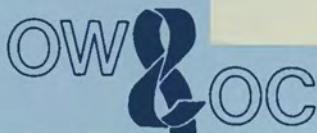


oppervlakte bij wiskobas en inzichtverwervend handelen

Annemarie Dogger



Freudenthal instituut
Archief



**vakgroep onderzoek wiskunde onderwijs en onderwijscomputercentrum
rijksuniversiteit utrecht**

**oppervlakte
bij wiskobas en
inzichtverwervend
handelen**

oppervlakte bij wiskobas en inzichtverwervend handelen

*onderzoek in de vierde klas lager onderwijs
naar onderwijs-leerprocessen bij het
wiskobaspracticum 'volkstuintjes'*

Annemarie Dogger

Intersubfacultaire vakgroep Onderwijskunde
Universiteit van Amsterdam



**vakgroep onderzoek wiskunde onderwijs en onderwijscomputercentrum
rijksuniversiteit utrecht**

Onderzoek wiskunde onderwijs

Publicatie nr 2

Reeds verschenen:

Nr 1 *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas*
(A. Dekker, H. ter Heege, A. Treffers)

eindredactie: Adri Treffers
bureauredactie: Betty Dekker
vormgeving & realisatie: Ton Voortman
druk: drukwerkservice libertas bv utrecht

© 1982 vakgroep onderzoek wiskunde onderwijs & onderwijs computercentrum.
rijksuniversiteit utrecht

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, mikrofilm of op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de houder van het copyright.

INHOUD

Voorwoord	7
Inleiding	9
DEEL A: INZICHT VERWERVEN MET WISKOBAS	11
I Oppervlakte bij wiskobas en inzichtverwervend handelen	13
1 Werken met oppervlakte: traditioneel rekenonderwijs tegenover Wiskobas	13
2 Kenmerken van inzichtverwervend handelen	18
2.1 Het verschil tussen kennis en inzicht	18
2.2 Het verwerven van inzicht is een sprong in het leerproces	19
2.3 Inzicht en herstructureren	21
2.4 Verworven inzicht	22
2.5 Samenvatting	22
II Het didactisch en diagnostisch handelen van de leerkracht	24
1 Het didactisch handelen	24
2 Het diagnostisch handelen	26
2.1 Niveau differentiatie: kwalitatief	26
2.2 Stapgrootte en moeilijkheidsgraad	27
2.3 Toenemende specificiteit van aanwijzingen	28
2.4 Persoonskenmerken	29
2.5 Samenvatting	30
III Doel en methode van onderzoek	32
IV Beschrijvingen en analyseren	35
1 Algemene indruk van de klas en algemene werkwijze van de leerkracht	35
1.1 Sommige leerlingen zitten apart	36
1.2 Samenstelling van de groepen	36
2 Specifieke doelen van het practicum 'Volkstuinjes'	36
3 Beschrijving van de lessen	38
4 Leerprocessen bij enkele leerlingen	54
5 Verdeling van vragen tijdens de nabespreking over groepen leerlingen	57

V	Samenvattende conclusies	70
	DEEL B: LESPROTOCOLLEN EN TOETSRESULTATEN	73
VI	Lesprotocollen	75
VII	Toetsresultaten	112
	1 De opbouw van de toets	112
	2 Toetsresultaten: kwantitatief en kwalitatief	116
	DEEL C: BIJLAGEN	129
	Bijlage I: Observatieschema met toelichting	131
	Bijlage II: Het thema ‘Volkstuinjes’ (H. ter Heege)	133
	Bijlage III: Toets	151
	Literatuur	155

VOORWOORD

De onderhavige publicatie is globaal gelijk aan mijn doctoraal-scriptie, maar is op enkele punten aangepast. Zo is bijvoorbeeld de spelling aangepast aan de voorkeurspelling volgens de Woordenlijst der Nederlandse Taal. Ook de hoofdstukindeling is gewijzigd. Het geheel bestaat nu uit twee delen (deel A en deel B); in deel B zijn de toetsresultaten toegevoegd en het thema 'Volkstuinjes' van Hans ter Heege.

De publicatie gaat in op de problematiek van het stimuleren van leerprocessen bij alle leerlingen in een klassikale onderwijsleersituatie.

Het verslag kan van dienst zijn voor pedagogische academies, schoolbegeleidingsdiensten en instanties die zich bezig houden met de ontwikkeling van reken-wiskundeonderwijs.

Co Bakker heeft mij intensief begeleid bij de scriptie.

Veel stimulans heb ik gekregen van Professor Freudenthal met wie ik meerdere gesprekken heb gevoerd.

Ook wil ik de St.-Jozefschool in Bussum bedanken voor de medewerking aan het onderzoek en in het bijzonder Wim Haverkort voor de gastvrijheid die hij mij verleend heeft bij het bezoeken van zijn klas.

Adri Treffers heeft het mogelijk gemaakt dat deze publicatie tot stand kwam.

Amsterdam, 2 maart 1982

Annemarie Dogger

INLEIDING

Bij rekenonderwijs zie je vaak dat leerlingen eindeloos sommetjes moeten maken en dat de schriften van sommige leerlingen bol staan van de rode strepen van de onderwijzer(es). Veel leerlingen krijgen een hekel aan rekenen en vinden het moeilijk. Soms leidt dit er toe dat leerlingen uit de 5e klas bij een school-begeleidingsdienst aangemeld worden omdat ze nog op 2e klas niveau rekenen. Bij dergelijke ontmoedigende leerprocessen spelen de volgende factoren een belangrijke rol:

1. de leerkrachten hebben te weinig aandacht geschonken aan de leerprocessen van leerlingen, aan fouten en blokkades; alleen fouten aanstrepen kan als een negatieve spiraal werken;
2. deze leerlingen hebben weinig inzicht verworven, want daar was het leren niet op gericht.

Bij Wiskobas¹⁾ wordt het inzichtverwervend handelen zo lang mogelijk aangemoedigd; het aanstrepen van fouten is daarbij uitgebannen. Bij Wiskobas wordt primair aandacht geschonken aan het verwerven van inzicht in oplossingsmethoden bij het oplossen van problemen. Dit in tegenstelling tot het traditionele rekenonderwijs waar een eenzijdige gerichtheid op uitkomsten van opgaven waarneembaar is.

Een belangrijke algemene doelstelling bij Wiskobas is verder dat leerlingen gelegenheid krijgen tot samenwerken, dat leerlingen met elkaar overleggen en van elkaar kunnen leren. Een principe van Wiskobas is dat elk kind op zijn eigen niveau werkt, zowel kwalitatief (oplossingsmethode) als kwantitatief (tempo waarin). De attitude van de leerkracht is acceptierend. De niveaus kunnen echter erg uiteen gaan lopen: het ene kind komt sneller tot inzichten dan het andere kind. Het ene kind kan beter met verworven inzichten omgaan (toepassen) dan het andere kind. Om te voorkomen dat leerlingen te lang op een laag niveau blijven werken hebben ze extra stimulans nodig wil de kloof ten opzichte van anderen niet steeds groter worden.

In dit werkstuk wordt de zojuist beschreven problematiek aan de orde gesteld. De scriptie geeft een neerslag van de interactie tussen leerkracht en leerlingen in

¹⁾ Wiskobas is de afkorting van: WISKunde Onderwijs voor de BASisschool. Wiskobas is een onderdeel van het wiskunde onderwijs dat door het IOWO werd ontwikkeld. Naast wiskunde onderwijs voor de basisschool ontwikkelde het IOWO wiskunde onderwijs voor het voortgezet onderwijs (Wiskivon). (IOWO = Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs). De vakgroep OW & OC als 'opvolger' van het IOWO verricht onder meer onderzoek dat geënt is op het werk van Wiskobas (basisonderwijs) en Wiskivon (voortgezet onderwijs).

de vierde klas van een lagere school tijdens het Wiskobas practicum 'Volkstuintjes'. In dit practicum worden leerlingen geconfronteerd met oppervlakteproblemen.

De opbouw van deel A is als volgt.

Het eerste hoofdstuk geeft een theoretische toespitsing op het inzichtverwervend handelen. Eerst zal het verschil worden aangegeven tussen het werken met oppervlakte in het traditionele onderwijs en de aanpak van Wiskobas. Vervolgens wordt ingegaan op de term 'inzichtverwervend handelen'.

In hoofdstuk II komt de taak van de leerkracht bij het inzichtverwervend handelen naar voren en worden aspecten van het diagnostisch handelen van de leerkracht besproken.

Hoofdstuk III geeft informatie over het doel van de studie en beschrijft de onderzoeksmethode.

In het vierde hoofdstuk komen de beschrijvingen en analyses van observaties in de klas aan de orde. Eerst worden de indeling van de klas, de samenstelling van de groepjes en enkele specifieke doelen bij het practicum aangegeven. Het didactisch handelen van de leerkracht en het samenwerken van de leerlingen zal in dit hoofdstuk worden beschreven aan de hand van de eerste twee lessen van het practicum. Dat er verschillen zijn in leerprocessen tussen leerlingen komt expliciet naar voren in paragraaf 4 waar een beschrijving wordt gegeven van de leerprocessen van twee leerlingen. Tenslotte wordt in de laatste paragraaf van het vierde hoofdstuk een analyse gemaakt van de verdeling van vragen over groepen leerlingen tijdens de nabesprekingen.

Deel A eindigt met samenvattende conclusies.

In deel B zijn de volledige protocollen van de laatste drie lessen van het practicum opgenomen (hoofdstuk VI) alsook de resultaten van de toets die de leerlingen zes weken na het practicum gemaakt hebben (hoofdstuk VII).

Deel C bevat drie bijlagen: observatieschema, thema en toets. (De themabeschrijving 'Volkstuintjes' is een overdruk uit een Wiskobas-publicatie.)

Deel A

Inzichtverwerven met Wiskobas

I OPPERVLAKTE BIJ WISKOBAS EN INZICHTVERWERVEND HANDELEN

In dit hoofdstuk zal eerst het verschil aangegeven worden tussen de manier waarop 'oppervlakte' in het traditionele rekenonderwijs wordt aangepakt en de wijze waarop dit bij Wiskobas gebeurt. Daarna wordt ingegaan op leerprocessen bij het inzichtverwervend handelen.

1 WERKEN MET OPPERVLAKTE: TRADITIONEEL REKENONDERWIJS TEGENOVER WISKOBAS

'Traditioneel reken-wiskunde-onderwijs stevent rechtstreeks en in ijltempo op algoritmen af. Het klakkeloos en door elkaar toepassen van (...) formules is het gevolg van prematuur algoritmiseren' (Freudenthal, 1979, blz. 23).

Het klakkeloos en door elkaar toepassen van formules zien we heel sterk bij vraagstukken over oppervlakte en omtrek.

'In de "traditionele" rekenboekjes komt het onderwerp oppervlakte nauwelijks aan de orde. Behandeling wordt meestal beperkt tot het meedelen van de oppervlakte formule van een rechthoek, en het maken van wat sommetjes met behulp van de formule' (Wiskobasteam, 1977b, blz. 8).

Dat het onderwerp oppervlakte vaak gereduceerd wordt tot het aanleren van de formule 'lengte keer breedte' is wellicht te wijten aan de traditionele rekenmethoden:

'Een begripsmatige ontwikkeling van het onderwerp komt hierin nauwelijks voor. Het kan ook zijn dat genoemd denken een oorsprong vindt in reken-didactieklessen (oude stijl)' (Wiskobasteam, 1977a, blz. 7).

Uit dit laatste citaat komen al twee fundamentele kenmerken van reken-wiskunde-onderwijs volgens de principes van Wiskobas naar voren:

- a de begripsmatige ontwikkeling van een onderwerp;
- b de didactiek heeft een nieuwe stijl.

Een onderzoek, uitgevoerd door de Universiteit van Amsterdam ('Wie kan er rekenen?', 1979) geeft er getuigenis van dat veel leerlingen de formules voor oppervlakte en omtrek klakkeloos en door elkaar toepassen. Het onderzoek was er op gericht lacunes op te sporen die de overgang van de zesde klas van de basisschool naar de eerste klas van het vervolgonderwijs belemmeren. Ten behoeve van de analyses werd in het onderzoek gebruik gemaakt van de Eindtoets Basis-onderwijs van het CITO van 1976 en 1977.

Uit een item waarin de oppervlakte van een rechthoek (van 5 bij 6 meter) werd gevraagd bleek dat 39% van de leerlingen uit Amsterdam Oud-West dit item fout maakte en landelijk 17% van de leerlingen. Eén op de vijf leerlingen in Amster-

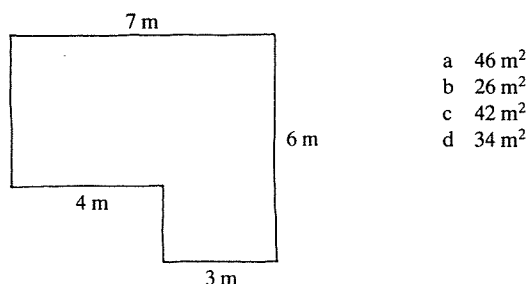
dam Oud-West en één op de tien leerlingen in het hele land berekende de omtrek van de rechthoek in plaats van de oppervlakte. Eén op de zeven leerlingen in Amsterdam Oud-West en één op de veertien leerlingen in het hele land bleken voor het berekenen van de oppervlakte de (foutieve) formule $(l \times b) + (l \times b)$ te hebben gebruikt. Waarschijnlijk hebben deze leerlingen de oppervlakteformule $(l \times b)$ verward met de omtrekformule $(2 \times l + 2 \times b)$. Ook kwam het voor dat leerlingen de lengte en breedte bij elkaar optelden: $l + b$ in plaats van $l \times b$.

Klakkeloos en door elkaar toepassen van formules...

Waren er bij dit item toch nog 61% van de leerlingen uit Amsterdam Oud-West die wél een goede uitkomst hadden en landelijk 83% van de leerlingen, bij een vraagstuk over de oppervlakte van een iets complexer figuur kwamen meer leerlingen in de problemen. Landelijk gezien was slechts de helft van de leerlingen in staat tot een goede oplossing te komen en in Amsterdam Oud-West zelfs maar 28% van de leerlingen. Dit laatste percentage komt nagenoeg overeen met de gokkans (25%).

Dit was het item:

Hoe groot is de oppervlakte van deze tuin?



- a 46 m^2
- b 26 m^2
- c 42 m^2
- d 34 m^2

Ongeveer 1/5 van de leerlingen (zowel landelijk als Oud-West) pasten de $l \times b$ formule toe, maar hielden geen rekening met de inkeping in de figuur (ze kregen er 42 m^2) uit.

Klakkeloos toepassen van formules...

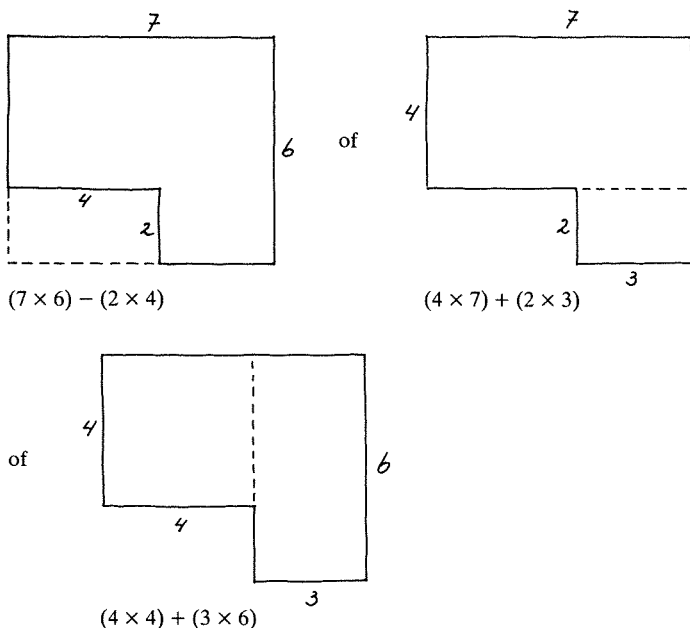
29% van de leerlingen in Oud-West en 16% landelijke hadden de uitkomst ' 26 m^2 ' aangekruist. Deze uitkomst wijst erop dat de leerlingen de omtrek hebben berekend in plaats van de oppervlakte.

Door elkaar halen van formules...

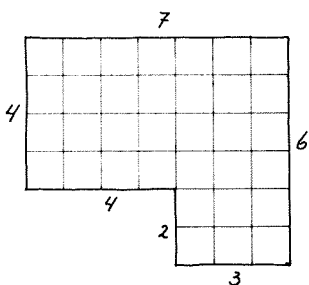
Nog weer een deel van de leerlingen heeft de uitkomst 46 m^2 aangekruist, wat kan duiden op de (foutieve) oplossingsmethode $l \times b + l \times b$ ($7 \times 7 + 6 \times 3$).

Door elkaar halen van formules...

Bij de berekening van de oppervlakte van deze figuur met behulp van de oppervlakteformule is het eerst nodig door omvorming of verdeling de figuur om te zetten in één of twee rechthoeken. Met andere woorden: het hanteren van de algebraïsche formule vereist een inzichtverwervend handelen vooraf.



Het was echter ook mogelijk geweest voor de leerlingen de oppervlakte tellend te berekenen, toepassing van de $l \times b$ -formule is dan niet eens nodig om tot het goede antwoord te komen. Er wordt dan wel een beroep gedaan op het inzicht en de kennis van de leerlingen van het begrip oppervlakte. Het oplossen van een vraagstuk op een dergelijke manier is óók inzichtverwervend handelen.



De oppervlakte kan berekend worden door de ingetekende hokjes één voor één te tellen.

Voortijdige algoritmisering¹⁾ (in dit geval: het te snel leren hanteren van de $l \times b$ formule voor het berekenen van de oppervlakte) kan schadelijk zijn; het kan (zeker voor een aantal leerlingen) leiden tot het klakkeloos en door elkaar toepassen van formules, hetgeen wijst op het ontbreken van inzicht.

¹⁾ De simpelste vorm van een algoritme is: 'Indien het probleem de kenmerken a_1 , a_2 , enz. heeft, dus van type A, doe dan p.' (Van Parreren, 1975.)

‘Wiskobas streeft wiskundeonderwijs na, waarin door aksentuering van de empirische activiteiten, het onderzoeks karakter en de rijke probleemstellingen, mogelijkheden worden geboden de sociale betekenis van het wiskundeonderwijs te vergroten’. (Treffers, 1978, blz. 106.)

Aan dit integrale schooldoel van de socialiteit, alsmede aan het specifieke doel van de wiskunde kan een bijdrage geleverd worden door:

- het uitwisselen van ervaringen;
- het samen bespreken van een oplossingsstrategie;
- het verdelen van taken;
- het naar elkaar luisteren;
- het elkaar uitleggen;
- het accepteren van elkaars tempo;
- het onderling overleg;
- het argumenteren;
- het discussiëren;
- het op waarde schatten van andermans meningen.

Van belang bij het bieden van mogelijkheden tot bijdragen aan het sociale doel is de kinderen te laten werken in heterogene groepen. Het gaat er hierbij om, zo wordt terecht door Treffers benadrukt, optimale mogelijkheden te bieden en niet om het afdwingen van bepaalde sociale gedragsvormen.

Zoals gezegd is het doel van de oppervlakte-leergang om zolang mogelijk het inzichtverwervend handelen aan te moedigen en daarmee het voortijdige algoritmiseren tegen te gaan. In de volgende paragraaf zullen kenmerken van inzichtverwervend handelen naar voren komen. Op die kenmerken wordt nogal uitvoerig ingegaan omdat ze belangrijk zijn bij het observeren en stimuleren van leerprocessen.

2 KENMERKEN VAN INZICHTVERWERVEND HANDELEN

Wat nu precies onder inzicht en inzichtverwervend handelen verstaan moet worden, is moeilijk in één zin te zeggen. Wat vooraf wel gezegd moet worden is, dat bedoeld wordt op het inzicht van de leerling en niet dat van de onderwijzer. Allereerst een begripsafbakening.

2.1 *Het verschil tussen kennis en inzicht*

Een veel voorkomend misverstand is, dat kennis en inzicht¹⁾ samenhangen met de inhoud die geleerd wordt.

¹⁾ De termen ‘inzicht’ en ‘begrip’ hebben ongeveer dezelfde betekenis (in het Engels: ‘comprehension’). Om verwarring te voorkomen wordt de term ‘begrip’ gereserveerd voor het zelfstandig naamwoord waarvoor een meervoudsvorm bestaat: het begrip oppervlakte, de begrippen oppervlakte en rechthoek. ‘Inzicht’ heeft betrekking op de activiteit van de leerling: inzien, vatten, begrijpen.

Freudenthal benadrukt dat kennis en inzicht niet verbonden moeten worden aan de inhoud: of iets kennis of inzicht is, hangt niet af van de inhoud, maar van de stap van de leerling in het leerproces, of tenminste van zijn instructie-context (Freudenthal, 1978, blz. 91). Als de instructie-context gelijk is voor alle leerlingen, zoals bij klassikaal onderwijs het geval is, dan is de stap van de leerling in het leerproces de bepalende factor. De klassikale instructie-context is niet allesbepalend, want die instructie kan inspelen op een veel hoger leerprocesniveau dan het niveau waarop een leerling zit. Een voorbeeld (ook ontleend aan Freudenthal, 1978, blz. 91) zal het verschil tussen kennis en inzicht verduidelijken.

Een kind, dat $8 + 7$ uitrekt door vanaf acht verder te tellen op de abacus, handelt op dat moment op sensomotorisch niveau (in de terminologie van Galperin zou dit een materiële handeling worden genoemd). De ontdekking dat $8 + 7$ wordt vereenvoudigd door $8 + (2 + 5) = (8 + 2) + 5$ getuigt van een hoog *inzichtsniveau*. Als dit eenmaal is begrepen, wordt het meer *kennis van de methode*; daarna, zodra het kind zich kan herinneren dat $8 + 7 = 15$, is het *feitenkennis* (automatisme). Maar op hetzelfde moment $38 + 47$ uitrekenen, vereist weer inzicht. Later wordt dat weer 'kennis van de methode' en voor de getrainde rekenaar is het meer 'feitenkennis'.

Andere voorbeelden van het verschil tussen inzichtverwerven, kennis van de methode en feitenkennis zijn ruimschoots terug te vinden in hoofdstuk IV.3, hoofdstuk IV.4 en in de lesprotocollen van deel B (hoofdstuk VI). Een illustratie zien we bijvoorbeeld bij de beschrijving van Silvester (IV.4). Silvester laat al bij het eerste werkblad zien dat hij kennis heeft van de methode van een verkorte telstrategie voor het bepalen van de oppervlakte van een rechthoek met roosterstructuur (hij vermenigvuldigt het aantal rijen met het aantal kolommen). Vele andere leerlingen telden de hokjes nog één voor één.

Inzichtverwervend handelen gaat samen met het ontdekken; kennis treedt op na het ontdekken, na het inzicht. Uiteraard wordt tijdens het ontdekken wel gebruik gemaakt van reeds bestaande kennis.

2.2 Het verwerven van inzicht is een sprong in het leerproces

Of iets inzicht is, hangt af van de stap van de leerling in zijn leerproces. Het gaat er dan om, of de leerling er nu in slaagt het te begrijpen – nu, dat is in een zekere fase van het leerproces, iets wat tot dat moment minder vlot ging.

'Als een leerproces geobserveerd moet worden, zijn de momenten die tellen haar *discontinuïteiten*, de sprongen in het leerproces' (Freudenthal, 1978, blz. 78).

Alle zojuist beschreven fasen in het leerproces bij het leren optellen (zie 2.1) kunnen discontinuïteiten genoemd worden:

- van handelen op sensomotorisch niveau naar de ontdekking van een vereenvoudiging;
- van het inzicht in de vereenvoudiging naar kennis van de methode;
- van kennis van de methode naar kennis van feiten.

We concentreren ons nu op het verwerven van inzicht, op het inzichtverwervend handelen.

Van Parreren geeft aan de hand van een onderzoek van Köhler met chimpansees (in: *Intelligenz Prüfungen an Menschenaffen*, 1ste druk, 1917) als een kenmerk van inzichtig gedrag¹⁾:

'De oplossing wordt pas na korte of lange tijd gevonden, maar treedt dan niet bij stukjes en beetjes, maar plotseling en in haar geheel op.'

Dit inzichtig gedrag staat tegenover 'trial and error', waarbij na allerlei probeersels tenslotte toevallig ook de juiste handeling wordt uitgevoerd.

Uit eigen ervaring kennen we ook het verschijnsel dat na een tijd vruchteloos bezig te zijn met een probleem ons ineens 'een licht opgaat', wij zien plotseling hoe we eruit komen: het inzicht in de beslissende samenhang tussen de gegevens van de probleemsituatie is plotseling ontstaan (een 'aha-beleving').' (Van Parreren, 1976, blz. 19.)

Kenmerk van inzichtig gedrag/inzicht is in deze omschrijving dat de oplossing plotseling en in haar geheel optreedt: de 'aha-beleving'. Bij 'trial and error' is het vinden van de oplossing toevallig. Van Parreren zet 'trial and error' (proberen) en inzichtig gedrag tegenover elkaar.

Freudenthal denkt hier anders over:

'...inzicht kan heel primitief zijn. De meest primitieve manier is in alle gevallen: proberen. Maar al probeerende vinden de leerlingen kortsluitingen, leren ze omwegen af te snijden, ze leren oplossingen vereenvoudigen. Ook al vinden ze niet de meest elegante oplossing, ze hebben toch iets verworven, dat al meer waard is dan een aangeleerd maniertje: het zoeken, methoden om iets te zoeken en de attitude van het zoeken.' (Freudenthal, 1979.)

Was in de opvatting van van Parreren het zien van de oplossing het criterium voor inzichtig gedrag, voor Freudenthal heeft ook het zoekproces leermomenten in zich: proberen leidt tot momenten van inzicht, inzicht in methoden om naar oplossingen van problemen te zoeken.

De opvatting van Van Parreren is (zoals hier beschreven werd) produkt-gericht, die van Freudenthal proces-gericht. Beide vormen van inzicht zijn belangrijk, maar wezenlijk verschillend.

Van Parreren behandelt verderop in zijn boek het leren van heuristieken en het ontdekken van heuristieken²⁾. Hierbij komt ook een procesgerichte benadering naar voren:

'Kent men voor een bepaald type probleem heuristieken, dan kan men min of meer planmatig te werk gaan. Men kan dan, alvorens zo maar wat te proberen, een plan maken van wat men het beste achtereenvolgens kan gaan doen. Als

¹⁾ Van Parreren gebruikt de term 'inzichtig gedrag'. Ook de term 'inzichtelijk handelen' kwam in de literatuur voor. Hier wordt de term 'inzichtverwervend handelen' gebruikt omdat hiermee de lading het meest gedekt wordt.

²⁾ Heuristieken helpen ons bij het zoeken naar een oplossing de goede richting te vinden. Wij kunnen ze beschouwen als het resultaat van ervaringen die met het oplossen van soortgelijke problemen zijn opgedaan. We kunnen ze meestal ook formuleren in de vorm: 'bij zo'n en zo'n probleem is het vaak handig om dat en dat eens te proberen'.

men tijdens de uitvoering van dit plan ook in de gaten houdt wat men aan het doen is en waarom, wat het opgeleverd heeft, of men op dezelfde weg nog moet doorgaan of liever het volgende proberen, dan verliest het hele proces van het zoeken naar de oplossing zijn karakter van zo maar alles proberen.'

'Toch kan het ook voordelen hebben de leerlingen bij het oplossen van problemen niet te veel op weg te helpen, en ze hun eigen ervaringen met het oplossen te laten verzamelen. Wij laten ze dan hun eigen heuristieken ontdekken.' (Van Parreren, 1976, blz. 38–39.)

Het ontdekken van zoekprocedures, het stellen van de waarom-vraag opdat leerlingen zich bewust worden van zoekmethoden en reflecteren zijn belangrijke elementen van de procesgerichte benadering. Het is verhelderend om een onderscheid aan te brengen tussen inzichtverwervend handelen en inzicht. Met inzichtverwervend handelen wordt bedoeld het ontdekken en verwerven van zoekprocedures en oplossingsmethoden; het bewust worden van zoekprocedures en oplossingsmethoden, en het reflecteren hierop zijn belangrijke elementen. Met inzicht wordt bedoeld het moment waarop een 'aha-beleving' optreedt. Dat moment kan optreden tijdens het zoeken (bijv. bepaalde gegevens opeens in een bepaalde samenhang zien, maar wat nog niet direct tot de oplossing leidt) en als de uiteindelijke oplossing wordt ingezien. Inzicht hoeft niet in één keer in haar geheel op te treden. Het kan ook stapsgewijs. Hier komen we in de volgende paragraaf op terug.

2.3 inzicht en herstructureren

Een ander kenmerk dat door Van Parreren genoemd wordt als kenmerk van inzichtverwervend handelen is:

'Het ontstaan van inzicht gaat altijd samen met het op een nieuwe manier opvatten van een probleemsituatie.

Dit houdt in:

- a details, dingen, gegevens of wat het ook zijn (afhankelijk van het soort probleem) die eerst onbelangrijk lijken, blijken hoofdzaken, of omgekeerd;*
- b ontdekt wordt, dat een of meer zaken waaraan men een bepaalde betekenis of functie toekende, ook nog een geheel andere functie kunnen hebben;*
- c er wordt een samenhang ontdekt tussen gegevens die eerst los naast elkaar stonden; daarentegen blijkt de samenhang die eerst gezien wordt, vaak voor de oplossing van het probleem helemaal niet van belang.'* (Van Parreren, 1976, blz. 19.)

Het zal van de inrichting van de probleemsituatie afhangen of het gemakkelijk of moeilijk is om tot de gewenste nieuwe opvatting te komen. Vaak bestaat bij rekenen het 'nieuwe opvatten' in het zien dat een uitdrukking op hetzelfde neerkomt als een andere, eventueel een al bekende (bijvoorbeeld: de helft van tien is hetzelfde als $\frac{1}{2} \times 10$). Bij meetkundig oplossen is het omvormen, het herstructure-

ren een vorm van 'nieuw opvatten' (bijvoorbeeld: het omvormen van een parallellogram tot een rechthoek om de oppervlakte op een eenvoudige manier te kunnen bepalen).

In het model van Duncker (1935)¹⁾ worden bij het oplossen van problemen twee fasen onderscheiden die elkaar één of meerdere keren kunnen opvolgen:

- 1 de fase van de probleemanalyse, waardoor hij/zij komt tot
- 2 probleemtransformatie.

Na deze transformatie wordt het nieuwe probleem zonodig opnieuw geanalyseerd om weer te worden getransformeerd, enz. Tenslotte leidt de transformatie van het probleem tot de oplossing. Onder probleemtransformatie wordt verstaan het vervangen van het probleem (A) door een ander (B) of eventueel het splitsen van een probleem in meerdere problemen (B_1 , B_2 , enz.). Het proces van probleemanalyse kan een maximaal creatief proces zijn, maar kan ook leiden tot het ontdekken van kenmerken van het probleem waardoor het probleem wordt *herkend* als behorend tot een bepaald type, waarvoor men over een oplossingsmethode beschikt. (Van probleemidentificatie wordt gesproken, als na een summier probleemanalyse het probleem, zonder dat verdere transformatie nodig is, met beschikbare oplossingsmethoden kan worden opgelost.)

2.4 *verworven inzicht*

Het oorspronkelijke inzicht moet uiteraard niet verloren gaan in de loop van de tijd. Als een kind inziet dat het een probleem op eenvoudiger wijze kan oplossen dan voorheen, dan zal het die methode herhaald toepassen in soortgelijke probleemsituaties. Een van de belangrijkste controlemiddelen van een leerkracht om te zien of een leerling inzicht heeft bereikt of ooit verworven heeft, is de leerling andersoortige vragen voor te leggen. Inzicht moet zulke variaties overbruggen.

2.5 *samenvatting*

Bij traditionele rekenmethoden komt het nogal eens voor dat te vroeg met algoritmiseren wordt begonnen wat een klakkeloos door elkaar halen van formules tot gevolg kan hebben alsmede een gebrek aan inzicht. We lieten dit zien aan de hand van de resultaten van leerlingen bij oppervlakte-vraagstukken op de CITO-toets.

Bij Wiskobas wordt het inzichtverwervend handelen zo lang mogelijk aangemoedigd; formules zijn dan een sluitstuk van het leerproces. Dit komt duidelijk tot uitdrukking in de leergang 'Oppervlakte'. Het onderwerp oppervlakte wordt hierin niet beperkt tot het meedelen van de 'lengte maal breedte'-formule, maar wordt breed uitgemeten en staat niet langer los van andere wiskundige onderwerpen. Met de begripsmatige ontwikkeling van het onderwerp wordt al in de onderbouw begonnen. Een belangrijk kenmerk van Wiskobas is dat er naar ge-

¹⁾ Zoals beschreven door Van Parreren (1975, blz. 394).

streeft wordt de sociale betekenis van wiskunde-onderwijs zo groot mogelijk te maken, dat leerlingen leren overleggen, argumenteren, naar elkaar luisteren, enz.

Of iets kennis of inzicht is, hangt niet af van de inhoud maar van de stap van de leerling in het leerproces. Of inzicht optreedt is zichtbaar aan de sprongen in het leerproces, de discontinuïteiten. Wat voorheen minder goed ging, gaat opeens wel vlot. De oplossing van een probleem kan plotseling gezien worden; tijdens het proberen is echter al sprake van inzichtverwervend handelen. Voorwaarde is dan wel dat leerlingen zich bewust worden van zoekstrategieën. Bij inzichtverwerven is sprake van een nieuw vatten van de probleemsituatie (omvormen, hetzelfde zien), van een sprong, een discontinuïteit in het leerproces. Aan het nieuw vatten van de probleemsituatie (de probleemtransformatie) gaat een korte of langere periode van probleemanalyse vooraf. Of inzicht inderdaad verworven is, kan men zien aan het herhaald toepassen ervan; variaties in de probleemsituatie kan de leerling dan overbruggen.

In het volgende hoofdstuk komt het didactisch handelen van de leerkracht aan de orde, alsook een belangrijk onderdeel van het didactisch handelen, namelijk het diagnostisch handelen. Leerprocessen observeren (van boven beschreven inzichtverwervend handelen) is een essentieel onderdeel van het diagnostisch handelen.

II HET DIDACTISCH EN DIAGNOSTISCH HANDELEN VAN DE LEERKRACHT

De wisselwerking tussen leerprocessen en onderwijsprocessen is evident. De leerkracht is nodig om leerprocessen op gang te brengen, te stimuleren, te begeleiden en te evalueren. Leerprocessen worden beïnvloed door onderwijsprocessen, we moeten daarom eigenlijk van onderwijsleerprocessen spreken.

Ik houd zelf voorlopig vast aan de gescheiden termen leerprocessen en onderwijsprocessen, omdat leerprocessen zich bij verschillende leerlingen die hetzelfde onderwijs krijgen verschillend voltrekken (denk aan de klassikale instructie die bij de ene leerling wél tot inzicht leidt en bij de andere leerling niet).

Met de term didactisch handelen wordt het totaal van handelingen van de leerkracht bedoeld, waardoor leerprocessen plaats kunnen vinden. Het diagnostisch handelen is daar een onderdeel van. Met de term diagnostisch handelen doelen we op het observeren van leerprocessen bij leerlingen en het signaleren en begeleiden van stagnaties daarin.

1 HET DIDACTISCH HANDELEN

Over de taak van de onderwijzer tijdens het onderwijsleerproces, waarbij het inzichtverwervend handelen centraal staat, zegt Goffree (1979) het volgende:

‘Het opgang brengen en in stand houden, het begeleiden en richting geven, het verdiepen en evalueren van leerprocessen zijn essentiële kenmerken in de taak van de onderwijzer(es) die Wiskobas-zoals-bedoeld hanteert.’ (Goffree, 1979, blz. 164.)

en verder:

‘Rommelend beginnen, zichzelf vragen stellen, spontaan zoeken naar wetmatigheden, vragen naar het waarom e.d. zijn activiteiten die de onderwijzer veelvuldig mogelijk moet maken, maar die slechts met mate gestuurd kunnen worden.’ (Goffree, 1979, blz. 171.)

Bij het inzichtverwervend handelen is het (zichzelf) vragen stellen, het spontane zoeken naar wetmatigheden, het vragen naar het waarom belangrijk. Kortom, de onderzoekende benadering staat centraal en de activiteit van de leerling is van essentieel belang. Dit in tegenstelling tot de antwoordgerichte en meer passieve opstelling van leerlingen in het traditionele rekenonderwijs.

Voordat een belangrijk probleem bij de onderzoekende benadering in de stijl van Wiskobas wordt besproken, zal de theorie van Bruner over ontdekkend leren worden geraadpleegd en wordt nagegaan welke eisen daarbij aan de bege-

leiding door de leerkracht worden gesteld. (Onderstaande ideeën van Bruner zijn ontleend aan A.J. Treffers, 1978.)

'Bij het ontdekkend leren leert de leerling gebruik te maken van zijn eigen ideeën, de leerling gaat zelf op zoek, bedenkt zelf een plan en leert zelf een probleem oplossen. De activiteit wordt hierdoor vergroot, ze gaan werken uit nieuwsgierigheid, uit een verlangen erachter te komen hoe het zit.'

'Het ontdekken is in wezen een kwestie van het opnieuw rangschikken of omvormen van feitenmateriaal op zo'n manier, dat men in staat wordt gesteld verder te gaan om tot rijkere inzichten te komen.'

'Ontdekken is jezelf raadplegen. Het gaat om het ontwikkelen van een houding, die getypeerd wordt door het zelf denken en op zoek gaan. De stof is hierbij hulpmiddel.' (A.J. Treffers, 1978, blz. 4.)

De eisen die aan de begeleiding door de leerkracht bij dergelijk onderwijs worden gesteld zijn:

- 1 zorgen dat er voldoende materiaal aanwezig is, vooral probleemoproepend materiaal;
- 2 zorgen dat de opstelling van de banken en de verdere inrichting van het lokaal, het zelf bezig zijn met het materiaal en het overleg van de leerlingen in de hand werken;
- 3 bij de voorbereiding verschijnselen selecteren die waarneembaar zijn en nagaan of de opdracht niet te complex of te triviaal is;
- 4 zich verplaatsen in de wijze waarop leerlingen problemen op willen lossen;
- 5 terugspelen van vragen van leerlingen om gemakkelijk achter de oplossing te komen;
- 6 aan de precisie in formulering van de leerlingen moet de docent aandacht schenken.

Het begeleiden van leerlingen vereist aandacht schenken aan de verschillende manieren waarop leerlingen werken. Een schema dat de ene leerling aanspreekt, kan voor de andere leerling onduidelijk zijn. *Vergelijk de verschillende oplossingen, ga in op overeenkomsten en verschillen*, maar laat de beslissing welk schema bruikbaar is over aan de leerling.

Kortom:

- de leerlingen moeten zelf tot een oplossing komen;
- vragen die de leerling stelt om gemakkelijk achter een antwoord te komen, worden teruggespeeld;
- onderwijzen gebeurt niet in de vorm van uiteenzetten, maar begeleiden; de oplossingen van de leerlingen worden vergeleken, er wordt ingegaan op overeenkomsten en verschillen, maar leerlingen bepalen zelf wat bruikbaar is.

A. Treffers (in: Wiskobas Doelgericht, blz. 64) geeft enkele concrete voorbeelden van didactische kernwerkzaamheden.

Als voorbeelden van didactiseren waarbij het leerproces gaande gehouden wordt, noemt hij:

- het stellen van kernvragen;

- het geven van ‘leerduwtjes’;
- het bewust maken van ‘vanzelfsprekendheden’;
- het uitleggen met behulp van een visueel ordeningsmiddel;
- het aandringen op het aanbrengen van verkortingen;
- het neerzetten van evaluatiepunten;
- het laten toepassen van het geleerde op een ander probleem;
- het bewust maken van het afgelegde onderwijsleertraject.

De nadruk kan bij het didactiseren ook op andere punten liggen, bijvoorbeeld op het construeren van een contextverhaal voor de instapproblematiek of het selecteren van doeltreffende onderwijsleermiddelen. Hier wordt de aandacht vooral gericht op bovengenoemde voorbeelden.

Vastgesteld hebbende, dat de activiteit en het onderzoeken/ontdekken van de leerling centraal staan en dat de rol van de leerkracht niet op de eerste plaats die van uiteenzetten, maar van begeleiden is, stuiten we in de praktijk op een belangrijk probleem. Namelijk: waaruit bestaat het begeleiden van de leerkracht nu precies wanneer er *blokkeringen* bij het leren ontstaan?

A. Treffers (1978): ‘Soms kunnen kinderen zichzelf redden, of wijst de ene leerling de andere op het juiste pad, maar op andere momenten is de steun van de onderwijzer nodig om hen enigszins wegwijs te maken.’ Wat is er aan de hand als leerlingen *niet* actief zoeken, weinig doen met inzichten van andere leerlingen en zelf weinig ontdekkingen doen? Wat kan de leerkracht dan doen?

2 DIAGNOSTISCH HANDELEN VAN DE LEERKRACHT

In het nu volgende worden enkele aandachtspunten behandeld die van belang zijn bij het diagnostisch handelen van de leerkracht. Diagnostiek moet niet alleen verricht worden naar aanleiding van leerresultaten, maar vooral *tijdens leerprocessen*: welke oplossingsmethode hanteert de leerling, welke fouten maakt hij/zij, is de opgave niet te moeilijk, hoe kan ik blokkades verhelpen, wat kan eraan de hand zijn met leerlingen die op een laag niveau blijven handelen. Wat is de beste remedie? Diagnostisch handelen vindt in deze optiek plaats tijdens de les: als de leerlingen voor zichzelf en in groepjes werken, maar vooral ook tijdens de nabespreking van de opdracht. Leerlingen verbaliseren dan hoe ze tot een oplossing gekomen zijn; oplossingsmethoden worden met elkaar vergeleken. De verschillende niveaus worden zichtbaar alsook gemaakte fouten. Het is van groot belang stil te blijven staan bij fouten en leerlingen die op laag niveau blijven handelen te stimuleren tot het handelen op hogere niveaus, het bewust worden van oplossingsmethoden en het reflecteren.

2.1 niveaudifferentiatie: kwalitatief

Een vormkenmerk van Wiskobas is differentiatie. A. Treffers (1978, blz. 69 e.v.) bespreekt twee vormen van differentiatie. Elke leerling kan op zijn eigen niveau een passende oplossing trachten te vinden. Bij de afsluitende groepsbespreking

wordt een overzicht van de verschillende oplossingsmethoden gegeven en ieder kan dan zijn eigen aanpak tegen die van een ander afwegen. We spreken hier van *differentiatie in oplossingsniveau*.

Bijvoorbeeld, op de manier van:

- 1 systematisch werkend;
- 2 systematisch werkend en redenerend op grond van symmetrieoverwegingen;
- 3 redenerend volgens de methode van de mathematische inductie wordt het probleem opgelost.

Een tweede vorm van niveaudifferentiatie is die met betrekking tot de *bewerking*. Dit is het geval bij het aanleren van de basisoperaties volgens het principe van de spontane progressieve schematisering¹⁾: een zelfde probleem wordt door iedere leerling op passend niveau van schematisering opgelost. Ter verduidelijking het volgende. In een bepaald geval ziet een leerling dat er een vermenigvuldiging uitgevoerd moet worden om de oplossing te vinden, maar de bewerking geschiedt door hem/haar op een laag niveau van schematisering. Dus: er is sprake van een relatief hoog oplossingsniveau, maar van een laag bewerkingsniveau. In een ander geval ziet een leerling niet dat het een vermenigvuldigingsprobleem is, hoewel hij die operatie op zich al op een hoog niveau van schematisering kan uitvoeren.

Niet zo zeer het kwantitatieve verschil in tempo van de leerling of de hoeveelheid doorgewerkte of door te werken leerstofinhouden is essentieel als wel het kwalitatieve onderscheid in leerproces. Het herkennen van de verschillende niveaus van de leerlingen is belangrijk. Wil de leerkracht leerprocessen stimuleren – dit is kwalitatief verhogen – dan is het belangrijk te letten op stagnaties in het leerproces. Ook is het belangrijk aan te dringen op het aanbrengen van verkortingen, gebruik te maken van leerduwtjes enz. Hierbij moet echter rekening gehouden worden met de moeilijkheidsgraad.

2.2 stapgrootte en moeilijkheidsgraad

Danilov (1963, blz. 243) wijst er op dat: 'Hoe groter de stap is van het bekende en het gewone naar het onbekende en ongewone, des te moeilijker de activiteit.' Is de moeilijkheidsgraad aangepast aan het niveau, aan de kracht van de leerling, dan heeft ze een mobiliserende werking en daarmee is het bevorderlijk voor de geestelijke ontwikkeling. Deze moeilijkheid, zegt Danilov, is de concrete uitdrukking van de tegenstellingen tussen de nieuwe opgaven die in het onderwijsproces gesteld worden en het huidige kennis- en ontwikkelingsniveau van de leerling ('de stap van de leerling in het leerproces', zie paragraaf 2.1 en 2.2). Het juiste bepalen van de moeilijkheidsgraad en de aard van de moeilijkheid in het onderwijsproces is voor de leerkracht een beslissende hefboom om de drijfkrachten van het leren volledig in werking te laten treden. Is echter de tegen-

¹⁾ Schematisering is 'het samenvoegen van stappen'. Spontane voortschrijdende schematisering wil zeggen dat leerlingen zichzelf steeds een efficiëntere methode verschaffen om rekenproblemen de baas te worden (Wiskobas-leerplanpublicatie nr 2, blz. 137).

spraak tussen de gestelde opgave en de mogelijkheden van het kind te groot, dan werkt dit niet als drijfkracht van het leren, maar werkt het belemmerend.

De moeilijkheidsgraad kan volgens Danilov (blz. 244, 245) op twee manieren toenemen:

1. er worden gecompliceerdere oplossingsmethoden van de leerling verlangd;
2. de stof wordt gecompliceerder, maar werkmethode en proces blijven onveranderd (het type opgave blijft bijvoorbeeld hetzelfde, maar de getalswaarden worden moeilijker).

Moeilijkheden kunnen leerlingen uitdagen, maar ook blokkeren. Het is de kunst van de onderwijzer het begeleiden zo vorm te geven, dat de leerling geen kant en klare oplossing krijgt aangeboden, maar dat het denken in banen wordt geleid. Naar de mening van De Leeuw (1979, blz. 33) hangt de vereiste stapgrootte samen met de mate van specificiteit van de te geven aanwijzingen (cues, hulp) in de instructies. Als men wil volstaan met zeer algemene aanwijzingen ('probeer het eens op een andere manier' e.d.) dan zal de stapgrootte aanzienlijk zijn. Als veel specifiekere aanwijzingen worden gegeven dan is de stapgrootte geringer. De benadering die door De Leeuw gekozen wordt, houdt in dat bij een eerste vastlopen van de leerling zeer algemene hulp geboden wordt; deze hulp wordt, als ze te algemeen blijkt om tot een oplossing(poging) te leiden, gaandeweg specifiekere. Deze werkwijze komt overeen met het door Selz (1935) genoemde principe van de 'kleinstmögliche Hilfe', een ontdekkingsproces met een geringe mate van sturing. Er wordt dan hulp geboden op verschillende niveaus; hulp op het meer specifieke niveau wordt alleen dan geboden als de minder specifieke hulp niet effectief blijkt. Het uiteindelijke doel daarbij is, dat de leerling leert om gaandeweg met minder specifieke hulp te volstaan. Ook dient de leerling zichzelf de benodigde hulp te kunnen verschaffen. De aanvankelijk extern gegeven *heuristische voorschriften* dienen geleidelijk aan geïnternaliseerd te worden.

De tegenstelling tussen specificiteit van aanwijzingen (oplossingsvoorschrift) en zelfbepaaldheid van de acties (oplossingsproces) vormt het belangrijkste dilemma waarvoor men komt te staan als heuristische processen dienen te worden aangeleerd. Het (uiteindelijke) doel van de hier beschreven onderwijsvorm (ontdekkend, inzichtverwervend handelen) is de leerling tot zelf bepaalde heuristische processen te brengen. Zeer vage, algemene aanwijzingen zijn vaak onvolgende om het denkproces op gang te houden, terwijl te specifieke aanwijzingen niets aan de inventiviteit van de leerling overlaten. De zojuist beschreven benadering van de successief toenemende specificiteit kan een oplossing zijn voor dit dilemma. De mate van specificiteit van de aanwijzingen, hints, hangt dan af van de verlangens van de leerling. Maar altijd geldt dat het uiteindelijke doel is de problemen onafhankelijk op te lossen.

2.3 toenemende specificiteit van aanwijzingen

De Leeuw (1979, blz. 3 e.v.) geeft de volgende vormen van aanwijzingen, naar toenemende specificiteit. De meest primitieve vorm om het probleemoplossen te stimuleren is, dat men de leerling confronteert met bepaalde denkopgaven *zon-*

der dat enige aanwijzing wordt gegeven. Men hoopt dan dat uit confrontatie met cognitieve taken het probleemoplossen zich ontwikkelt. De achterliggende idee is dan dat de heuristische structuur (het totaal aan beschikbare oplossingsmethoden) niet volstrekt rigide is, zodat er een zekere variatie van oplossingsprocessen bestaat. Door reinforcement van de juiste, effectieve variatie komt er 'behavior shaping' tot stand en kunnen er mutaties in de heuristische structuur ontstaan. Tegenover deze lijdzame methode kunnen aanpakken gesteld worden waarin 'leidzamer', meer sturing-verschaffend, te werk wordt gegaan. Aanpakken waarin van minder of meer sturing sprake is, maar waarbij een deel van de uit te voeren handelingen aan de inventiviteit van de leerlingen wordt overgelaten, worden *heuristische aanpakken* genoemd. Aan het andere extreem van de mate van specificiteit ligt aan aanpak waarin handelingen uitputtend zijn voorgeschreven: de *algoritmische methode*.

2.4 persoonskenmerken

Dat niet alle leerlingen met dezelfde aanpak gebaat zijn, werd aangetoond in het onderzoek van De Leeuw (1979). In dit onderzoek kreeg één groep leerlingen een 'algoritme-treatment' en een andere groep een 'heuristische treatment' (resp. Algor group en Heur group). De invloed van de algoritmische/heuristische aanpakken bleek niet verbonden te zijn met de mate van complexiteit van de probleemcategorie. De aard en richting van verschil in effect van de twee methoden is afhankelijk van de positie van de leerling op een bepaalde persoonlijkheidsdimensie. Het bleek bijvoorbeeld dat voor een aantal afhankelijke variabelen de heuristische methode meer effectief was dan de algoritmische methode voor leerlingen met een lage faalangst, terwijl voor leerlingen met een hoge faalangst de algoritmische methode, die meer structuur biedt, tot betere resultaten leidt (De Leeuw, 1979, blz. 291). Anders gezegd: leerlingen die sterk faalangstig zijn komen in weinig gestructureerde probleemsituaties (de heuristische aanpak) tot zeer geringe prestaties, terwijl een hoge mate van structurering (de algoritmische aanpak) goede prestaties oplevert.

De Leeuw geeft twee implicaties aan met betrekking tot hoog faalangstige kinderen voor de onderwijssituatie. De ene weg leidt tot oplossingen op korte termijn en de andere weg tot mogelijke oplossingen op langere termijn.

1 Het verschaffen van 'compenserende methoden'.

In de compenserende benadering wordt aan specifieke zwakheden van de leerling tegemoet gekomen door het verschaffen van extra structurering, hulp e.d. op de punten waar de leerling zich onzeker voelt.

2 Cureren door systematische hulp en bemoediging.

Hoewel de compenserende aanpak de voor de hand liggende implicatie lijkt te zijn, is op langere termijn deze werkwijze waarschijnlijk niet optimaal. Niet altijd zal de leerling, voor een probleemsituatie geplaatst, de mogelijkheid hebben de gewenste mate van structurering (door de leerkracht of anderszins) te laten aanbrengen. Dit geldt zeker voor de overgang van de schoolsituatie naar de situatie buiten de school. Gepleit wordt voor een meer fundamentele aanpak,

een aanpak die erop gericht is het kind geleidelijk aan meer zelfvertrouwen te geven. Hiervoor zijn geen technieken te geven, maar wel een aantal duidelijke heuristische regels en principes.

Een strategie van geleidelijkheid wordt door De Leeuw (en Hermans, Bergen en Eyssen) voorgestaan. Er dient een onderwijssituatie gecreëerd te worden waarin wordt ingespeeld op de behoeften van de leerling aan meer zekerheid en duidelijkheid. Dit mag echter niet verworden tot een beschermd klimaat. De leerkracht dient geleidelijk aan het aantal zekerheidselementen in de onderwijssituatie te verminderen, maar dit niet te snel opdat de moed de leerlingen niet in de schoenen zinkt. De hulp die aan faalangstige leerlingen geboden moet worden dient zo weinig mogelijk specifiek van aard te zijn. Dit met het oog op het werken onder persoonlijke verantwoordelijkheid.

Specifieke hulp houdt in dat de oplossing van het probleem direct gegeven wordt of dat er zodanige aanwijzingen worden gegeven dat de oplossing hieruit rechtstreeks voortvloeit. Niet specifieke hulp heeft meer het karakter van een algemene aanwijzing; de leerling wordt door de hulp aan het denken gezet teneinde de oplossing zo mogelijk verder zelfstandig te geven. De hulp moet dus zo weinig mogelijk specifiek zijn en bovendien geleidelijk aan worden teruggenomen. Een over langere termijn volgehouden gedifferentieerde wijze van cumulatieve structurering van probleemsituaties zou faalangstige leerlingen geleidelijk aan tot meer zelfvertrouwen kunnen brengen en meer structurering op eigen kracht. De Leeuw waarschuwt de lezer nog voor een voorbarig optimisme. Het is niet eenvoudig voor leerkrachten een dergelijk gedifferentieerd (voor elke leerling anders) en bovendien successief verschaffen van hulp in de klasse-situatie mogelijk te maken.

In aansluiting op het voorafgaande moeten enkele relativerende opmerkingen gemaakt worden. Naast factoren als faalangst en te weinig zelfvertrouwen zijn er natuurlijk andere factoren die leerprocessen ongunstig kunnen beïnvloeden. Als leerlingen zich niet persoonlijk betrokken voelen bij de gestelde problemen kan dit er toe leiden dat ze er snel het bijltje bij neergooien (niet willen, geen interesse). Of iets hebben van 'dit is niets voor mij, ik kan het niet, dus ik doe het niet' (niet kunnen). Ook is het mogelijk dat de opdracht te onduidelijk is gesteld en zodoende de oorzaak is van problemen bij het oplossen.

Als leerlingen in principe wel kunnen en ook willen, maar niet doelgericht kunnen handelen omdat ze niet durven dan is er sprake van faalangstigheid. Dan kan de door De Leeuw voorgestelde aanpak oplossingen bieden.

2.5 samenvatting

Het didactisch handelen van de leerkracht bestaat, bij het zo lang mogelijk aanmoedigen van inzichtverwervend handelen, uit het op gang brengen, in stand houden, begeleiden, richting geven, verdiepen en evalueren van leerprocessen. Het zoeken van de leerling, het vragen naar het waarom moet aangemoedigd worden, maar slechts met mate gestuurd. De onderzoekende houding en de activiteit van de leerling staan centraal.

De inrichting van de klas, de keuze van probleemsituaties, zich inleven in de wijze van oplossen door de leerlingen, terugspelen van vragen van leerlingen, zijn belangrijke elementen bij het stimuleren van ontdekkingen.

Oplossingsmethoden van leerlingen worden met elkaar vergeleken en nabesproken.

Het stellen van kernvragen, het geven van leerduwtjes, het bewustmaken van vanzelfsprekendheden, uitleggen met behulp van visuele middelen, aandringen op verkortingen, enzovoort, zijn allemaal elementen van het didactiseren.

Er zijn echter in een klas vaak enkele leerlingen die zich niet actief opstellen, niet zoeken.

Het is ook de taak van de leerkracht om hier op te letten. Dit aspect van het didactisch handelen is het diagnostisch handelen.

Belangrijke aandachtspunten bij het diagnostisch handelen zijn:

- 1 Het herkennen van verschillende niveaus (bij oplossingsmethoden en bewerkingen). Stagnaties kunnen misschien worden opgeheven door het geven van extra leerduwtjes en het stimuleren van verkortingen.
- 2 Blokkerend kan de stapgrootte/de moeilijkheidsgraad voor de leerling werken. De stapgrootte hangt samen met de specificiteit van aanwijzingen.
- 3 Persoonskenmerken: faalangstige kinderen hebben vaak meer behoefte aan structuur (meer voorgeschreven oplossingsmethoden). Aanbevolen wordt om de verleiding te weerstaan deze leerlingen extra hulp, structurering aan te bieden, omdat deze werkwijze op de lange termijn waarschijnlijk niet optimaal is. Een fundamentele aanpak is, deze leerling geleidelijk aan meer zelfvertrouwen te geven. Volgens de strategie van de geleidelijkheid wordt ingespeeld op de behoeften van de leerling aan meer zekerheid en duidelijkheid, maar dit wordt geleidelijk aan verminderd. De hulp moet zoveel mogelijk non-specifiek zijn (geen oplossingsmethoden aanreiken). Met andere woorden: de denkstapjes aanvankelijk kleiner maken voor de leerling, de slootbreedte verkleinen, maar niet de loopplank uitleggen.

III DOEL EN METHODE VAN ONDERZOEK

Het doel van de studie is elementen op het spoor te komen, waardoor inzichtverwervend handelen voor alle leerlingen bevorderd kan worden. Bij Wiskobas wordt het inzichtverwervend handelen zo lang mogelijk aangemoedigd. Niet alleen de inhoud van het reken-wiskunde-onderwijs volgens Wiskobas is erop gericht dat leerlingen inzicht verwerven (door de begripsmatige opbouw van onderwerpen – i.c. oppervlakte –, formules als sluitstuk van een leerproces), maar ook de didactiek en de diagnostiek zijn hierop gericht. In de voorgaande hoofdstukken 1 en 2 is hier uitvoerig op ingegaan.

Om na te gaan hoe het didactisch en diagnostisch handelen van de leerkracht, gericht op het verwerven van inzicht voor alle leerlingen in de praktijk van onderwijs volgens Wiskobas gerealiseerd kan worden is onderzoek verricht in één klas. Gekozen is voor een kwalitatieve observatie-methode. Het onderzoek heeft een exploratief en beschrijvend karakter; er is geen sprake van hypothesetoetsing.

Terwel (1978, blz. 183) zegt over de kwalitatieve observatie-methode het volgende:

‘Bij de analytische (empirische) observatie wordt gewerkt met vooropgezette categorieën (preconceptions), terwijl bij de niet-analytische (fenomenologische) benaderingen wordt geprobeerd om te observeren zonder a priori uit te gaan van operationele begrippen, modellen en hypothesen.’

Bij de kwalitatieve (niet-analytische) methode worden meestal geen statistische analyses toegepast, maar een kwantitatieve verwerking is niet per definitie uitgesloten.

Voor de verwerking van de observaties is, naast de kwalitatieve beschrijvingen en interpretaties, getracht de vragen en reacties van de leerkracht in categorieën onder te brengen. Hierdoor werd het mogelijk een aanzet tot een kwantitatieve verwerking te geven.

De observaties zijn gedaan in de vierde klas van een lagere school in Bussum. De school is een experimenteerschool van het IOWO geweest en is volledig overgegaan op de Wiskobas aanpak.¹⁾

De school wordt voornamelijk door arbeiderskinderen bezocht (80%); het is een stimuleringsschool.

¹⁾ Sommige scholen doen een enkel project of alleen het algoritme programma (optellen, aftrekken, enz.), maar deze school heeft Wiskobas in alle klassen doorgevoerd (vijf uur per week).

De observaties in de school zijn gedaan tijdens de behandeling van het practicum 'Volkstuinjes' uit de leergang 'Oppervlakte'.

Het practicum duurde vijf lessen van resp. 50 en 70 minuten.

De werkwijze is als volgt geweest. Ter voorbereiding op de observaties in de klas zijn de werkbladen doorgenomen met enkele kinderen (kinderen van een andere school, een LOM school). Een maand voordat het practicum begon, heb ik een Wiskobas-les mee mogen maken om kennis te maken met de kinderen en voor een eerste oriëntatie op het onderwijs volgens Wiskobas.

Tijdens de lessen van het 'Volkstuinjespracticum' zijn voortdurend aantekeningen gemaakt van leerlingobservaties. De lessen zijn bovendien allemaal opgenomen op de bandrecorder. Hierdoor werd het mogelijk de beschikking te hebben over de volledige lesprotocollen. Als aanvullend materiaal is na afloop gebruik gemaakt van de werkbladen van de leerlingen.

In aansluiting op het 'Volkstuinjesproject' is een toets ontwikkeld, die zes weken na het project is afgenomen in de klas. De toets is opgenomen in bijlage III. Het doel van de toets was na te gaan wat de leerlingen hadden geleerd welke methoden ze zes weken na het practicum zouden toepassen. De toetsresultaten van de klas zijn zowel kwantitatief als kwalitatief geanalyseerd en staan vermeld in deel B, hoofdstuk 7.

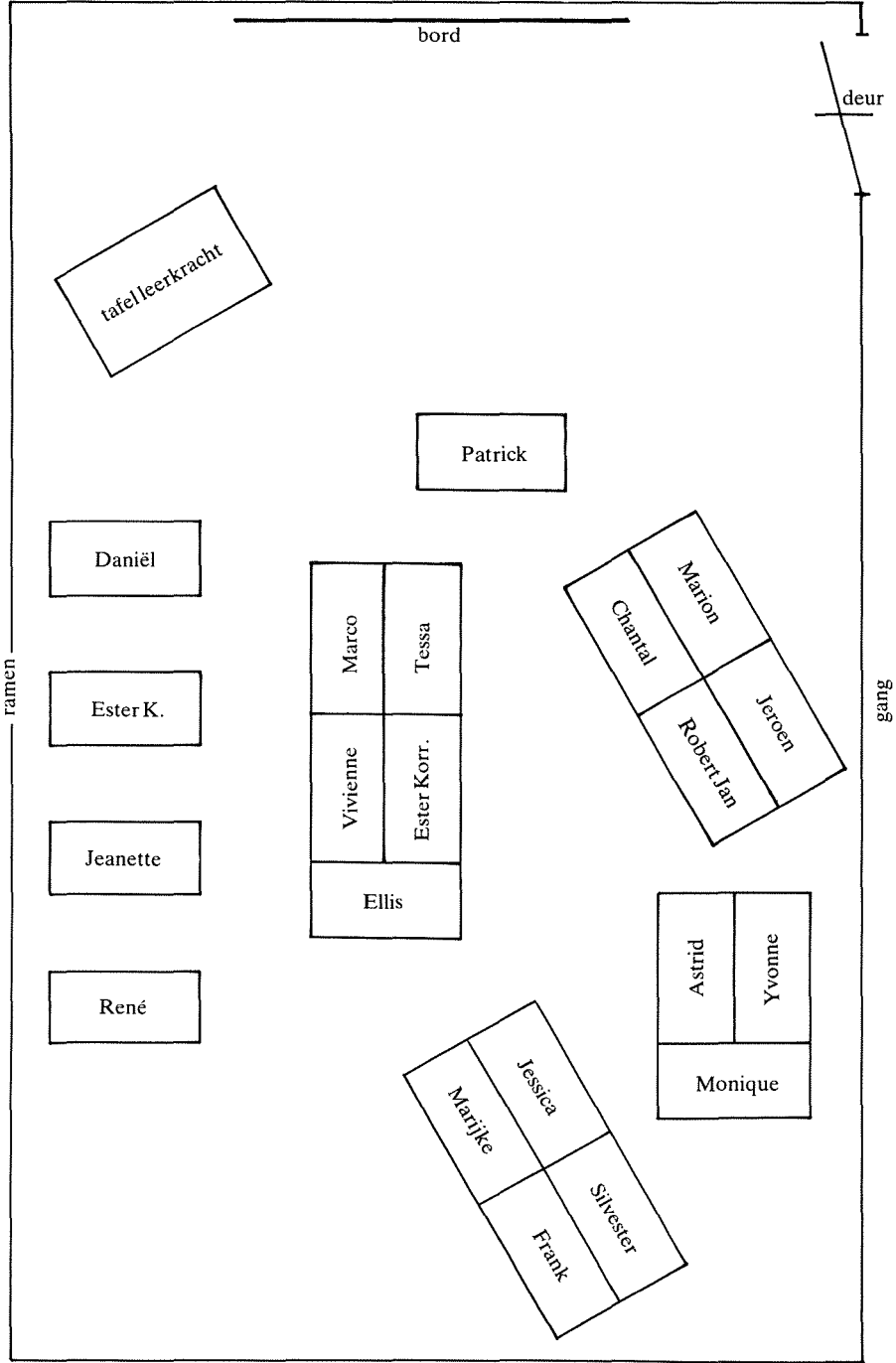
Bij de beschrijvingen en analyses in het volgende hoofdstuk zullen de volgende punten de aandacht krijgen:

- het didactisch handelen van de leerkracht (de opbouw van de les, de instructie, het nabespreken van opdrachten, het stimuleren van ontdekkingen);
- het samenwerken/zelfstandig werken van de leerlingen (hoe stimuleren leerlingen elkaar, welke oplossingsmethoden hanteren leerlingen);
- verschillen in leerprocessen bij leerlingen tijdens hetzelfde onderwijs;
- het stellen van vragen door de leerkracht en het reageren op leerlingantwoorden (hoe stimuleert de leerkracht leerlingen tot leerprocessen, vooral bij blokkades).

Omdat het doel van de studie is elementen op het spoor te komen om inzichtverwervend handelen bij alle leerlingen te stimuleren (dus ook bij leerlingen die niet zo snel tot inzichten komen) is voor het laatste aandachtspunt de klas opgedeeld in drie groepen: een groep leerlingen die 'matig' op het rapport had voor Wiskobas¹⁾, een groep met 'voldoende' en een groep met 'goed'. De aandacht is vooral gericht op het interactiepatroon tussen de leerkracht en leerlingen met 'matig' op het rapport.

¹⁾ Rekenen is op deze school op het rapport opgesplitst in de volgende onderdelen: inzicht/Wiskobas, cijferen en tafels.

PLATTEGROND VAN DE KLAS



IV BESCHRIJVINGEN EN ANALYSEN

1 ALGEMENE INDRUK VAN DE KLAS EN ALGEMENE WERKWIJZE VAN DE LEERKRACHT

De klas heeft 19 leerlingen: 11 meisjes en 8 jongens. Het is een vierde klas. Er zijn twee leerlingen uit het vijfde leerjaar in deze klas; deze leerlingen zijn overgegaan naar de vijfde maar komen voor Wiskobas terug naar de vierde klas. Het was een rustige klas; de leerlingen maakten een leergierige indruk. De kinderen gedroegen zich ook vrij, staken makkelijk hun vinger op om iets te vragen of om te antwoorden.

De leerkracht van deze klas heeft ruime ervaring met het Wiskobas-materiaal. Voordat de school overging van de aanwezige rekenmethode op Wiskobas heeft de leerkracht – evenals de andere leerkrachten van deze school – heroriënteringscursussen van Wiskobas gevolgd. Daarna is de school enige jaren intensief begeleid door medewerkers van het IOWO. De leerkracht bereidde de lessen telkens zorgvuldig voor. Steeds was ook gezorgd voor voldoende materiaal voor alle leerlingen. Tijdens de lessen werd veelvuldig gebruik gemaakt van de overheadprojector.

De lesopbouw was telkens als volgt. De les begon met een korte introductie op het werkblad (alleen de introductie op het eerste werkblad was langer) en een opdracht. Daarna werkten de leerlingen zelfstandig – alleen of in de groepjes – de opdrachten uit en vervolgens werd de opdracht klassikaal nabesproken. De hele klas werkte dus gelijktijdig aan dezelfde opdracht. Leerlingen die snel klaar waren, mochten voor zichzelf op de achterkant van het werkblad optel-, aftrek-, vermenigvuldig- en deelsommen maken. Meestal kreeg de klas per les twee à drie opdrachten. De tijd dat de leerlingen zelfstandig werkten varieerde per opdracht, maar was gemiddeld tien minuten. De rest van de tijd werd dus voornamelijk besteed aan de nabesprekingen. (Een les duurde meestal 70 minuten; dus het grootste deel van de les werd gewijd aan de klassikale besprekingen van de opdracht.)

De leerkracht was zelf merkbaar geïnteresseerd in reken-wiskunde-onderwijs en gemotiveerd voor Wiskobas. De leerkracht gaf heldere uitleg en trad naar voren als een knappe vragensteller (zoals zal blijken uit de lesverslagen).

Samenvattend kan worden gesteld dat de leerkracht beschikte over hoge didactische kwaliteiten en door zijn eigen motivatie een stimulerende werking had op de hele klas.

1.1 sommige leerlingen zitten apart

De banken zijn zo neergezet, dat samenwerken en onderling overleg mogelijk wordt gemaakt. Er zitten echter ook kinderen alleen. De reden dat sommige kinderen apart zitten is, volgens de leerkracht, dat de kinderen dat zelf willen of om technische redenen.

De leerkracht:

‘René bijvoorbeeld wil alleen (apart) zitten als hij in een groep zit, en in een groep als hij alleen zit. Ester en Jeanet zitten apart omdat ze elke dag één uurtje komen, alleen met Wiskobas. Voor hen geldt dus een technische reden van het apart zitten: anders moeten we elke keer de bankjes aanschuiven en weer wegschuiven.’

1.2 samenstelling van de groepen

De groepjes zijn heterogeen naar sexe samengesteld. Meestal zijn het vriendjes en vriendinnetjes in de groepjes. De groepen wisselen nogal eens van samenstelling. Sommige kinderen kunnen niet bij elkaar zitten, verdragen elkaar niet. Dan krijgen ze ruzie, gaat competitie een rol spelen, of ontstaat er een groepsleider. De leerkracht:

‘Monique bijvoorbeeld heeft vaak last van buien, dwars zijn. Yvonne, bij haar in het groepje, laat dat over zich heen waaien. Zet je daar een kind bij dat er tegenin gaat, dan heb je voortdurend ruzie. Zo zit Jessica, die onrustig is, tegenover Frank, die weer heel rustig is. Marijke vult het weer aan. Dat is een vriendin van Jessica.’

De groepjes zijn dus gedragsmatig samengesteld en niet naar niveaus.

2 SPECIFIEKE DOELEN VAN HET PRACTICUM ‘VOLKSTUINTJES’

Het inzichtverwervend handelen werd in het practicum ‘Volkstuintjes’ nagestreefd door middel van de problematiek van:

- het berekenen van de oppervlakte van figuren met een ingebedde roosterstructuur;
- het leggen van relaties tussen oppervlakte en kostprijs.

De leerkracht stimuleerde tijdens de lessen dat de leerlingen onder andere de volgende ontdekkingen zouden doen:

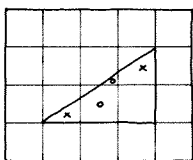
- 1 strategieën ontdekken om makkelijk te tellen door middel van omvormingen (bijvoorbeeld: door een grote figuur in rechthoeken en driehoeken op te splitsen en die te berekenen, hoeft niet elk hokje apart geteld te worden);
- 2 de rechthoekstrategie ontdekken (zie onder);
- 3 overeenkomsten zien tussen figuren; figuren onderling vergelijken;
- 4 de constante verhouding tussen oppervlakte en prijs ontdekken;
- 5 ontdekken dat transformaties van figuren tot een makkelijke bewerking kunnen leiden (bijvoorbeeld: door driehoeken tot rechthoeken te transformeren

en hier de helft van te nemen, hoeven geen onvolledige stukjes meer op elkaar gepast en geteld te worden; zie ook onder).

Het inzien en later ook het toepassen van de rechthoekstrategie kwam bij verschillende werkbladen herhaaldelijk terug. We zullen de aandacht daarom vooral op het ontdekken van de rechthoekstrategie richten. Inzicht in de rechthoekstrategie vergemakkelijkte ook het maken van opgaven waarin het ging om het berekenen van de prijs van oppervlakten.

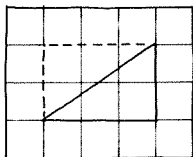
Voor het bepalen van de oppervlakte van roosterfiguren zijn kortweg twee mogelijkheden.

Ten eerste:



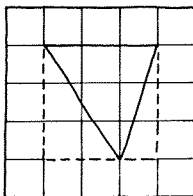
Dit is de strategie van het aanvullen tot hele hokjes: twee sterretjes vormen samen één hokje, evenals twee rondjes – zo lijkt het op 't oog.

Ten tweede:



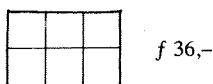
Dit is de strategie van het aanvullen tot een rechthoek (de *rechthoekstrategie*). De driehoek is hier aan te vullen tot een twee-bij-drie-rechthoek. Van deze rechthoek weten we de oppervlakte: '6'. De driehoek heeft de halve oppervlakte van de rechthoek. De strategie is ook in gecompliceerde gevallen goed bruikbaar.

Tevens is de gebruikswaarde groot:

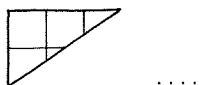


Het inzien en kunnen toepassen van de rechthoekstrategie vergemakkelijkte ook het *meetkundig oplossen* bij het bepalen van de prijs van driehoekige figuren.

Voorbeeld. De huurprijs van dit tuintje is



► Hoeveel kost zo'n tuintje?



Als leerlingen zien dat het onderste tuintje de helft is van het bovenste tuintje is de prijs gemakkelijk bepaald: die is de helft van de prijs van het bovenste tuintje. Bij het toepassen van de aanvulstrategie worden dergelijke ontdekkingen waarschijnlijk niet zo snel gedaan. Dan zal eerder de prijs van het tweede tuintje berekend worden aan de hand van de prijs van één hokje ($3 \times f\ 6,-$).

3 BESCHRIJVING VAN DE EERSTE TWEE LESSEN

In deze paragraaf zal het didactisch handelen van de leerkracht uitvoerig worden geïllustreerd aan de hand van de eerste twee lessen van het practicum 'Volkstuin-tjes'. De lessen zijn ingedeeld naar de volgende categorieën:

- a introductie/instructie/opdracht
- b zelfstandig werken/samenwerken
- c nabespreking.

Van beide lessen wordt de eerste cyclus beschreven en geëvalueerd. Het verloop van de rest van de les wordt wat korter aangeduid. Om zoveel mogelijk informatie te geven over het practicum zijn in deel B de volledige protocollen van de laatste drie lessen opgenomen.

LES 1

a introductie/instructie/opdracht

Het project werd bij de kinderen ingeleid met behulp van een introductie. Werkblad 1, behorend bij deze eerste les, staat op de pagina hiernaast. Het onderwerp van het practicum is volkstuin-tjes, maar de leerkracht wilde zo dicht mogelijk aansluiten bij de leefwereld van de kinderen en begon daarom over schooltuin-tjes:

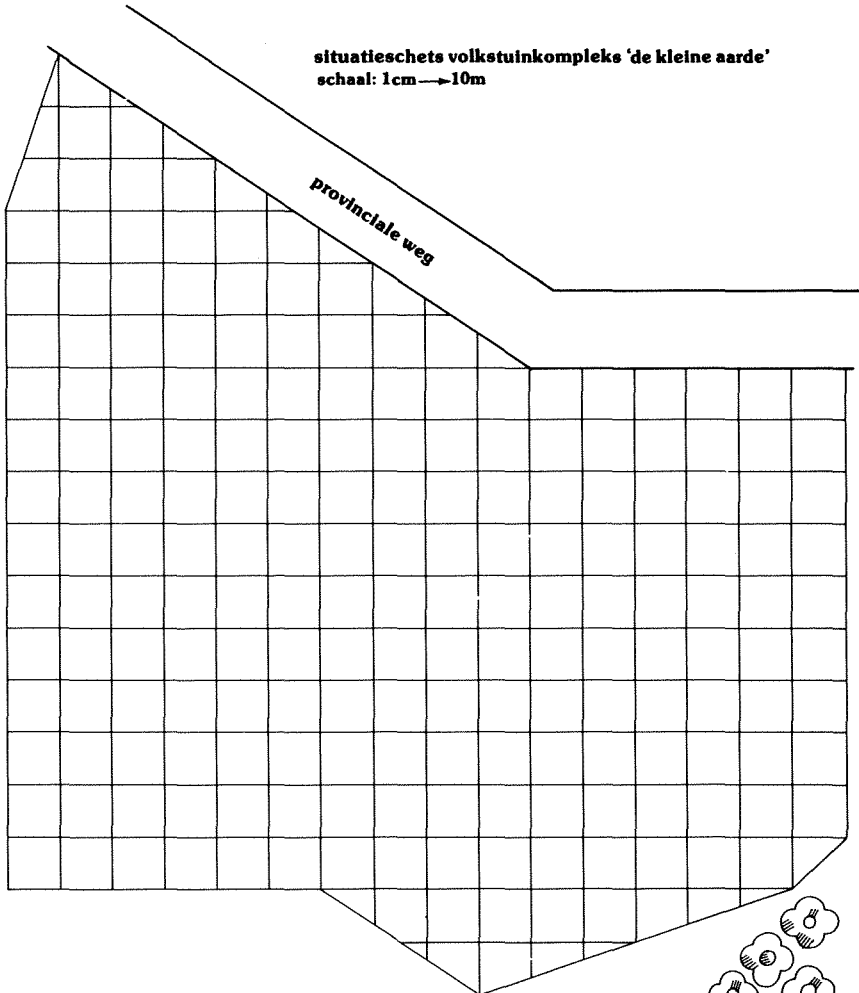
Leerkracht: Wie van jullie heeft wel eens op een schooltuintje gezeten?

Ester: Ik ga er vandaag voor het eerst heen.

Silvester: Mijn broer heeft er een. Die had het erover, die heeft er een.

Leerkracht: En wat is dan dan? Schooltuintje?

De volkstuinvereniging *de kleine aarde* heeft een stuk grond gekocht. Op dat stuk grond willen ze een kompleks volkstuintjes aanleggen. Hier zie je de plattegrond:



De sekretaris van de vereniging wil weten hoe groot het hele kompleks is.
► Kun jij dat voor hem uitrekenen?

Jeanet: Een meisje bij mij op... (?) en die heeft allemaal sla gebouwd en worteltjes.

Leerkracht: Het is dus een tuintje waarin je van alles kunt verbouwen en nou hebben wij het, dat als je in de vijfde klas zit, dan kun je lid worden

van de schooltuintjes. Maar grote mensen hebben ook tuintjes. En nou bedoel ik niet de voortuintjes en de achtertuintjes bij het huis, maar er zijn ook grote mensen die willen op een stuk grond, willen ze sla verbouwen en aardappels, net zoals wij dat met schooltuintjes doen.

Marijke: Meneer.

Leerkracht: Marijke.

Marijke: Mijn oom en vader hebben samen een tuin.

Dit was het eerste stukje van de eerste les. De leerkracht kwam in enkele zinnen van schooltuintjes op gewone tuintjes en vervolgens op volkstuintjes. De actieve houding van de leerlingen viel direct op. Er zijn telkens veel leerlingen die hun vinger opsteken bij de vragen van de leerkracht. Maar dat niet alleen: ook veel leerlingen steken spontaan hun vinger op, om iets te vertellen (zie Marijke in het citaat). De introductie is een geleid klasgesprek. De leerlingen zitten gewoon op hun plaats (niet in een kring) en vertellen en beantwoorden vragen nadat ze hun vinger hebben opgestoken en de beurt hebben gekregen. Na de introductie (waarin ook aan de orde kwam wat een volkstuinvereniging is, een plattegrond, een 'provinciale weg', een secretaris, voorzitter, penningmeester, enz.) kregen de leerlingen de eerste opdracht. De leerlingen moesten de secretaris helpen tellen hoeveel hokjes het hele volkstuincomplex heeft. Ze mochten daarbij ook op het blad tekenen en een liniaal gebruiken als dat nodig was.

b zelfstandig werken/samenwerken

Er waren grote verschillen in aanpak te zien tussen de kinderen. De meesten brachten geen structuur aan in de figuur, maar telden meer of minder onsystematisch de hele hokjes. Laag niveau van tellen is het inschrijven van getallen in de hokjes, hoger niveau, mentaal niveau, is het afstrepen van de getelde hokjes. De overeenkomst tussen deze telstrategieën is het feit, dat de hokjes één voor één geteld worden. Een enkele leerling telde per rij. De leerling schreef dan het totaal van een rij naast de gestelde balk. Slechts enkele leerlingen brachten zelf structuur aan door eerst de grote rechthoek eruit te lichten en dan de 9 rijen en de 16 kolommen met elkaar te vermenigvuldigen. De onvolledige hokjes aan de randen werden door sommige kinderen als hele hokjes meegeteld; de meeste kinderen probeerden echter telkens onvolledige hokjes samen te nemen en dan als hele te tellen. Er waren geen leerlingen die probeerden buiten de figuur te treden om het aanvulprobleem bij niet bij elkaar passende onvolledige hokjes te omzeilen. Of met andere woorden: de rechthoekstrategie (zie paragraaf 2) werd niet spontaan geprobeerd. Van overleggen tussen de leerlingen was bij deze opdracht geen sprake. Wel keken de kinderen bij elkaar op het werkblad. Kinderen die bij elkaar in het groepje zaten waren soms geneigd de methode van een ander over te nemen.

c de nabespreking: methode vóór uitkomst; sturen bij ontdekkend leren

c.1 methode vóór uitkomst

De leerlingen waren ongeveer tien minuten zelfstandig bezig geweest toen de leerkracht vroeg de potloden even neer te leggen. De leerkracht wilde van een paar leerlingen weten, niet *hoeveel* hokjes gevonden waren, maar *hoe* ze hadden geteld.

Jessica: Ik heb gewoon hokje voor hokje geteld.

Leerkracht: Hokje voor hokje. Dat kan. Jeroen.

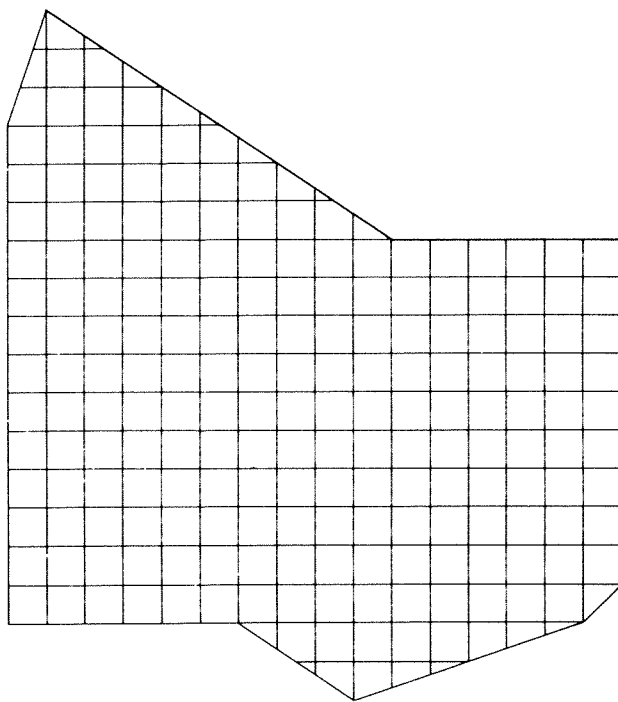
Jeroen: Ik heb eerst hokken gemaakt, en toen langs de kant geteld en toen keer gedaan.

Leerkracht: Waarom heb je eerst hokken gemaakt?

Jeroen: Dat is veel makkelijker, want dan hoeft je niet zoveel te schrijven.

Dit is een kenmerk van de nabesprekingen tijdens de lessen. Nadat de leerlingen zelfstandig, in de groepjes of alleen, aan de opdracht hadden gewerkt werden de oplossingsmethoden geïnventariseerd. Niet alleen de uitkomst, maar vooral de manier waarop de leerling tot de uitkomst gekomen is, werd belangrijk gevonden. Ook het reflecteren over de oplossingsstrategie komt hier naar voren: Jeroen moet beargumenteren waarom hij het probleem op zijn manier heeft opgelost.

De leerkracht tekende vervolgens op het bord (op de plaats waar de figuur met de overheadprojector was geprojecteerd) het hok dat Jeroen tekende. Dit werd gedaan om de andere leerlingen bewust te maken van de telstrategie van Jeroen.



c.2 sturen bij ontdekkend leren: de rechthoekstrategie ontdekken

Al in de eerste les komt ook het probleem van de rechthoekstrategie aan de orde. Het gaat erom dat de leerlingen inzien dat het aanvullen van incomplete stukjes tot een heel hokje niet altijd gemakkelijk is, omdat niet goed zichtbaar is of de stukjes wel bij elkaar passen en samen één hokje zijn. Met behulp van de rechthoekstrategie omzeil je dat probleem: dat is een makkelijkere manier van oplossen. De leerlingen moeten dan wel het inzicht krijgen dat een driehoek (met de hoeken door de kruispunten) de helft is van de rechthoek waar hij in staat. Het ontdekken van de rechthoekstrategie, het *zien* dat de driehoek de helft is van de rechthoek, gebeurt meestal niet spontaan. De leerkracht is daarom genoodzaakt leerlingen in die richting te sturen, maar dan op zo'n manier, dat het zelf ontdekken door de leerlingen toch mogelijk blijft.

Er werd begonnen met het driehoekje boven in de punt van de figuur van werkblad 1



Jeroen zei de stukjes samengevoegd te hebben tot een heel hokje.

Leerkracht: Toen heeft Jeroen gezegd, als ik dit puntje neem, dan past het hier in. Wie heeft dat nog meer gedaan: van stukjes hele hokjes gemaakt? Marijke (– stak haar vinger op –) was dat makkelijk?

Marijke: Ja.

Leerkracht: Pasten ze allemaal?

Marijke: Nee.

Leerkracht: Wat doe je daar nou mee?

Marijke: Nou, dan kijk ik gewoon of hij in een ander hokje past.

Leerkracht: Mmm, dus zo ben jij verder gegaan.

Marijke: Ja.

De leerkracht probeerde hier aan te geven dat de oplossingsmethode van de aanvulstrategie (onvolledige hokjes aan elkaar passen) niet altijd eenvoudig is, omdat niet goed zichtbaar is of ze precies bij elkaar passen. Toen liet Daniël zien hoe hij het gedaan had. Ook hij had de stukjes aan elkaar gepast. De leerkracht wil echter naar de rechthoekstrategie, de leerlingen inzicht laten verwerven in een nieuwe oplossingsmethode.

De leerkracht deed dit door:

- a een goede leerling te nemen (Jeroen);
- b te beginnen met een algemene aanwijzing gevolgd door specifiekere aanwijzingen;
- c het gevonden inzicht uit te leggen aan de klas: het neerzetten van een evaluatiepunt;
- d het laten toepassen op andere problemen.

Het ging als volgt:

Leerkracht: Maar wat zou je nog meer kunnen zien? (Algemeen)

En dan meer specifiek:

Leerkracht: Hoeveel hokjes zijn het er? Hoeveel hokjes? Jeroen.

Jeroen: Eén en een half.

Leerkracht: Nee, in totaal.

Jeroen: Drie.

Leerkracht: Maar hoeveel hokjes moeten we maar tellen?



Jeroen: Drie, eh... één, anderhalf.

Leerkracht: Want hoort dit bij de volkstuintjes?

Leerlingen: Nee.

Leerkracht: Dat viel er buiten hè? Hoeveel is dat?

Leerling: Driekwart.

Leerkracht: Patrick, zie je hem. We hebben niet 3 hokjes, maar we hebben wat minder. En *toch kun je dat heel goed zien*. Jeroen.

Jeroen: Het is één en één... het is anderhalf.

Leerkracht: Hoe kom je daarbij?

Jeroen: Eigenlijk is het de helft.

Leerkracht: Eigenlijk is het de helft. Van hoeveel hokjes?

Jeroen: Van drie hokjes.

Leerkracht: Zie je nog meer van die driehoekjes waar je dat zou kunnen doen? Dus Jeroen heeft gezegd: weet je wat, ik ga gewoon, van die driehoek, ga ik weer een rechthoek maken of een vierkant. Nou, zie nog meer van die driehoeken waar je dat kunt doen? Wie ziet die op zijn vel? Alleen Jeroen? Ester zie jij er ook een paar? Volgens mij wel. *Jeroen zegt het: Ik neem gewoon een stuk rechthoek en daar neem ik gewoon de helft van.* Marijke.

Marijke: Nou, daar.

Leerkracht: Kom maar hier aanwijzen.

Marijke wijst aan (de driehoek onder in de figuur).

In deze eerste les werd op deze manier een aanzet gegeven de leerlingen de rechthoekstrategie te laten ontdekken. Het dilemma tussen 'zelf ontdekken' en 'sturen' werd duidelijk zichtbaar. Leerlingen pasten de hun bekende strategie, de aanvulstrategie, toe en de leerkracht probeerde eerst het nadeel van die methode naar voren te laten komen. Vervolgens stuurde de leerkracht door middel van vragen af op de rechthoekstrategie. Het is verleidelijk om een slimme leerling de vragen te stellen die inzicht vereisen.

De rest van de les verliep als volgt.

Met behulp van de door de leerkracht op het bord (in de geprojecteerde figuur van het volkstuincomplex) getekende hulplijnen¹⁾ kregen de leerlingen opnieuw de opdracht het aantal hokjes van het volkstuincomplex te tellen. Daarna werden de uitkomsten geïnventariseerd. De uitkomsten van de leerlingen lagen in de buurt van de 200. Tenslotte ging de klas gezamenlijk kijken welke uitkomst de juiste was. De figuur werd nu opgedeeld in rechthoeken en driehoeken.

Op deze manier herhaalden de leerlingen nog een keer:

- handig tellen van een grote hoeveelheid door structureren (hokken maken);
- het nemen van de helft van rechthoeken om driehoeken te berekenen.

d evaluatie van de eerste les

Introductie: De leerkracht sloot aan op de leefwereld van de kinderen door over schooltuintjes te beginnen. Leerlingen waren hierdoor direct bij het onderwerp betrokken. Leerlingen kregen ook de mogelijkheid hun eigen associaties en ervaringen in te brengen. Het onderwerp krijgt hierdoor persoonlijke betekenis. Dat een onderwerp persoonlijke betekenis krijgt voor leerlingen is erg belangrijk: het verhoogt de motivatie.

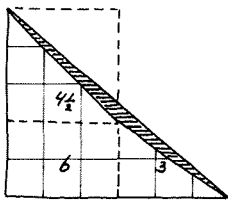
Zelfstandig werken/samenwerken: De telstrategieën van de leerlingen verschilden nogal van elkaar, de mate van structurering liep sterk uiteen. Leerlingen die bij elkaar in een groepje zaten pasten vaak dezelfde strategie toe. Het spontaan proberen van de rechthoekstrategie werd niet waargenomen.

Nabespreking:

- Tijdens de nabespreking werden eerst de *oplossingsmethoden* van de leerlingen geïnventariseerd.

¹⁾ Bij de klassikale berekening van het totaal aantal hokjes met behulp van de getekende hulplijnen bleek, dat een belangrijk criterium bij het uitnemen van driehoeken is, dat de hoeken in de kruispunten liggen.

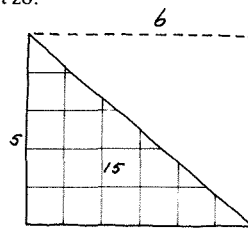
Dus: zó



Uitkomst:

$$\begin{aligned} 6 + 9/2 + 6/2 &= \\ 6 + 4\frac{1}{2} + 3 &= 13\frac{1}{2} \end{aligned}$$

en niet zo:



Uitkomst:

$$30/2 = 15$$

Het verschil is anderhalf. Bij de foutieve methode is de gearceerde strook niet meegerekend, en dat scheelt anderhalf. Leerlingen moeten er voor gewaarschuwd worden dat ze geen hap-pen uit een driehoek halen; ze moeten leren de structuur van de driehoek te zien.

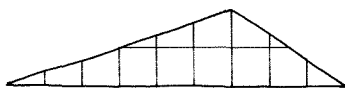
- Bij het inventariseren van oplossingsmethoden werd primair de *hoe-vraag* gesteld. Door het stellen van de hoe-vraag ('hoe heb je het gedaan?') kunnen leerlingen zich bewust worden van verschillende oplossingsmethoden en krijgen gelegenheid over verschillende strategieën na te denken.
- Leerlingen moesten de door hun gevolgde werkwijze beargumenteren. Hier toe stelde de leerkracht de *waarom-vraag* ('waarom heb je het zo gedaan?').
- Na de hoe-vraag en de waarom-vraag volgde de *hoeveel-vraag* ('hoeveel heb je eruit?').
- De leerkracht evalueerde goede oplossingsstrategieën, zoals door een leerling genoemd, met behulp van de overheadprojector.
- Tijdens de nabespreking stuurt de leerkracht in de richting van een nieuwe strategie.
- Dit sturen doet de leerkracht door: 1. een goede leerling te nemen (op keuze van leerlingen bij het stellen van vragen kom ik terug in paragraaf 5); 2. te beginnen met algemene aanwijzingen gevolgd door specifieke aanwijzingen; 3. de gevonden methode te herhalen voor de hele klas; 4. toepassingen mogelijk te maken op andere problemen.

LES 2

In deze tweede les komt het probleem van het berekenen van de oppervlakte (de leerkracht gebruikte de term 'grootte') van driehoeken uitvoerig terug. Alle kinderen kregen nu opnieuw de kans de rechthoekstrategie in te zien. Tevens stuurde de leerkracht de leerlingen naar het zien van gehele driehoeken (dus zonder opsplitsing van de figuur, zonder er hapen uit te nemen; zie ook de voetnoot op blz. 44).

a introductie/instructie/opdracht

Als de les begint staat het volgende geprojecteerd:



Het is de onderste driehoek uit de grote figuur van werkblad 1.

Leerkracht: Gisteren hebben we het gehad over de Volkstuintjes en toen waren we bezig met het berekenen van de grootte van die volkstuintjes. Hoeveel hokjes het waren. Jullie krijgen van mij per twee kinderen een driehoekje dat er zo uit ziet (– wijst op de geprojecteerde driehoek –) en een vel met hokjes er op. Die krijgt iedereen. En dan gaan jullie kijken hoeveel hokjes nu zo'n driehoek is.

De driehoekjes werden uitgedeeld. Het waren uitgeknipte kleine driehoekjes. Ook kregen de leerlingen een vel ruitjespapier. Terwijl ze bezig waren, zei de leerkracht nog: 'Je mag je potlood gebruiken.' Het valt op dat de leerkracht

teruggrijpt op de vorige les. Hierdoor wordt de overgang van de ene op de andere les heel vloeiend; tevens kregen de leerlingen het doel van de les, het berekenen van de grootte van volkstuinjes, aangereikt.

b zelfstandig werken/samenwerken

In het groepje van Ester, Ellis, Tessa, Marco en Vivienne ging het als volgt. Ester en Ellis schoven wat met het driehoekje over het ruitjesvel. Ester wijst met haar vinger om het driehoekje heen. Tessa roept al gauw: 'Ik heb het; negen komt eruit.' Ze had er twee driehoeken van gemaakt en die aangevuld tot rechthoeken en toen de helft genomen. Zij had het dus goed begrepen de vorige keer: ze kon de strategie toepassen op een gewijzigde opgave. Ester wees met haar vinger de hokjes aan en telde alle, ook onvolledige hokjes als helen en zette cijfers erin; ze kwam op 14. Ellis bleef schuiven, ze kwam niet op een uitkomst. Op een gegeven moment kwam de leerkracht erbij in het groepje.

Leerkracht: Marco hoeveel hokjes is die nou?

Marco: Negen.

Leerkracht: O, negen. Hoe kom je daar bij Marco?

Marco: Ik heb eerst de helen geteld en dan die andere, gekeken hoe het paste.

Leerkracht: Gisteren hebben we het toch gedaan met het afmaken van de driehoekjes.

Marco: O, ja.

Leerkracht: Nou, probeer het eens op die manier.

In het groepje van Silvester, Frank, Jessica en Marijke werd het volgende waargenomen. Silvester schoof met de driehoek over het papier en riep gelijk: 'ik heb hem'. Hij dacht dat hij het driehoekje op het vel moest passen, zonder de grootte te berekenen. Marijke kwam eerst uit op elf. Silvester zei nu: 'ik tel alle driehoekjes er bij' (hij bedoelde alle onvolledige hokjes). Marijke ging Silvester helpen: ze telde alle hokjes (ook de stukjes) en kwam nu uit op veertien.

In het groepje van Ester waren de leerlingen vrij individueel bezig. Tessa heeft al snel een uitkomst en paste de rechthoekstrategie toe. Marco kwam wel op een juiste uitkomst, maar paste de aanvulstrategie toe. Door het gesprekje met de leerkracht herinnerde hij zich weer, dat het ook op een andere manier kon. Ester telde alle, ook de onvolledige hokjes mee als helen. Zij paste dus nòch de aanvulstrategie, nòch de rechthoekstrategie toe. Ellis kwam niet tot een doelgerichte activiteit. Ze probeerde niet het probleem op te lossen. Misschien had ze de bedoeling van de opdracht niet begrepen. Wat opviel bij Ellis is, dat ze geen contact zocht met de andere leerlingen om erachter te komen wat de opdracht was. Ze bleef ongericht schuiven met het driehoekje. In paragraaf 4. zullen de leerprocessen van Ellis apart beschreven worden, aan de hand van de werkbladen.

In het groepje van Silvester werd wèl samengewerkt. Silvester had de opdracht verkeerd begrepen en Marijke schoot hem te hulp. Ze maakten echter wel beiden dezelfde fout: ze telden de onvolledige hokjes als hele hokjes mee.

De interventie van de leerkracht bracht Marco direkt op het spoor van de recht-

hoekstrategie. Deze interventie was op één leerling gericht. Om het overleg tussen leerlingen over de beste oplossingsstrategie te stimuleren (een belangrijke algemene doelstelling van Wiskobas, zie hoofdstuk 1) zou er ook een interventie op het sociale proces gericht kunnen worden.

Bijvoorbeeld:

‘Marco heeft de hokjes aan elkaar gepast, wie heeft dat anders gedaan en waarom?’

Of:

‘Vertellen jullie nu eens aan elkaar hoe je het hebt gedaan en probeer er samen achter te komen wat de beste manier is.’

De kinderen worden dan meer gestimuleerd tot reflecteren tijdens het groeps-
werk.

Tot nu toe is me opgevallen tijdens het groeps-
werk dat:

- sommige kinderen vaak, ondanks de mogelijkheid tot samenwerken, individueel werken en niet napraten over de toegepaste methode. Een nadeel hiervan is, dat een inactieve leerling (zoals Ellis bij de eerste opdracht van de tweede les) niet door de andere leerlingen tot activiteit werd gestimuleerd;
- kinderen helpen elkaar: niet alleen de ‘goede’ leerlingen helpen de ‘minder goede’ leerlingen, maar ook omgekeerd (dat zagen we in het groepje van Silvester. Silvester is één van de goede leerlingen¹⁾) en kreeg hulp van Marijke, die tot de zwakke leerlingen bij Wiskobas werd gerekend);
- kinderen zijn geneigd, als ze het niet weten, bij anderen te kijken en dan te snel de methode over te nemen, zonder eerst af te wegen of dat ook – naar zijn of haar idee – de beste methode is. Hierdoor kwam het soms voor dat in een groepje dezelfde, soms ook foute, oplossingsmethode werd toegepast.

c de nabespreking: methode vóór uitkomst; sturen bij ontdekkend leren

c.1 methode vóór uitkomst

Leerkracht: We gaan eens even samen kijken. Eens even horen hoe we allemaal bezig zijn geweest om erachter te komen hoeveel hokjes deze driehoek nu is. Dan hoeft ik eerst niet te weten hoeveel het er zijn; ik wil eerst eens weten *hoe* je geteld hebt. Marijke.

Marijke: Nou, gewoon hè, gewoon geteld.

Leerkracht: Gewoon geteld. Wat heb je nou gewoon geteld.

Want gewoon, we weten niet wat jij onder gewoon verstaat.

Marijke: Gewoon de hokjes.

Leerkracht: De hokjes in het driehoekje?

Marijke: Nee, die buiten d’er ook.

Leerkracht: Laat eens zien hoe je dat gedaan hebt. Hier heb je een krijtje.

Marijke gaat naar het bord, maar loopt snel weer terug. Ze kwam er niet uit.

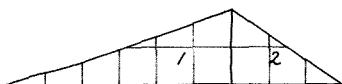
Leerkracht: Wie weet het wel? Tessa.

¹⁾ Naar het oordeel van de leerkracht, zoals uitgedrukt werd in de rapporten.

Tessa naar het bord. Ze trekt lijnen om de driehoeken tot rechthoeken en zegt:

Hier heb je 2×6 is 12 en dan gedeeld door twee is zes; en 2×3 dat is zes en dat gedeeld door twee en dat is drie. En drie en zes is negen.

Leerkracht: Dus in deze driehoek zag Tessa twee driehoeken, namelijk nummer 1 deze, en deze, nummer 2.



Toen zei ze, driehoek 1 kan ik afmaken tot een rechthoek. Driehoek 1 was namelijk aan de onderkant 1, 2, 3, 4, 5, 6 hokjes en 2 hoog; 2×6 hokjes, dat is 12. Driehoek 1 zal 6 zijn, want we hadden gezien dat je daar de helft van kon nemen.

Driehoek 2 is 3 hokjes lang en 2 hokjes hoog. Die heeft ze ook afge maakt. De helft van de 2e driehoek is 3. Dus samen is de hele driehoek 9.

Zoals we al zagen bij het werken in de groepjes, had Tessa de rechthoekstrategie goed begrepen tijdens de eerste les. Ze kon de strategie op een gewijzigde opgave toepassen en bovendien verbaliseren. Dat veel andere leerlingen de strategie nog niet doorhadden kwam mogelijk doordat het voorbeeld uit les 1 waarmee de rechthoekstrategie ontdekt moest worden te moeilijk was: de stap was voor sommige leerlingen misschien te groot, doordat niet alleen een nieuwe oplossingsmethode verlangd werd, maar omdat ook de getallen moeilijk waren. De strategie moest namelijk ontdekt worden aan de hand van de getallen: de helft van drie is anderhalf (de helft van vier nemen of van zes is makkelijker en daarom zijn dit betere getalswaarden bij het ontdekken van nieuwe oplossingsmethoden; de moeilijkheidsgraad wordt verhoogd als een gecompliceerde oplossingsmethode wordt verlangd, en als de getalswaarden moeilijker worden. In dit geval ging het om een nieuwe oplossingsmethode; om de stapgrootte niet extra groot te maken kunnen de getalswaarden beter makkelijk worden gehouden). Ook hier valt op, net zoals in de eerste les, dat de leerkracht vrij snel een leerling de beurt geeft die met grote waarschijnlijkheid de gewenste oplossingsstrategie toepast. Meestal begon de leerkracht bij het inventariseren van oplossingsmethoden bij een leerling die een oplossingsmethode op laag niveau hanteerde en ging vervolgens over op een leerling die op een kwalitatief hoger oplossingsniveau zat.

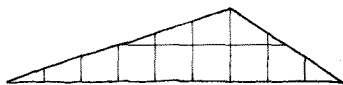
Het dilemma tussen zelf ontdekken en sturen komt hiermee weer naar voren: de leerkracht stuurt door zich niet tevreden te stellen met een oplossingsmethode die niet de nagestreefde oplossing is. De leerkracht stuurt vervolgens in de richting van de nagestreefde oplossingsmethode door een goede leerling (i.c. Tessa), die snel tot inzichten komt, vragen te stellen. Het is zeker een vorm van sturen waarbij het ontdekken mogelijk blijft, maar het gevaar is aanwezig dat alleen de betere leerlingen nu de ontdekkingen doen. De andere leerlingen krijgen dan de gewenste oplossingsmethode aangeboden (via het antwoord van de goede leer-

ling). Dit is haast onvermijdelijk in een klassikale situatie. Het geeft de spanning weer tussen het tempo van leerlingen die langzaam tot ontdekkingen komen en het tempo waarin met de hele klas verder gegaan moet worden. Er bestaat echter wel de mogelijkheid om voor langzamere leerlingen tijdens het zelfstandig werken de stapgrootte te verkleinen, zodat ook de zwakkere leerlingen kunnen ontdekken. Hierdoor kan misschien worden opgevangen dat de afstand in niveaus tussen leerlingen te groot wordt.

c.2 sturen bij ontdekkend leren: het zien van hele driehoeken

Na de opsplitsing van de driehoek in twee delen aan de hand van de oplossingsstrategie van Tessa, stuurde de leerkracht aan op het zien van hele driehoeken. Dit ging als volgt:

Leerkracht: En nu vraag ik jullie, wie van jullie kon dit misschien wel in één keer?



Leerlingen: In één keer?

Leerkracht: In één keer.

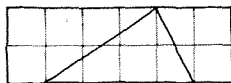
Stilte. Monique en Tessa staken hun vinger op. Monique mocht naar voren komen. Ze telde de onderste rij, dat is negen, vermenigvuldigde met twee en deelde door twee.

Leerkracht: $2 \times 9 = 18$. Monique zegt, nu hebben we 2×9 hokjes lang en dan nemen we daar de helft van en dan is dat ook weer negen. Zouden jullie, nu we weten dat er negen uitkomt, zouden jullie dat zomaar zonder meer durven? Zoals Monique doet?

Leerlingen: Ja ja ja.

Leerkracht: Als we nu eens kijken.

(Nieuwe figuur op de overheadprojector)



Leerkracht: Als ik nu deze heb hè, hoeveel denken we dan dat hier uitkomt?

Leerling: 6.

Leerkracht: $2 \times 4 = 8$. Zou dat ding nou vier zijn?

Leerling: Nee.

Leerkracht: Dat is acht hokjes. Zou dat de helft zijn, vier?

Leerling: Ja.

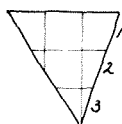
Leerkracht: Nou gaan we, om het te bewijzen, hem weer opsplitsen in twee driehoeken. Kijken of ie dan klopt. Hoeveel is deze lang?

De figuur werd nu in twee driehoeken opgesplitst en weer uitgerekend. De leerkracht wees de leerlingen er tenslotte nogmaals op dat 'als je driehoeken ziet, je dan zo groot mogelijke stukken moet nemen'.

De leerkracht stuurde aan op het zien van hele driehoeken – niet door het aan te wijzen, of uit te leggen, maar door een vraag te stellen die de leerlingen tot nadenken en zelf ontdekken stimuleerde. Nadat een leerling antwoord op de vraag had gegeven werd de ontdekking op juistheid bewezen door te laten zien, dat het berekenen van de driehoek in z'n geheel tot dezelfde uitkomst leidt als het berekenen van de driehoek in twee delen.

De rest van de les liep als volgt.

Eerst kreeg de klas het tweede werkblad. De leerkracht nam samen met de leerlingen de opdrachten door. In het groepje van Ester waren weer verschillende oplossingsmethoden zichtbaar. Tessa maakte in gedachten driehoeken en nam daar de helft van (mentaal). Ester en Ellis pasten de aanvulstrategie toe: ze maakten geen rechthoeken. Voor leerlingen die de rechthoekstrategie toepasten rezen problemen bij type 5 en 6. Bij Tessa en Marco kon een soortgelijke fout worden waargenomen als in het groepje van Silvester: ze maakten wel rechthoeken van de driehoeken, maar deelden niet het totaal aantal hokjes door twee (de helft nemen), maar door drie. Tessa: 'Je maakt er eerst een hele van, dat is negen en dan gedeeld door drie.' 'Waarom gedeeld door drie?' 'Omdat het er drie boven elkaar zijn.'



De meeste voorbeelden die ze gehad hadden waren driehoeken met twee rijen. De kinderen denken nu dat je door het aantal rijen moet delen. Het inzicht, dat het gaat om de helft, dus altijd delen door een constante, namelijk twee, is nog niet verworven. In het groepje van Silvester trad een soortgelijk probleem op. De kinderen maakten er een vierhoek van, maar deelden het geheel door het aantal vlakken dat ontstond.

De tweede opdracht van het werkblad leverde nog problemen op. De kinderen wisten niet goed raad met de vraag: 'Welke is groter 2, 5, of 6?' De leerkracht zei hierop: 'Je kunt ook zeggen, welke van de drie is het grootste, is twee het grootste, is vijf het grootste of is zes het grootste?'

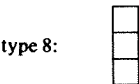
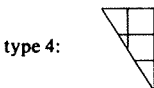
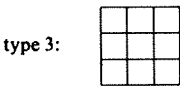
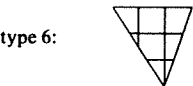
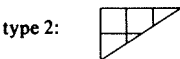
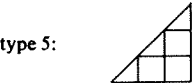
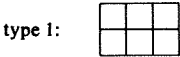
Bij de nabespreking vroeg de leerkracht na type 4 of de leerlingen iets was opgevallen. Veel kinderen zagen het: 'Type 2 en 4 zijn omgedraaid'. Zo'n vraag is belangrijk, want het stuurt leerlingen naar het zien van overeenkomsten. Het laatste onderdeel van de les was werkblad 3 (blz. 52).

d evaluatie van de tweede les

Tijdens deze tweede les kreeg de klas drie cyclussen van: opdracht – zelfstandig werken – nabespreken. De eerste cyclus werd uitgebreid besproken en zal nu geëvalueerd worden.

Sommige leden van de volkstuinvereniging willen een groot stuk, andere willen een klein stuk. Iedereen wil wat anders, lijkt het wel.
Het bestuur vergadert erover. En wat besluiten ze?
Lees maar!

Er komen acht verschillende typen volkstuintjes. Dit zijn de typen:

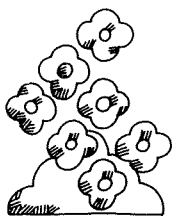


► Welk type is het grootste?

.....

► Welk type is groter: 2, 5 of 6?

.....



Introductie/instructie/opdracht: Bij het geven van de eerste opdracht sloot de leerkracht expliciet aan op de problematiek van de vorige les. De leerkracht had deze opdracht extra ingelast om leerlingen te stimuleren héle driehoeken te zien.

De sekretaris van de vereniging dacht dat veel mensen wel een tuintje van type I zouden kiezen.

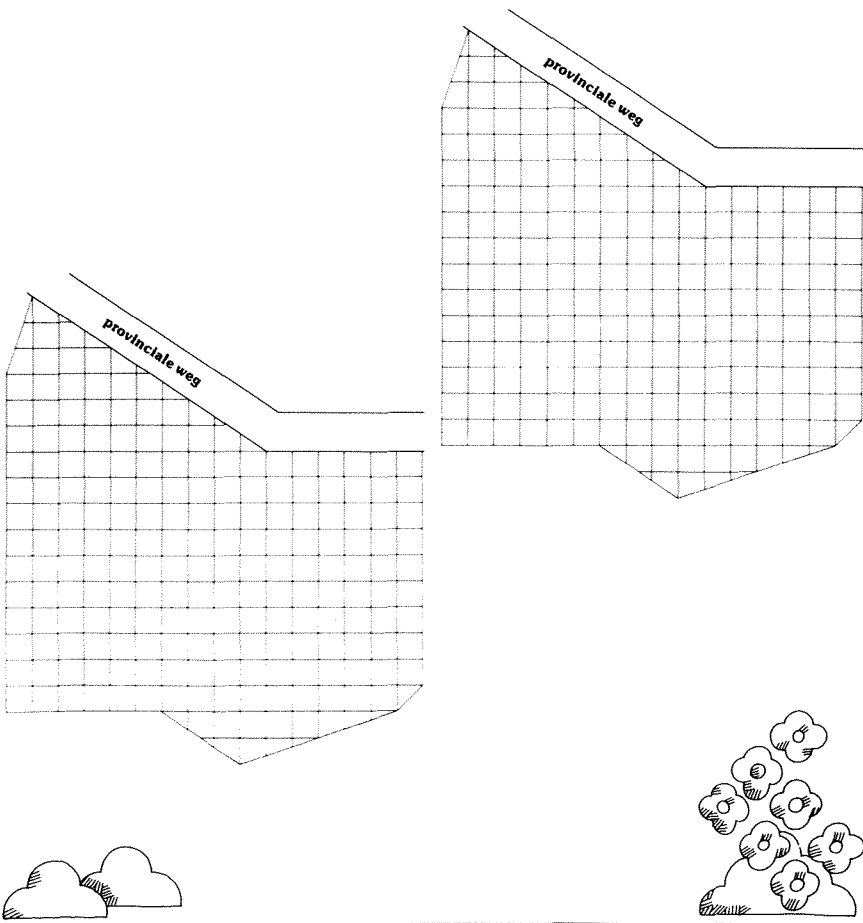
Dus dit tuintje:



► Hoeveel mensen kunnen dan een tuintje krijgen?

.....

► Gebruik deze plattegrondjes om het antwoord te vinden.



Zelfstandig werken/samenwerken: Er waren weer uiteenlopende oplossingsmethoden waarneembaar:

- 1 de figuur opsplitsen in twee driehoeken en m.b.v. de rechthoekstrategie de grootte berekenen;

- 2 de aanvulstrategie (binnen de figuur onvolledige hokjes aan elkaar passen);
- 3 hokje voor hokje tellen en hierbij ook de onvolledige hokjes als hele hokjes meetellen;
- 4 blijven schuiven met het driehoekje, zonder de grootte te berekenen: géén doelgerichte activiteit, opdracht verkeerd begrepen.

Het spontaan toepassen van de rechthoekstrategie op de hele driehoek werd niet waargenomen. We zagen verder dat wanneer leerlingen op elkaar gericht zijn bij het zelfstandig (samen)werken, dat dan stagnaties (bijvoorbeeld het verkeerd begrijpen van de opdracht) opgeheven kunnen worden. Als leerlingen individueel blijven werken bestaat de kans dat leerlingen òf ongericht werken, òf in een fout blijven steken, òf een reeds lang bekende oplossingsstrategie blijven hanteren, terwijl andere groepsleden inzicht hebben verworven in een nieuwe oplossingsstrategie.

Met andere woorden: inzichtverwervend handelen voor alle leerlingen kan gestimuleerd worden door leerlingen te laten samenwerken.

Door een interventie van de leerkracht werd een leerling naar een kwalitatief hoger oplossingsniveau gestuurd. Deze interventie was op één leerling gericht.

Om het samenwerken te stimuleren werd aanbevolen meer groepsgerichte interventies te verrichten.

Het voordeel van groepsgerichte interventies is tweeledig:

- trage leerlingen kunnen worden geactiveerd en leerlingen die op een verkeerd spoor zitten kunnen worden gecorrigeerd. De kwalitatieve niveaus zullen zo misschien minder uit elkaar gaan lopen omdat leerlingen van elkaar leren;
- leerlingen leren ook onderling verbaliseren, overleggen, argumenteren.

Nabespreking:

- Eerst werden weer de oplossingsmethoden geïnventariseerd, waarbij de hoevraag centraal stond.
- Bij het stimuleren van het ontdekken van nieuwe oplossingsmethoden is het raadzaam de getalswaarden zo makkelijk mogelijk te houden, anders wordt de stapgrootte onnodig groter.
- De leerkracht gaat, als een leerling er niet uitkomt, over op een leerling die een meer wenselijke strategie toepast.
- Bij het inventariseren kregen meestal eerst leerlingen die een oplossingsmethode op laag niveau hanteerden de beurt, en daarna leerlingen met oplossingsmethoden op hoger niveau.
- Door een algemene vraag stuurde de leerkracht naar een nog betere oplossingsmethode.
- Deze nieuwe methode werd op zijn juistheid bewezen met behulp van een reeds gekende strategie.

Terwijl sommige leerlingen dus nog onvolledige hokjes als hele hokjes berekenen was het klassikale leerproces al gericht op het zien van hele driehoeken en het berekenen daarvan met behulp van de rechthoekstrategie. De spanning tussen de voortgang van de hele klas en individuele leerlingen kwam duidelijk naar voren. Een oplossing voor dit probleem is, de stapgrootte voor individuele leerlingen te verkleinen: òf tijdens het zelfstandig werken, òf tijdens de nabespre-

king, òf beide. Zoals bleek bij Marco is een kleine hint soms al voldoende. Groepsgerichte interventies kunnen stimuleren dat leerlingen meer van en met elkaar leren. Weliswaar is het zo, dat de problematiek van het berekenen van de oppervlakte van driehoeken terug kwam bij het volgende werkblad, zodat de kinderen opnieuw gelegenheid kregen tot inzien en toepassen van nieuwe strategieën. Ondanks dat, zoals zal blijken in de volgende paragraaf bij de beschrijving van leerprocessen van Ellis, zijn er leerlingen die nauwelijks tot nieuwe inzichten kwamen.

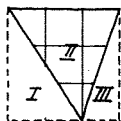
4 LEERPROCESSEN BIJ ENKELE LEERLINGEN

Om de verschillen in leerprocessen duidelijk naar voren te laten komen worden twee leerlingen beschreven: een goede leerling bij Wiskobas en een matige leerling (zoals uitgedrukt in de rapportcijfers). Deze leerlingen zijn respectievelijk Silvester en Ellis.

Silvester startte bij het eerste werkblad al met het uitnemen van een grote rechthoek uit de figuur. Hij herstructureerde de figuur om een handige, verkorte telstrategie toe te passen. Hij vermenigvuldigde het aantal rijen en kolommen met elkaar om de rechthoek te berekenen. Silvester toont hiermee aan dat hij ten eerste een verkorte telstrategie kan toepassen en ten tweede de probleemsituatie zo kon transformeren dat hij de handige strategie ook kon toepassen.

Bij het tweede werkblad paste hij wel de strategie van het aanvullen tot een rechthoek toe, maar de strategie werd niet helemaal juist toegepast. Dit werd duidelijk bij het tuintje type zes. Silvester (evenals ieder van de anderen van het groepje) nam niet de helft van de rechthoek om de driehoek uit te rekenen, maar deelde de rechthoek door het aantal vlakken dat ontstond.

Tuintje type 6. Werkblad 2.



Silvester kreeg hier aanvankelijk als uitkomst drie, dat wil zeggen $9:3$ in plaats van $9:2$.

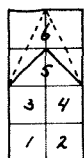
Bij werkblad 3 kreeg Silvester niet het maximum aantal tuintjes in het complex. Hij tekende de tuintjes allemaal in dezelfde richting, allemaal vertikaal. Wel telde hij hier het aantal tuintjes weer door de rijen en kolommen met elkaar te vermenigvuldigen.

Werkblad 4 was een differentiatie opdracht; die hebben we in deze beschrijvingen overgeslagen.

Bij werkblad 5 gaf Silvester er blijk van dat hij de regel 'een driehoek is de helft

van een rechthoek' kon toepassen. Hij tekende namelijk een figuur, waarin hij er blijk van gaf in te zien dat een driehoek met een hoogte van 2 cm, tweemaal zo groot is als een driehoek van 1 cm hoog. Hij tekende namelijk eerst een tuintje van vier hokjes met daarboven twee halve hokjes (dus een tuintje van slechts vijf hokjes). Hij herstelde de fout door de driehoek één hokje naar boven op te trekken.

Tuintje van Silvester:



Voor werkblad 6 is niet bekend hoe Silvester het oploste.

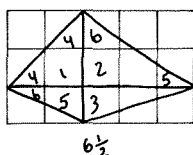
Bij werkblad 7 toonde Silvester zich erg afhankelijk van de andere leerlingen; hij paste wel de rechthoekstrategie toe, maar kon moeilijk verbaliseren hoe hij aan de uitkomst was gekomen. In de nabespreking werd echter duidelijk dat hij de figuren *meetkundig* bekeek. Hij berekende de prijs van een tuintje niet op grond van de prijs van één hokje, maar vergeleek de figuren onderling. We kunnen dat een *inzichtsprong* noemen; een opnieuw opvatten van de situatie, een verkorte methode van oplossen. Een kenmerk van inzicht is, dat de ontdekte oplossingsmethode wordt herhaald in nieuwe, gewijzigde situaties.

Bij Silvester werd dit duidelijk bij werkblad 8. Zonder moeite en geheel vanzelfsprekend werden de opgaven door onderling vergelijken van de figuren gemaakt. Had Silvester eerst nog moeite met het berekenen van de helft, nu gunde hij zichzelf de tijd om dit precies uit te rekenen.

Ook werkblad 9 ging moeiteloos.

(Zie ook de beschrijvingen van Silvester en de lesprotocollen (deel B)).

Bij de toetsopgaven zes weken na het project (zie hoofdstuk 7) paste Silvester de rechthoekstrategie niet toe. Hij begon bij figuur 2 zelfs in de figuur te tellen.



Figuur 2 van de toets (Silvester)

Ook op bladzijde 2 van de toets, bij item 10 en 14 zette hij de getallen erin. Dit wijst erop dat Silvester binnen de figuur, hokje voor hokje, telde met behulp van de aanvulstrategie. Bij de figuren waarbij duidelijk de verhouding tot het voorbeeld zichtbaar is, bekeek Silvester het weer meetkundig. Het vermenigvuldigen met een half ging goed op de toets.

Conclusies:

- 1 Silvester herstructureerde figuren om een reeds gekende oplossingsmethode toe te passen.
- 2 De rechthoekstrategie werd bij moeilijkere figuren niet toegepast; Silvester viel dan terug op de aanvulstrategie.
- 3 Silvester wist wel dat een driehoek de helft is van een rechthoek.
- 4 Silvester paste de meetkundige oplossingsstrategie toe: dit inzicht is verworven en is omgezet in kennis van de methode.
- 5 Silvester heeft geleerd te vermenigvuldigen met een half.

Ellis telde het eerste werkblad op een laag niveau. Elk hokje telde ze apart en ze schreef de getallen er in. Ellis werkte vrij langzaam, het duurde lang voordat ze begon.

Bij het tweede werkblad had ze dezelfde, ook foute, uitkomsten als de rest van het groepje.

Bij werkblad 3 vertoonde Ellis weinig activiteit. Ze bleef eerst heel lang lijntjes trekken op haar werkblad. Op gegeven moment keek ze bij anderen wat die aan het doen waren. Ze telde de getekende tuintjes weer één voor één door de getallen erin te zetten.

Ook bij werkblad 5 tekende Ellis geen driehoeken; ze maakte wel gebruik van halve hokjes. Wat niemand anders deed, deed Ellis hier wel, namelijk cirkels tekenen.

Bij werkblad 6 paste Ellis de rechthoekstrategie niet toe. Hoe ze aan de antwoorden is gekomen is niet helemaal duidelijk. Ze had wel telkens het aantal hokjes per figuur erbij geschreven. Vermenigvuldigen met een half (voorbeeld: $4\frac{1}{2} \times 5 = 20,50$) leverde problemen op. (Deze fout werd overigens door veel leerlingen gemaakt.)

Ook bij werkblad 7 paste Ellis de rechthoekstrategie niet toe. Ze bleef binnen de figuur tellen en vulde de hokjes onderling aan tot helen (aanvulstrategie). Het vermenigvuldigen met een half leverde weer fouten op ($4\frac{1}{2} \times 6 = 24,50$). Ellis zette cijfers in de moeilijkere figuren.

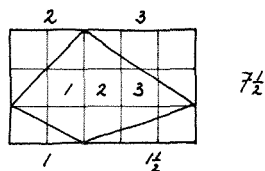
Bij werkblad 8 telde Ellis nog steeds hokje voor hokje en schreef ze de getallen in de figuren. Ze had slechts één uitkomst goed. Er ontstaat reden te twijfelen aan de opgedane nieuwe inzichten van Ellis.

Ook bij werkblad 9 telde ze hokje voor hokje; ze had nu wel goede uitkomsten op haar blad staan.

Ook bij de toetsopgaven bleef Ellis binnen de figuren tellen.

Het vermenigvuldigen met een half leverde weer problemen op ($4\frac{1}{2} \times 4 = 18\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2} \times 4 = 4\frac{1}{2}$), maar één keer ging het goed ($5\frac{1}{2} \times 4 = 22$).

Bij de laatste figuur (moeilijk!) vulde ze wel aan tot een rechthoek en kreeg ze het juiste aantal hokjes eruit. Hoe ze er precies aankwam werd niet duidelijk.



Conclusies:

- 1 Ellis was niet geneigd figuren te herstructureren om een verkorte oplossingsmethode toe te passen.
- 2 Ellis paste niet of nauwelijks (en dan lijkt het op een toevalstreffer) de recht-hoekstrategie toe.
- 3 Het is de vraag of Ellis goed wist dat de oppervlakte van een driehoek de helft is van zijn 'omgeschreven' rechthoek.
- 4 De meetkundige oplossingsstrategie werd niet toegepast; Ellis ging uit van de prijs van één hokje.
- 5 Ellis bleef fouten maken met het vermenigvuldigen met een half.

De verschillen in leerprocessen tussen deze twee leerlingen zijn evident.

In de volgende paragraaf gaan we in op de verdeling van de vragen tijdens de nabesprekingen en zoeken we naar manieren voor leerkrachten om leerlingen die geen of weinig inzichtsprongen maken te helpen op kwalitatief hogere oplossingsmethoden te komen.

5 VERDELING VAN VRAGEN TIJDENS DE NABESPREKING OVER GROEPEN LEERLINGEN

In de vorige paragraaf werd zichtbaar dat de ene leerling veel meer inzichtsprongen maakt dan de andere leerling bij hetzelfde onderwijs. Zoals in hoofdstuk II bleek is het geven van aanwijzingen en het stellen van vragen van kardinaal belang. Nu wordt eerst beschreven hoe de leerkracht met betrekking tot deze problematiek tijdens de nabesprekingen handelde. Ik richt me op de nabesprekingen omdat dan de oplossingsmethoden van de leerlingen met elkaar worden vergeleken, de verschillen naar voren komen en fouten en oplossingsmethoden worden besproken. Om grip te krijgen op het handelen van de leerkracht is een observatieschema gemaakt (zie bijlage I). Bij het samenstellen van het observatieschema is gebruik gemaakt van schema's uit het boek van Good en Brophy (1973); de hier gebruikte categorieën zijn gedestilleerd uit de lesverslagen.

Om te kunnen zien of de leerkracht anders reageerde op leerlingen die weinig inzichtsprongen maken dan op leerlingen die dat wel doen is de leerlingengroep ingedeeld op basis van de rapportcijfers voor Wiskobas naar: goed, voldoende en matig. De analyses met behulp van het observatieschema zijn gedaan op drie lessen (les 3, 4 en 5; de lesprotocollen zijn opgenomen in deel B). De conclusies die getrokken worden zijn geen absolute uitspraken, maar globale indicaties.

De volgende specifieke vraagstellingen worden bekeken:

- 1 Krijgen leerlingen die matig zijn met Wiskobas minder vragen dan leerlingen die goed of voldoende hebben?

Uitgangspunt: als leerlingen vragen krijgen, worden ze gestimuleerd tot leerprocessen. Zouden goede leerlingen méér vragen krijgen, dan betekent dit positieve discriminatie voor goede leerlingen, terwijl zwakke leerlingen juist extra stimulans nodig hebben.

- 2 Hoe reageert de leerkracht op goede antwoorden van leerlingen?
Uitgangspunt: als een leerling een goed antwoord heeft gegeven op een vraag en hier positieve reacties op krijgt van de leerkracht, dan kan dit het zelfvertrouwen van het kind vergroten.¹⁾ Zelfvertrouwen kan (zie ook hoofdstuk II.4) een belangrijke voorwaarde zijn voor het verloop van leerprocessen.
- 3 Welke reacties heeft de leerkracht als een leerling een fout maakt of een oplossingsmethode hanteert die op een lager niveau is dan wenselijk (volgens de leerkracht) is? Gaat de leerkracht in op de fout/het lage oplossingsniveau of niet? Zo nee, wat gebeurt er dan?
Uitgangspunt: het is stimulerend voor leerprocessen als leerlingen zich bewust worden van gemaakte fouten; het is stimulerend voor leerprocessen als leerlingen hints, aanwijzingen krijgen om tot hogere oplossingsniveaus te komen.

Ad vraagstelling 1. *Krijgen leerlingen die matig zijn met Wiskobas minder vragen dan leerlingen die goed of voldoende hebben?*

Deze vraagstelling kan snel beantwoord worden. In totaal werden er in de drie lessen 145 vragen gesteld. De verdeling over de leerlingengroepen was als volgt. De leerlingen van groep l (*matig*) kregen gemiddeld ± 12 vragen per leerling (36 vragen; 3 leerlingen).

De leerlingen van groep m (*voldoende*) kregen gemiddeld ± 5 vragen per leerling (52 vragen; 10 leerlingen).

De leerlingen van groep h (*goed*) kregen gemiddeld ± 11 vragen per leerling (57 vragen; 5 leerlingen).

De leerlingen die weinig inzietsprongen maken (*matig* op het rapport) kregen dus *niet minder* de aandacht van de leerkracht dan de andere leerlingen; ze krijgen kwantitatief evenveel aandacht door middel van vragen/beurten als de goede leerlingen. Leerlingen met voldoende kregen gemiddeld minder vragen dan de leerlingen met goed en matig.

Conclusie 1: Het aantal beurten van leerlingen die matig zijn met Wiskobas is niet minder dan dat van de andere leerlingen: er is geen kwantitatief verschil in aandacht.

Dit geconstateerd hebbende, is het interessant om na te gaan of misschien het soort vragen dat per leerlingen groep gesteld werd van elkaar verschilde. Hiertoe kijken we naar tabel 1.

De vragen die de leerkracht stelde zijn te verdelen in de hoeveel-vraag ('hoeveel hokjes heb je eruit?'), de hoe-vraag ('hoe heb je het gedaan?') en de waarom-vraag ('waarom heb je het zo gedaan?'). Bij de hoe-vraag wordt de leerling gevraagd zijn of haar oplossingsmethode te verbaliseren en bij de waarom-vraag

¹⁾ Uiteraard is niet alleen de wijze van reageren van leerkrachten een factor die van invloed is op het zelfvertrouwen van leerlingen. Ook interactiepatronen in het gezin, met klasgenoten, enz. hebben hun invloed.

Tabel 1 Verdeling van de soort vragen over de groepen.

	groep l (n = 3)		groep m (n = 10)		groep h (n = 5)		Totaal
	f	$\bar{x}$	f	$\bar{x}$	f	$\bar{x}$	
Hoeveel R	10	(3)	5	(0.5)	–	–	15
Hoeveel P	11	(4)	22	(2.2)	25	(5)	58
Hoe	13	(4)	23	(2.3)	30	(6)	66
Waarom	2	(0.66)	2	(0.2)	2	(0.4)	6
	36		52		57		145

Toelichting:

R = reproductievraag. Dat wil zeggen een vraag die geen oplossingsproces vereist, maar het herinneren van kennis verlangt. Bijvoorbeeld: 'Hoeveel kostte één hokje ook alweer?'

P = produktievraag. Dat wil zeggen een vraag die wel een oplossingsproces vereist. Bijvoorbeeld: 'Wat is de prijs van dit tuintje?'

f = het aantal vragen, frequentie.

$\bar{x}$ = het gemiddeld aantal vragen per leerling.

wordt reflectie van de leerling over de gevolgde methode gevraagd. De hoeveel-vraag is de vraag naar de uitkomst.

In het totaal van de drie lessen is van de 145 vragen 66 keer de vraag naar de oplossingsmethode gesteld. Met andere woorden: bijna de helft van de vragen is gericht op het oplossingsproces van de leerlingen.

Uit de tabel blijkt dat de reproductie-vragen (Hoeveel R) het meeste aan leerlingen uit groep 1 gesteld werden. Leerlingen uit groep l (matig) kregen gemiddeld drie reproductie-vragen (10/3), leerlingen uit groep m (voldoende) gemiddeld 0.5 reproductie-vragen en leerlingen uit groep h (goed) kregen geen enkele reproductie-vraag.

Bijna een derde van de vragen die in totaal aan groep 1 zijn gesteld waren reproductie-vragen (36/10).

Bij de overige soorten vragen is geen concentratie binnen één leerlingengroep te constateren. Wel wordt zichtbaar, dat leerlingen uit groep h (goed) zowel bij de produktie-vragen als bij de hoe-vragen gemiddeld de meeste vragen krijgen, dat leerlingen uit groep l (matig) hiervan iets minder vragen kregen en leerlingen uit de middengroep het minste.

De waarom-vraag werd relatief weinig gesteld. Over de verdeling van deze vraag over de groepen valt daarom niets te zeggen.

Conclusie 2: Bijna de helft van het totaal aantal vragen dat werd gesteld was gericht op het oplossingsproces van leerlingen: 'hoe heb je het gedaan?'.

Conclusie 3: De leerlingen die matig zijn met Wiskobas kregen relatief veel makkelijke (reproductie)vragen.

Ad vraagstelling 2. Hoe reageert de leerkracht op goede antwoorden van leerlingen?

In de eerste plaats valt op, zoals te verwachten is, dat leerlingen uit groep 1

(matig) veel vaker een oplossingsmethode op een lager niveau¹⁾ aangeven en fouten maken dan de andere twee groepen:

Tabel 2 Aantal goede (+) resp. minder goede/foute (± en -) antwoorden, per groep.

	groep l (n = 3)	groep m (n = 10)	groep h (n = 5)	Totaal
+	14	41	41	97
± en -	22	13	16	51
	36	54 ²⁾	57	147

De reacties van de leerkracht op een goed (gewenst) antwoord verschillen van die op een fout antwoord of bij een te laag oplossingsniveau. We beperken ons nu tot de reacties op goede antwoorden. Eerst worden de verschillende reacties op een goed antwoord aangegeven en vervolgens wordt weer gekeken naar de verdeling over de groepen.

De reacties die op een goed antwoord volgden, kunnen worden ondergebracht in de volgende categorieën:

- explicatie (de leerkracht gebruikt het antwoord van een leerling om het aan de hele klas uit te leggen) 12
 - ++ (de leerkracht prijst de leerling om het goede antwoord, juist, goed gedaan, keurig) 8
 - + (de leerkracht bevestigt op eenvoudige wijze dat het antwoord van de leerling goed is; herhaalt het antwoord, zegt 'ja', 'oké', enz.) 44
 - 0 (de leerkracht reageert niet; gaat gewoon door of reageert non-verbaal) 18
 - aanvullende vraag (de leerkracht stelt een aanvullende vraag betreffende het antwoord: 1) hoeveel, 2) hoe, 3) waarom). 31
- 113³⁾

Over het algemene reactiepatroon van de leerkracht kan dus gezegd worden dat een eenvoudige bevestiging van de leerkracht het meeste voorkwam. De leerkracht reageerde ook vaak door aanvullende vragen te stellen (hoeveel, hoe, waarom). Of hij ging gewoon door, reageerde niet zo expliciet (soms liet hij wel nonverbaal zijn goedkeuring blijken). Een goed/gewenst antwoord werd ook

¹⁾ Met lager niveau oplossingsmethode wordt bedoeld: een lager niveau van oplossen dan de leerkracht op dat moment van de leerling wil horen (bijvoorbeeld de leerling telt binnen de figuur met behulp van de aanvulstrategie in plaats van met de wenselijke rechthoekstrategie).

²⁾ Tweemaal gaven leerlingen uit deze groep op eigen initiatief hun (goede) oplossingsmethode.

³⁾ Het totaal aantal reacties op een goed antwoord is groter dan het totaal aantal goede antwoorden, omdat er vaak meerdere reacties op één goed antwoord waren (bijvoorbeeld: 'ja, dat klopt' en een aanvullende vraag).

nogal eens gebruikt om de hele klas uitleg te geven over een oplossingsmethode. Echt prijzen kwam voor, maar niet overdreven vaak.

Als we de reacties van de leerkracht opsplitsen per groep ontstaat het volgende beeld:

Tabel 3 Reacties van de leerkracht op goede antwoorden, per groep.

	groep l (n = 3)	groep m (n = 10)	groep h (n = 5)	Totaal
expl	1	8	3	12
++	1	3	4	8
+	6	19	19	44
0	6	6	6	18
av 1	—	7	8	15
av 2	—	5	7	12
av 3	—	2	2	4
	14	50	49	113

We bekijken eerst de totalen.

De leerlingen uit *groep l* (matig) kregen in totaal 14 reacties op een goed antwoord, dat wil zeggen *gemiddeld 5* per leerling (14/3).

De leerlingen uit *groep m* (voldoende) kregen totaal 50 reacties op een goed antwoord, dat wil zeggen *gemiddeld 5* per leerling (50/10).

De leerlingen uit *groep h* (goed) kregen totaal 49 reacties op een goed antwoord, dat wil zeggen *gemiddeld 10* per leerling (49/5).

Dit geeft een verhouding van 1 : 1 : 2.

Goede leerlingen kregen dus gemiddeld twee maal zo vaak een reactie op een goed antwoord dan de andere leerlingen. Deze reacties hebben impliciet of expliciet blijken van goedkeuring in zich en zullen daarmee het zelfvertrouwen van deze leerlingen versterken. Goede leerlingen krijgen dus, omdat ze nu eenmaal sneller tot inzichten komen, in dit opzicht gemiddeld twee maal zoveel stimulanzen voor meer zelfvertrouwen dan de andere leerlingen.

Conclusie 4: Leerlingen uit groep l geven veel vaker een foutief of onbevredigend antwoord (zie tabel 2) en bovendien krijgen zij (evenals de middengroep) gemiddeld half zoveel positieve reacties van de leerkracht dan de goede leerlingen op goede antwoorden.

Nemen we nu de positieve reacties en de goedkeuringen (resp. + en ++) samen en vergelijken we deze met de neutrale reacties (0) op een goed antwoord, dan zien we het volgende:

Tabel 4 Gemiddeld aantal neutrale en positieve/goedkeurende reacties van de leerkracht op een goed antwoord.

	neutraal	pos./goedkeurend
groep l	2	2.3
groep m	0.5	2.3
groep h	1	5

De verhoudingen liggen hiermee als volgt:

Groep *l* 1 : 1 even vaak neutrale als positieve reacties;

Groep *m* 1 : 5 5 × vaker positieve dan neutrale reacties;

Groep *h* 1 : 5 5 × vaker positieve dan neutrale reacties.

Conclusie 5: De groep leerlingen met de laagste rapportcijfers kreeg als reactie op een goed antwoord even vaak een neutrale reactie als een positieve/goedkeurende reactie. De middengroep evenals de beste groep leerlingen kregen als reactie op een goed antwoord gemiddeld vijf keer vaker een positieve/goedkeurende reactie dan een neutrale reactie.

Het gaat er slechts om een interactiepatroon zichtbaar te maken. Het ligt voor de hand dat leerlingen die moeilijker tot inzichten komen ook makkelijkere vragen krijgen dan snellere leerlingen. In deze klas konden we dat ook constateren (zie tabel 2). De reacties van de leerkracht zullen bij een goed antwoord op moeilijkerere vragen eerder positief of goedkeurend zijn dan bij makkelijkere vragen. Met andere woorden: het is bijna een natuurlijk verschijnsel, dat veel vaker te constateren zal zijn. Dit neemt niet weg dat het goed is ons dergelijke reactiepatronen bewust te maken.

Ad vraagstelling 3. *Welke reacties heeft de leerkracht als een leerling een fout maakt of een oplossingsmethode hanteert die op een lager niveau is dan wenselijk?* Leerlingen die matig zijn met Wiskobas (groep *l*) gaven gemiddeld meer antwoorden die fout zijn en antwoorden op een lager niveau dan wenselijk is dan leerlingen uit de beide andere groepen.

De reacties van de leerkracht op een fout antwoord of een te laag oplossingsniveau kunnen worden ondergebracht in de volgende grove categorieën:

A) de leerkracht gaat niet in op het antwoord;

B) de leerkracht gaat wel in op het antwoord.

Binnen beide categorieën zijn weer specificaties aan te geven. We beginnen met categorie A.

A) De leerkracht gaat *niet in op het antwoord*, maar:

Vraagt andere leerlingen (leerkracht gaat over naar de andere leerling met dezelfde vraag)

27

Geeft antwoord (leerkracht geeft zelf het goede antwoord)

1

– (leerkracht geeft aan dat het antwoord van de leerling onjuist is, schudt het hoofd, zegt ‘nee, dat is niet goed’, ‘hmm’, ‘klopt dat?’, enz.

10

38¹⁾

¹⁾ Het totaal aantal reacties van de leerkracht op een fout/laag oplossingsniveau is groter dan het totaal aantal antwoorden, omdat er vaak meerdere reacties op één antwoord kwamen (bijvoorbeeld: ‘klopt dat?’ en het doorspelen van de vraag naar een andere leerling).

Het reageren op een fout of op een oplossingsmethode op een laag niveau door de vraag door te spelen naar een andere leerling kwam het meeste voor. Het kwam zelden voor dat de leerkracht zelf het antwoord gaf; wel liet de leerkracht regelmatig weten dat het antwoord niet helemaal klopte (categorie ‘-’). Meestal vroeg de leerkracht dan aan de klas ‘klopt dat?’ en gaf dan de beurt door aan een andere leerling. Zoals al eerder is geconstateerd begon de leerkracht meestal bij het inventariseren van oplossingsmethoden bij een leerling uit groep l of m en pas later kregen leerlingen waarvan een oplossingsmethode op een hoger niveau te verwachten was de beurt.

Opgesplitst naar de groepen geeft dit het volgende overzicht:

Tabel 5 Reacties op een fout/laag oplossingsniveau waarbij de leerkracht niet ingaat op het antwoord; per groep.

	groep l (n = 3)	groep m (n = 10)	groep h (n = 5)	Totaal
Vr. an lln 10		8	9	27
Geeft ant -	-	-	1	1
- 3	3	3	4	10
	13	11	14	38

Hieruit blijkt dat de leerkracht bij leerlingen uit groep l relatief het meest overging naar een andere leerling. Voor groep l was dit namelijk gemiddeld drie keer per leerling het geval (10/3), voor leerlingen van groep m gemiddeld 0.8 en voor leerlingen van groep h gemiddeld twee keer (9/2).

Verder bleek dat, als een vraag naar een andere leerling doorgespeeld werd, dit meestal een leerling uit groep h was (een goede leerling), zie het onderstaande overzicht:

Van een leerling uit groep l		1
Van een leerling uit groep m	naar een leerling uit groep l	1
Van een leerling uit groep h		-
	(gem. per ll: 2/3 = 0.67)	<u>2</u>
Van een leerling uit groep l		4
Van een leerling uit groep m	naar een leerling uit groep m	4
Van een leerling uit groep h		3
	(gem. per ll: 11/10 = 1)	<u>11</u>
Van een leerling uit groep l		6
Van een leerling uit groep m	naar een leerling uit groep h	4
Van een leerling uit groep h		5
	(gem. per ll: 15/5 = 3)	<u>15</u>

Leerlingen uit groep h kregen gemiddeld drie keer zo vaak als leerlingen uit groep m en vier keer zo vaak als leerlingen uit groep l een vraag doorgespeeld. Wat algemener gezegd: meestal werd een vraag doorgespeeld naar een goede leerling, minder vaak naar een leerling met voldoende en nog minder vaak naar een zwakke leerling.

- Conclusie 6:* De leerkracht gaat afwisselend wel en niet in op een fout/laag oplossingsniveau.
- Conclusie 7:* De leerkracht gaat (wel of niet na enig doorvragen) bij een onbevredigend antwoord vaak snel over naar een andere leerling. Relatief het vaakst kwam dit voor bij zwakke leerlingen.
- Conclusie 8:* Bij het inventariseren van oplossingsmethoden begon de leerkracht meestal bij een zwakke leerling.
- Conclusie 9:* In de meeste gevallen kreeg een goede leerling de vraag toegepast bij een onbevredigend antwoord van een andere leerling.
- Conclusie 10:* De leerkracht gaf zelden zelf het antwoord na een onbevredigend leerlingantwoord.
- Conclusie 11:* De leerkracht gaf wel (en terecht) regelmatig te kennen dat het antwoord niet helemaal wenselijk was.

Ter illustratie worden nu enige voorbeelden gegeven uit de lessen. De voorbeelden zijn terug te vinden in deel B, hoofdstuk 6.

Aan het begin van werkblad 5 zegt de leerkracht dat het hele complex f 1000,- per jaar kost, dus alle tuintjes moeten samen f 1000,- opbrengen. Op het bord stond $200 \rightarrow f$ 1000,- (200 hokjes is f 1000,-).

De vraag is hoeveel een huurder zal moeten betalen voor een tuintje van zes hokjes.

Patrick (groep 1) krijgt de beurt:

Patrick: Het zijn zes hokjes, één zo'n hokje kost f 100,-.

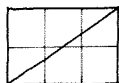
Leerkracht: Eén zo'n hokje kost f 100,-? Dus hij zegt, we hebben 200 hokjes en één zo'n hokje kost 100 gulden. Hoe kom je eraan?

Patrick: Het zijn dus zes hokjes... ik heb het uit mijn hoofd gedaan.

Leerkracht: Je hebt het uit je hoofd gedaan. Nu zit het in je hoofd, maar je moet nog even nadenken. Tessa. (groep m)

De leerkracht vroeg hier eerst een toelichting, maar ging verder niet in op de fout. De vraag werd al snel doorgespeeld naar een andere leerling.

Bij werkblad 6 krijgt Ellis (groep 1) de beurt bij het tweede tuintje:



Leerkracht: Het tweede tuintje. De driehoek. Wie heeft die? Ellis.

Ellis: Eén hele en daaronder bij dat puntje daar zit er ook nog één en die sla je in elkaar. En één zo'n blokje is f 5,- en als je die kleinen bij elkaar doet, dan is dat 15 gulden.

Leerkracht: Ellis heeft de hoekjes aan elkaar geplakt. Maar hoe konden we dat ook doen? Wat konden we nog meer doen met driehoeken? Jeroen.

Jeroen (groep h) gaf de oplossing met behulp van de rechthoekstrategie.

De leerkracht gaf in dit voorbeeld een aanwijzing ('maar hoe konden we dat ook doen? Wat konden we nog meer doen met driehoeken?') maar gaf de beurt door aan een andere leerling. Om een leerling te stimuleren tot een hoger niveau van oplossingsmethode (in dit geval de rechthoekstrategie) zou het mogelijk beter zijn de aanwijzing tot de betreffende leerling zelf te richten en bij weinig respons over te gaan op meer specifieke aanwijzingen (bijvoorbeeld door een hulplijn te trekken). Een andere mogelijkheid is, om na de beurt aan Jeroen gegeven te hebben terug te komen bij Ellis en haar een vergelijking te laten maken tussen de beide strategieën. Met andere woorden: leerlingen uit groep I explicieter leerduwtjes geven.

Een voorbeeld hiervan zullen we tegenkomen in de volgende categorie waarin de leerkracht wel in ging op de antwoorden van de leerlingen.

B) De leerkracht gaat in op het antwoord door (zie bijlage I):

R	(de leerkracht ondersteunt en bevestigt de leerling: 'toe maar', 'je weet wel', 'ja', of toont het antwoord aan de rest van de klas)	3
Vr	toel (de leerkracht vraagt toelichting. De leerkracht gaat in op het foute antwoord, vraagt hoe de leerling aan het antwoord is gekomen, vraagt om nadere uitleg)	7
Hints	(de leerkracht geeft de leerling hints, aanwijzingen om de leerling te stimuleren verder te denken in de richting die (meer) wenselijk is, of de leerling de fout zelf te laten herstellen)	18
HH	(de leerkracht herhaalt dezelfde vraag nog eens voor de leerling; bijvoorbeeld als hij denkt dat de leerling de vraag niet goed begrepen heeft of om de leerling te stimuleren nog eens na te denken over de vraag)	4
		32

Toelichting: Met categorie B (ingaan op het antwoord) wordt bedoeld dat de leerkracht met de betreffende leerling zelf verder gaat. Het kwam regelmatig voor dat de leerkracht wel een opmerking of aanwijzing gaf met betrekking tot het antwoord, maar direkt doorging met een andere leerling. Als criterium gold hier dat de leerkracht doorging met dezelfde leerling.

Als het antwoord niet naar wens was ging de leerkracht hier regelmatig op in. Hij deed dit meestal door aanwijzingen te geven. Verder kwam het voor dat de leerkracht een toelichting vroeg op het antwoord, de vraag nog eens herhaalde of de leerling ondersteunde.

Omdat het ingaan op foute antwoorden of oplossingsmethoden op een laag niveau belangrijk is voor het stimuleren van leerprocessen geven we weer illustraties uit de lesprotocollen.

Werkblad 8.

Leerkracht: Eerste tuintje. Hoeveel hokjes zijn dat Patrick? (groep 1)

Patrick: Zes.

Leerkracht: Wat kostte één hokje?

Patrick: 27 gulden.

Leerkracht: Nee, wat kostte één hokje, wat hebben we nou net gezegd?

Patrick: Anderhalf.

Leerkracht: Anderhalf. Hoeveel is nou 6 keer $1\frac{1}{2}$?

Patrick: 18.

Leerkracht: 6 keer $1\frac{1}{2}$ is 18? Dan moet je even naar je eigen uitkomst kijken. Je hebt de tafel van drie gedaan. Toen bleek dat $6 \times 3 = 18$, maar wat moet het zijn? Niet 6×3 , maar $6 \times \dots$?

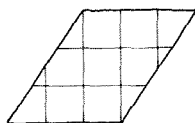
Patrick: Anderhalf.

Leerkracht: $6 \times 1\frac{1}{2}$. Hoeveel is dat? Marco (groep h) hoeveel is dat?

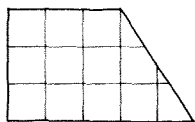
De leerkracht ging hier in op de fout en gaf aanwijzingen om de leerling verder te helpen, maar kwam toch weer uiteindelijk bij een andere leerling terecht.

Nu volgt een voorbeeld waarbij de leerkracht ingaat op de fout door toelichting te vragen en aanwijzingen te geven, waarbij hij wel de beurt geeft aan een andere leerling, maar weer terug komt bij dezelfde leerling.

Werkblad 7: het parallellogram.



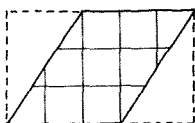
Daan wordt gevraagd hoe hij dit probleem opgelost heeft (de prijs van een tuintje van zes hokjes is gegeven: f 36,-). Daan beweerde dat het parallellogram even groot is als de figuur ernaast:



De leerkracht vroeg Daan eerst om een toelichting:

Leerkracht: Hoe kom je daarbij, Daan?

Daan legde uit dat hij het parallellogram héél had gemaakt en dat hij dan even groot is als de andere figuur. Volgens Daan hoeft je hem dan niet meer uit te rekenen, omdat de prijs dan ook f 72,- is.

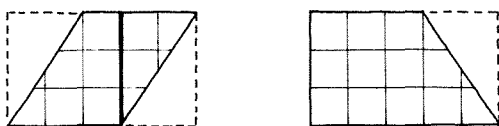


Leerkracht: Klopt dat verhaal van Daniël?

De leerlingen roepen ja en nee door de klas. De leerkracht vraagt vingers.

Leerkracht: Wie kan vertellen waarom het verhaal wel of niet klopt, als je hier deze lijnen trekt. Daniël zie je het misschien?

De leerkracht trok een dikke lijn in de figuur:



Leerkracht: Kijk eens naar de dikke lijn en kijk eens naar de stippellijn hier en naar de stippellijn hier (vergelijking met de vorige figuur). Astrid.

Astrid: Daniël telt de stippellijn niet mee.

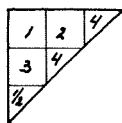
Leerkracht: Ja, jij telt er iets teveel mee. Want Daan, dit stuk zit er hier nog bij aan en hier niet, zie je dat?

Deze methode van ingaan op de fout is erg goed: de leerkracht geeft hier aanwijzingen door hulplijnen te trekken, waardoor Daniël de kans krijgt zijn fout te herstellen. Astrid mag de fout aangeven en Daan krijgt nogmaals door de leerkracht uiteengezet waarin de fout zat.

Het kwam ook regelmatig voor dat de leerkracht aanwijzingen gaf na het antwoord, maar dan de betreffende leerling niet de kans gaf hierop te reageren.

Leerkracht: Ellis heeft de hokjes aan elkaar geplakt. Maar wat konden we nog meer doen met driehoeken? Jeroen.

De aanwijzing, de vraag werd hier direkt doorgespeeld naar een andere leerling. Tenslotte een voorbeeld van ingaan op het antwoord waarbij de leerkracht de leerling ondersteunde. De leerkracht bevestigde de leerling en liet de bevestiging blijken door het antwoord (de oplossingsmethode) toe te lichten aan de hele klas. Patrick had bij dit tuintje $4\frac{1}{2}$ als antwoord.



De leerkracht vroeg hoe hij dat gevonden had.

Patrick: Ja, de helft aan elkaar geplakt, dat is één. Deze twee aan elkaar geplakt. En toen kwam ik op 4 uit en deze helft kwam daarbij en toen kwam er f 24,50 uit.

(N.B. één hokje is f 6,-)

Leerkracht: We gaan eens kijken. Wat deed Patrick. Dit is één, dit is twee, dit is drie, dit is een halve en dit, is samen een hele en toen hield je een half hokje over. Patrick heeft dus de hokjes geteld, maar we hebben nog een andere manier, Ellis.

De oplossingsmethode op laag niveau, evenals de fout ($6 \times 1\frac{1}{2} = f\ 24,50$) werd geaccepteerd. De leerkracht accepteerde het antwoord van Patrick door het toe te lichten aan de hele klas. Acceptatie van verschillen in tempo en kwalitatieve niveaus in oplossingsmethoden is een belangrijk pedagogisch principe van Wiskobas en van de school waarin deze observaties zijn gedaan. Het accepteren van leerlingantwoorden, het ruimte geven voor het werken op ieders eigen manier, is essentieel voor het zelfvertrouwen van leerlingen. De kinderen krijgen allemaal gelegenheid met hun methode te komen. Acceptatie kan echter niet zonder gerichte stimulatie, vooral voor de zwakkere leerlingen. Om leerlingen te stimuleren tot een kwalitatief hoger niveau zou het wenselijk zijn aanwijzingen te laten volgen op de acceptatie. Bijvoorbeeld: 'hoe zouden we dat ook kunnen doen?' en als de leerling het dan niet weet specifiekere aanwijzingen te geven, zoals in het voorbeeld van Daniël werd gedaan door middel van hulplijnen.

- Conclusie 12:* De leerkracht ging regelmatig in op een onbevredigend antwoord (een fout of te laag oplossingsniveau).
- Conclusie 13:* De leerkracht ging in op een onbevredigend antwoord door: aanwijzingen te geven, toelichting te vragen, de vraag te herhalen, de leerling te ondersteunen door het antwoord te accepteren.
- Conclusie 14:* Het kwam voor dat de leerkracht wel inging op de fout, het lage oplossingsniveau, en aanwijzingen gaf, maar toch weer terecht kwam bij een andere leerling. De leerling kreeg dan geen gelegenheid zelf op de aanwijzingen te reageren.
- Conclusie 15:* Het kwam voor dat de leerkracht inging op de fout door aanwijzingen te geven; als de leerling het zelf niet wist werd overgestapt naar een andere leerling en tenslotte werd weer teruggekomen bij de eerste leerling om de fout expliciet te maken.
- Conclusie 16:* Het kwam voor dat de leerkracht het onbevredigende antwoord accepteerde en de leerling ondersteunde door het antwoord aan de klas uit te leggen. Vervolgens kreeg dan een andere leerling de vraag, zodat de eerste leerling kon luisteren naar de oplossingsmethode op hoger niveau van andere leerlingen.

Aanbevelingen: In aansluiting op het voorafgaande volgen nu enkele aanbevelingen ten aanzien van het reageren op foute antwoorden op een te laag oplossingsniveau. De aanbevelingen zijn manieren van reageren die positief zijn om inzichtverwervend handelen, vooral ook bij zwakkere leerlingen zoveel mogelijk te stimuleren.

De aanbevelingen zijn gedestilleerd uit reactiepatronen van de leerkracht zoals in de laatste paragraaf beschreven werd:

- a Ingaan op fouten/lage oplossingsniveaus.
- b Niet te snel overgaan op een betere leerling, leerlingen die op een laag niveau blijven handelen aanwijzingen geven.
- c Beginnen met algemene aanwijzingen ('kun je het ook op een andere manier') eventueel gevolgd door specifiekere aanwijzingen (bijvoorbeeld door hulplijnen te trekken).

- d Na het inventariseren van oplossingsmethoden terugkomen bij leerlingen die een kwalitatief lager oplossingsniveau hanteerden en oplossingsmethoden vergelijken: 'wat vind je makkelijker?'.
- e Leerlingen die weinig inzichtsprongen maken meer betrekken in het groepswerk, zodat de kans op samenwerken en leren van anderen groter wordt. Een probleem hierbij is, dat sommige kinderen niet willen participeren in groepjes.
- f Leerlingen die weinig inzichtsprongen maken méér individuele hulp geven tijdens het zelfstandig werken. Naast acceptatie hoort stimulatie.

Samenvattend kan gezegd worden dat leerlingen die matig zijn met Wiskobas kwantitatief evenveel aandacht kregen als de andere leerlingen (wat betreft het aantal vragen). Het is vanzelfsprekend dat zwakke leerlingen relatief minder goede en wenselijke antwoorden geven op vragen dan de andere leerlingen (anders zouden ze ook niet 'matig' zijn). Het totaal aantal positieve reacties is hierdoor voor zwakkere leerlingen gemiddeld half zoveel als voor de goede leerlingen. Waarschijnlijk doordat de zwakkere leerlingen vaker de makkelijke vragen krijgen is de reactie van de leerkracht op goede antwoorden van zwakke leerlingen relatief vaker neutraal dan bij de andere leerlingen (meer positieve reacties).

Als reactie op een onbevredigend antwoord ging de leerkracht vaak snel met dezelfde vraag over naar een andere leerling. In de meeste gevallen naar een goede leerling. De leerkracht begon bij het inventariseren van oplossingsmethoden meestal bij een zwakke leerling. Zelden zei de leerkracht het antwoord zelf voor; wél liet hij afkeuring blijken.

Als reactie op een onbevredigend antwoord gaf de leerkracht verder vaak aanwijzingen. Soms gaf hij aanwijzingen, maar gaf de leerling zelf geen kans te reageren; soms gaf hij de leerling wel de gelegenheid te reageren, maar ging na enige pogingen over op een andere leerling. Tenslotte, en dat lijkt een geschikte methode, gaf de leerkracht gerichte aanwijzingen aan de betreffende leerling (hulplijnen), liet de leerling zelf reageren, stapte over naar een andere leerling, en kwam weer terug bij dezelfde leerling. Een andere reactie op een onbevredigend antwoord was acceptatie zonder gerichte stimulering.

Het probleem waar de leerkracht telkens mee geconfronteerd wordt bij klassikaal onderwijs is de voortgang van de hele klas en het stimuleren van kwalitatief hogere oplossingsniveaus van de zwakkere leerlingen. Door te lang stil te blijven staan bij de oplossingsmethoden op laag niveau tijdens de nabesprekingen zouden de snellere leerlingen ongeduldig kunnen worden. Daarom is het geven van gerichte aanwijzingen en het terugkomen bij de leerling die op lager niveau oploste na het inventariseren van oplossingsmethoden, en daarbij is het expliciet vergelijken van de verschillende methoden het meest raadzaam, aangevuld met extra, zonodig specifieke aanwijzingen tijdens het samenwerken en het stimuleren tot samenwerken.

V SAMENVATTENDE CONCLUSIES

Bij traditioneel rekenonderwijs, zo werd in hoofdstuk I gesteld, wordt te snel toegewerkt naar formalisering en waardoor formules klakkeloos en door elkaar toegepast worden. Leerlingen werken bij traditioneel rekenonderwijs bovendien vaak individueel, waardoor het gevaar dreigt dat sommige leerlingen steeds meer achter raken. Wat ontbreekt bij deze manier van werken is inzicht. In deze scriptie werd de term 'inzichtverwervend handelen' geïntroduceerd. Bij inzichtverwervend handelen wordt afgestapt van het aanleren van maniertjes en neemt het handelen met het doel inzicht te verwerven een centrale plaats in. Inzichtverwervend handelen wordt nagestreefd door het reken-wiskunde-onderwijs volgens de principes van Wiskobas. In deze scriptie ligt het accent op het stimuleren van inzichtverwervend handelen van alle leerlingen.

Een aantal elementen van inzichtverwervend handelen voor alle leerlingen kwam in hoofdstuk I en II naar voren.

Samengevat noemen we de volgende onderdelen.

De inhoud:

- een begripsmatige opbouw van een onderwerp;
- wiskundige onderwerpen geïntegreerd aan de orde laten komen (tegengaan van een verbrokkelde inhoud);
- formules als sluitstuk van een leerproces.

Leerprocessen:

- het optreden van inzicht is zichtbaar aan discontinuïteiten in het leerproces;
- inzicht is een stap in het leerproces; bij het verwerven van inzicht gaat het om herstructureren, omvormingen, verkortingen;
- verworven inzicht is herkenbaar aan het herhaald toepassen ervan in gevarieerde probleemsituaties.

Didactisch handelen:

- leerlingen gelegenheid geven tot samenwerken;
- leerlingen gelegenheid geven tot het doen van ontdekkingen;
- leerlingen gelegenheid geven hetzelfde probleem op verschillende manieren op te lossen;
- leerlingen oplossingsmethoden laten verbaliseren, leerlingen laten reflecteren over verschillende oplossingsmethoden;
- aandacht schenken aan precieze formuleringen;
- leerprocessen stimuleren door het geven van denkduwtjes, hints, aanwijzingen.

Diagnostisch handelen:

- het zien van discontinuïteiten in leerprocessen;
- het zien van verschillende niveaus;

- het signaleren van stagnaties (als leerlingen te lang op één niveau blijven handelen);
- stagnaties opheffen door het geven van denkduwtjes, hints, aanwijzingen;
- waar nodig de stapgrootte verkleinen; de moeilijkheidsgraad verlagen;
- het ingaan op fouten;
- faalangstige kinderen stimuleren tot meer zelfvertrouwen door aanvankelijk de denkstapjes te verkleinen.

Bij de beschrijvingen en analyses van hoofdstuk IV kwam een aantal elementen terug, maar ook kwamen nieuwe aspecten naar voren en enkele dilemma's. Als sluitstuk van deel A geven we de door middel van observaties verzamelde elementen in de vorm van enkele stellingen weer.

Inzichtverwervend handelen voor alle leerlingen wordt gestimuleerd wanneer:

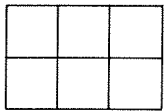
- het onderwerp persoonlijke betekenis heeft voor de leerlingen;
- de leerkracht inzicht heeft in en gemotiveerd is voor de problematiek;
- de overheadprojector wordt gebruikt bij klassikale toelichtingen en uitleg;
- leerlingen gezamenlijk aan opdrachten werken en deze worden nabesproken;
- leerlingen herhaald met dezelfde problematiek bezig zijn, leerlingen die traag zijn krijgen dan alsnog gelegenheid inzicht te verwerven. Leerlingen die al inzicht hadden kunnen het toepassen;
- leerlingen samenwerken; zij kunnen dan bij elkaar inzichtverwervend handelen stimuleren en stagnaties kunnen sneller opgeheven worden;
- aan leerlingen vragen gesteld worden. Als inzichtverwervend handelen van alle leerlingen wordt nagestreefd, hebben ook alle leerlingen recht op vragen;
- primair gevraagd wordt naar de gevolgde oplossingsmethode ('hoe heb je het gedaan?') en het waarom van de gevolgde methode. Pas daarna komt de vraag naar de uitkomst ('hoeveel heb je er uit?');
- de verschillende oplossingsmethoden met elkaar worden vergeleken;
- het dilemma tussen 'zelf ontdekken' en 'sturen' opgelost wordt door algemene vragen te stellen eventueel gevolgd door specifiekere vragen;
- leerlingen gestimuleerd worden in hun zelfvertrouwen. Leerlingen die weinig inzichtsprongen maken en makkelijkere vragen krijgen, lopen gevaar minder positieve reacties te krijgen;
- tijdens de nabesprekingen wordt ingegaan op fouten;
- tijdens de nabespreking voor leerlingen die op een laag oplossingsniveau blijven werken de stapgrootte verkleind wordt door gerichte aanwijzingen te geven en verschillende oplossingsmethoden met elkaar te laten vergelijken;
- zwakke leerlingen worden gestimuleerd tot samenwerken in de groepjes;
- voor zwakke leerlingen de stapgrootte verkleind wordt tijdens het zelfstandig werken in de groepjes door middel van algemene en zonodig specifieke aanwijzingen.

Deel B

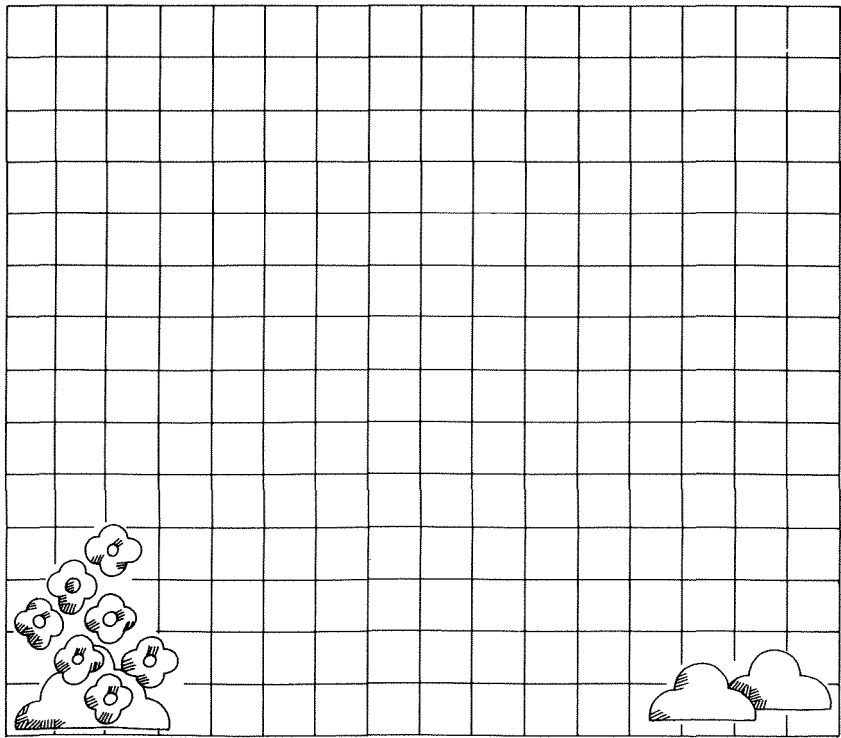
Lesprotocollen en toetsresultaten

De sekretaris heeft uitgerekend dat het hele kompleks 1000 gulden per jaar kost. Dat bedrag moeten de leden met een tuintje natuurlijk opbrengen.
Dus alle tuintjes tezamen moeten 1000 gulden opbrengen.

► Hoeveel zal een huurder moeten betalen voor dit volkstuintje?



► Teken andere tuintjes die net zoveel moeten opbrengen.



VI LESPROTOCOLLEN

In dit hoofdstuk worden de volledige protocollen van de laatste drie lessen (les 3, 4 en 5) van het practicum 'Volkstuintjes' in de 4e klas van de St.-Jozefschool weergegeven. Bij het protocolleren is gebruik gemaakt van bandopnames en observaties in de klas.

LES 3

Introductie – instructie – opdracht (werkblad 5)

Leerkracht: We hebben het gisteren al heel eventjes gehad over tuintje nummer 1. Je weet nog dat was het tuintje dat bestond uit 6 hokjes, maar dat was één van de acht verschillende soorten tuintjes die de voorzitter, secretaris en de penningmeester met z'n drieën hadden bedacht. Toen hebben we ook naar de verschillende soorten gekeken en daarvan hebben we er een paar uitgeprobeerd. Vandaag zijn we zo ver dat de voorzitter de secretaris en de penningmeester bij elkaar zijn gekomen om nu eindelijk de verschillende tuintjes te gaan verhuren. Wie weet nog hoeveel hokjes het hele park had? Marijke.

Marijke: 200.

Leerkracht: 200 hokjes. Van die 200 hokjes hebben ze gezegd: als we alle tuintjes gaan verkopen, of het nu driehoeken zijn of tuintje nummer 1 of tuintje nummer 9, als we alles hebben verkocht, dan hebben we 200 hokjes verkocht en dan hebben we 1000 gulden ontvangen.

De leerkracht zet nu op het bord: $200 \rightarrow f\ 1000,-$

Leerlingen roepen: 'Wat duur'.

Vervolgens worden de blaadjes met werkblad 5 uitgedeeld.

Leerkracht: Nu gaan we eens kijken. Er staat boven wat ik net allemaal heb verteld. De secretaris heeft uitgerekend dat het hele complex, dus de hele tuin, duizend gulden per jaar kost. Dat bedrag moeten de leden natuurlijk opbrengen. Dus alle tuintjes samen moeten duizend gulden opbrengen. Hoeveel zal een huurder moeten betalen voor het tuintje dat hier getekend staat? (het tuintje op werkblad 5). En ik wil niet alleen de uitkomst weten, maar ook hoe je aan die uitkomst bent gekomen. Dus wie nog geen uitkomst weet, maar wel weet hoe je erachter zou kunnen komen, die kan ook zijn vinger opsteken.

Drie vingers. Patrick krijgt de beurt (andere kinderen: Tessa en Jeroen).

Patrick: Het zijn 6 hokjes, één zo'n hokje kost honderd gulden.

Leerkracht: Eén zo'n hokje kost honderd gulden? Dus hij zegt, we hebben 200 hokjes en één zo'n hokje kost honderd gulden. Hoe kom je eraan?

Patrick: Hier zijn dus 6 hokjes... (niet te verstaan). Ik heb het uit mijn hoofd gedaan.

Leerkracht: Je hebt het uit je hoofd gedaan? Nu zit het in je hoofd, maar je moet het nog even doordenken. Tessa.

Tessa: Je moet doen: 1000 gedeeld door 200.

Leerkracht: Waarom moet dat?

Tessa: Omdat het 200 tuintjes zijn.

Leerkracht: Ja, 200 hokjes.

Tessa: En die moeten honderd gulden opbrengen.

Leerkracht: En die moeten...

Tessa: Eh, 1000 gulden opbrengen.

Leerkracht: 200 hokjes moeten 1000 gulden opbrengen. Dus zegt Tessa, moet je 1000 gulden delen door 200 en dat is...

Tessa: Dat is 50 gulden.

Leerkracht: En dat is 50 gulden per hokje. Klopt dat? 50 gulden per hokje? Reken goed na, is het 50 gulden per hokje?

Kinderen roepen van alles door de klas. Ze moeten van de leerkracht eerst goed nadenken en dan de vinger opsteken. Jeroen.

Jeroen: 5 gulden per hokje.

Leerkracht: 5 gulden, want?

Jeroen: $5 \times 2 = 10$ en dan moet je die 0 bij de 10 erbij zetten.

Leerkracht: Ja, maar je kunt ook voor de zekerheid zeggen 5×200 is gewoon 1000. Dus we weten 5 gulden kost één zo'n hokje. Hoe zouden we er nog meer achter kunnen komen. Jeroen heeft het meteen gezegd en Tessa 1000 gedeeld door 200. Hoe zou je het ook kunnen doen?

Tessa: Je kon er telkens, als je nou 1000 hebt, kon je er telkens 200 aftrekken.

Delen is herhaald aftrekken. Dit principe heeft Tessa goed geleerd.

Leerkracht: Ja, dat kan ook, van de 1000 steeds 200 aftrekken, hoeveel keer kan dat dan?

Tessa: 5 keer.

Op het bord. De leerkracht werkte dit met behulp van de verhoudingstabel uit.

Leerkracht: Als nou 200 hokjes 1000 gulden kosten. Wat kosten er dan 100?

f 1000,-	200
500,-	100
250,-	50
50,-	10
5,-	1

Leerlingen: 500.

Leerkracht: En wat kosten dan 50?

Monique: 250.

Leerkracht: Wat kosten er dan 10?

Leerlingen: 210.

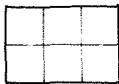
Leerkracht: Nee, denk goed na. Jeroen.

Jeroen: 50.

Leerkracht: 50, dus dit delen door 5 en dit ook delen door 5. Hoeveel kost 1? Frank.

Frank: 5.

Leerkracht: En wat kost dan? Als 1 voor 5 gulden weggaat, wat kost dit tuintje dan?



Leerlingen: 300.

Leerkracht: 300?

Leerlingen: 3000.

Leerkracht: 6 hokjes? Wat kost 1 hokje?

Leerlingen: 30.

Leerlingen: 5.

Leerkracht: Wat kosten die 6 hokjes? Daniël.

Daan: 6 hokjes, dat kost... (andere leerlingen roepen al 30) 30.

Leerkracht: 30 gulden voor dit tuintje. 30 gulden voor een tuintje dat 6 hokjes groot is. En nu wordt gevraagd: teken andere tuintjes die net zoveel moeten opbrengen, die dus ook 30 gulden moeten opbrengen. Probeer eens zoveel mogelijk tuintjes te bedenken die allemaal 30 gulden kosten. En ik zal één hulpvraagje stellen: hoeveel hokjes zullen al die tuintjes in ieder geval groot moeten zijn, hoe je hem ook tekent? Monique.

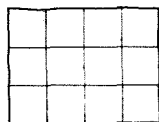
Monique: 6 hokjes.

Leerkracht: 6 hokjes. Ga allemaal proberen. Hoe je hem ook tekent, het moet allemaal 6 hokjes zijn. Ik ben erg benieuwd welke tuintjes er uit komen.

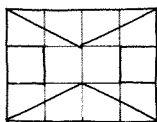
Zelfstandig werken – samenwerken (werkblad 5)

De kinderen gingen aan de slag. Ze werkten heel verschillend. In het groepje van Jeroen tekenden alle kinderen rechte figuren met hele hokjes.

Frank zocht naar moeilijke figuren. Hij had eerst een grote rechthoek van 12 hokjes, maar die is te groot:



Dan maakte hij er inkepingen in:



En zo kwam hij op een figuur van precies 6 hokjes. Hij maakte alleen mooie figuren.

Yvonne werkte met rechthoeken, maar wilde er graag driehoeken van maken. Het lukte haar niet. Professor Freudenthal heeft haar geholpen: eerst een rechthoek maken van 12 en dan daar de helft van nemen.

De kinderen tekenden meestal eerst een paar hele hokjes, gingen dan tellen en maakten de rest af met halve hokjes, in allerlei vormen. Vaak waren de figuren echter meer of minder dan 6 hokjes en dat lieten ze dan zo. Verder viel de neiging op om symmetrische figuren te maken.

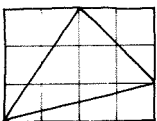
Voorbeeld Marijke:



Marco maakt ze zo:



Professor Freudenthal wees er ook nog op dat kinderen vaak figuren maken waarvan minstens één zijde evenwijdig is met de assen. Figuren als deze kwamen niet voor:



Deze manier van werken is heel goed: als ze zelf figuren mogen maken van een bepaalde grootte stimuleert dit het verwerven van inzicht in de oppervlakteproblematiek.

Nabespreking (werkblad 5)

Leerkracht: Kijk eens even allemaal naar het bord. Ik heb bij het rondlopen gezien dat er eerst veel kinderen waren die rechte figuren maakten. Je kunt allemaal rechte hokjes van 6 maken, je kunt een lange straat maken, je kunt hoekjes maken. Er was er zelfs eentje die maakte

een hond. Maar het waren allemaal rechte hokjes. Later begonnen een aantal kinderen, jullie allemaal trouwens, begonnen ook te werken met driehoeken. Nou, daar heb ik er een paar van uitgezocht (er verschenen op de projector 4 figuren). Als we nu eens naar deze kijken van Frank (zie de tekening van Frank hierboven). Kunnen we daar aan zien of die goed is ja of neen? Of dat 6 hokjes zijn.

Leerlingen: Ja, ja.

Leerkracht: Robert Jan kun jij dat uitleggen?

Robert Jan: Ja, die bovenste vleugels dat is samen 2 en die ook (onderste twee vleugels) dat is 4, plus 2 dat is 6.

Leerkracht: Wat zeg je nu precies? (leerkracht herhaalde de uitleg). Astrid hoe heb jij dat gedaan?

Astrid: Dit en dit (ze wijst met haar vinger de hele rechthoek aan van 12 hokjes).

Leerkracht: Jij hebt dit geteld, hoe lang is dit?

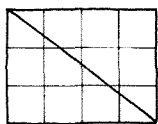
Astrid: 4.

Leerkracht: En hoe hoog?

Astrid: 3.

Leerkracht: Dus toen had je in totaal 12 hokjes en wat zei je, en dat delen we door 2 en toen hadden we samen 6. En zo kwamen we er ook weer uit.

De tweede figuur was van Yvonne, deze driehoek:



Wat kunnen we daar aan zien. Misschien volgens dezelfde manier als Astrid aangaf, dat dat zes hokjes zijn. Silvester.

Silvester gaat naar het bord, maar zegt niets en loopt weer terug.

Leerkracht: Wie helpt Silvester, Marco?

Marco: Eh.

Leerlingen: Die weet het ook niet.

Leerkracht: Ja, weet je het al Silvester, kom maar.

Silvester: Die trek je door, dat is 12, en dan deel je door twee, is zes.

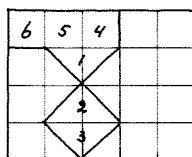
Leerkracht: Ja, maar waarom mag je delen door twee?

Silvester: Die is evengroot als die.

Silvester heeft het principe van de rechthoekstrategie goed door. De leerkracht stelt hier weer de 'waarom-vraag' zodat Silvester de door hem toegepaste oplossingsmethode moest beargumenteren.

Leerkracht: Ja, omdat die evengroot is als die, mag je delen door twee. En dat was hier ook zo (bij de figuur van Frank). Omdat dit precies in twee

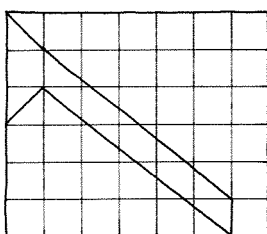
stukjes verdeeld is, mag je hem verdelen. Deze figuur, van Daniël, wie kan daar over uitleggen. Jeroen.



Figuur van Daniël

Jeroen: Deze twee dat is één hokkie en deze dat zijn er twee (onderste twee), dat is drie en de bovenste drie, dat is zes.

Leerkracht: Keurig Jeroen. En nu een hele moeilijke, die van Astrid.



Figuur van Astrid

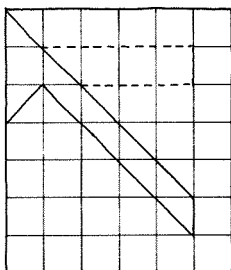
Leerkracht: Moeilijk hoor! Hoe weten we nu dat deze figuur 6 hokjes is. Want wat Astrid tekende was niet door alle punten heen.

Leerlingen: Meneer, meneer, meneer.

Patrick: Dit is één (het hele hokje), die twee is samen één (de twee halven), dat is drie, eh, dat is twee, drie, vier, vijf, zes.

Leerkracht: Klopt het helemaal Astrid?

Opmerking: Ik heb niet precies kunnen zien wat Patrick aanwees, omdat Professor Freudenthal en ik verbaasd waren over de getekende figuur. Zoals hij hier getekend is, zijn het in totaal 7 hokjes in plaats van 6. De leerkracht had de kinderen zelf de figuren op het transparant voor de overheadprojector laten tekenen. Op haar eigen werkblad had Astrid wel een figuur getekend die precies 6 hokjes was:



De stippellijn geeft dezelfde oppervlakte aan; het door Astrid getekende parallellogram is de oppervlakte van een rechthoek van 4 hokjes. De figuur die ze op het transparant tekende (zie blz. 80) was te groot.

Leerkracht: Klopt het helemaal Astrid?

Astrid: Die gaat niet precies door de lijnen.

Leerkracht: Ja, hij gaat niet precies door de lijnen, zoals Astrid hem tekende. (Astrid had hem uit de losse hand op het transparant getekend, zonder liniaal.) Hij kwam niet precies langs alle kruispunten met een rechte liniaal. (Wim tekent hem op het bord met liniaal.) We zullen hem morgen misschien nog eens uitvergrooten in wat grotere hokken. Dan gaan we kijken of hij nou wel klopt of niet.

Introductie – instructie – opdracht (werkblad 6)

Leerkracht: Gaan we nu naar de volgende kijken. Niet alleen wij hebben volkstuintjes gemaakt, maar ook de secretaris en de penningmeester hebben tuintjes gemaakt. Allemaal verschillende, niet allemaal van zes hokjes. En nu vragen wij, hoeveel zul je voor de tuintjes die hier opstaan moeten betalen aan de penningmeester.

Leerlingen: O, ja.

Uitdelen van werkblad 6.

Zelfstandig werken – samenwerken (werkblad 6)

De kinderen gingen aan het werk. Sommige kinderen gingen het aantal hokjes berekenen. Ze dachten dat dat de opdracht was. Misschien trad de verwarring op doordat op het werkblad de prijs per hokje niet vermeld staat, noch de prijs van een voorbeeldtuintje. De kinderen die de prijs uitrekenden door het aantal hokjes van de figuur te vermenigvuldigen met $f\ 5,-$ kwamen nog al eens in moeilijkheden met het vermenigvuldigen met een half.

Jessica bijvoorbeeld kreeg uit de eerste driehoek (van $4\frac{1}{2}$ hokje) $f\ 20,50$. Ze deed $4 \times 5 = 20 + \frac{1}{2} = 20,50$. Ook bij de 4e (dezelfde) figuur en bij de 5e figuur kwam ze op 20,50.

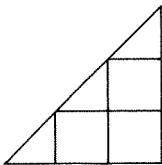
Marco had een soortgelijk probleem. Deze figuur:



was volgens hem $f\ 5,75$. ‘Hoe kom je daar bij?’ ‘Nou, die twee (het 1e en 3e onvolledige hokje samen) zijn samen één, dat is dus vijf gulden en wat er over blijft dat is 75 cent, want dat is iets meer dan de helft.’

Daniël paste de rechthoekstrategie toe: hij maakte er rechthoeken van en halveerde. De rechthoek om de driehoek van $4\frac{1}{2}$ is 9 hokjes. Dat is $f\ 45,-$. Daar de helft van, dat is $f\ 22,50$. Bij toepassing van de rechthoekstrategie treedt het probleem van het vermenigvuldigen met een half niet op. Het toepassen van een

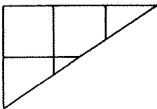
De penningmeester denkt erover na wat een huurder moet betalen voor dit tuintje:



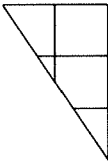
► Weet jij dat?

.....

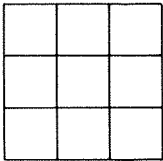
► Hoeveel moeten de huurders van deze volkstuintjes betalen?
Vul in:



.....

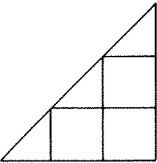


.....

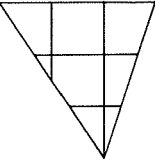


.....

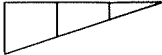
► Hoeveel moeten de huurders van deze volkstuintjes betalen?
Vul in :



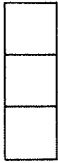
.....



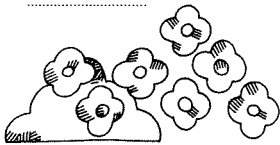
.....



.....



.....



transformatie op de figuur levert een gemakkelijkere bewerking op.
De kinderen die de opdracht af hadden kregen werkblad 4 als differentiatie opdracht. Dit werkblad werd niet klassikaal nabesproken.
Als de kinderen zelfstandig werkten viel het op, dat ze dat heel redelijk doen, ze

De penningmeester van de vereniging gaat er vanuit dat iedereen wel dit tuintje zal kiezen:

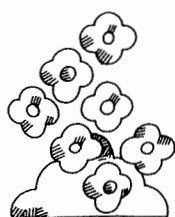
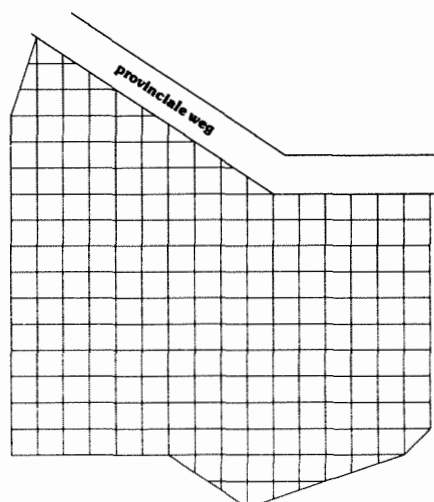
type 5:



► Hoeveel mensen kunnen dan een tuintje krijgen?

.....

Gebruik het plattegrondje.

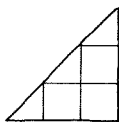


vragen vrij weinig hulp van de leerkracht (of van mij). De leerkracht heeft alle gelegenheid de klas rond te lopen en vastgelopen kinderen te helpen. De kinderen zoeken eerst hulp bij elkaar; soms heeft dit als gevolg dat het hele groepje dezelfde fout maakt. In de nabespreking kon dit echter weer recht gezet worden.

De kinderen die alleen zitten, vragen naar mijn indruk relatief meer hulp. De leerkracht wees leerlingen die de aanvulstrategie gebruikten erop dat we de vorige dag gewerkt hadden met de rechthoek. Ook zei de leerkracht halverwege het samenwerken door de klas: 'Er zijn leerlingen die alleen maar gaan kijken hoeveel hokjes het zijn. Nee, er wordt gevraagd: hoeveel geld krijgt de penningmeester er voor. Denk er dus aan.' Kinderen die de opdracht verkeerd begrepen hadden, konden dus tijdig bijgestuurd worden door deze manier van werken. Sommige leerlingen, die al met hun differentiatie opdracht waren begonnen, riepen: 'Hè?' De leerkracht las toen voor wat er boven het werkblad staat: 'De penningmeester denkt erover na wat een huurder moet *betalen* voor dit tuintje.' Het was waarschijnlijk duidelijker geweest als de leerkracht bij de opdrachtverstrekking nog eens herhaald had dat een tuintje van zes hokjes *f* 30,- kostte. In de vorige opdrachten hoefden ze geen prijs te berekenen.

Nabespreking

Leerkracht: Luister. Iedereen is nu klaar met het geld berekenen. Je hebt daarna nog wel een blad gekregen met driehoeken, maar dat laten we gewoon liggen. We gaan even samen kijken naar de prijzen van die tuintjes. Het eerste tuintje, wie heeft daar de prijs van gevonden. En vertel ook weer hoe je eraan komt, hè? Daniël vertel het eens.



Daniël: *f* 22,50.

Leerkracht: Hoe kom je daar aan?

Daniël: Ik heb gewoon $4\frac{1}{2}$ hokje.

Leerkracht: Hoe kom je daar aan?

Daniël: Dat heb ik opgeteld.

Leerkracht: Hoe?

Daniël: Er zitten 3 helen en 3 halven.

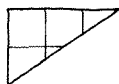
Leerkracht: Dat is samen $4\frac{1}{2}$ hokje, ja.

Daniël: En toen 4×5 dat is 20 en de helft dat is *f* 22,50.

Leerkracht: Had iedereen dat?

Leerlingen: Ja, ja (kinderen met een andere uitkomst zeiden dat niet).

Leerkracht: Het tweede tuintje. De driehoek. Wie heeft die? Ellis.



Ellis: Eén hele en daaronder bij dat puntje daar zit er ook nog één en die sla je in elkaar. En één zo'n blokje is 5 gulden en als je die kleine bij elkaar doet dan is dat 15 gulden.

Leerkracht: Ellis heeft de hoekjes aan elkaar geplakt. Maar hoe konden we dat ook doen? Wat konden we nog meer doen met driehoeken? Jeroen.

Jeroen: Nou gewoon, daarna komt nog zo'n stuk en die kun je aan elkaar plakken en dan zitten er 6 hokjes, dat kun je delen door 2 en dat is dan 15.

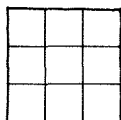
(De leerlingen hadden de knip- en plakprocedures van de onderbouw nog duidelijk in hun hoofd.)

Leerkracht: Jeroen heeft dus weer aangevuld, 6 hokjes, de helft is 3. 3 hokjes keer 5 gulden is 15 gulden. Nou Jeroen vertel dan het volgende ook maar even.

Jeroen: Dat is hetzelfde.

Leerkracht: Dat is dezelfde maar wat is daarmee gebeurd? (de leerlingen roepen: omgekeerd). Die is naar beneden gevallen met de punt naar beneden, hè.

De volgende is helemaal makkelijk, die zien we tenminste in één keer. Hoeveel hokjes zijn dat? Ellis.



Ellis: 9.

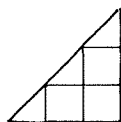
Leerkracht: Wat kost dat dus?

Ellis: f 45,-.

Leerkracht: 45 gulden. En links onder? Als we goed kijken zien we er weer wat aan. Astrid.

Astrid: f 22,50.

Leerkracht: Kon je dat al meteen zien eigenlijk? Jongens, kijk eens naar de bovenste en kijk eens naar die linksonder, wat valt je dan op?

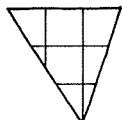


Leerlingen: Dat is hetzelfde.

Leerkracht: Wie had dat al meteen gevonden?

Tien vingers de lucht in.

Leerkracht: De volgende, Daniël.



Daniël: f 22,50.

Leerkracht: Hoe heb je dat gedaan?

Daniël: Ik heb een vierkant gemaakt en toen kwam er 9 uit enne daar de helft van, nee, dat is samen f 45,- en daar de helft van is f 22,50.

Leerkracht: Juist. Daniël heeft het dus afgemaakt tot een vierkant en vond dus weer 3×3 is 9 en daar de helft van is $4\frac{1}{2}$ dus dat is f 22,50. De volgende. Hoeveel hokjes zijn dat? Jessica?



Jessica: $2\frac{1}{2}$.

Leerkracht: $2\frac{1}{2}$? Kijk eens goed. Robert.

Robert Jan: Eén en een half.

Leerkracht: $1\frac{1}{2}$ hè, want het is de helft van hoeveel hokjes? Van 3 hokjes als je hem afmaakt. Nou, $1\frac{1}{2}$ maal 5 gulden, hoeveel is dat?

Jessica: $5\frac{1}{2}$.

Leerkracht: Nee, denk eens goed na. $1\frac{1}{2} \times 5$. Eerst 1 keer f 5,- en dan nog de helft van f 5,-.

Leerlingen: f 7,50.

Leerkracht: Jongens, het was niet een halve gulden het was de helft van f 5,-. Nou de laatste, we zien tenminste in een opslag hoeveel hokjes dat zijn. Hoeveel hokjes zijn dat? Marco.

Marco: Het zijn er drie, dat is 15 gulden.

Leerkracht: Luister, dat andere blad met die driehoeken (werkblad 4) heb ik jullie gegeven als extra, dat houden we er gewoon bij.

Iedereen ruimt nu op.

LES 4

Introductie – instructie – opdracht (werkblad 7)

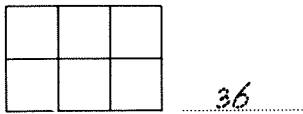
Leerkracht: Gisteren hebben we gezien dat de penningmeester en de secretaris tuintjes hadden berekend. En wie weet nog hoeveel een tuintje van 6 hokjes kostte?

Alle vingers omhoog.

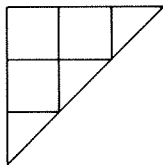
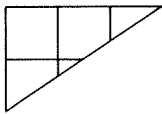
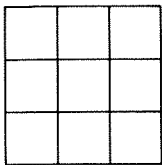
Patrick: f 30,-.

Leerkracht: Nou, en toen dat gebeurd was waren er een heleboel mensen en die hadden zich al ingeschreven, voor een tuintje. Die hadden van te

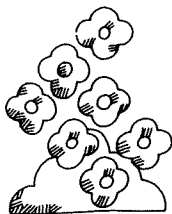
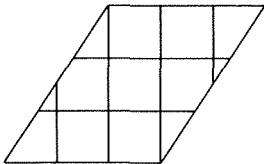
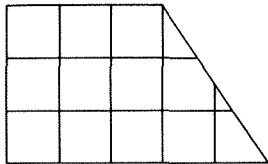
De penningmeester van de vereniging is erg boos op de sekretaris. Want die heeft de huurprijs verkeerd berekend! Daarom komt de penningmeester met het voorstel de huurprijs als volgt vast te stellen:



► Hoeveel kosten de volkstuintjes nu aan huur?
Vul in:



► En deze nieuwe typen?



voren gezegd: ‘Ik wil graag een tuintje.’ En die sekretaris had dus de tuintjes berekend op f 30,-. Wie weet nog hoeveel één zo’n stukje kostte?

Alle vingers omhoog.

Patrick: f 5,-.

Leerkracht: En dat werd rúzie, rúzie, méér dan verschrikkelijk, want de secretaris had de brieven al klaar: 'Volkstuinjes te huur, als je zo'n stukje koopt kost dat f 30,-.' We hebben gisteren berekend wat er gebeurde als je andere stukjes maakte, dan gingen we uit van f 5,- per hokje. En de brieven waren al bijna op de post toen de penningmeester er achter kwam. Die werd toch boos op de secretaris en had gezegd: 'Ben jij helemaal gek geworden. Moeten wij soms failliet gaan? Dat is veel te goedkoop, zoals je dat neerzet. Dat moet veel duurder worden, anders komen we er nóóit uit.'

En de penningmeester maakte andere huurprijzen en de penningmeester stelt voor dit tuintje te laten kosten 36 gulden. Zo'n zelfde tuintje kost nu 36 gulden.

De kinderen beginnen nu al te roepen. Marijke en Jessica onderling: f 6,- per hokje.

Leerkracht: Ik zeg niets meer. Jullie krijgen een blad waarop staat, dat de penningmeester boos is op de secretaris, dat hij nu de prijs 36 gulden maakt. Meer zeg ik niet, maar gaan jullie zelf eens de prijs berekenen van de tuintjes die eronder staan en voor de rest alleen werken en niets gebruiken. Probeer het nu eens helemaal zelf. En als ik zeg zelf dan verwacht ik ook dat het helemaal stil blijft.

Zelfstandig werken – samenwerken (werkblad 7)

Deze keer werd het groepje van Frank, Marijke, Jessica en Silvester geobserveerd.

Marijke begon direkt met het aanvullen van de tweede figuur tot een rechthoek.

Jessica begon met de eerste figuur: 9 hokjes maal f 6,- is f 54,-.

Silvester kijkt bij Jessica en schrijft er ook 54 bij.

Frank gaat heel snel; de eerste figuur 54; de tweede 18 gulden.

Silvester kijkt nu bij Frank.

Jessica maakte van de tweede figuur een rechthoek en rekent uit: $6 \times 6 = 36$.

Marijke zegt: 'Nee, dat is $2 \times 6 = 12$. Het zijn 3 hokken; de helft van 12 is 6. En $2 \times 6 = 12$.'

Jessica: 'Nee, dit zijn 3 hokken.'

Ze kijken niet bij Frank en Silvester die de uitkomst al hadden.

Jessica doet nu 3×6 en schrijft 19 op. Daarna gumt ze het uit en schrijft 18 op.

De derde figuur. Marijke vult de figuur aan tot een rechthoek en schrijft er 54 bij.

Gumt dan de aanvulling weg, kijkt bij Frank en schrijft f 26,- op. (Frank had ook f 26,-; Frank had dus de helft van 54 niet goed genomen, het moest 27 zijn.)

Uit de vierde figuur krijgen ze f 18,-, dat leverde geen moeilijkheden op. Frank is inmiddels klaar, pakt werkblad 4 uit zijn kastje, gumt daar weg wat hij had en begint opnieuw in de tekenen.

Marijke had bij figuur 5 f 63,- en bij figuur 6 f 54,-. (Ze had bij de vijfde figuur

waarschijnlijk $9 \times 6 = 54$ en $1 \times 9 = 9$ bij elkaar opgeteld in plaats van 9×6 en 3×6 , samen 72.)

Silvester had bij de laatste figuur ook f 54,- staan. Ik vroeg hem hoe hij daar aan gekomen was. Hij kon het niet helemaal duidelijk vertellen, maar Frank nam het over. Frank zei: 'Die middelste drie hokjes, dat is 18 en de twee buitenste kanten zijn ook 18. Dus $3 \times 18 = 54$.' Silvester zegt nu ook: $18 + 18 + 18 = 54$.

Daan riep op een gegeven moment: 'Ik ben klaar meneer.' De leerkracht: 'Als je klaar bent, ga je op de achterkant optel- en aftreksommen maken. Dan heeft iedereen de kans om het af te maken.'

Het groepje van Tessa kwam er niet uit. Zij riepen de hulp van de leerkracht in.

Nabespreking (werkblad 7)

De leerkracht had de figuren met behulp van de overheadprojector op het bord geprojecteerd.

Leerkracht: Nu wil ik eerst weten wat je gedaan hebt toen je wist dat dit f 36,- was. Daniël.

Daniël: Ik heb 6 keer 6 is 36.

Leerkracht: Wie kan dat op een andere manier vertellen? Tessa.

Tessa: Ik wist dat 6 keer 6 is 36 en toen kostte één blokje 6.

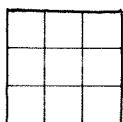
Leerkracht: Waarom is het zo handig te weten hoeveel één blokje kostte?

Marijke: Nou, omdat je... kijk daar heb je er drie hokjes staan, bij het vierde en dan moet je toch weten hoeveel één hokje kost.

Leerkracht: Wie kan dat op een *andere manier* zeggen? Jessica.

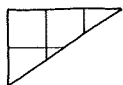
Jessica: Eén hokje is 6 gulden en als je er negen hebt, dan doe je gewoon 9×6 .

Leerkracht: Prima. Nou, dan kunnen we meteen naar het eerste tuintje kijken. Hoeveel hokken zitten daar in? Yvonne.



Yvonne: 9.

Leerkracht: 9. Dat is heel makkelijk hè, want het was een vierkantje van 3 bij 3 hokjes hè. Toen zagen we dat daar 9 hokjes inzaten. Maar nu deze, die driehoek die was... Tessa.



Tessa: 3.

Leerkracht: Hoe kun je dat uitrekenen?

Tessa: Als je er een vierkant van maakt...

Leerkracht: Een vierkant? Jeroen. Een...

Jeroen: Een rechthoek.

Leerkracht: Een rechthoek.

Tessa: Dan is het 2×3 dat is samen 6. En dat deel je door twee en dan heb je er drie.

Leerkracht: Dan heb je drie hokjes. En hoeveel kost dat dan aan huur?

Tessa: 18 gulden.

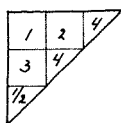
Leerkracht: 18 gulden. En nu hebben we een iets grotere en die was zo (figuur 3) en die gaat Patrick helemaal uitleggen.

Patrick: Nou, bij 3 heb ik 4 gevonden en een halve.

Leerkracht: Maar hoe heb je die gevonden?

Patrick: Ja, de helft aan elkaar geplakt, dat is één. Deze twee aan elkaar geplakt. En toen kwam ik op 4 uit en deze helft kwam daar bij en toen kwam er f 24,50 uit.

(Patrick doet weer $4 \times 6 = 24 + \frac{1}{2} = f 24,50$.)



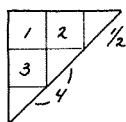
Leerkracht: We gaan eens even kijken. Wat deed Patrick. Dit is één, dit is twee, dit is drie, dit is een halve en dit is ook een halve, dat is samen één hele en toen hield je nog een half hokje over. Wie heeft hem op een andere manier berekend? Patrick heeft dus de hokjes geteld, maar we hebben nog een andere manier. Ellis.

Ellis: Ik heb bijna hetzelfde, maar niet zoals Patrick met 4,4 (twee keer vier ingetekend). Ik heb gewoon een bocht gemaakt.

Leerkracht: Wat voor bocht?

Ellis: Nou, bij die halve in het hoekje en dan midden in heb ik een lijn getrokken...

Leerkracht: O, Ellis deed dus zo, dit is 1, 2, 3, en dit is samen ook nog een keer-tje eentje, en dan hou ik nog een halve over.



Leerkracht: Nou, wie heeft het op een nog andere manier gedaan, Jeroen.

Jeroen: Nou, ik heb gedaan 6, 12, 18...

Leerkracht: O, maar jij bent al aan het prijs berekenen hè? Maar nu vraag ik, hoe heb je de hokjes berekend, Silvester?

Silvester: Hij is de helft van die eerste en de helft van 54 is 26.

Silvester doet nu iets wat de kinderen in de groepjes niet hardop hadden gezegd. Silvester schreef de antwoorden over van Frank, maar heeft wel inzicht verworven, dat blijkt nu. Hij bekeek het zelfs meetkundig, hij berekende de figuur niet op grond van de prijs van één hokje, hij berekende zelfs het aantal hokjes niet, maar vergeleek de figuur met een andere figuur en zag dat het de helft was en concludeerde vervolgens dat dan ook de prijs de helft is van de prijs van de andere figuur. Hij maakte een fout bij het bepalen van de helft.

Leerkracht: Klopt dat?

Leerlingen: De helft van 54 is 27.

Leerkracht: Ja, of je kunt hem weer afmaken. 9 hokjes, daar de helft van is $4\frac{1}{2}$ hokje, hè? Nou, nu de prijs, $4\frac{1}{2}$ hokje. Ofwel, $4\frac{1}{2} \times 6$. Monique.

Monique: f 24,50.

Leerkracht: Hoeveel?

Monique: f 24,50.

Leerkracht: Nu vragen we eerst welke vergissing heeft Monique gemaakt? Als je zegt $4\frac{1}{2} \times 6$. Welke vergissing heeft Monique dan gemaakt. Robert-Jan.

Robert-Jan: Die halve, die moet drie worden.

Leerkracht: Ja, want dat betekent niet 4×6 en dan $\frac{1}{2}$ erbij, 4×6 is $24 + \frac{1}{2} = 24$. Maar wat betekent het, 4×6 en...

Tessa: een halve keer 6.

Leerkracht: $\frac{1}{2} \times 6$ is hetzelfde als de...

Leerlingen: 3.

Leerkracht: Ja, is hetzelfde als drie, dat weet ik, maar $\frac{1}{2} \times 6$, wie kan dat anders zeggen... Wat is drie?

Yvonne keek met opgetrokken wenkbrauwen: Drie is de helft van 6.

Leerkracht: Is de helft van 6. Ja? Dus jullie zeggen 4 keer zes en dan nog een keertje de helft van 6, dat is samen 24 en 3 dat is 27. Nou, de volgende is weer heel erg makkelijk. Vivienne gaat dat eens heel vlot vertellen.



Vivienne: Nou, het zijn gewoon drie hokjes. Drie keer 8, eh 6 dat is 18.

Leerkracht: En nu deze jongens, let eens heel goed op. Hoe kun je die nu heel makkelijk berekenen. Marijke.

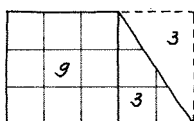
Marijke: Aan elkaar plakken.

Leerkracht: Wat heb je aan elkaar geplakt?

Marijke: Nou, dat wat we missen heb ik gewoon getekend tot het weer een hele wordt en toen heb ik de hokjes geteld.

Leerkracht: Welke hokjes heb je geteld?
Marijke: Nou, van het hele vierkant, van de hele tekening.
Leerkracht: Van het hele ding?
Marijke: Ja, toen heb ik dat door 6 gedeeld.
Leerkracht: Waarom door 6?
Marijke: ... (ze had er 63 uit).
Leerkracht: Monique.
Monique: Je moet er eerst een hokje omheen zetten.

Ze ging naar het bord en wees het aan.



Leerkracht: Heel goed, Monique. Je moet dan niet de helft van de hele figuur nemen, zoals bij de driehoeken. Dat kan hier niet, dat kleine driehoekje is natuurlijk niet de helft van de hele figuur. Dus je moet hier zeggen: ik heb er hier $3 \times 3 = 9$ plus de helft van 6 is?

Leerlingen: 3.

Leerkracht: 3. Dus samen is dit ding, hoeveel hokjes?

Leerlingen: 72.

Leerkracht: Nou, jongens, hoeveel hokjes is dit ding samen? Er zijn er nu echt te veel die kletsen en niet echt naar de vraag luisteren. Tessa? Hoeveel hokjes is dat samen?

Tessa: 12.

Leerkracht: En wat kost dat dan?

Marco: 72.

Leerkracht: En nu de laagste.

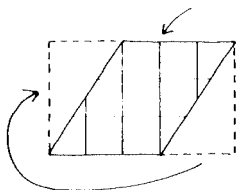
Leerlingen: Die is hetzelfde.

Leerkracht: Hoe hebben jullie deze nu berekend. Ik zie steeds dezelfde vingers.

Marco: Ik heb eerst alle hele hokjes geteld, dat zijn er 5 en 5×6 is 30. Dat heb ik onthouden en toen heb ik die andere aan elkaar geplakt, die bij elkaar passen. En dat zijn er 3 en een kwart en ik heb eruit 48,25.

Leerkracht: 48,25. Nou gaan we eens kijken of iemand het anders heeft gedaan want was dat nou makkelijk om al die stukjes te tellen Marco? Wie heeft een andere manier? Jeroen.

Jeroen: Ik heb deze lijn hier zo neergezet en deze hier en dan krijg je 9.



Leerkracht: Jeroen heeft dus gezegd als we nou eens hier zouden zitten dan geven we hem gewoon een duwtje, ja? En dan komt deze lijn weer rechtop te staan en deze ook en dan zou dit blokje even hoog blijven en dan kom je aan een vierkant: 9 hokjes. Daniël hoe heb jij het gedaan?

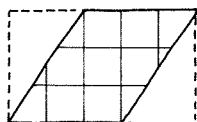
Daniel: Hij is even groot als de vorige.

Leerkracht: Hoe kom je daarbij Daan?

Daan: Nou ik heb hem heel gemaakt.

Leerkracht: Jij hebt hem heel gemaakt. Let nu heel goed op wat Daniël zegt.

Daan: Nou, hij is even groot als de vorige.



Leerkracht: 5 bij 3, ja, dat klopt.

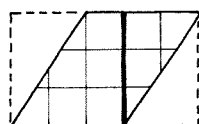
Daan: Nou en dan hoeft je niet meer uit te rekenen want dan is die ook 72.

(Daniël trekt slechts één driehoek af in plaats van twee.)

Leerlingen roepen ja en nee door de klas. De leerkracht vraagt vingers. Vijf vingers gaan de lucht in.

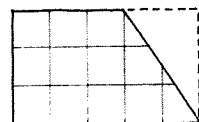
Leerkracht: Wie kan vertellen waarom het verhaal wel of niet klopt, als je hier deze lijnen trekt. Daniël zie je het misschien?

De leerkracht trekt een dikke lijn in de figuur:



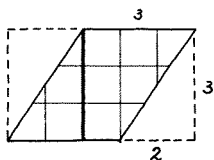
Leerkracht: Kijk eens naar de dikke lijn en kijk eens naar de stippellijn hier (vergelijking met de vorige figuur). Astrid.

Astrid: Daniël telt de stippellijn niet mee.



Leerkracht: Ja, hij telt er iets teveel mee. Want Daan, dit stuk (de driehoek links) zit er hier nog bij aan en hier niet, zie je dat? Tessa, wat heb jij?

Tessa: Ik heb hier een streep tussen gezet. En toen heb ik deze berekend en deze en toen kreeg ik 3×3 is 9. Maar je moet het eerst delen door 2 en dat is $4\frac{1}{2}$.



Andere leerlingen roepen hè, $4\frac{1}{2}$?

($3 \times 3 = 9 : 2 = 4\frac{1}{2}$. Ze deelde door 2 omdat er bij de aanvulling twee hokjes zijn!)

Leerkracht: Wacht even Tessa, jouw verhaal gaat iets te snel voor de rest van de klas. Luister even. Tessa heeft gezegd, ik zet hier een streep. En toen... Tessa.

Tessa: Toen heb ik deze lijn afgetekend (stippellijn). En toen heb ik hem hier ook afgemaakt (de andere kant). En toen heb ik het uitgerekend 3×3 is 9 en toen gedeeld door twee omdat je twee hokjes hebt.

(Soortgelijke fout maakte Tessa ook al bij werkblad 2: delen door 2 omdat er twee hokjes zijn, ze deelde toen door 3 omdat er 3 rijen waren.)

Leerkracht: Ja, maar mag dat hier, mag je hier delen door 2? Tessa heeft hem hier door tweeën gedeeld, wanneer mag je hem door 2 delen?

Leerlingen: Als het precies even groot was.

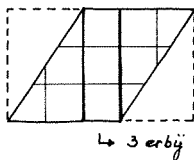
Leerkracht: En was het hier precies even groot?

Leerlingen: Nee.

Leerkracht: Nee, hè?

Tessa: Dan kun je er toch nog een streep tussen zetten?

Leerkracht: Ja, oké. Maar dan komen er weer 3 bij, zie je dat?



Tessa: Ja, maar dan doe je 2×3 is 6.

Leerkracht: Ja, stil even, 2×3 is 6 en daar dan de helft van is...

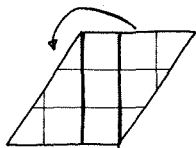
Tessa: 3.

Leerkracht: Dat doe je hier dus ook... (andere kant)

Tessa: En dat is 3 plus dit is 9. (de 3 middelsten)

Leerkracht: En 9×6 is 54. Jongens, de oplossing van Astrid.

Astrid naar het bord.



Astrid: Dit stuk is even groot als dat en als je dat daar aanplakt, dan heb je ook 9.

Leerkracht: Dat is heel goed. Ga zitten Astrid dit is keurig. Kijken we allemaal even. Astrid vertelt het volgende. Als ik dit zo heb en ik trek hier een lijn, dan zie ik dat dit stukje hier oppast. Als ik hem dus knip, past dit stuk daar op en wat heb ik dan? Een precies mooi vierkant van 9 hokjes, dat vermenigvuldig ik met f 6,- per hokje en dan kom ik op f 54,-. Daniël.

Daniël: Dat stuk is toch even groot als dat stuk? Als je dat door 2 deelt komt er 36 uit.

Leerkracht: Waar?

Daan: Nou, bij de stippellijn delen door 2.

Leerkracht: Maar dat mag helemaal niet Daan.

Daan: Waarom niet?

Leerkracht: Kijk, als je hem zo tekent (met twee stippellijnen) dan kun je hem alleen berekenen zoals Tessa aangaf. Dit is de helft van dat (de linkse driehoek), dit is de helft van dat (de rechtse driehoek) en dan moet je de middelste 3 er nog bij optellen. Want dan is de figuur niet precies door de helft. Ja?

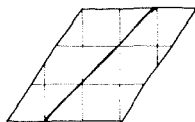
Daan zat nog steeds in zijn oude redenering, ook na de bespreking van de andere oplossingsmethoden. Hij bleef uitkomen op 72 – even groot als figuur 5 – maar vond nu dat hij dit door 2 moest delen. Waarom je nou precies door 2 moet delen en dus het onderscheiden van de gevallen wanneer dat wel moet en kan en wanneer niet is nog niet bij alle kinderen duidelijk.

Leerkracht: Wat was nu de moeilijkheid bij die laatste figuur? We zagen dus dat we tot nu toe, Ellis, driehoeken hadden die altijd de helft waren waardoor je zo kon zeggen: delen door 2 en dat is de helft. Maar zoals bij deze, kon je dat niet. Het enige wat je kon doen hier, was losknippen en hem hier overzetten. Of, zoals Tessa deed, die twee verschillende stukken berekenen en dan die 3 hokjes er nog bij optellen.

Jeroen: Ik weet wel hoe je hem door de helft kan delen.

Leerkracht: Jeroen hoe dan?

Jeroen:



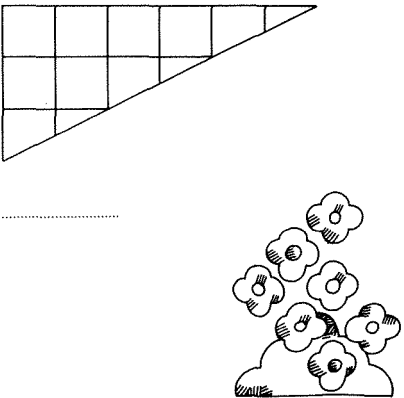
Jeroen deelt hem zo in tweeën.

De sekretaris en de penningmeester leggen hun meningsverschil voor aan de beheerder van de volkstuinvereniging in *groothuizen*. Ze vragen wat de huur van de volkstuintjes in *groothuizen* is. De beheerder schrijft terug dat er in *groothuizen* twee kompleksen volkstuintjes zijn: *oostkant* en *westkant*.

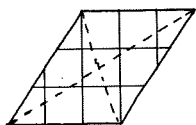
In *oostkant* kost dit tuintje zoveel:

27

► Wat kosten deze volkstuintjes in *oostkant*?
Vul in:



Leerkracht: Klopt dat wat Jeroen zegt jongens?
Jessica: (keihard) Jaaaa!
Leerkracht: Jessica wil jij even heel goed kijken voordat je iets zegt. We kunnen hooguit zo doen of zo:



Altijd naar de hoeken werken anders maak je het er niet makkelijker op.

Maar het was wel juist wat Jeroen zei.

Introductie – instructie – opdracht (werkblad 8)

Leerkracht: Wat is er aan de hand? De secretaris zegt tegen de penningmeester: 'Ben jij helemaal gek geworden. Als jij 6 gulden per hokje gaat vragen dan komt er helemaal niemand meer bij onze Volkstuinvereniging. Dan gaan ze naar een ander, want we zijn veel te duur.' 'Nee hoor,' zegt de penningmeester, 'het kan niet anders, we moeten het zo doen.'

En wat hebben ze gedaan? Ze zijn gaan kijken bij een andere Volkstuinvereniging, een stukje verderop. En dit plaatsje heet Groothuizen. En ze gingen naar de Volkstuinvereniging in Groothuizen en zeiden: 'Moeten jullie eens even luisteren, wij hebben zo'n volkstuin en de secretaris dacht f 5,- per hokje te vragen en de penningmeester dacht f 6,-. Wat vragen jullie eigenlijk?' 'Nou,' zei de secretaris van Groothuizen, 'wij hebben het volgende gedaan. Groothuizen, de naam zegt het al, het is een grote plaats en daarom hebben wij niet één Volkstuinvereniging, maar we hebben er twee. We hebben namelijk in het oosten van Groothuizen een Volkstuinvereniging en in het westen van Groothuizen. Ze zijn alle twee van ons, maar we hebben het in twee stukken gesplitst, anders moesten de mensen zo ver reizen, met de bus of met de trein.'

Nou, je kunt zien hoeveel een tuintje kost in oostkant. Je ziet, Marijke, in oostkant kost een tuintje zoveel. Als je hebt gezien hoeveel het kost kun je zien of het goedkoper of duurder is en kun je ook berekenen hoeveel de rest van de tuintjes kost. Als je dat berekend hebt, als je klaar bent, ga je door met je optel- en aftreksommen.

Werkblad 8 wordt uitgedeeld.

Leerkracht: Iedereen maakt het blad echt voor zichzelf. Daarna haal ik de bladen op. Kijk maar of je er uit komt. Als je er niet uitkomt is dat niet erg, want we gaan het de volgende keer bespreken, maar ik wil nu helemaal zien of je er alleen uitkomt. Wie klaar is zet zijn naam er op, geeft het blad aan mij en gaat in zijn nieuwe bibliotheekboek lezen.

Zelfstandig werken – samenwerken (werkblad 8)

In het groepje van Frank.

Bij de eerste figuur. Silvester zegt: 'Dat is 9.' Hij heeft op zijn blaadje gezet

$$\frac{27}{18} \\ 9$$

Frank zet ook 9 bij de eerste.

Jessica heeft bij de eerste f 54,-, bij de tweede ook.

Silvester zegt: 'Het is toch gemakkelijk.' Schrijft bij de tweede ook f 9,-, bij de derde f 18,-, bij de vierde ook f 18,- en de laatste gaat ook zonder moeite. Hij zei: 'Dit is dit (heeft de laatste figuur aangevuld tot een rechthoek en zegt dat die figuur dan hetzelfde is als het voorbeeldtuintje) en nou nog de helft.' Hij schreef op

$$\frac{20}{2} \\ 10$$

en

$$\frac{7}{2} \\ 3,5$$

'Dus die is 13,5.'

Frank keek wat rond. Hij weet het deze keer niet. De rollen lijken omgedraaid: Silvester weet het wel en pakt het heel slim aan (namelijk de figuren onderling vergelijken, de verhoudingen ten opzichte van elkaar zien en dan de prijs bepalen), en Frank weet het niet.

Marijke heeft bij de eerste figuur f 54,-, bij de tweede figuur ook f 54,-, bij de derde f 108,-, evenals Jessica.

Marco in een ander groepje, heeft bij de eerste figuur f 18,- en bij de tweede ook f 18,-. Hij kwam daar als volgt aan: het voorbeeld, dat is 3×6 (3 rijen van 6 hokjes), dat kost f 27,-. Eén rij is 6. Het zijn 3 rijen, dat is 3×6 is 18. Dus de eerste dat is 6, dus dat is 18; de tweede gaat precies zo.

Marco haalt het aantal hokjes en de prijs door elkaar.

LES 5

Introductie – instructie – opdracht (werkblad 8)

Leerkracht: Ik weet nog van de vorige keer dat de secretaris en de penningmeester wat ruzie hadden gekregen over de prijs van het verhuurde stukje grond. De prijzen die waren nogal hoog. En toen gingen ze vragen naar de tuintjes in Groothuizen. Daar hadden ze tuintjes aan de oostkant en aan de westkant. Nu hebben we allemaal een poging gedaan de tuintjes aan de oostkant te berekenen de vorige les. Nog

niet iedereen was daarmee klaar. Nu gaan we eerst nog even rekenen en daarna gaan we weer samen kijken wat we hebben gevonden.

Werkblad 8 werd weer uitgedeeld.

Leerkracht: Wie klaar is, maakt op de achterkant optel- en aftreksommen.

Zelfstandig werken – samenwerken (werkblad 8)

In het groepje van Frank.

Frank was er aan het eind van de vorige les nog niet erg uitgekomen. Nu begint hij te rekenen. Hij schrijft naast het voorbeeldtuintje:

$$\begin{array}{r} 2718 \\ \underline{18} \\ 9 \\ \underline{9} \quad 1\frac{1}{2} \\ 0 \end{array}$$

en gumt het daarna weer uit. Hij had bij het eerste tuintje f 21,- geschreven, maar gumde ook dat weer uit. Dan vertelt hij hardop: 'één hokje is anderhalve gulden, dus 6 hokjes is 9 gulden.' Hij ging de prijzen van de tuintjes nu achtereenvolgens berekenen aan de hand van één hokje (niet zoals Silvester door de figuren onderling te vergelijken en meetkundig te werk te gaan, zoals in de vorige les beschreven werd).

Bij het rondlopen door de klas bleek dat het groepje van Tessa foute antwoorden had. Het hele groepje had bij figuur 1 nog steeds f 18,- (zie ook Marco aan het eind van de vorige les), ook bij figuur 2 f 18,- en bij de derde en vierde figuur allebei f 36,-. Het is bij dit werkblad natuurlijk zo, dat als een verkeerde oplossingsmethode wordt toegepast, alle antwoorden fout zijn.

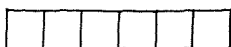
Marijke en Jessica bleven ook bij hun foute uitkomsten, ze hadden resp. f 54,-, f 54,-, f 108,- en f 162,-. Zij hadden dus het eerste antwoord als uitgangspunt genomen: als het eerste tuintje 54 gulden kost, dan kost ook de tweede figuur 54 gulden, want die is even groot. De derde figuur is dan 108 gulden, want die is twee keer zo groot. De vierde is evengroot als de derde, dus ook 108 gulden. En bij de allerlaatste hadden ze, uitgaande van het voorafgaande, de hele figuur aangevuld tot een rechthoek van 3 bij 6, dat is 18 hokjes. Dus 6 hokjes méér dan de vorige; 6 hokjes was f 54,-. $f 108,- + f 54,- = f 162,-$. Ze vergaten de prijs te halveren.

Dit werkblad leverde dus de nodige problemen op voor veel leerlingen. De oorzaak hiervan ligt waarschijnlijk in het feit dat hier met de breuken $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$ gewerkt moest worden.

Nabespreking (werkblad 8)

Leerkracht: Ik zie dat iedereen klaar is. We gaan allemaal weer even meekijken. In oostkant hadden we gevonden Daniël, dat zo'n tuintje 27 gulden kost. Uit hoeveel hokjes bestaat zo'n tuintje.

Patrick: 18.
Leerkracht: 18 hokjes kosten f 27,-. Wat hebben we toen gedaan. Steek op de vingers. Patrick.
Patrick: Nou, in de tafel van 3 staat 27.
Leerkracht: Ja, in de tafel van 3 zat 27. Maar hadden we 3 hokjes dan?
Patrick: Nee, 18 hokjes.
Leerkracht: Wat heb je toen gedaan met de tafel van 3 en die 18 hokjes? Wat heb je gedaan om dit te berekenen? Frank.
Frank: 27 gedeeld door 18.
Leerkracht: 27 gedeeld door 18. En wat komt daar dan uit?
Frank: Anderhalf.
Leerkracht: Maar hoe heb je dat gedaan? Van 27 eerst 18 afgetrokken. Komt er 9 uit. Wat kon je van die 9 zeggen?
Leerlingen: Dat het de helft is.
Leerkracht: Dat het de helft van 18 is. Dus 18 gaat één keer en dit gaat een half keer. Je kon ook zeggen: één keer 18 is 18 en twee keer 18 is 36. En waar ligt 27 nu? Als je kijkt naar het getal 18 en 36, waar ligt 27 dan? Marco.
Marco: In het midden.
Leerkracht: Als we dat hebben gevonden, kunnen we precies berekenen hoeveel een tuintje aan de oostkant kost.
 Het eerste tuintje. Hoeveel hokjes zijn dat. Patrick.



Patrick: 6.
Leerkracht: Wat kostte één hokje?
Patrick: 27 gulden.
Leerkracht: Nee, wat kostte één hokje. Wat hebben we nou net gezegd?
Patrick: Anderhalf.
Leerkracht: Anderhalf. Hoeveel is nou 6 keer $1\frac{1}{2}$?
Patrick: 18.
Leerkracht: 6 keer $1\frac{1}{2}$ is dat 18? Dan moet je even naar je eigen uitkomst kijken. Jij hebt de tafel van 3 gedaan. Toen bleek dat $6 \times 3 = 18$. Maar wat moet het zijn? Niet 6×3 , maar $6 \times \dots$?
Patrick: Anderhalf.
Leerkracht: $6 \times 1\frac{1}{2}$. Hoeveel is dat? Marco, hoeveel is dat?
Marco: $6 \times 1\frac{1}{2}$? ...
Leerkracht: Jeroen.
Jeroen: 9.
Leerkracht: $6 \times 1\frac{1}{2} = 9$. Wie heeft de volgende? Daan.
Daan: 9.
Leerkracht: Hoe kom je daar aan?
Daan: Die is even groot als de vorige.
Leerkracht: Ja, die kun je gewoon tellen, hè? Hoeveel hokjes zitten daar in?



Daan: 9.

Leerkracht: Hoeveel?

Daan: Eh, 6.

Leerkracht: 6 hokjes keer $1\frac{1}{2}$, dat is 9. Nou die lange rechthoek (het derde tuintje). Wie kan die vertellen? Tessa.



Tessa: 18.

Leerkracht: Hoe kom je daar bij?

Tessa: Nou, 9 is die ene. En dit is het dubbele.

Leerkracht: Wil je goed tellen?

Tessa: Nou, het is goed.

Leerkracht: O, jij hebt 18 als uitkomst. Ja, oké. Hoeveel hokjes heb jij?

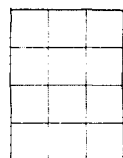
Tijdens de nabespreking kon Tessa dus de fout die ze tijdens het zelfstandig werken maakte herstellen.

Tessa: 12.

Leerkracht: 12 hokjes, dat is het dubbele van de vorige...

Tessa: Ja, en $9 + 9 = 18$.

Leerkracht: We hadden ook nog kunnen zeggen: $12 \times 1\frac{1}{2} = 18$. Nu gaan we naar die nog grotere. Jessica, hoeveel hokjes zijn dat?



Jessica: 12.

Leerkracht: Zijn dat 12 hokjes? Nou, wat kosten 12 hokjes?

Jessica: 18.

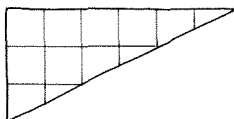
Ook Jessica heeft het nu door! Het effect van de nabespreking is hier heel duidelijk.

Leerkracht: 18 gulden. Nu de driehoek. Wat hebben we uit de driehoek?

Vingers van Jeroen, Daniël, Jessica en Tessa omhoog.

Leerkracht: Ik wil veel meer vingers zien, we hebben het allemaal berekend. Astrid, waarom zie ik geen vinger van jou. Die van Silvester had ik allang verwacht.

Silvester doet langzaam maar zeker zijn vinger omhoog.



Leerkracht: Sil, vertel het eens.

Silvester: $13\frac{1}{2}$.

Leerkracht: Hoe kom je er aan?

Silvester: Het is de helft van de bovenste.

Leerkracht: Het is de helft van de bovenste. Hoe kom je daar bij?

Silvester: ...

Leerkracht: Dat kun je misschien wel zo zien, maar wie kan het mij uitleggen ook?

Tessa: Nou, als je van die driehoek, daar maak je een vierkant van...

Leerkracht: Een vierkant of een...?

Tessa: Een rechthoek. Dat is 27. Dan doe je 3×6 , dat is 18. En dat was de bovenste (het aantal hokjes van de bovenste is 18).

Leerkracht: Dat was keer $1\frac{1}{2}$.

Tessa: Dat is 27 gedeeld door...

Leerkracht: Waar deel je nu nog door?

Marco: Door 2.

Leerkracht: Heel goed. 27 delen door 2 en dat is...

Marco: $13\frac{1}{2}$.

Leerkracht: Nog even herhalen wat Tessa heeft gezegd. Ik zag te weinig vingers, dus moet het blijkbaar toch worden uitgelegd. We hadden een driehoek. Als we hem afmaken krijgen we er een rechthoek van die 3 hokjes hoog is en 6 hokjes lang. Dus in totaal 18 hokjes. We kregen er dus hetzelfde uit als die daarboven en dat is 27 hokjes. Maar het is niet 27, want het is de helft. En de helft van 27 is $13\frac{1}{2}$. Daniël.

Daniël: Dat wou ik net zeggen.

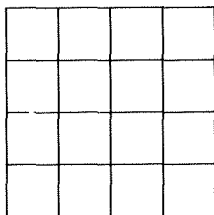
Introductie – instructie – opdracht (werkblad 9)

Leerkracht: We hebben dus de tuintjes in oostkant berekend, maar nu zijn de secretaris en de penningmeester erg benieuwd wat de tuintjes in westkant kosten. Ook over dit blad zeg ik niet zoveel. Kijk ernaar en probeer zelf de prijs te berekenen.

Leerlingen: Het is toch één Volkstuinvereniging?

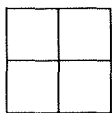
Leerkracht: Ja, maar oostkant en westkant zijn toch verschillend?

In *westkant* is de prijs voor dit volkstuintje:

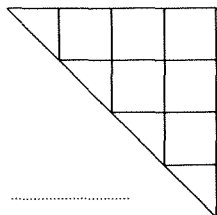


..... 24

► Wat kosten deze volkstuintjes in *westkant*?
Vul in:



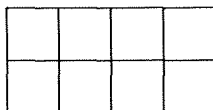
.....



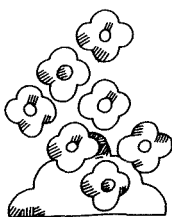
.....



.....



.....



Zelfstandig werken – samenwerken (werkblad 9)

Groepje van Frank.

Silvester begon met een streep door het midden van de voorbeeldfiguur te trekken en dan nog een streep er dwars door heen, in vieren gedeeld dus.

Frank begon direkt te rekenen:

$$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{16} \quad 1 \\ 8 \\ \underline{8} \quad 1/2 \\ 0 \end{array}$$

Silvester begon nu ook te rekenen:

$$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{4} \\ 20 \end{array}$$

Hij wilde waarschijnlijk berekenen hoeveel de prijs per vier hokjes was, omdat het eerste tuintje uit vier hokjes bestond. Silvester bekijkt de figuren systematisch meetkundig; hij gaat niet meer uit van de prijs van één hokje, maar bekijkt de onderlinge verhoudingen.

Frank schrijft nu de prijzen in: bij de eerste figuur f 6,- en bij de derde figuur f 3,-.

De anderen kijken. Frank zegt: 'Dit is 16 (het voorbeeld) en

$$1 \times 6 = 6$$

$$2 \times 6 = 12$$

$$4 \times 6 = 24.'$$

Vervolgens deelt hij de figuur ook in vieren en zet in elke kwart 6 neer (6 gulden).

6	6
6	6

Jessica schrijft de uitkomsten even over van Frank. 'O', zegt ze, 'de helft van 24 dat is 12. O, en dan weer delen.'

Silvester is aan de tweede begonnen; hij heeft de driehoek aangevuld tot een vierkant en schrijft er 12 bij. Frank heeft ook al 12 opgeschreven. Jessica schreef alles over.

Groepje Yvonne.

Alle kinderen hadden de goede uitkomsten. 'Hoe hebben jullie dat gedaan?' 'Nou, één hokje is $1\frac{1}{2}$ en dan keer 4 hokjes, enzovoort.' 'Maar hoe zijn jullie aan $1\frac{1}{2}$ gekomen?' 'Nou, $24 - 16 = 8$ en 8 is de helft van 16. Dus $1\frac{1}{2}$ per hokje.'

Groepje Jeroen.

Marion en Chantal hebben geprobeerd. Marion had het eerst met 3 geprobeerd: dus één hokje kost f 3,-, twee hokjes zes gulden, drie hokjes negen gulden, enz.

3			
6			
9			
12			

Dat kwam niet uit. Toen probeerde ze met $f\ 2,-$ per hokje. Daarna met $f\ 1,50$ en dat kwam uit.

Chantal wist nog dat de prijs per hokje bij het vorige werkblad $f\ 1,50$ was. Dat probeerde ze nu ook uit en dat klopte.

Nabespreking (werkblad 9)

Leerkracht: We hadden het in oostkant al berekend. Maar in westkant, wat kost daar een tuintje? Een tuintje van een aantal hokjes kost 24. Nu wil ik eerst even weten: hoeveel kost één hokje? Ellis.

Ellis: 16.

Leerkracht: 16 hokjes. Dus je kunt zeggen 16 hokjes...

Ellis: gedeeld door 4 is 4.

Leerkracht: Nee, nee. Dit is 24. Nu wil ik weten wie de eenheid heeft berekend en op welke manier.

Leerlingen: Ja, ja, ja.

Marco: Elk hokje kost $f\ 1,50$.

Leerkracht: Ja, maar ik wil ook weten hoe.

Marco: 24 min 16 dat is 8 en 8 is de helft van 16.

Leerkracht: Ja, dus als je zegt 24 gedeeld door 16 kan dat één keer. Dan houd ik 8 over.

Op het bord:

$$\begin{array}{r} 24 : 16 \\ \underline{16} \quad 1 \\ 8 \quad \frac{1}{2} \end{array}$$

Jessica roept de hele tijd nee, nee.

Leerkracht: Jessica, had Marco het fout?

Jessica: Nee, maar ik had het anders.

Leerkracht: O, maar dan roep je niet nee tegen de oplossing van Marco. Dan zeg je ik had het anders. Ja? En nou jij.

Jessica: Nou, ik heb gekeken naar dat hok van 24. En toen naar dat eerste hok, dat is 4 hokjes. Dat hokje heb ik erin geplakt en dat was een kwart van die hele en toen had ik er 6 uit.

Leerkracht: En toen had je er zes uit. Ja, maar jij hebt dus gezegd, als ik 4 hokjes heb, 4 hokjes kosten 6 gulden. Dat klopt. Maar als 4 hokjes 6 kosten, jij hebt het dus zo gedaan (op het bord) in vieren gedeeld en dan 6, 6, 6, 6. Vier hokjes kosten 6, wat kost dan één hokje?

6	
6	
6	
6	

Leerlingen: $1\frac{1}{2}$.

De leerkracht op het bord:

$$\begin{array}{r} 6 : 4 \\ \underline{4 \ 1} \\ 2 \ \frac{1}{2} \end{array}$$

Leerkracht: Komt ook $1\frac{1}{2}$ uit.

Leerkracht: Nu kunnen we vergelijken. Is er een verschil in prijs tussen oost en westkant? Yvon.

Yvonne: Nee.

Leerkracht: Daar gaan we verder niet op in, waarom dat zo is. Want dat komt zo direkt. Wat kosten deze tuintjes dan in westkant? Nou, het eerste tuintje bestaat uit hoeveel hokjes, Ellis.

Ellis: 4.

Leerkracht: 4 hokjes. Wat kun je dan van de prijs zeggen?

Ellis: Hoe bedoelt u?

Leerkracht: Nou, als ik zo'n tuintje koop, vier van die hokjes, hoeveel moet ik er dan voor betalen?

Ellis: 6 gulden.

Leerkracht: 6 gulden, keurig Ellis.

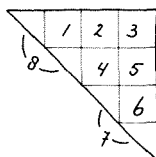
Nou die grote driehoek. Hoeveel is die? Astrid.

Astrid: 12 gulden.

Leerkracht: Hoe kom je daar bij?

Astrid: Nou, die eerste twee dat is 3 gulden. 3 en 3 is 6, dat zijn 4 hokjes en nog 3 zijn er 9.

Leerkracht: Jij hebt dus, als ik goed naar je blaadje kijk, heb jij de hokjes er in geteld. 6 hele hokjes zitten erin en 4 halve, dat is samen 8 hokjes.



Leerkracht: Wie heeft het anders gedaan?

Jeroen: Ik heb dat ding aangetekend.

Leerkracht: Jij hebt hem afgemaakt. En toen kwam je op hoeveel hokjes uit?

Jeroen: 24.

Leerkracht: Ja.

Jeroen: En de helft van 24 is 12.

Leerkracht: Klopt dat?

Leerlingen: Ja, ja.

Leerkracht: Was de hele vierhoek, was die wel 24? Hoe lang was die Jessica?

Jessica: 4 bij 4.

Leerkracht: Ja, 4 bij 4. Hoeveel hokjes kunnen daar dan in?

Ellis: 16.

Leerkracht: Dus het zijn er geen 12, maar het zijn er...

Jeroen: 8.

Leerlingen: Hè?

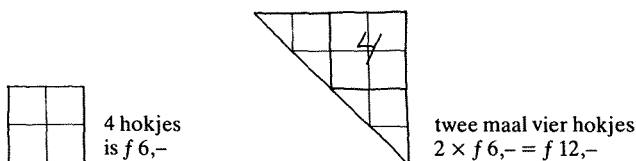
Tessa komt in opstand: 4 bij 4, dat is 16 en dat is 24 gulden, dus dat is 12.

Leerkracht: Ja, maar jij praat over de prijs en wij hebben het nog over het aantal hokjes. Dat wordt dus 8 hokjes keer anderhalve gulden. Dat is 8 keer een gulden is 8 gulden en 8 keer een halve gulden is 4 gulden. Samen 12 gulden. Je kunt dus zeggen de helft van de eerste (het voorbeeld), Tessa, maar je moet niet het verschil tussen het aantal hokjes en de prijs door elkaar halen. Silvester.

Silvester: Er zit één heel hokje in en die andere twee heb ik tegen elkaar gedaan. 6 en 6 is 12.

Leerkracht: Keurig.

Zou de leerkracht hebben gezien wat Silvester bedoelde? Silvester ging namelijk uit van de eerste figuur van vier hokjes. Daarvan paste er één in z'n geheel in de driehoek; de resterende kleine driehoekjes paste Silvester aan elkaar, wat weer een vierkantje met vier hokjes gaf. Een vierkantje van 4 hokjes kost f 6,-; dus f 6,- en f 6,- is f 12,-:



Silvester heeft vaak een eigen manier van kijken, zoals al eerder is geconstateerd. Hij vergelijkt de figuren consequent onderling met elkaar; hij grijpt nauwelijks terug naar de prijs van één hokje.

Leerkracht: En nu vraag ik de volgende. Wat kost die? Astrid.



Astrid: 3 gulden.

Leerkracht: 3 gulden. Twee keer anderhalf is drie. Dat is heel makkelijk. En de laatste Marco. Wat kost die?



Marco: 12 gulden.

Leerkracht: 12 gulden. Hoeveel hokjes zijn het?

Marco: Eh, dat zijn er 8.

Leerkracht: Keer 1½...

Marco: Dat is 12.

Leerkracht: Acht keer anderhalf dat is 12. Wij weten nu wat een tuintje in oostkant kost en we weten wat een tuintje in westkant kost. En we weten ook nog wat de vorige tuintjes kostten.

Ellis: Dat weet ik niet meer.

Leerkracht: Dat kun je nakijken in je bladen. Maar nu hebben we tot slot een vraag. Nu men wist dat ze in Groothuizen veel goedkopere volkstuintjes kunnen maken, hebben de secretaris en de penningmeester ook gezien dat het bij hun kan. Ze gaan dus uitzoeken hoe ze een nieuwe prijs kunnen berekenen. De secretaris en de penningmeester hadden, toen ze gehoord hadden hoe het in Groothuizen ging, hadden ze ook geen ruzie meer. Ze zeiden gewoon: 'Hé, ik heb daar niet aan gedacht en ik heb daar niet aan gedacht. Als we het nou zus of zo doen dan komen we er uit.'

Leerlingen: Zus en zo?

Leerkracht: Waarom zeg ik zus en zo?

Leerlingen: Omdat u niet voor wilt zeggen.

Leerkracht: Dat klopt.

Laatste opdracht (werkblad 10)

Leerkracht: Wat staat er op het volgende blad? 'Alles is weer goed gekomen tussen de secretaris en de penningmeester. Ze hebben er alleen diep over nagedacht hoe het toch kan, dat alles in Groothuizen veel goedkoper is.'

Hoe zou dat kunnen? Geen vingers. Dat ga je voor jezelf bedenken. En dan heb je hier een groot aantal regels (op werkblad 10) waar je zelf, je eigen antwoord op kan schrijven.

De tweede vraag: 'Welk van de twee volkstuincomplexen is het duurste?' Die hadden we al berekend. En: 'Hoe weet je dat?' wordt er dan gevraagd. Als je zegt westkant is duurder, waarom dan. Als je zegt dat ze even duur zijn, hoe komt dan dan? Als je alles hebt, krijg je van mij een paperclip en dan ga je blad 1 t/m 10 ordenen. En dat schrijven doen we allemaal voor ons zelf, hè?

Zelfstandig werken – samenwerken (werkblad 10)

De meeste kinderen kijken wat in het rond. Silvester begint direct te schrijven. Jessica zegt gelijk: 'Dat weet ik niet.' Frank zit ook wat te kijken.

Na één minuut zegt de leerkracht: Als we nou niet weten waarom alles in Groothuizen veel goedkoper is, dan zou ik het volgende willen vragen. Kijk eens allemaal naar Bussum. Worden er in Bussum nog veel huizen gebouwd?

Leerlingen: Nee, nee.

Alles is weer goed gekomen tussen de sekretaris en de penningmeester.

Ze hebben er alleen diep over nagedacht hoe het toch kan dat alles in *groothuizen* veel goedkoper is.

► Weet jij hoe dat komt?

[illegible]

► Welk van de twee volkstuinkomplexen is het duurste: *oostkant* of *westkant*?

Hoe weet je dat?

A black and white line drawing of a cloud with several flowers growing out of it. The cloud is at the bottom right of the page, and the flowers are of various sizes and shapes, some with faces.

Leerkracht: Waarom zouden er, ja er worden nog een paar huizen gebouwd, maar worden er nog veel huizen gebouwd?

Leerlingen: Nee.

Leerkracht: Waarom zouden er niet zo veel huizen meer worden gebouwd?

Yvonne: Er is geen plaats meer.

Leerkracht: Nee, er is geen plaats meer. Als iemand nog een stukje grond zou willen krijgen om een huis te kopen, zou die dan veel of weinig moeten betalen?

Leerlingen: Veel.

Leerkracht: Waarom?

Leerlingen: Daarom, omdat ze dan grond moeten kopen bij de gemeente om een huis te kunnen bouwen.

Leerkracht: Ja, maar waarom zou ik, als ik een stukje grond bij de gemeente wil kopen, waarom zou ik daar dan veel voor moeten betalen?

Robert Jan: Omdat ze ook nog wat grond over willen hebben.

Leerkracht: Ja, en als ik nou naar de polder zou gaan, naar Almere, zou daar nou de grond goedkoper zijn of duurder dan hier?

Leerlingen: Goedkoper.

Leerkracht: Waarom goedkoper?

Astrid: Omdat ze daar veel meer grond hebben.

Leerkracht: Ze hebben daar veel meer ruimte. Nou, misschien dat je nu iets meer weet als je het verhaal van de Volkstuintjes gaat bekijken. Je zou ook naar andere dingen kunnen kijken.

Leerlingen: Ik weet niet hoe ik dat op moet schrijven.

Leerkracht: Waar zou je liever willen wonen. Waarom willen er zoveel mensen in de polder wonen?

Tessa: Omdat het daar groter is en goedkoper.

Leerkracht: Waarom zouden zoveel mensen graag hier willen wonen. Vooral mensen uit Amsterdam enzovoort.

Yvonne: Omdat het daar zo druk is.

Leerkracht: En wat betekent dat nou, als veel mensen hier willen wonen, wat betekent het nou, als je hier een huis wil kopen?

Leerlingen: Wordt het hier druk, wordt het hier duurder.

Leerkracht: Dan zijn de huizen duurder. En als je nou in Groningen koopt, waar bijna niemand wil wonen?

Leerlingen: Goedkoper.

Leerkracht: Nou, denk daar nou eens bij na als je je werkblad in gaat vullen. Wie klaar is steekt zijn vinger op en krijgt een paperclip.

Jessica, Ellis, Patrick en Astrid schrijven niet, de rest van de klas is over het papier gebogen.

De leerkracht legt Ellis uit: Waar ze veel hebben is het goedkoop en waar ze weinig hebben is het duur.

Ester riep me. Ze had staan: 'Het is goedkoper omdat de grond klein is.' Ik leg haar nog eens uit over het verschil tussen Bussum en Almere, met de nadruk op veel grond – goedkoper, weinig grond – duurder.

De kinderen vonden het moeilijk. Hieronder volgen de antwoordteksten van enkele kinderen.

‘Alles is weer goed gekomen tussen de secretaris en de penningmeester. Ze hebben er alleen diep over nagedacht hoe het toch kan dat alles in Groothuizen veel goedkoper is.

► Weet jij hoe dat komt?’

Frank: In Groothuizen is alles veel goedkoper om dat er veel meer mensen wonen die een volkstuinje willen hebben.

Marco: In Groothuizen wonen veel meer mensen dan in Kleinhuizen.

Astrid: Dit komt omdat Groothuizen veel meer ruimte heeft en die anderen heel weinig en ze hebben alles met tuintjes.

Silvester: Groothuizen is erg groot dus dan kunnen ze het goedkoper doen.

Daniël: Ja, want het is groot en ze hebben 2 bedrijven daarom kost het goedkoper.

Ester: (het is goedkoper omdat hier de grond kleiner is) het is goedkoper hier omdat er meer grond is.

Ellis: Het is goedkoop omdat het veel grond is.

► ‘Welk van de twee volkstuincomplexen is het duurste: oostkant of westkant? Hoe weet je dat?’

Frank: Ze zijn even groot. Dat heb ik uitgerekend.

Marco: Ze zijn even duur. Want als Westkant duurder was gingen alle mensen naar Oostkant.

Astrid: Ze zijn even duur want dat heb ik uitgerekend. ze waren allebij 1½.

Silvester: Westkant krijg je een stuk van 16 hokjes voor 24. En bij oostkant krijg je een stuk van 18 hokjes 27. Dat is 2 hokjes verschil. Dus westkant is duurder dan oostkant.

Silvester had niet gewerkt met de prijs per hokje en komt nu in de moeilijkheden.

Daniël: Allebij kosten ze even goedkoop.

Ester: Ze zijn even duur. Omdat het in dezelfde plaats ligt.

Ellis: Het is even duur omdat het in de zelfde plaats ligt.

VII TOETSRESULTATEN

Zes weken nadat het Volkstuinjes-practicum afliep is bij de leerlingen een diagnostische toets afgenomen. Door middel van de toets kunnen we nagaan wat de kinderen hebben onthouden van het practicum, welke oplossingsmethoden worden toegepast en welke fouten gemaakt worden.

Een bijzonderheid aan de toets is, dat getracht is een kwalitatieve diagnose mogelijk te maken. Dit werd gedaan door de kinderen in de instructie voorafgaande aan de toets te vragen het 'sometje' erbij te schrijven en in de toets is onder de opdrachten het woord 'want: ...' opgenomen.

De instructie bij de toets luidde als volgt:

'Een tijdje geleden hebben jullie allemaal tuintjes berekend voor de Volkstuinvereniging, weet je nog wel? Vandaag gaan we nog één keer met de volkstuinjes werken, want de penningmeester heeft gevraagd of jullie nog een paar berekeningen voor hem willen maken. En de penningmeester heeft erbij gezegd:

'Vraag of de kinderen zoveel mogelijk alléén willen werken, dan kan ik alle berekeningen vergelijken met de mijne. En om nou te zien hóé jullie het precies berekend hebben wil de penningmeester graag dat jullie het sommetje erbij schrijven dat je hebt gebruikt om de uitkomst te krijgen.

En de laatste vraag van de penningmeester was of jullie met een pén en niet met een potlood willen schrijven, want dan kan hij het beter lezen. Het geeft niet als je doorhalingen hebt.

Dus: allemaal voor jezelf werken
het sommetje erbij schrijven
met pen of met viltstift schrijven.'

De leerlingen kregen een uur de tijd om de toets te maken. Leerlingen die snel klaar waren kregen een extra blad met opgaven ('extra's'). Deze extra's zijn niet geanalyseerd.

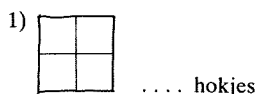
De toets is in zijn geheel opgenomen in bijlage III. We bespreken nu achtereenvolgens de opbouw van de toets en de kwantitatieve en kwalitatieve resultaten ervan.

1 DE OPBOUW VAN DE TOETS

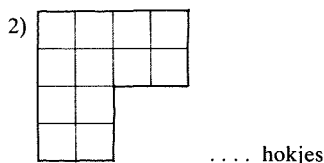
Opgave I Het bepalen van de grootte (oppervlakte) van geometrische figuren met roosterstructuur.

De opdracht luidde:

- Hoe groot zijn deze tuintjes?

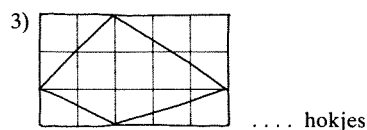


Een eenvoudige opdracht als 'warming-up'.



Ook deze opdracht was eenvoudig. De oplossing kan langs verschillende wegen gevonden worden (vergelijk ook de CITO-toetsopgave in hoofdstuk 1):

- 1 inschrijven van getallen in de hokjes;
- 2 afstrepen van getelde hokjes;
- 3 per rij tellen;
- 4 de figuur opsplitsen in een rechthoek en een vierkant;
- 5 deze figuur is drie keer zo groot als de eerste (3×4).



Deze opdracht is moeilijker. In opgave III komt deze figuur terug (zie het laatste item van opgave III), maar dan alleen met een roosterstructuur binnen de figuur. De vraag is of de kinderen bij het oplossen van nevenstaande figuur sneller de rechthoekstrategie gebruiken (omdat de structuur van de rechthoek eigenlijk al is gegeven) dan bij de figuur met de ingebedde roosterstructuur van opgave III.

Opgave II Het vermenigvuldigen met een half.

De opdracht luidde:

- Vul in:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 4) 1 meter is cm | 6) 1 hokje kost 6 gulden |
| | $2\frac{1}{2}$ hokje kost gulden |
| 5) $4\frac{1}{2}$ meter is cm | 7) $6\frac{1}{2}$ uur is minuten |

Tijdens de lessen bleek dat het vermenigvuldigen met een half voor veel kinderen

problemen opleverde: $4\frac{1}{2} \times f 5,-$ werd $f 20,50$. De leerlingen namen de helft van één eenheid (1 gulden) in plaats van de helft van het totaal aantal eenheden (5 gulden).

Bij Wiskobas wordt al vrij vroeg met halven begonnen. Tijdens het practicum moesten de leerlingen numeriek met een half werken ($4\frac{1}{2} \times 5$). Wat leerlingen eerder beheersen is het nemen van de helft. Wanneer leerlingen nu $\frac{1}{2} \times 5$ moeten uitrekenen, dan hoeft dit nog niet te suggereren dat dit hetzelfde is als 'neem de helft van 5'.

De overeenkomst tussen de aanschouwelijke context (de helft van...) en de numerieke benadering ($\frac{1}{2} \times 5$) is nog niet aan de orde geweest en is niet à priori duidelijk.

Bij item 6 staat: Als 1 hokje $f 6,-$ kost, hoeveel kost dan $2\frac{1}{2}$ hokje? Je moet dan doen 2 keer 6 en de helft van 6. Dus $2\frac{1}{2} \times 6$.

De context is hier echter niet natuurlijk. Je zegt ook niet '3 $\frac{1}{2}$ keer een liter melk' bijvoorbeeld. Te prefereren is een context waar de vermenigvuldiging op een natuurlijke manier inpast. Je zegt bijvoorbeeld wèl: 6 $\frac{1}{2}$ keer de klok rond. Hoeveel minuten is dat? $6\frac{1}{2} \times 60$.

Als men zou uitgaan van zo'n context, kan de operatie op een natuurlijke manier worden toegepast. Het laatste item, item 7, appelleert aan zo'n context (het item had misschien beter letterlijk, zoals boven genoemd, gesteld kunnen worden).

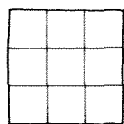
Item 5 kan ook in een natuurlijke context geplaatst worden: $4\frac{1}{2}$ keer een meter stof (touw) van een rol afnemen. Hoeveel cm stof (touw) heb je dan?

Vaak stapt men te snel van de context af.

Opgave III Het bepalen van de prijs van geometrische figuren met ingebede roosterstructuur, uitgaande van de constante verhouding tussen oppervlakte en prijs.

De opdracht luidde:

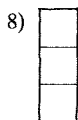
Een tuintje van dit type kost zoveel:



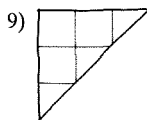
36 gulden

► Wat kosten deze volkstuintjes?

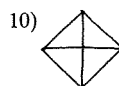
Vul in:



.... gulden



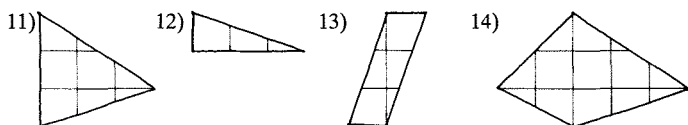
.... gulden



.... hokjes

.... gulden

Want:



a hokjes a hokjes a hokjes a hokjes
b gulden b gulden b gulden b gulden

Want:

Bij deze opdrachten moesten de leerlingen hun oplossingsmethode opschrijven onder de uitkomst ('Want: ...').

Bij item 8 en 9 is de vraag naar het aantal hokjes er niet bijgezet in de hoop dat de leerlingen op een meetkundig spoor zouden worden gezet; het berekenen van de prijs per hokje is dan niet nodig.

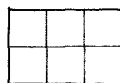
De vraag naar het aantal hokjes is er vanaf item 10 wel bij geplaatst omdat de vergelijking met het voorbeeldfiguur veel moeilijker is. Bovendien kan nu zichtbaar worden waardoor foute uitkomsten tot stand kwamen:

- door het foutief bepalen van het aantal hokjes;
- door een fout bij het berekenen van de prijs per hokje (bijv.: de prijs van 1 hokje is f 2,- in plaats van f 4,-);
- fout bij het vermenigvuldigen van het aantal hokjes en de prijs per hokje.

Opgave IV Het reflecteren over de verhouding tussen oppervlakte en prijs; het begrip 'duur'.

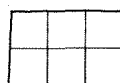
De opdracht luidde:

15) Op *zandgrond* kost zo'n tuintje



12 gulden

Op *veengrond* kost zo'n tuintje



12 gulden

Op *kleigrond* kost zo'n tuintje



18 gulden

► Waar is de grond het duurste?

► Weet je hoe dat komt?

.....
.....
.....

De volgende opdracht luidde:

► Welk tuintje is het duurste?

16)

f 12,—

f 12,—

f 18,—

1. zandgrond

2. veen

3. klei

Jan vindt dat 2 het duurst is. Waarom zou Jan dat vinden?
.....
.....

Piet vindt dat 3 het duurst is. Waarom zou Piet dat vinden?
.....
.....

Lies vindt dat 1 en 2 even duur zijn. Waarom zou ze dat vinden?
.....
.....

In deze opdracht wordt een verbinding gelegd tussen aardrijkskunde en wis-
kunde.
De opdrachten borduren verder op de vragen die gesteld werden op werkblad 10
(zie blz. 109).
Niet alleen de kwantiteit, maar ook de kwaliteit (i.c. de gebruikswaarde, het ren-
dement) speelt een rol bij het begrip duur.

2 TOETSRESULTATEN: KWANTITATIEF EN KWALITATIEF

Allereerst een overzicht van de kwantitatieve resultaten van de hele klas. Deze
resultaten betreffen de items behorende bij de eerste drie opgaven.
Opgave IV wordt apart behandeld.

Tabel 6 Aantal leerlingen (n = 19) met foute uitkomsten op de toets; per item.

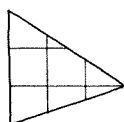
Item:	Opgave I			Opgave II			Opgave III				
	1	2	2	4	5	6	7	8	9	10a	10b
Aantal leerlingen met foute uitkomst	–	–	13	3	7	9	7	–	10	1	8

Item:	Vervolg opgave III							
	11a	11b	12a	12b	13a	13b	14a	14b
Aantal leerlingen met foute uitkomst	8	11	8	14	–	2	7	14

Uit de tabel blijkt dat bij item 12b en 14b driekwart van de leerlingen foute uitkomsten hadden. Ook bij item 3 en 11b zijn veel fouten gemaakt. Opgemerkt moet worden dat bij de b-items een enigszins vertekend beeld ontstaat. De a- en b-items zijn namelijk afhankelijk van elkaar wanneer de leerlingen voor het berekenen van de prijs (b-item) uitgaan van het aantal hokjes (a-item). Als leerlingen de prijs bepalen door onderlinge vergelijking van figuren treedt dit probleem niet op.

Een voorbeeld: item 11a en 11b.

Bij item 11a zijn er acht leerlingen die het aantal hokjes fout hebben.



a hokjes

b gulden

Vijf leerlingen hebben daardoor ook een foute uitkomst bij de prijs. Marion, Chantal en Robert-Jan hadden echter de prijs wel goed bij een fout aantal hokjes. Mogelijk zagen zij de overeenkomst met item 9 en namen de prijs over zonder te controleren of het aantal hokjes klopte.

De overige leerlingen die item 11b fout hadden, hadden wel het aantal hokjes goed, maar de prijs fout berekend.

In het volgende wordt per item ingegaan op de oplossingsmethoden (voor zover mogelijk) en de aard van de fouten.

Opgave I

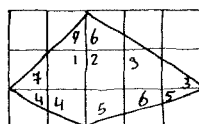
Item 3 (door dertien leerlingen fout gemaakt; door zes leerlingen goed).

Vier leerlingen kregen als uitkomst 7; eveneens vier leerlingen kwamen op $6\frac{1}{2}$.

Twee leerlingen gaven het aantal hokjes van de rechthoek als uitkomst (15 hokjes) en drie leerlingen gaven als antwoord respectievelijk $6\frac{3}{4}$, 6, '6 hokjes en 1 over' als antwoord.

Alle leerlingen die op foute uitkomsten kwamen, hebben geprobeerd de onvolledige hokjes binnen de figuur aan elkaar te passen (behalve de twee leerlingen die het aantal hokjes van de rechthoek aangaven).

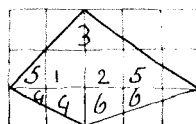
Yvonne deed het bijvoorbeeld zo:



Yvonne

7 hokjes

en Vivienne zo:

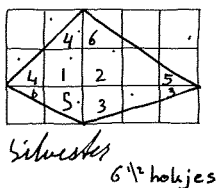


Vivienne

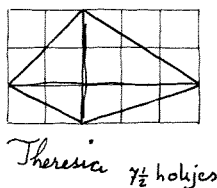
$6\frac{1}{2}$ hokjes

Silvester kwam ook op een foute uitkomst. Hij probeerde de onvolledige hokjes aan elkaar te passen, maar ook zijn er hulplijnen zichtbaar. Door de hulplijnen wordt de figuur opgedeeld in vier driehoeken die gemakkelijk met behulp van de rechthoekstrategie bepaald kunnen worden (zie ook blz. 33). Silvester heeft dit idee echter niet doorgezet.

Item 3 van Silvester.



Bij leerlingen die goede uitkomsten hadden, waren meestal geen cijfers in de figuur geschreven. Zij kwamen waarschijnlijk tot een goede oplossing door het aantal hokjes van de grote rechthoek te halveren of, zoals Tessa, door de figuur op te splitsen in vier rechthoeken en vervolgens te halveren (zie ook Silvester, hierboven).



Alleen Daniël kwam tot de juiste uitkomst door de onvolledige hokjes bij elkaar te voegen.

Opgave II

Item 4 (door drie leerlingen fout gemaakt, door zestien leerlingen goed).

De drie leerlingen die het fout hadden, dachten dat 1 meter 10 cm was.

Item 5 (door zeven leerlingen fout gemaakt, door twaalf leerlingen goed).

Twee leerlingen die bij item 4 ervan uitgingen dat 1 meter 10 cm is, hadden bij item 5 ($4\frac{1}{2}$ m is ...cm) als uitkomst 45 cm.

Marijke, die bij item 4 ook 10 cm had ingevuld, kwam bij item 5 op 40, 50 cm. Zij maakte dus de veel voorkomende fout bij het vermenigvuldigen met een half.

1 meter is 100 cm
 $4\frac{1}{2}$ meter is 4050 cm

Chantal had item 4 goed, maar had bij item 5 als uitkomst 45 cm. Zij maakte dus ook een fout in de bewerking.

1 meter is 100 cm
 $4\frac{1}{2}$ meter is 45 cm

Ook Patrick had een fout gemaakt. Hij kwam op 4050 cm (item 4 was goed).
Tenslotte kwamen twee leerlingen op resp. 500 en 650 cm.

Item 6 (door negen leerlingen fout gemaakt, door tien leerlingen goed).
Zeven leerlingen kregen uit de bewerking $2\frac{1}{2} \times f\ 6,-$ een bedrag van f 12,50
(2 keer 6 gulden en de helft van 1 gulden).
Eén leerling kwam op f 12,60 en één leerling op f 13,- (2 keer 6 gulden en de helft van 2?).

Item 7 (door zeven leerlingen fout gemaakt, door twaalf leerlingen goed).
Drie leerlingen kregen als uitkomst 360 minuten: het halve uur werd er niet bij opgeteld.

Monique $6\frac{1}{2}$ uur is 360 minuten

$$\begin{array}{r} 60 \\ 60 \\ 120 \\ 120 \\ \hline 240 \\ 120 \\ \hline 360 \end{array}$$

Een leerling kwam op 410 minuten (360 minuten en de helft van 100?).
Een andere leerling kwam op 90 minuten ($1\frac{1}{2}$ keer 1 uur?); tenslotte kwamen
2 leerlingen op resp. 37 en 57 minuten.
Yvonne en Chantal hadden het goed gedaan:

$$\begin{array}{r} 60 \times 6 = \\ \begin{array}{r} 60 \\ 60 \\ 360 \\ + 30 \\ \hline 390 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{r} 6\frac{1}{2} \text{ uur is } 390 \text{ minuten} \\ \begin{array}{r} 60 \\ 60 \\ 60 \\ 60 \\ 60 \\ 60 \\ \hline 360 \\ 30 \\ \hline 390 \end{array} \end{array}$$

De operatie van het vermenigvuldigen werd, zoals u ziet, op uiteenlopende manieren toegepast.

Conclusies:

- 1 Enkele leerlingen weten niet dat 1 meter 100 cm is.
- 2 Een vijfde van de leerlingen maakte fouten bij het omzetten van $4\frac{1}{2}$ meter in centimeters ervan uitgaande dat 1 meter 100 cm is.
- 3 Ruim een derde van de leerlingen komt bij het bepalen van $2\frac{1}{2} \times f\ 6,-$ op de uitkomst f 12,50.
- 4 Ruim een derde van de leerlingen heeft moeite met het bepalen van het aantal minuten voor $6\frac{1}{2}$ uur.

Opgave III

Item 8 (door geen enkele leerling fout gemaakt).

Astrid loste dit vraagstuk meetkundig op (zie ook blz. 80). Ze vergeleek de oppervlakte van de figuur van het item met het voorbeeld (9 hokjes is 36 gulden) en leidde de prijs rechtstreeks af: de oppervlakte van de figuur van item 8 is een derde van de oppervlakte van het voorbeeld, dus de prijs is ook een derde.



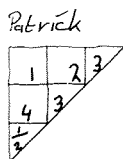
./.2. gulden
Want: $36 : 3 = 12$

Het voorbeeld van Astrid geeft één oplossingsmethode aan. Nog twee andere leerlingen deden het op deze manier. Daniël, Silvester en Frank hadden erbij gezet: $3 \times 12 = 36$. Zes leerlingen schreven erbij $3 \times 4 = 12$; zij gingen dus uit van de prijs per hokje. Viviënne en Ellis schreven 'ik heb de hokjes geteld'.

Item 9 (door tien leerlingen fout gemaakt; door negen leerlingen goed).

Dit item werd door relatief veel leerlingen fout gemaakt. De figuur was tijdens de lessen meerdere malen aan de orde geweest en bovendien is de overeenkomst (de helft) met het voorbeeld duidelijk zichtbaar.

Vier leerlingen (waaronder Patrick) kwamen op f 16,50 ($4 \times 4 = 16$ en de helft van 1 gulden).



Twee leerlingen kwamen op f 9,50; zij schreven de oplossingsmethode er niet bij. Astrid had f 9,- als uitkomst en had erbij geschreven $36 : 4$ (dus de totale prijs van het voorbeeld gedeeld door de prijs per hokje).

Eén leerling had het aantal hokjes ($4\frac{1}{2}$) gegeven en niet de prijs.

Twee leerlingen tenslotte, hadden 18,50 berekend.

Bij leerlingen die tot juiste uitkomsten kwamen, werden de volgende oplossingsmethoden zichtbaar:

16,50 gulden

want
 $4 \times 4 = 16$

René:

.18. gulden

$4\frac{1}{2} \times 4 =$

Silvester:

.1.8. gulden

want de helft
van 36 is 18

Robert-Jan:

18 gulden

$$2 \times 8 = 16$$

Jerom:

18 gulden

$$4 \times 4 = 16 + 4 \times \frac{1}{2} = 2 = 18$$

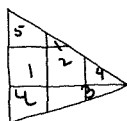
Item 10 (door acht leerlingen fout gemaakt, door elf leerlingen goed).

Slechts één leerling had het aantal hokjes fout (4 hokjes) en geen prijs ingevuld. Robert-Jan had als uitkomst bij de prijs: 9 gulden. Welke redenering hij hierbij volgde wordt niet helemaal duidelijk. Drie leerlingen hadden als prijs 4 gulden, terwijl ze wel het aantal hokjes goed hadden. De twee andere leerlingen met foute uitkomsten kregen er respectievelijk uit: 6 gulden en 18 gulden. Zij schreven er geen oplossingsmethode bij.

Item 11a (door acht leerlingen fout gemaakt, door elf leerlingen goed).

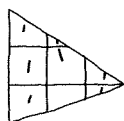
Vrijwel alle leerlingen losten dit item op door binnen de figuur de hokjes te en de cijfers erin te zetten. De leerlingen met foute uitkomsten maakten vergissingen bij het samenvoegen van onvolledige hokjes (zie Ellis hieronder):

Ellis:



5½ hokjes

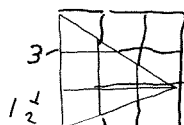
Daniël telde de hokjes door afstrepen (mentaal):



DANIEL

4½ hokjes

René kwam door middel van de rechthoekstrategie tot de oplossing:



7½ hokjes

Item 11b (door elf leerlingen fout gemaakt, door acht leerlingen goed).

Zoals al eerder naar voren kwam waren er drie leerlingen die ondanks een fout aantal hokjes tot de juiste prijs kwamen. Vijf van de elf leerlingen hadden de

prijs fout door uit te gaan van een verkeerd aantal hokjes. Esther en Jeanette kwamen op f 9,50. Zij deelden de prijs van de voorbeeldfiguur door het aantal hokjes (zie hiernaast). Ze sloegen eigenlijk een stap over in het oplossingsproces: het vergelijken van de oppervlakten met elkaar (eerst $9 : 4\frac{1}{2} = 2$ en vervolgens $36 : 2 = 18$).

9,50 gulden

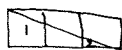
Want: $36 : 4\frac{1}{2} = 9,50$

Monique maakte de klassieke fout $4\frac{1}{2} \times 4 = f 16,50$. Astrid bleek telkens uit te gaan van de prijs van f 2,- per hokje en had daardoor bij alle items de prijs fout. Ze kwam nu op 9 gulden uit. Frank tenslotte had als uitkomst 16 gulden en had dus vergeten de prijs van het halve hokje erbij te tellen.

Item 12a (door acht leerlingen fout gemaakt, door elf leerlingen goed).

Veel leerlingen hadden het aantal hokjes nu mentaal bepaald; er waren geen cijfers in de figuur geschreven, noch werden er hulplijnen getrokken. Monique heeft zichtbaar een poging gedaan om de rechthoekstrategie toe te passen. De uitkomst een half verwijst waarschijnlijk naar de bedoeling de helft te nemen. Bij de prijs heeft Monique f 1,50 geschreven.

Monique



... $\frac{1}{2}$ hokjes

Andere foutieve antwoorden waren: 2 hokjes ($5 \times$), $1\frac{3}{4}$ en $2\frac{1}{2}$ hokje.

Astrid had de hokjes juist bij elkaar gepast:

Astrid:



$1\frac{1}{2}$

$1\frac{1}{2}$ hokjes

Item 12b (door veertien leerlingen fout gemaakt, door vier leerlingen goed).

Slechts vier leerlingen hadden de prijs goed bij dit item.

Alle acht leerlingen met een foutief aantal hokjes (zie 12a) hadden ook de prijs fout.

Bij de zeven leerlingen die het aantal hokjes juist hadden maar de prijs niet, zien we een paar opmerkelijke fouten:



$1\frac{1}{2}$ hokjes

36,50 gulden

Esther komt op een prijs van f 36,50.

Waarschijnlijk heeft ze hier een soortgelijke fout gemaakt als bij het vorige item (item 11b). Ze heeft nu $1\frac{1}{2}$ keer de prijs van het voorbeeld figuur gedaan in plaats van $1\frac{1}{2}$ keer de prijs per eenheid. Jeanette en Marijke maakten weer de klassieke fout $1\frac{1}{2} \times f\ 4,- = f\ 4,50$. Daan en Frank hadden f 4,- ingevuld.

Item 13a (door alle leerlingen goed gemaakt).

Dit item is tegen de verwachting in heel goed gemaakt. Er was zelfs niet één leerling die het aantal hokjes fout had berekend. Zeker gezien het feit dat bij het vorige item 8 leerlingen tot een fout aantal kwamen.

Alleen Frank heeft een hulplijn in de figuur getekend. Bij de andere leerlingen wordt niets zichtbaar van de oplossingsmethode. Misschien hebben ze evenals Frank de twee helften aan elkaar gepast of hebben ze op het oog de drie schuine hokjes als hele hokjes geteld.

Item 13b (door twee leerlingen fout gemaakt, door zeventien leerlingen goed).

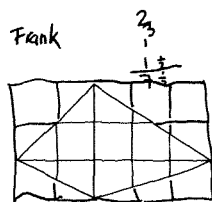
Slechts twee leerlingen hebben de prijs fout. Astrid had weer met f 2,- vermenigvuldigd in plaats van met f 4,-. Jeanette kwam op 9 gulden.

Item 14a (door zeven leerlingen fout gemaakt, door elf leerlingen goed).

Zoals gezegd heeft deze figuur dezelfde vorm als item 3 van opgave I, alleen de omringende roosterstructuur ontbreekt nu.

Een vergelijking van de resultaten laat zien dat item 3 door slechts zes leerlingen goed is gemaakt en item 14a door elf leerlingen. Dat is twee keer zoveel. Uit nadere beschouwing van het werk van de leerlingen blijkt dat de leerlingen die tot onjuiste aantallen kwamen meestal hokje voor hokje binnen de figuur hadden geteld. De leerlingen die het goede antwoord hadden pasten meestal de rechthoekstrategie toe met behulp van hulplijnen (zoals bijvoorbeeld Frank) of losten het vraagstuk mentaal op.

Dat de rechthoekstrategie hier vaker wordt toegepast dan bij item 3 (wat tegen de verwachting is omdat bij item 3 de rechthoekstructuur eigenlijk al is aangegeven) hangt mogelijk samen met het voorafgaande onderwijs: de leerlingen hadden tijdens het Volkstuinjes-practicum telkens gewerkt met figuren met ingebede roosterstructuur.



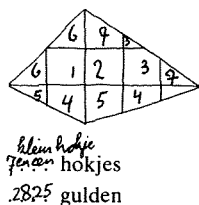
7 $\frac{1}{2}$ hokjes

28 gulden

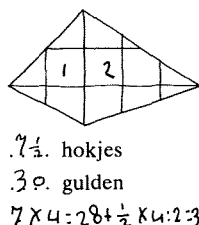
Item 14b (door veertien leerlingen fout gemaakt, door vijf leerlingen goed).

De leerlingen die slechts 7 hokjes hadden geteld, kwamen nu op f 28,-. Marijke

kwam op f 28,25, want ze had '7 en een klein hokje' geteld:



Astrid had weer met f 2,- vermenigvuldigd in plaats van met f 4,- en kwam op f 14,-. Bij de zeven leerlingen die wel het aantal hokjes juist hadden bepaald ($7\frac{1}{2}$) maar de prijs fout hadden, kwamen de volgende uitkomsten voor: 28 gulden ($3\times$), 35 $\frac{1}{2}$ gulden, 7 $\frac{1}{2}$ gulden en twee leerlingen vulden niets in. Vijf leerlingen hadden zowel het aantal hokjes als de prijs goed bepaald. Ter illustratie de oplossingsmethode van Jeroen:



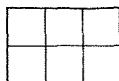
Conclusies:

- 1 Leerlingen pasten onvolledige hokjes meestal aan elkaar. De rechthoekstrategie werd relatief weinig toegepast.
- 2 Meetkundig oplossen door de figuren onderling te vergelijken en de prijs daar van af te leiden werd door enkele leerlingen bij enkele items gedaan, met name bij item 8 was de overeenkomst goed zichtbaar was.
- 3 Het vermenigvuldigen met een half leverde nog problemen op.
- 4 Een roosterstructuur waarbij de vorm van de rechthoek was aangegeven bleek geen voldoende hint voor de leerlingen om de rechthoekstrategie toe te passen. Dezelfde figuur met alleen een ingebedde roosterstructuur bracht meer leerlingen tot het toepassen van de rechthoekstrategie. Het voorafgaande onderwijs is hier waarschijnlijk de verklaring voor.

Opgave IV

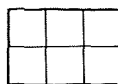
Item 15: Waar is de grond het duurst en waarom?

- 15) Op zandgrond kost zo'n tuintje



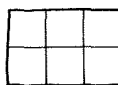
12 gulden

Op *veengrond* kost zo'n tuintje



12 gulden

Op *kleigrond* kost zo'n tuintje



18 gulden

Alle leerlingen gaven aan dat het tuintje op kleigrond het duurst is.

Negen leerlingen gaven als reden dat kleigrond vruchtbaarder is.

Zes leerlingen gaven ook als reden dat klei vruchtbaarder is, maar gaven een omschrijving in eigen woorden, bijvoorbeeld:

- 'kleigrond is het duurste want het is erg nat' (Astrid);
- 'kleigrond is het duurste omdat je op de kleigrond alles kunt verbouwen' (Marijke);
- 'op de kleigrond kun je groente en fruit verbouwen en op veengrond niet en op zandgrond' (Esther);
- 'type 3 is het duurst, want veen is grond voor dieren' (Patricia).

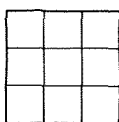
Item 16: Welk tuintje is het duurst?

16)



f 12,-

1. zandgrond



f 12,-

2. veen



f 18,-

3. klei

a Jan vindt dat 2 het duurst is. Waarom zou Jan dat vinden?

.....

Veertien leerlingen gingen in op de relatie oppervlakte/prijs.

Hiervan dachten twaalf leerlingen dat Jan tuintje 2 het duurst zou vinden, omdat het tweede tuintje het *grootst* is (het meeste hokjes heeft):

- 'omdat daar de meeste hokjes zijn' (Astrid);
- 'Jan vindt dat omdat daar het meeste grond is' (Chantal);
- 'omdat je daar meer op kunt verbouwen' (Jeanette);
- 'omdat het tuintje groter is vindt Jan' (Vivienne).

Eén leerling gaf als reden dat de *prijs* van het tweede tuintje het hoogst is:

- 'omdat twee 18 gulden kost en de andere 12' (Jeroen).

Een andere leerling gaf twee redenen: het tweede tuintje is het *grootst* en heeft de hoogste *prijs*:

- 'want het zijn meer hokjes en het is duurder' (Esther).

Een leerling heeft geen antwoord gegeven op deze vraag.

De overige drie leerlingen gaven een anderssoortige, maar kwalitatief *subjectieve verklaring*:

- 'omdat veen voor de kachel gebruikt wordt' (Robert-Jan);

- ‘omdat je op veengrond dieren kunt houden’ (Esther);
- ‘omdat hij van dieren houdt!’ (Patrick)

Robert-Jan bedoelt waarschijnlijk dat tuintje 2 relatief het duurst is omdat de gebruikswaarde gering is. Het lijkt erop dat Esther en vooral Patrick andersom redeneren: voor Jan heeft veengrond de meeste waarde (en is daarom het duurst) want hij houdt van dieren. De persoonlijke gebruikswaarde bepaalt de waardering van de prijs.

- b Piet vindt dat 3 het duurst is. Waarom zou Piet dat vinden?

.....

Veertien leerlingen gaven als reden dat kleigrond het meest vruchtbaar is. De kwaliteit is het criterium:

- ‘omdat klei natte grond is’ (Astrid);
- ‘omdat de derde kleigrond is en die is het vruchtbaarst’ (Yvonne);
- ‘Piet vond drie het duurst omdat kleigrond belangrijker is dan veen en zandgrond’ (Monique).

Vier leerlingen kijken naar de *grootte* van de tuintjes en verbinden het begrip duur met oppervlakte. De kwaliteit van de grond speelt geen rol.

- Chantal bijvoorbeeld zegt: ‘omdat je daar het minst op kan verbouwen’.
- En Ellis zegt: ‘omdat het tuintje vier hokjes heeft’ en dus het kleinste is.
- Tessa vergeleek het derde tuintje met het eerste tuintje: ‘Piet vindt dat, omdat de eerste 6 blokjes heeft en de derde 4 blokjes’.
- Daniël heeft een wat ingewikkelde redenering gevolgd: ‘omdat klei $2 \times$ zo groot is dan veen dan kom je bij 27 gulden uit’. Waarschijnlijk bedoelt hij: als klei even groot zou zijn als veen dan kom je bij 27 gulden uit.

Eén leerling vulde niets in.

- c Lies vindt dat 1 en 2 even duur zijn. Waarom zou ze dat vinden?

.....

Er waren maar twee leerlingen die de *relatie tussen prijs en grootte* in ogenschouw namen.

- Daniël: ‘omdat anderhalf keer de zandgrond in veen gaat’.
- Monique: ‘als je 12 deelt is het 6 gulden per 3 hokjes en $12 + 6$ is 18 en 18 heeft er 3 hokjes bij’.

Vier leerlingen namen alleen de *kwaliteit* van de grond als criterium.

- Yvonne: ‘omdat ze allebei niet goed vruchtbaar zijn’.
- Silvester: ‘omdat 2 veengrond is en 1 zandgrond’.

Zes leerlingen keken alleen naar de *oppervlakte*:

- ‘ze zijn even duur omdat ze bijna even groot zijn’ (vier leerlingen).

Chantal en Marijke vergeleken de twee tuintjes met het derde tuintje:

- ‘1 en 2 is even duur omdat 1 haast even groot is’;

- ‘omdat dat de meeste hokjes zijn. De eerste twee tuintjes zijn even duur omdat ze groter zijn dan het derde tuintje’.
- Vijf leerlingen hebben geen antwoord gegeven.

Conclusie:

Leerlingen noemen meestal één variabele als verklaring voor het begrip duur (of de oppervlakte, of de hoogte van de prijs of de kwaliteit).

Het geheel van de toets en de lesprotocollen overziende, zou aanleiding kunnen geven tot tal van opmerkingen over de onderwijzer, over het onderwijs, over de leerprocessen van bepaalde kinderen, de opzet van het practicum, sommige werkbladen...

Een dergelijke reflectie zullen we hier echter niet geven, omdat deze welhaast een studie apart vormt die een boek zou kunnen vullen.

Misschien een idee voor verder onderzoek, middels bijvoorbeeld mathematisch-didactische en onderwijsleerpsychologische analyses?

Dit zou mogelijk kunnen gebeuren door consultatie van deskundigen, waaronder we uiteraard ook onderwijsgevendenden rekenen, of via een constructieve analyse door studenten.

We hopen in ieder geval dat met het voorgaande niet het laatste woord over ‘Volkstuintjes’ gezegd is.

Deel C

Bijlagen

BIJLAGE I

OBSERVATIESCHEMA MET TOELICHTING

Verlaring van de categorieën

1. Soort vraag – type vraag dat aan de leerling wordt gesteld

HOEV	<i>hoeveel?</i> (meestal: hoeveel kost het? hoeveel hokjes zijn dat?). Er wordt gevraagd naar een uitkomst, het antwoord is goed of fout. R = reproductie-, P = productievraag.
HOE	<i>hoe</i> heb je het gedaan? hoe ben je aan de uitkomst gekomen? hoe zou je het kunnen oplossen? Dit is dus de vraag naar de oplossingsmethode (ontdekken en toepassen van regels en heuristieken). Het antwoord kan meer of minder gewenst zijn (bijvoorbeeld: de leerkracht hoort liever een oplossingsmethode op hoger niveau.
W	<i>waarom?</i> waarom is het handig om het zo te doen? waarom heb je het zo gedaan? Dit is dus de vraag die <i>reflectie</i> van de leerling vereist. Een denkvraag, waarbij de leerling de oplossingsmethode moet beargumenteren. Moest de leerling in de vorige categorie (onder hoe-vragen) zijn werkwijze verbaliseren, in deze categorie moet de leerling zijn werkwijze beargumenteren.

2. Antwoord leerling – het antwoord dat de leerling heeft gegeven op de vraag

+	het antwoord is goed/gewenst (volgens de leerkracht)
±	het antwoord gaat in de richting. Deze categorie heeft meestal betrekking op hoe-vragen ('hoe heb je het gedaan?'). Meestal is hier geen sprake van een fout, maar wil de leerkracht een hoger niveau oplossingsmethode horen. Of de leerling geeft een goed antwoord, maar het is niet precies het antwoord op de gestelde vraag.
–	het antwoord is fout (voornamelijk bij hoeveel-vragen) of de leerling geeft geen antwoord.

3. Goed	– reactie van de leerkracht op een goed antwoord van de leerling
EXPL	leerkracht gebruikt het antwoord van de leerling om de hele klas bewust te maken van de oplossingsmethode, om iets uit te leggen.
++	leerkracht prijst de leerling om het goede antwoord (juist, goed gedaan, keurig).
+	leerkracht bevestigt op eenvoudige wijze dat het antwoord van de leerling goed is (herhaalt het antwoord, zegt ‘ja’, ‘oké’, enz.)
O	leerkracht reageert niet; hij gaat gewoon door.
AANV VR	leerkracht stelt een aanvullende vraag naar aanleiding van het antwoord van de leerling (aan dezelfde leerling)
	1 = hoeveel
	2 = hoe
	3 = waarom
4. Fout of ±	– reactie van de leerkracht op een fout antwoord of laag oplossingsniveau
+R	leerkracht ondersteunt de leerling en/of licht het antwoord toe aan de klas.
H	leerkracht geeft de leerling hints, aanwijzingen om de leerling op het goed spoor te zetten, om de leerling te stimuleren tot een hoger oplossingsniveau of om de leerling de fout zelf te laten herstellen.
HH	de leerkracht herhaalt de vraag nog eens voor de leerling (bijvoorbeeld als hij denkt dat de leerling de vraag niet goed begrepen heeft of om de leerling te stimuleren nog eens na te denken over de vraag).
VR AND LLN	leerkracht gaat over naar een andere leerling met dezelfde vraag.
GEEFT ANTW	leerkracht geeft zelf het goede antwoord
–	leerkracht geeft aan dat het antwoord van de leerling onjuist is (schudt het hoofd, zegt ‘nee’, ‘dat is niet goed’, hm, mm’, ‘klopt dat?’, enz.).

N.B. Bij een nieuwe vraag of dezelfde vraag aan een andere leerling telkens weer bij categorie 1 beginnen.

BIJLAGE II VOLKSTUINTJES*

► INLEIDING

Dit praktikum is bestemd voor leerlingen uit het vierde leerjaar van de basisschool.

problematiek

Het gaat in dit praktikum voornamelijk om:

- het berekenen van de oppervlakte van figuren met behulp van het rooster;
- het leggen van een relatie tussen oppervlakte en kostprijs.

Nevenaspecten:

- het handig tellen van hokjes in een onregelmatige figuur;
- de mogelijkheid de schaalproblematiek aan de orde te stellen (1 cm $\longrightarrow$ 10 m);
- het opvullen van figuren met bepaalde oppervlakte-eenheden.

lesindeling

Het praktikum kan in vier lessen worden doorgewerkt:

<i>hoofdstroom</i>	<i>differentiatieopdrachten</i>
<i>les 1: introductie</i> <i>werkblad 1: de kleine aarde</i> <i>werkblad 2: het grootste/kleinste type</i> <i>les 2: werkblad 3: hoeveel tuintjes?</i> <i>les 3: werkblad 5: huur</i> <i>werkblad 6: huur</i> <i>les 4: werkblad 7: andere huurprijzen</i> <i>eventueel les 5 : schaalproblematiek</i>	 <i>werkblad 4: tuintjes en huur</i> <i>werkblad 8: huren in oostkant</i> <i>werkblad 9: huren in westkant</i>

klasseorganisatie

Leerlingen bij voorkeur in tweetallen aan het praktikum laten werken.

► INTRODUKTIE

Het praktikum kan aldus geïntroduceerd worden:

Mijn oom wilde graag een volkstuintje. Gelukkig boorde hij dat er een nieuw volkstuinkompleks werd aangelegd. Hij ging erop af en kreeg een kaartje van het kompleks mee.

*) Overdruk uit Wiskobas-publicatie nr 9 (ontwerp: H. ter Heege).

.... 'Dit is het eerste werkblad.'

De volgende kwesties kunnen in het gesprek aan de orde gesteld worden:

► Wat is een volkstuintje? Hoe ziet het eruit?

► Waarom willen de mensen een volkstuintje?

► Is dit volkstuinkompleks erg groot?

Het is mogelijk dat een aantal begrippen apart besproken moet worden. We denken aan: volkstuinvereniging, kompleks, situatieschets, provinciale weg.

► WERKBLAD 1: DE KLEINE AARDE

► Hoe groot is het hele kompleks?

Zo gesteld, laat de vraag alle mogelijkheden open om op verschillende manieren te reageren.

schaal

In de eerste plaats kan gezocht worden naar een antwoord in vierkante meters. Het is dan nodig gebruik te maken van de schaalgegevens. We zouden dat in deze fase van het praktikum niet iedereen willen aanbevelen. Immers, na een schatting van de lengte en breedte van het terrein kan, vanuit de vraag of het kompleks erg groot is, te vroegtijdig naar de schaalproblematiek toegewerkt worden. En de ervaring leert, dat dit soms doet afdwalen naar een andere problematiek, die nu niet primair is. De schaalproblematiek kan beter in een vijfde les, aan het eind van het praktikum, aan de orde komen. Uiteraard blijft de mogelijkheid aanwezig, de schaalkwestie hier kort aan te stippen en de vijfde les achterwege te laten.

hokjes tellen

Vervolgens is het mogelijk dat leerlingen de hokjes gaan tellen. In principe is dit de meest voor de hand liggende methode. De belangrijkste vraag

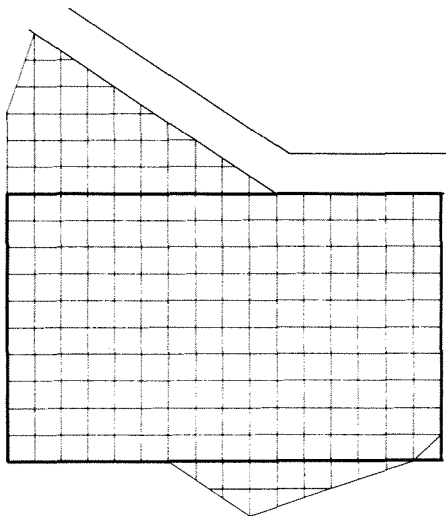


fig. 1

is die naar de telstrategie. In de bespreking moeten we daar uitvoerig op ingaan, eventueel met gebruikmaking van een transparant.

Het is tijdbesparend een rechthoek van 16 bij 10 hokjes te nemen. Er is dan wel een half hokje teveel meegeteld.

De resterende stukken zijn gemakkelijk te berekenen als halve rechthoeken. De meeste kinderen zullen een andere strategie hebben gevonden: hele hokjes maken door twee randstukjes samen te voegen. Er zijn ook kinderen die elk randstukje voor een hele tellen.

omtrek

Een derde mogelijkheid is dat kinderen de vraag naar de grootte van het volkstuinkompleks denken te kunnen beantwoorden vanuit het tellen van de randhokjes (dus de omtrek).

Uiteraard speelt het voorafgaande onderwijs hier een grote rol. Het gaat erom of de kinderen reeds eerder kennis maakten met het begrip oppervlakte.

Tijdens de inventarisatie blijken alle antwoorden rond de 200 hokjes te liggen.

► WERKBLAD 2: HET GROOTSTE/KLEINSTE TYPE

► Welk type volkstuin is het grootst?

Nadat het probleem duidelijk is, laten we enkele van de acht typen tuintjes – bijvoorbeeld de typen 2, 4, 5, 6, 7 – overnemen op een rooster. Het gebruik van de liniaal is van groot belang. Het overnemen kan het beste als volgt plaatsvinden:

- zet op een roosterpunt of kruispunt een stip; dit is een hoekpunt van de figuur;
- zoek nu de andere hoekpunten; zet ook daar stippen;
- verbind de stippen met rechte lijnen.

Het zoeken naar hoekpunten gaat langs de lijnen van het rooster; bijvoorbeeld: twee naar rechts, drie omlaag.

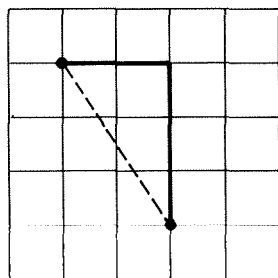


fig. 2

Nadrukkelijk gaan we bij het tweede probleem in op de mogelijkheden de oppervlakte van roosterfiguren te bepalen.

twee mogelijkheden

Grofweg zijn er twee mogelijkheden.

Ten eerste:

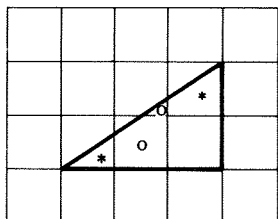


fig. 3

Dit is de strategie van het aanvullen tot hele hokjes: de twee sterretjes vormen samen één hokje, evenals de twee rondjes.

Ten tweede:

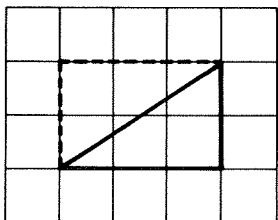


fig. 4

Dit is de strategie van het aanvullen tot een rechthoek. De driehoek in dit voorbeeld is aan te vullen tot een twee-bij-drie-rechthoek. Van deze rechthoek weten we de oppervlakte: '6'. De driehoek heeft de halve oppervlakte van de rechthoek.

Deze strategie is ook in gekompliceerde gevallen goed bruikbaar. Tevens is de gebruikswaarde groot:

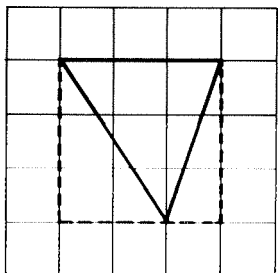


fig. 5

► **WERKBLAD 3: HOEVEEL TUINTJES?**

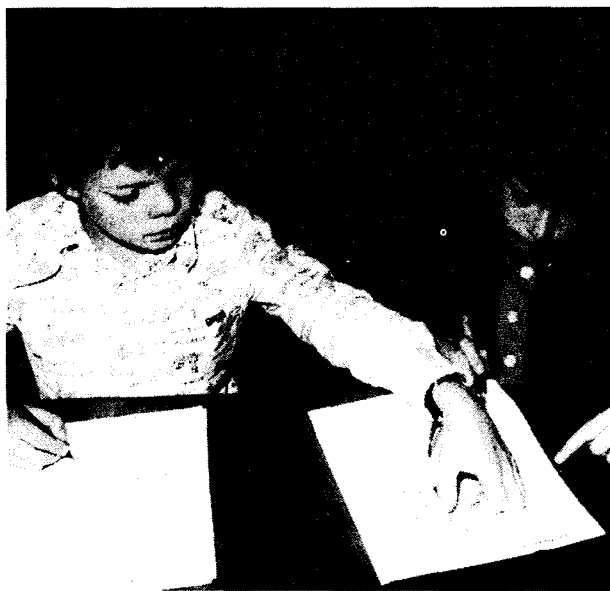
► Hoeveel mensen kunnen een tuintje van het eerste type krijgen?

We kunnen twee werkwijzen volgen:

- Het probleem laten oplossen door intekenen. Daarna inventarisering van de uitkomsten en deze inventarisatie toetsen aan de rekenaanpak. De rekenaanpak levert op dat er hoogstens $200 : 6 = 33$ tuintjes van het eerste type gemaakt kunnen worden.¹⁾
- De volgorde omkeren: eerst rekenen en dan intekenen.

Een aantal kinderen mag laten zien hoe ze het probleem aangepakt hebben. Een waarschuwing: willen we de interesse bij de andere kinderen vasthouden, dan moeten we alleen een áánzet tot de oplossing laten vertellen en niet het hele verhaal.

Het is van belang na te gaan op grond van welke overwegingen de leerlingen tot de gekozen aanzetten gekomen zijn. En: welke strategie leidt tot het maximale aantal?



► **WERKBLAD 4: TUINTJES EN HUUR**

► Hoeveel mensen kunnen een tuintje van het vijfde type krijgen?

Dit probleem is als differentiatieopdracht bedoeld. We kunnen het de snelle kinderen geven zodra ze klaar zijn met *werkbld 3*.

¹⁾ Gezien de vorm past het tuintje van het eerste type in feite veel minder vaak, dan de rekenuitkomst suggereert.

► **WERKBLAD 5: HUUR**

► Hoeveel moet een huurder betalen voor een tuintje van zes hokjes?

We geven de kinderen een steuntje in de rug: 200 hokjes moeten 1000 gulden opbrengen.

.... 'Hoeveel kost één hokje?'

'En zes hokjes?'

Sommige leerlingen menen een goede oplossing te hebben gevonden. Bijvoorbeeld: het tuintje van zes hokjes kost 60 gulden.

We reageren daarop met:

.... 'Hoe kom je daaraan?'

' $6 \times 10 = 60$ ', antwoordt een leerling, 'tien gulden per hokje'.

'Hoeveel is dat voor 200 hokjes?'

'2000 gulden.'

'En we weten dat het 1000 gulden voor 200 hokjes is. Jouw suggestie is dus niet goed.'

In deze zin door te gaan op ideeën van de kinderen en hen de consequenties van hun suggesties te laten ervaren, blijkt een zeer geschikte werkwijze.

We behoeven het probleem niet geheel uit te diepen. Als we menen voldoende aanwijzingen te hebben gegeven, gaan de kinderen het probleem zelf verder oplossen.

verhoudingstabel

De verhoudingstabel geeft weer uitstekende mogelijkheden. Bijvoorbeeld:

	hokjes	gulden
	200	1000
halveren	100	500
het tiende deel	10	50
weer het tiende deel	1	5
vermenigvuldigen met zes	6	30

Of:

	hokjes	gulden
	200	1000
het tiende deel	20	100
het tiende deel	2	10
halveren	1	5
zes keer	6	30

fig. 6

► **WERKBLAD 6: HUUR**

► Hoeveel moeten de huurders voor bepaalde tuintjes betalen?

Deze problemen kunnen de kinderen nu zonder veel moeite geheel zelfstandig maken.

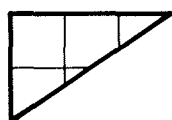
► **WERKBLAD 7: ANDERE HUURPRIJZEN**

► Wat zijn de nieuwe huurprijzen van bepaalde typen tuinen?

Het is de bedoeling deze opgaven te laten maken zonder veel uitleg vooraf. We moeten voorkomen dat we een strategie gaan voorzeggen. Zo'n voor de hand liggende voorzegstrategie is bijvoorbeeld:

► Het tuintje van zes hokjes kost 36 gulden. Wat kost nu één hokje?

Deze aanpak zou een meer meetkundige werkwijze kunnen belemmeren. En het gaat er in dit probleem juist om dat we de leerlingen op het meetkundige spoor zetten, zodat ze ontdekkingen doen als:



is de helft van

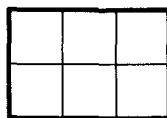
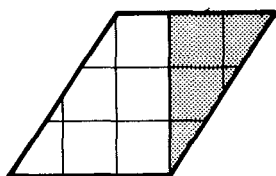


fig. 7

en kost daarom '18' (de helft van '36')

Zelfs het laatste tuintje van de serie is vrij gemakkelijk op meetkundige wijze op te lossen:



is gelijk aan

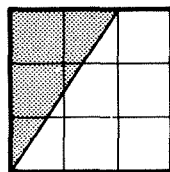


fig. 8

en kost dus '54'

► **WERKBLADEN 8 EN 9: HUREN IN OOSTKANT EN WESTKANT**

► Wat kosten de tuintjes in *groothuizen*?

Deze problemen vormen herhalingen van de voorgaande problematiek. Steeds gaat het om een konstante verhouding tussen kostprijs en oppervlakte. De problemen zijn te gebruiken ter differentiatie of evaluatie van het voorgaande.

► **AFSLUITENDE LES**

In een afsluitende les, die als differentiatie moet worden gezien, behandelen we de schaalproblematiek.

Enkele suggesties hieromtrent:

- Het volkstuinkompleks is 200 hokjes groot. Is het zo groot als de schooltuin? Of als het park?

We weten: 1 cm is 10 m.

Wat betekent dit? Wel: een lengte van één centimeter van het papier betekent tien meter lengte op het volkstuinkompleks.

- Hoe breed en hoe lang is het volkstuinkompleks?
- Hoe groot is het volkstuinkompleks in oppervlaktemeters?¹⁾ We kunnen eventueel de gelegenheid aangrijpen dit in hektares en ares uit te drukken. In de herleidingstabel vinden we:

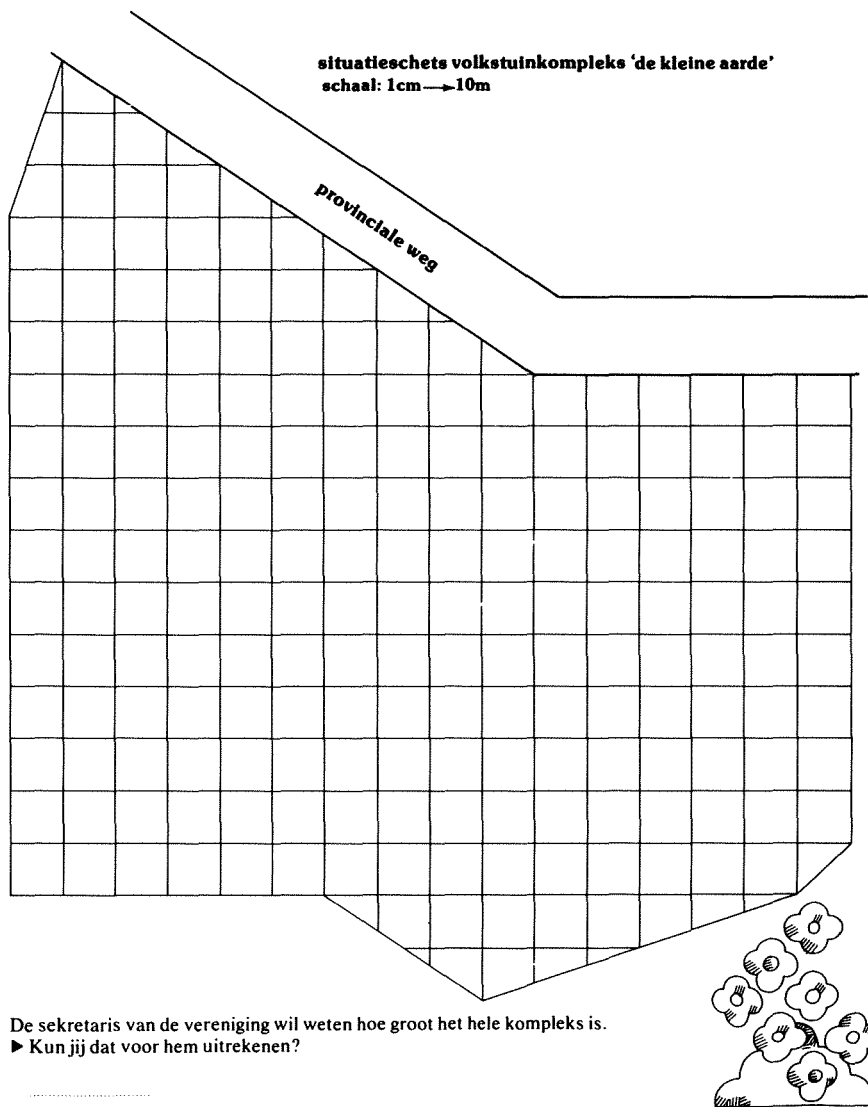
$$\begin{array}{lcl} 10.000 \text{ m}^2 & \longrightarrow & 1 \text{ hektare;} \\ 100 \text{ m}^2 & \longrightarrow & 1 \text{ are.} \end{array}$$

Dus is het volkstuinkompleks 20.000 m², dat wil zeggen: twee hektares.

- Hoe groot is een voetbalveld? Ongeveer 50 bij 100 meter.
Dus: een voetbalveld is $\frac{1}{2}$ hektare. Volkstuinkompleks *de kleine aarde* is vier voetbalvelden groot.
- Het is van belang dat we de leerlingen inzicht in en begrip van de reële betekenis van deze maten geven. Daarom relateren we de oppervlaktematen aan bekende zaken als: voetbalveld, schoolplein, e.d.

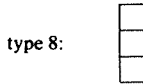
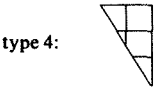
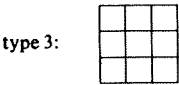
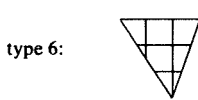
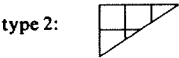
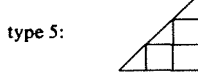
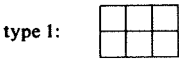
¹⁾ We verwijzen voor deze term naar: Heege, H. ter en Moor, E. de: *Leerplanpublicatie 7: oppervlakte*, utrecht 1977, pag. 11.

De volkstuinvereniging *de kleine aarde* heeft een stuk grond gekocht. Op dat stuk grond willen ze een kompleks volkstuintjes aanleggen. Hier zie je de plattegrond:



Sommige leden van de volkstuintvereniging willen een groot stuk, andere willen een klein stuk. Iedereen wil wat anders, lijkt het wel.
Het bestuur vergadert erover. En wat besluiten ze?
Lees maar!

Er komen acht verschillende typen volkstuintjes. Dit zijn de typen:

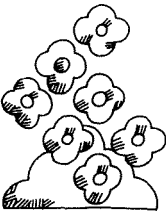


► Welk type is het grootste?

.....

► Welk type is groter: 2, 5 of 6?

.....



De sekretaris van de vereniging dacht dat veel mensen wel een tuintje van type I zouden kiezen.

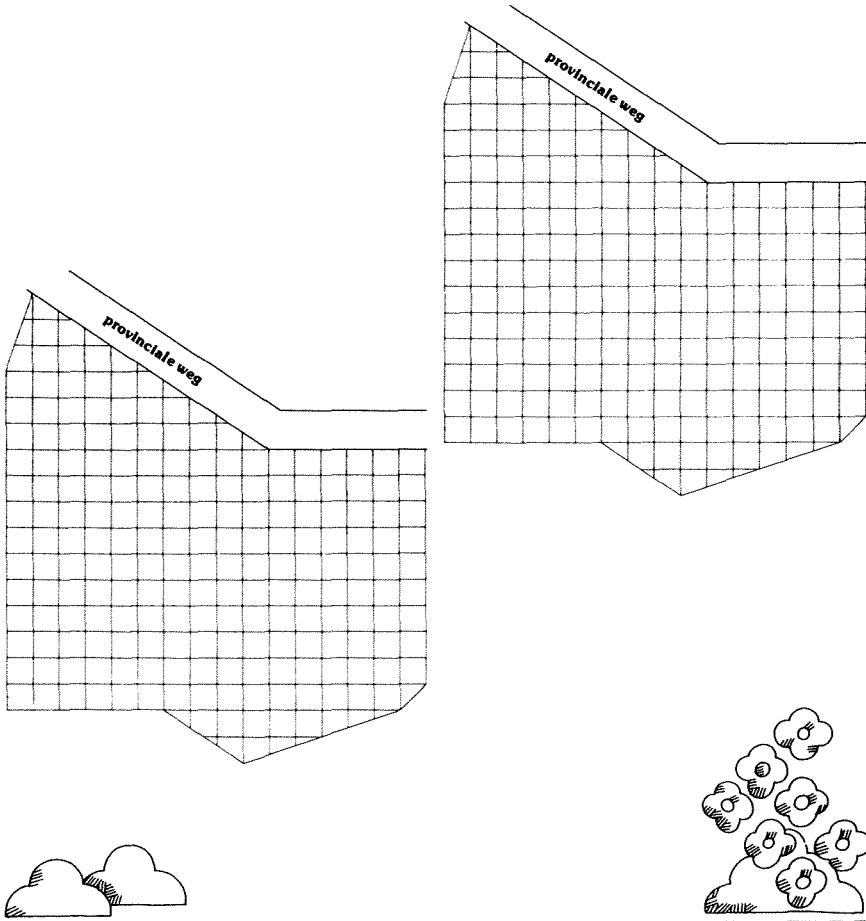
Dus dit tuintje:



► Hoeveel mensen kunnen dan een tuintje krijgen?

.....

► Gebruik deze plattegrondjes om het antwoord te vinden.



De penningmeester van de vereniging gaat er vanuit dat iedereen wel dit tuintje zal kiezen:

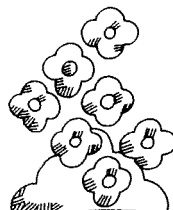
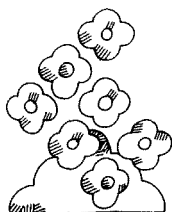
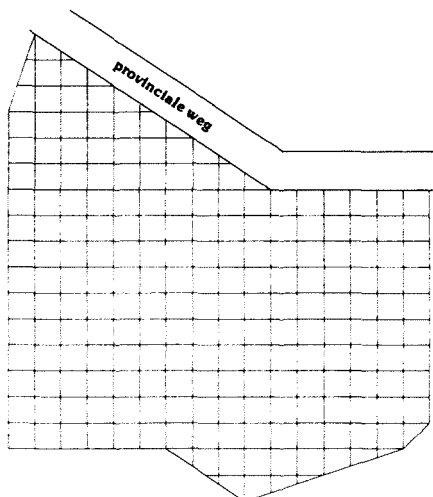
type 5:



► Hoeveel mensen kunnen dan een tuintje krijgen?

.....

Gebruik het plattegrondje.

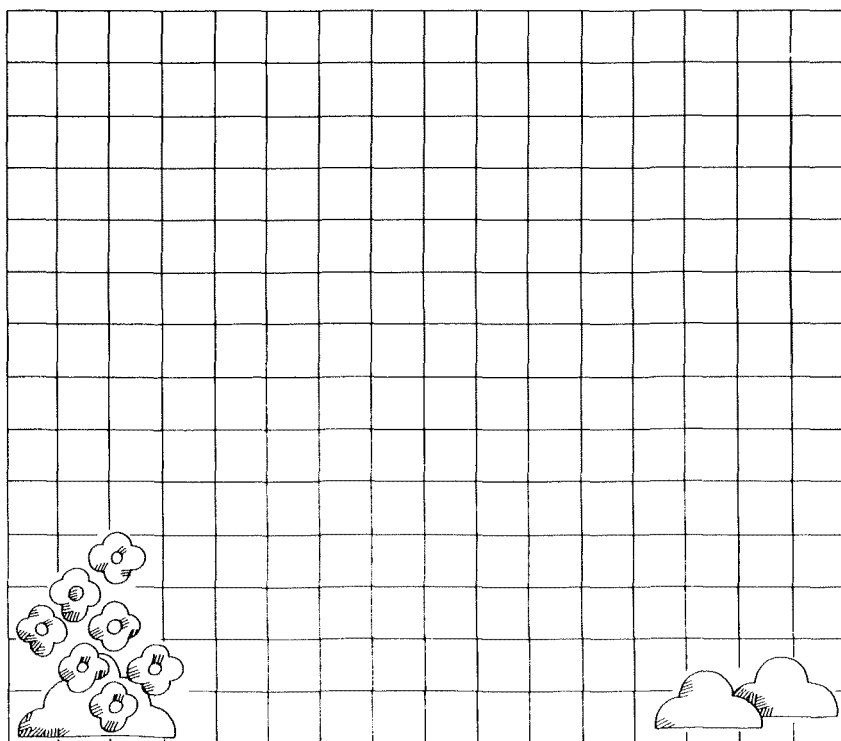


De sekretaris heeft uitgerekend dat het hele kompleks 1000 gulden per jaar kost. Dat bedrag moeten de leden met een tuintje natuurlijk opbrengen.
Dus alle tuintjes tezamen moeten 1000 gulden opbrengen.

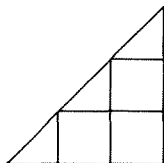
- Hoeveel zal een huurder moeten betalen voor dit volkstuintje?



- Teken andere tuintjes die net zoveel moeten opbrengen.



De penningmeester denkt erover na wat een huurder moet betalen voor dit tuintje:

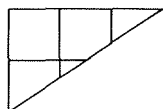


► Weet jij dat?

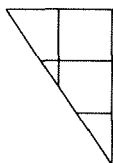
.....

► Hoeveel moeten de huurders van deze volkstuintjes betalen?

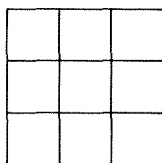
Vul in:



.....



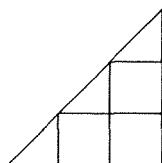
.....



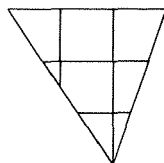
.....

► Hoeveel moeten de huurders van deze volkstuintjes betalen?

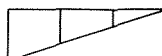
Vul in :



.....



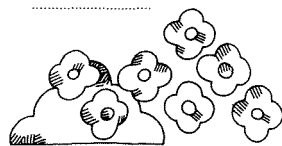
.....



.....



.....



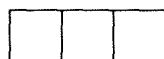
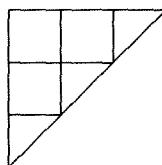
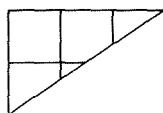
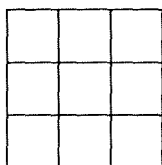
De penningmeester van de vereniging is erg boos op de sekretaris. Want die heeft de huurprijs verkeerd berekend! Daarom komt de penningmeester met het voorstel de huurprijs als volgt vast te stellen:



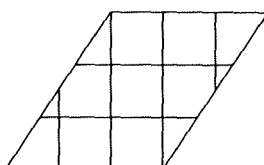
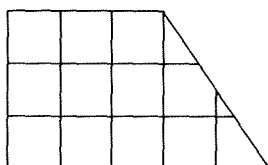
36

► Hoeveel kosten de volkstuintjes nu aan huur?

Vul in:

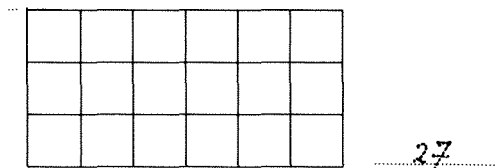


► En deze nieuwe typen?

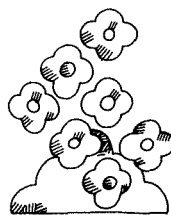
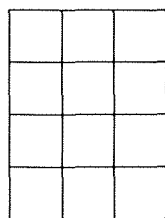
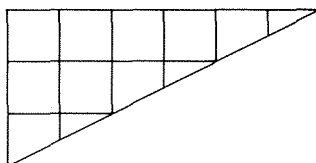
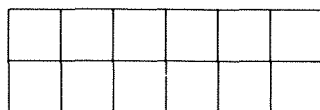
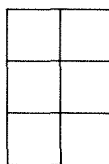


De sekretaris en de penningmeester leggen hun meningsverschil voor aan de beheerder van de volkstuinvereniging in *groothuizen*. Ze vragen wat de huur van de volkstuintjes in *groothuizen* is. De beheerder schrijft terug dat er in *groothuizen* twee complexe volkstuintjes zijn: *oostkant* en *westkant*.

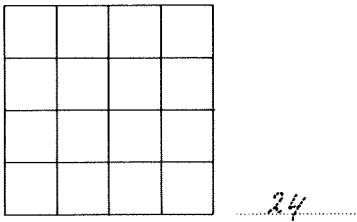
In *oostkant* kost dit tuintje zoveel:



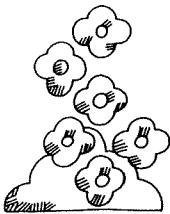
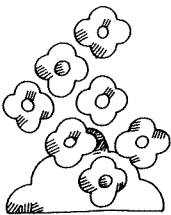
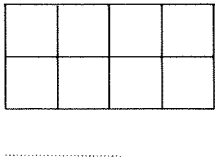
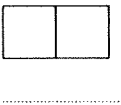
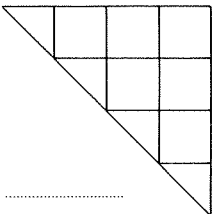
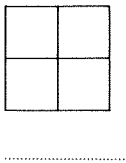
► Wat kosten deze volkstuintjes in *oostkant*?
Vul in:



In *westkant* is de prijs voor dit volkstuintje:



► Wat kosten deze volkstuintjes in *westkant*?
Vul in:



Alles is weer goed gekomen tussen de sekretaris en de penningmeester.

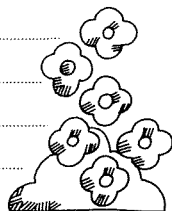
Ze hebben er alleen diep over nagedacht hoe het toch kan dat alles in *groothuizen* veel goedkoper is.

► Weet jij hoe dat komt?

[illegible]

► Welk van de twee volkstuinkomplexen is het duurste: *oostkant* of *westkant*?

Hoe weet je dat?

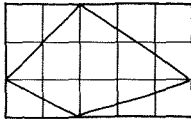


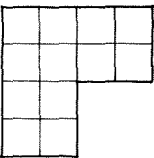
BIJLAGE III DE TOETS

Opgave I

► Hoe groot zijn deze tuintjes?

1)  hokjes

2)  hokjes

3)  hokjes

Opgave II

► Vul in:

4) 1 meter is cm

5) $4\frac{1}{2}$ meter is cm

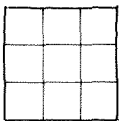
6) 1 hokje kost 6 gulden

$2\frac{1}{2}$ hokje kost gulden

7) $6\frac{1}{2}$ uur is minuten

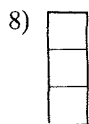
Opgave III

Een tuintje van dit type kost zoveel:

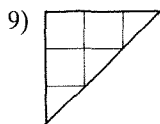
 . 36. gulden

► Wat kosten deze volkstuintjes?

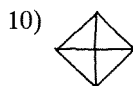
Vul in:



.... gulden

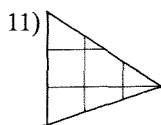


.... gulden

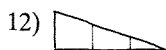


.... hokjes
.... gulden

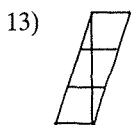
Want:



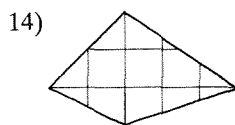
.... hokjes
.... gulden



.... hokjes
.... gulden



.... hokjes
.... gulden



.... hokjes
.... gulden

Want:

Opgave IV

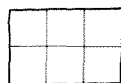
15) Waar is de grond het duurst?

Op *zandgrond* kost zo'n tuintje



.....

Op *veengrond* kost zo'n tuintje



.....

Op *kleigrond* kost zo'n tuintje



.....

► Waar is de grond het duurst?

► Weet je hoe dat komt?

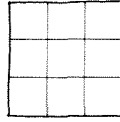
.....
.....
.....

► Welk tuintje is het duurst?

16)



.....



.....



.....

1. zandgrond

2. veen

3. klei

Jan vindt dat 2 het duurst is. Waarom zou Jan dat vinden?

.....
.....

Piet vindt dat 3 het duurst is. Waarom zou Piet dat vinden?

.....
.....

Lies vindt dat 1 en 2 even duur zijn. Waarom zou ze dat vinden?

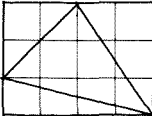
.....
.....

EXTRA'S

Opgave V

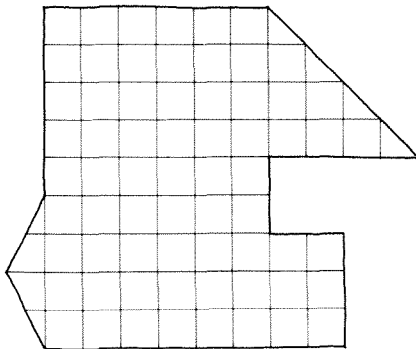
► Hoeveel hokjes heeft dit tuintje?

17)



► Hoeveel mensen kunnen een tuintje van deze vorm krijgen? Je mag het uitrekenen en intekenen.

18)



LITERATUUR

- Cito *Eindtoetsen basisonderwijs 1976, 1977*. Arnhem.
- Danilow, M. *Ueber den Unterrichtsprozess in der Sowjetischen Schule*. Berlin: Volk und Wissen, 1963.
- Duncker, K., *Zur Psychologie des produktiven Denkens*. Berlin: Springer, 1935.
- Freudenthal, H., *Weeding and Sowing*. Preface to a Science of Mathematical Education. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1978.
- Freudenthal, H., Lessen van Sovjet rekenonderwijskunde. *Pedagogische Studiën*, 1979, 56, 17–25.
- Goffree, F., *Leren onderwijzen met Wiskobas*. Onderwijsontwikkelingsonderzoek 'wiskunde en didaktiek' op de pedagogische akademie. Utrecht: IOWO, 1979.
- Good, Th.L. en J.E. Brophy, *Looking in classrooms*. New York, London: Harper and Row, 1973.
- Heege, H. ter en E. de Moor, *Oppervlakte I*. Leerplanpublikatie 7. Utrecht: IOWO, 1977a.
- Hermans, H.J.M., Th.C.M. Bergen en R.W. Eyssen, *Van faalangst tot verantwoordelijkheid*. Amsterdam: Swets en Zeitlinger, 1975.
- Jong, G. de e.a., 'Wie kan er rekenen?' Een onderzoek naar de rekenprestaties eind lagere school in de Amsterdamse wijken Oud-West, Jordaan, Bos en Lommer en Oud-Overtoomse Veld. Subfaculteit Opvoedkunde, Universiteit van Amsterdam, 1979.
- Jong, R. de (red.), *Oppervlakte II*. Leerplanpublikatie 9. Utrecht: IOWO, 1977b.
- Kieviet, F.K. (red.), *Nieuwe methoden in de opleiding van onderwijsgeevenden*, Groningen: Wolters-Noordhoff, 1969.
- Kwantiwijzer*, SVO-project 0327, Psychologisch Laboratorium, Rijksuniversiteit Utrecht, 1979.
- Leeuw, L. de, *Leren probleem oplossen*. Onderzoek naar het effect van het aanleren van algoritmische en heuristische oplossingsmethoden mede in verband met persoonskenmerken. Lisse: Swets en Zeitlinger, 1979.
- Parreren, C.F. van, Algoritmen en heuristieken in het onderwijs. *Pedagogische Studiën*, 1975, 52, 394–405.
- Parreren, C.F. van, *Leren op school*. Groningen: Wolters-Noordhoff, 1976.
- Selz, O., Versuche zur Hebung des Intelligenzniveaus. Ein Beitrag zur Theorie der Intelligenz und ihrer erziehlichen Beeinflussung. *Zeitschrift für Psychologie* (1935) 134, 236–301.
- Terwel, J., Observeren in het onderwijs. Theorie, methoden en kritiek. *Info* 9, nr. 4 (1978), 159–227.
- Treffers, A., *Wiskobas Doelgericht*. Een methode van doelbeschrijving van het wiskunde onderwijs volgens Wiskobas. Utrecht: IOWO, 1978.
- Treffers, A., *De Kiekkas van Wiskobas*. Beschouwingen over uitgangspunten en doelstellingen van het aanvangs- en vervolgonderwijs in de wiskunde. Leerplanpublikatie 1. Utrecht: IOWO, 1975.
- Treffers, A.J., De theorieën van Bruner en het biologieonderwijs. In: *Beogeluiden* 9. Groningen: Wolters-Noordhoff, 1978.