen.

Hou dus zowel de categorieën, de onderwerpen, de al dan niet thematische inleidingen en de aspecten (modellen) in het oog, alsmede de verbinding met flexibel rekenen en schatten, en laat de kinderen zelf ook problemen bedenken – aldus luidt ons algemene advies, waarbij we vooral ook op het belang van enkelvoudige contextopgaven wijzen voor de opbouw van specifiek cijferen. Snoei, vergeleken met de thans gangbare cijferaanpak, drastisch in de opgaven van categorie I.

Dan nog iets over de *generaliseerbaarheid van de werkwijze* die bij de progressieve schematisering gevolgd wordt.¹⁴ Een van de discussianten interesseerde zich met name voor deze algemene probleemstelling. We kunnen er hier slechts dit van zeggen: we proberen met deze leergang de kloof te overbruggen die er bestaat tussen enerzijds de kinderlijke werkwijzen bij toepassingsproblemen en anderzijds de volwassen cijferprocedures die ze moeten leren. (Dat hier een kloof is, blijkt uit onderzoeksgegevens die in het volgende hoofdstuk vermeld staan). Die schakeling nu is een algemene didactische opgave: brengt men die niet tot stand dan ontstaan er als het ware twee gescheiden systemen van werken – zoals blijkt. Daarbij ligt uiteraard het aangrijpingspunt bij de ‘natuurlijke’ kinderlijke werkwijze, maar het eindpunt bij de ‘volwassen’ aanpak.

Nu kan men zich afvragen hoe ‘natuurlijk’ die aanpak van de kinderen wel is. Speelt het onderwijs hier een rol? In het algemeen natuurlijk wel, maar onafhankelijk van het onderwijs is het zo dat optellen (aftrekken) het primaat heeft boven het vermenigvuldigen (delen) – een welhaast ‘logische’ noodzaak. Bijgevolg is de gesignaleerde additieve aanpak van vermenigvuldigings- en delingsproblemen aanvankelijk heel natuurlijk. Goede leerlingen herkennen al snel het vermenigvuldigen en delen als zelfstandige operaties. Maar voor een derde tot de helft van de kinderen uit de middenklassen is dat beslist niet het geval: deze groep leert weliswaar de vermenigvuldigings- en delingsalgoritmen, maar werkt in toepassingssituaties ‘primitief’ i.c. additief. Naar onze mening is dit uiteenlopen van de ‘algoritmische’ en de ‘informele’ aanpak bij enkelvoudige contextproblemen slechts te vermijden indien vanaf de start van

de ontwikkeling van de algoritmen de verbinding met (eenvoudige) contextproblemen behouden blijft. De noodzaak van dat schakelen is naar onze mening het enig generaliseerbare in de onderhavige didactiek van het leren cijferen volgens progressieve schematisering, die zoals uit het voorgaande blijkt, wezenlijk verschilt van de gangbare traditionele en moderne werkwijzen.¹⁵

We besluiten met een lang citaat van Freudenthal waarin de *mogelijkheden en moeilijkheden* van de progressieve schematisering nog eens *in vogelvlucht* beschouwd worden.¹⁶

‘Het cijferen wordt volgens Wiskobas onderwezen in een proces van progressief schematiseren: in psychologisch begrijpelijke stapjes geleerd:

- vanuit het (met behulp van de abacus) inzichtelijk inwisselen naar het schema van ‘ $8 + 5 = 13$; 3 opschrijven 1 onthouden enz.’,
- vanuit het inzichtelijk vermenigvuldigen (als herhaald optellen of in het kruispuntenmodel) naar het schema van cijfersgewijs vermenigvuldigen, 0 aanhangen, optellen enz.),
- vanuit het inzichtelijk delen als herhaald aftrekken naar de welbekende staartdeling toe.

Ik sprak van stapjes: bij elk nieuw stapje wordt een verworven inzicht geschematiseerd. Dit is dan het progressief schematiseren. Een fraaie theorie, voor didactische lekkerbekken om van te smullen. Maar bij die theorie hoort veel meer dan de systematiek van die stapjes. Ik bedoel de wetenschap, dat sommige leerlingen van drie stapjes één maken, dat sommige leerlingen andere routes kiezen, dat stapjes over drempels leiden waar je kunt struikelen, dat progressieve schematisering geen eindterm – voor allen geldig – betekent, dat progressieve schematisering een gelegenheid is – hoort te zijn – voor de onderwijzer om leerprocessen te observeren en te sturen, ook om leerlingen te beletten stapjes van inzicht naar schema te simuleren (d.w.z. onbegrepen uit te voeren).

Progressieve schematisering, aveerchts toegepast, is: de hele klas of groep in het gelid op te laten rukken, al die stapjes van inzicht naar schema door allen op hetzelfde moment te laten voltrekken. Dat is wat je krijgt, althans kunt krijgen, als je progressieve schematisering in een boekje neerlegt: elke leerling de progressie volgens het systeem, ‘volgens het boekje’, te doen doorlopen.

Het onderzoek naar progressieve schematisatie is bij het IOWO nog in volle gang. Men begint de individuele leerprocessen onder de knie te krijgen. Maar daar kun je lang niet mee volstaan. Leerprocessen voltrekken zich veelal kollektief, althans pseudo-kollektief: de knappe leerlingen geven door een goed voorstel of antwoord van hun inzicht blijk, andere worden meegesleept en de rest simuleert het te snappen. Hoe kun je dit voorkomen? In klasseverband vermoedelijk niet. Zou het door middel van werken in groepjes wél lukken? Is bij samenwerken in groepjes de kans niet nóg groter dat de knappe leerling aan de minder knappe het ‘foefje uitlegt’? Inderdaad, en om dit te voorkomen is er heel wat meer nodig dan een weldoortimmerd systeem van progressieve schematisatie. Je moet aansturen op de ontwikkeling van wiskundige attitudes van leerlingen (en onderwijzers).’

VI OVERZICHT ONDERZOEK CIJFEREN

In 'Cijferend vermenigvuldigen en delen (1)' (Treffers, 1979) zijn we kort en globaal beschrijvend op de verschillende aanpakken van het cijferonderwijs ingegaan. Die beschrijving daarvan zal nu wat genuanceerd worden. We onderscheiden vier richtingen en gaan na wat onderzoek over de effectiviteit van de onderscheiden werkwijzen heeft uitgewezen. Kan onomstotelijk de slechtste en|de|beste methode van het leren cijferen aangewezen worden op grond van onderzoeksresultaten?

Dit is de vraag die we hier onder meer trachten te beantwoorden.

1 VIER RICHTINGEN

We onderscheiden binnen het cijferonderwijs:

- het traditionele cijferen op mechanistische grondslag;
- het wiskundige cijferen op inzichtelijke basis;
- het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering;
- de nieuwe hoofdrekenbeweging.

De kenmerken van deze richtingen zijn reeds op verschillende plaatsen nader uiteengezet. Om die reden kunnen we hier met een korte samenvatting volstaan.

Welnu, het traditionele cijferonderwijs is geordend naar toenemende complexiteit van de opgaven c.q. de grootte van de getallen, grofweg gesteld. Per geval wordt zo direct mogelijk naar de eindvorm van de standaard-algoritme toegewerkt. Dat gebeurt 'blind' of na een korte verklarende introductie op inzichtelijke basis. Het cijferprogramma is geïsoleerd van hoofdrekenen en toepassingen. Er wordt vrijwel geen gebruik gemaakt van positie-materiaal.

Het moderne cijferen van het wiskunde-onderwijs op de basisschool daarentegen benut wel veelvuldig positiematerialen en schema's. Daarmee wordt beoogd een inzichtelijke grondslag van de cijferprocedures te leggen. Voor wat de toenemende complicering betreft, komt de aanpak in grote lijnen overeen met de traditionele werkwijze.

De kenmerken van het geïntegreerde cijferonderwijs volgens progressieve schematisering zijn na het voorgaande in dit boek genoegzaam bekend. Ook zijn we eerder op de verschillen tussen het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering met de voornoemde werkwijzen ingegaan – complicering tegenover schematisering en geïsoleerd cijferen versus geïntegreerd cijferen, dat zijn de meest in het oog springende verschillen.

De nieuwe hoofdrekenbeweging tenslotte bant het leren van de cijferprocedures in standaardvorm volledig uit en stelt daar flexibel rekenen of hoofdrekenen voor in de plaats. In bepaalde opzichten komt deze stroming overeen met het cijferen volgens

progressieve schematisering waarin het leren cijferen eveneens als een vorm van steeds handiger rekenen wordt gezien. Schatten, gebruik maken van eigenschappen, afronden en compenseren op basis van bepaalde rekenvaardigheden en gememori-seerde kennis worden hier benadrukt.

Door alle tijden heen hebben de rekenmethoden en later de rekenwiskundemetho-den hun cijferonderwijs een eigen gezicht proberen te geven; een aanzien dat niet altijd precies in een van de vier genoemde hokjes past. En ook binnen de genoemde richtingen zijn er tal van nuanceringen op te merken.

Zo zijn Bouman en Van Zelm (1918) in hun rekenmethode weliswaar te kwalificeren als traditioneel in de zojuist genoemde zin, maar ze leggen toch betrekkelijk grote nadruk op inzicht. Diels en Nauta (1936) daarentegen beklemtonen veel meer het hoofdrekenen, terwijl Lugtmeijer en Boers (1954) in 'Naar aanleg en tempo' vrijwel uitsluitend mechanistisch te werk gaan. Alle drie traditionele cijfermethoden, maar wel met aanzienlijke onderlinge verschillen!

Bij de moderne cijfermethoden op inzichtelijke grondslag is het al niet anders. 'Ele-mentair wiskundig rekenen' (Van 't Hof e.a., 1970) werkt op inzichtelijke grondslag maar hanteert daarbij geen concreet positiemateriaal. 'Hoiy Rekenen' (Beek, e.a., 1974) gebruikt daarentegen wel M.A.B.-materiaal en leert de kinderen in verschil-lende talstelsels te rekenen. En 'Getal in beeld' (Brinkman e.a., 1972) doet dit laatste ook maar heeft daarnaast ruimte voor schatten en handig rekenen en het onder-scheidt zich door een verfijnde didactische aanpak voor het cijferen. Alle drie moder-ne cijfermethoden, maar wel met aanzienlijke onderlinge verschillen!

Ook het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering is nogal divers. En dan te bedenken dat deze aanpak nog betrekkelijk nieuw is. Althans nieuw voor zover het concreet uitgewerkt is voor het onderwijs van alledag. Want reeds Kühnel (1925/5) en Wertheimer (1945) propageerden deze werkwijze voor het cijferonder-wijs in algemene bewoordingen. De eersten die het cijferen volgens progressieve schematisering in Nederland concreet gestalte gaven, waren Wanders en Bohnke in hun 'Boeiend rekenen', althans zij gaven een aanzet daartoe. Maar als men deze aan-pak met die van Wiskobas vergelijkt (zie ook De Jong, 1977), zal men getroffen wor-den door de grote verschillen. En wel in die zin dat Wiskobas veel meer nadruk legt op de relatie cijferen-handig rekenen-toepassen en op de verschillende fasen die bij de schematisering doorlopen worden. Bij Hutton (1977) vindt men die nadruk op toe-passingen evenzeer, terwijl Teule-Sensacq en Vinrich (1982) vooral het schatten en hoofdrekenen bij het leren cijferen beklemtonen. Dus ook hier is sprake van verschil-lende nuances. Zonder onbescheiden te zijn moet trouwens vastgesteld worden dat de Wiskobasgroep als eerste en enige het algemene concept van het geïntegreerde cij-feren volgens progressieve schematisering gedetailleerd en gefundeerd heeft uitge-werkt.

De nieuwe hoofdrekenbeweging die afschaffing van de standaardalgoritmen bepleit, heeft geen duidelijk uitgewerkt programma, zodat hier nog geen interne verschillen zijn aan te wijzen. In Nederland onderschrijft men, voorzover wij hebben kunnen nagaan, de uitgangspunten van deze beweging niet in z'n uiterste consequentie. Wel

hoort men hier en daar geluiden die voorzichtig op een zekere versoepeling van de einddoelen van het cijferen wijzen.

Hoewel er dus sprake is van vier globale richtingen, dienen we duidelijk onder ogen te zien dat zo'n indeling zeer globaal is. Met deze grove windwijzer in onze bagage zullen we ons op het onderzoek betreffende het cijferen richten.

2 ONDERZOEK TRADITIONEEL CIJFEREN OP MECHANISTISCHE GRONDSLAG

Is mechanistisch of 'blind' cijferonderwijs minder efficiënt dan cijferen op inzichtelijke basis? Voor we op de vraag ingaan eerst dit: efficiency hoort uiteraard niet het enige en doorslaggevende criterium te zijn. Dit blijkt bijvoorbeeld uit de kwestie van de attitudevorming. Wat te denken als kinderen in de middenklassen vrijwel uitsluitend op het leren van onbegrepen algoritmen en 'trucs' getraind worden? Op dit punt heeft Erlwanger (1973, 1975) baanbrekend onderzoek verricht. Zijn bevindingen spreken duidelijke taal: kinderen aldus 'getraind' hebben een volstrekt vertekende opvatting van wiskunde en een geheel op-trucs-gerichte attitude ontwikkeld welke een belemmering vormt voor het vervolg-onderwijs op inzichtelijke basis. Dit op zich zou al voldoende reden kunnen zijn om het 'blinde' cijferen af te zweren.

Maar ook uit het oogpunt van efficiency zijn de resultaten van het traditionele cijferonderwijs op mechanistische grondslag bepaald niet indrukwekkend, zoals uit het klassieke onderzoek van Brownell blijkt. (Brownell, 1947; Brownell en Moser, 1949). Brownell 'kruiste' twee cijfermodellen van aftrekken met een inzichtelijke en een mechanistische aanpak, zodat vier verschillende werkwijzen ontstonden die onderling werden vergeleken. Het ene aftrekmodel was de gangbare werkwijze van het lenen en het andere de methode van het gelijke-optellen welke thans vrijwel niet meer voorkomt. (Neem bijvoorbeeld $43 - 18$: ' $3 - 8$ ' gaat niet, tel bij de 3 eenheden 10 eenheden op en voeg, om dit goed te maken, bij de aftrekker een tiental bij het ene tiental dat er al staat; we krijgen dan $4(13) - 2(8)$ dat is $2(5)$). Nu bleek in alle gevallen de inzichtelijke aanpak superieur aan de 'blinde' methodiek om welk cijfermodel het in het ene of andere geval ging. Ook in andere onderzoeken wordt de superioriteit van de inzichtelijke aanpak bevestigd (Wheeler, 1972; Punnett, 1974). Dit geldt temeer als men ook de retentie (het vasthouden) van het geleerde in het onderzoek betreft (zie voor een overzicht Suydam en Dessart, 1976, 1980).

Zijn deze resultaten rationeel te verklaren? Dat blijkt inderdaad het geval. De 'blinde' mechanistische werkwijze voert immers noodzakelijkerwijs naar een leergang met talloze deelgevallen die min of meer van elkaar losstaan en derhalve geval voor geval als relatief zelfstandige algoritmen ingeslepen moeten worden. Zo vormt de nul een apart probleem, maar twee nullen ook, drie-cijfergetallen geven na behandeling van twee-cijfergetallen nieuwe moeilijkheden, lange optellingen met deeltallen boven de twintig moeten onderscheiden worden van optellingen met twee termen en ga zo maar door. Dit alles vraagt uiteraard nogal wat oefening en kost bijgevolg veel tijd, temeer, zoals gezegd, omdat ook de retentie door de blinde aanpak bij de toch tamelijk complexe algoritmen voor vermenigvuldigen en delen bemoeilijkt wordt.

Ook dat laatste is begrijpelijk. De kinderen kunnen immers niet terugvallen op een concreter niveau van uitvoering van de cijferhandelingen. Ze moeten zich de voorschriftenserie van de standaard-algoritmen volledig herinneren en lukt dat niet dan houdt alles op. Het is vergelijkbaar met het zich te binnen brengen van bijvoorbeeld de telregels van het bowlingspel, waarvan de voorschriften tamelijk arbitrair zijn en niet op een onderliggend systeem van begrippen rusten. Er valt dus niet veel aan 'in te zien'. Bij het cijferen is dit echter wel het geval. Maar voor de kinderen die in het onderwijs onvoldoende gelegenheid gehad hebben zich concreet op de begripmatige basis van de algoritmen te oriënteren, zouden cijferregels wel eens even willekeurig kunnen lijken als de telregels van het bowlingspel.

Een belangrijk bijkomend verschijnsel is overigens nog gelegen in het feit dat de kinderen bij een blinde aanpak op zelfstandige wijze (verkeerde) procedureregels uitvinden, die systematisch toegepast worden. Men heeft de laatste jaren nogal wat diagnostisch onderzoek naar deze zogenaamde 'bugs' verricht (zie bijvoorbeeld Cox, 1975). Een 'bug' met de kracht van een breinbreker vindt men bijvoorbeeld in 'Cijferend vermenigvuldigen en delen (1)' in het geval van Rudolf (pag. 165). Men benut de laatste tijd het opsporen van dergelijke systematisch gemaakte fouten als didactisch middel voor zowel de leerling (Barclay, 1980) als de onderwijsgevende (De Corte en Verschaffel, 1982), daarbij de zak- of microcomputer inschakelend. Er is tegenwoordig een tamelijk volledig zicht op mogelijke fouten bij het traditionele cijferen (zie vooral Radatz, 1980a, 1980b). Maar als we na de diagnose tot de remedie willen overgaan, zullen we in een wat andere richting dan die van het traditionele cijferen op mechanistische grondslag moeten zoeken – zoveel is uit het voorgaande wel duidelijk geworden.

Met dit vast te stellen, is echter niet alles over de waarde van het traditionele cijferonderwijs gezegd. We hebben geconstateerd dat niet het totale traditionele cijferonderwijs mechanistisch van aard is: niet alle rekenmethoden gaan immers te werk als 'Naar aanleg en tempo'. Maar de meeste traditionele rekenmethoden hebben toch wel een sterk mechanistische inslag en bijgevolg zijn de eerder genoemde feiten daarop wel min of meer van toepassing – niet alles maar wel veel van het zojuist gestelde slaat dus op de traditionele methoden terug.

3 ONDERZOEK WISKUNDIG CIJFEREN OP INZICHTELIJKE BASIS

In het algemeen gesproken is kenmerkend voor het wiskundig cijferen dat de cijferhandelingen volgens de didactische drieslag 'materiële handeling – plaatje – symbool' plaatsvindt: eerst legt de leerling bijvoorbeeld de termen van een optelling neer met M.A.B.-materiaal, vervolgens wordt de uitkomst in een M.A.B.-schema met positiestrepen genoteerd, om dan met de symbolische standaard-notatiewijze te eindigen. Nu zit het inzichtelijke van deze optelprocedure in het juiste begrip van het positie-systeem en de inwissel- en leenhandelingen die daarop berusten: een leerling die inzicht verworven heeft, is in staat de procedurehandelingen aan de hand van al dan niet voorgestructureerd positiemateriaal te demonstreren. Omgekeerd verschaft zulk

materiaal de basis voor een juiste oriëntering op de kern van de cijferhandelingen – aldus luiden de globale uitgangspunten van de didactische drieslag, of juist: de vooronderstellingen. (Dit streven naar inzicht wordt overigens nog eens onderstreept door het rekenen in verschillende talstelsels).

Nu heeft men echter niet kunnen aantonen dat de inzichtelijke werkwijze volgens dit algemene model van de ‘action-image-symbol sequence of mental activity’ de beste zou zijn. De onderzoeksresultaten zijn namelijk nogal strijdig (vgl. Ekman, 1967; Kieren, 1971; Moody, Abell en Bausell, 1971; Friedman, 1978; Shumway, 1980; Khoury en Behr, 1981).

Evenmin is een positief effect van het rekenen binnen verschillende talstelsels vastgesteld voor wat het inzicht in de cijferprocedures aangaat (McCormick, 1965; Scrivens, 1968).

Talstelsels worden trouwens door onderwijsgeevenden in de V.S. niet acceptabel geacht voor het basisonderwijs (Denmark en Kepner, 1980).

Onderzoek naar het effect van ‘multiple embodiments’ levert gemengde resultaten op (Sowder, 1980).

En hetzelfde geldt voor het oordeel van onderwijsgeevenden over het gebruik van (positie-)materiaal, waaronder M.A.B. (Fuson, 1975; Warkentin, 1975; Barnett en Eastman, 1978).

In overzichtpublicaties als van Ashlock (1979), Suydam en Dessart (1980) en Sowder (1980) treft men dan ook herhaaldelijk zinsneden aan als ‘the findings are mixed depending in part of the dependent variable’.

Wat zegt dit alles over de aard en de kwaliteit van het wiskundig cijferen? En ook: wat zegt dit alles over onderzoek van het wiskundig cijferen?

Eerst een enkele opmerking over de laatste vraag. Het onderzoek waaraan tot dusver gerefereerd werd, geeft in het algemeen geen aanwijzingen over inhoud, opzet en kwaliteit van het onderwijs waarop het stoelt. De probleemstelling is algemeen van aard en het onderzoeksobject bepaalt zich tot de oppervlaktestructuur van het leren en onderwijzen.

Neem bijvoorbeeld de research naar de effecten van ‘manipulative activities in mathematics instruction’ (Kieren, 1971, pag. 228). Daarin wordt de nadruk eenzijdig op het niveau van het mentale handelen gericht. Andere parameters als volledigheid en mate van uitgebreidheid van de cijferhandelingen worden volledig uit het oog verloren. Voorts vindt men in de rapportage niets over de verbanden tussen de niveaus van handelen, de functie van de taal en het voorstellen, de nagestreefde verkortingen en het reflecteren op het eigen handelen terug. (Zie ook de algemene kritiek op dit soort onderzoek van Lester en Kerr, 1979; Kilpatrick, 1981).

Nogmaals: wat zegt dit onderzoek dan over het wiskundig cijferen of in het genoemde voorbeeld, over het effect van het manipuleren met (positie-) materiaal?

Friedman komt na inventarisatie van het geheel van onderzoeksresultaten op dit terrein tot de volgende slotsom:

‘On the basis of recent research, it would appear that after the first grade, where the manipulative strategy has been effective in several situations, an instructional strategy that gives preeminence to the use of manipulative materials is unwarranted. In

view of the claims made for a manipulative approach to instruction in journal articles and at professional conventions, I believe that we, the research community, have an obligation to inform the practitioners about this latest Pied Piper. At the same time we should urge the inclusion of the manipulative strategy in an instructional repertoire.' (Friedman, 1978, pag. 79–80).

Engelhardt zegt het zo:

'Although the action – image – symbol stages for concept attainment and intellectual development appear to be ordered, lack of confirming research and theorizing of Wittrock suggest that this conclusion may be accepted cautiously.' (Engelhardt, 1979, pag. 27).

Al met al toch een wat schrale oogst, en bepaald geen vertrouwenwekkende aanbeveling voor het onderwijs: we hebben geen positief effect van de didactische drieslag kunnen vaststellen, maar doe het toch maar zo!

Naar onze mening biedt de didactische drieslag een nogal grove karakteristiek van het wiskundig cijferen. De superioriteit ervan tegenover andere inzichtelijke benaderingswijzen, die niet zozeer het primaat bij het materiële handelen leggen, is niet vastgesteld en kan in deze algemene vorm wellicht ook niet vastgesteld worden. Sterker nog: het is op voorhand helemaal niet duidelijk of de genoemde driedeling zonder meer juist is. Vooral in kwalitatief beschrijvend onderzoek dat zich mede op observeren van onderwijsleerprocessen richt, is gebleken dat het verband tussen het handelen op de verschillende niveaus van 'action-image-symbol' veel problematischer is dan men aanvankelijk aannam en dat het werken met symbolen niet per se moeilijker hoeft te zijn dan met concreet materiaal of met plaatjes. (Bednarz en Janvier, 1982). In ieder geval leggen de kinderen de verbandingen tussen de handelingen op verschillende niveau vaak niet vanzelfsprekend (Steinberg en Anderson, 1973, Fitzgerald, 1976, Davis en McKnight, 1980). Hetzelfde kan gezegd worden van de relaties tussen samenhangende begrippen en operaties, zoals plaatswaarde, optellen-aftrekken, vermenigvuldigen-delen. Ook hier moet het verband expliciet worden gelegd ter bevordering van een vlotte leergang (Davis en McKnight, 1980; Resnick en Ford, 1981).

Al met al is duidelijk dat het cijferonderwijs op tal van onderdelen kan variëren, zoals ten aanzien van de oplossingsmethoden van de kinderen, de functie voor het zich in gedachten voorstellen van uit te voeren handelingen, het belang van het verwoorden ervan, de wijze waarop de complicering van de opgaven geordend is, de betekenis van het schatten en hoofdrekenen, de verbinding tussen de niveaus van handelen, het verband tussen verwante begrippen en operaties, het belang van de basisvaardigheden, de mate waarin geoefend wordt, de plaats van kale cijfersommen en die van tekst- en contextopgaven c.q. toepassingen.

We zullen nu eerst het eerstgenoemde punt over de verscheidenheid in oplossingsmethoden en het laatstgenoemde over toepassingen wat uitgebreider beschouwen.

Uit tal van onderzoeksverslagen kan men zicht krijgen op de verschillende oplos-

singsmethoden die kinderen hanteren. We nemen als voorbeeld de manier van cijferend aftrekken die vooral ook voor de staartdeling van belang is.

Op welke wijze lossen kinderen een aftrekking op genoteerd als '312 – 189' onder elkaar?

Ten eerste kunnen ze daarbij positiemateriaal als M.A.B. of een abacus gebruiken. Ten tweede kan de wijze van noteren verschillen: al dan niet gebruik maken van een positieschema met positiestrepen.

Ten derde kunnen verscheidene standaard-notatiewijzen gebruikt worden: bij het lenen kunnen cijfers op verschillende posities als leenplaatsen fungeren en al dan niet doorgestreept en al of niet veranderd worden, en de geleende 10 kan al dan niet genoteerd worden.

Ten vierde is gebleken dat de wijzen van oplossen, ook bij dezelfde notaties, soms sterk uiteenlopen:

- de gangbare methode van lenen en aftrekken bij '312 – 189' onder elkaar bestaat uit het lenen van een tiental, het uitrekenen van '12 – 9', vervolgens het lenen van een honderdtal, het uitrekenen van '10 – 8' en tenslotte '2 – 1';
- een variant daarvan is het uitrekenen van '12 – 9' e.d. door op te tellen, dus het volgen van de winkelmethode van het bijtellen;
- dan zijn er kinderen die bij het lenen van een tiental eerst de aftrekking van de geleende 10 uitvoeren, dus '10 – 9' in ons voorbeeld en daar dan de resterende 2 bijtellen, een opmerkelijke aanpak die mede vanuit het materiële handelen met het M.A.B.-materiaal begrepen kan worden;
- een variatie op deze werkwijze is het rekenen met tekorten $2 - 9 = \overline{7}$ (lees 7 te kort) en met dit gegeven gaan sommige kinderen een tiental lenen, waaruit volgt $10 + \overline{7} = 3$ enz.;
- tenslotte kan deze strategie ook gevolgd worden door pas aan het einde van de berekening de tekorten aan te vullen dus $2 - 9 = \overline{7}$; $1 - 8 = \overline{7}$ en dan $3 - 1 = 2$; en dan $2\overline{7}\overline{7}$ verder uitrekenen als '200 – 70 – 7'.

De grote verscheidenheid aan oplossingswijzen kan uiteraard slechts plaatsvinden indien men de kinderen niet een bepaalde werkwijze dwingend oplegt (Davis, 1967; Knights, 1973; Davies, 1978; Carnihan, 1979; Bennedbek, 1981). Het spreekt vanzelf dat ook de mate van strakheid van structurering van de aan te leren oplossingswijzen sterk kan variëren. De invloed daarvan op het leerproces is groot, ja zelfs bepalend, zoals vooral uit het onderzoek van Bennedbek (1981) blijkt.

Tot zover de kwestie van de differentiatie in oplossingswijzen, nu nog enkele gegevens over de relatie cijferen–toepassen.

Het is bekend dat kinderen de cijferprocedures slechts in beperkte mate gebruiken bij het oplossen van toepassingsproblemen. Onderzoek in Groot-Brittannië heeft uitgewezen dat ongeveer de helft van de twaalfjarigen geen optimaal gebruik maakt van de cijferprocedures voor vermenigvuldigen en delen, eenvoudigweg omdat die kinderen de betreffende operaties niet altijd goed in de 'aangeklede' opgaven kunnen identificeren (Foxmann, 1980; Hart, 1981).

Niet zozeer het lezen of rekenen op zich blijkt problemen te geven, alswel het 'vertalen' van de contextopgaven naar het rekenen toe. We mogen gevoeglijk aannemen,

dat de toepasbaarheid van de cijferprocedures in het derde, vierde en vijfde leerjaar voor vele kinderen problematisch is – ook in Nederland. Wat in ieder geval vaststaat is, dat hier een belangrijk knelpunt ligt dat in nauwe samenhang met het cijferen beschouwd dient te worden. Vergnaud stelt terecht:

'To establish the link between ordinary arithmetical situations and the relevant mathematical concepts is probably the most challenging question in mathematical education.'

'Solving a problem by choosing the right calculation is a very strong criterion for the acquisition of concepts.' (Vergnaud, 1980, pag. 263).

Waarom dienen immers cijferprocedures als ze niet toegepast (kunnen) worden? Deze vraag klemmt temeer, als we hem in het licht van de ontwikkelingen op het gebied van zakrekenmachines en zakcomputers bezien: het gebruik van deze rekendoosjes wordt bij het niet kunnen identificeren van de geëigende operaties voor een aanzienlijk deel van de kinderen evenzeer beperkt. En nu spreken we nog niet eens over complexe onderwerpen als kommagetallen en verhoudingen, waar de beheersing van enkelvoudige toepassingen aan het einde van de basisschool ver beneden de 50% ligt (Hughes, 1979; Hart, 1981).

Het lijkt evident dat de vooronderstelling als zouden kinderen in de onderbouw voldoende begrip van de basisoperaties verworven hebben, niet juist is. Het is zelfs zo dat een goede notie van bewerkingen met kleine getallen niet impliceert dat er ook begrip ten aanzien van operaties met grotere getallen is. Kortom, de vooronderstelling dat kinderen van de midden- en bovenbouw de geleerde cijferprocedures 'automatisch' kunnen en zullen toepassen op de daartoe geëigende problemen, is niet conform de onderzoeksbevindingen. En daaruit volgt dat de reken-wiskundemethoden die vrijwel geen aandacht aan enkelvoudige toepassingen besteden, in ieder geval een uiterst wankel didactische grondslag voor het cijferonderwijs verschaffen.

Er zal dus meer aandacht aan toepassingen besteed moeten worden. Maar hoe?

Suydam en Dessart komen op basis van een overzichtsanalyse van dit terrein tot de volgende aanbevelingen:

'You can help to apply computational skills by:

- 1. giving them many opportunities to solve problems;*
- 2. providing problems at varying levels of difficulty;*
- 3. having them write mathematical sentences for problems;*
- 4. having them designate the process to be used in solving a problem;*
- 5. having them note missing or extra data.'* (Suydam en Dessart, 1976, pag. 29).

Bekijken we de studies waarop hun aanbevelingen stoelen, dan blijkt de toepasbaarheid slechts vergelijkend onderzoek te zijn in relatie met de verschillende modellen die voor een bepaalde cijferbewerking gebruikt kunnen worden, zoals bijvoorbeeld de methode van het herhaald aftrekken en de standaard-delingsmethode (Van Engen en Gibb, 1956; Scott, 1963).

Om duidelijk te maken welke problemen hier liggen, nemen we als voorbeeld een onderzoek van Kratzer en Willoughby (1973) over het delen volgens de standaard-

methode ('distributive algorithm') en die van het herhaalde optellen ('subtractive algorithm') in relatie tot toepassingen.

De onderzoekers verbinden de laatstgenoemde methode met de verhoudingsdeling (groeperen) en lichten hem als volgt toe:

$$\begin{array}{r} 3/42 \\ \underline{30} \quad 10 \\ 12 \\ \underline{12} \quad 4 \\ 0 \quad 14 \end{array}$$

'How many groups of three can be made from 42? Possible answer: 10 groups of three with a remainder of 12. How many more groups of three can be made from the remainder (12)? Possible answer: 4, with no remainder.' (Kratzer en Willoughby, 1973, pag. 198).

De standaardmethode wordt aan de verdelingsdeling gekoppeld:

$$\begin{array}{r} 14 \\ 3/42 \\ \underline{30} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

'If the objects are to be divided into three equal-sized groups, how many whole sets of 10 can be distributed to each group? (one). How many sets of 10 does this use? (three). How many sets of 10 are left? (one). Can any more sets of 10 be distributed evenly to the three groups? No, but the 10 can be broken down into ones and the resulting 12 ones can be distributed so that each group receives 4 ones, and there is no remainder.' (Kratzer en Willoughby, 1973, pag. 198).

Bij beide methoden wordt gebruik gemaakt van positie-materiaal in de vorm van (bundels) stokken.

Het onderzoek levert op dat de standaard-methode beter voldoet dan de herhaald-aftrek-methode als het om het toepassen van het geleerde op relatief nieuwe cijfersommen gaat: 'this suggests that the partitioning group better understood the division process.' (Kratzer en Willoughby, 1973, pag. 203).

Hoe wordt nu dit resultaat naar de onderwijspraktijk 'vertaald'? In het bekende werk 'Classroom ideas from research on computational skills' van Suydam en Dessart (1976) staat daarover het volgende:

'Kratzer en Willoughby (1973) reported no significant differences in the achievement of fourth grades taught the distributive or the subtractive algorithm. Those using the distributive approach however, displayed a better understanding of the process.' (Suydam en Dessart, 1976, pag. 12).

Is dit een correcte weergave van de uitkomst van het gemaakte onderzoek?

Wat de onderzoekers doen, is het vergelijken van twee delingsalgoritmen:

- 1 de herhaald-aftrek-algoritme,
 - 2 de standaard-algoritme (distributieve methode),
- gekoppeld aan twee soorten delingen:

- a de verhoudingsdeling,
- b de verdelingsdeling,

en wel de combinatie 1a met de combinatie 2b, waarbij dan 2b over het geheel genomen als beste uit de bus komt. Maar het zal duidelijk zijn dat dit nog niets over de verschillende algoritme-vormen op zich zegt. Want men kan uiteraard ook zeer wel de verdelingsdeling aan het herhaalde aftrekken binden en de verhoudingsdeling aan de standaard-methode. Het is zelfs mogelijk om beide delingen aan één algoritme te koppelen. Kortom, men kan talloze vergelijkingscombinaties maken voor een en dezelfde algoritme-vorm. Hoe de uitslagen daarvan ook mogen zijn, zeker is dat ze niet zonder meer iets van de algoritme-vorm op zich, dus losgemaakt van de delings-vorm van de reële uitgangsproblemen, zeggen: algoritme-modellen en contextproblemen dienen in hun onderlinge samenhang gezien te worden.

Er rijzen nu tal van vragen:

Heeft het binden van een algoritme aan één soort deling meer effect dan aan twee soorten delingen (verhoudingsdeling en verdelingsdeling)? Welk effect heeft een en ander op zowel het leren cijferen als het oplossen van enkelvoudige contextopgaven? Leent iedere algoritme-vorm zich even goed voor een koppeling aan (bepaalde soorten) contextopgaven? In hoeverre maakt het verschil als kinderen een of andere algoritme-vorm leren met bijvoorbeeld de notie van het verdelen, en dat algoritme dan op problemen moeten toepassen waarin een verhoudingsdeling vervat ligt? En verdergaand: moet vanuit contextproblemen wel zo direct op de standaard-algoritmen aangestuurd worden, of is het niet veel beter (dat wil zeggen: ook efficiënter) om zo'n algoritme geleidelijk aan te ontwikkelen als een vorm van steeds handiger rekenen, zoals dat bijvoorbeeld met het herhaald-aftrek-model zeer wel mogelijk is – beter zowel voor het cijferen als het toepassen?

Met de laatste vraag raken we de problematiek in z'n kern. Zowel inzicht, toepassingen als standaard-vormen en leerstofordeningen worden daarin betrokken. Maar laten we ons voorlopig nog even tot de toepassingen op zich bepalen. Welnu, de genoemde vragen worden vrijwel nooit in het onderzoek over cijferen betrokken, ook niet in dat van Kratzer en Willoughby. Toepassen wordt los van het cijferen gezien: het staat er naast, is er op z'n best mee geassocieerd via een behoorlijk aantal toepassingsopgaven. Verhogen van de toepasbaarheid houdt in dit standaard-beeld van het cijferen niet veel meer in dan een verhoging van het aantal (enkelvoudige) toepassingen.

Nu bevat met name de belangwekkende studie van Hart e.a. (1981) tal van gegevens waaruit men kan afleiden, dat de meer-toepassingen-didactiek niet in alle opzichten voldoet, zeker niet voor zwakke rekenaars. Het blijkt dat kinderen die problemen met enkelvoudige toepassingen hebben, globaal gesteld één en dezelfde werkwijze volgen. Ze brengen namelijk alle basisoperaties die in enkelvoudige contextproblemen vervat liggen tot één operatie terug, te weten die van het optellen. Aftrekken wordt aldus optellen, vermenigvuldigen herhaald optellen en delen idem dito. Even-

tueel wordt naast optellen ook aftrekken als basisoperatie gebruikt voor het delen. Een en ander leidt bij vermenigvuldigen en delen tot een grote verscheidenheid aan informele oplossingsstrategieën, zoals bijvoorbeeld verdubbelen, happen van tien nemen, splitsingen aanbrengen en nog veel meer.

Welnu, met het laatste is de zwakke stee in de louter meer-toepassingen-didactiek van het traditionele en wiskundige cijferen aangegeven: de kinderen hanteren namelijk de beoogde werkwijze van het cijferend oplossen niet, dus is er eigenlijk geen sprake van het bedoelde toepassen. Aangezien ze echter in de loop van de leergangen al doende leren dat ze geacht worden een of andere bewerking te 'kiezen', gaan ze die bewerking en de bijbehorende algoritme raden. Maar daarmee verdwijnen ook de informele werkwijzen, die op zichzelf weliswaar wat lang, doch wel correct zijn. In ieder geval worden de informele 'spontane' methoden op deze manier onderdrukt en overgeslagen, terwijl ze juist de natuurlijke toegang tot verkorte werkwijzen vormen. En daarmee wordt onbedoeld een gok-maar-strategie en een op algoritmen gerichte attitude gestimuleerd, met het gevolg dat 'the child is in fact operating in mathematics within a system of his own which belongs to a different universe of discourse to that of mathematics...' (Booth, 1981, pag. 39-40). En dat is precies wat in verschillende eerdergenoemde onderzoeken is vastgesteld.

Tenslotte nog enkele resterende kwesties:

- onvoldoende beheersing van de basisvaardigheden is, naast het verkeerd uitvoeren van de procedurehandelingen, een belangrijke foutenbron bij het cijferen; memoriseren van de basisfeiten (voornamelijk tafels) verdient aparte aandacht (Cox, 1975; Cahill, Ryan e.a., 1980);
- het zich 'in gedachten' voorstellen van de materieel uitgevoerde cijferhandelingen moet sterk gestimuleerd worden teneinde de voortgang van het cijferen te waarborgen (Borghouts-Van Erp, 1978; Resnick en Ford, 1981); een plaatswaardeverhaal als dat van de sultan (zie hoofdstuk 1) kan daarbij een belangrijke steunfunctie vervullen (Veldhuis, 1981);
- de actieve betrokkenheid van de kinderen, uitgelokt door betekenisvolle probleemstellingen, kan sterk bijdragen tot het zich realiseren en voorstellen van de cijferhandelingen (Hutton, 1977; Teule-Sensacq en Vinrich, 1982).

Het laatstgenoemde punt markeert tevens de overgang naar het geïntegreerde cijferen. We zullen het in de volgende paragraaf dan ook wat uitgebreider bespreken en daarbij de progressieve schematisering betrekken.

Maar voor we daartoe overgaan vatten we het voorgaande samen.

Veel onderzoek heeft zich vooral bepaald tot de oppervlakte-structuur van het cijferen i.c. tot de didactische drieslag, ofwel de niveaus van handelen. De opbrengst ervan is, zoals te verwachten viel, zeer mager en vrijwel nietszeggend voor zowel onderwijspraktijk als theorie-vorming. We zeggen 'vrijwel' omdat de uitkomst wel opleverde dat de verbinding tussen de niveaus van handelen nog niet is opgehelderd, maar dat het voorgestelde handelen in ieder geval belangrijk is. Daarnaast leverde onderzoek 'in de diepte' op, dat de procedurehandelingen met allerlei nuance-verschillen door de kinderen uitgevoerd worden (dit overigens in sterke afhankelijkheid van de

aard van de onderwijsaanpak), dat de toepasbaarheid van de algoritmen op context-problemen zeer problematisch is, en dat onvoldoende beheersing van de basisfeiten een belangrijke foutenbron vormt naast de specifieke procedurehandelingen.

Over de kwestie van de wenselijkheid van het nagestreefde doel dat kinderen de gebruikte standaardalgoritmen in hun meest verkorte vorm dienen te leren, is overigens geen onderzoek gedaan. Dit is een opmerkelijk feit. Want juist in het technologisch tijdperk zou de vraag of de enorme tijdsinvestering in het leren cijferen nog wel loont, een hoofdvraag moeten zijn. Wellicht is de oorzaak van deze onderzoeksleemte toe te schrijven aan het feit dat men slechts twee mogelijkheden ziet, namelijk cijferen of hoofdrekenen. Er is echter een derde weg, te weten die van het cijferen volgens progressieve schematisering, welke zoals bekend niet per se op de korte standaardalgoritmen hoeft uit te komen, maar ook minder verkorte eindpunten kent.

4 ONDERZOEK GEINTEGREERD CIJFEREN VOLGENS PROGRESSIEVE SCHEMATISERING

Hutton (1977) heeft een beschrijving van een onderzoek over cijferend vermenigvuldigen gegeven dat sterke overeenkomst vertoont met hetgeen wij in het eerste hoofdstuk van dit boek presenteerden.

Het startprobleem dat Hutton gebruikte, luidt:

‘Hier staan 24 doosjes en in ieder doosje zitten 42 snoepjes, hoeveel snoepjes zijn dat bij elkaar?’

Evenals in ons geval neemt zij een grote verscheidenheid van oplossingsstrategieën waar:

- lange optelling van 24 termen van 42;
- lange optelling van 12 termen van 84;
- lange optelling van 6 termen van 168;
- uitsplitsing in 10×42 , 10×42 en 4×42 ;
- uitsplitsing in 12×42 en 12×42 ;
- en talloze belangwekkende fouten.

De verschillende oplossingsmethoden en fouten worden in de groep besproken en vervolgens krijgen de kinderen nieuwe soortgelijke opgaven en ‘kale’ sommen. Hutton neemt waar dat de kinderen spoedig op de methode van het afsplitsen van tientallen en eenheden overgaan. Daarna ontdekken ze samen met de onderwijsgevende verkortingen en komen aldus bij de standaardwerkwijze terecht. Aan het einde van het schooljaar waren de kinderen in het algemeen in staat cijferend te vermenigvuldigen (gemiddelde score 7,7 bij tien vraagstukken). In de beschrijving is niet duidelijk hoeveel lessen totaal besteed werden en evenmin welke opgaven de eindtoets bevatte.

Hutton eindigt haar beschrijving van het onderwijspraktisch gerichte, informele onderzoek als volgt:

‘Of course, working in a classroom with all the day-to-day-hazards of absences

means that the conditions are not adequate for a truly scientific experiment. To make a fair assessment of the method one would have to have a parallel group working on more traditional lines. Such conditions do not normally obtain in our schools. No more is claimed than has already been stated, and this is what happened.' (Hutton, 1977, pag. 11).

In feite stelt ze dus dat geïntegreerd cijferen volgens haar conceptie van progressieve schematisering ‘werkt’: de einddoelstellingen worden bereikt en het onderzoeksgerichte onderwijs komt overeen met haar visie en uitgangspunten. Maar ze merkt ook op dat vanuit wetenschappelijk standpunt bezien nog veel te onderzoeken valt.

Teule-Sensacq en Vinrich (1982) hebben een soortgelijk onderzoek voor het delen verricht – zij het dat hun werkwijze wat formeler is dan die van Hutton. Zij stelden vast dat kinderen bij delingsproblemen de methode van herhaald op-tellen en herhaald af-trekken gebruiken naast en in combinatie met die van het ‘op-vermenigvuldigen’. Er bleken daarbij twee elementen te zijn die de werkwijze van het vermenigvuldigen bevorderden, te weten de grootte van de getallen en de aard van de contextproblemen.

Een probleem als ‘*In een restaurant worden 178 genodigden verwacht; er kunnen 12 personen aan een tafel; hoeveel tafels zijn er nodig?*’, lokt bij het merendeel van de kinderen een additieve werkwijze uit, terwijl een opgave als ‘*Van een strook van 16 vierkantjes breed, willen we een rechthoek knippen die zo dicht mogelijk bij de grootte van 460 vierkantjes komt; hoe lang wordt die rechthoek?*’, door de meeste kinderen multiplicatief opgelost wordt, en wel des te sterker naarmate de getallen groter zijn. Dit gegeven nu grijpen de onderzoekers aan om een methode van afschatten en verifiëren te introduceren die wat later voor de ontwikkeling van de staartdeling benut kan worden in de zin zoals ook wij dit deden, maar dan uitgaande van het genoemde rechthoeksmodel.

Het notatieschema dat tenslotte ontwikkeld wordt, is ongeveer het volgende:

deler	deeltal	
42	5725	
	5725	
$42 \times 100 = 4200$	<u>4200</u>	100
	1525	
$42 \times 20 = 840$	<u>840</u>	20
	685	
$42 \times 10 = 420$	<u>420</u>	10
	265	
$42 \times 6 = 252$	<u>252</u>	6
	13	136
	rest	quotiënt

Voor de kinderen daartoe kwamen, kregen ze echter eerst schattingsopgaven als:

‘Ik heb 2500 bonbons te verdelen over 23 kinderen. Schat eens hoeveel ieder kind krijgt. Omcirkel het getal dat er naar jouw schatting het dichtst bijkomt: 15 – 75 – 95 – 108 – 305. Ga na of het klopt!’

De geschetste werkwijze bleek zeer succesvol.

The observed differences reveal that:

- *The repetition of drills of the same nature during the first learning sequence does not result in important variations as far as success and solution procedures are concerned.*
- *On the other hand, during the second learning sequence all pupils use a more economical procedure with high level success rate.'* (Teule-Sensacq en Vinrich, 1982, pag. 178).

In dit onderzoek komen evenals in dat van Hutton de kenmerken van het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering duidelijk tot uiting:

- contextproblemen dienen als bron voor het algoritmiseringsproces dat wil zeggen dat de gestelde probleemsituatie een concrete oriënteringsbasis aan de kinderen verschaft; ze kunnen zich daardoor iets concreets bij de cijferhandelingen voorstellen; het probleem verleent betekenis aan het mentale handelen;
- naast het voordeel voor het cijferen levert het uitgaan van contextproblemen op dat ook de toepassingsmogelijkheden van die algoritmen vergroot worden, juist omdat cijferen en toepassen vanaf het begin af aan met elkaar verbonden zijn (zie voor de problematiek van gescheidenheid van cijferen en toepassen ook Slesnick, 1982).
- er wordt aangesloten bij de informele methoden die de kinderen bij het oplossen van de contextopgaven hanteren, de verschillende methoden worden in de groep besproken en de handigste werkwijzen gestimuleerd; kortom, de weg naar de betreffende algoritmen wordt op een natuurlijke wijze ingeslagen; de algoritmen ontwikkelen zich doordat ze volgens de kinderen overtuigend de beste werkwijzen blijken te zijn;
- de aard van de contextopgaven en de grootte van de getallen worden zorgvuldig afgewogen en in de leergang geplaatst, ze dienen te voorzien in zowel verdere ontwikkeling van de algoritmen als inoefening van het geleerde;
- de verbinding tussen cijferen en handig rekenen kan expliciet aan de orde gesteld worden via het schatten, waarbij de noodzakelijke basisvaardigheden voortdurend in het oog gehouden moeten worden;
- in de loop van de leergang vindt een verdere schematisering en verkorting van de berekening en de notatiewijzen plaats; er wordt steeds beter geschat en handiger gerekend, vandaar dat hier het adagium 'cijferen als een vorm van handig rekenen' past; (Zie ook Capps, 1962 en Mac-Donald, 1977);
- vanaf het begin worden relatief complexe problemen aangeboden welke door de kinderen op verschillende niveaus opgelost worden: onderwijs volgens het motto 'eenheid in aanbieder, differentiatie in oplossingsniveaus';
- de eindniveaus kunnen, al naar gelang de beoogde einddoelen, variëren.

Speciaal voor het delen is het genoemde onderzoek van Teule-Sensacq en Vinrich uit didactisch oogpunt gezien van belang doordat het de aandacht vestigt op het gewicht van het schatten en verifiëren en op de kracht van het rechthoeksmodel. (Dat model

zit ook in de door ons geschetste aanpak van de verdeelbakjes i.c. de verdelingsdeling, en het kan ook voor de verhoudingsdeling dienst doen).

Vanuit onderzoeksoogpunt is vooral interessant dat er een aanzet tot vergelijkend onderzoek is waarin zowel van kwalificerende, beschrijvende, kwantificerende en metende methoden gebruik gemaakt wordt.

Tenslotte geven deze onderzoekers evenzeer een aanzet tot theorievorming voor het cijferonderwijs – een kwestie waarop we hier nu niet verder ingaan.

In Nederland is ook onderzoek gedaan naar het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering volgens het concept van Wiskobas. We zeiden het hiervoor al: uitsluitend in Nederland is een volledig programma voor dit cijferen ontwikkeld voor alle basisoperaties, zodat hier het geheel van voorwaarden vervuld is om diepgaand onderzoek op dit terrein te verrichten. Dit is echter nog slechts op bescheiden schaal gebeurd en dan nog speciaal ten aanzien van het cijferonderdeel en niet zozeer met betrekking tot het toepassen, al moet gezegd dat de belangstelling voor dergelijk onderzoek thans sterk toeneemt.

We bespreken allereerst een onderzoek van Veldhuis (1981) over cijferend optellen en aftrekken volgens het principe van progressieve schematisering, gegeven in het kader van remediërend werk met vier kinderen in het buitengewoon onderwijs. De kinderen kregen bij de start van de vijftien zittingen, die ieder een half tot een uur duurden, een soort positieverhaal (Jan de Zeerover) als dat van de sultan aangeboden (zie hoofdstuk 1 van dit boek). Vervolgens losten ze optellingen en aftrekkingen op met behulp van M.A.B.-materiaal, de abacus en het positieschema met strepen, daarbij geholpen door de onderzoeker. Van één van de vier sessies wordt een volledig verslag gegeven en van de drie andere een samenvattend overzicht.

We geven enkele conclusies:

- *het systeem van progressieve schematisering in een algoritmiseringsproces van een deelleergang cijferend optellen en aftrekken leidt tot het actief betrokken zijn van de bij het onderzoek betrokken kinderen bij dat algoritmiseringsproces; een betrokkenheid welke onder meer bleek uit de verhoging van de leermotivatatie en het voorkomen van momenten van reflectie en anticipatie;*
- *het inzicht in de algoritmen met betrekking tot de uit te voeren operaties bleek duidelijk uit de systematiek in de aanpak van de kinderen en uit de manier waarop ze aan hun klasseleerkracht en medeleerlingen duidelijk konden maken hoe en waarom de algoritmen zo door hen werden gehanteerd;*
- *de aanpak van de progressieve schematisering bleek succesvol te zijn voor remediërend werk ten behoeve van de bij het onderzoek betrokken kinderen, die in het op hun scholen vigerende cijferonderwijs (volgens het systeem van progressieve complicering en met remediërend werk, waarbij van dit systeem gebruik wordt gemaakt) waren vastgelopen;*
- *de zinvolle context van waaruit de progressieve schematisering wordt gestart (zeg: het sultanverhaal) bleek een referentiekader c.q. oriënteringsbasis te zijn voor de in de algoritmisering toe te passen inwisselhandelingen. (Veldhuis, 1981, pag. 125).*

Vink (1978) deed onderzoek naar het cijferend vermenigvuldigen volgens het kruispuntenmodel.

Hij komt daarin tot de volgende slotsom:

- 1. De invloed tengevolge van het werken gedurende bijna drie maanden met de algoritmeleergang vermenigvuldigen in het derde leerjaar is, in vergelijking met het werken volgens traditionele rekenmethoden, zeer positief ten aanzien van de toename van het leerresultaat op het onderdeel cijferend vermenigvuldigen en positief ten aanzien van de toename van het leerresultaat op de onderdelen optellen (aftrekken) onder elkaar met grotere getallen, eenvoudig vermenigvuldigen en delen met of zonder rest, vermenigvuldigen met factoren tot en met tien, optellen en aftrekken tot en met honderd.*
- 2. Het oordeel van de geheroriënteerde leerkracht over het hanteren van de algoritmeleergang vermenigvuldigen binnen de grenzen van de eigen schoolpraktijk, gedurende bijna drie maanden in het derde leerjaar, is positief ten aanzien van de inhoud, de werkwijze en de tijdsbesteding; veranderingen op het leerlingen- en leerkrachtgedrag worden in het algemeen niet geconstateerd, met uitzondering ten aanzien van de gemotiveerdheid, het begrip en de differentiaties in prestaties.*

Vrolijk (1981) onderzocht de algoritmeleergang delen in het derde leerjaar ten aanzien van deze hoofdbewerking, hierbij lettend op het inzicht waarmee deelopgaven worden opgelost.

De opzet van het vergelijkend onderzoek was die volgens het model proefgroepcontrolegroep, uitgaande van een voortoets, vervolgens met leergangen werkend gedurende achttien lessen respectievelijk volgens het globale ontwerp van Wiskobas en via de methode 'Nieuw Rekenen', en eindigend met een natoets.

We citeren Vrolijk:

'De resultaten van de voortoets leiden tot de conclusie dat proefgroep en controlegroep als te vergelijken groepen konden worden beschouwd. Uit de resultaten van de natoets bleek, dat de proefgroep significant hoger scoorde dan de controlegroep. Dit resultaat zou te danken kunnen zijn aan het gebruik van het programma Cijferend Delen. De slotconclusie van het onderzoek is dan ook, dat de invloed van het werken van het programma Cijferend Delen – in vergelijking met het werken volgens traditionele rekenmethoden – positief is wat betreft de toename van leerresultaat op het onderdeel Cijferend Delen. Wat betreft het inzicht in delen blijkt dat goed presterende leerlingen, die gewerkt hebben met het programma, meer vrucht hebben van het programma, meer vrucht hebben in delen dan goed presterende leerlingen, die niet met het programma gewerkt hebben.' (Vrolijk, 1981, pag. 188–189).

Nu dient aan de laatste zinsnede toegevoegd te worden dat de kinderen uit de proefgroep ook een grotere kans hadden om tot de goed presterende leerlingen te behoren en een kleinere om in de zwak presterende categorie te geraken.

Overigens valt op alle genoemde onderzoeken nogal wat af te dingen voorzover ze tot generaliserende uitspraken komen. Het is hier echter niet de plaats voor een kritische analyse – daarvoor ontbreekt eenvoudig de ruimte. Men kan zich trouwens in z'n

algemeenheid de kritieke punten wel voorstellen: de vergelijkbaarheid van de onderwijsomstandigheden, de onderwijsgevende als variabele, de specifieke inrichting van de leergang, de interpretatie en uitwerking van de conceptie van de progressieve schematisering, de grootte van de onderzoeksgroep, de subjectiviteit van de kwalificerende beschrijving, de specifieke rol van de keuze van de contextopgaven, – het zijn alle kritieke onderzoeksvariabelen. Ieder van de onderzoekers is zich dit alles overigens ook wel bewust en pleit derhalve voor voortgang en uitbreiding van het onderzoek.

Wij sluiten ons daarbij gaarne aan, maar stellen voorlopig vast dat de resultaten van geïntegreerd cijferen volgens progressieve schematisering hoogst opmerkelijk lijken voor wat betreft de effectiviteit van het onderwijs gerekend naar de resultaten van zowel vaardigheid als inzicht in het cijferend rekenen en de toepassingen ervan.

Er is echter een 'maar': de uitvoering is niet eenvoudig. En wel om twee redenen: ten eerste berust het onderwijs op het observeren van leerprocessen – Hutton zegt het zo: *'The close watch that the teacher must keep on what the children are doing, especially with the more backward children'* – en ten tweede kan de onderwijsgevende de opgaven niet zomaar uit een boekje halen, maar zij of hij dient bij voortduring de opgaven-batterij opnieuw in te stellen en aan te passen, al naar gelang de voortgang van het leerproces. Voorwaar geen eenvoudige opgave! Maar dit even terzijde – we komen straks nog kort op deze kwestie terug.

5 ONDERZOEK HOOFDREKENBEWEGING

De titel van deze paragraaf kan in twee opzichten misverstanden geven. In de eerste plaats gaat het niet primair om onderzoek over hoofdrekenen op zich, maar om de hoofdrekenbeweging die het cijferen wil uitbannen. (Zie voor het hoofdrekenen en het leren van de basisvaardigheden: Suydam en Reijs, 1978; Shumway, 1980; Ter Heege, 1981; Cook en Dossey, 1982). Ten tweede dient de term onderzoek hier zeer ruim opgevat te worden: het gaat de hoofdrekenbeweging vooral ook om doelstellingen, argumentaties, uitgangspunten voor onderwijs, waardoor de artikelen nogal wat discursief van karakter zijn en veeleer een aansporing tot onderzoek genoemd moeten worden dan een feitelijke uitvoering ervan zijn.

Er is altijd een hoofdrekenbeweging werkzaam geweest die terugdringing van het cijferen bepleit heeft. De *nieuwe* hoofdrekenbeweging echter heeft vooral impulsen gekregen door de ontwikkelingen op het terrein van automatisering en micro-electronica. Waarom zouden we zoveel tijd en energie aan het aanleren van de cijferprocedures besteden als kinderen de beschikking hebben over zakrekenmachientjes en zakcomputers? Leg daarom meer nadruk op flexibel rekenen, schatten, het ontwikkelen van betrekkelijk korte rekenwijzen voor vermenigvuldigen en delen, en vooral ook op het leren toepassen van de basisbewerkingen op contextproblemen, zodat de kinderen die machientjes ook werkelijk in de voorkomende gevallen kunnen gebruiken – aldus luiden in het kort de uitgangspunten van de niet-cijferrichting.

Zonder overigens direct de doelstellingen van de hoofdrekenbeweging te onder-

schrijven, is er een duidelijke tendens naar een toenemende waardering van het belang van hoofdrekenen en schatten waar te nemen, en een afname voor het cijferend rekenen met grote getallen. Het invloedrijke N.C.T.M.-werk 'An agenda for action. Recommendations for School Mathematics of the 1980's' (USA, 1980) zegt daarover onder meer:

'Insisting that students become highly facile in paper and pencil computations such as 3841×937 or $72509 : 29,3$ is time-consuming and costly. For most students, much of a full year of instruction in mathematics is spent on the division of whole numbers – a massive investment with increasingly limited productive return. A small fraction of that time is spent on the skills of problem analysis and interpretation, which enable students to identify and set up the computations needed. For most complex problems, using the calculator for rapid and accurate computation makes a far greater contribution to functional competence in daily life.' (pag. 6).

Plunkett (1979) gaat wat verder dan deze terughoudende formulering ten aanzien van cijferen. Hij stelt dat standaardalgoritmen uit de tijd zijn en bepleit hoofdrekenen, het gebruik van rekenmachientjes bij contextproblemen en de ontwikkeling van niet-standaardalgoritmen door de kinderen zelf. Als voorbeeld van dat laatste noemt hij voor vermenigvuldigen de tabelmethode:

	x	20	3
–	10	200	30
–	8	160	24
			414

Hij concludeert dat de zakrekenmachientjes een zegen voor het onderwijs kunnen zijn. Ze ontslaan ons namelijk van de plicht om iedere burger de complexe standaardcijfermethoden te leren. Nu kunnen we rekenmethoden gaan gebruiken die beter aansluiten bij de kinderen en meer gericht zijn op de doelstellingen van de gebruiker. Plunkett illustreert het onderscheid tussen handig rekenen en mechanistisch cijferen onder meer met de volgende samenspraken:

'Me: 'What's 213 take away 188?'
Ray (adult): '25.'
Me: 'How d'you do it?'
Ray: 'Well it's 12 up to 200 and 13's 25.'
Me: 'What's 213 take away 188?'
Student (19): Silence.
Me: 'What happened when I asked?'
Student: 'Panic.'
Me: 'Did you see anything in your mind...?'
Student: 'Yes. I saw 213 written down and then 188 underneath, and then a line...'. Ask people how they calculate, and indeed observe yourself at work, and you will soon find a fascinating variety of idiosyncratic methods.' (Plunkett, 1979, pag. 2).

Plunkett voert op dit punt zelf geen onderzoek uit. Zijn lezenswaardige artikel bepaalt zich tot een scherpe analyse van de kenmerkende verschillen tussen cijferend

rekenen en hoofdrekenen, alsmede tot een globale ‘agenda for action’ met betrekking tot ontwikkeling en onderzoek op dit terrein.

Levin (1981) stelt in het verlengde van Plunkett hoezeer onderzoek naar de variaties in hoofdrekenmethoden verwaarloosd is – dit overigens in tegenstelling tot onderzoek naar verscheidenheid in (verkeerde) cijfermethoden. (Zie voor het laatste voorbeeld Brown en Burton, 1978). Maar ook hij verricht op dit terrein geen research. Wel komt hij met een serie aanbevelingen om het hoofdrekenen en speciaal het schatten te stimuleren. De getallenlijn en de strook zijn daarbij belangrijke hulpmiddelen. Hij wijst in dit verband op de steun die computerspelletjes kunnen bieden, zoals bijvoorbeeld het harpoeneren. Op een assenstelsel dat het beeldscherm omvat, staan slechts bij de eindpunten getallen. Een walvis bevindt zich ergens op het scherm. Het programma vraagt de positie van de walvis door middel van coördinaten te lokaliseren. Na het indrukken van de betreffende getallen vliegt een harpoen naar de aangegeven positie en raakt de walvis al dan niet. Het resultaat geeft informatie voor de poging in de volgende ronde.

De bedoeling is om de positie van getallen op een getallenlijn globaal te leren markeren om een betere schatting van optellingen en aftrekkingen mogelijk te maken – een streven naar visualisering dus. Ook voor vermenigvuldigen en delen ontvouwt hij enkele ideeën, gebaseerd op visualisering van de operaties.

Levin wijst ook op de voordelen van flexibel rekenen tegenover ‘canonniek’ rekenen. Zijn slotzin luidt:

‘Rather than reacting to the new technology for calculation as a threat, we should consider it a valuable opportunity to reconsider the assumptions underlying the mathematics curriculum a chance to discard the mechanical, mind-stultifying elements that are better turned over to dumb machines, a chance to focus on the creative qualitative aspects that make mathematics exciting as well as useful.’ (Levin, 1981, pag. 433).

Plunkett en Levin staan overigens niet alleen in hun positieve benadering van rekenmachientjes en computers en hun lage dunk van de standaardalgoritmen (zie bijvoorbeeld Papert, 1980).

Vervolgens een voorbeeld van minder programmatisch maar meer inhoudelijk gericht onderzoek over hoofdrekenen: Reijs, Bestgen, Rijbolt en Wyatt (1982) onderzochten de werkwijzen en strategieën van goede schatters en handige rekenaars. Ze komen tot tien karakteristieke kenmerken na het interviewen van 59 proefpersonen van uiteenlopende leeftijd die na het maken van een toets als goede schatters geselecteerd werden:

1. Goede schatters (en rekenaars) beheersen de *basisfeiten*, ze hebben de tafels van de basisoperaties gememoriseerd.
2. Ze bezitten een goed begrip van *plaatswaarde* en gebruiken dit bij het bepalen van de uitkomsten bij de verschillende operaties en bij het schatten.
3. Ze zijn in staat tot *het herformuleren* van een probleem, dus om het om te zetten

in een werkbare vorm. Vooral het afronden op machten van 10 en op veelvouden van bekende getallen wordt veel gebruikt.

4. Ze kunnen goed uit het *hoofd rekenen*.
5. Ze zijn goed in staat met 'fouten' te rekenen en de *tolerantie* ervan in het oog te houden.
6. Zij kunnen goed *compenseren*, dat wil zeggen: een aanvankelijke schatting bijstellen na de herformulering van het probleem.
7. Zij zijn bekwaam in het *vertalen* van een probleem, niet alleen door de getallen te veranderen (zie punt 3), maar ook door de mathematische structuur van een probleem te wijzigen, zoals het omzetten van een lange optelling in een vermenigvuldiging via 'middelen'.
8. Ze zijn vaardig in het gebruik van *rekenkundige eigenschappen* welke flexibel rekenen mogelijk maakt, zoals het benutten van de commutatieve, associatieve en distributieve eigenschappen.
9. Ze beschikken over een *veelheid van strategieën* die ze snel kunnen sorteren voor adequaat gebruik en ze kunnen snel 'switchen' als een bepaalde aanpak niet goed blijkt te werken.
10. Ze hebben *vertrouwen* in hun werkwijzen en berekeningen.

Kortom, goede schatters zijn getalvaardig, beschikken over bepaalde cognitieve strategieën en specifieke 'affectieve' eigenschappen.

De onderzoekers merken tot slot op:

'The procedures used in this project (synthesis of related research, individual interviews and discussion with classroom teachers, researchers and other mathematics educators) were productive.'

'...In the meantime it is hoped that the keyprocesses – namely translation, reformulation and compensation – and such strategies as the front – end approach that have been identified in this research will be studied carefully. They are important and powerful cognitive processes. Incorporating them into the systematic development of curricular materials and instructional techniques is needed to study their effect as well as to determine the extent to which such processes are teachable.' (Reijs, e.a., 1982, pag. 200).

Menchinskaja en Moro (1975) wijden hun beschouwing over hoofdrekenen en cijferen daarentegen vooral aan de fouten die kinderen maken en de aard van de onderliggende processen daarvan. Ze maken wat het hoofdrekenen aangaat een duidelijk onderscheid tussen enerzijds gememoriseerde kennis van basisfeiten en anderzijds het regelgeleide rekenen. Het onderwijs en het oefenen dienen op deze onderscheiden kennis en vaardigheden afgestemd te worden. Gaat het om onvoldoende gememoriseerde basiskennis dan is goed gedoseerd oefenen op z'n plaats dat niet geestdodend is. Betreft de fout een verkeerde toepassing van een regel door bijvoorbeeld ongeoorloofde uitbreiding ervan, dan is een analyse van de fout en een explicitering van de ongeoorloofde generalisatie gepast, opdat de leerling zijn fout inziet en zich realiseert waar hij vandaan komt. Dus voor een geval als $7 \times 8 = 54$, indien verkeerd gememoriseerd, heeft analyse geen zin doch is aanvullende oefening nodig. Maar als een kind $96 : 16 = 10$ berekent volgens de gedachtengang $90 : 10 = 9$, $6 : 6 = 1$, $9 + 1 = 10$,

dus een analytische werkwijze van optellen en aftrekken overdraagt op delen, dan is een foutenanalyse wel degelijk op z'n plaats.

'The results showed that analysis of errors based on a false understanding of rules had a very great effect. The pupils who previously had made this kind of mistake did not repeat it. Moreover, error analysis prevented other pupils, to a significant degree, from making this mistakes later. The effect of awareness of the mistake was so powerful that the pupils who made the error remembered it. They received a kind of 'intellectual burn' and subsequently were wary of the mistake. For the other category of mistakes, which resulted from insufficient retention of a skill, extra practice was the only effective method.' (Menchinskaja en Moro, 1975, pag. 87).

Overigens merken de onderzoekers op dat in de Sovjet Unie door de tijden heen grote aandacht aan hoofdrekenen besteed is. In tegenstelling tot de werkwijze in de Verenigde Staten, zo stellen zij, wordt in de eerste leerjaren als de getallen tot honderd bestudeerd worden, niet 'onder elkaar' gerekend maar uitsluitend uit het hoofd. Dit om een beter begrip te bevorderen en het mechanische rekenen terug te dringen. Wij voegen hier echter aan toe dat we de indruk hebben dat het onderwijs in hoofdrekenen en cijferen in de Sovjet Unie nogal star van opzet is. Bezien we bijvoorbeeld Gal'perins aanbevelingen voor het leren cijferen (1969), dan treft de minitieuze voorgeschreven onderwijsprocedure, de strak gestuurde, aanvankelijk op een oriënteringskaart voorgeschreven leergang, die zich bepaald niet in gunstige zin van de Westerse aanpak voor het wiskundige cijferen onderscheidt, laat staan van het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering – maar dit terzijde.

De hoofdrekenbeweging heeft door de technologische ontwikkelingen nieuwe impulsen gekregen. Het denken over de doelstellingen van het cijferonderwijs heeft een zekere opwaardering van het hoofdrekenen, schatten en flexibel rekenen tot gevolg en daarmee bloeien ook ontwikkeling en onderzoek op dit gebied wat op. (Zie ook Goffree en Ter Heege, 1982; Zwarts, 1982; Van der Ploeg, 1982).

De gegevens die middels research aan het licht komen, kunnen zowel het denken over de doelstellingen van het cijferen als het cijferen zelf beïnvloeden. Het is echter wel zo dat we hier nog pas aan het begin van wellicht zeer vruchtbaar onderzoek staan. Dit blijkt onder meer uit het feit hoe weinig we weten over specifieke hoofdrekenstrategieën en 'bugs', ofwel verkeerde werkwijzen en ontoereikende methoden – dit in tegenstelling tot wat hierover van het cijferen bekend is.

6 ONDERZOEK CIJFERONDERWIJS – EEN BLINDE VLEK

Over de onderwijsbaarheid van het hoofdrekenen en cijferen in relatie tot het schoolboek is geen systematisch onderzoek gedaan. Toch is het evident dat er bij de overdraagbaarheid van het niet-traditionele cijferen – dus in de richting van het wiskundige cijferen, het geïntegreerde cijferen en het hoofdrekenen – een gigantisch probleem ligt. In het mechanistisch opgezette cijferonderwijs stippelt immers het schoolboek vrij nauwkeurig de leergang uit, zowel wat betreft de introductie van de deelge-

vallen als de inoefening ervan via een sommenbatterij van oefenopgaven. De cijferleergang biedt als het ware een papieren leergang.

Kenmerkend voor het wiskundige en geïntegreerde cijferen is echter juist dat het de mogelijkheid tot differentiatie biedt en de toewending naar inzicht in het leerproces mogelijk maakt. Nu mag papier geduldig zijn, en een computer evenzeer, maar met geduldig oefenen alleen komt de leerling hier lang niet altijd uit: de onderwijsgevende dient zichzelf in te schakelen, obstakels uit de weg te ruimen, de leerstof aan te passen, het leerproces bij te sturen, beslissingen te nemen over materiaalgebruik, over het verwoorden van de cijferhandelingen, over het gebruik van contextopgaven en nog veel meer.

Anders gezegd: de onderwijsgevende levert een actieve bijdrage tot het onderwijsleerproces.

Nu zijn er tal van factoren die het functioneren in dit opzicht kunnen doen belemmeren of begunstigen. Eén ervan, en wellicht één van de belangrijkste, is de didactische bekwaamheid om leerprocessen te observeren en te genereren. In het voorgaande zijn tal van elementen genoemd waarop dit observeren gericht kan worden en vele handgrepen om het leerproces op gang te houden of te stimuleren.

De kernvraag luidt: in hoeverre is een onderwijsgevende onder bepaalde omstandigheden in staat dit didactische handwerk voor het cijferen (binnen een of andere richting) te vervullen, en hoe zou de opleiding of bijscholing ingericht moeten worden om het langlopende onderwijs-leerproces van het cijferen goed te leren onderrichten?

We laten deze vraag onbeantwoord – we signaleren hem slechts als een kwestie van grote importantie waarover de Wiskobasgroep zich had willen buigen, waartoe ze ook plannen gemaakt had, maar waaraan ze niet meer toegekomen is. Het (gedeeltelijke) commerciële marktmechanisme zal hiervoor een oplossing moeten zoeken middels een bepaalde inrichting van handleidingen en methoden. En wel zo, dat daarbij het accent vooral op de tekst van de onderwijsgevende zal liggen – een anderssoortige papieren oplossing dus. Niet de leergang van de leerlingen wordt door middel van sommenrijtjes op het papier van de leerlingenboekjes getraceerd, maar de onderwijsgang wordt in de handleiding globaal geduid aan de hand van een serie principes en didactische aanbevelingen. (Zie Postema, 1975; Van der Molengraaf, 1981). Maar of deze werkwijze zonder (na-)scholing toereikend zal zijn? Bij bepaalde projecten (zie Nelissen e.a., 1973 en Gravemeijer, 1982) wordt trouwens ook op beperkte schaal bijscholing en begeleiding gegeven – een uitzonderlijke situatie, moeten we helaas vaststellen.

7 THEORIE VAN HET CIJFERONDERWIJS

We spraken zojuist over didactische principes en aanbevelingen. De vraag rijst: is er een onderwijs-leertheorie voor het cijferen (bijvoorbeeld het wiskundige cijferen) die aangrijpingspunten voor de onderwijspraktijk biedt?

We stellen de vraag eenvoudigweg omdat we hem gesteld willen hebben, maar kunnen er hier niet nader op ingaan. We verwijzen daartoe naar publikaties die daarover later zullen verschijnen in onderwijstijdschriften. Onze conclusie is dat algemene

onderwijsleertheorieën als die van Dienes, Bruner, Gal'perin, en informatie-verwerkingstheoretici als Resnick en Greeno, geen adequate theoretische omkleding van het cijferen bieden: deze theorieën zijn ten eerste te algemeen, ten tweede kunnen ze zowel op de micro- als de macro-ordening van de leerstof voor het cijferen toegepast worden, ten derde wordt er geen visie op het wiskundeonderwijs in geëxpliciteerd, en ten vierde blijft daarin de kwestie van de toepassingen van de cijferprocedures in contextproblemen onbesproken – althans in de concretisering die de genoemde theoretici voor hun theorie aangaande het cijferonderwijs geven. Hetgeen overigens niet inhoudt dat dergelijke theorieën nu ook geheel zonder enige waarde voor het cijferen zouden zijn...

8 TOT BESLUIT

Is er een slechtste of beste methode om te leren cijferen aan te wijzen middels onderzoeksgegevens? Dat was één van de vragen die we in de inleiding stelden.

Welnu, duidelijk is dat kwalificaties als 'slechtste' en 'beste' in dit verband verhelderd dienen te worden. Uitgangspunten en doelstellingen van het (cijfer-)onderwijs kunnen daarbij uiteraard niet buiten beschouwing blijven. Dit laatste is met name noodzakelijk om de beste aanpak aan te geven. Want over de slechtste kan weinig misverstand bestaan. Dit is het mechanistische cijferonderwijs. Deze werkwijze blijkt immers weinig effectief te zijn en een op 'trucs' gerichte anti-wiskundige attitude te bevorderen. Inzicht is dus geboden. Maar over de precieze vormgeving daarvan bestaat geen eenstemmigheid.

Allereerst is daar de kwestie van de doelstellingen. Moeten de kinderen de thans geldende, sterk verkorte, standaardalgoritmen leren? In het wiskundige cijferen volgens progressieve complicering wordt deze vraag bevestigend beantwoord, terwijl het cijferen gestoeld is op het principe van de progressieve schematisering hem ontkennend beantwoordt. Kinderen moeten de standaardvorm niet per se leren volgens de laatstgenoemde opvattingen, maar mogen dit wel als het niet teveel tijd vergt. Ook is een zekere differentiatie in doelstellingen voor deze groepering zeer wel aanvaardbaar: sommige kinderen leren de meest verkorte eindvormen, maar voor andere kunnen we met minder korte algoritmen volstaan. De hoofdreenbeweging kiest daarentegen consequent voor het niet-leren van de standaardalgoritmen.

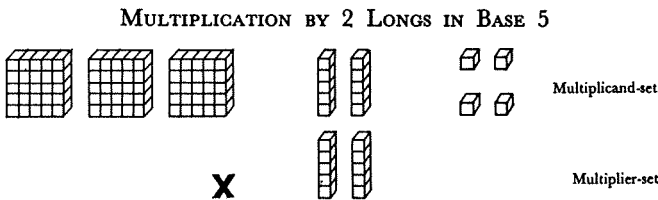
Gesteld dat kinderen een of andere eindvorm van een basisalgoritme mochten leren, is het dan didactisch wenselijk om daarop vanaf het begin bij ieder deelgeval direkt aan te sturen? Het wiskundige cijferen antwoordt ook hier bevestigend en het geïntegreerde cijferen ontkennend. Theoretisch kan deze kwestie niet beslecht worden met behulp van de bestaande onderwijsleertheorieën, omdat deze niet 'discriminerend' werken naar het micro- en macroniveau van de leerstofordening. Gegevens uit vergelijkend onderzoek zijn niet voorhanden – althans geen 'harde' feiten. Ervaringen uit de ontwerpschool van Wiskobas wijzen er echter wel op dat de uitlijning volgens progressieve schematisering een aanzienlijke tijdsbesparing kan opleveren, maar deze ervaringen zijn slechts te kwalificeren als ruw empirisch materiaal. Dat geldt trouwens ook voor de gegevens uit het onderhavige boek!

Het belang van een specifieke theorie van het cijferonderwijs dringt zich steeds meer op, een didactische theorie wel te verstaan waarin de visie, de uitgangspunten en de doelstellingen geëxpliciteerd worden, en de micro- en macro-ordering van de leerstof niet onbesproken blijft, alsmede kwesties als niveaus van handelen, de verbinding tussen die niveaus, fasen van verkorting, de functie van het verwoorden enzovoort, in de beschouwing betrokken worden. Met name ook de kwestie van de niveaus van handelen blijkt ingewikkelder te zijn dan gedacht, zo is uit onderzoek gebleken.

Algemeen geldt dat men zich speciaal bij het wiskundige cijferen aanvankelijk veel te veel tot de oppervlakte-structuur van het handelen i.c. de niveaus bepaald heeft.

In handleidingen en handboeken wordt vaak relatief veel aandacht aan optellen en aftrekken besteed, blijkbaar omdat men daaraan zo duidelijk het materiaalgebruik en de verschillende niveaus van handelen kan demonstreren. Maar daarmee omzeilt men de problemen van het cijferonderwijs goeddeels. Niveaus van handelen vormen slechts één component van het cijferend rekenen en daar komt bij dat de operaties van cijferend optellen en aftrekken relatief eenvoudig uit te voeren zijn, zowel qua procedure als toepassing in contextproblemen. Neemt men bijvoorbeeld vermenigvuldigen om het gebruik van positiemateriaal te laten zien, dan rijzen onmiddellijk problemen.

Zie als illustratie daarvan het volgende voorbeeld van Dienes (1966, pag. 106):



De opgave 324×20 in basis vijf is in een kale wiskundige samenhang geplaatst. Maar wat hier vooral opvalt, is de vormgeving van de vermenigvuldiger door middel van twee staven. Hoe zouden kinderen het verband tussen een dergelijke opgave en een vermenigvuldigingsprobleem in een reële context moeten zien, waar de vermenigvuldiger en het vermenigvuldigitaal verschillend benoemde of onbenoemde getallen zijn, en waarbij de vermenigvuldiger door de kinderen veelal als aanduiding voor een herhaalde optelling gebruikt wordt (Hart, 1981)? Anders gezegd: zowel de procedure-handeling van het cijferen als de toepasbaarheid zouden door deze aanpak weleens sterk belemmerd kunnen worden.

Laten we ons nu tot de kwestie van de toepassingen bepalen. In het wiskundige cijferen is de verbinding met toepassingen even zwak als die in het traditionele cijferen. Sterker nog: het cijferonderwijs in de zin van Dienes – die als grondlegger van het wiskundige cijferen beschouwd kan worden – is verder van de realiteit verwijderd dan dat in het aloude rekenonderwijs ooit het geval was, zoals uit het zojuist gegeven voorbeeld mag blijken. Nu vormt het wiskundige cijferen geen eenheid en zijn er ver-

schillende methoden, zoals 'Elementair Wiskundig Rekenen', 'Hoijs Rekenen' en 'Getal in Beeld' die we eerder noemden, welke veel toepassingen van de cijferprocedures geven. Maar ook dan staan die toepassingen naast de cijferleergang en zijn er niet in geïntegreerd. Terwijl bij het geïntegreerde cijferen, de naam zegt het al, contextproblemen juist als bron, als uitgangspunt, als startprobleem voor de cijferleergang gebruikt worden en aldus als concrete oriënteringsbasis voor de cijferhandelingen fungeren. Later dienen die contextopgaven ook als toepassingsgebied van de geleerde cijferprocedures. Hier ligt dus andermaal een verschilpunt tussen wiskundig en geïntegreerd cijferen.

Vervolgens de kwestie van het hoofdrekenen. In het cijferen volgens progressieve schematisering wordt cijferen vooral als een vorm van steeds handiger rekenen gezien, waarmee men in principe tot de standaardvorm kan doorgaan. Bij de hoofdrekensbeweging stopt men veel eerder. In het wiskundig cijferen wordt het hoofdrekenen in het algemeen niet geaccentueerd al zijn er uitzonderingen als 'Getal in Beeld'. Wel wordt thans algemeen onderkend dat de basisvaardigheden hun naam niet verloochenen, ook niet ten aanzien van het cijferen. Naar wij verwachten, zal het hoofdrekenen in de nabije toekomst sterk revalueren.

Tenslotte noemen we de studies die naar onze mening de meest relevante gegevens en gezichtspunten hebben opgeleverd, ons daarbij bepalend tot het buitenland:

- Brownell (1947, 1949): over de inferieure kwaliteit van het mechanistische cijferen.
- Erlwanger (1973, 1975): over de invloed van mechanistisch rekenonderwijs op de denkbeelden en attitudes van kinderen.
- Radatz (1980a, 1980b): over de (systematische) fouten die kinderen bij het cijferen maken.
- Ginsburg (1977): over de informele strategieën die kinderen in de eerste leerjaren gebruiken (ook bij het cijferen).
- Bennedbek (1981): over de verschillende oplossingsmethoden die achter eenzelfde genoteerde oplossing kunnen schuilgaan bij het aftrekken.
- Hart (1981): over cijferprocedures die veelal *niet* toegepast worden bij contextproblemen – onthullend cijfermateriaal over het rekenonderwijs als geheel.
- Hutton (1977): als voorbeeld van inspirerend vakdidactisch onderzoek, gericht op ontwikkeling in de onderwijspraktijk.
- Teule-Sensacq en Vinrich (1982): idem dito, doch met een meer theoretische inslag.
- Plunkett (1979): voor zijn analyse van de verschillen tussen cijferen en hoofdrekenen en zijn stellingname ten aanzien van het hoofdrekenen.

Wij hopen dat het Wiskobaswerk, neergelegd in de publikaties 6 en 10 en het onderhavige boek, mede richting zal kunnen geven aan het toekomstige cijferonderwijs, en dat het tot een eerste bezinning op einddoelstellingen en te investeren onderwijstijd zal leiden, alsmede tot een nadere bepaling van de plaats van zakrekenmachines en zakcomputers in het reken-wiskundeonderwijs en tot het verdiepen van het orthodidactische denken – allemaal niet weg te cijferen probleemgebieden.

NOTEN

1. In juni 1982 hebben we twee bijeenkomsten belegd ter bespreking van het onderhavige boek (uitgezonderd het allerlaatste hoofdstuk over onderzoek, dat toen nog niet voltooid was). De eerste bijeenkomst was met onderzoekers, ontwikkelaars en begeleiders die ervaring hebben met en deskundigheid over de hier gepresenteerde leergangen of met programma's die sterk op de Wiskobasideeën geënt zijn. Deelnemers waren, naast de auteurs:
 - Fred Goffree (oud IOWO-medewerker, specialist op het gebied van de opleidingen).
 - Frans van Galen (medewerker van het project Onderwijs en Sociaal Milieu (O.S.M.).
 - Toon Meeuwisse (O.S.M.-project, Rotterdam).
 - Koeno Gravemeijer (O.S.M.-project, Rotterdam).
 - Annecoos Vuurmans (S.A.C.-rekenproject, Utrecht).
 - Simon Gribling (S.A.C.-rekenproject, Utrecht).
 - Jo Nelissen (S.A.C.-rekenproject, Utrecht).

De tweede bijeenkomst hadden we met drie onderwijsgeevenden van de Dr. W. Dreeschool te Arnhem, die als de meest ervaren en ingewijde onderwijsmensen op het onderhavige terrein beschouwd kunnen worden, te weten:

- Marjan Buenk
- Dik Groote Haar
- Fred Broekhuijsen,

die ook een bijdrage leverden aan 'Cijferend vermenigvuldigen en delen (1)', (IOWO, Utrecht 1979), dit samen met Jopie Kotterman, Bert van Vuurden en Henk van der Hurk.

2. Het zijn met name Annecoos Vuurmans en Simon Gribling die opmerken dat de bedoeling niet duidelijk genoeg naar voren komt: niet als je het boek leest en ook niet als je bezig bent. Koeno Gravemeijer stelt vast dat de effectiviteit van de onderhavige aanpak, wat het cijferen op zich aangaat, niet te zeer geaccentueerd moet worden, want het gaat om 'meer'.
3. Marjan Buenk, Dik Groote Haar en Fred Broekhuijsen stipuleren de voorwaarden van het leren cijferen met betrekking tot de basisvaardigheden om een goede progressie in de schematisering mogelijk te maken. Marjan Buenk spreekt wat de tafels aangaat zelfs van een gevoelige periode. Men heeft ten eerste ervaren hoeveel problemen een lang uitstellen van het memoriseren geeft, en ten tweede hoe belangrijk het is om van tijd tot tijd deze kwestie in het schoolteam als geheel te bespreken en er sluitende afspraken over te maken.
4. Met name Jo Nelissen vestigt de aandacht op het leren als een sociaal gebeuren, waarin de kinderen de gelegenheid hebben om samen te werken, om over elkaars werkwijzen te praten en te reflecteren (hij verwijst daarbij naar een recent werk van Davydov, Lompscher en Markova 'Lerntätigkeit bei Schüler').

Wij onderschrijven dit belang uiteraard (de Wiskobasaanpak is ervan doordrenkt) en verwijzen hiervoor vooral naar het werk van Wiskivon (voortgezet onderwijs, IOWO – thans OW & OC).

Zie ook:

Goddijn, A. en G. Schoemaker, Huizermaat. Een harmonieleer voor wiskunde en samenwerken. *De Nieuwe Wiskrant*, 1982, 2.

We citeren enkele zinnen uit dit mooie artikel, waarin de samenhang tussen inhoud en werkwijze uitgebeeld wordt:

'De sociale wetenschappers denken dat onderwijs een veldje blokken is, een matrix, waaruit je een blok kan pakken zonder de rest te beroeren. Een gezond mens weet dat het 'mikado' is. Als je een stokje pakt, rollen er tien weg en je beurt is voorbij. Of denk aan een bord spaghetti: aan één draadje plakt alles vast. Je kunt niet zomaar de stof onaange-tast laten en samenwerking zinvol maken.'

5. Vanuit zowel het O.S.M.-project als het S.A.C.-rekenproject wordt op de noodzaak van begeleiding en nascholing gewezen om de andere onderwijs-attitude die nodig is voor dit

soort onderwijs, te stimuleren. Men is niet pessimistisch over de bereikte resultaten in dit opzicht.

Marjan Buenk wijst erop dat men pas inzicht in het belang van deze werkwijze kan bijbrengen als de onderwijsgevende enige jaren ervaring in het onderwijs heeft opgedaan. Pas dan ziet men welke problemen het cijferend vermenigvuldigen en (vooral) delen geeft, en welke de enorme voordelen van de onderhavige aanpak zijn.

Dekker en Goffree beklemtonen dat het opleidingsonderwijs in dit opzicht vooral informerend moet zijn, omdat de mogelijkheden om ervaringen op te doen met langlopende leerprocessen hier vrijwel niet aanwezig zijn.

Zie ook:

Goffree, F., *Leren onderwijzen met Wiskobas*. Utrecht: OW & OC, 1982/2 (diss.).

- 6 Jo Nelissen wijst op de noodzaak hiervan. In de discussie komt naar voren dat men zich die zekerheden ook bij het progressieve schematiseren kan verschaffen, zij het dat dit ten koste gaat van de grondgedachte. Toch zal men hier in eerste ronde concessies moeten doen, ten faveure van de zekerheid.

Koeno Gravemeijer stelt vast dat men die concessies (dus in de richting van een wat strakkere sturing van het onderwijsleerproces) ook zal moeten doen als men met combinatieklassen werkt. Hij concludeert dat hier een zekere spanning tussen sturen en stimuleren waarneembaar is, waarbij het O.S.M.-project meer naar de kant van het sturen tendeeft, en in dit boek het accent wat sterker op het stimuleren gelegd wordt.

De auteurs bevestigen dit, maar stellen dat dit in het experiment ook mogelijk was. In de realiteit van de onderwijspraktijk zal het verloop ook wel van sturing naar stimulering zijn. Sterker nog: het is zelfs aan te bevelen om bij eerste kennismaking de leer-gang wat strakker uit te stippelen, wat overigens nog niet inhoudt dat men de looper moet uitleggen. Uitleggen is hier uit den boze, het gaat om uitlokken, stimuleren, en om... sturen-op-langere-termijn.

7. Men heeft deze ervaring in de verschillende projecten, ook in het Wiskobasproject. De ouders moeten bij de meningsvorming en doelbepaling betrokken worden. De ervaringen op de Dr. W. Dreesschool zijn in dit opzicht onverdeeld gunstig: de ouders tonen begrip en zijn zich bewust dat ze de kinderen in verwarring kunnen brengen als ze het cijferonderwijs met traditionele werkwijzen doorkruisen. (Zie vooral ook het laatste hoofdstuk met praktische aanbevelingen in 'Cijferend vermenigvuldigen en delen (1)').
8. Deze ervaringen zijn in de Dr. W. Dreesschool opgedaan en worden door Marjan Buenk, Dik Groote Haar en Fred Broekhuijsen verwoord.
9. Marjan Buenk vertolkt deze gedachte.

Fred Goffree onderschrijft de einddoelstelling van de pré-standaardvorm en betreft daarbij vooral ook het gebruik van de zakrekenmachine. Trouwens het hele grondidee van een inzichtelijke opbouw spreekt hem hierom ook aan, omdat de toepasbaarheid van de operaties van vermenigvuldigen en delen vergroot wordt, wat een beter gebruik van die rekenoosjes mogelijk maakt.

Toon Meeuwisse is positief over de procedure en de einddoelstellingen omdat volgens zijn waarneming zwakkere leerlingen veel meer kansen krijgen om de cijferprocedures te leren.

10. Simon Gribbling is zeer geporteerd voor het kruispuntenmodel en wil het niet een, twee, drie inruilen voor het herhaald-optel-model.
Frans van Galen vraagt zich af welke argumenten voor het ene en welke voor het andere pleiten en of er (vergelijkend) onderzoek op dit terrein gedaan is. (Zie daarvoor het volgende hoofdstuk).
Marjan Buenk kan op jarenlange ervaring met het kruispuntenmodel bogen, en staat er zeer positief tegenover.
11. Marjan Buenk heeft nu twee jaar met het herhaald-optel-model gewerkt. Het eerste jaar tot haar volle tevredenheid. Opvallend was de grote snelheid waarmee de kinderen de vermenigvuldigingsalgoritme leerden. De ervaringen in het tweede jaar waren minder positief wat de zwakke leerlingen aangaat. De reden daarvan zit 'm volgens haar diagnose in de minder duidelijk gestructureerde fasen in dit model, waardoor de kinderen niet goed naar de werkwijze van een vorige fase kunnen terugvallen. De in dit boek gesuggereerde veranderingen (gebaar in de lucht, streep op papier, gecombineerd met de korte notaties die sommige kinderen zelf al na een tiental lessen ontwikkelen) lijken haar de oplossing – juist ook omdat nu weer een soort kruispuntenschema zichtbaar wordt. Een schema dat zelfs het voordeel heeft bij het vroegere dat het niet eerst uiteenrafelt wat korte tijd later toch

weer samengevoegd moet worden. ($10 \times 23 = 230$ ineens versus $10 \times 23 = 10 \times 20 + 10 \times 3$ in het kruispuntenmodel).

Koeno Gravemeijer signaleert dezelfde nadelen van het 'kale' (niet visuele) herhaald-optel-model. De hier voorgestelde motorische, visuele en symbolische bijstellingen van het herhaald-optel-model worden algemeen positief gewaardeerd.

De voordelen van een overzichtelijk en strak notatie-schema worden door een ieder onderschreven. Een en ander is ook nodig om het euvel van het vergeten op te tellen van berekende deelprodukten uit te bannen. (Zie voor toelichting van dat schema de basistekst).

12. Vooral Annecoos Vuurmans en Koeno Gravemeijer hebben deze kwestie aan de orde gesteld. De gebruikswaarde van contextproblemen voor de opbouw van de algoritmen is volgens hen problematisch omdat de informele werkwijze van de kinderen juist nogal afwijkt van de aanpak die 'onder' de algoritme schuilgaat – kortom er is te veel ruis. We onderschrijven deze conclusies ten volle, maar brengen (zie de basistekst) een duidelijk onderscheid in contextproblemen aan, en differentiëren aan de hand daarvan de plaats en de functie van contextproblemen in de cijferleergang. Wij hebben vastgesteld dat in enkelvoudige contextopgaven voor vermenigvuldigen en delen de kinderen of direct de passende operatie kiezen, of een of andere variant van een additieve methode gebruiken! En nu berusten de modellen die we voor het cijferen gekozen hebben juist ook op die additieve aanpak. Gevolg: de kinderlijke oplossingsmethoden bij het oplossen van elementaire contextproblemen kunnen vrijwel altijd in direct verband met de algoritme-procedures gebracht worden. (Zie verdere uiteenzetting in de basistekst en zie ook de artikelen van de auteurs in 'Willem Bartjens', jrg. 1, over 'Het stomste vak van de wereld' (1) en (2).). We zijn de discussianten vooral dankbaar dat ze dit kritische punt aan de orde gesteld hebben.
13. Zie: Gravemeijer, K., Het gebruik van contexten. *Willem Bartjens*, 1982, 1, p. 192–198.
14. Jo Nelissen stelt dit punt aan de orde, omdat hij meent dat in de tekst te zeer gesuggereerd wordt als zou de didactiek van het aansluiten op kinderlijke denkwijzen, een algemeen didactisch beginsel zou zijn. En dat is het in zeker opzicht ook. (Zie basistekst).
15. Niet alle thema's van de twee sessies zijn in het voorgaande beschreven. Zo kwam bijvoorbeeld naar voren dat er een kloof tussen de orthodidactische en vakdidactische benaderingswijze valt waar te nemen; de zakrekenmachientjes waren uitvoerig onderwerp van gesprek; er werden onderwijservaringen uitgewisseld; het probleem van de overdraagbaarheid kwam uitvoerig aan bod; de relatie tussen cijferen, hoofdrekenen en (vooral) schatten werd besproken, en zo meer. We hopen echter dat we met dit hoofdstuk recht gedaan hebben aan de verschillende discussie-bijdragen. Wij hebben er in ieder geval veel aan gehad. Wij zijn hen veel dank verschuldigd.
16. Freudenthal, H., Onderzoek in onderwijs. *Pedomorfose*, 1980, 12, p. 62–63.

LITERATUUR

- Ashlock, R.B., Research and development related to learning about numerals for whole numbers: implications for classroom, resourceroom, clinic. In: M.E. Hynes (Ed.), *Topics related to diagnosis in mathematics for classroom teachers*. Seminole County: R.C.D.P.M., 1979, 1–23.
- Barclay, T., Buggy. *Mathematics Teaching*, 1980, 92, 10–12.
- Barnett, J.C. en P.M. Eastman, The use of manipulative materials and student performance in the enactive and iconic modes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1978, 9, 94–103.
- Bednarz, N. en B. Janvier, The understanding of numeration in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 1982, 13, 33–59.
- Beek, M.H. van, N.B. de Groot en J.H. Meijer, *Hoij Rekenen*. Amsterdam: Meulenhoff, 1974–1977.
- Bennedbek, B., Is self taught well taught? *Mathematics Teaching*, 1981, 95, 11–14.
- Booth, L.R., Child-methods in secondary mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 1981, 12, 29–41.
- Borghouts-van Erp, J.W.M., *Rekenproblemen: opsporen en oplossen*. Groningen: Wolters-Noordhoff, 1978.
- Bouman, P.J. en J.C. van Zelm, *De rekenkundige denkbaarheden in logischen samenhang met – als proeve van toegepaste logica – een rekenmethode voor de lagere school*. Amsterdam: Versluys, 1918.
- Brinkman, T., V. van Achter, P. de Jong en J. Nieland, *Getal in beeld*. 's-Hertogenbosch: Malmberg, 1972–1978.
- Brown, J.S. en R.B. Burton, Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, 1978, 2, 155–192.
- Brownell, W.A., An experiment on 'borrowing' in third grade arithmetic. *Journal of Educational Research*, 1947, 41, 161–171.
- Brownell, W.A. en H.E. Moser, *Meaningful vs mechanical learning: A study in grade III subtraction*. Durham: Duke University Press, 1949.
- Capps, L.R., Making division meaningful and logical. *The Arithmetic Teacher*, 1962, 9, 198–204.
- Carnihan, H., Danny's method of subtraction. *Mathematics Teaching*, 1979, 89, 6–7.
- Cook, C.J. and J.A. Dossey, Basic fact thinking strategies for multiplication-revisited. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1982, 13, 163–172.
- Corte, E. de en L. Verschaffel, *Leren fouten diagnosticeren met behulp van de micro-computer*. Willem Bartjens, 1982, 2, (in druk).
- Cox, L.S., Systematic errors in the four vertical algorithms in normal and handicapped population. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1975, 6, 202–221.
- Davies, H.B., A seven-year-old's subtraction technique. *Mathematics Teaching*, 1978, 83, 15–18.
- Davis, R.B., Mathematics teaching – with special reference to epistemological problems. *Journal of Research and Development in Education*, 1967, 1, 1–71.
- Davis, R.B. en C. McKnight, The influence of semantic content on behavior. *The Journal of Mathematical Behavior*, 1980, 3, 1–88.
- Denmark, T. en H.S. Kepner, Basic skills in mathematics: a survey. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1980, 11, 104–124.
- Diels, P.A. en J. Nauta, *Richtlijnen voor het rekenonderwijs op de lagere school*. Groningen: Wolters, 1939.

Dienes, Z.P., *Mathematics in the primary school*. London: MacMillan, 1966.

Ekman, L.G., A comparison of the effective of different approaches to the teaching of addition and subtraction algorithms in the third grade. *Dissertation Abstracts International*, 1967, 27, 2275–2276.

Engelhardt, J., Levels of maturity in diagnosis and instruction. In: M.E. Hynes (Ed.), *Topics related to diagnosis in mathematics for classroom teachers*. Seminole County: R.C.D.P.M., 1979, 23–33.

Engen, H. van en E.G. Gibb, *General mental functions associated with division*. Cedar Falls: Iowa State Teachers College, 1956.

Erlwanger, S.H., Benny's conception of rules and answers in IPI-mathematics. *The Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1973, vol 1 nr 2, 7–26.

Erlwanger, S.H., Case studies of children's conceptions of mathematics. *The Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1975, vol 1 nr 3, 157–283.

Fitzgerald, A., An excursion into subtraction and long multiplication. *Mathematics Teaching*, 1976, 74, 30–34.

Foxman, D.D. (Ed.), *Mathematical Development*. London: H.M. Stationary Office, 1980.

Friedman, M., The manipulative materials strategy: the latest pied piper? *Journal for Research in Mathematics Education*, 1978, 9, 78–81.

Fuson, K., The effects on preservice elementary teachers of learning mathematics and means of teaching mathematics through the active manipulation of materials. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1975, 6, 51–64.

Gal'perin, P.J., Stages in the development of mental acts. In: M. Cole en J. Maltzman (Eds.), *Handbook of contemporary soviet psychology*. London: Basic Books, 1969.

Ginsburg, H., *Children's arithmetic: the learning process*. New York: Van Nostrand, 1977.

Goffree, F. en H. ter Heege, 'Hoofdrekenen' getoetst. *Willem Bartjens*, 1981, 1, 45–52.

Gravemeijer K., F. van Galen, J.M. Kraemer, T. Meeuwisse, W. Vermeulen en R. Roozenburg, *Informatie-boek 'Rekenen en Wiskunde'*. Rotterdam: OSM-project, 1982.

Hart, K. (Ed.), *Children's understanding of mathematics*: 11–16. London: Murray, 1981.

Heege, H. ter, *Tafels kennen... om te kunnen vermenigvuldigen*, 1981 (paper).

Hof, J.W. van 't en P. Wagenaar, *Elementair wiskundig rekenen*, Assen: Van Gorcum, 1970.

Hughes, M., Testing numeracy. *Mathematics Teaching*, 1979, 89, 28–30.

Hutton, J., Memoirs of a math teacher 5. Logical reasoning. *Mathematics Teaching*, 1977, 81, 8–12.

Jong, R. de (Red.), *De abakus*. Utrecht: IOWO, 1977.

Khoury, H.A. en M. Behr, Student performance, individual differences and modes of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1982, 13, 3–16.

Kieren, T.E., Manipulative materials in mathematics learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1971, 2, 228–235.

Kilian, L., E. Cahill, C. Ryan, D. Sutherland en D. Taccetta, Errors that are common in multiplication. *Arithmetic Teacher*, 1980, 20, 22–26.

Kilpatrick, J., The reasonable ineffectiveness of research in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 1981, 2, 22–29.

Knights, G., Sally's subtractions. *Mathematics Teaching*, 1973, 64, 10–15.

Kratzer, R.O. en S.S. Willoughby, A comparison of initially teaching division employing the distributive and Greenwood algorithms with the aid of a manipulative material. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1973, 4, 197–205.

Kühnel, J., *Neubau des Rechenunterricht II*. Leipzig: Klinkhardt, 1925/5.

Lester, F.K. en D.R. Kerr, Some ideas about research methodologies in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1979, 10, 228–235.

Levin, J.A., Estimation techniques for arithmetic: everyday math and mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 1981, 12, 421–435.

Lugtmeijer, H.J. en J. Boers, *Naar aanleg en tempo*. Zutphen: Thieme, 1954.

- MacDonald, T.H., A general concept internalization model exemplified by the long division algorithm. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1977, 8, 157–166.
- McCormick, R.L., A comparative study of two methods of teaching a decimal system of numeration. *Dissertation Abstracts International*, 1965, 26, 1430–1431.
- Menchinskaja, N.A. en M.J. Moro, Teaching arithmetic in the elementary school. In: J.R. Hooten (Ed.), *Soviet Studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, 1975, 8, 157–166.
- Molengraaf, G.W.J. van de (Red.), *De wereld in getallen*, 's-Hertogenbosch: Malmberg, 1981–1983.
- Moody, W.B., R. Abell en R. Bausell, The effect of activity-oriented instruction upon original learning, transfer, and retention. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1971, 2, 207–213.
- N.C.T.M., *An agenda for action. Recommendations for school mathematics of the 1980's*. Reston: N.C.T.M., 1980.
- Nelissen, J., W. Klukhuhn en A. Vuurmans, *SAC-rekenprogramma*. Utrecht: SAC, 1973 e.v.
- Papert, S., *Mindstorms. Children, computers and powerful ideas*. Brighton: The Harvester Press, 1980.
- Ploeg, S. van der, Hoofdrekenen. *Willem Bartjens*, 1982, 1, 140–146.
- Plunkett, S., Decomposition and all that rot. *Mathematics in School*, 1979, 8, 2–5.
- Postema, J., K. Kuipers en J.J. Haverkort, *Taal*. Zeist: Dijkstra, 1975–1982.
- Punn, A.K., The effects of three modes of representation in teaching multiplication facts on the achievement and attitudes of third grade pupils. *Dissertation Abstracts International*, 1974, 34, 6954–55.
- Radatz, H., *Fehleranalysen im Mathematik-Unterricht*. Braunschweig: Vieweg, 1980a.
- Radatz, H., Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the learning of Mathematics*, 1980b, 1, 16–21.
- Resnick, L.B. en W. Ford., *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1981.
- Reys, R.E., B.J. Bestgen, J.F. Rybolt en J.W. Wyatt, Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1982, 13, 183–201.
- Scott, L., A study of teaching division through the use of two algorithms. *School Science and Mathematics*, 1963, 63, 739–752.
- Scrivens, R.W., A comparative study of different approaches to teaching the Hindu-Arabic numerations system to third graders. *Dissertation Abstracts International*, 1968, 29, 839–840.
- Shumway, R.J. (Ed.), *Research in mathematics education*. Reston: N.C.T.M., 1980.
- Slesnick, T., Algorithmic skills vs conceptual understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 1982, 13, 143–155.
- Sowder, L.K., Concept and principle learning. In: R.J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education*. Reston: N.C.T.M., 1980, 286–324.
- Steinberg, E.R. en B.C. Anderson, Teaching tens to Timmy, or a caution in teaching with physical models. *The Arithmetic Teacher*, 1973, 20, 620–626.
- Suydam, M.N. en R.E. Reys (Ed.), *Developing computational skills*. Reston: N.C.T.M., 1978. N.C.T.M., 1976.
- Suydam, M.N. en R.E. Reys (Ed.), *Developing computational skills*. Reston: N.C.T.M., 1978.
- Suydam, M.N. en D.J. Dessart, Skill learning. In: R.J. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education*. Reston: N.C.T.M., 1980.
- Teule-Sensacq, P. en G. Vinrich, Résolution de problèmes de division au cycle élémentaire dans deux types de situations didactiques. *Educational Studies in Mathematics*, 1982, 13, 177–205.
- Treffers, A. (Ed.), *Cijferend vermenigvuldigen en delen (1). Overzicht en achtergronden*. Utrecht: IOWO, 1979.

- Treffers, A., Cijferen in het rekenonderwijs van toen en nu. *Pedagogische Studiën*, 1982, 59, 97–116.
- Treffers, A., Basisalgoritmen in het cijferen voor het wiskundeonderwijs op de basisschool. *Pedagogische Studiën*, 1982, 59, (in druk).
- Veldhuis, E., *Een deelleergang voor cijferend optellen en aftrekken, volgens het principe van progressieve schematisering, gegeven in het kader van remedial teaching van vier kinderen in het buitengewoon onderwijs*. Utrecht: IPAW (doct. scriptie), 1981.
- Vergnaud, G., The acquisition of arithmetical concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 1979, 10, 263–275.
- Vink, H., *Algoritmen met kruispunten en eieren. Leerpsychologische verkenningen en een onderzoek naar het leerresultaat en het hanteren van een algoritmeleergang vermenigvuldigen in het derde leerjaar van de basisschool*, 1978, (scriptie pedagogiek mo-b).
- Vrolijk, A., *Algoritmen in het onderwijs*. Utrecht: IPAW, 1981, (doct. scriptie).
- Wanders, W.E. en S. Bohncke, *Boeiend rekenen*. 's Hertogenbosch: Malmberg, deel 8, 1970/6.
- Warkentin, G., The effect of mathematics instruction using manipulative models on attitude and achievement of prospective teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1975, 6, 88–95.
- Wertheimer, M., *Productive thinking*. New York: Harper, 1945. (enlarged version). London: Associated Book Publishers, 1966.
- Wheeler, L.E., The relationship of multiple ebodiments of the regrouping concept to children's performance in solving multi digit addition and subtraction examples. *Dissertation Abstracts International*, 1972, 32, 4260.
- Wiskobasteam, *Overzicht rekenmethode anno 1980*. Utrecht: IOWO, 1980.
- Zwarts, M., Hoofdrekenen getoetst? *Willem Bartjens*, 1982, 1, 134–140.

Deel C

Nabeschouwing en discussie

IV NABESCHOUWING

Deze nabeschouwing is een echte *na-beschouwing*. Wat is achteraf gezien, na zo'n jaar of acht werken, ons standpunt over het beste cijferonderwijs? Dat is de vraag die we hier willen beantwoorden. Wat in de voorgaande hoofdstukken beschreven staat, was vrijwel definitief. Maar met name het experiment over vermenigvuldigen volgens herhaald optellen was nog niet geheel voltooid: als we het konden overdoen dan zouden we op kleine punten nog wat veranderingen aanbrengen in de zin zoals hier beschreven. Het volgende is wat ons betreft dus een afsluiting. Men zou wellicht ook kunnen zeggen dat het het begin kan vormen van nieuwe ontwikkelingen op het terrein van het cijferen die passen bij het huidige tijdsgewricht waarin kinderen de beschikking hebben over zakrekenmachientjes en -computers.

Globaal gesteld is onze opvatting dat de ontwikkeling van deze rekenautomaten een appèl op ons onderwijs doet: namelijk niet zozeer het snelle cijferen volgens de meest verkorte algoritme-vormen (zoals bijvoorbeeld de korte staartdeling) is nu primair, als wel het schatten, handig rekenen, hoofdrekenen en speciaal het kunnen toepassen van de cijferprocedures op de geëigende contextproblemen, dat is waar het vooral om gaat.

Nu gaan er de laatste tijd steeds meer stemmen op om het cijferen af te schaffen. Is dit de consequentie van ons standpunt? Nee, dat is niet zo. *Wij zijn er niet voor om het cijferen af te schaffen.* En de wegen die in het voorgaande geschetst werden, leiden wat ons betreft naar de standaarduitvoeringen. Maar... indien men van mening zou zijn dat de kinderen de standaard-algoritmen niet hoeven te leren – en die opvattingen zijn we de laatste jaren ook in de onderwijspraktijk herhaaldelijk tegengekomen – dan kan men toch het met contextproblemen geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering zoals dat hier beschreven is, ook heel goed volgen. Alleen stoot men in dat geval niet helemaal naar het eindniveau van de leergang door.

We zullen in de toekomst de cijferleergang zoals hier geschetst niet helemaal kunnen ontberen. *Cijferen is in onze zin namelijk vooral een vorm van handig rekenen* – zo is het althans in het eerste deel van de leergang. En dit handig rekenen c.q. schatten, hoofdrekenen, gebruik maken van de tafels en van eigenschappen, dat is nu exact wat we in de toekomst (ook) nodig zullen hebben. Vandaar dat we durven te stellen: *het cijferen aldus opgevat, vormt een leergang waarmee verschillende eind-leerdoelen gediend kunnen worden.* Extreem gesteld kan het zowel voor het handig rekenen (niet-cijferen) als het standaard-cijferen gebruikt worden.

Maar kan dit met het gangbare cijferen ook niet? *Wat is nu precies het verschil tussen de gebruikelijke methodiek en de hier geschetste aanpak?*

Wel, in het vigerende cijferonderwijs wordt per deelgeval, eventueel via tussenstappen, steeds direkt op de standaard-vorm aangestuurd. Eerst wordt bijvoorbeeld een getal met één cijfer vermenigvuldigd met een getal van twee cijfers leidend naar de standaard-vorm, dan een één-cijfergetal met een drie-cijfergetal voerend tot de standaard-algoritme, idem dito met een vier-cijfergetal, vervolgens een twee bij twee, een twee bij drie, een twee bij vier vermenigvuldiging. En steeds gaat men pas naar de complexere gevallen indien het voorgaande minder complexe geval beheerst wordt, dus op standaard-niveau uitgevoerd kan worden. We noemen dit leren cijferen volgens *progressieve complicering*. Leren cijferen volgens *progressieve schematisering* vormt hiervan het spiegelbeeld. De zojuist opgenoemde deelgevallen worden nu niet zover in de tijd uitgestreken, doch ongeveer tegelijkertijd behandeld. Maar de oplossingen worden op een laag niveau van schematisering en verkorting opgelost, bijvoorbeeld in het geval van een vermenigvuldiging: een lange optelling maken met daaruit happen van tien nemen. Later worden dan dezelfde opgaven korter geteerd en sneller uitgerekend: de aparte happen van tien, honderd enz. worden nu samengenomen. Kortom, deze leergang wordt in grote lijnen bepaald door schematisering en verkorting en niet door de complexiteit van de opgaven. Dit is niet het enige verschil.

Het tweede onderscheid zit 'm in de toepassingen, ofwel *de plaats van de contextproblemen* in de cijferleergang. In het gangbare cijferonderwijs zijn toepassingen als het ware toe-passingen achteraf; ze staan in feite los van de cijferleergang, zijn er niet mee geïntegreerd. In sommige methoden, zoals bijvoorbeeld 'Naar zelfstandig rekenen' (nieuwe versie) is het aantal toe-passingen beperkt tot enkele tientallen per leerjaar, terwijl in andere methoden vrij veel verhaaltjessommen in de middenbouw gemaakt worden, zoals bijvoorbeeld in 'Elementair wiskundig rekenen'. Maar veel of weinig, ze staan zoals gezegd naast de leergang. In het cijferonderwijs zoals ons dat voor ogen staat zijn contextproblemen echter geïntegreerd met het cijferen: ze vormen de bron van het cijferen en worden daarnaast ook als toepassingen benut.

Ziehier twee belangrijke verschilpunten: leerstofordening en toepassingen. Het door ons voorgestelde cijferen is, we noemden het al, kort te typeren als geïntegreerd cijferen volgens progressieve schematisering, waarbij 'geïntegreerd' zowel betrekking heeft op cijferen vervlochten met handig rekenen als op cijferen verweven met contextproblemen. Op het laatstgenoemde gaan we nu apart in.

In onderzoek is vastgesteld dat leerlingen van de basisschool nogal wat moeite hebben om de bewerkingen van *vermenigvuldigen en delen in elementaire contextopgaven* te onderkennen. Ongeveer de helft van de kinderen heeft aan het einde van de basisschool moeilijkheden met die bewerkingen. Het gevolg is dat die kinderen ook de cijferprocedures niet (altijd) in de geëigende gevallen toepassen.

Hoe kan men nu de toepasbaarheid verhogen? Door meer contextproblemen te geven? Er zijn methoden die het probleem van de toepasbaarheid onderkennen zoals bijvoorbeeld 'Elementair wiskundig rekenen', die het inderdaad in verhoging van de kwantiteit zoekt en dat op zich op heel acceptabele wijze doet in de vorm van korte onderwijsverhaaltjes. Wij zijn echter van oordeel dat dit nog onvoldoende tegemoet komt aan wat de kinderen nodig hebben – althans de zwakke rekenaars. In het cijfe-

ren zèlf zal de band tussen vermenigvuldigen en herhaald optellen, en delen en herhaald aftrekken stevig aangehaald moeten worden, en wel te beginnen bij de tafels! In het eerste deel over vermenigvuldigen hebben we kunnen waarnemen dat Christiaan c.s. allerlei vindingrijke oplossingswijzen voor een contextprobleem ontwikkelen, maar daarbij geen optimaal gebruik maakten van de tafels, net zo min als bij het goudvissenprobleem 27×8 vanzelf afsplitsingen van 10×8 gemaakt werden. Welnu, het is zaak om de startlijn van het handig rekenen – of zo men wil: het cijferen – ongeveer hier te trekken. Laat uiteraard strategieën van tellen, verdubbelen, turven e.d. toe. Maar wijs ook op de werkwijzen van de kinderen die de tafels gebruiken, tien-tafels afsplitsen en handig inwisselen. En we zullen constateren dat ook voor de zwakke leerlingen de laatstgenoemde werkwijzen overtuigend zijn, omdat ze zoveel handiger tot het juiste antwoord voeren. Het gevolg is dat na korte of langere tijd de kinderen, indien ze daartoe aangemoedigd worden, die aanpak ook gaan volgen. En zolang ze nog informele manieren zouden gebruiken, kan trouwens niet gezegd worden dat ze niet zinvol bezig zijn, omdat dit voor hen toch ook een vorm van handig rekenen is – er is dus geen enkele reden om te forceren! Maar, zoals gezegd, zal in de praktijk van het onderwijs blijken dat vrijwel alle kinderen na enige tijd, als in de opgaven grotere getallen verschijnen, de tafels (ook die van tien!) gaan gebruiken en omgekeerd aan de contextopgaven een stimulans ontnemen om de tafels te memoriseren. Voor het delen geldt in grote lijnen hetzelfde. Dus ook hier wordt het gangbare formele cijferen aanvankelijk wat uitgesteld, waardoor het informele rekenen aan de hand van elementaire contextopgaven niet te snel in het keurslijf van de algoritmen gewrongen wordt, met alle ongewenste gevolgen vandien.

In de grote lijn van de leergang *gebruiken we contextproblemen op twee verschillende manieren*, namelijk als uitgangspunt voor en als toepassing van de cijferprocedures. En wel op de volgende wijze: steeds weer wordt bij ieder belangrijk nieuw geval uitgegaan van een contextopgave, zoals bij 8×23 , 23×8 , 23×58 , 123×12 , en ook worden bij het inoefenen steeds weer contextproblemen naast ‘kale’ cijfersommen gesteld. Bij het delen idem dito.

Zoals eerder aangeduid is het gebruik van contextproblemen als bron voor de begripsvorming van het cijferen een betrekkelijk nieuwe aanpak. De waarde ervan ligt, naar onze ervaring, zowel bij het cijferen als ook bij het toepassen. Voor het cijferen geeft zo’n reëel probleem houvast omdat de kinderen daaraan hun rekenhandelingen kunnen oriënteren, en voor het toepassen ligt de betekenis in de verbinding met de korte rekenwijzen van het cijferen en daarmee in de begripsvorming van vermenigvuldigen en delen in relatie tot herhaald optellen en herhaald aftrekken.

Het *noteren* (en verwoorden) van de steeds meer verkorte rekenwijze is een teer punt. De notatiewijze vormt tot op zekere hoogte de uitdrukking van het denken, de manier van aanpak, de rekenstrategie: kinderen die een sterk verkorte rekenwijze toepassen, zullen gewoonlijk de oplossing ook kort noteren. Tot op zekere hoogte... Hier liggen twee gevaren. Ten eerste kunnen niet alle zelf-gevonden notatiewijzen gehonoreerd worden om de eenvoudige reden dat zo’n notatie op den duur wel eens blokkerend kan werken voor nog verdere verkortingen. En ten tweede kunnen opgelegde notaties wel eens remmend werken vanwege het feit dat ze te formeel, te ab-

stract zijn en de werkwijze van de betreffende leerling niet dekken. (Men kan dit vooral signaleren als men de kinderen hun handelwijzen laat verwoorden en verantwoorden!). Er kan nog een derde klip genoemd worden, die vlak bij de eerste ligt. Indien er namelijk niet een zekere uniformiteit in het noteren is, kunnen de kinderen elkaar niet makkelijk meer begrijpen en dat moet als een ernstige handicap aangemerkt worden, omdat het heel belangrijk is bij het progressieve schematiseren dat de kinderen met elkaars oplossingen geconfronteerd worden.

In de tekst van het gedeelte over vermenigvuldigen volgens herhaald optellen kan men lezen hoe lastig het is deze klippen te omzeilen.

Achteraf gezien hadden we na het begin met de lange optelling al wat direkter op de volgende notatiewijze kunnen aansturen:

$$56 \times 28 =$$

$$6 \times 28 =$$

$$10 \times 28 =$$

$$10 \times 28 =$$

$$10 \times 28 =$$

$$10 \times 28 =$$

$$10 \times 28 =$$

Na ongeveer vijftien lessen bleken verschillende kinderen hier namelijk duidelijk aan toe te zijn. Deze notatie zou met een *vingerwijzing in de lucht* gepaard kunnen gaan om de relatie met de lange optelling vast te leggen en eventueel *een strepenschema op papier*.

$6 \times 28 =$	28
	+ 6
$10 \times 28 =$	+ 10
$10 \times 28 =$	+ 10
enz.	+ 10

De volgende notatiestap zou dan zijn:

$$\begin{array}{l} 6 \times 28 = \\ 50 \times 28 = \text{---} + \end{array}$$

Maar deze kan alleen gezet worden indien de rekenvaardigheid zover gevorderd is dat deze deelprodukten uit het hoofd uitgerekend kunnen worden – zie hier weer de samenhang tussen noteren en uitrekenen.

Zodoende krijgen we de volgende notatiestappen:

- lange optelling geheel uitgeschreven;
- lange optelling gedeeltelijk uitgeschreven;
- lange optelling gedeeltelijk uitgeschreven in happen van tien, ondersteund door streep-in-de-lucht en strepenschema op papier;
- lange optelling kort uitgeschreven in onderdelen, ondersteund door streep-in-de-lucht en strepenschema op papier;
- verdere verkorting door eenheden, tientallen, honderdtallen direkt samen te nemen.

Bij het delén zijn de verschillende notatiewijzen reeds heel precies in de voorgaande basistekst aangegeven.

We spraken zojuist over *rekenvaardigheid* in de zin van rekenvoorwaarden voor het leren cijferen. Ook dit punt is van uitzonderlijk belang en verdient aparte aandacht, omdat er verschillende standpunten over mogelijk zijn die ieder belangrijke consequenties voor de cijferleergang als geheel hebben. De meest *strikte opvatting* die trouwens het meeste is aan te bevelen indiën men de hier geschetste leergang voor het eerst volgt, gaat ervan uit dat *alle kinderen bij de start van het cijferen de tafels moeten beheersen* (ook de tafels van de tientallen) *en direkt moeten kunnen inwisselen en lenen*. Deze opvatting is daarom zo aantrekkelijk omdat op basis van deze vaardigheden snel voortgang geboekt kan worden indien men eenmaal aan het 'echte' cijferen begint – dat is één.

Maar ten tweede zullen op deze grondslag de niveauverschillen bij het cijferen veel kleiner zijn dan wanneer men aan die vaardigheidsvoorwaarden minder strak de hand houdt en ook toelaat dat de kinderen tijdens het leren cijferen de rekenvaardigheid met betrekking tot tafels, inwisselen en lenen verder opvoeren. Dit laatste hebben wij in feite gedaan. Maar achteraf bezien, is deze werkwijze in de eerste onderwijsronde niet aan te bevelen, omdat dan inderdaad de *niveauverschillen zeer groot* worden – er zijn tenslotte heel wat kinderen die spelenderwijs memoriseren maar evenzeer zijn er die veel tijd en vlijt nodig hebben om de basisvaardigheden in te slijpen. Toch is ook een al te strikt vasthouden aan rekenvoorwaarden niet aan te bevelen. We noemden het al: voor sommige kinderen vormt het cijferen op basis van contextproblemen en het daarmee verbonden handige rekenen pas een echte stimulans om allerlei vaardigheden te leren. Niettemin stellen we ons op het standpunt dat *redelijkerwijs* zoveel mogelijk aan de strikte rekenvoorwaarden vastgehouden moet worden, alvorens aan het cijferen te beginnen – zeker in eerste instantie. Redelijkerwijs betekent in dit verband dat met name het direkte inwisselen en lenen niet van alle kinderen geëist mag worden, eenvoudigweg omdat ze dit niet in enkele weken kunnen klaarspelen (te grote belasting van het werkgeheugen).

Hiermee zijn we bij de *onderwijsbaarheid* van het door ons voorgestane cijferen beland. Kun je zo'n leergang zomaar, dus los van een leerboek starten? Het antwoord daarop luidt in z'n algemeenheid: nee, niet zomaar! Er zal een plan ontwikkeld en uitgewerkt moeten worden om het cijferen van leerjaar 3 t/m leerjaar 5 te vervangen en dat is een heel karwei. Zoals gezegd, een karwei dat in het algemeen heel zwaar is voor een schoolteam alleen, want er zit nogal wat aan vast: naast het cijferen dienen ook het hoofdrekenen en het maken van toepassingsproblemen uit de bestaande methode gelicht te worden. Kortom, een belangrijk deel van de methode van de middenklassen is dan onbruikbaar geworden... Maar in wat groter verband en met ondersteuning van bijvoorbeeld begeleiders zou men het aan kunnen pakken – tenminste als alle leden van het team de werkplanontwikkeling van harte ondersteunen en zich nauwgezet op de hoogte stellen van de hiervoor genoemde punten betreffende toepassingen, eindvormen, rekenvaardigheden als voorwaarden, notatiewijzen, volgorde van opgaven, functies van contextproblemen, en van onderdelen die nog

volgen over de keuze van modellen, het belang van plaatswaarde e.d. Bovenal zal men zich in de geest die achter deze werkwijze steekt moeten kunnen vinden, welke tot uitdrukking komt in respectievelijk het tegengaan van sterk op 'trucs' en algoritmen gericht onderwijs dat immers een funeste invloed op de wiskundige attitude heeft, het proberen te voorkomen dat informele kinderlijke oplossingsstrategieën van contextopgaven en formele rekenkundige methoden uit elkaar groeien en gescheiden naast elkaar blijven staan, het verhogen van de toepasbaarheid van de cijferprocedures en het optimale gebruik van de rekenmachine en de zakcomputer, en het opvatten van cijferen als een vorm van handig rekenen dat niet per se voor alle kinderen naar de standaard-algoritmen hoeft te leiden.

Voorzichtigheid is dus geboden. Bovendien verwachten we dat binnen afzienbare tijd steeds meer methoden op de hier geschetste werkwijzen of varianten ervan zullen overgaan. Trouwens ook in dat geval zal de onderwijslast toch in hoofdzaak bij de onderwijsgevende komen te liggen. Want in tegenstelling tot de aloude cijferleergang, die door het leerboek bepaald was, is het hier geschetste cijferonderwijs kindgericht en vooral ook een groepsactiviteit waarin voor de onderwijsgevende een belangrijke taak is weggelegd.

Wat is nu de conclusie met betrekking tot de onderwijsbaarheid? Grote mogelijkheden, niet geringe moeilijkheden: er moet aan verschillende voorwaarden voldaan worden. Het onderhavige boek richt zich op ontwikkelaars i.c. methodenschrijvers, werkplanontwikkelaars van schoolteams e.a., maar tevens op studenten en onderzoekers en uiteraard op geïnteresseerde onderwijsgevers, doch daarbij de laatstgenoemden niet in de eerste plaats als ontwikkelaars beschouwend. We willen geen overspannen verwachtingen scheppen en niet suggereren dat men het cijferen in een handomdraai zou kunnen veranderen: vernieuwing is geen spectaculaire actie maar een noeste ambachtelijke bezigheid. Wel zal het mogelijk zijn om eens te starten met bijvoorbeeld delen – dus om niet direkt alles te veranderen! Sterker nog: dit boek kan hiertoe juist een stimulans zijn.

Dit gezegd hebbende, richten we ons vervolgens op de keuze van de *meest geëigende modellen* voor de cijferprocedures van de basisoperaties vermenigvuldigen en delen, dat wil zeggen eigenlijk alleen op het vermenigvuldigen, omdat we bij het delen geen duidelijke alternatieven hebben doch slechts kleinere nuance-verschillen. Vermenigvuldigen volgens het kruispuntenmodel of via herhaald-optellen? Beide modellen zijn goed bruikbaar – zoals uit de voorgaande hoofdstukken moge blijken. Als we nu alles overziend, zouden moeten kiezen, zou *onze keuze* die van *het herhaalde optellen* zijn. De twee belangrijkste redenen daarvoor zijn de volgende: ten eerste sluit deze aanpak goed aan bij die van het delen zodat in feite alle basisbewerkingen van het cijferen op elkaar afgestemd zijn, en ten tweede past herhaald optellen beter bij de 'natuurlijke' werkwijze die kinderen bij het maken van contextproblemen hanteren – consistentie en toepasbaarheid zijn dus de belangrijkste motieven. Het kruispuntenmodel en het rechtshoeksmodel zijn daarnaast uiteraard belangrijke modellen waarmee de kinderen bij de begripsvorming van vermenigvuldigen in aanraking gebracht (moeten) worden: belangrijke eigenschappen kunnen ermee zichtbaar worden gemaakt, grootheden kunnen ermee 'gekruid' worden en later bij breuken en komma-

getallen zijn de genoemde modellen zeer nuttig. Maar zoals gezegd, specifiek voor het cijferen bedoeld, verdient de herhaald-optel-methode wellicht toch de voorkeur, zij het ondersteund door gebaar en beeld van resp. streep-in-de-lucht en lijn-op-papier, en een daaraan gekoppelde korte notatiewijze.

Dan nog een enkele opmerking over het delen. De delingsalgoritme is hier gebonden aan het verdelen. Maar het zal duidelijk zijn dat ook de verhoudingsdeling (het groepjes maken) bij het herhaald-aftrek-model past. Het is zelfs zo, dat in vele leerboeken de laatstgenoemde betrekking geprefereerd wordt (de zogenaamde Greenwood-methode). Wij gaan uit van verdeelsituaties maar betrekken al snel ook verhoudingsdelingen in de deelleergang.

Dus zowel voor vermenigvuldigen als voor delen geldt dat wel één model gekozen wordt, maar dat in de contextproblemen toch alle aspecten van de twee bewerkingen vervat liggen. Welke aspecten dat kunnen zijn, werd in 'Cijferend vermenigvuldigen en delen 1' opgenomen – daar gaan we dus nu niet verder op in.

Naast de kwestie van de modellenkeuze is een veelgehoorde vraag welke aanwijzingen men de onderwijsgevende kan aanbieden of beter welk *didactisch houvast* men kan geven bij het onderwijzen in de cijferleergang zoals hier geschetst. Wanneer is een leerling aan het volgende niveau van schematisering toe? Wanneer moeten we een kind stimuleren tot een verdergaande verkorting en wanneer afremmen? Hoeveel oefenstof is noodzakelijk in een bepaalde fase? In hoeverre moeten we de kinderen vrijlaten in hun notatiewijzen en ook in hun oplossingswijzen? En wat te zeggen van de eindniveaus: hoeveel tijd moet geïnvesteerd worden in het bereiken van de standaard-algoritmen i.c. de meest verkorte cijferprocedures; wat is verantwoord en wat niet meer? ...

Zonder in detail op alle vragen in te gaan, volgen hier samenvattend wat didactische tips – in de voorgaande basistekst staan uitgebreidere aanwijzingen en in een aantal gevallen ligt de keuze bij het schoolteam zelf, namelijk als er sprake is van een keuze van de doelstellingen.

Welnu, van belang is dat kinderen vastheid van werken op een bepaald niveau van schematisering hebben. Stel dat bijvoorbeeld een leerling na 20 lessen een vermenigvuldiging als 32×56 uitrekent en noteert via happen van tien:

$$\begin{array}{l} 2 \times 56 = \\ 10 \times 56 = \\ 10 \times 56 = \\ 10 \times 56 = \end{array}$$

Het is dan van belang om te weten of dat kind de weg-terug naar de lange optelling nog ziet. Vervolgens of de eenheden-vermenigvuldiging direkt uitgerekend wordt, en de lange optelling evenzeer met vlot inwisselen gebeurt. Is dat het geval – er is dan sprake van inzicht en voldoende vaardigheid – dan kan de aanzet tot het direkt samenemen van de tientallen-vermenigvuldigingen gegeven worden. Men kan dit doen door het kind in gedachten de drie-tientallenoptelling te laten uitvoeren. Lukt dit, dan is het kind aan het volgende niveau van schematisering en verkorting toe – men kan dat ontdekken door het kind die handeling te laten verwoorden.

Ziehier de belangrijkste *steunpunten* van de voortgang van het leren, gesteld in de vorm van vragen:

- Is de weg terug open?
- Worden de basisvaardigheden beheerst – inwisselen, lange optelling, tafels?
- Kunnen de kinderen in gedachten een voorstelling maken van de actuele berekening en dus als het ware op papier een stap overslaan, kunnen ze hun handelen verwoorden?
- Hebben ze een vastheid van werken op het bestaande niveau, dat wil zeggen voeren ze de berekeningen betrekkelijk eenvoudig uit?
- En daarbij eventueel gevoegd: kunnen ze contextopgaven cijferend berekenen op het hoogste niveau wat ze op dat moment bereikt hebben en bovendien ook zelf van dit soort opgaven bedenken?

Kan men niet op alle vragen een bevestigend antwoord geven, dan is het niet vanzelfsprekend zo dat op een verdere verkorting aangedrongen wordt op dat moment. Maar het is natuurlijk niet uitgesloten om daartoe toch te besluiten als op een minder essentieel onderdeel nog niet aan de voorwaarden is voldaan, bijvoorbeeld op het direkt (mentaal) kunnen inwisselen.

Let er dus bij verdergaande verkorting op of:

- de ‘verlenging’ de leerling nog voor ogen staat (de weg-terug);
- de basisvaardigheden beheerst worden;
- begrip van plaatswaarde in verband met de basisoperaties aanwezig is;
- het zich kunnen voorstellen dat verdergaande verkortingen mogelijk zijn;
- de beheersingsraad op het actuele niveau voldoet c.q. verwoord kan worden;
- de relatie met toepassingen en contextproblemen gelegd kan worden.

In het algemeen heeft de leerling niet veel *oefenstof* voor het specifieke cijferen nodig – tenminste in vergelijking met het huidige of traditionele cijferonderwijs. Wel is het zaak om de basisvaardigheden apart te oefenen in korte tien-minuten-lesjes, juist ook omdat minder cijfervraagstukken gemaakt worden – in de voorgaande basistekst is herhaaldelijk en met nadruk op dit punt gewezen.

Op kwesties van het vrijlaten van notaties, eindniveaus e.d. zijn we reeds ingegaan. Dit zijn vooral ook onderdelen waarop de onderwijsgevenden zelf beslissingen moeten nemen. Onze aanbevelingen hieromtrent waren: hanteer in het begin beperkte vrijheidsgraden en stuur uiteindelijk zoveel mogelijk op de standaard-algoritmen aan in de laatste fase van de schematisering (dit kan overigens nog een belangrijke tijds-winst opleveren!).

In de leergang zoals die hier geschetst is, liggen tal van aangrijpingspunten voor *remediërend werk*. Om te beginnen iets over *plaatswaarde*, *optellen* en *afrekken*, dus wat aan het cijferend vermenigvuldigen en delen vooraf gaat.

Als basis voor de ontwikkeling van plaatswaarde kan het beste een *plaatswaardeverhaal* gebruikt worden, direkt verbonden met het gebruik van *inwisselmateriaal* als bijvoorbeeld M.A.B.; tekeningen van dit materiaal en wat later de *abacus*.

In het voorgaande werd daarvan een voorbeeld gegeven in de vorm van een sultan-verhaal. Het verdient aanbeveling om de doos-verpakking langwerpiger te nemen (dus de vorm van een staafje) en de kist plat (dus als een platte), dit om verhaal en mate-

riaal nauwkeurig op elkaar af te stemmen. Naar onze ervaring en ook uit onderzoek blijkt dat zo'n verhaal geweldig veel houvast biedt voor kinderen. Het maakt als het ware de overgang tussen verschillende niveaus van handelen eenvoudiger en het handelen met M.A.B. en op de abacus ligt erin verankerd en wordt erdoor gemotiveerd. In de basistekst zijn oefeningen aangegeven voor het inwisselen, dit met het oog op lange optellingen. Op een gegeven ogenblik is dit inderdaad uitermate belangrijk om te oefenen. Maar er moeten tal van oefeningen aan vooraf gaan waaraan we in dit boek geen aandacht hebben geschonken omdat ze betrekking hebben op optellen en aftrekken. Zoals:

kisten	dozen	goudstukken	
2	17	8	
1	13	18	
			+

Of:

2	17	8	
1	21	18	
			-

Vooraf het voorgestelde of gedachte handelen in samenhang met het plaatswaarde-verhaal moet aangemoedigd worden, hoewel aanvankelijk nog inwisselmateriaal en een abacus gehanteerd dienen te worden.

Zoals gezegd, kan deze werkwijze ook in remediërende zin gebruikt worden. Daarnaast is het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering zeer geschikt om te gebruiken bij kinderen die problemen hebben met toepassingen en ook voor de zwakke rekenaars die vrijwel niet in staat zijn om de standaard-vormen voor vermenigvuldigen en delen te leren. In het laatste geval kan dan op minder verkorte procedures als eindniveau gemikt worden.

En voor het overige zijn de genoemde aanwijzingen over basisvoorwaarden, notaties, e.d. ook in remediërend onderwijs bruikbaar.

Tenslotte een serie *etiketten* van onderwerpen en onderdelen die in samenhang met het hier gepresenteerde gezien kunnen worden, zonder verder commentaar neergezet ter nadere overdenking:

- zakrekenmachientjes en zakcomputers in verband met cijferen en toepassen;
- progressieve schematisering tegenover progressieve complicering;
- variabele eindniveaus;
- geïntegreerd cijferen;
- cijferen als een vorm van handig rekenen;
- zelf-overtuigende algoritmen;
- trucmatig cijferen en een a-wiskundige attitude;
- lange optelling, een vingerwijzing in de lucht en een strepenschema op papier;
- kruispuntenmodel en herhaald-optel-model: voor- en nadelen;
- inwisselen en lenen: de belasting van het werkgeheugen;
- bij alle markeringspunten in de leergang van vermenigvuldigen en delen steeds contextproblemen als uitgangspunt kiezen;

- elementaire contextproblemen laten fungeren als bron maar ook als toe-passingen;
- uitstellen van het cijferen, aansluiten bij tafels;
- alle aspecten van de operaties in contextproblemen betrekken;
- relatie tussen noteren, verwoorden en mentaal handelen;
- informele en formele rekenwijzen: aansluiten bij de werkwijzen van kinderen;
- beperking van niveaus en schematiseringen;
- basisvaardigheden en inzichten als noodzakelijke voorwaarden;
- progressieve schematisering en het leerboek;
- mogelijkheden voor het zelf ontwikkelen van een leergang;
- de relatie tussen een plaatswaarde-verhaal en plaatswaarde-materiaal;
- mogelijkheden voor remediërend werk;
- de toekomst van het gangbare cijferen gericht op standaard-algoritmen;
- tijdwinst...

V NADERE TOELICHTING

We bespreken hier de kritische punten van het onderhavige boek, die in twee discussiebijeenkomsten met een aantal onderwijsmensen naar voren gebracht zijn.¹ Aan de hand daarvan proberen we onze denkbeelden hier en daar nog wat nader toe te lichten of aan te scherpen. Let wel: we presenteren hier onze eigen opvattingen en geven geen verslag van de gevoerde discussies. Wel is het zo dat we vrijwel in alle gevallen ook de mening van een of meer van de geraadpleegde deskundigen vertolken.

Er wordt vastgesteld dat de *bedoeling* wellicht nog te weinig expliciet naar voren komt: het gaat hier niet alleen om het aanleren van algoritmen, maar vooral ook om de ontwikkeling van algoritmen. En in verbinding daarmee ook om hoofdrekenen, schatten en het maken van toepassingen. Om die reden dient de effectiviteit van de geschetste leergang ten opzichte van de traditionele aanpak dan ook niet te zeer beklemtoond te worden: het gaat immers om meer dan alleen het boeken van tijdswinst, hoe belangrijk dat op zich ook mag zijn.²

Thans wordt het onderwijs in de middenklassen beheerst door trucmatig werken, wat de vorming van een anti-wiskundige attitude in de hand werkt (zie ook het volgende hoofdstuk). Juist ook door het uitstellen van het algoritmiseren, en door het cijferen te beschouwen als een vorm van handig (c.q. handiger) rekenen, kan dit gevaar dat van het overheersende mechanistische rekenen uitgaat, bezworen worden. Hetgeen overigens niet wil zeggen dat de kinderen geen algoritmen zouden moeten leren. Zeker niet. Maar ze leren die algoritmen niet algoritmisch en niet los van de overige rekenactiviteiten, zoals flexibel rekenen en toepassen – dat is de kern!

Vooraf ook de door ons ondervraagde praktijkmensen beklemtonen het belang van de *basisvaardigheden* en wel speciaal kennis van de tafels.³ Aan het einde van het tweede en het begin van het derde leerjaar kunnen de tafels van vermenigvuldiging (en deling) het beste ingeoeffend worden. Men moet er vooral voor zorgen dat er geen tijdsruimte tussen het leren van de tafels en de start van het cijferend vermenigvuldigen ligt. Het oefenen van de tafels moet dus aansluiten op de cijferleergang, of beter: ze moet deze leergang overlappen. Sommige kinderen worden namelijk vooral door het cijferen gemotiveerd de tafels in te slijpen. Nog nauwkeuriger gezegd: het leren van de tafels en het leren cijferen lopen naadloos in elkaar over, beide aangezet vanuit enkelvoudige toepassingsproblemen. Wacht men te lang met het aanleren van tafels (bijvoorbeeld tot het vierde leerjaar of nog later) dan lukt het bijna niet meer om ze te memoriseren, start men te vroeg dan zakt de kennis weer weg en kan men bij het cijferen opnieuw met het memoriseren beginnen.

Vrijwel iedere deskundige op het gebied van het rekenonderwijs is het erover eens dat het belang van de basisvaardigheden thans niet allereerst onderkend wordt. Als één

van de belangrijkste oorzaken van de onvoldoende beheersing van de tafels wordt het te lang uitstellen van het inoefenen beschouwd: vanaf het begin van het derde leerjaar is het rekenonderwijs in vele methoden (helaas) steeds meer een 'papieren' onderwijs, een individuele aangelegenheid.⁴ Het gevolg daarvan is dat de kansen om gemeenschappelijk te oefenen steeds kleiner worden – een voor vele kinderen funeste gang van zaken.

Kortom: start in de tweede helft van het tweede leerjaar met het memoriseren van de tafels van vermenigvuldiging en begin in het derde leerjaar met het automatiseren van de 'tafels' van getallen boven de tien, dus met het cijferen, en vervolg het cijferen met 'tafels' waarvan de vermenigvuldiger groter dan tien is. Zodoende vormt het memoriseren de grondslag voor het automatiseren en komt het cijferen goed op tafel.

Sterk geïndividualiseerde methoden leiden tot een *papieren* rekenonderwijs, waarin de onderwijsgevende voornamelijk de functie van *administrateur* vervult. Er is ook een *uitbeeldende* werkwijze waarin de onderwijsgevende voornamelijk uitlegt en de rol van *explicateur* speelt. Het hier bedoelde reken-wiskundeonderwijs verdraagt echter noch de papieren aanpak noch de beeldende werkwijze, maar vraagt veeleer een *fluwelen* onderwijshand. Deze onderscheidt zich door een grote terughoudendheid en ingetogenheid ten aanzien van het uitleggen hoe iets 'zit' of hoe iets moet. Onderwijs wordt aldus opgevat als een sociaal gebeuren, waarin ieder kind kan samenwerken met ieder ander, kennis kan nemen van verschillende werkwijzen en gelegenheid krijgt om vooruitgang te boeken. De onderwijsgevende stimuleert, lokt nieuwe werkwijzen uit, waardeert een bepaalde methode, maakt gedifferentieerd werken mogelijk, kortom doet alles wat een '*educateur*' betaamt.

Deze attitude nu kan het grote struikelblok vormen bij het in praktijk brengen van onder meer het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering. Het vraagt immers van de onderwijsgevende een andere instelling dan thans algemeen gebruikelijk is, namelijk het mogelijk maken van zelf-ontdekken, het zelf-uitvinden van algoritmen door het vermijden van instant-uitleg en het aangrijpen van kinderlijke werkwijzen voor het sturen van het onderwijs over langere termijnen.⁵ Daarbij wordt de kinderen gelegenheid gegeven over elkaars werkwijzen te praten en te reflecteren; er is in het onderwijs ruimte voor dialoog en voor samenwerking.

Nu zou dit alles niet veel meer dan holle agogische praat zijn wanneer deze ideeën niet inhoudelijk onderbouwd waren en niet verweven zijn met concrete leerstof. Dit nu is met het cijferen volgens het hier gepresenteerde concept duidelijk wel het geval.

Men doet er als onderwijsgevende of als schoolteam het beste aan, indien men deze aanpak zou willen invoeren, om te starten met het delen, omdat de wijze waarop deze algoritme aangeleerd wordt, nog het dichtst bij de traditionele methode ligt.

Nu kan men niet verhelen dat het gevaar aanwezig is dat met het onderhavige cijferprogramma een belangrijk deel van de (schijnbare?) *zekerheid* die het huidige cijferonderwijs uitstraalt, ondergraven wordt.⁶ We zetten 'schijnbare' tussen haakjes, omdat verschillende van de discussianten menen dat de huidige problemen in het cijferonderwijs verdoezeld worden en onder het tapijt van het papieren quasi-geïndividualiseerde onderwijs geveegd worden. Waardoor kan die zekerheid ondergraven

worden? Wat zijn de voordelen van de traditionele cijfermethoden in dit opzicht? Hoe kan men meer greep op het hier geschetste onderwijs krijgen?

Men zal allereerst vooraf beslissingen moeten nemen over:

- de beoogde eindvorm van de algoritmen van vermenigvuldigen en delen;
- het model dat men bij het vermenigvuldigen wil volgen;
- de voorwaarden ten aanzien van de basisvaardigheden bij de start van de leergang;
- de mate van strakheid die men wil hanteren in het onderwijs wat betreft de differentiatie in niveaus;
- de oefenstof en wel speciaal de contextproblemen.

Zoals gezegd kan men in eerste ronde een manier van werken volgen die heel dicht bij de thans gangbare ligt, dus een strak geleid onderwijstraject afleggen dat vooral door de onderwijsgevende zelf (vooraf) is uitgestippeld en uitkomt op de gebruikelijke standaardalgoritmen. Men verschaft zich dan alle zekerheden die ook het traditionele cijferonderwijs kenmerken – zekerheden dan weliswaar gezien vanuit het oogpunt van de onderwijsgevende. Deze handelwijze is op zich legitiem, maar in z'n uiterste consequentie strijdig met de uitgangspunten van de progressieve schematisering omdat daarin de progressie in de leergang primair door de kinderen zelf bepaald wordt. Hoezeer een zekere mate van strakheid in een eerste onderwijsrunde ook te verdedigen ja zelfs aan te bevelen is, toch zouden we op enkele punten een zekere versoepeling willen bepleiten, zonder overigens de behoefte aan een stevig houvast te bagatelliseren. In de twee discussiebijeenkomsten vormden de zojuist genoemde punten over einddoelstellingen, modelkeuze, voorwaarden, 'strakheid' en contextproblemen de belangrijkste gespreksthema's.

De algemene instelling van de onderwijsgevende en de kwestie van de voorwaarden zijn in het voorgaande reeds beschreven. In het volgende zullen de overige kernpunten besproken worden, te beginnen met de einddoelstellingen.

Zoals aangeduid, is ons oogmerk daarbij om duidelijke didactische oriëntatiepunten in de cijferleergang van de progressieve schematisering te plaatsen, voorzover dat na al het voorgaande nog nodig mocht zijn.

Over de *eindvormen van de algoritmen* kan men verschillend denken. En dat gebeurt dan ook. Kiest men als eindalgoritme de thans gangbare standaardalgoritmen, dan doet men dit voornamelijk omdat de ouders zulks wensen.⁷ Didactisch gezien is het echter bijzonder inefficiënt om ook de allerlaatste verkortingsstap te willen zetten, blijkens ervaring en onderzoek (zie daartoe de overzichtspublicaties van Suydam en Dessart en van Sowder, welke in het volgende hoofdstuk aangehaald worden).

Welke is die laatste stap?

Voor vermenigvuldigen is dit in geval van bijvoorbeeld 134×251 , de stap van de volgende notatiewijze:

$$\begin{array}{r} 100 \times 251 = \\ 30 \times 251 = \\ 4 \times 251 = \text{————} + \end{array}$$

naar het standaardschema:

$$\begin{array}{r} 251 \\ 134 \times \\ \hline \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} +$$

welke niet per se nodig is, maar door vele leerlingen zeer wel gezet kan worden. Maar het is vooral de overgang van het ene schema naar het andere bij het delen dat problemen kan opleveren. We doelen hier enerzijds op de notatie van de factoren onder elkaar en anderzijds op de standaardnotatie:

$$\begin{array}{r} 28/20272 \setminus \\ \hline 19600 \quad 700 \\ 672 \\ \hline 560 \quad 20 \\ 112 \\ \hline 112 \quad 4 \\ 0 \quad 724 \end{array}$$

Deze kan omgezet worden in:

$$\begin{array}{r} 28/20272 \setminus 724 \\ \hline 196 \\ 67 \\ \hline 56 \\ 112 \\ \hline 112 \\ 0 \end{array} \quad \text{of} \quad \begin{array}{r} 724 \\ 28/20272 \setminus \\ \hline 196 \\ 67 \\ \hline 56 \\ 112 \\ \hline 112 \\ 0 \end{array}$$

Deze transformatie lijkt op papier probleemloos, maar in werkelijkheid blijken er belangrijke obstakels te zijn, die zich trouwens ook bij het vermenigvuldigen kunnen voordoen. We gaan in het bovenstaande immers uit van de veronderstelling dat kinderen de deelprodukten en deelquotiënten direkt op de aangegeven wijze (kunnen) uitvoeren. Maar dat is zeker bij het delen niet altijd het geval. Nu laat de wat minder verkorte notatiewijze toe dat kinderen die een verkeerde afschatting gemaakt hebben – bijvoorbeeld zes honderdtallen afgehaald in plaats van zeven – deze gemakkelijk kunnen herstellen door er nog eens een hap van dezelfde orde van grootte af te nemen, maar een dergelijke ‘fout’ levert bij standaardnotatie grote problemen op (kinderen schrijven dan bijvoorbeeld eerst een zes op een plaats en daar dan nog ‘n één achter!’)⁸ We kunnen het ook anders zeggen: de minder verkorte werkwijze stelt minder hoge eisen aan zowel het noteren als het (hoofd-)rekenen en tevens kunnen de onderscheiden notaties op tal van (onverwachte) onderdelen interfereren, terwijl in de tijd gezien de laatste verkortingsstap vrijwel geen leerwinst bij het uitrekenen oplevert, maar juist wel een enorme onderwijstijd vergt!

Gelet op dit alles, lijkt het aan te bevelen om als regel de één na laatste trede van de verkortingsstap als einddoel te kiezen, en de laatste standaardtrede als uitzondering voor die kinderen die goed kunnen hoofdrekenen en het niet nodig hebben tafelpro-

dukten en verdubbelingstabellen naast de opgave te plaatsen, zoals in de wat minder verkorte eindvorm gebeurt.

De vraag is echter of deze (kleine) verandering in einddoelstelling landelijk wordt aanvaard. Afgaand op de geluiden die in het tijdperk van zakrekenmachine en zak-computer steeds luider klinken en ons oproepen het cijferen helemaal af te schaffen, doet dit voorstel zelfs wellicht eerder te behoudend dan te progressief aan (zie ook het volgende hoofdstuk).

Overigens merkt een van de ervaren onderwijsmensen op, dat de delingsalgoritme vroeger vele kinderen voor onoverkomelijke hindernissen stelde, terwijl in de hier geschetste aanpak met het zojuist gestelde einddoel van de minder verkorte algoritme die problemen er in het geheel niet meer zijn – dus waar praten we eigenlijk over, aldus is haar zienswijze.⁹

Ook de keuze van een *vermenigvuldigingsmodel* is onderwerp van gesprek geweest. Algemeen uitte men waardering voor het kruispuntenmodel: het geeft visuele aangrijpingspunten, de leergang is uiteen te rafelen in tal van duidelijk geordende tussenfasen, zwakke leerlingen kunnen er goed mee overweg, er worden geen al te hoge eisen aan het rekenwerk gesteld.¹⁰ Maar men onderkende evenzeer de problemen waartoe dit model aanleiding kan geven als het gaat om toepassingen. In context-opgaven doet zich immers een vermenigvuldiging meestal niet als een 'kruising' voor, met het gevolg dat er een kloof kan ontstaan tussen de procedure die bij het 'kale' vermenigvuldigen gehanteerd wordt en de werkwijzen die de kinderen bij het oplossen van contextopgaven volgen, welke veelal op een of andere vorm van herhaald optellen neerkomen. Op deze wijze ontstaat het gevaar dat het kruispuntenmodel zich als het ware verzelfstandigt en los komt te staan van de realiteit, dus de realiteit van hun speciale werkwijzen met reële problemen.

Gechargeerd gesteld: de kinderen leren met het kruispuntenmodel wel efficiënt en probleemloos de vermenigvuldigingsprocedure, maar niet om die procedure toe te passen, en om dat laatste gaat het vooral!

Aan de andere kant wordt gesteld dat de afstand tussen het herhaalde optellen en de eindprocedure wel erg groot is. Ook zijn de tussenfasen naar de eindalgoritmen niet zo duidelijk te markeren. En dit heeft weer tot gevolg dat met name de zwakke leerlingen minder houvast hebben als ze de-weg-terug van de voorafgaande fase moeten volgen als ze vastlopen.

Dus in het herhaald-optel-model is de aansluiting met contextopgaven er wel degelijk vanwege de herhaalde optelling, maar nu wordt de cijferprocedure op zich weer bemoeilijkt!¹¹

Is er geen verbinding tussen het ene en andere model te leggen?

Dat is precies waarnaar wij gezocht hebben tijdens de ontwikkeling van de leergang volgens het herhaald-optel-model in onze eerste experimenteerronde. En we menen de oplossing gevonden te hebben, zoals uit het voorgaande mag blijken. We herhalen met steekwoorden de nieuwe accenten: laat de lange optelling al snel voorstellen door een streep-in-de-lucht-gebaar, beeldt hem vervolgens uit door het zetten van een streep-op-papier, en geef daarin door middel van kruisstrepen de happen van veeltallen (honderdtallen, tientallen, eenheden) aan, waardoor een soort kruispun-

tenmodel ontstaat. En wat ook uitermate belangrijk is: stimuleer een korte notatie-wijze van de deelprodukten waar de lange optelling als het ware achter gedacht, gestreept of geësticuleerd wordt.

Na een tiental lessen komt dan een vermenigvuldiging als 23×57 als volgt op papier:

$$10 \times 57 =$$

$$10 \times 57 =$$

$$3 \times 57 =$$

Na een twintigtal lessen verschijnt hier en daar:

$$20 \times 57 = \dots$$

$$3 \times 57 = \begin{array}{r} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} +$$

De eindfase is al in zicht!

Wat echter essentieel is, is de langzaam opgebouwde startfase waarin de kinderen de lange optelling wel degelijk helemaal uitschrijven en langzaam in de gaten krijgen dat ze de tafels (die ze ten dele beheersen) kunnen gebruiken en dat het handig is om eenvoudig tien-tafels te benutten en de lange optelling te verknippen in hapen van tien (honderd)... Steeds wordt in de beginfase van elementaire contextproblemen uitgegaan, want deze bieden de concrete ondergrond en de motivatie voor het rekenwerk.

Dit is in vogelvlucht de kern van het herhaald-optel-model in z'n definitieve versie. Hoewel men ook in deze aanpak op kleine didactische valletjes bedacht moet zijn – zoals bijvoorbeeld op het feit dat de kinderen aanvankelijk vergeten de tussenprodukten samen te voegen – lijkt een dergelijke werkwijze de voordelen van beide genoemde modellen in zich te verenigen. Dit is althans de mening van de ontwikkelaars en de praktijkmensen van de experimenteerschool.

Wat betreft het belang van het verbinden van cijferen en toepassen verwijzen we naar het volgende hoofdstuk.

Afsluitend deze opmerking: men dient bij het kiezen zowel de algoritme-ontwikkeling als de toepasbaarheid van de algoritme in de afweging te betrekken. Deze beide elementen hebben ons doen besluiten voor het herhaald-optel-model te kiezen met de zojuist genoemde visuele ondersteuning, maar deze keuze is niet voor ieder van de door ons geraadpleegde onderwijsdeskundigen zo duidelijk bepaald!

Over toepassingen gesproken: de kwestie van de *contextproblemen* vormde het belangrijkste thema van de gesprekken die wij met de onderzoekers, begeleiders en onderwijsgeevenden voerden. Van verschillende zijden wijst men erop dat de plaats en de functie van toepassingsproblemen in de leergang, zoals die in het boek geschetst wordt, niet duidelijk genoeg uit de verf komt.¹² We kunnen dus niet anders dan deze kwestie hier nog eens wat nader onder de loep nemen, dit als vervolg op hetgeen daarover in het tweede hoofdstuk van 'Cijferend vermenigvuldigen en delen (1)' reeds geschreven werd.

Welnu, globaal gesproken kunnen we drie soorten opgaven onderscheiden die voor de cijferleergang van vermenigvuldigen en delen van belang zijn.

Categorie I : kale cijfersommen.

Categorie II : enkelvoudige contextopgaven.

Categorie III: samengestelde contextopgaven.

De opgaven van categorie I van de soort 32×85 worden gebruikt voor het inoefenen van reeds geleerde cijferprocedures, maar dienen uitdrukkelijk niet als uitgangspunt voor de ontwikkeling van nieuwe procedures voor nieuwe deelgevallen, omdat ze de kinderen daartoe te weinig inhoudelijk houvast kunnen bieden.

De opgaven van categorie II kenmerken zich door hun eenvoud: ze betreffen één enkele bewerking, de leerling kan zich de probleemstelling makkelijk voorstellen, en er is weinig 'ruis' van de context.

Het gaat hier om opgaven van het type:

- in een doosje zitten 36 bonbons; hoeveel bonbons zitten er in 12 van die doosjes?
- in een restaurant worden 178 gasten verwacht, aan iedere tafel kunnen 12 personen zitten, hoeveel tafels zijn er nodig?

Welnu dit soort problemen wordt zowel voor het aanleren van nieuwe (verkorte) procedures gebruikt als voor het inoefenen van reeds geleerde werkwijzen. Stel bijvoorbeeld dat men in een bepaalde les tot de methode van het afsplitsen van een tiental wil komen, dan kan men daarvoor het bovengenoemde bonbon-probleem nemen. In ieder geval gaat men dan niet uit van het kale probleem van 12×36 . Ook wordt dit soort enkelvoudige contextopgaven voor het inoefenen van zo'n tiental-afsplijting gebruikt, naast de opgaven van categorie I.

De opgaven van categorie III zijn minder elementair dan die van categorie II: het gaat daarbij niet om één bewerking maar om een probleemstelling van meerdere operaties, de probleemstelling is bijgevolg ook minder simpel, ze ligt vaak ingebed in een ruimere tekst plus plaatjes, is soms verbonden met andere begrippen en bevat derhalve heel wat 'ruis' rond de rekenopgave.

Enkele voorbeelden:

- Het grootste aantal afleveringen van een tv-serie dat ooit verkocht is, is dat van 'Coronation Street', namelijk 1144 delen van ieder 25 minuten. Hoeveel dagen, uren en minuten zou men naar die serie kunnen kijken als die ononderbroken uitgezonden zou worden?
- John Wayne stierf 11 juni 1979. Hij liet 14 miljoen gulden na. Hij heeft 7 kinderen en is met 4 vrouwen getrouwd geweest. Zijn kinderen krijgen ieder f 7.500,- voor ieder jaar dat zij ouder zijn dan 21 jaar (op John Wayne's sterfdag). Zijn 4 vrouwen mogen de rest eerlijk delen. John Wayne's kinderen zijn respectievelijk op de volgende data geboren:
 - 7- 4-1940
 - 26- 3-1938
 - 30- 9-1935
 - 30- 8-1932
 - 6- 3-1930
 - 6-10-1927
 - 16-10-1926Hoeveel krijgt ieder kind?
Hoeveel krijgt iedere vrouw?
- 'In de tijd die U nodig heeft om deze zin te lezen, verdwijnt er 32.000 vierkante

meter bos van de aardbodem. Elke seconde verliezen we een bosoppervlak zo groot als een voetbalveld.' (Volkskrant, 19-6-1982). Klopt dit ongeveer?

- Het grootste reuzenrad van de wereld is ruim 60 meter hoog (Wenen). Het bevat 16 eerste-klas-schuitjes en 24 tweede-klas-schuitjes. In een eerste-klas-schuitje kunnen 28 mensen en in een tweede-klas-schuitje 40 mensen. Hoeveel mensen kunnen in één reuzen-zwaai-rit mee?
- Bamboe groeit snel. Sommige soorten bereiken een hoogte van 30 meter in ongeveer drie maanden. Hoe groot is de (gemiddelde) groeisnelheid per dag?
- Jan zegt: vandaag word ik 1 miljard seconden oud. Hoeveel jaar is Jan (ongeveer)?

Dit soort problemen wordt niet precies in de leergang van het cijferen geplaatst, maar wel in de buurt ervan. Ze hebben dus geen functie voor de ontwikkeling van de algoritme, maar behoren tot het domein van de toepassingen – schatten, afronden, 'globaal' rekenen kunnen daarbij soms een belangrijke rol spelen.

Voor de ontwikkeling en inoefening van de algoritmen zijn dus in eerste instantie de problemen behorend tot categorie II het meest van belang.

Nu zal het duidelijk zijn dat er geen exacte afgrenzing van de categorieën II en III te maken is.

Neem het volgende voorbeeld (naar aanleiding van Gravemeijer, 1982)¹³:

- Feyenoord moet binnenkort een belangrijke uitwedstrijd spelen tegen PSV. Het bestuur heeft er van alles aan gedaan om zoveel mogelijk supporters mee te krijgen. Er gaan 1751 personen mee. In een bus gaan 46 personen. De huur bedraagt 400 gulden per bus. Voor ieder tiental bussen krijgt men totaal f 100,- korting. Hoeveel moet men voor de bussen betalen?

De vraag is of dit probleem in de opbouwfase van de leergang van het cijferen past. Is dit een enkelvoudig contextprobleem uit categorie II? In ieder geval staat het daar dicht bij. Maar als men als onderwijsgevende vooral de gebruikswaarde ervan voor het leren van de cijferprocedure op het oog heeft, zitten er enkele elementen in de context die op dit moment verstoring kunnen werken. (Bijvoorbeeld: moet je voor drie passagiers een extra bus laten aanrukken, er kunnen immers nog wat supporters bij komen of weggaan, etc.). Wil men zich dus vooral op het cijferen concentreren, dan is de keuze van dit probleem op die plaats in de leergang wellicht onverstandig en zou men de probleemstelling wellicht wat kunnen gladstrijken. Gaat het echter om inoefenen en toepassen van een eerder geleerde procedure, dan is het juist een uitstekende opgave. Temeer omdat de informele werkwijzen die de kinderen bij het oplossen gebruiken – veelal een vorm van op-vermenigvuldigen – dicht tegen de delingsprocedure aanleunen.

Samenvattend stellen we vast dat de enkelvoudige opgaven van categorie II het hart van de cijferleergang vormen, omdat ze zowel als bron voor de algoritme-ontwikkeling gebruikt kunnen worden en tevens als toepassingen fungeren. Kale rekensommen hebben een functie bij de inoefening, en samengestelde contextopgaven bij de toepassing, zij het dat in het laatste geval ook vaak niet-cijfermatige werkwijzen gekozen worden, die echter sterk verwant zijn met de cijferprocedures, omdat ze berusten op 'additieve' methoden.

Met het voorgaande is getracht duidelijk te maken dat het dus bij het leren cijferen niet zonder meer om aansprekende contextproblemen gaat, maar dat aan contextproblemen op die plaats in de leergang ook bepaalde eisen van helderheid, eenvoud, 'niet-afleidendheid', passende getalgroottes en dergelijke gesteld moeten worden. In het algemeen zijn de aloude tekstopgaven, die een tamelijk eenvoudige structuur hebben en in een vrij zwakke context geplaatst zijn, zeer geschikt, mits men ze via een uitbeelding of verhaal wat dichterbij de kinderen brengt. Het Feyenoord-supportersprobleem in z'n meest eenvoudige vorm is daarvan een goed voorbeeld.

Het is onnodig, lijkt ons, om van dit soort opgaven voorbeelden te geven: vrijwel ieder leerboek bevat er wel wat en zo niet dan kan men ze eenvoudig zelf bedenken. Enkele trefwoorden als aanduidingen van opgaven uit categorie II:

- afbeelding van voorwerpen met prijskaartjes, zoveel van die, zoveel van die en zoveel van die, hoeveel kost dat;
- vierkantjes in rechthoekpatroon tellen, blokken in een blokkenberg, boeken, flessen in een doos, stoelen in een zaal, oppervlakte, inhoud;
- grote hoeveelheden: seconden per jaar, knikkers in een glazen pot, letters in een boek, druppels in een liter, graankorrels in een zak, tijd per jaar nodig voor eten, slapen, e.d.;
- verhoudingen: auto's van 1 : 12, hoeveel benzine voor zoveel km, snelheden van rijden, lezen, groeien, schaduwgrafieken, gewicht, geldkoers;
- combinaties maken: keuze van gerechten, samenstel van kleuren;
- verbinding met 'gemiddelde': sport, toeschouwers, snelheid;

Men kan deze opgaven los van elkaar aanbieden, maar soms is het ook mogelijk ze in een thematisch verband te plaatsen.

Als voorbeeld van een thema nemen we 'het boek' en geven met trefwoorden enkele probleem-aanduidingen:

- tellen van het totale aantal letters, het totale aantal woorden, strategieën daarbij;
- tellen van het aantal letters $e, n, \dots$
- als alle regels achter elkaar geplakt zouden worden, welke lengte zou het 'boek' dan krijgen;
- idem met de pagina's achter elkaar, hoe lang de strook;
- stel ik heb een leessnelheid van ongeveer 20 pagina's per uur, hoe lang doe ik dan over dit boek;
- hoe meten we de dikte van een pagina;
- dit boek heeft een 16e druk, hoeveel exemplaren zijn er van verkocht;
- kan ik deze boeken kopen met zoveel boekenbonnen van die prijs;
- we gaan zelf een schoolkrant (boek) maken, hoeveel pakken papier moeten we dan kopen, gegeven het aantal leerlingen en de dikte van de krant;
- hoeveel kost het kopiëren van die pagina tot en met die pagina, als een copie 15 cent kost;
- hoe lang zou het duren om dit boek over te schrijven, over te tikken;
- het officiële uurrecord typen is 9316 woorden, hoe lang zou deze typist(e) erover doen;
- de snelste printer ter wereld kan 30.000 regels van 120 leettertekens per minuut weergeven, hoe lang zou die erover doen.

Let wel, we zeggen niet dat het per se thematisch moet, zeker niet, maar wel dat het soms zo kan.

Naast de genoemde onderwerpen als

- grote hoeveelheden,
- verhoudingen,
- combinatorische problemen,
- oppervlakte, inhoud,
- gemiddelde,

waarmee contextproblemen verbonden kunnen worden, is het ook dienstig om de twaalf modellen die in de Wiskobaspublicatie nr 10 genoemd worden in het oog te houden, omdat deze aangrijpingspunten voor problemen bieden (we doelen op het boomdiagram, de tweezijdige getallenlijn, het rechthoeksmodel, sprongen op de getallenlijn e.d.). Men is er dan van verzekerd dat zoveel mogelijk aspecten van de operaties vermenigvuldigen en delen verzorgd worden. Tevens maakt deze verscheidenheid van verschijningsvormen het mogelijk een grote variatie in de verzameling enkelvoudige contextopgaven aan te brengen.

Hou dus zowel de categorieën, de onderwerpen, de al dan niet thematische inleidingen en de aspecten (modellen) in het oog, alsmede de verbinding met flexibel rekenen en schatten, en laat de kinderen zelf ook problemen bedenken – aldus luidt ons algemene advies, waarbij we vooral ook op *het belang van enkelvoudige contextopgaven* wijzen voor de opbouw van specifiek cijferen. Snoei, vergeleken met de thans gangbare cijferaanpak, drastisch in de opgaven van categorie I.

Dan nog iets over de *generaliseerbaarheid van de werkwijze* die bij de progressieve schematisering gevolgd wordt.¹⁴ Een van de discussianten interesseerde zich met name voor deze algemene probleemstelling. We kunnen er hier slechts dit van zeggen: we proberen met deze leergang de kloof te overbruggen die er bestaat tussen enerzijds de kinderlijke werkwijzen bij toepassingsproblemen en anderzijds de volwassen cijferprocedures die ze moeten leren. (Dat hier een kloof is, blijkt uit onderzoeksgegevens die in het volgende hoofdstuk vermeld staan). Die schakeling nu is een algemene didactische opgave: brengt men die niet tot stand dan ontstaan er als het ware twee gescheiden systemen van werken – zoals blijkt. Daarbij ligt uiteraard het aangrijpingspunt bij de ‘natuurlijke’ kinderlijke werkwijze, maar het eindpunt bij de ‘volwassen’ aanpak.

Nu kan men zich afvragen hoe ‘natuurlijk’ die aanpak van de kinderen wel is. Speelt het onderwijs hier een rol? In het algemeen natuurlijk wel, maar onafhankelijk van het onderwijs is het zo dat optellen (aftrekken) het primaat heeft boven het vermenigvuldigen (delen) – een welhaast ‘logische’ noodzaak. Bijgevolg is de gesignaleerde additieve aanpak van vermenigvuldigings- en delingsproblemen aanvankelijk heel natuurlijk. Goede leerlingen herkennen al snel het vermenigvuldigen en delen als zelfstandige operaties. Maar voor een derde tot de helft van de kinderen uit de middenklassen is dat beslist niet het geval: deze groep leert weliswaar de vermenigvuldigings- en delingsalgoritmen, maar werkt in toepassingssituaties ‘primitief’ i.c. additief. Naar onze mening is dit uiteenlopen van de ‘algoritmische’ en de ‘informele’ aanpak bij enkelvoudige contextproblemen slechts te vermijden indien vanaf de start van

de ontwikkeling van de algoritmen de verbinding met (eenvoudige) contextproblemen behouden blijft. De noodzaak van dat schakelen is naar onze mening het enig generaliseerbare in de onderhavige didactiek van het leren cijferen volgens progressieve schematisering, die zoals uit het voorgaande blijkt, wezenlijk verschilt van de gangbare traditionele en moderne werkwijzen.¹⁵

We besluiten met een lang citaat van Freudenthal waarin de *mogelijkheden en moeilijkheden* van de progressieve schematisering nog eens *in vogelvlucht* beschouwd worden.¹⁶

‘Het cijferen wordt volgens Wiskobas onderwezen in een proces van progressief schematiseren: in psychologisch begrijpelijke stapjes geleerd:

- vanuit het (met behulp van de abacus) inzichtelijk inwisselen naar het schema van ‘ $8 + 5 = 13$; 3 opschrijven 1 onthouden enz.’,
- vanuit het inzichtelijk vermenigvuldigen (als herhaald optellen of in het kruispuntenmodel) naar het schema van cijfersgewijs vermenigvuldigen, 0 aanhangen, optellen enz.),
- vanuit het inzichtelijk delen als herhaald aftrekken naar de welbekende staartdeling toe.

Ik sprak van stapjes: bij elk nieuw stapje wordt een verworven inzicht geschematiseerd. Dit is dan het progressief schematiseren. Een fraaie theorie, voor didactische lekkerbekken om van te smullen. Maar bij die theorie hoort veel meer dan de systematiek van die stapjes. Ik bedoel de wetenschap, dat sommige leerlingen van drie stapjes één maken, dat sommige leerlingen andere routes kiezen, dat stapjes over drempels leiden waar je kunt struikelen, dat progressieve schematisering geen eindterm – voor allen geldig – betekent, dat progressieve schematisering een gelegenheid is – hoort te zijn – voor de onderwijzer om leerprocessen te observeren en te sturen, ook om leerlingen te beletten stapjes van inzicht naar schema te simuleren (d.w.z. onbegrepen uit te voeren).

Progressieve schematisering, aveerchts toegepast, is: de hele klas of groep in het gelid op te laten rukken, al die stapjes van inzicht naar schema door allen op hetzelfde moment te laten voltrekken. Dat is wat je krijgt, althans kunt krijgen, als je progressieve schematisering in een boekje neerlegt: elke leerling de progressie volgens het systeem, ‘volgens het boekje’, te doen doorlopen.

Het onderzoek naar progressieve schematisatie is bij het IOWO nog in volle gang. Men begint de individuele leerprocessen onder de knie te krijgen. Maar daar kun je lang niet mee volstaan. Leerprocessen voltrekken zich veelal kollektief, althans pseudo-kollektief: de knappe leerlingen geven door een goed voorstel of antwoord van hun inzicht blijk, andere worden meegesleept en de rest simuleert het te snappen. Hoe kun je dit voorkomen? In klasseverband vermoedelijk niet. Zou het door middel van werken in groepjes wél lukken? Is bij samenwerken in groepjes de kans niet nóg groter dat de knappe leerling aan de minder knappe het ‘foefje uitlegt’? Inderdaad, en om dit te voorkomen is er heel wat meer nodig dan een weldoortimmerd systeem van progressieve schematisatie. Je moet aansturen op de ontwikkeling van wiskundige attitudes van leerlingen (en onderwijzers).’

VI OVERZICHT ONDERZOEK CIJFEREN

In 'Cijferend vermenigvuldigen en delen (1)' (Treffers, 1979) zijn we kort en globaal beschrijvend op de verschillende aanpakken van het cijferonderwijs ingegaan. Die beschrijving daarvan zal nu wat genuanceerd worden. We onderscheiden vier richtingen en gaan na wat onderzoek over de effectiviteit van de onderscheiden werkwijzen heeft uitgewezen. Kan onomstotelijk de slechtste en|de|beste methode van het leren cijferen aangewezen worden op grond van onderzoeksresultaten?

Dit is de vraag die we hier onder meer trachten te beantwoorden.

1 VIER RICHTINGEN

We onderscheiden binnen het cijferonderwijs:

- het traditionele cijferen op mechanistische grondslag;
- het wiskundige cijferen op inzichtelijke basis;
- het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering;
- de nieuwe hoofdrekenbeweging.

De kenmerken van deze richtingen zijn reeds op verschillende plaatsen nader uiteengezet. Om die reden kunnen we hier met een korte samenvatting volstaan.

Welnu, het traditionele cijferonderwijs is geordend naar toenemende complexiteit van de opgaven c.q. de grootte van de getallen, grofweg gesteld. Per geval wordt zo direct mogelijk naar de eindvorm van de standaard-algoritme toegewerkt. Dat gebeurt 'blind' of na een korte verklarende introductie op inzichtelijke basis. Het cijferprogramma is geïsoleerd van hoofdrekenen en toepassingen. Er wordt vrijwel geen gebruik gemaakt van positie-materiaal.

Het moderne cijferen van het wiskunde-onderwijs op de basisschool daarentegen benut wel veelvuldig positiematerialen en schema's. Daarmee wordt beoogd een inzichtelijke grondslag van de cijferprocedures te leggen. Voor wat de toenemende complicering betreft, komt de aanpak in grote lijnen overeen met de traditionele werkwijze.

De kenmerken van het geïntegreerde cijferonderwijs volgens progressieve schematisering zijn na het voorgaande in dit boek genoegzaam bekend. Ook zijn we eerder op de verschillen tussen het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering met de voornoemde werkwijzen ingegaan – complicering tegenover schematisering en geïsoleerd cijferen versus geïntegreerd cijferen, dat zijn de meest in het oog springende verschillen.

De nieuwe hoofdrekenbeweging tenslotte bant het leren van de cijferprocedures in standaardvorm volledig uit en stelt daar flexibel rekenen of hoofdrekenen voor in de plaats. In bepaalde opzichten komt deze stroming overeen met het cijferen volgens

progressieve schematisering waarin het leren cijferen eveneens als een vorm van steeds handiger rekenen wordt gezien. Schatten, gebruik maken van eigenschappen, afronden en compenseren op basis van bepaalde rekenvaardigheden en gememori-seerde kennis worden hier benadrukt.

Door alle tijden heen hebben de rekenmethoden en later de rekenwiskundemetho-den hun cijferonderwijs een eigen gezicht proberen te geven; een aanzien dat niet altijd precies in een van de vier genoemde hokjes past. En ook binnen de genoemde richtingen zijn er tal van nuanceringen op te merken.

Zo zijn Bouman en Van Zelm (1918) in hun rekenmethode weliswaar te kwalificeren als traditioneel in de zojuist genoemde zin, maar ze leggen toch betrekkelijk grote nadruk op inzicht. Diels en Nauta (1936) daarentegen beklemtonen veel meer het hoofdrekenen, terwijl Lugtmeijer en Boers (1954) in 'Naar aanleg en tempo' vrijwel uitsluitend mechanistisch te werk gaan. Alle drie traditionele cijfermethoden, maar wel met aanzienlijke onderlinge verschillen!

Bij de moderne cijfermethoden op inzichtelijke grondslag is het al niet anders. 'Ele-mentair wiskundig rekenen' (Van 't Hof e.a., 1970) werkt op inzichtelijke grondslag maar hanteert daarbij geen concreet positiemateriaal. 'Hoiy Rekenen' (Beek, e.a., 1974) gebruikt daarentegen wel M.A.B.-materiaal en leert de kinderen in verschil-lende talstelsels te rekenen. En 'Getal in beeld' (Brinkman e.a., 1972) doet dit laatste ook maar heeft daarnaast ruimte voor schatten en handig rekenen en het onder-scheidt zich door een verfijnde didactische aanpak voor het cijferen. Alle drie moder-ne cijfermethoden, maar wel met aanzienlijke onderlinge verschillen!

Ook het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering is nogal divers. En dan te bedenken dat deze aanpak nog betrekkelijk nieuw is. Althans nieuw voor zover het concreet uitgewerkt is voor het onderwijs van alledag. Want reeds Kühnel (1925/5) en Wertheimer (1945) propageerden deze werkwijze voor het cijferonder-wijs in algemene bewoordingen. De eersten die het cijferen volgens progressieve schematisering in Nederland concreet gestalte gaven, waren Wanders en Bohnke in hun 'Boeiend rekenen', althans zij gaven een aanzet daartoe. Maar als men deze aan-pak met die van Wiskobas vergelijkt (zie ook De Jong, 1977), zal men getroffen wor-den door de grote verschillen. En wel in die zin dat Wiskobas veel meer nadruk legt op de relatie cijferen-handig rekenen-toepassen en op de verschillende fasen die bij de schematisering doorlopen worden. Bij Hutton (1977) vindt men die nadruk op toe-passingen evenzeer, terwijl Teule-Sensacq en Vinrich (1982) vooral het schatten en hoofdrekenen bij het leren cijferen beklemtonen. Dus ook hier is sprake van verschil-lende nuances. Zonder onbescheiden te zijn moet trouwens vastgesteld worden dat de Wiskobasgroep als eerste en enige het algemene concept van het geïntegreerde cij-feren volgens progressieve schematisering gedetailleerd en gefundeerd heeft uitge-werkt.

De nieuwe hoofdrekenbeweging die afschaffing van de standaardalgoritmen bepleit, heeft geen duidelijk uitgewerkt programma, zodat hier nog geen interne verschillen zijn aan te wijzen. In Nederland onderschrijft men, voorzover wij hebben kunnen nagaan, de uitgangspunten van deze beweging niet in z'n uiterste consequentie. Wel

hoort men hier en daar geluiden die voorzichtig op een zekere versoepeling van de einddoelen van het cijferen wijzen.

Hoewel er dus sprake is van vier globale richtingen, dienen we duidelijk onder ogen te zien dat zo'n indeling zeer globaal is. Met deze grove windwijzer in onze bagage zullen we ons op het onderzoek betreffende het cijferen richten.

2 ONDERZOEK TRADITIONEEL CIJFEREN OP MECHANISTISCHE GRONDSLAG

Is mechanistisch of 'blind' cijferonderwijs minder efficiënt dan cijferen op inzichtelijke basis? Voor we op de vraag ingaan eerst dit: efficiency hoort uiteraard niet het enige en doorslaggevende criterium te zijn. Dit blijkt bijvoorbeeld uit de kwestie van de attitudevorming. Wat te denken als kinderen in de middenklassen vrijwel uitsluitend op het leren van onbegrepen algoritmen en 'trucs' getraind worden? Op dit punt heeft Erlwanger (1973, 1975) baanbrekend onderzoek verricht. Zijn bevindingen spreken duidelijke taal: kinderen aldus 'getraind' hebben een volstrekt vertekende opvatting van wiskunde en een geheel op-trucs-gerichte attitude ontwikkeld welke een belemmering vormt voor het vervolg-onderwijs op inzichtelijke basis. Dit op zich zou al voldoende reden kunnen zijn om het 'blinde' cijferen af te zweren.

Maar ook uit het oogpunt van efficiency zijn de resultaten van het traditionele cijferonderwijs op mechanistische grondslag bepaald niet indrukwekkend, zoals uit het klassieke onderzoek van Brownell blijkt. (Brownell, 1947; Brownell en Moser, 1949). Brownell 'kruiste' twee cijfermodellen van aftrekken met een inzichtelijke en een mechanistische aanpak, zodat vier verschillende werkwijzen ontstonden die onderling werden vergeleken. Het ene aftrekmodel was de gangbare werkwijze van het lenen en het andere de methode van het gelijke-optellen welke thans vrijwel niet meer voorkomt. (Neem bijvoorbeeld $43 - 18$: ' $3 - 8$ ' gaat niet, tel bij de 3 eenheden 10 eenheden op en voeg, om dit goed te maken, bij de aftrekker een tiental bij het ene tiental dat er al staat; we krijgen dan $4(13) - 2(8)$ dat is $2(5)$). Nu bleek in alle gevallen de inzichtelijke aanpak superieur aan de 'blinde' methodiek om welk cijfermodel het in het ene of andere geval ging. Ook in andere onderzoeken wordt de superioriteit van de inzichtelijke aanpak bevestigd (Wheeler, 1972; Punnett, 1974). Dit geldt temeer als men ook de retentie (het vasthouden) van het geleerde in het onderzoek betreft (zie voor een overzicht Suydam en Dessart, 1976, 1980).

Zijn deze resultaten rationeel te verklaren? Dat blijkt inderdaad het geval. De 'blinde' mechanistische werkwijze voert immers noodzakelijkerwijs naar een leergang met talloze deelgevallen die min of meer van elkaar losstaan en derhalve geval voor geval als relatief zelfstandige algoritmen ingeslepen moeten worden. Zo vormt de nul een apart probleem, maar twee nullen ook, drie-cijfergetallen geven na behandeling van twee-cijfergetallen nieuwe moeilijkheden, lange optellingen met deeltallen boven de twintig moeten onderscheiden worden van optellingen met twee termen en ga zo maar door. Dit alles vraagt uiteraard nogal wat oefening en kost bijgevolg veel tijd, temeer, zoals gezegd, omdat ook de retentie door de blinde aanpak bij de toch tamelijk complexe algoritmen voor vermenigvuldigen en delen bemoeilijkt wordt.

Ook dat laatste is begrijpelijk. De kinderen kunnen immers niet terugvallen op een concreter niveau van uitvoering van de cijferhandelingen. Ze moeten zich de voorschriftenserie van de standaard-algoritmen volledig herinneren en lukt dat niet dan houdt alles op. Het is vergelijkbaar met het zich te binnen brengen van bijvoorbeeld de telregels van het bowlingspel, waarvan de voorschriften tamelijk arbitrair zijn en niet op een onderliggend systeem van begrippen rusten. Er valt dus niet veel aan 'in te zien'. Bij het cijferen is dit echter wel het geval. Maar voor de kinderen die in het onderwijs onvoldoende gelegenheid gehad hebben zich concreet op de begrip-matige basis van de algoritmen te oriënteren, zouden cijferregels wel eens even willekeurig kunnen lijken als de telregels van het bowlingspel.

Een belangrijk bijkomend verschijnsel is overigens nog gelegen in het feit dat de kinderen bij een blinde aanpak op zelfstandige wijze (verkeerde) procedureregels uitvinden, die systematisch toegepast worden. Men heeft de laatste jaren nogal wat diagnostisch onderzoek naar deze zogenaamde 'bugs' verricht (zie bijvoorbeeld Cox, 1975). Een 'bug' met de kracht van een breinbreker vindt men bijvoorbeeld in 'Cijferend vermenigvuldigen en delen (1)' in het geval van Rudolf (pag. 165). Men benut de laatste tijd het opsporen van dergelijke systematisch gemaakte fouten als didactisch middel voor zowel de leerling (Barclay, 1980) als de onderwijsgevende (De Corte en Verschaffel, 1982), daarbij de zak- of microcomputer inschakelend. Er is tegenwoordig een tamelijk volledig zicht op mogelijke fouten bij het traditionele cijferen (zie vooral Radatz, 1980a, 1980b). Maar als we na de diagnose tot de remedie willen overgaan, zullen we in een wat andere richting dan die van het traditionele cijferen op mechanistische grondslag moeten zoeken – zoveel is uit het voorgaande wel duidelijk geworden.

Met dit vast te stellen, is echter niet alles over de waarde van het traditionele cijferonderwijs gezegd. We hebben geconstateerd dat niet het totale traditionele cijferonderwijs mechanistisch van aard is: niet alle rekenmethoden gaan immers te werk als 'Naar aanleg en tempo'. Maar de meeste traditionele rekenmethoden hebben toch wel een sterk mechanistische inslag en bijgevolg zijn de eerder genoemde feiten daarop wel min of meer van toepassing – niet alles maar wel veel van het zojuist gestelde slaat dus op de traditionele methoden terug.

3 ONDERZOEK WISKUNDIG CIJFEREN OP INZICHTELIJKE BASIS

In het algemeen gesproken is kenmerkend voor het wiskundig cijferen dat de cijferhandelingen volgens de didactische drieslag 'materiële handeling – plaatje – symbool' plaatsvindt: eerst legt de leerling bijvoorbeeld de termen van een optelling neer met M.A.B.-materiaal, vervolgens wordt de uitkomst in een M.A.B.-schema met positiestrepen genoteerd, om dan met de symbolische standaard-notatiewijze te eindigen. Nu zit het inzichtelijke van deze optelprocedure in het juiste begrip van het positie-systeem en de inwissel- en leenhandelingen die daarop berusten: een leerling die inzicht verworven heeft, is in staat de procedurehandelingen aan de hand van al dan niet voorgestructureerd positiemateriaal te demonstreren. Omgekeerd verschaft zulk

materiaal de basis voor een juiste oriëntering op de kern van de cijferhandelingen – aldus luiden de globale uitgangspunten van de didactische drieslag, of juist: de vooronderstellingen. (Dit streven naar inzicht wordt overigens nog eens onderstreept door het rekenen in verschillende talstelsels).

Nu heeft men echter niet kunnen aantonen dat de inzichtelijke werkwijze volgens dit algemene model van de ‘action-image-symbol sequence of mental activity’ de beste zou zijn. De onderzoeksresultaten zijn namelijk nogal strijdig (vgl. Ekman, 1967; Kieren, 1971; Moody, Abell en Bausell, 1971; Friedman, 1978; Shumway, 1980; Khoury en Behr, 1981).

Evenmin is een positief effect van het rekenen binnen verschillende talstelsels vastgesteld voor wat het inzicht in de cijferprocedures aangaat (McCormick, 1965; Scrivens, 1968).

Talstelsels worden trouwens door onderwijsgeevenden in de V.S. niet acceptabel geacht voor het basisonderwijs (Denmark en Kepner, 1980).

Onderzoek naar het effect van ‘multiple embodiments’ levert gemengde resultaten op (Sowder, 1980).

En hetzelfde geldt voor het oordeel van onderwijsgeevenden over het gebruik van (positie-)materiaal, waaronder M.A.B. (Fuson, 1975; Warkentin, 1975; Barnett en Eastman, 1978).

In overzichtpublicaties als van Ashlock (1979), Suydam en Dessart (1980) en Sowder (1980) treft men dan ook herhaaldelijk zinsneden aan als ‘the findings are mixed depending in part of the dependent variable’.

Wat zegt dit alles over de aard en de kwaliteit van het wiskundig cijferen? En ook: wat zegt dit alles over onderzoek van het wiskundig cijferen?

Eerst een enkele opmerking over de laatste vraag. Het onderzoek waaraan tot dusver gerefereerd werd, geeft in het algemeen geen aanwijzingen over inhoud, opzet en kwaliteit van het onderwijs waarop het stoelt. De probleemstelling is algemeen van aard en het onderzoeksobject bepaalt zich tot de oppervlaktestructuur van het leren en onderwijzen.

Neem bijvoorbeeld de research naar de effecten van ‘manipulative activities in mathematics instruction’ (Kieren, 1971, pag. 228). Daarin wordt de nadruk eenzijdig op het niveau van het mentale handelen gericht. Andere parameters als volledigheid en mate van uitgebreidheid van de cijferhandelingen worden volledig uit het oog verloren. Voorts vindt men in de rapportage niets over de verbanden tussen de niveaus van handelen, de functie van de taal en het voorstellen, de nagestreefde verkortingen en het reflecteren op het eigen handelen terug. (Zie ook de algemene kritiek op dit soort onderzoek van Lester en Kerr, 1979; Kilpatrick, 1981).

Nogmaals: wat zegt dit onderzoek dan over het wiskundig cijferen of in het genoemde voorbeeld, over het effect van het manipuleren met (positie-) materiaal?

Friedman komt na inventarisatie van het geheel van onderzoeksresultaten op dit terrein tot de volgende slotsom:

‘On the basis of recent research, it would appear that after the first grade, where the manipulative strategy has been effective in several situations, an instructional strategy that gives preeminence to the use of manipulative materials is unwarranted. In

view of the claims made for a manipulative approach to instruction in journal articles and at professional conventions, I believe that we, the research community, have an obligation to inform the practioners about this latest Pied Piper. At the same time we should urge the inclusion of the manipulative strategy in an instructional repertoire.' (Friedman, 1978, pag. 79–80).

Engelhardt zegt het zo:

'Although the action – image – symbol stages for concept attainment and intellectual development appear to be ordered, lack of confirming research and theorizing of Wittrock suggest that this conclusion may be accepted cautiously.' (Engelhardt, 1979, pag. 27).

Al met al toch een wat schrale oogst, en bepaald geen vertrouwenwekkende aanbeveling voor het onderwijs: we hebben geen positief effect van de didactische drieslag kunnen vaststellen, maar doe het toch maar zo!

Naar onze mening biedt de didactische drieslag een nogal grove karakteristiek van het wiskundig cijferen. De superioriteit ervan tegenover andere inzichtelijke benaderingswijzen, die niet zozeer het primaat bij het materiële handelen leggen, is niet vastgesteld en kan in deze algemene vorm wellicht ook niet vastgesteld worden. Sterker nog: het is op voorhand helemaal niet duidelijk of de genoemde driedeling zonder meer juist is. Vooral in kwalitatief beschrijvend onderzoek dat zich mede op observeren van onderwijsleerprocessen richt, is gebleken dat het verband tussen het handelen op de verschillende niveaus van 'action-image-symbol' veel problematischer is dan men aanvankelijk aannam en dat het werken met symbolen niet per se moeilijker hoeft te zijn dan met concreet materiaal of met plaatjes. (Bednarz en Janvier, 1982). In ieder geval leggen de kinderen de verbandingen tussen de handelingen op verschillende niveau vaak niet vanzelfsprekend (Steinberg en Anderson, 1973, Fitzgerald, 1976, Davis en McKnight, 1980). Hetzelfde kan gezegd worden van de relaties tussen samenhangende begrippen en operaties, zoals plaatswaarde, optellen-aftrekken, vermenigvuldigen-delen. Ook hier moet het verband expliciet worden gelegd ter bevordering van een vlotte leergang (Davis en McKnight, 1980; Resnick en Ford, 1981).

Al met al is duidelijk dat het cijferonderwijs op tal van onderdelen kan variëren, zoals ten aanzien van de oplossingsmethoden van de kinderen, de functie voor het zich in gedachten voorstellen van uit te voeren handelingen, het belang van het verwoorden ervan, de wijze waarop de complicering van de opgaven geordend is, de betekenis van het schatten en hoofdrekenen, de verbinding tussen de niveaus van handelen, het verband tussen verwante begrippen en operaties, het belang van de basisvaardigheden, de mate waarin geoefend wordt, de plaats van kale cijfersommen en die van tekst- en contextopgaven c.q. toepassingen.

We zullen nu eerst het eerstgenoemde punt over de verscheidenheid in oplossingsmethoden en het laatstgenoemde over toepassingen wat uitgebreider beschouwen.

Uit tal van onderzoeksverslagen kan men zicht krijgen op de verschillende oplos-

singsmethoden die kinderen hanteren. We nemen als voorbeeld de manier van cijferend aftrekken die vooral ook voor de staartdeling van belang is.

Op welke wijze lossen kinderen een aftrekking op genoteerd als '312 – 189' onder elkaar?

Ten eerste kunnen ze daarbij positiemateriaal als M.A.B. of een abacus gebruiken. Ten tweede kan de wijze van noteren verschillen: al dan niet gebruik maken van een positieschema met positiestrepen.

Ten derde kunnen verscheidene standaard-notatiewijzen gebruikt worden: bij het lenen kunnen cijfers op verschillende posities als leenplaatsen fungeren en al dan niet doorgestreept en al of niet veranderd worden, en de geleende 10 kan al dan niet genoteerd worden.

Ten vierde is gebleken dat de wijzen van oplossen, ook bij dezelfde notaties, soms sterk uiteenlopen:

- de gangbare methode van lenen en aftrekken bij '312 – 189' onder elkaar bestaat uit het lenen van een tiental, het uitrekenen van '12 – 9', vervolgens het lenen van een honderdtal, het uitrekenen van '10 – 8' en tenslotte '2 – 1';
- een variant daarvan is het uitrekenen van '12 – 9' e.d. door op te tellen, dus het volgen van de winkelmethode van het bijtellen;
- dan zijn er kinderen die bij het lenen van een tiental eerst de aftrekking van de geleende 10 uitvoeren, dus '10 – 9' in ons voorbeeld en daar dan de resterende 2 bijtellen, een opmerkelijke aanpak die mede vanuit het materiële handelen met het M.A.B.-materiaal begrepen kan worden;
- een variatie op deze werkwijze is het rekenen met tekorten $2 - 9 = \overline{7}$ (lees 7 te kort) en met dit gegeven gaan sommige kinderen een tiental lenen, waaruit volgt $10 + \overline{7} = 3$ enz.;
- tenslotte kan deze strategie ook gevolgd worden door pas aan het einde van de berekening de tekorten aan te vullen dus $2 - 9 = \overline{7}$; $1 - 8 = \overline{7}$ en dan $3 - 1 = 2$; en dan $2\overline{7}\overline{7}$ verder uitrekenen als '200 – 70 – 7'.

De grote verscheidenheid aan oplossingswijzen kan uiteraard slechts plaatsvinden indien men de kinderen niet een bepaalde werkwijze dwingend oplegt (Davis, 1967; Knights, 1973; Davies, 1978; Carnihan, 1979; Bennedbek, 1981). Het spreekt vanzelf dat ook de mate van strakheid van structurering van de aan te leren oplossingswijzen sterk kan variëren. De invloed daarvan op het leerproces is groot, ja zelfs bepalend, zoals vooral uit het onderzoek van Bennedbek (1981) blijkt.

Tot zover de kwestie van de differentiatie in oplossingswijzen, nu nog enkele gegevens over de relatie cijferen–toepassen.

Het is bekend dat kinderen de cijferprocedures slechts in beperkte mate gebruiken bij het oplossen van toepassingsproblemen. Onderzoek in Groot-Brittannië heeft uitgewezen dat ongeveer de helft van de twaalfjarigen geen optimaal gebruik maakt van de cijferprocedures voor vermenigvuldigen en delen, eenvoudigweg omdat die kinderen de betreffende operaties niet altijd goed in de 'aangeklede' opgaven kunnen identificeren (Foxmann, 1980; Hart, 1981).

Niet zozeer het lezen of rekenen op zich blijkt problemen te geven, alswel het 'vertalen' van de contextopgaven naar het rekenen toe. We mogen gevoeglijk aannemen,

dat de toepasbaarheid van de cijferprocedures in het derde, vierde en vijfde leerjaar voor vele kinderen problematisch is – ook in Nederland. Wat in ieder geval vaststaat is, dat hier een belangrijk knelpunt ligt dat in nauwe samenhang met het cijferen beschouwd dient te worden. Vergnaud stelt terecht:

'To establish the link between ordinary arithmetical situations and the relevant mathematical concepts is probably the most challenging question in mathematical education.'

'Solving a problem by choosing the right calculation is a very strong criterion for the acquisition of concepts.' (Vergnaud, 1980, pag. 263).

Waarom dienen immers cijferprocedures als ze niet toegepast (kunnen) worden? Deze vraag klemmt temeer, als we hem in het licht van de ontwikkelingen op het gebied van zakrekenmachines en zakcomputers bezien: het gebruik van deze rekendoosjes wordt bij het niet kunnen identificeren van de geëigende operaties voor een aanzienlijk deel van de kinderen evenzeer beperkt. En nu spreken we nog niet eens over complexe onderwerpen als kommagetallen en verhoudingen, waar de beheersing van enkelvoudige toepassingen aan het einde van de basisschool ver beneden de 50% ligt (Hughes, 1979; Hart, 1981).

Het lijkt evident dat de vooronderstelling als zouden kinderen in de onderbouw voldoende begrip van de basisoperaties verworven hebben, niet juist is. Het is zelfs zo dat een goede notie van bewerkingen met kleine getallen niet impliceert dat er ook begrip ten aanzien van operaties met grotere getallen is. Kortom, de vooronderstelling dat kinderen van de midden- en bovenbouw de geleerde cijferprocedures 'automatisch' kunnen en zullen toepassen op de daartoe geëigende problemen, is niet conform de onderzoeksbevindingen. En daaruit volgt dat de reken-wiskundemethoden die vrijwel geen aandacht aan enkelvoudige toepassingen besteden, in ieder geval een uiterst wankel didactische grondslag voor het cijferonderwijs verschaffen.

Er zal dus meer aandacht aan toepassingen besteed moeten worden. Maar hoe?

Suydam en Dessart komen op basis van een overzichtsanalyse van dit terrein tot de volgende aanbevelingen:

'You can help to apply computational skills by:

- 1. giving them many opportunities to solve problems;*
- 2. providing problems at varying levels of difficulty;*
- 3. having them write mathematical sentences for problems;*
- 4. having them designate the process to be used in solving a problem;*
- 5. having them note missing or extra data.'* (Suydam en Dessart, 1976, pag. 29).

Bekijken we de studies waarop hun aanbevelingen stoelen, dan blijkt de toepasbaarheid slechts vergelijkend onderzoek te zijn in relatie met de verschillende modellen die voor een bepaalde cijferbewerking gebruikt kunnen worden, zoals bijvoorbeeld de methode van het herhaald aftrekken en de standaard-delingsmethode (Van Engen en Gibb, 1956; Scott, 1963).

Om duidelijk te maken welke problemen hier liggen, nemen we als voorbeeld een onderzoek van Kratzer en Willoughby (1973) over het delen volgens de standaard-

methode ('distributive algorithm') en die van het herhaalde optellen ('subtractive algorithm') in relatie tot toepassingen.

De onderzoekers verbinden de laatstgenoemde methode met de verhoudingsdeling (groeperen) en lichten hem als volgt toe:

$$\begin{array}{r} 3/42 \\ \underline{30} \quad 10 \\ 12 \\ \underline{12} \quad 4 \\ 0 \quad 14 \end{array}$$

'How many groups of three can be made from 42? Possible answer: 10 groups of three with a remainder of 12. How many more groups of three can be made from the remainder (12)? Possible answer: 4, with no remainder.' (Kratzer en Willoughby, 1973, pag. 198).

De standaardmethode wordt aan de verdelingsdeling gekoppeld:

$$\begin{array}{r} 14 \\ 3/42 \\ \underline{30} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

'If the objects are to be divided into three equal-sized groups, how many whole sets of 10 can be distributed to each group? (one). How many sets of 10 does this use? (three). How many sets of 10 are left? (one). Can any more sets of 10 be distributed evenly to the three groups? No, but the 10 can be broken down into ones and the resulting 12 ones can be distributed so that each group receives 4 ones, and there is no remainder.' (Kratzer en Willoughby, 1973, pag. 198).

Bij beide methoden wordt gebruik gemaakt van positie-materiaal in de vorm van (bundels) stokken.

Het onderzoek levert op dat de standaard-methode beter voldoet dan de herhaald-aftrek-methode als het om het toepassen van het geleerde op relatief nieuwe cijfersommen gaat: 'this suggests that the partitioning group better understood the division process.' (Kratzer en Willoughby, 1973, pag. 203).

Hoe wordt nu dit resultaat naar de onderwijspraktijk 'vertaald'? In het bekende werk 'Classroom ideas from research on computational skills' van Suydam en Dessart (1976) staat daarover het volgende:

'Kratzer en Willoughby (1973) reported no significant differences in the achievement of fourth grades taught the distributive or the subtractive algorithm. Those using the distributive approach however, displayed a better understanding of the process.' (Suydam en Dessart, 1976, pag. 12).

Is dit een correcte weergave van de uitkomst van het gemaakte onderzoek?

Wat de onderzoekers doen, is het vergelijken van twee delingsalgoritmen:

- 1 de herhaald-aftrek-algoritme,
 - 2 de standaard-algoritme (distributieve methode),
- gekoppeld aan twee soorten delingen:

- a de verhoudingsdeling,
- b de verdelingsdeling,

en wel de combinatie 1a met de combinatie 2b, waarbij dan 2b over het geheel genomen als beste uit de bus komt. Maar het zal duidelijk zijn dat dit nog niets over de verschillende algoritme-vormen op zich zegt. Want men kan uiteraard ook zeer wel de verdelingsdeling aan het herhaalde aftrekken binden en de verhoudingsdeling aan de standaard-methode. Het is zelfs mogelijk om beide delingen aan één algoritme te koppelen. Kortom, men kan talloze vergelijkingscombinaties maken voor een en dezelfde algoritme-vorm. Hoe de uitslagen daarvan ook mogen zijn, zeker is dat ze niet zonder meer iets van de algoritme-vorm op zich, dus losgemaakt van de delings-vorm van de reële uitgangsproblemen, zeggen: algoritme-modellen en contextproblemen dienen in hun onderlinge samenhang gezien te worden.

Er rijzen nu tal van vragen:

Heeft het binden van een algoritme aan één soort deling meer effect dan aan twee soorten delingen (verhoudingsdeling en verdelingsdeling)? Welk effect heeft een en ander op zowel het leren cijferen als het oplossen van enkelvoudige contextopgaven? Leent iedere algoritme-vorm zich even goed voor een koppeling aan (bepaalde soorten) contextopgaven? In hoeverre maakt het verschil als kinderen een of andere algoritme-vorm leren met bijvoorbeeld de notie van het verdelen, en dat algoritme dan op problemen moeten toepassen waarin een verhoudingsdeling vervat ligt? En verdergaand: moet vanuit contextproblemen wel zo direct op de standaard-algoritmen aangestuurd worden, of is het niet veel beter (dat wil zeggen: ook efficiënter) om zo'n algoritme geleidelijk aan te ontwikkelen als een vorm van steeds handiger rekenen, zoals dat bijvoorbeeld met het herhaald-aftrek-model zeer wel mogelijk is – beter zowel voor het cijferen als het toepassen?

Met de laatste vraag raken we de problematiek in z'n kern. Zowel inzicht, toepassingen als standaard-vormen en leerstofordeningen worden daarin betrokken. Maar laten we ons voorlopig nog even tot de toepassingen op zich bepalen. Welnu, de genoemde vragen worden vrijwel nooit in het onderzoek over cijferen betrokken, ook niet in dat van Kratzer en Willoughby. Toepassen wordt los van het cijferen gezien: het staat er naast, is er op z'n best mee geassocieerd via een behoorlijk aantal toepassingsopgaven. Verhogen van de toepasbaarheid houdt in dit standaard-beeld van het cijferen niet veel meer in dan een verhoging van het aantal (enkelvoudige) toepassingen.

Nu bevat met name de belangwekkende studie van Hart e.a. (1981) tal van gegevens waaruit men kan afleiden, dat de meer-toepassingen-didactiek niet in alle opzichten voldoet, zeker niet voor zwakke rekenaars. Het blijkt dat kinderen die problemen met enkelvoudige toepassingen hebben, globaal gesteld één en dezelfde werkwijze volgen. Ze brengen namelijk alle basisoperaties die in enkelvoudige contextproblemen vervat liggen tot één operatie terug, te weten die van het optellen. Aftrekken wordt aldus optellen, vermenigvuldigen herhaald optellen en delen idem dito. Even-

tueel wordt naast optellen ook aftrekken als basisoperatie gebruikt voor het delen. Een en ander leidt bij vermenigvuldigen en delen tot een grote verscheidenheid aan informele oplossingsstrategieën, zoals bijvoorbeeld verdubbelen, happen van tien nemen, splitsingen aanbrengen en nog veel meer.

Welnu, met het laatste is de zwakke stee in de louter meer-toepassingen-didactiek van het traditionele en wiskundige cijferen aangegeven: de kinderen hanteren namelijk de beoogde werkwijze van het cijferend oplossen niet, dus is er eigenlijk geen sprake van het bedoelde toepassen. Aangezien ze echter in de loop van de leergangen al doende leren dat ze geacht worden een of andere bewerking te 'kiezen', gaan ze die bewerking en de bijbehorende algoritme raden. Maar daarmee verdwijnen ook de informele werkwijzen, die op zichzelf weliswaar wat lang, doch wel correct zijn. In ieder geval worden de informele 'spontane' methoden op deze manier onderdrukt en overgeslagen, terwijl ze juist de natuurlijke toegang tot verkorte werkwijzen vormen. En daarmee wordt onbedoeld een gok-maar-strategie en een op algoritmen gerichte attitude gestimuleerd, met het gevolg dat 'the child is in fact operating in mathematics within a system of his own which belongs to a different universe of discourse to that of mathematics...' (Booth, 1981, pag. 39-40). En dat is precies wat in verschillende eerdergenoemde onderzoeken is vastgesteld.

Tenslotte nog enkele resterende kwesties:

- onvoldoende beheersing van de basisvaardigheden is, naast het verkeerd uitvoeren van de procedurehandelingen, een belangrijke foutenbron bij het cijferen; memoriseren van de basisfeiten (voornamelijk tafels) verdient aparte aandacht (Cox, 1975; Cahill, Ryan e.a., 1980);
- het zich 'in gedachten' voorstellen van de materieel uitgevoerde cijferhandelingen moet sterk gestimuleerd worden teneinde de voortgang van het cijferen te waarborgen (Borghouts-Van Erp, 1978; Resnick en Ford, 1981); een plaatswaardeverhaal als dat van de sultan (zie hoofdstuk 1) kan daarbij een belangrijke steunfunctie vervullen (Veldhuis, 1981);
- de actieve betrokkenheid van de kinderen, uitgelokt door betekenisvolle probleemstellingen, kan sterk bijdragen tot het zich realiseren en voorstellen van de cijferhandelingen (Hutton, 1977; Teule-Sensacq en Vinrich, 1982).

Het laatstgenoemde punt markeert tevens de overgang naar het geïntegreerde cijferen. We zullen het in de volgende paragraaf dan ook wat uitgebreider bespreken en daarbij de progressieve schematisering betrekken.

Maar voor we daartoe overgaan vatten we het voorgaande samen.

Veel onderzoek heeft zich vooral bepaald tot de oppervlakte-structuur van het cijferen i.c. tot de didactische drieslag, ofwel de niveaus van handelen. De opbrengst ervan is, zoals te verwachten viel, zeer mager en vrijwel nietszeggend voor zowel onderwijspraktijk als theorie-vorming. We zeggen 'vrijwel' omdat de uitkomst wel opleverde dat de verbinding tussen de niveaus van handelen nog niet is opgehelderd, maar dat het voorgestelde handelen in ieder geval belangrijk is. Daarnaast leverde onderzoek 'in de diepte' op, dat de procedurehandelingen met allerlei nuance-verschillen door de kinderen uitgevoerd worden (dit overigens in sterke afhankelijkheid van de

aard van de onderwijsaanpak), dat de toepasbaarheid van de algoritmen op context-problemen zeer problematisch is, en dat onvoldoende beheersing van de basisfeiten een belangrijke foutenbron vormt naast de specifieke procedurehandelingen.

Over de kwestie van de wenselijkheid van het nagestreefde doel dat kinderen de gebruikte standaardalgoritmen in hun meest verkorte vorm dienen te leren, is overigens geen onderzoek gedaan. Dit is een opmerkelijk feit. Want juist in het technologisch tijdperk zou de vraag of de enorme tijdsinvestering in het leren cijferen nog wel loont, een hoofdvraag moeten zijn. Wellicht is de oorzaak van deze onderzoeksleemte toe te schrijven aan het feit dat men slechts twee mogelijkheden ziet, namelijk cijferen of hoofdrekenen. Er is echter een derde weg, te weten die van het cijferen volgens progressieve schematisering, welke zoals bekend niet per se op de korte standaardalgoritmen hoeft uit te komen, maar ook minder verkorte eindpunten kent.

4 ONDERZOEK GEINTEGREERD CIJFEREN VOLGENS PROGRESSIEVE SCHEMATISERING

Hutton (1977) heeft een beschrijving van een onderzoek over cijferend vermenigvuldigen gegeven dat sterke overeenkomst vertoont met hetgeen wij in het eerste hoofdstuk van dit boek presenteerden.

Het startprobleem dat Hutton gebruikte, luidt:

‘Hier staan 24 doosjes en in ieder doosje zitten 42 snoepjes, hoeveel snoepjes zijn dat bij elkaar?’

Evenals in ons geval neemt zij een grote verscheidenheid van oplossingsstrategieën waar:

- lange optelling van 24 termen van 42;
- lange optelling van 12 termen van 84;
- lange optelling van 6 termen van 168;
- uitsplitsing in 10×42 , 10×42 en 4×42 ;
- uitsplitsing in 12×42 en 12×42 ;
- en talloze belangwekkende fouten.

De verschillende oplossingsmethoden en fouten worden in de groep besproken en vervolgens krijgen de kinderen nieuwe soortgelijke opgaven en ‘kale’ sommen. Hutton neemt waar dat de kinderen spoedig op de methode van het afsplitsen van tientallen en eenheden overgaan. Daarna ontdekken ze samen met de onderwijsgevende verkortingen en komen aldus bij de standaardwerkwijze terecht. Aan het einde van het schooljaar waren de kinderen in het algemeen in staat cijferend te vermenigvuldigen (gemiddelde score 7,7 bij tien vraagstukken). In de beschrijving is niet duidelijk hoeveel lessen totaal besteed werden en evenmin welke opgaven de eindtoets bevatte.

Hutton eindigt haar beschrijving van het onderwijspraktisch gerichte, informele onderzoek als volgt:

‘Of course, working in a classroom with all the day-to-day-hazards of absences

means that the conditions are not adequate for a truly scientific experiment. To make a fair assessment of the method one would have to have a parallel group working on more traditional lines. Such conditions do not normally obtain in our schools. No more is claimed than has already been stated, and this is what happened.' (Hutton, 1977, pag. 11).

In feite stelt ze dus dat geïntegreerd cijferen volgens haar conceptie van progressieve schematisering 'werkt': de einddoelstellingen worden bereikt en het onderzoeksgerichte onderwijs komt overeen met haar visie en uitgangspunten. Maar ze merkt ook op dat vanuit wetenschappelijk standpunt bezien nog veel te onderzoeken valt.

Teule-Sensacq en Vinrich (1982) hebben een soortgelijk onderzoek voor het delen verricht – zij het dat hun werkwijze wat formeler is dan die van Hutton. Zij stelden vast dat kinderen bij delingsproblemen de methode van herhaald op-tellen en herhaald af-trekken gebruiken naast en in combinatie met die van het 'op-vermenigvuldigen'. Er bleken daarbij twee elementen te zijn die de werkwijze van het vermenigvuldigen bevorderden, te weten de grootte van de getallen en de aard van de contextproblemen.

Een probleem als *'In een restaurant worden 178 genodigden verwacht; er kunnen 12 personen aan een tafel; hoeveel tafels zijn er nodig?'*, lokt bij het merendeel van de kinderen een additieve werkwijze uit, terwijl een opgave als *'Van een strook van 16 vierkantjes breed, willen we een rechthoek knippen die zo dicht mogelijk bij de grootte van 460 vierkantjes komt; hoe lang wordt die rechthoek?'*, door de meeste kinderen multiplicatief opgelost wordt, en wel des te sterker naarmate de getallen groter zijn. Dit gegeven nu grijpen de onderzoekers aan om een methode van afschatten en verifiëren te introduceren die wat later voor de ontwikkeling van de staartdeling benut kan worden in de zin zoals ook wij dit deden, maar dan uitgaande van het genoemde rechthoeksmodel.

Het notatieschema dat tenslotte ontwikkeld wordt, is ongeveer het volgende:

deler	deeltal	
42	5725	
	5725	
$42 \times 100 = 4200$	<u>4200</u>	100
	1525	
$42 \times 20 = 840$	<u>840</u>	20
	685	
$42 \times 10 = 420$	<u>420</u>	10
	265	
$42 \times 6 = 252$	<u>252</u>	6
	13	136
	rest	quotiënt

Voor de kinderen daartoe kwamen, kregen ze echter eerst schattingsopgaven als:

'Ik heb 2500 bonbons te verdelen over 23 kinderen. Schat eens hoeveel ieder kind krijgt. Omcirkel het getal dat er naar jouw schatting het dichtst bijkomt: 15 – 75 – 95 – 108 – 305. Ga na of het klopt!'

De geschetste werkwijze bleek zeer succesvol.

The observed differences reveal that:

- *The repetition of drills of the same nature during the first learning sequence does not result in important variations as far as success and solution procedures are concerned.*
- *On the other hand, during the second learning sequence all pupils use a more economical procedure with high level success rate.'* (Teule-Sensacq en Vinrich, 1982, pag. 178).

In dit onderzoek komen evenals in dat van Hutton de kenmerken van het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering duidelijk tot uiting:

- contextproblemen dienen als bron voor het algoritmiseringsproces dat wil zeggen dat de gestelde probleemsituatie een concrete oriënteringsbasis aan de kinderen verschaft; ze kunnen zich daardoor iets concreets bij de cijferhandelingen voorstellen; het probleem verleent betekenis aan het mentale handelen;
- naast het voordeel voor het cijferen levert het uitgaan van contextproblemen op dat ook de toepassingsmogelijkheden van die algoritmen vergroot worden, juist omdat cijferen en toepassen vanaf het begin af aan met elkaar verbonden zijn (zie voor de problematiek van gescheidenheid van cijferen en toepassen ook Slesnick, 1982).
- er wordt aangesloten bij de informele methoden die de kinderen bij het oplossen van de contextopgaven hanteren, de verschillende methoden worden in de groep besproken en de handigste werkwijzen gestimuleerd; kortom, de weg naar de betreffende algoritmen wordt op een natuurlijke wijze ingeslagen; de algoritmen ontwikkelen zich doordat ze volgens de kinderen overtuigend de beste werkwijzen blijken te zijn;
- de aard van de contextopgaven en de grootte van de getallen worden zorgvuldig afgewogen en in de leergang geplaatst, ze dienen te voorzien in zowel verdere ontwikkeling van de algoritmen als inoefening van het geleerde;
- de verbinding tussen cijferen en handig rekenen kan expliciet aan de orde gesteld worden via het schatten, waarbij de noodzakelijke basisvaardigheden voortdurend in het oog gehouden moeten worden;
- in de loop van de leergang vindt een verdere schematisering en verkorting van de berekening en de notatiewijzen plaats; er wordt steeds beter geschat en handiger gerekend, vandaar dat hier het adagium 'cijferen als een vorm van handig rekenen' past; (Zie ook Capps, 1962 en Mac-Donald, 1977);
- vanaf het begin worden relatief complexe problemen aangeboden welke door de kinderen op verschillende niveaus opgelost worden: onderwijs volgens het motto 'eenheid in aanbieder, differentiatie in oplossingsniveaus';
- de eindniveaus kunnen, al naar gelang de beoogde einddoelen, variëren.

Speciaal voor het delen is het genoemde onderzoek van Teule-Sensacq en Vinrich uit didactisch oogpunt gezien van belang doordat het de aandacht vestigt op het gewicht van het schatten en verifiëren en op de kracht van het rechthoeksmodel. (Dat model

zit ook in de door ons geschetste aanpak van de verdeelbakjes i.c. de verdelingsdeling, en het kan ook voor de verhoudingsdeling dienst doen).

Vanuit onderzoeksoogpunt is vooral interessant dat er een aanzet tot vergelijkend onderzoek is waarin zowel van kwalificerende, beschrijvende, kwantificerende en metende methoden gebruik gemaakt wordt.

Tenslotte geven deze onderzoekers evenzeer een aanzet tot theorievorming voor het cijferonderwijs – een kwestie waarop we hier nu niet verder ingaan.

In Nederland is ook onderzoek gedaan naar het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering volgens het concept van Wiskobas. We zeiden het hiervoor al: uitsluitend in Nederland is een volledig programma voor dit cijferen ontwikkeld voor alle basisoperaties, zodat hier het geheel van voorwaarden vervuld is om diepgaand onderzoek op dit terrein te verrichten. Dit is echter nog slechts op bescheiden schaal gebeurd en dan nog speciaal ten aanzien van het cijferonderdeel en niet zozeer met betrekking tot het toepassen, al moet gezegd dat de belangstelling voor dergelijk onderzoek thans sterk toeneemt.

We bespreken allereerst een onderzoek van Veldhuis (1981) over cijferend optellen en aftrekken volgens het principe van progressieve schematisering, gegeven in het kader van remediërend werk met vier kinderen in het buitengewoon onderwijs. De kinderen kregen bij de start van de vijftien zittingen, die ieder een half tot een uur duurden, een soort positieverhaal (Jan de Zeerover) als dat van de sultan aangeboden (zie hoofdstuk 1 van dit boek). Vervolgens losten ze optellingen en aftrekkingen op met behulp van M.A.B.-materiaal, de abacus en het positieschema met strepen, daarbij geholpen door de onderzoeker. Van één van de vier sessies wordt een volledig verslag gegeven en van de drie andere een samenvattend overzicht.

We geven enkele conclusies:

- *het systeem van progressieve schematisering in een algoritmiseringsproces van een deelleergang cijferend optellen en aftrekken leidt tot het actief betrokken zijn van de bij het onderzoek betrokken kinderen bij dat algoritmiseringsproces; een betrokkenheid welke onder meer bleek uit de verhoging van de leermotivatatie en het voorkomen van momenten van reflectie en anticipatie;*
- *het inzicht in de algoritmen met betrekking tot de uit te voeren operaties bleek duidelijk uit de systematiek in de aanpak van de kinderen en uit de manier waarop ze aan hun klasseleerkracht en medeleerlingen duidelijk konden maken hoe en waarom de algoritmen zo door hen werden gehanteerd;*
- *de aanpak van de progressieve schematisering bleek succesvol te zijn voor remediërend werk ten behoeve van de bij het onderzoek betrokken kinderen, die in het op hun scholen vigerende cijferonderwijs (volgens het systeem van progressieve complicering en met remediërend werk, waarbij van dit systeem gebruik wordt gemaakt) waren vastgelopen;*
- *de zinvolle context van waaruit de progressieve schematisering wordt gestart (zeg: het sultanverhaal) bleek een referentiekader c.q. oriënteringsbasis te zijn voor de in de algoritmisering toe te passen inwisselhandelingen. (Veldhuis, 1981, pag. 125).*

Vink (1978) deed onderzoek naar het cijferend vermenigvuldigen volgens het kruispuntenmodel.

Hij komt daarin tot de volgende slotsom:

- 1. De invloed tengevolge van het werken gedurende bijna drie maanden met de algoritmeleergang vermenigvuldigen in het derde leerjaar is, in vergelijking met het werken volgens traditionele rekenmethoden, zeer positief ten aanzien van de toename van het leerresultaat op het onderdeel cijferend vermenigvuldigen en positief ten aanzien van de toename van het leerresultaat op de onderdelen optellen (aftrekken) onder elkaar met grotere getallen, eenvoudig vermenigvuldigen en delen met of zonder rest, vermenigvuldigen met factoren tot en met tien, optellen en aftrekken tot en met honderd.*
- 2. Het oordeel van de geheroriënteerde leerkracht over het hanteren van de algoritmeleergang vermenigvuldigen binnen de grenzen van de eigen schoolpraktijk, gedurende bijna drie maanden in het derde leerjaar, is positief ten aanzien van de inhoud, de werkwijze en de tijdsbesteding; veranderingen op het leerlingen- en leerkrachtgedrag worden in het algemeen niet geconstateerd, met uitzondering ten aanzien van de gemotiveerdheid, het begrip en de differentiaties in prestaties.*

Vrolijk (1981) onderzocht de algoritmeleergang delen in het derde leerjaar ten aanzien van deze hoofdbewerking, hierbij lettend op het inzicht waarmee deelopgaven worden opgelost.

De opzet van het vergelijkend onderzoek was die volgens het model proefgroepcontrolegroep, uitgaande van een voortoets, vervolgens met leergangen werkend gedurende achttien lessen respectievelijk volgens het globale ontwerp van Wiskobas en via de methode 'Nieuw Rekenen', en eindigend met een natoets.

We citeren Vrolijk:

'De resultaten van de voortoets leiden tot de conclusie dat proefgroep en controlegroep als te vergelijken groepen konden worden beschouwd. Uit de resultaten van de natoets bleek, dat de proefgroep significant hoger scoorde dan de controlegroep. Dit resultaat zou te danken kunnen zijn aan het gebruik van het programma Cijferend Delen. De slotconclusie van het onderzoek is dan ook, dat de invloed van het werken van het programma Cijferend Delen – in vergelijking met het werken volgens traditionele rekenmethoden – positief is wat betreft de toename van leerresultaat op het onderdeel Cijferend Delen. Wat betreft het inzicht in delen blijkt dat goed presterende leerlingen, die gewerkt hebben met het programma, meer vrucht hebben van het programma, meer vrucht hebben in delen dan goed presterende leerlingen, die niet met het programma gewerkt hebben.' (Vrolijk, 1981, pag. 188–189).

Nu dient aan de laatste zinsnede toegevoegd te worden dat de kinderen uit de proefgroep ook een grotere kans hadden om tot de goed presterende leerlingen te behoren en een kleinere om in de zwak presterende categorie te geraken.

Overigens valt op alle genoemde onderzoeken nogal wat af te dingen voorzover ze tot generaliserende uitspraken komen. Het is hier echter niet de plaats voor een kritische analyse – daarvoor ontbreekt eenvoudig de ruimte. Men kan zich trouwens in z'n

algemeenheid de kritieke punten wel voorstellen: de vergelijkbaarheid van de onderwijsomstandigheden, de onderwijsgevende als variabele, de specifieke inrichting van de leergang, de interpretatie en uitwerking van de conceptie van de progressieve schematisering, de grootte van de onderzoeksgroep, de subjectiviteit van de kwalificerende beschrijving, de specifieke rol van de keuze van de contextopgaven, – het zijn alle kritieke onderzoeksvariabelen. Ieder van de onderzoekers is zich dit alles overigens ook wel bewust en pleit derhalve voor voortgang en uitbreiding van het onderzoek.

Wij sluiten ons daarbij gaarne aan, maar stellen voorlopig vast dat de resultaten van geïntegreerd cijferen volgens progressieve schematisering hoogst opmerkelijk lijken voor wat betreft de effectiviteit van het onderwijs gerekend naar de resultaten van zowel vaardigheid als inzicht in het cijferend rekenen en de toepassingen ervan.

Er is echter een 'maar': de uitvoering is niet eenvoudig. En wel om twee redenen: ten eerste berust het onderwijs op het observeren van leerprocessen – Hutton zegt het zo: *'The close watch that the teacher must keep on what the children are doing, especially with the more backward children'* – en ten tweede kan de onderwijsgevende de opgaven niet zomaar uit een boekje halen, maar zij of hij dient bij voortduring de opgaven-batterij opnieuw in te stellen en aan te passen, al naar gelang de voortgang van het leerproces. Voorwaar geen eenvoudige opgave! Maar dit even terzijde – we komen straks nog kort op deze kwestie terug.

5 ONDERZOEK HOOFDREKENBEWEGING

De titel van deze paragraaf kan in twee opzichten misverstanden geven. In de eerste plaats gaat het niet primair om onderzoek over hoofdrekenen op zich, maar om de hoofdrekenbeweging die het cijferen wil uitbannen. (Zie voor het hoofdrekenen en het leren van de basisvaardigheden: Suydam en Reijs, 1978; Shumway, 1980; Ter Heege, 1981; Cook en Dossey, 1982). Ten tweede dient de term onderzoek hier zeer ruim opgevat te worden: het gaat de hoofdrekenbeweging vooral ook om doelstellingen, argumentaties, uitgangspunten voor onderwijs, waardoor de artikelen nogal wat discursief van karakter zijn en veeleer een aansporing tot onderzoek genoemd moeten worden dan een feitelijke uitvoering ervan zijn.

Er is altijd een hoofdrekenbeweging werkzaam geweest die terugdringing van het cijferen bepleit heeft. De *nieuwe* hoofdrekenbeweging echter heeft vooral impulsen gekregen door de ontwikkelingen op het terrein van automatisering en micro-electronica. Waarom zouden we zoveel tijd en energie aan het aanleren van de cijferprocedures besteden als kinderen de beschikking hebben over zakrekenmachientjes en zakcomputers? Leg daarom meer nadruk op flexibel rekenen, schatten, het ontwikkelen van betrekkelijk korte rekenwijzen voor vermenigvuldigen en delen, en vooral ook op het leren toepassen van de basisbewerkingen op contextproblemen, zodat de kinderen die machientjes ook werkelijk in de voorkomende gevallen kunnen gebruiken – aldus luiden in het kort de uitgangspunten van de niet-cijferrichting.

Zonder overigens direct de doelstellingen van de hoofdrekenbeweging te onder-

schrijven, is er een duidelijke tendens naar een toenemende waardering van het belang van hoofdrekenen en schatten waar te nemen, en een afname voor het cijferend rekenen met grote getallen. Het invloedrijke N.C.T.M.-werk ‘An agenda for action. Recommendations for School Mathematics of the 1980’s’ (USA, 1980) zegt daarover onder meer:

‘Insisting that students become highly facile in paper and pencil computations such as 3841×937 or $72509 : 29,3$ is time-consuming and costly. For most students, much of a full year of instruction in mathematics is spent on the division of whole numbers – a massive investment with increasingly limited productive return. A small fraction of that time is spent on the skills of problem analysis and interpretation, which enable students to identify and set up the computations needed. For most complex problems, using the calculator for rapid and accurate computation makes a far greater contribution to functional competence in daily life.’ (pag. 6).

Plunkett (1979) gaat wat verder dan deze terughoudende formulering ten aanzien van cijferen. Hij stelt dat standaardalgoritmen uit de tijd zijn en bepleit hoofdrekenen, het gebruik van rekenmachientjes bij contextproblemen en de ontwikkeling van niet-standaardalgoritmen door de kinderen zelf. Als voorbeeld van dat laatste noemt hij voor vermenigvuldigen de tabelmethode:

	x	20	3
–	10	200	30
–	8	160	24
			414

Hij concludeert dat de zakrekenmachientjes een zegen voor het onderwijs kunnen zijn. Ze ontslaan ons namelijk van de plicht om iedere burger de complexe standaardcijfermethoden te leren. Nu kunnen we rekenmethoden gaan gebruiken die beter aansluiten bij de kinderen en meer gericht zijn op de doelstellingen van de gebruiker. Plunkett illustreert het onderscheid tussen handig rekenen en mechanistisch cijferen onder meer met de volgende samenspraken:

*‘Me: ‘What’s 213 take away 188?’
 Ray (adult): ‘25.’
 Me: ‘How d’you do it?’
 Ray: ‘Well it’s 12 up to 200 and 13’s 25.’
 Me: ‘What’s 213 take away 188?’
 Student (19): Silence.
 Me: ‘What happened when I asked?’
 Student: ‘Panic.’
 Me: ‘Did you see anything in your mind...?’
 Student: ‘Yes. I saw 213 written down and then 188 underneath, and then a line...’.
 Ask people how they calculate, and indeed observe yourself at work, and you will soon find a fascinating variety of idiosyncratic methods.’* (Plunkett, 1979, pag. 2).

Plunkett voert op dit punt zelf geen onderzoek uit. Zijn lezenswaardige artikel bepaalt zich tot een scherpe analyse van de kenmerkende verschillen tussen cijferend

rekenen en hoofdrekenen, alsmede tot een globale ‘agenda for action’ met betrekking tot ontwikkeling en onderzoek op dit terrein.

Levin (1981) stelt in het verlengde van Plunkett hoezeer onderzoek naar de variaties in hoofdrekenmethoden verwaarloosd is – dit overigens in tegenstelling tot onderzoek naar verscheidenheid in (verkeerde) cijfermethoden. (Zie voor het laatste voorbeeld Brown en Burton, 1978). Maar ook hij verricht op dit terrein geen research. Wel komt hij met een serie aanbevelingen om het hoofdrekenen en speciaal het schatten te stimuleren. De getallenlijn en de strook zijn daarbij belangrijke hulpmiddelen. Hij wijst in dit verband op de steun die computerspelletjes kunnen bieden, zoals bijvoorbeeld het harpoeneren. Op een assenstelsel dat het beeldscherm omvat, staan slechts bij de eindpunten getallen. Een walvis bevindt zich ergens op het scherm. Het programma vraagt de positie van de walvis door middel van coördinaten te lokaliseren. Na het indrukken van de betreffende getallen vliegt een harpoen naar de aangegeven positie en raakt de walvis al dan niet. Het resultaat geeft informatie voor de poging in de volgende ronde.

De bedoeling is om de positie van getallen op een getallenlijn globaal te leren markeren om een betere schatting van optellingen en aftrekkingen mogelijk te maken – een streven naar visualisering dus. Ook voor vermenigvuldigen en delen ontvouwt hij enkele ideeën, gebaseerd op visualisering van de operaties.

Levin wijst ook op de voordelen van flexibel rekenen tegenover ‘canonniek’ rekenen. Zijn slotzin luidt:

‘Rather than reacting to the new technology for calculation as a threat, we should consider it a valuable opportunity to reconsider the assumptions underlying the mathematics curriculum a chance to discard the mechanical, mind-stultifying elements that are better turned over to dumb machines, a chance to focus on the creative qualitative aspects that make mathematics exciting as well as useful.’ (Levin, 1981, pag. 433).

Plunkett en Levin staan overigens niet alleen in hun positieve benadering van rekenmachientjes en computers en hun lage dunk van de standaardalgoritmen (zie bijvoorbeeld Papert, 1980).

Vervolgens een voorbeeld van minder programmatisch maar meer inhoudelijk gericht onderzoek over hoofdrekenen: Reijs, Bestgen, Rijbolt en Wyatt (1982) onderzochten de werkwijzen en strategieën van goede schatters en handige rekenaars. Ze komen tot tien karakteristieke kenmerken na het interviewen van 59 proefpersonen van uiteenlopende leeftijd die na het maken van een toets als goede schatters geselecteerd werden:

1. Goede schatters (en rekenaars) beheersen de *basisfeiten*, ze hebben de tafels van de basisoperaties gememoriseerd.
2. Ze bezitten een goed begrip van *plaatswaarde* en gebruiken dit bij het bepalen van de uitkomsten bij de verschillende operaties en bij het schatten.
3. Ze zijn in staat tot *het herformuleren* van een probleem, dus om het om te zetten

- in een werkbare vorm. Vooral het afronden op machten van 10 en op veelvouden van bekende getallen wordt veel gebruikt.
4. Ze kunnen goed uit het *hoofd rekenen*.
 5. Ze zijn goed in staat met 'fouten' te rekenen en de *tolerantie* ervan in het oog te houden.
 6. Zij kunnen goed *compenseren*, dat wil zeggen: een aanvankelijke schatting bijstellen na de herformulering van het probleem.
 7. Zij zijn bekwaam in het *vertalen* van een probleem, niet alleen door de getallen te veranderen (zie punt 3), maar ook door de mathematische structuur van een probleem te wijzigen, zoals het omzetten van een lange optelling in een vermenigvuldiging via 'middelen'.
 8. Ze zijn vaardig in het gebruik van *rekenkundige eigenschappen* welke flexibel rekenen mogelijk maakt, zoals het benutten van de commutatieve, associatieve en distributieve eigenschappen.
 9. Ze beschikken over een *veelheid van strategieën* die ze snel kunnen sorteren voor adequaat gebruik en ze kunnen snel 'switchen' als een bepaalde aanpak niet goed blijkt te werken.
 10. Ze hebben *vertrouwen* in hun werkwijzen en berekeningen.
- Kortom, goede schatters zijn getalvaardig, beschikken over bepaalde cognitieve strategieën en specifieke 'affectieve' eigenschappen.
- De onderzoekers merken tot slot op:

'The procedures used in this project (synthesis of related research, individual interviews and discussion with classroom teachers, researchers and other mathematics educators) were productive.'

'...In the meantime it is hoped that the keyprocesses – namely translation, reformulation and compensation – and such strategies as the front – end approach that have been identified in this research will be studied carefully. They are important and powerful cognitive processes. Incorporating them into the systematic development of curricular materials and instructional techniques is needed to study their effect as well as to determine the extent to which such processes are teachable.' (Reijs, e.a., 1982, pag. 200).

Menchinskaja en Moro (1975) wijden hun beschouwing over hoofdrekenen en cijferen daarentegen vooral aan de fouten die kinderen maken en de aard van de onderliggende processen daarvan. Ze maken wat het hoofdrekenen aangaat een duidelijk onderscheid tussen enerzijds gememoriseerde kennis van basisfeiten en anderzijds het regelgeleide rekenen. Het onderwijs en het oefenen dienen op deze onderscheiden kennis en vaardigheden afgestemd te worden. Gaat het om onvoldoende gememoriseerde basiskennis dan is goed gedoseerd oefenen op z'n plaats dat niet geestdodend is. Betreft de fout een verkeerde toepassing van een regel door bijvoorbeeld ongeoorloofde uitbreiding ervan, dan is een analyse van de fout en een explicitering van de ongeoorloofde generalisatie gepast, opdat de leerling zijn fout inziet en zich realiseert waar hij vandaan komt. Dus voor een geval als $7 \times 8 = 54$, indien verkeerd gememoriseerd, heeft analyse geen zin doch is aanvullende oefening nodig. Maar als een kind $96 : 16 = 10$ berekent volgens de gedachtengang $90 : 10 = 9$, $6 : 6 = 1$, $9 + 1 = 10$,

dus een analytische werkwijze van optellen en aftrekken overdraagt op delen, dan is een foutenanalyse wel degelijk op z'n plaats.

'The results showed that analysis of errors based on a false understanding of rules had a very great effect. The pupils who previously had made this kind of mistake did not repeat it. Moreover, error analysis prevented other pupils, to a significant degree, from making this mistakes later. The effect of awareness of the mistake was so powerful that the pupils who made the error remembered it. They received a kind of 'intellectual burn' and subsequently were wary of the mistake. For the other category of mistakes, which resulted from insufficient retention of a skill, extra practice was the only effective method.' (Menchinskaja en Moro, 1975, pag. 87).

Overigens merken de onderzoekers op dat in de Sovjet Unie door de tijden heen grote aandacht aan hoofdrekenen besteed is. In tegenstelling tot de werkwijze in de Verenigde Staten, zo stellen zij, wordt in de eerste leerjaren als de getallen tot honderd bestudeerd worden, niet 'onder elkaar' gerekend maar uitsluitend uit het hoofd. Dit om een beter begrip te bevorderen en het mechanische rekenen terug te dringen. Wij voegen hier echter aan toe dat we de indruk hebben dat het onderwijs in hoofdrekenen en cijferen in de Sovjet Unie nogal star van opzet is. Bezien we bijvoorbeeld Gal'perins aanbevelingen voor het leren cijferen (1969), dan treft de minitieuze voorgeschreven onderwijsprocedure, de strak gestuurde, aanvankelijk op een oriënteringskaart voorgeschreven leergang, die zich bepaald niet in gunstige zin van de Westerse aanpak voor het wiskundige cijferen onderscheidt, laat staan van het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering – maar dit terzijde.

De hoofdrekenbeweging heeft door de technologische ontwikkelingen nieuwe impulsen gekregen. Het denken over de doelstellingen van het cijferonderwijs heeft een zekere opwaardering van het hoofdrekenen, schatten en flexibel rekenen tot gevolg en daarmee bloeien ook ontwikkeling en onderzoek op dit gebied wat op. (Zie ook Goffree en Ter Heege, 1982; Zwarts, 1982; Van der Ploeg, 1982).

De gegevens die middels research aan het licht komen, kunnen zowel het denken over de doelstellingen van het cijferen als het cijferen zelf beïnvloeden. Het is echter wel zo dat we hier nog pas aan het begin van wellicht zeer vruchtbaar onderzoek staan. Dit blijkt onder meer uit het feit hoe weinig we weten over specifieke hoofdrekenstrategieën en 'bugs', ofwel verkeerde werkwijzen en ontoereikende methoden – dit in tegenstelling tot wat hierover van het cijferen bekend is.

6 ONDERZOEK CIJFERONDERWIJS – EEN BLINDE VLEK

Over de onderwijsbaarheid van het hoofdrekenen en cijferen in relatie tot het schoolboek is geen systematisch onderzoek gedaan. Toch is het evident dat er bij de overdraagbaarheid van het niet-traditionele cijferen – dus in de richting van het wiskundige cijferen, het geïntegreerde cijferen en het hoofdrekenen – een gigantisch probleem ligt. In het mechanistisch opgezette cijferonderwijs stippelt immers het schoolboek vrij nauwkeurig de leergang uit, zowel wat betreft de introductie van de deelge-

vallen als de inoefening ervan via een sommenbatterij van oefenopgaven. De cijferleergang biedt als het ware een papieren leergang.

Kenmerkend voor het wiskundige en geïntegreerde cijferen is echter juist dat het de mogelijkheid tot differentiatie biedt en de toewending naar inzicht in het leerproces mogelijk maakt. Nu mag papier geduldig zijn, en een computer evenzeer, maar met geduldig oefenen alleen komt de leerling hier lang niet altijd uit: de onderwijsgevende dient zichzelf in te schakelen, obstakels uit de weg te ruimen, de leerstof aan te passen, het leerproces bij te sturen, beslissingen te nemen over materiaalgebruik, over het verwoorden van de cijferhandelingen, over het gebruik van contextopgaven en nog veel meer.

Anders gezegd: de onderwijsgevende levert een actieve bijdrage tot het onderwijsleerproces.

Nu zijn er tal van factoren die het functioneren in dit opzicht kunnen doen belemmeren of begunstigen. Eén ervan, en wellicht één van de belangrijkste, is de didactische bekwaamheid om leerprocessen te observeren en te genereren. In het voorgaande zijn tal van elementen genoemd waarop dit observeren gericht kan worden en vele handgrepen om het leerproces op gang te houden of te stimuleren.

De kernvraag luidt: in hoeverre is een onderwijsgevende onder bepaalde omstandigheden in staat dit didactische handwerk voor het cijferen (binnen een of andere richting) te vervullen, en hoe zou de opleiding of bijscholing ingericht moeten worden om het langlopende onderwijs-leerproces van het cijferen goed te leren onderrichten?

We laten deze vraag onbeantwoord – we signaleren hem slechts als een kwestie van grote importantie waarover de Wiskobasgroep zich had willen buigen, waartoe ze ook plannen gemaakt had, maar waaraan ze niet meer toegekomen is. Het (gedeeltelijke) commerciële marktmechanisme zal hiervoor een oplossing moeten zoeken middels een bepaalde inrichting van handleidingen en methoden. En wel zo, dat daarbij het accent vooral op de tekst van de onderwijsgevende zal liggen – een anderssoortige papieren oplossing dus. Niet de leergang van de leerlingen wordt door middel van sommenrijtjes op het papier van de leerlingenboekjes getraceerd, maar de onderwijsgang wordt in de handleiding globaal geduid aan de hand van een serie principes en didactische aanbevelingen. (Zie Postema, 1975; Van der Molengraaf, 1981). Maar of deze werkwijze zonder (na-)scholing toereikend zal zijn? Bij bepaalde projecten (zie Nelissen e.a., 1973 en Gravemeijer, 1982) wordt trouwens ook op beperkte schaal bijscholing en begeleiding gegeven – een uitzonderlijke situatie, moeten we helaas vaststellen.

7 THEORIE VAN HET CIJFERONDERWIJS

We spraken zojuist over didactische principes en aanbevelingen. De vraag rijst: is er een onderwijs-leertheorie voor het cijferen (bijvoorbeeld het wiskundige cijferen) die aangrijpingspunten voor de onderwijspraktijk biedt?

We stellen de vraag eenvoudigweg omdat we hem gesteld willen hebben, maar kunnen er hier niet nader op ingaan. We verwijzen daartoe naar publikaties die daarover later zullen verschijnen in onderwijstijdschriften. Onze conclusie is dat algemene

onderwijsleertheorieën als die van Dienes, Bruner, Gal'perin, en informatie-verwerkingstheoretici als Resnick en Greeno, geen adequate theoretische omkleding van het cijferen bieden: deze theorieën zijn ten eerste te algemeen, ten tweede kunnen ze zowel op de micro- als de macro-ordening van de leerstof voor het cijferen toegepast worden, ten derde wordt er geen visie op het wiskundeonderwijs in geëxpliciteerd, en ten vierde blijft daarin de kwestie van de toepassingen van de cijferprocedures in contextproblemen onbesproken – althans in de concretisering die de genoemde theoretici voor hun theorie aangaande het cijferonderwijs geven. Hetgeen overigens niet inhoudt dat dergelijke theorieën nu ook geheel zonder enige waarde voor het cijferen zouden zijn...

8 TOT BESLUIT

Is er een slechtste of beste methode om te leren cijferen aan te wijzen middels onderzoeksgegevens? Dat was één van de vragen die we in de inleiding stelden.

Welnu, duidelijk is dat kwalificaties als 'slechtste' en 'beste' in dit verband verhelderd dienen te worden. Uitgangspunten en doelstellingen van het (cijfer-)onderwijs kunnen daarbij uiteraard niet buiten beschouwing blijven. Dit laatste is met name noodzakelijk om de beste aanpak aan te geven. Want over de slechtste kan weinig misverstand bestaan. Dit is het mechanistische cijferonderwijs. Deze werkwijze blijkt immers weinig effectief te zijn en een op 'trucs' gerichte anti-wiskundige attitude te bevorderen. Inzicht is dus geboden. Maar over de precieze vormgeving daarvan bestaat geen eenstemmigheid.

Allereerst is daar de kwestie van de doelstellingen. Moeten de kinderen de thans geldende, sterk verkorte, standaardalgoritmen leren? In het wiskundige cijferen volgens progressieve complicering wordt deze vraag bevestigend beantwoord, terwijl het cijferen gestoeld is op het principe van de progressieve schematisering hem ontkennend beantwoordt. Kinderen moeten de standaardvorm niet per se leren volgens de laatstgenoemde opvattingen, maar mogen dit wel als het niet teveel tijd vergt. Ook is een zekere differentiatie in doelstellingen voor deze groepering zeer wel aanvaardbaar: sommige kinderen leren de meest verkorte eindvormen, maar voor andere kunnen we met minder korte algoritmen volstaan. De hoofdreenbeweging kiest daarentegen consequent voor het niet-leren van de standaardalgoritmen.

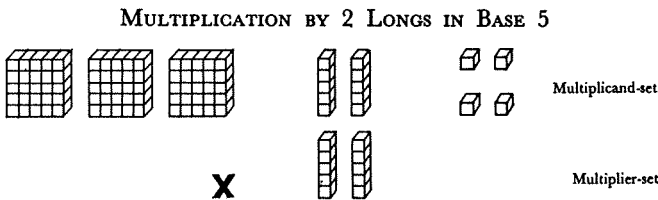
Gesteld dat kinderen een of andere eindvorm van een basisalgoritme mochten leren, is het dan didactisch wenselijk om daarop vanaf het begin bij ieder deelgeval direkt aan te sturen? Het wiskundige cijferen antwoordt ook hier bevestigend en het geïntegreerde cijferen ontkennend. Theoretisch kan deze kwestie niet beslecht worden met behulp van de bestaande onderwijsleertheorieën, omdat deze niet 'discriminerend' werken naar het micro- en macroniveau van de leerstofordening. Gegevens uit vergelijkend onderzoek zijn niet voorhanden – althans geen 'harde' feiten. Ervaringen uit de ontwerpschool van Wiskobas wijzen er echter wel op dat de uitlijning volgens progressieve schematisering een aanzienlijke tijdsbesparing kan opleveren, maar deze ervaringen zijn slechts te kwalificeren als ruw empirisch materiaal. Dat geldt trouwens ook voor de gegevens uit het onderhavige boek!

Het belang van een specifieke theorie van het cijferonderwijs dringt zich steeds meer op, een didactische theorie wel te verstaan waarin de visie, de uitgangspunten en de doelstellingen geëxpliciteerd worden, en de micro- en macro-ordering van de leerstof niet onbesproken blijft, alsmede kwesties als niveaus van handelen, de verbinding tussen die niveaus, fasen van verkorting, de functie van het verwoorden enzovoort, in de beschouwing betrokken worden. Met name ook de kwestie van de niveaus van handelen blijkt ingewikkelder te zijn dan gedacht, zo is uit onderzoek gebleken.

Algemeen geldt dat men zich speciaal bij het wiskundige cijferen aanvankelijk veel te veel tot de oppervlakte-structuur van het handelen i.c. de niveaus bepaald heeft.

In handleidingen en handboeken wordt vaak relatief veel aandacht aan optellen en aftrekken besteed, blijkbaar omdat men daaraan zo duidelijk het materiaalgebruik en de verschillende niveaus van handelen kan demonstreren. Maar daarmee omzeilt men de problemen van het cijferonderwijs goeddeels. Niveaus van handelen vormen slechts één component van het cijferend rekenen en daar komt bij dat de operaties van cijferend optellen en aftrekken relatief eenvoudig uit te voeren zijn, zowel qua procedure als toepassing in contextproblemen. Neemt men bijvoorbeeld vermenigvuldigen om het gebruik van positiemateriaal te laten zien, dan rijzen onmiddellijk problemen.

Zie als illustratie daarvan het volgende voorbeeld van Dienes (1966, pag. 106):



De opgave 324×20 in basis vijf is in een kale wiskundige samenhang geplaatst. Maar wat hier vooral opvalt, is de vormgeving van de vermenigvuldiger door middel van twee staven. Hoe zouden kinderen het verband tussen een dergelijke opgave en een vermenigvuldigingsprobleem in een reële context moeten zien, waar de vermenigvuldiger en het vermenigvuldigitaal verschillend benoemde of onbenoemde getallen zijn, en waarbij de vermenigvuldiger door de kinderen veelal als aanduiding voor een herhaalde optelling gebruikt wordt (Hart, 1981)? Anders gezegd: zowel de procedurehandeling van het cijferen als de toepasbaarheid zouden door deze aanpak weleens sterk belemmerd kunnen worden.

Laten we ons nu tot de kwestie van de toepassingen bepalen. In het wiskundige cijferen is de verbinding met toepassingen even zwak als die in het traditionele cijferen. Sterker nog: het cijferonderwijs in de zin van Dienes – die als grondlegger van het wiskundige cijferen beschouwd kan worden – is verder van de realiteit verwijderd dan dat in het aloude rekenonderwijs ooit het geval was, zoals uit het zojuist gegeven voorbeeld mag blijken. Nu vormt het wiskundige cijferen geen eenheid en zijn er ver-

schillende methoden, zoals ‘Elementair Wiskundig Rekenen’, ‘Hoijs Rekenen’ en ‘Getal in Beeld’ die we eerder noemden, welke veel toepassingen van de cijferprocedures geven. Maar ook dan staan die toepassingen naast de cijferleergang en zijn er niet in geïntegreerd. Terwijl bij het geïntegreerde cijferen, de naam zegt het al, contextproblemen juist als bron, als uitgangspunt, als startprobleem voor de cijferleergang gebruikt worden en aldus als concrete oriënteringsbasis voor de cijferhandelingen fungeren. Later dienen die contextopgaven ook als toepassingsgebied van de geleerde cijferprocedures. Hier ligt dus andermaal een verschilpunt tussen wiskundig en geïntegreerd cijferen.

Vervolgens de kwestie van het hoofdrekenen. In het cijferen volgens progressieve schematisering wordt cijferen vooral als een vorm van steeds handiger rekenen gezien, waarmee men in principe tot de standaardvorm kan doorgaan. Bij de hoofdrekensbeweging stopt men veel eerder. In het wiskundig cijferen wordt het hoofdrekenen in het algemeen niet geaccentueerd al zijn er uitzonderingen als ‘Getal in Beeld’. Wel wordt thans algemeen onderkend dat de basisvaardigheden hun naam niet verloochenen, ook niet ten aanzien van het cijferen. Naar wij verwachten, zal het hoofdrekenen in de nabije toekomst sterk revalueren.

Tenslotte noemen we de studies die naar onze mening de meest relevante gegevens en gezichtspunten hebben opgeleverd, ons daarbij bepalend tot het buitenland:

- Brownell (1947, 1949): over de inferieure kwaliteit van het mechanistische cijferen.
- Erlwanger (1973, 1975): over de invloed van mechanistisch rekenonderwijs op de denkbeelden en attitudes van kinderen.
- Radatz (1980a, 1980b): over de (systematische) fouten die kinderen bij het cijferen maken.
- Ginsburg (1977): over de informele strategieën die kinderen in de eerste leerjaren gebruiken (ook bij het cijferen).
- Bennedbek (1981): over de verschillende oplossingsmethoden die achter eenzelfde genoteerde oplossing kunnen schuilgaan bij het aftrekken.
- Hart (1981): over cijferprocedures die veelal *niet* toegepast worden bij contextproblemen – onthullend cijfermateriaal over het rekenonderwijs als geheel.
- Hutton (1977): als voorbeeld van inspirerend vakdidactisch onderzoek, gericht op ontwikkeling in de onderwijspraktijk.
- Teule-Sensacq en Vinrich (1982): idem dito, doch met een meer theoretische inslag.
- Plunkett (1979): voor zijn analyse van de verschillen tussen cijferen en hoofdrekenen en zijn stellingname ten aanzien van het hoofdrekenen.

Wij hopen dat het Wiskobaswerk, neergelegd in de publikaties 6 en 10 en het onderhavige boek, mede richting zal kunnen geven aan het toekomstige cijferonderwijs, en dat het tot een eerste bezinning op einddoelstellingen en te investeren onderwijstijd zal leiden, alsmede tot een nadere bepaling van de plaats van zakrekenmachines en zakcomputers in het reken-wiskundeonderwijs en tot het verdiepen van het orthodidactische denken – allemaal niet weg te cijferen probleemgebieden.

NOTEN

1. In juni 1982 hebben we twee bijeenkomsten belegd ter bespreking van het onderhavige boek (uitgezonderd het allerlaatste hoofdstuk over onderzoek, dat toen nog niet voltooid was). De eerste bijeenkomst was met onderzoekers, ontwikkelaars en begeleiders die ervaring hebben met en deskundigheid over de hier gepresenteerde leergangen of met programma's die sterk op de Wiskobasideeën geënt zijn. Deelnemers waren, naast de auteurs:
 - Fred Goffree (oud IOWO-medewerker, specialist op het gebied van de opleidingen).
 - Frans van Galen (medewerker van het project Onderwijs en Sociaal Milieu (O.S.M.)).
 - Toon Meeuwisse (O.S.M.-project, Rotterdam).
 - Koeno Gravemeijer (O.S.M.-project, Rotterdam).
 - Annecoos Vuurmans (S.A.C.-rekenproject, Utrecht).
 - Simon Gribling (S.A.C.-rekenproject, Utrecht).
 - Jo Nelissen (S.A.C.-rekenproject, Utrecht).

De tweede bijeenkomst hadden we met drie onderwijsgeevenden van de Dr. W. Dreeschool te Arnhem, die als de meest ervaren en ingewijde onderwijsmensen op het onderhavige terrein beschouwd kunnen worden, te weten:

- Marjan Buenk
- Dik Groote Haar
- Fred Broekhuijsen,

die ook een bijdrage leverden aan 'Cijferend vermenigvuldigen en delen (1)', (IOWO, Utrecht 1979), dit samen met Jopie Kotterman, Bert van Vuurden en Henk van der Hurk.

2. Het zijn met name Annecoos Vuurmans en Simon Gribling die opmerken dat de bedoeling niet duidelijk genoeg naar voren komt: niet als je het boek leest en ook niet als je bezig bent. Koeno Gravemeijer stelt vast dat de effectiviteit van de onderhavige aanpak, wat het cijferen op zich aangaat, niet te zeer geaccentueerd moet worden, want het gaat om 'meer'.
3. Marjan Buenk, Dik Groote Haar en Fred Broekhuijsen stipuleren de voorwaarden van het leren cijferen met betrekking tot de basisvaardigheden om een goede progressie in de schematisering mogelijk te maken. Marjan Buenk spreekt wat de tafels aangaat zelfs van een gevoelige periode. Men heeft ten eerste ervaren hoeveel problemen een lang uitstellen van het memoriseren geeft, en ten tweede hoe belangrijk het is om van tijd tot tijd deze kwestie in het schoolteam als geheel te bespreken en er sluitende afspraken over te maken.
4. Met name Jo Nelissen vestigt de aandacht op het leren als een sociaal gebeuren, waarin de kinderen de gelegenheid hebben om samen te werken, om over elkaars werkwijzen te praten en te reflecteren (hij verwijst daarbij naar een recent werk van Davydov, Lompscher en Markova 'Lerntätigkeit bei Schüler').

Wij onderschrijven dit belang uiteraard (de Wiskobasaanpak is ervan doordrenkt) en verwijzen hiervoor vooral naar het werk van Wiskivon (voortgezet onderwijs, IOWO – thans OW & OC).

Zie ook:

Goddijn, A. en G. Schoemaker, Huizermaat. Een harmonieleer voor wiskunde en samenwerken. *De Nieuwe Wiskrant*, 1982, 2.

We citeren enkele zinnen uit dit mooie artikel, waarin de samenhang tussen inhoud en werkwijze uitgebeeld wordt:

'De sociale wetenschappers denken dat onderwijs een veldje blokken is, een matrix, waaruit je een blok kan pakken zonder de rest te beroeren. Een gezond mens weet dat het 'mikado' is. Als je een stokje pakt, rollen er tien weg en je beurt is voorbij. Of denk aan een bord spaghetti: aan één draadje plakt alles vast. Je kunt niet zomaar de stof onaange-tast laten en samenwerking zinvol maken.'

5. Vanuit zowel het O.S.M.-project als het S.A.C.-rekenproject wordt op de noodzaak van begeleiding en nascholing gewezen om de andere onderwijs-attitude die nodig is voor dit

soort onderwijs, te stimuleren. Men is niet pessimistisch over de bereikte resultaten in dit opzicht.

Marjan Buenk wijst erop dat men pas inzicht in het belang van deze werkwijze kan bijbrengen als de onderwijsgevende enige jaren ervaring in het onderwijs heeft opgedaan. Pas dan ziet men welke problemen het cijferend vermenigvuldigen en (vooral) delen geeft, en welke de enorme voordelen van de onderhavige aanpak zijn.

Dekker en Goffree beklemtonen dat het opleidingsonderwijs in dit opzicht vooral informerend moet zijn, omdat de mogelijkheden om ervaringen op te doen met langlopende leerprocessen hier vrijwel niet aanwezig zijn.

Zie ook:

Goffree, F., *Leren onderwijzen met Wiskobas*. Utrecht: OW & OC, 1982/2 (diss.).

- 6 Jo Nelissen wijst op de noodzaak hiervan. In de discussie komt naar voren dat men zich die zekerheden ook bij het progressieve schematiseren kan verschaffen, zij het dat dit ten koste gaat van de grondgedachte. Toch zal men hier in eerste ronde concessies moeten doen, ten faveure van de zekerheid.

Koeno Gravemeijer stelt vast dat men die concessies (dus in de richting van een wat strakkere sturing van het onderwijsleerproces) ook zal moeten doen als men met combinatieklassen werkt. Hij concludeert dat hier een zekere spanning tussen sturen en stimuleren waarneembaar is, waarbij het O.S.M.-project meer naar de kant van het sturen tendeert, en in dit boek het accent wat sterker op het stimuleren gelegd wordt.

De auteurs bevestigen dit, maar stellen dat dit in het experiment ook mogelijk was. In de realiteit van de onderwijspraktijk zal het verloop ook wel van sturing naar stimulering zijn. Sterker nog: het is zelfs aan te bevelen om bij eerste kennismaking de leer-gang wat strakker uit te stippelen, wat overigens nog niet inhoudt dat men de looper moet uitleggen. Uitleggen is hier uit den boze, het gaat om uitlokken, stimuleren, en om... sturen-op-langere-termijn.

7. Men heeft deze ervaring in de verschillende projecten, ook in het Wiskobasproject. De ouders moeten bij de meningsvorming en doelbepaling betrokken worden. De ervaringen op de Dr. W. Dreesschool zijn in dit opzicht onverdeeld gunstig: de ouders tonen begrip en zijn zich bewust dat ze de kinderen in verwarring kunnen brengen als ze het cijferonderwijs met traditionele werkwijzen doorkruisen. (Zie vooral ook het laatste hoofdstuk met praktische aanbevelingen in 'Cijferend vermenigvuldigen en delen (1)').
8. Deze ervaringen zijn in de Dr. W. Dreesschool opgedaan en worden door Marjan Buenk, Dik Groote Haar en Fred Broekhuijsen verwoord.
9. Marjan Buenk vertolkt deze gedachte.

Fred Goffree onderschrijft de einddoelstelling van de pré-standaardvorm en betreft daarbij vooral ook het gebruik van de zakrekenmachine. Trouwens het hele grondidee van een inzichtelijke opbouw spreekt hem hierom ook aan, omdat de toepasbaarheid van de operaties van vermenigvuldigen en delen vergroot wordt, wat een beter gebruik van die rekenoosjes mogelijk maakt.

Toon Meeuwisse is positief over de procedure en de einddoelstellingen omdat volgens zijn waarneming zwakkere leerlingen veel meer kansen krijgen om de cijferprocedures te leren.

10. Simon Gribbling is zeer geporteerd voor het kruispuntenmodel en wil het niet een, twee, drie inruilen voor het herhaald-optel-model.

Frans van Galen vraagt zich af welke argumenten voor het ene en welke voor het andere pleiten en of er (vergelijkend) onderzoek op dit terrein gedaan is. (Zie daarvoor het volgende hoofdstuk).

Marjan Buenk kan op jarenlange ervaring met het kruispuntenmodel bogen, en staat er zeer positief tegenover.

11. Marjan Buenk heeft nu twee jaar met het herhaald-optel-model gewerkt. Het eerste jaar tot haar volle tevredenheid. Opvallend was de grote snelheid waarmee de kinderen de vermenigvuldigingsalgoritme leerden. De ervaringen in het tweede jaar waren minder positief wat de zwakke leerlingen aangaat. De reden daarvan zit 'm volgens haar diagnose in de minder duidelijk gestructureerde fasen in dit model, waardoor de kinderen niet goed naar de werkwijze van een vorige fase kunnen terugvallen. De in dit boek gesuggereerde veranderingen (gebaar in de lucht, streep op papier, gecombineerd met de korte notaties die sommige kinderen zelf al na een tiental lessen ontwikkelen) lijken haar de oplossing – juist ook omdat nu weer een soort kruispuntenschema zichtbaar wordt. Een schema dat zelfs het voordeel heeft bij het vroegere dat het niet eerst uiteenrafelt wat korte tijd later toch

weer samengevoegd moet worden. ($10 \times 23 = 230$ ineens versus $10 \times 23 = 10 \times 20 + 10 \times 3$ in het kruispuntenmodel).

Koeno Gravemeijer signaleert dezelfde nadelen van het 'kale' (niet visuele) herhaald-optel-model. De hier voorgestelde motorische, visuele en symbolische bijstellingen van het herhaald-optel-model worden algemeen positief gewaardeerd.

De voordelen van een overzichtelijk en strak notatie-schema worden door een ieder onderschreven. Een en ander is ook nodig om het euvel van het vergeten op te tellen van berekende deelprodukten uit te bannen. (Zie voor toelichting van dat schema de basistekst).

12. Vooral Annecoos Vuurmans en Koeno Gravemeijer hebben deze kwestie aan de orde gesteld. De gebruikswaarde van contextproblemen voor de opbouw van de algoritmen is volgens hen problematisch omdat de informele werkwijze van de kinderen juist nogal afwijkt van de aanpak die 'onder' de algoritme schuilgaat – kortom er is te veel ruis. We onderschrijven deze conclusies ten volle, maar brengen (zie de basistekst) een duidelijk onderscheid in contextproblemen aan, en differentiëren aan de hand daarvan de plaats en de functie van contextproblemen in de cijferleergang. Wij hebben vastgesteld dat in enkelvoudige contextopgaven voor vermenigvuldigen en delen de kinderen of direct de passende operatie kiezen, of een of andere variant van een additieve methode gebruiken! En nu berusten de modellen die we voor het cijferen gekozen hebben juist ook op die additieve aanpak. Gevolg: de kinderlijke oplossingsmethoden bij het oplossen van elementaire contextproblemen kunnen vrijwel altijd in direct verband met de algoritme-procedures gebracht worden. (Zie verdere uiteenzetting in de basistekst en zie ook de artikelen van de auteurs in 'Willem Bartjens', jrg. 1, over 'Het stomste vak van de wereld' (1) en (2).). We zijn de discussianten vooral dankbaar dat ze dit kritische punt aan de orde gesteld hebben.
13. Zie: Gravemeijer, K., Het gebruik van contexten. *Willem Bartjens*, 1982, 1, p. 192–198.
14. Jo Nelissen stelt dit punt aan de orde, omdat hij meent dat in de tekst te zeer gesuggereerd wordt als zou de didactiek van het aansluiten op kinderlijke denkwijzen, een algemeen didactisch beginsel zou zijn. En dat is het in zeker opzicht ook. (Zie basistekst).
15. Niet alle thema's van de twee sessies zijn in het voorgaande beschreven. Zo kwam bijvoorbeeld naar voren dat er een kloof tussen de orthodidactische en vakdidactische benaderingswijze valt waar te nemen; de zakrekenmachientjes waren uitvoerig onderwerp van gesprek; er werden onderwijservaringen uitgewisseld; het probleem van de overdraagbaarheid kwam uitvoerig aan bod; de relatie tussen cijferen, hoofdrekenen en (vooral) schatten werd besproken, en zo meer. We hopen echter dat we met dit hoofdstuk recht gedaan hebben aan de verschillende discussie-bijdragen. Wij hebben er in ieder geval veel aan gehad. Wij zijn hen veel dank verschuldigd.
16. Freudenthal, H., Onderzoek in onderwijs. *Pedomorfose*, 1980, 12, p. 62–63.

LITERATUUR

- Ashlock, R.B., Research and development related to learning about numerals for whole numbers: implications for classroom, resourceroom, clinic. In: M.E. Hynes (Ed.), *Topics related to diagnosis in mathematics for classroom teachers*. Seminole County: R.C.D.P.M., 1979, 1–23.
- Barclay, T., Buggy. *Mathematics Teaching*, 1980, 92, 10–12.
- Barnett, J.C. en P.M. Eastman, The use of manipulative materials and student performance in the enactive and iconic modes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1978, 9, 94–103.
- Bednarz, N. en B. Janvier, The understanding of numeration in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 1982, 13, 33–59.
- Beek, M.H. van, N.B. de Groot en J.H. Meijer, *Hoij Rekenen*. Amsterdam: Meulenhoff, 1974–1977.
- Bennedek, B., Is self taught well taught? *Mathematics Teaching*, 1981, 95, 11–14.
- Booth, L.R., Child-methods in secondary mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 1981, 12, 29–41.
- Borghouts-van Erp, J.W.M., *Rekenproblemen: opsporen en oplossen*. Groningen: Wolters-Noordhoff, 1978.
- Bouman, P.J. en J.C. van Zelm, *De rekenkundige denkbaarheden in logischen samenhang met – als proeve van toegepaste logica – een rekenmethode voor de lagere school*. Amsterdam: Versluys, 1918.
- Brinkman, T., V. van Achter, P. de Jong en J. Nieland, *Getal in beeld*. 's-Hertogenbosch: Malmberg, 1972–1978.
- Brown, J.S. en R.B. Burton, Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, 1978, 2, 155–192.
- Brownell, W.A., An experiment on 'borrowing' in third grade arithmetic. *Journal of Educational Research*, 1947, 41, 161–171.
- Brownell, W.A. en H.E. Moser, *Meaningful vs mechanical learning: A study in grade III subtraction*. Durham: Duke University Press, 1949.
- Capps, L.R., Making division meaningful and logical. *The Arithmetic Teacher*, 1962, 9, 198–204.
- Carnihan, H., Danny's method of subtraction. *Mathematics Teaching*, 1979, 89, 6–7.
- Cook, C.J. and J.A. Dossey, Basic fact thinking strategies for multiplication-revisited. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1982, 13, 163–172.
- Corte, E. de en L. Verschaffel, *Leren fouten diagnosticeren met behulp van de micro-computer*. Willem Bartjens, 1982, 2, (in druk).
- Cox, L.S., Systematic errors in the four vertical algorithms in normal and handicapped population. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1975, 6, 202–221.
- Davies, H.B., A seven-year-old's subtraction technique. *Mathematics Teaching*, 1978, 83, 15–18.
- Davis, R.B., Mathematics teaching – with special reference to epistemological problems. *Journal of Research and Development in Education*, 1967, 1, 1–71.
- Davis, R.B. en C. McKnight, The influence of semantic content on behavior. *The Journal of Mathematical Behavior*, 1980, 3, 1–88.
- Denmark, T. en H.S. Kepner, Basic skills in mathematics: a survey. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1980, 11, 104–124.
- Diels, P.A. en J. Nauta, *Richtlijnen voor het rekenonderwijs op de lagere school*. Groningen: Wolters, 1939.

Dienes, Z.P., *Mathematics in the primary school*. London: MacMillan, 1966.

Ekman, L.G., A comparison of the effective of different approaches to the teaching of addition and subtraction algorithms in the third grade. *Dissertation Abstracts International*, 1967, 27, 2275–2276.

Engelhardt, J., Levels of maturity in diagnosis and instruction. In: M.E. Hynes (Ed.), *Topics related to diagnosis in mathematics for classroom teachers*. Seminole County: R.C.D.P.M., 1979, 23–33.

Engen, H. van en E.G. Gibb, *General mental functions associated with division*. Cedar Falls: Iowa State Teachers College, 1956.

Erlwanger, S.H., Benny's conception of rules and answers in IPI-mathematics. *The Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1973, vol 1 nr 2, 7–26.

Erlwanger, S.H., Case studies of children's conceptions of mathematics. *The Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1975, vol 1 nr 3, 157–283.

Fitzgerald, A., An excursion into subtraction and long multiplication. *Mathematics Teaching*, 1976, 74, 30–34.

Foxman, D.D. (Ed.), *Mathematical Development*. London: H.M. Stationary Office, 1980.

Friedman, M., The manipulative materials strategy: the latest pied piper? *Journal for Research in Mathematics Education*, 1978, 9, 78–81.

Fuson, K., The effects on preservice elementary teachers of learning mathematics and means of teaching mathematics through the active manipulation of materials. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1975, 6, 51–64.

Gal'perin, P.J., Stages in the development of mental acts. In: M. Cole en J. Maltzman (Eds.), *Handbook of contemporary soviet psychology*. London: Basic Books, 1969.

Ginsburg, H., *Children's arithmetic: the learning process*. New York: Van Nostrand, 1977.

Goffree, F. en H. ter Heege, 'Hoofdrekenen' getoetst. *Willem Bartjens*, 1981, 1, 45–52.

Gravemeijer K., F. van Galen, J.M. Kraemer, T. Meeuwisse, W. Vermeulen en R. Roozenburg, *Informatie-boek 'Rekenen en Wiskunde'*. Rotterdam: OSM-project, 1982.

Hart, K. (Ed.), *Children's understanding of mathematics*: 11–16. London: Murray, 1981.

Heege, H. ter, *Tafels kennen... om te kunnen vermenigvuldigen*, 1981 (paper).

Hof, J.W. van 't en P. Wagenaar, *Elementair wiskundig rekenen*, Assen: Van Gorcum, 1970.

Hughes, M., Testing numeracy. *Mathematics Teaching*, 1979, 89, 28–30.

Hutton, J., Memoirs of a math teacher 5. Logical reasoning. *Mathematics Teaching*, 1977, 81, 8–12.

Jong, R. de (Red.), *De abakus*. Utrecht: IOWO, 1977.

Khoury, H.A. en M. Behr, Student performance, individual differences and modes of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1982, 13, 3–16.

Kieren, T.E., Manipulative materials in mathematics learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1971, 2, 228–235.

Kilian, L., E. Cahill, C. Ryan, D. Sutherland en D. Taccetta, Errors that are common in multiplication. *Arithmetic Teacher*, 1980, 20, 22–26.

Kilpatrick, J., The reasonable ineffectiveness of research in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 1981, 2, 22–29.

Knights, G., Sally's subtractions. *Mathematics Teaching*, 1973, 64, 10–15.

Kratzer, R.O. en S.S. Willoughby, A comparison of initially teaching division employing the distributive and Greenwood algorithms with the aid of a manipulative material. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1973, 4, 197–205.

Kühnel, J., *Neubau des Rechenunterricht II*. Leipzig: Klinkhardt, 1925/5.

Lester, F.K. en D.R. Kerr, Some ideas about research methodologies in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1979, 10, 228–235.

Levin, J.A., Estimation techniques for arithmetic: everyday math and mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 1981, 12, 421–435.

Lugtmeijer, H.J. en J. Boers, *Naar aanleg en tempo*. Zutphen: Thieme, 1954.

- MacDonald, T.H., A general concept internalization model exemplified by the long division algorithm. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1977, 8, 157–166.
- McCormick, R.L., A comparative study of two methods of teaching a decimal system of numeration. *Dissertation Abstracts International*, 1965, 26, 1430–1431.
- Menchinskaja, N.A. en M.J. Moro, Teaching arithmetic in the elementary school. In: J.R. Hooten (Ed.), *Soviet Studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, 1975, 8, 157–166.
- Molengraaf, G.W.J. van de (Red.), *De wereld in getallen*, 's-Hertogenbosch: Malmberg, 1981–1983.
- Moody, W.B., R. Abell en R. Bausell, The effect of activity-oriented instruction upon original learning, transfer, and retention. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1971, 2, 207–213.
- N.C.T.M., *An agenda for action. Recommendations for school mathematics of the 1980's*. Reston: N.C.T.M., 1980.
- Nelissen, J., W. Klukhuhn en A. Vuurmans, *SAC-rekenprogramma*. Utrecht: SAC, 1973 e.v.
- Papert, S., *Mindstorms. Children, computers and powerful ideas*. Brighton: The Harvester Press, 1980.
- Ploeg, S. van der, Hoofdrekenen. *Willem Bartjens*, 1982, 1, 140–146.
- Plunkett, S., Decomposition and all that rot. *Mathematics in School*, 1979, 8, 2–5.
- Postema, J., K. Kuipers en J.J. Haverkort, *Taal*. Zeist: Dijkstra, 1975–1982.
- Punn, A.K., The effects of three modes of representation in teaching multiplication facts on the achievement and attitudes of third grade pupils. *Dissertation Abstracts International*, 1974, 34, 6954–55.
- Radatz, H., *Fehleranalysen im Mathematik-Unterricht*. Braunschweig: Vieweg, 1980a.
- Radatz, H., Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the learning of Mathematics*, 1980b, 1, 16–21.
- Resnick, L.B. en W. Ford., *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1981.
- Reys, R.E., B.J. Bestgen, J.F. Rybolt en J.W. Wyatt, Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1982, 13, 183–201.
- Scott, L., A study of teaching division through the use of two algorithms. *School Science and Mathematics*, 1963, 63, 739–752.
- Scrivens, R.W., A comparative study of different approaches to teaching the Hindu-Arabic numerations system to third graders. *Dissertation Abstracts International*, 1968, 29, 839–840.
- Shumway, R.J. (Ed.), *Research in mathematics education*. Reston: N.C.T.M., 1980.
- Slesnick, T., Algorithmic skills vs conceptual understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 1982, 13, 143–155.
- Sowder, L.K., Concept and principle learning. In: R.J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education*. Reston: N.C.T.M., 1980, 286–324.
- Steinberg, E.R. en B.C. Anderson, Teaching tens to Timmy, or a caution in teaching with physical models. *The Arithmetic Teacher*, 1973, 20, 620–626.
- Suydam, M.N. en R.E. Reys (Ed.), *Developing computational skills*. Reston: N.C.T.M., 1978. N.C.T.M., 1976.
- Suydam, M.N. en R.E. Reys (Ed.), *Developing computational skills*. Reston: N.C.T.M., 1978.
- Suydam, M.N. en D.J. Dessart, Skill learning. In: R.J. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education*. Reston: N.C.T.M., 1980.
- Teule-Sensacq, P. en G. Vinrich, Résolution de problèmes de division au cycle élémentaire dans deux types de situations didactiques. *Educational Studies in Mathematics*, 1982, 13, 177–205.
- Treffers, A. (Ed.), *Cijferend vermenigvuldigen en delen (1). Overzicht en achtergronden*. Utrecht: IOWO, 1979.

- Treffers, A., Cijferen in het rekenonderwijs van toen en nu. *Pedagogische Studiën*, 1982, 59, 97–116.
- Treffers, A., Basisalgoritmen in het cijferen voor het wiskundeonderwijs op de basisschool. *Pedagogische Studiën*, 1982, 59, (in druk).
- Veldhuis, E., *Een deelleergang voor cijferend optellen en aftrekken, volgens het principe van progressieve schematisering, gegeven in het kader van remedial teaching van vier kinderen in het buitengewoon onderwijs*. Utrecht: IPAW (doct. scriptie), 1981.
- Vergnaud, G., The acquisition of arithmetical concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 1979, 10, 263–275.
- Vink, H., *Algoritmen met kruispunten en eieren. Leerpsychologische verkenningen en een onderzoek naar het leerresultaat en het hanteren van een algoritmeleergang vermenigvuldigen in het derde leerjaar van de basisschool*, 1978, (scriptie pedagogiek mo-b).
- Vrolijk, A., *Algoritmen in het onderwijs*. Utrecht: IPAW, 1981, (doct. scriptie).
- Wanders, W.E. en S. Bohncke, *Boeiend rekenen*. 's Hertogenbosch: Malmberg, deel 8, 1970/6.
- Warkentin, G., The effect of mathematics instruction using manipulative models on attitude and achievement of prospective teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1975, 6, 88–95.
- Wertheimer, M., *Productive thinking*. New York: Harper, 1945. (enlarged version). London: Associated Book Publishers, 1966.
- Wheeler, L.E., The relationship of multiple ebodiments of the regrouping concept to children's performance in solving multi digit addition and subtraction examples. *Dissertation Abstracts International*, 1972, 32, 4260.
- Wiskobasteam, *Overzicht rekenmethode anno 1980*. Utrecht: IOWO, 1980.
- Zwarts, M., Hoofdrekenen getoetst? *Willem Bartjens*, 1982, 1, 134–140.