

didactische fenomenologie van wiskundige structuren

H. Freudenthal



Freudenthal instituut
Archief



vakgroep onderzoek wiskunde onderwijs en onderwijscomputercentrum
rijksuniversiteit Utrecht

**didactische
fenomenologie
van
wiskundige structuren**

didactische fenomenologie van wiskundige structuren

(Deel I)

H. Freudenthal



**vakgroep onderzoek wiskunde onderwijs en onderwijscomputercentrum
rijksuniversiteit Utrecht**

Onderzoek wiskunde onderwijs

Publicatie nr 4

Reeds verschenen:

- Nr 1 *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas*
(A. Dekker, H. ter Heege, A. Treffers)
- Nr 2 *Oppervlakte bij Wiskobas en inzichtverwervend handelen*
(A. Dogger)
- Nr 3 *Aanzet tot een nieuwe breukendidactiek volgens Wiskobas*
(L. Streefland)

Colofon

bureauredactie: Betty Dekker

eindredactie: Adri Treffers

vormgeving & realisatie: Ton Voortman

© 1984 vakgroep onderzoek wiskunde onderwijs & onderwijs computercentrum rijksuniversiteit utrecht

Niets uit deze uitgave mag worden veeleenvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, microfilm of op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de houder van het copyright.

INHOUD

Achteruit en vooruit kijkend	9
1 Voorproef: lengte	11
1.1–1.3 Wat is lengte	11
1.4 Grootheden	12
1.5 Optellen van lengtes	13
1.6 Orde van lengtes	15
1.7 Vermenigvuldigen en delen van lengtes	16
1.8 Rationale veelvouden	17
1.9 Reële veelvouden	18
1.10 Lengtemaat	19
1.11 Wat hier ontbreekt	19
1.12 Aspecten van fenomenologie	20
1.13–1.14 Lengte in bijvoeglijke naamwoorden	20
1.15 Congruentie-afbeeldingen	22
1.16 Vaste lichamen	23
1.17 Gelijkvormigheden	24
1.18–1.20 Flexies	24
1.21 Vastheid en flexibiliteit	27
1.22 Breek en maak	28
1.23–1.24 Afstand	29
1.25 Conservatie en reversibiliteit	31
1.26 Maatstaven	34
1.27 Wisseling van maatstaf	35
1.28–1.29 Lengtemeting in een vroeg stadium	36
2 De methode	38
2.1 Aspecten van fenomenologie	38
2.2 De rol van voorbeelden	39
2.3 Enactief, iconisch, symbolisch	40
2.4–2.5 Begripsverwerving en constitutie van mentale objecten	41
3 Verzamelingen	44
3.1 Verzamelingen als doel in zichzelf	44
3.2 Verzamelingen als substraten van structuren	44
3.3 Verzamelingen als taalmiddel	45
3.4 Verzamelingen in de topologie	45
3.5 Maten	46

3.6–3.7	Oplossingsverzamelingen van voorwaarden	46
3.8	Lemma van Zorn	47
3.9	Machtigheid	48
3.10	Verzameling als puur taalverschijnsel	48
3.11	De goede referentie-verzameling	51
3.12	Elementaire structuren	54
3.12a	Ordestructuren	55
3.13	Het elimineren van structuur	58
3.14–3.16	Gelijkheid	59
3.17	Structuren als mentale objecten	63
3.18	Constitutie van aantallen	65
3.19	Aantallen van verzamelingen door een structuur verbonden . .	68
3.20	Aantallen van verzamelingen in verenigingsstructuur	70
3.21	Aantallen van verzamelingen in rechthoekstructuur	70
3.22	Aantallen van verzamelingen in gelijkverdelingsstructuur – <i>m</i> manden met elk <i>n</i> eieren	72
3.23	Wegenmodel van het product	74
3.24	Boommodel van het product	74
3.25	Gelijkverdelende relatie	76
3.26	Structuur van de machtverzameling	77
3.27	Model van de verzameling van de deelverzamelingen met <i>k</i> elementen	77
3.28	Ladenbeginsel	78
3.29	Formeel apparaat ter constitutie van de relevante structuren . .	79
3.30	Behoeftte aan verdergaand formaliseren	81
4	Natuurlijke getallen	84
4.1	Naar Peano	84
4.2	Naar Euclides	86
4.3–4.8	Naar Cantor, Frege, Russel-Whitehead	87
4.9	Naar Dedekind	90
4.10–4.11	Didactisch-fenomenologisch getoetst	91
4.12	Fenomenologisch op te laag niveau	93
4.13	Ontwikkelingsverschijnselen	93
4.14	Conservatie	94
4.15	Invarianties bij één verzameling	95
4.16	Het telgetal	97
4.17	De structuur van het telsysteem	100
4.18	Invariantie bij meer verzamelingen	103
4.19	Het schattend vergelijken van aantallen	105
4.20–4.28	De constitutie van de optelling als mentale handeling . . .	107
4.29	De optelstructuur van <i>N</i>	115
4.30	De constitutie van de aftrekking als mentale handeling	117
4.31	De constitutie van de vermenigvuldiging als mentale handeling . .	119

4.31a	De rol van de gelijkverdelingsstructuur in leerprocessen ten behoeve van de vermenigvuldiging	122
4.32	De vermenigvuldigstructuur van N	124
4.33	De constitutie van de deling als mentale handeling	125
4.34–4.43	De algoritmiek in N	128
5	Breuken	145
5.1–5.2	De titel	145
5.3	De breuken in de dagelijkse taal	147
5.4	De breuk als breker	151
5.5	De breuk als vergelijker	157
5.6	Aspecten van de breuk	160
5.7	De breuk in een operator	161
5.8	Modellen voor de verhoudingsrelatie	162
5.9	Modellen voor de verhoudingsoperator	166
5.10	Afbeeldingsmodellen voor de verhoudingsoperator	167
5.11	Mathematische theorie van de rationale getallen vanuit de verhoudingsoperator	169
5.12–5.23	Rijke didactische sequentie voor het breukrekenen	173
5.24	Decimale breuken	185
5.24a	Een didactische opmerking	186
5.25–5.26	Decimaalbreukontwikkeling	187
5.27	Andere grondtallen	190
6	Verhoudingen en evenredigheid	191
6.1	Een voorrede middenin	191
6.2	De logische status van ‘verhouding’	192
6.3	Verhouding als relatie in en tussen grootheden	194
6.4	Positie- en compositiestaten	198
6.5	Structuurstaten	201
6.6	Het optreden van verhoudingen in 6.3.5 onderling vergeleken	203
6.7	Verhouding bij gelijkvormigheden	203
6.8	Naar verhouding	207
6.9–6.12	Normering	209
6.13	Visualisering	213
6.14	Structurele visualiseringen	214
6.15	Algoritmiseren	215
6.16	Criterium voor verhoudingsgetrouwheid	217
6.17	Niet-lineariteit	220
6.18	Het gebruik van verhoudingen en evenredigheden	221
6.19	‘Verhouding’ in het onderwijsleerproces	222
Noten		227

ACHTERUIT EN VOORUIT KIJKEND

Mensen vergaan, systemen bestaan. Onsterfelijkheid is beschoren aan wie zijn naam aan een systeem weet te hechten. Hoewel onsterfelijkheid ook al niet meer is wat hij vroeger was en ik er niet naar lonk, nam ik me op zekere dag voor mijn eerste systematische werk te schrijven, na vroegere die terecht chaotisch kunnen worden genoemd. Wat uit de bus kwam is nog chaotischer dan de andere – zo chaotisch, dat de lezer die een Woord Vooraf verwacht, het in Hoofdstuk 6 moet zoeken. Bovendien, het werk kwam niet af. Toen onverwachts Hoofdstuk 18, ‘Tekst en Context’, de eerste symptomen van elephantiasis vertoonde, kapte ik het, liet Hoofdstuk 17 het laatste zijn en verbande de rest in een nieuw boek waarvan zeer zeker niets terecht zal komen. Laat ik opmerken dat Mw. Breughel, mijn secretaresse en medewerkster gedurende haast 25 jaren, de laatste regel van het – onleesbare – manuscript juist op de dag voor haar afscheid las en typte.

Een manuscript als het onderhavige verdient dat de auteur er op terugblik – een blik vooruit voor de lezer.

Aan de meeste van mijn wiskunde-onderwijskundige publicaties was gemeenschappelijk het idee dat ik blikwisseling noemde, in ’t bijzonder *inversie* en *conversie*, deugden die van ouds door wiskundigen gepleegd en gewaardeerd zijn. Nooit is een wiskundig denkbeeld publiek gemaakt zoals het ontstaan was. Er zijn technieken ontwikkeld en ze worden gebruikt om, als er een probleem is opgelost, de oplossingsprocedure ondersteboven te keren, of bij een groter complex van uitspraken en theorieën, definities als proposities, proposities als definities te herscheppen, de gloeiende uitvinding als ijskoude schoonheid. Waar dit streven de leerstof heeft beïnvloed, verschijnt de *didactische* inversie, die in feite *antididactisch* is. In plaats van daaraan toe te geven zou men jonge lerenden in de gelegenheid moeten stellen, om als het ware het leerproces van de mensheid te herhalen. Uiteraard niet in de triviale zin van een beknopte versie; maar zeker mogen we van de jonge generatie niet eisen daar in te stappen waar de voorafgaande aankwam.

Onze wiskundige begrippen, structuren, denkbeelden zijn uitgevonden als werktuigen om de verschijnselen van de fysische, sociale, mentale wereld te ordenen. *Fenomenologie* van wiskundige begrippen, structuren, denkbeelden betekent: ze in hun relatie tot de fenomenen te beschrijven waarvoor zij geschapen en waartoe zij uitgebreid werden in het leerproces van de mensheid; en voorzover deze beschrijving met het leerproces van de jonge generatie te maken heeft, wordt zij *didactische fenomenologie*, wegwijzer voor de onderwijsgevende naar de instap van de lerende in het leerproces van de mensheid. Niet in haar geschie-

denis, maar in haar nog voortdurende leerproces — sloppen en omwegen vermijndend en levende wortels sparend en versterkend.

Al gebruikte ik die term niet expliciet, toch speelde didactische fenomenologie al in mijn vroegere werk een rol. In het onderhavige maak ik één trek nog meer expliciet: *mentale objecten* contra *begripsverwerving*. Begrippen vormen de ruggegraat van onze cognitieve bouwsels. Maar in het dagelijks bedrijf zijn begrippen geen *leerstof*. Al leren kinderen wat een stoel, wat voedsel, wat gezondheid is, we leren ze niet de *begrippen* stoel, voedsel, gezondheid. Met wiskunde is het eender gesteld. Kinderen leren wat getal is, wat cirkels zijn, wat optellen is en hoe een grafiek te maken. Zij vatten dat als *mentale objecten* en voeren het als *mentale activiteiten* uit. Het is juist dat getal en cirkel, optellen en grafisch voorstellen meer begripsmatige precisie toelaten dan stoel, voedsel, gezondheid. Is het daarom dat voorstanders van begripsverwerving prefereren getalsbegrippen in plaats van getallen en in 't algemeen begrippen in plaats van mentale objecten en activiteiten te onderwijzen? Wat ook de reden moge zijn, ziedaar een voorbeeld van antididactische inversie.

De didactische draagwijdte van mentale objecten en activiteiten en de aanzet van begripsvorming waar die didactisch mogelijk is, zijn het hoofdonderwerp van deze fenomenologie. Ze werd geschreven in de stimulerende sfeer van het IOWO en wordt derhalve opgedragen aan de nagedachtenis van die instelling die vermoord en ter ziele is, en aan haar medewerkers die doorgaan met in haar geest te werken.

1 VOORPROEF: LENGTE

1.1–1.11 FENOMENOLOGISCH

1.1–3 Wat is lengte?

1.1 ‘Lengte’ heeft meer dan één betekenis. ‘Tot in lengte van dagen’, ‘lengte en breedte’, ‘Oostelijke lengte’ sluiten als context verschillende betekenissen van ‘lengte’ in. Om te preciseren welke betekenis ik bedoel, plaats ik naast de vraag

wat is lengte?

enkele andere vragen:

wat is gewicht?

wat is duur (tijdsduur)?

wat is inhoud?

‘Lengte’, ‘gewicht’, ‘duur’, ‘inhoud’ zijn grootheden — maar hiermee is nog niet veel gezegd.

Als ik in de hier gepreciseerde zin het woord lengte gebruik, bedoel ik de lengte van iets, van een ‘lang’ voorwerp. ‘Lengte’ is dan synoniem met ‘breedte’, ‘hoogte’, ‘dikte’, ‘verte’, ‘wijdte’, ‘diepte’, die alleen op andere dimensies of situaties betrekking hebben. Bij een ‘liggende’ rechthoek spreekt men bij voorkeur van lengte en breedte, bij een ‘opstaande’ van breedte en hoogte.

1.2 Stilzwijgend heb ik mijn vraag omgebogen van ‘wat is lengte’ naar een antwoord toe: ‘lengte van ... is ...’. Dit is een typisch mathematische wending: termen, die men ‘los’ schijnt te gebruiken, als functie-symbolen op te vatten. De vragen

wat is ‘moeder’?

wat is ‘broer’?

wat is ‘buur’?

zijn gemakkelijker volgens het schema

moeder van ... is ...

broer van ... is ...

buur van ... is ...

te beantwoorden. Preciezer:

moeder van x is zij, die x het leven heeft geschonken,

broer van x is iedere y met de eigenschap dat y mannelijk is en x en y dezelfde ouders hebben,
buur van x is iedere y , zodat x en y naast elkaar wonen.

Achteraf kan men dan ook nog moeder 'los' definiëren:

x is moeder als er een y bestaat zo dat x moeder van y is.

Taalkundig horen 'mens', 'steen', 'huis' in dezelfde rubriek als 'moeder', 'broer', 'buur' — het zijn 'zelfstandigheden'; maar 'moeder', 'broer', 'buur' zijn dit op een andere wijze dan 'mens', 'steen', 'huis'. 'Moeder zijn', 'broer zijn', 'buur zijn' wordt pas zinvol door de — uitgesproken of onuitgesproken — toevoeging 'van wie'. 'Ze zijn broers', 'ze zijn burens' — hier schijnt het 'van' overbodig te zijn, maar is het niet; ze zijn 'broers, burens van elkaar'.

1.3 Terug naar 'lengte', dat we in 'lengte van ...' als functieteken opvatten — een functie, die van 'lange voorwerpen' vertelt hóé lang ze zijn. 'Lengte van x ' geeft aan hoe lang x is. Men hoeft hier niet direct aan een getalmatige specificatie te denken zo als

lengte van dit bed is 1,90 m.

Op zichzelf zouden vagere waarden als functiewaarden denkbaar zijn: lang, zeer lang, kort, zeer kort, enz., en in de praktijk worden dergelijke waarden veel gebruikt. Dat we er hier geen aandacht aan schenken, vindt er zijn reden in, dat we een fenomenologie van *mathematische* begrippen schrijven. Zijn 'lang', 'zeer lang', 'kort', 'zeer kort' geen mathematische begrippen? Op deze vraag moeten we later terugkomen; om de tegenwoordige discussie niet te vertroebelen, stel ik het antwoord uit.

1.4 Grootheden

Laat ik, eer ik verder ga, nog de andere bovengenoemde termen bekijken. Ook zij doelen op functies:

gewicht: gewicht van (een zwaar voorwerp),
duur: duur van (een tijdsinterval),
inhoud: inhoud van (een ruimteteel).

Ik wil er afkortingen voor invoeren:

$l(x)$: lengte van x ,
 $p(x)$: gewicht van x ,
 $d(x)$: duur van x ,
 $v(x)$: inhoud van x ,

waarbij de x dus telkens iets is waarbij men respectievelijk van lengte, gewicht, duur, inhoud kan spreken.

We komen terug tot de vraag wat de waarden van de functie l (en van p , d , v)

kunnen zijn. Niet ‘lang, kort’, resp. ‘zwaar, licht’, ‘groot, klein’, maar, omdat het over wiskunde gaat, preciezere waarden. Dat betekent nog niet zo iets als 1,90 m, 75 kg, 7 sec, 3 m³, want niets verplicht ons tot het metrieke systeem of tot welk a priori maatsysteem dan ook, en van deze vrijheid zullen we profiteren ten bate van dieper inzicht. Inderdaad zal blijken dat we ver kunnen gaan, zonder ons op een maatsysteem vast te leggen.

Laten we de

waarden van l lengtes
 waarden van p gewichten
 waarden van d duren
 waarden van v inhouden,

en het

systeem der lengtes L
 systeem der gewichten P
 systeem der duren D
 systeem der inhouden V

noemen en eigenschappen van deze systemen nagaan.

1.5 Optellen van lengtes

De eerste, die we noteren, is dat we lengtes al kunnen *optellen*, voor we ze *numeriek* kunnen vatten. Hoe geschiedt dit? Gegeven twee lengtes α en β . We verschaffen ons twee ‘lange voorwerpen’ x en y met respectievelijk deze lengtes

$$l(x) = \alpha, \quad l(y) = \beta$$

en we stellen die voorwerpen op een nader te preciseren wijze samen, waardoor een nieuw ‘lang voorwerp’ $x \oplus y$ ontstaat. Dit voorwerp bezit een zekere lengte, uiteraard $l(x \oplus y)$ genoemd. Het was onze bedoeling van de lengtes α en β de som $\alpha + \beta$ te definiëren en we stellen nu per definitie

$$\alpha + \beta = l(x \oplus y)$$

of te wel

$$1.5.1 \quad l(x) + l(y) = l(x \oplus y),$$

in woorden:

de lengte van het samenstel is de som van lengtes van de samenstellende delen.

Bij dit soort definities moet men wel op iets letten: we hebben voor de lengtes α en β representanten x en y gepakt, met net de gegeven lengtes. We hadden ook andere representanten, zeg x' en y' , kunnen pakken, dus

$$l(x') = \alpha, \quad l(y') = \beta,$$

die tot een samenstel $x' \oplus y'$ zouden leiden. Wil de definitie 1.5.1 zinvol zijn, dan moeten we ervan op aan kunnen, dat

$$1.5.2 \quad l(x' \oplus y') = l(x \oplus y)$$

is, anders gezegd

de lengte van het samenstel hangt er niet van af welke representanten ik voor de gegeven lengtes heb gekozen.

Ik moet ervoor zorgen, dat mijn wijze van samenstellen zo is, dat hieraan wordt voldaan.

Dit geldt analoog voor gewichten enz. Gegeven zijn twee gewichten α en β , waarvan ik de som wil definiëren. Ik pak twee 'zware voorwerpen' x en y met respectievelijk de gewichten α en β , voeg ze samen tot een nieuw 'zwaar voorwerp' $x \oplus y$ en definieer

$$p(x) + p(y) = p(x \oplus y).$$

Ook hier moet ik ervan op aan kunnen dat vervangen van x en y door x' en y' , met respectievelijk hetzelfde gewicht, aan het gewicht van het samenstel niets verandert. Het lijkt vanzelfsprekend en in zekere zin terecht: we zouden ons nooit voor lengte, gewicht, enz. hebben geïnteresseerd als deze voorwaarde niet vervuld was.

Een tweede opmerking: het samenstellen dat tot de somdefinitie voor lengtes enz. leidt, moet uiteraard zo geschieden, dat de samenstellende delen elkaar niet overlappen. Stel, ik wil de lengte α bij zich zelf optellen, dus de lengte $\alpha + \alpha$ bepalen. Ik heb er dan voor elke van die summanden een *andere* representant nodig, dus

$$l(x) = \alpha, \quad l(y) = \alpha$$

om aan

$$\alpha + \alpha = l(x) + l(y) = l(x \oplus y)$$

te komen. Ik kom er dus niet met één vaste representant voor elke lengte. Nu is het bij lengtes nogal gemakkelijk zich twee, drie, ... representanten voor dezelfde lengte te verschaffen als men die lengte twee, drie, ... keer wil optellen — denk aan instrumenten zoals de liniaal, die je herhaaldelijk neerlegt. Met gewichten enz. lijkt het wat moeilijker te realiseren, maar op de praktische realiseerbaarheid hoeft het ons hier niet aan te komen.

Bij de operatie $\oplus$ van samenstellen, zoals die zich in de verschillende gevallen voordoet, speelt volgorde geen rol en bijgevolg is een optelling van lengtes enz. een commutatieve en associatieve operatie

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \beta + \alpha \\ (\alpha + \beta) + \gamma &= \alpha + (\beta + \gamma). \end{aligned}$$

De eerste eigenschap, die we van de systemen L, P, D, V der lengtes enz. constateren, is dus

- I. Een commutatieve en associatieve operatie van optellen (+) in L , enz.

1.6 Orde van lengtes

Hier zal straks een aftrekking bijkomen, uiteraard een aftrekken: 'het kleinere van het grotere'. Maar van 'kleiner en groter' hebben we nog niets gehoord. Dat komt nu aan de beurt.

Zoiets als kleiner-groter heet een *orderrelatie*: tussen twee elementen van L , enz. bestaat precies een der betrekkingen

$$1.6.1 \quad \alpha < \beta, \quad \alpha = \beta, \quad \beta < \alpha$$

en voor drie, $\alpha, \beta, \gamma \in L$ geldt

$$1.6.2 \quad \alpha < \beta \text{ en } \beta < \gamma \text{ dan } \alpha < \gamma$$

(de *transitiviteit*).

Zo'n orderrelatie kunnen we nu in L , enz. door middel van de optelling definiëren; we stellen eenvoudig:

door optellen kan iets alleen groter worden,

in formule

$$1.6.3 \quad \alpha < \alpha + \kappa$$

voor welke lengtes, enz. α, κ dan ook. De transitiviteit 1.6.2 is dan meteen verzekerd. Immers als $\alpha < \beta$ en $\beta < \gamma$, dan is er een κ en een λ , zodat

$$\beta = \alpha + \kappa, \quad \gamma = \beta + \lambda$$

en dan is ook $\gamma = \beta + \lambda = (\alpha + \kappa) + \lambda = \alpha + (\kappa + \lambda)$, dus inderdaad $\alpha < \gamma$.

Met de eerste eis, 1.6.1, die we aan de orderrelatie stelden is het iets lastiger. Hij betekent:

$$1.6.4 \quad \begin{array}{l} \text{als } \alpha \neq \beta, \text{ dan is er} \\ \quad \text{òf een } \kappa \text{ met } \beta = \alpha + \kappa \\ \quad \text{òf een } \lambda \text{ met } \alpha = \beta + \lambda, \end{array}$$

maar niet beide tegelijk.

Ik noem — tussendoor — twee 'lange voorwerpen', x, y direkt vergelijkbaar als of x samenstellend deel van y , of y samenstellend deel van x is.

Ik kan de eis 1.6.4 nu als volgt in de taal van de 'lange voorwerpen' vertalen:

1.6.5 Gegeven twee 'lange voorwerpen', x, y , dan kan ik direct vergelijkbare 'lange voorwerpen', x', y' vinden met $l(x') = l(x)$, $l(y') = l(y)$, en hoe ik deze x', y' ook kies, altijd is

òf x' samenstellend deel van y' , òf y' samenstellend deel van x' .

De tweede eigenschap, die we van de systemen L , enz. hebben geconstateerd is:

- II. Met de definitie $\alpha < \alpha + \kappa$ voor alle lengtes α, κ is in L enz. een totale orde bepaald.

1.7 Vermenigvuldigen en delen van lengtes

Tellen we dezelfde lengte α telkens op, dan ontstaan lengtes die we ook aanduiden door

$$\begin{aligned}1\alpha &= \alpha, \\2\alpha &= \alpha + \alpha, \\3\alpha &= \alpha + \alpha + \alpha,\end{aligned}$$

enz. algemeen

$$n\alpha = \alpha + \dots + \alpha \text{ met } n \text{ summanden.}$$

Men merkt direct wetten op zoals

$$\begin{aligned}1.7.1 \quad (m+n)\alpha &= m\alpha + n\alpha \\(mn)\alpha &= m(n\alpha), \\n(\alpha + \beta) &= n\alpha + n\beta, \\ \text{als } \alpha < \beta \quad \text{dan } n\alpha < n\beta.\end{aligned}$$

Uit de optelling in L hebben we dus een vermenigvuldiging afgeleid van elementen van L enz. met positieve gehele getallen, elementen van $\mathbf{N}^+$. Als omgekeerde ervan kent men uiteraard het delen. Hiermee is bedoeld:

Gegeven een lengte α en een $n \in \mathbf{N}^+$ dan heeft de vergelijking

$$1.7.2 \quad n\beta = \alpha$$

een oplossing β . Vanzelf is er dan ook maar één zo'n β , want is ook nog

$$n\beta' = \alpha,$$

dan is

$$\beta < \beta' \quad \text{of} \quad \beta = \beta' \quad \text{of} \quad \beta' < \beta$$

maar in het eerste en derde geval zou er dan

$$\alpha = n\beta < n\beta' = \alpha \text{ resp. } \alpha = n\beta' < n\beta = \alpha$$

uitkomen, hetgeen niet kan, dus blijft alleen

$$\beta = \beta'$$

over.

We noemen de oplossing van 1.7.2

$$\beta = \frac{1}{n}\alpha.$$

$\frac{1}{n} \alpha$ is dus zo gedefinieerd dat

$$1.7.3 \quad n\left(\frac{1}{n} \alpha\right) = \alpha.$$

is.

We hebben als derde eigenschap van lengtes, enz.:

III. Bij elke $\alpha \in L$ enz. en elke $n \in \mathbf{N}^+$ is er één $\frac{1}{n} \alpha \in L$, enz. zodat

$$n\left(\frac{1}{n} \alpha\right) = \alpha.$$

Met gemak vindt men voor het delen de wetten:

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n} \alpha\right) = \frac{1}{mn} \alpha,$$

$$1.7.4 \quad \frac{1}{n}(\alpha + \beta) = \frac{1}{n} \alpha + \frac{1}{n} \beta,$$

$$\text{als } \alpha < \beta \quad \text{dan } \frac{1}{n} \alpha < \frac{1}{n} \beta.$$

1.8 Rationale veelvouden

We kunnen het vermenigvuldigen en delen van elementen van L , enz. met elementen van $\mathbf{N}^+$ ook met elkaar combineren en het ligt voor de hand dan te stellen

$$1.8.1 \quad m\left(\frac{1}{n} \alpha\right) = \frac{m}{n} \alpha$$

hetgeen in het vermenigvuldigen van lengtes met positief rationale getallen resulteert. Nu kan een zelfde rationaal getal verschillend worden geschreven,

$$\frac{m}{n} = \frac{km}{kn}.$$

Wil de definitie 1.8.1 houdbaar zijn, dan moet

$$m\left(\frac{1}{n} \alpha\right) = km\left(\frac{1}{kn} \alpha\right)$$

zijn. Dit is inderdaad zo: Naar 1.7.4 is

$$\frac{1}{kn} \alpha = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n} \alpha\right)$$

dus

$$\begin{aligned} km\left(\frac{1}{kn} \alpha\right) &= mk\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n} \alpha\right)\right) \\ &= m\left(\frac{1}{n} \alpha\right). \end{aligned}$$

We kunnen dus nu elke lengte, enz. met elk positief rationaal getal $r \in \mathbf{Q}^+$ vermenigvuldigen. Met gemak vinden we dan de wetten, voor $r, s \in \mathbf{Q}^+$, $\alpha, \beta \in L$ enz.:

$$\begin{aligned} (r+s)\alpha &= r\alpha + s\alpha, \\ (rs)\alpha &= r(s\alpha), \\ 1.8.2 \quad r(\alpha + \beta) &= r\alpha + r\beta, \\ &\text{als } \alpha < \beta \text{ dan } r\alpha < r\beta. \end{aligned}$$

1.9 Reële veelvouden

Uitgaande van een lengte, enz. α kunnen we er alle positief rationale veelvouden van vormen. Dit is een verzameling $\mathbf{Q}^+\alpha$. In $\mathbf{Q}^+\alpha$ zijn twee willekeurige elementen rationale veelvouden van elkaar. Dus kan $\mathbf{Q}^+\alpha$ onmogelijk uitputten hetgeen we ons als systeem der lengtes voorstellen. Immers, van zijde en diagonaal van een vierkant zijn de lengtes zeker niet rationale veelvouden van elkaar. Toch put $\mathbf{Q}^+\alpha$ het systeem der lengtes, enz. ‘bij benadering’ uit. We hebben een eigenschap, ook axioma van Archimedes genaamd,

IV. Gegeven een $\alpha \in L$, enz. dan is er geen element van L , enz., groter dan alle van $\mathbf{Q}^+\alpha$, en geen kleiner dan alle van $\mathbf{Q}^+\alpha$.

Ik pak nu een willekeurige $\beta \in L$, enz. Die hoeft niet tot $\mathbf{Q}^+\alpha$ te behoren, maar naar IV moet hij er ‘tussenin’ zitten. Voor elke $r \in \mathbf{Q}^+$ moet

$$1.9.1 \quad r\alpha < \beta \text{ of } r\alpha = \beta \text{ of } \beta < r\alpha$$

gelden. Ik wil nu β als reëel veelvoud van α voorstellen

$$\beta = u\alpha, \quad u \in \mathbf{R}^+$$

en wel zodanig dat het met de orde klopt:

$$\text{als } u < v \text{ dan } u\alpha < v\alpha \text{ voor } u, v \in \mathbf{R}^+,$$

speciaal voor $r \in \mathbf{Q}^+$

$$\begin{aligned} 1.9.2 \quad &\text{als } r < u \text{ dan } r\alpha < u\alpha, \\ &\text{als } u < r \text{ dan } u\alpha < r\alpha. \end{aligned}$$

Hoe vind ik zo’n u ? Wel, in 1.9.1 staat een verdeling van $\mathbf{Q}^+$ in drie klassen; de middelste kan geen of één element bezitten — dit laatste als β rationaal veelvoud van α is. Zo iets heet een snede van Dedekind:

$$\begin{aligned} &\text{de onderklasse: van de } r \in \mathbf{Q}^+ \text{ waarvoor } r\alpha < \beta, \\ &\text{de bovenklasse: van de } r \in \mathbf{Q}^+ \text{ waarvoor } \beta < r\alpha; \end{aligned}$$

ten hoogste één $r \in \mathbf{Q}^+$ kan aan de indeling ontsnappen. Er is nu een reëel getal, $u \in \mathbf{R}^+$ dat die snede veroorzaakt, dus

$$\begin{aligned} &\text{als } r\alpha < \beta \text{ dan } r < u \\ &\text{als } \beta < r\alpha \text{ dan } u < r \end{aligned}$$

en als we nu

$$\beta = u\alpha$$

stellen, klopt dit met de eisen van 1.9.2.

Gebleken is:

Van twee gegeven elementen van L , enz., is elk positief reëel veelvoud van het andere.

Men kan nu voortgaan met een eigenschap

V. Bij elke $\alpha \in L$, enz., en elke $u \in \mathbf{R}^+$ bestaat er een $u\alpha \in L$, enz.

Analoog aan die vroeger bij $\mathbf{Q}^+$ formuleert men wetten, voor $u, v \in \mathbf{R}^+$ en $\alpha, \beta \in L$, enz.

$$\begin{aligned} & (u + v)\alpha = u\alpha + v\alpha \\ 1.9.3 \quad & u(v\alpha) = (uv)\alpha \\ & u(\alpha + \beta) = u\alpha + u\beta \\ & \text{als } u < v \text{ dan } u\alpha < v\alpha. \end{aligned}$$

1.10 Lengtemaat

We zijn nu – voorlopig – aan het eind van dit verhaal; later als we grootheden systematisch behandelen, komen we er op terug.

Men kan hier de numerieke behandeling van lengten enz. aan vastknopen. Men kiest een maateenheid ϵ (m, kg, sec, m^3 of dergelijke), men kan dan elke lengte enz. als positief reëel veelvoud van de maateenheid uitdrukken. Iedere lengte enz. wordt dan door een maatgetal gerepresenteerd en overeenkomstig de wijze van ontstaan geldt dan de fundamentele regel

bij het samenstellen $\oplus$ worden de maatgetallen opgeteld,

waaruit onder meer volgt

het langere, zwaardere voorwerp, enz. heeft het grotere maatgetal.

1.11 Wat hier ontbreekt

Het voorgaande was een proeve van fenomenologie, in casu voor de mathematische structuur ‘grootheid’. Of veeleer het was een stuk eruit. Er was vrijwel geen aandacht aan het meten besteed; verbanden tussen verschillende grootheden vereisen een wijds voortzetting, en tenslotte is er niet van gerept dat we een lengte niet alleen aan ‘lange voorwerpen’ toekennen, maar bijv. ook aan gebroken en kromme lijnen. Hoe de gebroken lijnen, bijv. omtrek van een driehoek, in dit verband behandeld moeten worden, is niet moeilijk te gissen. Anders is het met kromme lijnen gesteld. De klassieke weg is die, ze door gebroken lijnen te benaderen. Zo deed Archimedes het al met de omtrek van de cirkel. Ik sla dit expres hier over, om er later op terug te komen.

1.12–1.29 DIDACTISCH FENOMENOLOGISCH

1.12 Aspecten van fenomenologie

Het voorgaande was geen *didactische* fenomenologie. Om het verschil duidelijk te maken, heb ik de fenomenologie sec voorop gesteld. Maar ook in 't vervolg zal meestal aan de didactische fenomenologie een fenomenologie sec vooraf gaan, als kader van begrippen en termen, waarvan de didactische fenomenologie kan profiteren.

Het verschil tussen fenomenologie sec en *didactische* fenomenologie zal spoedig duidelijk worden: in het eerste geval wordt een mathematische structuur in de wijze waarop zij haar – eventueel nietmathematische – objecten beschrijft, als cognitieve verworvenheid behandeld, in het tweede als onderwijsleerstof, dus als cognitieve verwerving binnen leerprocessen. Ik zou nog een stap terug kunnen gaan, naar een *genetische* fenomenologie van mathematische structuren, waar deze als cognitieve verwerving in mentale groeiprocessen zouden worden bestudeerd.

Men zou denken, dat de didactische fenomenologie zich op een genetische zou moeten baseren en het zou inderdaad alleen nuttig zijn als ik in deze didactische fenomenologie van genetische fenomenologie gebruik kon maken. In feite is dit niet het geval en hoe langer ik met deze vragen bezig ben, des te meer raak ik ervan overtuigd, dat men de zaken juist omgekeerd moet zien: in de reeks 'fenomenologie, didactische fenomenologie, genetische fenomenologie' heeft veeleer elke volgende de voorafgaande tot basis. Om een fenomenologie van wiskundige structuren te schrijven hoeft men alleen wiskunde te kennen; een didactische fenomenologie vereist *bovendien* kennis van het onderwijs; en genetische fenomenologie is *bovendien* een stuk psychologie.

Wat er nu aan dergelijke psychologische onderzoeken tot nu toe bestaat, lijdt aan één fundamenteel euvel: het zijn onderzoeken over mathematische verworvenheden (op zekere leeftijden), waarin de betrokken mathematische structuren naief, zonder voorafgaande fenomenologie, optreden en derhalve aan te oppervlakkige of foutieve interpretaties blootstaan. Het ontbreken van een voorafgaande didactische fenomenologie heeft ten gevolge dat die onderzoeken – veelal – als van elkaar losstaande momentfoto's geprojecteerd zijn en niet als stadia in een ontwikkelingsproces.

1.13–1.25 LENGTE-VERGELIJKING

1.13–1.14 Lengte in bijvoegelijke naamwoorden

1.13 Vele mathematische begrippen kondigen zich in bijvoegelijke naamwoorden aan. Bijvoegelijke naamwoorden, die bij 'lengte' horen zijn 'lang, kort', maar ook 'breed, smal', 'dik, dun', 'hoog, laag', 'diep, ondiep', 'ver, nabij', 'wijd, nauw', 'ruim, krap' en tenslotte nog 'rijzig, struis, pieterig, nietig'. Het

spreekt vanzelf dat het onderscheidingsvermogen voor deze en dergelijke eigenschappen aan de taalkundige uitdrukkingsmogelijkheden voorafgaat. Voor de volwassene is het, althans onbewust, duidelijk, dat en hoe deze uitdrukkingen op dezelfde grootheid, de lengte, betrokken zijn en hij veronderstelt dat het kind met dit verband bekend is – onderzoekers op dit gebied realiseren zich dit zelden. Men zou zich echter moeten afvragen, hoe het kind ertoe komt, deze verbanden te ontwikkelen. Een storende factor is zeker, dat dit complex van bijvoegelijke naamwoorden overkoepeld wordt door het paar ‘groot, klein’, dat zowat voor alles dienst kan doen (tot ‘de grote jongens’ en ‘de kleine meid’ toe).

Bastiaan (5; 3) vraagt me ‘hoe groot is een mol?’; ik wijs hem met mijn handen de lengte van een mol; hij antwoordt ‘neen, ik bedoel, hoe hoog?’ – Hij wordt gedwongen het ‘groot’ te differentiëren; het verband dat het beide keren om ‘lengte’ gaat, is hem blijkbaar bewust geworden.

Het begrip ervoor dat het bij al deze uitdrukkingen om lengte gaat, is geenszins triviaal, bijv. dat een *hoge* boom, als hij geveld is, *lang* is, enz. Trouwens, ook de volwassene heeft moeilijkheden met de equivalentie van afstanden in het horizontale en in het verticale, althans wat de kwantitatieve precisering aangaat.

Hoe komt het verband in dit complex van bijvoegelijke naamwoorden tot stand? Hoe wordt het gemeenschappelijke ervan geconstitueerd? Als ik mag gissen, zou ik een beslissende rol willen toekennen aan de hand- of vingerbewegingen, waarvan constatering zoals *zó lang*, *zó breed*, *zó dik* enz. (ook *zó kort* enz.) vergezeld gaan – bewegingen die wel verschillende kanten uit kunnen gaan en verschillende intensiteit kunnen bezitten, maar toch hetzelfde lineaire karakter bezitten. (Men vergelijk hiermee de mimiek van het omvatten, die bij ‘*zó veel*’, maar ook bij ‘*zó dik*’ kan voorkomen, en de mimiek van het tillen bij ‘*zó zwaar*’.)

Het gemeenschappelijke element in het complex der bijvoegelijke naamwoorden voor lengte is mogelijk nog niet bij alle jonge schoolkinderen operatief aanwezig; als bewustzijnsinhoud ontbreekt het zeker ook nog bij vele oudere kinderen. Het verwerven en bewustworden is een onmisbare voorwaarde voor mathematische activiteit.

1.14 Rond bijvoegelijke naamwoorden als ‘lang’ is er een relatie-complex van uitdrukkingen, zoals

langer, langst, even lang, minder lang, niet zo lang, te lang, erg lang.

Ook hier is het weer zo, dat het onderscheidingsvermogen aan de taalkundige uitdrukkingsmogelijkheid vooraf gaat (bijv. iets wil niet door een gat, omdat het *te dik* is; de *kleinere* kubus wordt op de *grotere* geplaatst). Er zijn remmingen voor het gebruik van vergelijkende en overtreffende trappen; ‘groot’ wordt dan in de betekenis van ‘groter’ en ‘grootst’ gebruikt.

De bijvoegelijke naamwoorden van deze lijst doelen op het vergelijken van voorwerpen met betrekking tot hun lengte. Dit gaat uiteraard tijden vooraf aan het constitueren van wat de wiskundige een orderrelatie voor lengtes noemt, om van het bewustworden van die orderrelatie geheel te zwijgen. Van de constitutie van

een orderelatie in welk systeem dan ook kan niet eerder worden gesproken, dan wanneer de transitiviteit van de relatie operationeel is geworden, d.w.z. wanneer conclusies als

a even lang als b ,
 b even lang als c ,
dus a even lang als c

en

a korter dan b ,
 b korter dan c .
dus a korter dan c

metterdaad kunnen worden getrokken, hetgeen ook weer niet betekent, dat het kind dan aan het verbaliseren ervan toe is.

In tegenstelling tot Piaget toonde P. Bryant¹⁾ aan dat kinderen van vier jaar af aan operationeel lengtebegrip hebben. Ik gaf eerder²⁾ het voorbeeld van de 3e klassers, die wel in wiptoestanden de transitiviteit van de zwaarder-relatie konden toepassen, maar een formulering van de transitiviteit niet eens begrepen.

Het experimenteel onderzoek omtrent het lengtebegrip van kinderen op verschillende leeftijden is weinig verhelderend. Het denken op dit terrein is vertroebeld door termen als 'conservatie' en 'reversibiliteit', die de meest uiteenlopende zaken moeten dekken, en door een uiterst gebrekkige fenomenologie.

1.15 Congruentie-afbeeldingen

Een der wiskundige begrippen die door 'conservatie' zijn opgeslokt en daar met andere samengeworpen, is

invariantie t.a.v. een verzameling van transformaties.

Ik wil dit begrip tussendoor door voorbeelden illustreren:

Het *aantal elementen* van een verzameling (de 'mchtigheid') is invariant t.a.v. één-één-afbeeldingen.

Convexiteit van een vlakke figuur is invariant t.a.v. affiene afbeeldingen.³⁾

Evenwijdigheid van rechten is invariant t.a.v. affiene afbeeldingen.

Het onderscheid tussen *boloppervlak* en *ringoppervlak* is invariant t.a.v. willekeurige vervormingen (door vervormingen kun je een ringoppervlak niet in een boloppervlak transformeren).

Lengtes van lijnstukken en *maten van hoeken* van lijnenparen zijn invariant t.a.v. congruentie-afbeeldingen in het vlak of in de ruimte (bewegingen en spiegelingen — glijspiegelingen inclusief).

De *lengte-verhouding* van lijnstukken en maten van hoeken van lijnenparen is invariant t.a.v. gelijkvormigheids-afbeeldingen.

De eigenschap een regelmatige vijfhoek te zijn, is invariant t.a.v. gelijkvormigheidsafbeeldingen.

De eigenschap een kubus met riblengte 1 te zijn is invariant t.a.v. congruentie-afbeeldingen.

De eigenschap van een vlakke figuur, om een cijfer 2 voor te stellen is invariant bij bewegingen (maar niet bij spiegelingen).

De vorm van een figuur is invariant t.a.v. gelijkvormigheids-afbeeldingen.

Vorm en grootte van een figuur zijn invariant bij congruentie-afbeeldingen.

De uitdrukking *congruent* is welbekend; congruente figuren zijn als het ware 'dezelfde figuren' op verschillende plaatsen neergelegd. Dit begrip is mathematisch gepreciseerd door dat van de congruentie-afbeelding, die zich over het gehele vlak of de gehele ruimte uitstrekt; figuren heten congruent als ze door congruentie-afbeeldingen in elkaar kunnen worden overgevoerd.

De eenvoudigste figuur is het lijnstuk; i.p.v. 'congruente lijnstukken' zei men vroeger 'gelijke lijnstukken', maar sinds de opkomst van een zuiverdere terminologie reserveert men het woord 'gelijk' voor het samenvallen, het wezenlijk identiek zijn. Toch hebben congruente lijnstukken iets gelijk, namelijk hun lengte, en omgekeerd: lijnstukken met dezelfde lengte zijn congruent, kunnen door congruentie-afbeeldingen in elkaar worden overgebracht.

1.16 Vaste lichamen

Lijnstukken zijn wiskundige abstracties. Het verband met wat eerder 'lange voorwerpen' werd genoemd, is via het verschijnsel 'vast lichaam' gelegd. Een vast lichaam kun je verplaatsen, en als je het niet te hard toetakelt, blijft het daarbij met zichzelf congruent. Vastheid is de fysische realisering van wat we daarstraks invariantie van vorm en grootte bij bewegingen noemden. Dat we in de meetkunde bij voorkeur naar eigenschappen kijken, die bij bewegingen invariant zijn, heeft uiteraard met het overheersen van vaste lichamen in de wereld om ons heen te maken – voor mollusken zou een ander soort meetkunde weggelegd zijn.

Het lijkt me zeker dat vastheid in een vroeger ontwikkelingsstadium ervaren worden dan lengte, en dat lengte en invariantie van lengte veeleer uit de vastheid geconstitueerd worden dan omgekeerd. Vastheid beslaat alle dimensies, terwijl voor lengte voorwerpen vereist zijn, waarbij een dimensie duidelijk bevoorrecht of beklemtoond is. Dit onderstrepen van één dimensie mag echter niet tot een beperking van de transformaties leiden. Wil lengte-*vergelijking* mogelijk zijn, dan moet de vrije bewegelijkheid van die vaste lichamen meespelen. De vastheid moet vol geëxploiteerd kunnen worden, alle bewegingen moeten tot hun recht komen, niet alleen de meest voor de hand liggende translaties, maar ook de draaiingen, om 'lange voorwerpen' in alle posities te kunnen vergelijken. Uit de gedaante van het lichaam en de beklemtoning van één afmeting als lengte mag geen beperking resulteren van de transformaties ten opzichte waarvan vastheid

zich als invariantie uit. Bijvoegelijke naamwoorden als ‘hoog, laag’ in het complex van de lengte aanduidende woorden kunnen aanleiding zijn tot beperking van de transformaties; ‘hoog, laag’ legt de nadruk op één richting in de ruimte, kan dus effectief zijn in het beperken tot die transformaties die de verticaal invariant laten – verschuivingen en draaiingen om de verticaal, waardoor het vergelijken van lijnstukken en lange voorwerpen belemmerd wordt.

1.17 Gelijkvormigheden

Ik heb herhaaldelijk naast de congruentie-afbeeldingen de gelijkvormigheidsafbeeldingen genoemd. Zij spelen in de interpretatie van het visueel waargenomen een rol. ‘Wat verder weg is, lijkt kleiner’ (althans op grote afstanden); dit is iets waarmee de waarnemer in de waarneming onbewust rekening houdt en dat hij zich bij tijd en wijle ook bewust maakt – een merkwaardige wisselwerking, waarover veel geschreven is. Als een vast lichaam zich verwijderd, blijft zijn waarneembare vorm behouden; visueel blijven de vaste lichamen onder gelijkvormigheden invariant, met dien verstande dat de vermenigvuldiging afhangt van de afstand tussen object en waarnemer.

Desniettemin moet juist dit feit tot de mentale constitutie van vast lichaam bijdragen. De door de continuïteit van opvallende kenmerken gesuggereerde invariantie van het object lokt het toekennen van andere invarianties uit, in het bijzonder van de invariantie van grootte en lengte.

1.18–1.20 Flexies

1.18 De vastheid van vaste lichamen is uiteraard met een korreltje zout te nemen. Van een auto draaien de wielen, de deuren, het stuur, maar globaal en onder vele omstandigheden kan de auto als vast lichaam worden beschouwd. Het andere extreem is klei, die je met zacht geweld kunt kneden en vervormen. Het hangt ervan af wat je ‘niet te hard toetakelen’ noemt. Een vloeistof of een gas kun je, zonder kracht te gebruiken, een andere gedaante geven, naar mate van de vastheid zijn sterkere of minder sterke krachten nodig, om een vast lichaam te vervormen. Er kunnen min of meer vaste onderdelen tegen elkaar beweeglijk zijn, zoals bij dierlijke lichamen, waar dan zekere rangschikkingen van de onderdelen ten opzichte van elkaar een bevoorrechte rol spelen, zoals de ruststand, die zich naar wens congruent laat herhalen; lengtematen van het lichaam zijn dan ook in deze bevoorrechte toestanden te bepalen. De lichaamslengtes, zeg van twee mensen, worden vergeleken als ze staan; we zijn ervan overtuigd, dat ze niet veranderen als ze gaan zitten, en we weten dat ze als ze weer overeind komen, dezelfde relatie te zien geven. We oordelen ook dat als de langere in het zitten korter verschijnt, dit door de beenlengte goed moet worden gemaakt – maar dit is iets waarop we nog in verband met de optelling terug moeten komen.

1.19 In feite speelt hier een ander invariantie-principe, lengte-invariantie t.a.v. andere afbeeldingen dan congruentie-afbeeldingen van vlak of ruimte. Het gaat om transformatie van ‘lange voorwerpen’ door reversibel (omkeerbaar) knikken en buigen met verwaarloosbare krachtsinspanning – twee te vergelijken voorwerpen worden op of naast elkaar gelegd, terwijl zekere vervormingen worden toegelaten. Typische voorbeelden hiervan zijn meetinstrumenten van ander karakter dan liniaal en meetlat, zoals de centimeter, de scharnierende duimstok en de opgerolde van metaal, maar ook een primitiever werktuig, het touwtje mag er wezen; het toont bijzonder fraai twee gevallen van lengtevergelijking: strak getrokken om een rechte lengte te meten, en om een kromlijnig begrensde vlakke figuur gelegd, ter bepaling van een omtrek.

In tegenstelling tot de eerder behandelde vaste voorwerpen wil ik dit soort als *flexibel* aanduiden en de toelaatbare vervormingen van deze voorwerpen de naam *flexies* geven. De flexies zijn reversibel – dit is een belangrijke factor; bovendien bezitten deze flexibele voorwerpen meestal één of meer voorkeuro toestanden. Onder die voorkeuro toestanden kunnen er zijn waarbij het voorwerp rechtlijnig uitgerekt is en in die toestand wordt het dan wel als instrument voor lengtevergelijking gebruikt: de centimeter, de scharnierende duimstok, de oprolbare van metaal, en ook weer het touwtje, dat met weinig kracht strak kan worden getrokken, maar zich dan tegen verdere verlenging verzet. Je eigen lichaam is trouwens ook een beetje van dit soort; wil je het laten meten, dan moet je recht gaan staan (maar niet op je tenen). Zo doe je ook als je de lengte van een halm of een riet of een traploper wilt weten – je trekt ze recht; de lengte van een auto-antenne – je trekt hem uit. Een vel papier is flexibel, maar de koker die je ervan kunt rollen, is weer zoiets als een vast lichaam. Elastiek is anders; in niet gespannen toestand is het flexibel, maar er bestaat geen duidelijk aanwijsbare toestand van maximale uitrekking. Met plastisch vervormbare voorwerpen zoals klei is het weer anders; een lang voorwerp uit klei kun je met de nodige voorzichtigheid nog flexibel behandelen, maar elke kneedtransformatie is geen flexie meer.

1.20 Waar kunnen we nu de flexies mathematisch onderbrengen? Bij de vaste lichamen die getransporteerd (maar niet toegetakeld) mogen worden, hoorden de meetkundige figuren én de bewegingen in vlak en ruimte, afbeeldingen waarbij alles congruent wordt afgebeeld, van elk lijnstuk in elke richting ook de lengte behouden blijft. Voor *meten* is deze beperking eigenlijk een luxe; de ‘lange voorwerpen’ hoeven alleen maar in de lengterichting, langs de schaal, deze invariantie te vertonen. Alleen in de lengterichting moet het voorwerp stijf zijn; in de breedte en dikte hoeft het niet. Dit soort voorwerpen wordt mathematisch geïdealiseerd tot wat je een kromme noemt – een kromme zoals door een bewegend punt beschreven of door de rand van een vlakke figuur gevormd. Uiteraard laten we hier ook – geheel of stuksgewijs – rechte krommen toe, lijnstukken en lijntrekken. Op mathematische krommen pas ik mathematische ‘flexies’ toe. Wat bedoel ik hiermee? Ik heb bij de krommen alleen met een dimensie te maken – geen breedte en geen dikte – en in de lengte moeten ze stijf blijven; de boog-

lengte die in de plaats van de rechte lengte komt, moet onder flexie behouden blijven. Ik definieer dus flexies mathematisch als afbeeldingen van krommen die de booglengte behouden.

Maar wat bedoelen we met booglengte op een kromme? Het lijkt nogal duidelijk: men trekt de kromme recht, zonder hem te rekken, en op het uiteindelijke rechte beeld leest men de booglengte af. Wel, is dit niet een logische cirkel? Wat betekent daar 'recht trekken zonder te rekken'? 'Niet rekken' – daarmee bedoelen we dat de booglengte behouden blijft, en wat 'booglengte' betekent, moest net worden gedefinieerd. Het is trouwens kenmerkend dat ik alleen maar het rekken verbied en niet ook het krimpen. Natuurlijk bij het *recht trekken* bestaat de mogelijke fout in te hard trekken, met als gevolg uitrekken. De beweerde duidelijkheid van de rechte trekdefinitie van booglengte is niet aanschouwelijk van aard, veeleer kinestetisch.

Een andere definitie van booglengte van krommen verdient nog de aandacht: ik rol krommen, die ik met elkaar vergelijken moet, *op elkaar af*, speciaal een kromme waarop ik de booglengte bepalen wil, rol ik af op een rechte. Afrollen ja, en natuurlijk zonder slippen. Maar wat betekent dit mathematisch, zonder slippen? Dat de langs elkaar rollende stukjes altijd even lang zijn, dat ze dezelfde booglengte hebben? Ja, dan is de logische kring weer gesloten.

Er is geen ontkomen aan. Als we flexies mathematisch willen definiëren, moeten we weten wat booglengte is, en booglengte moet zelfstandig worden gedefinieerd, zonder beroep op mechanica.

Hoe men dit aanpakt, heb ik eerder geschetst: Men definieert eerst lengte van een lijntrek als som van de lengtes van de samenstellende lijnstukken. Gegeven een kromme, dan gaat men die benaderen door 'ingeschreven' lijntrekken, dus met hun hoekpunten op de kromme; hoe kleiner de samenstellende lijnstukjes, des te beter is de benadering van de kromme door de lijntrek. Hieraan parallel loopt de beschouwing van de lengtes; naarmate de lijntrekken de kromme beter benaderen, zullen hun lengtes naar een lengte convergeren, die we nu als lengte van de kromme zullen opvatten. Niet alleen de hele kromme, maar ook elke deelboog ervan krijgt op deze wijze een lengte en, hoewel het bewijs enige moeite vereist, is het vrij duidelijk, dat deze lengtes zich additief gedragen; bij splitsing van een boog in twee deelbogen is de lengte van het geheel gelijk aan de som van de lengtes van de delen. Wat nu onder een de booglengte behoudende afbeelding – een flexie – van een kromme op een andere te verstaan is, is duidelijk: niet alleen in 't geheel, maar in alle onderdelen moet de booglengte bij het afbeelden behouden blijven.

Het valt op dat een zo intuïtief idee als dat van *booglengte behouden* of van *recht trekken zonder uitrekken* of van het *afrollen* mathematisch zo'n omslachtig lijkende procedure ter verklaring vereist. De oorzaak hiervan is, dat we bij pogingen, om mathematisch te verklaren, van onze *mechanische* ervaringen afstand moeten doen. Maar vooral is het merkwaardig dat ik fysisch twee flexibele voorwerpen door flexie kan vergelijken of twee randkrommen van vaste figuren door ze op elkaar af te rollen, al eer ik met *lengte-meten* ben begonnen. Maar in onze *mathematische* definitie van booglengte, dus ook van flexie en van

afrollen, zit al het hele meten, in 't bijzonder ook het optellen van gemeten lengtes opgesloten.

1.21 Vastheid en flexibiliteit

We hebben hier met twee soorten afbeeldingen te maken gehad

congruentie-afbeeldingen van het vlak of de ruimte,
flexies van krommen.

Beide soorten zijn mathematisch gedefinieerd door het invariant blijven van de lengte, alleen snijdt in het eerste geval die eis veel dieper in dan in 't tweede, waar het alleen om de booglengte op krommen gaat.

Het feit dat congruentie-afbeeldingen en flexies lengte invariant laten, is, zoals we het hier opgezet hebben, eenvoudig in de definitie opgesloten. Maar aan de congruentie-afbeeldingen en de flexies beantwoordt ook fysisch iets – het verplaatsen van vaste lichamen, het buigen van flexibele lichamen – en of iets in de fysische praktijk, althans in voldoende benadering, een vast lichaam, een flexibel lichaam is, of fysische bewerkingen hierop toegepast, weer in voldoende benadering, de lengtes behouden, is een fysisch feit, waaromtrent je ervaringen moet hebben opgedaan. Dit ervaringen opdoen begint heel vroeg, zeker al in de wieg. Het is proefondervindelijk, experimenteel, en al is dit geëxperimenteer aanvankelijk, wat Bruner noemt *enactief*, in de loop van de ontwikkeling wordt het steeds vaker gesteund door voorstellingsbeelden van wat men zich herinnert of wenst te bereiken (*iconische* fase) en het wordt bewuster, om tenslotte geverbaliseerd te worden (*symbolische* fase). Er is een fenomenologische analyse vereist, om in de context van het verschijnsel 'lengte' de invariantie bij congruentie en die bij flexies te constateren en dan nog te onderscheiden, maar het is duidelijk dat zoiets reeds enactief begint – zonder voorstellingsbeelden en onbewust, maar daardoor bijzonder efficiënt – en dat een of ander ervan ook wel in leerprocessen bewust is te maken.

Bastiaan (3; 9) (vindt op straat een glazen knikker): 'als ik hard duw, zou hij op straat rollen'. Het gebeurt toch; hij rolt onder een band van een geparkeerde auto. Bastiaan kan hem niet te pakken krijgen. Ik wijs hem een stokje. Hij, op het gezicht: 'dit is niet hard genoeg'. Inderdaad een slap stokje, maar het lukt er wel mee.

Het gaat in dit voorbeeld niet over het gebruik van vaste of flexibele voorwerpen om lengtes te vergelijken, maar over ervaringen omtrent de mechanische eigenschappen van voorwerpen. Op zeker ogenblik in zijn ontwikkeling oordeelt een kind op het oog of iets 'hard' genoeg is om er als hefboom een vereiste kracht mee uit te oefenen (*iconische* fase), en heeft er een woord voor – hard genoeg – om dit feit uit te drukken (*symbolische* fase).

Ik heb geen idee hoe dit complex van mechanische eigenschappen mentaal wordt geconstitueerd; een goed fysicus, die kinderen observeert, zou hier veel kunnen ontdekken. Ik vermoed wel iets: dat vastheid aan flexibiliteit vooraf gaat. Door het hele milieu wordt ons het vast lichaam als model sterk gesuggereerd. Er zijn

verrassende proeven genomen, die aantonen, dat wij bij onvolledige informatie omtrent bewegingsverschijnselen een sterke neiging vertonen, die als bewegingen van vaste lichamen te interpreteren.

Het komt me daarom ook voor dat lengte allereerst in de invariantie-context van congruentie-afbeeldingen, dus in verband met vaste lichamen optreedt, en pas later in de context van de flexies, dus van flexibele voorwerpen, raakt. Zeker werkt hierbij mee, dat het kind met flexibele voorwerpen lengtes ziet vergelijken of zelfs meten (het passen ‘is de mouw lang genoeg?’; het meten met de centimeter).

In elk geval dient er — meen ik — aan de tweeledigheid van de context van invariantie van lengte aandacht te worden geschonken.

1.22 Breek en maak

Ik heb gearzeld — en zoals men zal zien ten onrechte — of ik aan de twee soorten transformaties waarbij invariantie van lengte waargenomen wordt, niet nog een derde zou moeten toevoeten, die ik

breek-maak-transformaties

wil noemen: een ‘lang voorwerp’ wordt stuk gebroken en weer gemaakt. Het langere voorwerp kan een stok zijn die inderdaad gebroken wordt, of een touw, dat doorgeknipt wordt, maar evenzeer een blokkentrein, die in twee of meer deeltreinen wordt gesplitst. In de eerste twee voorbeelden zal het maken niet tot volledig herstel leiden, maar als het goed uitgevoerd wordt tot herstel van lengte, met enig verlies in het tweede geval, als de touwtjes aan elkaar *geknoopt* worden. In het derde voorbeeld kan volledig herstel plaats vinden, maar het hoeft niet: de onderdelen kunnen in een andere volgorde samengesteld worden, en dat kan zelfs duidelijk zichtbaar zijn indien de afzonderlijke blokken verschillende lengtes of kleuren bezitten, of zich in andere kenmerken onderscheiden.

Het is zinvol en niet triviaal te constateren dat bij de breek-maak-transformaties, zoals hier bedoeld de lengte invariant is. Het is zinvol als het vergelijken betrekking heeft op begin- en eindtoestand en niet op intermediaire toestanden, want hoe zou men, als die wel toegelaten waren, de vraag dan moeten formuleren? ‘Blijven ze samen even lang?’ — als met het ‘samen’ een optelling van lengtes bedoeld is, is de vraag in het stadium van simpel lengte-vergelijken prematuur. Als met ‘samen’ bedoeld is ‘wanneer ik ze weer samenstel’, dan behelst de vraag een vergelijking van de begintoestand met de — nu ook mentale — eindtoestand, brengt dus niets nieuws.

Wanneer een breek-maak-transformatie de begintoestand reproduceert, is de vraag ‘zijn ze even lang?’ triviaal, of veeleer, het antwoord zegt er alleen iets over of het kind tot wie de vraag gericht is, de begintoestand heeft onthouden, en een actuele met een mentaal aanwezige toestand kan vergelijken. Is de eindtoestand niet helemaal met de begintoestand identiek, dan zegt het antwoord er ook nog

iets over of het kind weet op welke kenmerk het aankomt als van lengte sprake is. Op deze twee bekwaamheden moeten we straks nog terugkomen.

Voor de rest wil ik het inzicht in lengte-invariantie bij een breek-maak-transformatie in twee delen splitsen

ten eerste dat bij het breken (verdelen) en maken (samenstellen) van 'lange voorwerpen' weer 'lange voorwerpen' ontstaan,
ten tweede dat het bij het samenstellen van lange voorwerpen, wat de lengte betreft, op de volgorde van de samenstellende delen niet aankomt.

Deze twee inzichten zijn de basis van het meten van lengtes en zullen daarom straks nog nader ter sprake komen. Wenst men het tweede inzicht in het kader te plaatsen van de invariantie van lengte t.a.v. zeker soort transformaties op lange voorwerpen, dan zou men als naam voor die transformaties i.p.v. breek-maak-transformaties beter kiezen

permutaties van samenstellende onderdelen.

Ik kan de aarzeling, waarvan ik in het begin van deze sectie sprak, nu duidelijk maken. 'Breek-maak-transformaties' en 'permutaties van samenstellende onderdelen' lijken als derde soort transformaties logisch en fenomenologisch overbodig. In een fenomenologie van grootheden en speciaal van lengte, zoals ik in 't begin schetste, zijn de breek-maak-transformaties en de permutaties uit de samenstellende onderdelen alsmede de bijbehorende lengte-invarianties uit de congruentie-afbeeldingen en de flexies en hun invariantie-eigenschappen afleidbaar. Maar deze afleidbaarheid is een gevolg van een uit didactisch en genetisch fenomenologisch oogpunt premature koppeling van het lengte-vergelijken aan het meten. Het samenstellen van lange voorwerpen komt wel ook in die fenomenologie als afzonderlijke operatie voor, aangeduid door $\oplus$, maar de context waarin deze operatie dan staat, is de lengte en niet het lengte-vergelijken, de formule

$$l(x \oplus y) = l(x) + l(y).$$

$\oplus$ lijkt veeleer een logische dan een meetkundige en mechanische operatie: $x \oplus y$ verschijnt als iets dat ondubbelzinnig door x en y bepaald is, terwijl het een voor breek-maak-transformaties essentiële eigenschap is, dat x en y op verschillende wijze samengesteld kunnen worden en hoe ook samengesteld even lange voorwerpen opleveren.

1.23–1.24 Afstand

1.23 In onze didactische-fenomenologische analyse hebben we tot nu toe lengte altijd als functie gezien van concrete voorwerpen (evtl. vervangen door mentale beelden ervan). Nu voldoet dit niet in alle gevallen waar van lengte sprake is. Lengte als afstand tussen A en B antwoordt op de vraag 'hoe ver is het van A tot B ?'. Al formeel is 'hoe ver?' een totaal ander soort vraag dan 'hoe lang?'. In 'hoe ver is het van A tot B ' treden twee punten als variabelen op, in 'hoe lang is dit

voorwerp?’ is ‘voorwerp’ de variabele. Lengte is een functie van hele voorwerpen, verte of afstand een functie van twee punten, ‘hier en daar’. We zijn aan de procedure waarmee tussen beide een verband wordt gelegd, zo gewend, dat we niet op het idee komen, deze procedure eens een keer al lerende te hebben verworven, en ons af te vragen of voor kinderen dit verband even vanzelfsprekend moet zijn. Wil ‘hoe ver’ door ‘hoe lang’ worden vervangen, dan moet er tussen *A* en *B*, tussen ‘hier’ en ‘daar’ een lang voorwerp komen. Wel, als *A* en *B* spoorstations of plaatsen langs de grote weg zijn, kan de spoorverbinding of het stuk autoweg tussen *A* en *B* als het concrete ‘lange voorwerp’ worden beschouwd, waarvan de lengte gevraagd is. Algemeen, als er een concrete weg tussen *A* en *B* bestaat, is afstand tussen *A* en *B* de lengte van deze concrete weg; als het er meer zijn, moet expliciet gemaakt worden, welke bedoeld is. Maar hoever is het van de voorkamer op de begane grond naar de achterkamer op de eerste verdieping, van hier naar de overkant van het kanaal als er geen brug zichtbaar is, van hier ‘tot de lucht’? Uit de context moet blijken wat er bedoeld is. In de context van de meetkunde, de mechanica, de optica, wordt de afstand volgens de rechte lijn gemeten, in de context van boldriehoeksmeting, scheepvaart en luchtvaart volgens een boog van een grote cirkel – in beide gevallen verbindingskrommen, die bepaald zijn als de kortste weg of als de strak getrokken touwtjes, ook geodetische lijnen genaamd. Ik bedoel met deze opmerking niet, dat de aangegeven gebieden als vakken bestudeerd of beoefend moeten zijn, eer tot het bepalen van de afstand langs geodetische lijnen besloten kan worden; dergelijke contexten ontwikkelen zich lang voor ze bewust worden gemaakt. Wat rechtlijnigheid waard is, wordt het kind vroegtijdig gesuggereerd, enactief wanneer het recht op je af moet komen, om in je armen opgevangen te worden, iconisch door al die horizontale en verticale rechten in zijn wereld, en symbolisch door rechte lijnen in schema’s en het woord ‘rechte lijn’. De rol van de rechtlijnigheid in de constitutie van ‘lengte’ blijft onbewust, tot erover gesproken moet worden. Het rechte trekken van flexibele voorwerpen bij lengte-vergelijking kan misschien nog als automatische handeling – bij voorbeeld als automatische nabootsing – geschieden en misschien zijn er ook kinderen die even automatisch tussen twee ongerelateerde punten een mentaal lang voorwerp, een denkbeeldige liniaal of touw aanbrengen om de afstand er tussen als lengte te vatten. Hoe belangrijk deze mentale handeling is voor het omzetten van ‘hoe ver’ in ‘hoe lang’ tonen de bekende proeven waar door een scherm, tussen de twee punten geplaatst, de proefpersonen gedesoriënteerd worden. Hoe dan ook, als een uitspraak omtrent de afstanden van paren ongerelateerde punten gemotiveerd moet worden, kan het nauwelijks anders of de noodzaak van rechtlijnig verbinden moet geëxpliciteerd worden. Van dit ogenblik af aan zal de betekenis van de rechtlijnigheid voor het lengtebegrip steeds bewuster worden – we komen op een ander verband van lengte met rechtlijnigheid straks te spreken.

1.24 Hoe leert een kind waar het bij het lengte-vergelijken op aan komt? Ik denk dat stellen gelijksoortige voorwerpen van uiteenlopende lengte hierbij een voorname rol spelen – grote en kleine lepels (en dus ook even lange), lange en

korte treinen (en dus ook even lange), hoge en lage bomen (en dus ook even hoge). De voorwerpen worden op 't gezicht vergeleken als ze zich parallel naast elkaar bevinden; ze worden om vergeleken te kunnen worden in die posities getransporteerd, fysisch of mentaal, als vaste lichamen, door congruentie-afbeeldingen. Dit vereist het kunnen vergelijken van fysische met mentale voorwerpen of van mentale onderling. Het geheugen voor lengte schijnt aanvankelijk heel ruw te functioneren; lengte onthouden over lange intervallen blijft trouwens moeilijk – althans wat mezelf betreft, verbaas ik me telkens weer over lengte-verhoudingen die ik me heel anders herinner dan ik ze ineens te zien krijg. Het vergelijken van naast elkaar liggende voorwerpen wordt steeds meer gepreciseerd – het liniaal wordt nauw langs de lijn gelegd, waarbij het voorschrift luidt, loodrecht op het lijnstuk te viseren. Het verband tussen 'lengte' en 'verte' wordt beklemtoond en het gewicht wordt naar 'verte' verschoven, als op een der te vergelijken voorwerpen of op beide merken zijn aangebracht, waarmee beginnen eindpunt van het te vergelijkende kunnen worden vastgelegd. Het vergelijken kan indirect geschieden, waarbij van de transitiviteit van de orderrelatie wordt geprofiteerd, bij voorbeeld door afstanden tussen de vingers van één hand, tussen twee handen, tussen twee passerpunten, tussen twee aanwezige of net geplaatste kenmerken op een lang voorwerp te nemen en van de ene plaats naar de andere over te brengen. Bij al deze methoden is lengte als functie van lange voorwerpen al door verte als functie van puntenparen vervangen. Bij het tonen van 'zó groot' of 'zó klein' met vingers of handen heeft dit zich al aangebaand, hoewel deze geste door de sterke overdrijving naar de een of de andere kant aanvankelijk veeleer de emotionele uitdrukking van 'verschrikkelijk groot' of 'verschrikkelijk klein' is dan echt een middel om lengtes te vergelijken. Meer verfijnde methoden van lengte-vergelijken berusten op meetkundige inzichten en zullen in de context van de meetkunde worden behandeld.

1.25 Conservatie en reversibiliteit

Eer ik deze analyse uitbreid tot de *lengtemeting*, kom ik op een punt, dat ik in 1.12 en 1.15 kort heb geraakt, de behandeling van mathematische begrippen – in casu 'lengte' – door psychologen, die in de ontwikkeling van deze begrippen geïnteresseerd zijn. Hun onderzoekingen, door Piaget begonnen, vertonen onder meer het volgende patroon. Men wil iets weten omtrent de genese van groothedsbegrippen zoals aantal, lengte, vorm, massa, gewicht, volume. Men toont de proefpersoon voorwerpen of groepen van voorwerpen die in een of meer van deze grootheden overeenstemmen (evenveel balletjes op een rij, even lange rietjes enz.) en laat de proefpersoon constateren, dat ze in het kenmerk *A* (aantal, lengte of dergelijke) overeenstemmen; men voert nu op een van die voorwerpen een transformatie uit, waarbij volgens volwassen inzicht het kenmerk *A* niet verandert (bijv. onderlinge afstand van de balletjes veranderen, rietje buigen), en vraagt de proefpersoon naar zijn mening of het kenmerk *A* hetzelfde is gebleven; is het antwoord bevestigend dan is van *conservatie* sprake en wordt de proefpersoon een 'conserveerder' genoemd. Over de gemiddelde leeftijden

voor conservatie van de diverse kenmerken bestaat bij de psychologen vrij behoorlijke unanimiteit, terwijl iedereen die ooit didactisch met kinderen heeft gewerkt, vindt dat ze absurd hoog liggen. De grote percentages niet-conserveerders by psychologisch onderzoek komen als volgt tot stand: De transformatie, waarvan vastgesteld moet worden, dat zij A conserveert, is expres zo gekozen, dat ze een ander kenmerk, zeg B , zo sterk verandert, dat de aandacht ernaar toe wordt afgeleid (bijv. als A aantal of massa is, een opvallende verandering van lengte, als A lengte is een opvallende verandering van plaats en vorm). Er wordt dus in feite onderzocht, of de proefpersoon deze kenmerken scherp genoeg van elkaar kan scheiden en één ervan fixeren, om tegen misleidingen opgewassen te zijn — dit inbouwen van misleidingen is algemeen kenmerkend voor de psychologische (i.p.v. didactische) benadering.

Nu is de vraagstelling, in welk ontwikkelingsstadium kinderen bepaalde invarianties van bepaalde grootheden beheersen, zeker niet te verwerpen; in tegendeel, het is een verdienste van Piaget, zo iets voor het eerst te hebben geformuleerd. De vraagstelling wordt echter door het gebruik van termen als conservatie vertroebeld; het is de onderzoekers zelf vaak niet duidelijk, welk soort transformaties in het spel zijn, ten aanzien waarvan zogenaamde conservatie van wat geconstateerd moet worden, en dat dit er toe doet. Aan elk experiment, waarmee de conservatie-onderzoekers jonge kinderen in de luren leggen, kan men een geraffineerdere inkleding geven, waarmee men volwassenen in dezelfde verlegenheid kan brengen. Bij voorbeeld: Men tone twee gelijksoortige paperclips en vraag de proefpersoon 'zijn ze even lang?' hetgeen uiteraard bevestigend wordt beantwoord. Daarna ontplooi men er een van, trekke hem enigszins recht, en herhale de vraag. Wat de proefpersoon ook antwoordt, het kan altijd fout zijn, het hangt ervan af wat de proefleider bedoeld heeft. Een volwassen proefpersoon zal op de vraag echter reageren met 'hoe bedoelt U het?' — in onze terminologie: zijn ze gelijk lang als vaste of als flexibele lichamen — lengte-invariantie bij congruentieafbeeldingen of flexies? Zulke tegenvragen kan men van jonge kinderen in de laboratoriumsituatie niet verwachten, of veeleer het feit dat ze de vraag niet stellen, toont aan dat ze geïntimideerd zijn (in de psychologische terminologie: op hun gemak gesteld); hun kritische besef is door de situatie tot nul gereduceerd.

Het lijkt me onontkomelijk voor een goede proefopzet, dat onderzoeker en proefpersoon duidelijke voorstellingen hebben van het soort transformaties ten aanzien waarvan conservatie van wat geconstateerd moet worden. Psychologen zullen allicht hierop antwoorden dat er dan de aardigheid van af is, omdat de kans op foutieve antwoorden nu miniem is. Des te beter, zou ik zeggen, zo'n resultaat zou dan ook veel meer in overeenstemming zijn met het oordeel van didactici over kinderen. Dit zou nog niet betekenen, dat dan alle problemen de wereld uit waren. Ik zou heel wat ontwikkelingsproblemen kunnen opsommen, die vanuit een gezonde fenomenologie niet van belang ontbloot zouden zijn. Ik zou bij voorbeeld gaarne willen weten, of het constitueren van 'vast lichaam' aan dat van 'lengte' voorafgaat, of lengte-invariantie bij congruentieafbeeldingen en bij flexies elkaar bevorderen of hinderen, welke rol gelijkvormigheidstransformaties bij de constitutie van lengte spelen, hoe de equivalentie

van 'lang' en 'ver' wordt verworven, en zo zijn er meer van die vragen, waarop ik een antwoord zou willen hebben. Het meest urgent lijkt het mij de betekenis van de breek-maak-transformaties voor het zogenaamde 'conserveren' (niet alleen van lengte) te vatten — naar enkele ervaringen, die ik heb opgedaan, zijn ze cruciaal. Maar om zulke vragen te beantwoorden, is uiteraard een geheel andere opzet vereist dan die van de momentopnamen, waarbij geconstateerd wordt hoeveel percent op bepaalde leeftijd 'conserveren'. Bovendien is vereist een meer positieve mentaliteit, dan die van kinderen op fouten te willen betrappen.

Een andere vage term, die bij deze onderzoekingen vaak gehoord wordt, is 'reversibiliteit'. Hij heeft oorspronkelijk betrekking op antwoorden, die de proefpersonen geven, om conservatie-uitspraken te motiveren. Bij voorbeeld, van twee even lange touwtjes wordt er een in kronkels gelegd, er wordt gevraagd, of ze nog even lang zijn; de proefpersoon bevestigt het, wordt gevraagd, redenen te geven, en antwoord: 'Als ik het recht trek, wordt het weer zo als het geweest is.' Het kind kan de transformatie mentaal omkeren, hetgeen reversibiliteit genoemd wordt en opgevat als goede motivering van lengtegelijkheid. Natuurlijk is het totaal geen argument en hoewel door de proefleider als zodanig opgevat, door de proefpersoon ook niet zo bedoeld. Dat begin- en eindtoestand dezelfde zijn, zegt niets over het tussenin. Had de proefpersoon gezegd 'ze zijn evenlang, omdat ik het ene door kronkelen uit het andere heb verkregen', dan was dit minstens even goed en zelfs meer ter zake geweest, dan het omkeerantwoord; de proefpersoon zou dan niet tot de conserveerders zijn gerekend, omdat 'reversibiliteit' ontbrak.

Deze 'reversibiliteit' als bewijs van conservatie is de oorspronkelijke betekenis; het woord wordt echter nog in tal van weinig onderling samenhangende betekenissen gebruikt. Het is trouwens opvallend, dat er ook onderzoekers zijn die het reversibiliteitsargument verwerpen. Ze hebben standaardantwoorden, die gegeven moeten worden, wil van conservatie sprake zijn. Op de vraag 'waarom zijn ze even lang?' mag geen inhoudelijk zinvol antwoord worden gegeven, wil de proefpersoon tot de conserveerders worden gerekend; het moet veeleer iets verbaals zijn zoals 'omdat ze dezelfde lengte hebben', op de vraag 'waarom hebben ze dezelfde inhoud?' moet het wezen 'omdat ze een even groot ruimtedeel insluiten'. Het is duidelijk dat deze onderzoekers liefst nog verder van elke zinvolle wiskunde af staan.

Over het gebrekkig inzicht in de moeilijkheden met de equivalentie van 'lang' en 'ver' heb ik al iets gezegd. Ze worden soms nog vergroot door de — opzettelijke — aanwezigheid van misleidende wegen: een patroon in het vlak dat wegen suggereert, of twee punten op de rand van een cirkelvormige tafel, die tot randjeslopen uitnodigt, terwijl de onderzoeker uiteraard *rechte* wegen bedoeld heeft.

Ik wil het bij deze details laten. Ik wil volstrekt niet beweren, dat de onderzoekingen, die ik hier op 't oog heb, waardeloos zijn, maar ze gaan mank aan verkeerd gelegde accenten. De methode van de momentopnamen is op zichzelf niet verwerpelijk, maar zij vereist als achtergrond een theorie — of althans ideeën — omtrent een tussentijdse ontwikkeling. Zulke ideeën zijn er ook, maar

ze zijn weer vaag en zo algemeen dat er alles bij past en dat ze geen criteria leveren om aan bepaalde vragen of vragencomplexen relevantie toe te kennen. Wat hier ontbreekt, wil ik vergelijkenderwijs duidelijk maken. Stel iemand bestudeert de ontwikkeling van de flora langs momentopnamen gedurende een jaar. Hij constateert aan bomen en struiken diverse soorten knoppen in verschillende stadia, hij constateert later op dezelfde plaatsen groene bladeren en bloembladeren, en weer later dat de eersten gebleven en de anderen verdwenen en door vruchten vervangen zijn, en nog eens later dat de vruchten verdwenen zijn en tenslotte dat er ook geen bladeren meer zijn. Hij heeft niet op meeldraden, stampers en insecten gelet en niet erop waar de bladeren en vruchten naar toe verdwenen zijn. Misschien weet hij zelfs niet dat de bladeren en bloemen in de knoppen opgesloten hebben gezeten. Zijn fenomenologie was dan zeer fragmentarisch; hij wist niet waar hij op moest letten en er is een grote kans dat hij datgene waar hij wel op gelet heeft, verkeerd interpreteert. In zijn fenomenologie komen misschien termen als 'groeien, bloeien, vruchten dragen' voor, maar ze duiden toestanden i.p.v. processen aan. Met ideeën omtrent een ontwikkeling was er meer kans op geweest, dat hij wel op essentialia had gelet.

1.26–1.29 LENGTEMETING

1.26 Maatstaven

Lengtemeting vereist een maatstaf waarmee gemeten wordt. De maatstaf zal in 't algemeen en zeker in eerste aanleg kleiner zijn dan het te meten voorwerp. Opmerkingen in de tegengestelde zin, die men in psychologische literatuur vindt, berusten op een misverstand omtrent wat meten is, of op een kunstmatige opzet van de proeven.

De eerste maatstaf, die ik bij kinderen in gebruik heb gezien, is de stap. Heel spontaan worden afstanden gemeten door af af te stappen. Lang wordt er niet op gelet of de stappen even groot zijn. Steeds wordt een stap te veel geteld (de Ode stap als 1). Dat minder stappen korter betekent, schijnt duidelijk te zijn, maar niet, dat bij het samenstellen het aantal stappen opgeteld wordt. Ongeveer gelijktijdig met het afstanden door stappen meten, of iets vroeger — is het overspringen in patronen van tegels en dergelijke van een bepaald aantal stukken, ook om te zien, hoe ver men kan springen. Of hier echt van meten sprake is, weet ik niet zeker; wel zal deze springactiviteit het meten door stappen kunnen beïnvloeden.

Bastiaan (4; 10) mat spontaan de breedte van een pad met stappen. 'Dit is zes verder.' Ik laat hem zien dat ik het in één stap kan doen. Hij doet hetzelfde met twee stappen. Hij gaat door met afstappend meten. Bastiaan (6; 5) heeft in de zandbak een constructie van wegen, bruggen, wallen en tunnels gemaakt. Ik stel hem voor er thuis een tekening van te maken. Hij wil het meteen doen. Ik heb een stuk papier. 'We hebben geen centimeter.' Ik: 'Dan moet je schatten.' Hij meet decimeters met de twee wijsvingers parallel op vrij goede afstand — aldoor voortschrijdend met de wijsvinger van de linkerhand in 't voorafgaand gaatje, gemaakt door die van de rechterhand. Hij brengt het geheel behoorlijk in kaart.⁴⁾

Bastiaan (haast 7; 6) meet met de afstand tussen duim en pink waarvan hij weet dat die 1 dm is.⁴⁾

Het meten met een maatstaf komt erop neer, dat de maatstaf een aantal keren congruent neergelegd wordt, tot de te meten lengte is uitgeput. Is het te meten voorwerp een afstand tussen twee punten, dan dient bij het hernieuwd neerleggen rechtlijnigheid van de voortzetting betracht te worden. Het is verbazend, dat zelfs 12-jarigen hier vaak niet op letten. Is de directe weg tussen de twee punten door een hindernis geblokkeerd, dan wordt de weg gedeeltelijk door een parallelle vervangen; het valt op dat dan beter op de parallelliteit gelet wordt dan in het ongestoorde geval op de rechtlijnigheid van de voortzetting. Dit laatste is trouwens ook moeilijker; men moet een techniek hiervoor ontwikkelen en dit vereist meetkundig inzicht dat in het basisonderwijs ten onrechte niet gecultiveerd wordt.

Maatstaven zijn er te kust en te keur. De traditionele lengte-maatstaven zijn meestal aan het menselijk lichaam ontnomen: duim, vinger, palm, voet, el (korte en lange), stap, dubbelstap, vadem; voor grotere afstanden het stadion = 100 vadem, de Romeinse mijl = 1000 dubbelstappen, het uur gaans. De tegenwoordige lengte-maatstaven zijn in de regel door machten van 10 gerelateerd: meter, kilometer, centimeter, millimeter, micrometer, macrometer, picometer; afwijkend: lichtjaar, parsec.

1.27 Wisseling van maatstaf

Wordt het te meten voorwerp, door de maatstaf een aantal keren — zeg n keer — congruent neer te leggen, niet uitgeput, dan doet het probleem zich voor, wat met de rest gedaan moet worden. In veel gevallen zal men er genoeg mee nemen dat er maar een beetje overblijft of een beetje mankeert; het voorwerp is dan een beetje langer dan n keer de maatstaf of een beetje korter dan n keer de maatstaf. Ook het geval dat de rest op 't oog als zowat de helft, of een derde of twee derde van de maatstaf erkend wordt, is onproblematisch. Voor nauwkeurig meten echter is meer systematiek vereist. Twee systemen zijn hier gebruikelijk: de gewone breuken en de tientallige breuken. Als variatie op de tientallige breuken kent men nog tweetallige (en met andere basis). Een vrij natuurlijk, maar wegens zijn omslachtigheid in onbruik geraakt systeem is dat der kettingbreuken — ik heb dit eerder uiteengezet.⁵⁾ Als a_1 de maatstaf en a_0 het te meten voorwerp is,

$$a_0 = p_1 a_1 + a_2,$$

a_2 de rest (dus $< a_1$), dan gebruikt men de rest als nieuwe maatstaf, om de oude te meten,

$$a_1 = p_2 a_2 + a_3,$$

en gaat overeenkomstig voort, in de hoop dat uiteindelijk eens een keer de meting opgaat,

$$a_{n-1} = p_n a_n.$$

Dan is a_n een gemeenschappelijke maat van a_0 en a_1 , en door terugrekenen kan men vinden, zeg

$$a_0 = r a_n$$

$$a_1 = s a_n$$

en heeft dus

$$a_0 = \frac{r}{s} a_1.$$

Het prettige van deze methode is dat ze voor het zoeken naar een noemer een systeem levert, indien a_0 werkelijk een rationaal veelvoud van a_1 is, dus indien het procédé afbreekt. Maar dit hoeft niet het geval te zijn. Van de successieve metingen hoeft er geen op te gaan; verwaarloost men ergens de rest, dan krijgt men voor de lengte van a_1 uitgedrukt in a_0 een benadering.

Het voordeel van de methode der tientallige breuken is, dat men naar geen noemers hoeft te zoeken; men deelt de maatstaf telkens opnieuw in tien delen, voorzover deze deling niet reeds op de maatstaf is aangebracht, en kijkt hoeveel keer de onderverdeelde maatstaf in de rest zit. Het nadeel van de tientallige methode is, dat zelfs eenvoudige gebroken lengtes zoals $\frac{1}{3}$ nu door de maatstaf slechts benaderd aangegeven worden.

Lengte is een der begrippen langs welke gewone breuken en tientallige breuken doelmatig kunnen worden ingevoerd; we komen er later bij deze onderwerpen op terug.

1.28–1.29 Lengtemeting in een vroeg stadium

1.28 Termen, die bij het lengte meten vroegtijdig een rol zouden spelen, zijn: dubbel, drie keer, half, een derde, de helft, het derde. Het viel me op dat de kinderen van 5–6 jaren met een behoorlijk ontwikkeld lengtebegrip deze termen niet kenden, althans niet betrokken op lengtes; dit zijn trouwens kinderen bij wie nog steeds de term 'groot' overheerst en die dan de toevoegsels dubbel, half, in andere dimensies zien. Wel kunnen ze zonder te aarzelen het midden van een stok aangeven.

Bastiaan (5; 3) bij een rechtlijnige wandeling langs het kanaal tussen twee bruggen op flinke afstand van elkaar begrijpt eerst niet, wat bedoeld is met de vraag 'zijn we al op de helft?' maar geeft later spontaan een punt aan waar 'het midden begint' (blijkbaar de tweede helft).

Termen als halfvol enz. (van een glas) functioneren veel beter en eerder.

Met de additiviteit van de lengte hapert het nog op deze leeftijd. Een lang voorwerp, dat met een tweede voorwerp verlengd wordt, wordt opnieuw met stappen afgeschreden. Het valt niet op, wanneer van het eerste deel de tweede keer de lengte anders uitkomt.

Men moet zich goed realiseren, dat al hetgeen we hier behandelen, geen trivialiteiten zijn:

hoe lengtes worden samengesteld,
dat de uitkomsten weer lengtes zijn,
dat stukken van lengtes weer lengtes zijn,
dat de lengtemaat van 't geheel groter dan die van de stukken is,
dat de lengtemaat bij samenstellen additief is.

1.29 Van flexibele voorwerpen wordt de omtrek gemeten door er een flexibel voorwerp — een touwtje — langs te leggen. Het kan echter ook door de kromme op een rechte lijn af te rollen. Het is niet triviaal dat hier hetzelfde uitkomt. De lengte, die bij het afrollen van een cirkel ontstaat, wordt door kinderen, maar ook door volwassenen sterk onderschat.

Het afrollen van een wiel kan omgekeerd gebruikt worden om lineaire afstanden te meten (in het aantal omwentelingen van een fietswiel, van een meetwiel uitdrukken).

Meetkundige inzichten leiden tot verfijnde methoden van afstandsmeting. Sommige zijn vroegtijdig mogelijk. We komen hierop nog terug.

Het lezen en vervaardigen van kaarten met afstandsgegevens behoeft niet op het begrip verhouding te wachten.

De relatie tussen afstanden en vereiste tijden van afleggen hoeft niet op het begrip snelheid te wachten.

Het trappen klimmen kan met het begrip afstand in verband worden gebracht.

De — niet-rechthoekig gemeten — afstanden in een stratennet zijn vroeg toegankelijk.

2 DE METHODE

2.1 Aspecten van fenomenologie

Ik ben met een voorbeeld begonnen, om stof te hebben, waarover ik kan spreken, als ik de methode uiteen wil zetten. Ik koos hiervoor ‘lengte’ omdat het een rijk, maar toch betrekkelijk gemakkelijk onderwerp is.

Allereerst de termen ‘fenomenologie’ en ‘didactische fenomenologie’. Ik bedoel ‘fenomenologie’ natuurlijk niet zo als men de term bij Hegel, Husserl of Heidegger¹) vindt. Het duidelijkste wordt hij geïnterpreteerd door de voorbeelden die ik in Hoofdstuk 1 gaf en waarmee ik in verdere hoofdstukken door zal gaan, maar het kan geen kwaad, om er bij wijze van proef zoiets als een definitie aan toe te voegen.

Ik ga uit van de tegenstelling — als het er een is — van *noömenon*, gedachteding, en *phainomenon*, verschijnsel. De wiskundige *objecten* zijn *noömena*, maar een *stuk wiskunde* kan als *phainomenon* ervaren worden — getallen zijn gedachtedingen, maar het werken met getallen kan een verschijnsel zijn.

De wiskundige begrippen, structuren, ideeën zijn er om complexen van verschijnselen te ordenen — verschijnselen uit de concrete wereld, maar evenzeer uit de wiskunde — ik heb dit eerder²) met tal van voorbeelden toegelicht. Met de meetkundige figuren als driehoek, parallelogram, ruit, vierkant brengt men orde in een wereld van omtrek-verschijnselen, met de getallen brengt men orde in het verschijnsel hoeveelheid; maar op hoger niveau brengt men door meetkundige constructies en bewijzen orde in het verschijnsel meetkundige figuur, brengt men door het tientallig stelsel orde in het verschijnsel natuurlijk getal. Zo gaat het tot op de hoogste niveaus in de wiskunde verder: door verdergaande abstractie worden op elkaar lijkende mathematische verschijnselen onder één begrip gebracht, zoals groep, lichaam, topologische ruimte, deductie, inductie, enz.

Fenomenologie van een wiskundig begrip, een wiskundige structuur, een wiskundige idee betekent in mijn terminologie: dit *noömenon* te beschrijven in zijn verhouding tot de *phainomena* waarvoor het ordeningsmiddel is, aan te geven voor welke *phainomena* het als ordeningsmiddel is geschapen en tot welke het als zodanig kan worden uitgebreid, hoe het op deze *phainomena* als ordeningsmiddel werkt, welke macht het ons over deze *phainomena* en andere geeft. Beklemtoon ik in deze verhouding van *noömenon* tot *phainomena* het didactische element, d.w.z. schenk ik er aandacht aan hoe deze verhouding in een onderwijsleerproces verworven en gebezigd wordt, dan spreek ik van *didactische fenomenologie* van dit *noömenon*; zou ik ‘onderwijsleerproces’ door ‘cognitieve groei’ vervangen, dan was het *genetische fenomenologie*, en als ik ‘in een onderwijsleerproces ... wordt’ door ‘in de geschiedenis ... werd’ vervang, is het *histo-*

rische fenomenologie. Het gaat hier altijd om fenomenologie van wiskundige noömena, maar evengoed zou ik over fenomenologie van andere dan wiskundige noömena kunnen spreken.

2.2 De rol van voorbeelden

Begon hoofdstuk 1 met een stuk fenomenologie sec van de 'lengte', het was duidelijk een a posteriori geconstrueerd verband tussen het mathematisch begrip 'lengte' en de wereld van de lange voorwerpen, die door een operatie van samenstellen ($\oplus$) gestructureerd was. Lengte werd als functie op die wereld opgevat, maar hoe ik aan die functie kwam, werd niet geanalyseerd; hoewel het erbij hoorde, liet ik het na, omdat ik er in het didactisch-fenomenologisch gedeelte toch nader op moest ingaan en doublures wilde vermijden. In het hierop volgende didactisch-fenomenologisch gedeelte zitten dan ook verschillende stukken fenomenologie sec, bijv. 1.15 over de congruentie-afbeeldingen en 1.18–1.19 over de flexies. Ook in 't vervolg zal ik de fenomenologie sec en de didactische fenomenologie vaak niet duidelijk van elkaar scheiden; zoals in het Woord vooraf beloofd, wil ik de leesbaarheid niet aan een systematiek opofferen.

Waar haal ik nu het materiaal voor mijn didactische fenomenologie van wiskundige begrippen vandaan? Op werk van anderen kan ik hierbij nauwelijks steunen. Ik baseer me op mijn kennis van de wiskunde, van toepassingen van de wiskunde en ook van de historie van de wiskunde. Ik weet hoe wiskundige begrippen ontstaan zijn of ontstaan zijn kunnen. Ik weet verder uit de analyse van leerboeken hoe didactici menen dat zij deze begrippen in lerenden kunnen laten ontstaan. Tenslotte weet ik uit waarnemingen van leerprocessen het een of ander over feitelijke processen van constitutie van mathematische objecten en verwerving van mathematische begrippen. Het een of ander – dit belooft niet veel en qua hoeveelheid is wat ik bieden kan ook niet veel. Ik heb enkele voorbeelden van zulke waarnemingen gegeven en zal er mee doorgaan. De voorbeelden zijn incidenteel. Het is niet mijn bedoeling te beweren, dat dit of dat op deze of gene leeftijd en op deze of gene manier verworven kan worden. De voorbeelden zijn er veeleer om aan te tonen dat er voor dingen waar we niet aan zouden denken, leerprocessen vereist zijn. In Hoofdstuk 1 gaf ik een voorbeeld van de bij een kind plotseling opkomende noodzaak van differentiatie van 'groot' naar verschillende dimensies, een voorbeeld over het plaatsen van 'ver' in de context van 'lang', een voorbeeld voor het leren van de samenhang tussen 'helft' en 'midden'. Ik voeg er een voorbeeld aan toe, een gebeurtenis die enkele uren na de verbinding van helft en midden plaats had.

Bastiaans (5; 3) zusje (3; 3) breekt schuimplastic in kleine stukjes – ze noemt het eten. Hij komt erbij, pakt een enigszins rechthoekig stuk, breekt het ongeveer doormidden, legt de twee stukken op elkaar, breekt ze samen doormidden, herhaalt dit met een laag van drie stukken – het vierde was al klein.

Ik weet niet, waar ik deze waarneming moet plaatsen, of ik dat tot wiskunde – bijv. meetkunde – moet rekenen en of ik er in 't geheel een cognitief aspect aan

mag herkennen. Ik rapporteer deze waarneming, omdat ik ze tot de belangrijkste reken, die ik ooit gedaan heb. Ik weet niet of voor deze rationalisering van breekwerk 5; 3 een vroege of late termijn is; ik weet niet of Bastiaan hier iets imiteert, of adapteert, dat hijzelf geobserveerd heeft. Maar één ding weet ik: wat hij doet, is belangrijk en waard om geleerd te worden; voor mij is het een nieuw bewijs, dat we ons niet in 't minste realiseren wat kinderen allemaal moeten leren. Als ik zie wat mensen verzinnen om ietwat te hebben dat ze kleine kinderen kunnen bijbrengen, voel ik de neiging, hun toe te roepen: span je niet zo in; als je uitkijkt, ligt het voor het grijpen.

Waarom kijkt men niet naar zo simpele dingen, die waard zijn om geleerd te worden? Omdat de ene helft ze belachelijk vindt en de andere ze niet durft opsommen uit vrees zich belachelijk te maken. Mijn Vorrede³) is vol van dit soort simpele gevalletjes. Ik heb ze uiteraard vaak in lezingen gerapporteerd. Het kan me niets schelen of een groot deel van 't publiek het vertellen van dergelijke simpele verhaaltjes als een ouderdomsverschijnsel interpreteert, als mijn voorbeeld maar het kleinere deel aanmoedigt, om dezelfde weg in te slaan — er is inderdaad moed voor vereist.

2.3 Enactief, iconisch, symbolisch

Ik heb daarstraks de termentrits 'enactief, iconisch, symbolisch' van Bruner gebruikt. Bruner⁴) suggereert drie wijzen waarop ervaringen in een model van de wereld getransformeerd worden: de enactieve, de iconische, de symbolische voorstelling. Beantwoordende aan het overheersen van de een of de andere spreekt hij van elkaar opvolgende fasen in de cognitieve groei.

Bruner's schema kan soms nuttig zijn, het is door anderen overgenomen en zijn bereik van toepassing is uitgebreid, in 't bijzonder naar de begripsvorming in leerprocessen toe, waar dan overeenkomstige fasen worden onderscheiden. Ik zet straks nog mijn bezwaren tegen het idee van begripsvorming als zodanig uiteen, maar wil me niet tegen de uitbreiding van Bruner's trits op begripsvorming verzetten. Er is trouwens bij Bruner zelf een voorbeeld te vinden dat laat zien, hoe de drie wijzen van voorstelling tot wijzen van begripsverwerving kunnen worden uitgebreid: een klaverbladknoop is *enactief* een maaksel, iets dat geknoopt wordt, *iconisch* iets dat je al of niet getekend voor je ziet, *symbolisch* is het iets dat door het woord 'knoop' gerepresenteerd wordt, al of niet van een min of meer stringente definitie vergezeld.

Een bekend grapje: Vraag iemand wat een wenteltrap is. Allemaal reageren ze eender: ze lopen met hun wijsvinger een denkbeeldige wenteltrap op. Ze kunnen het natuurlijk ook tekenen als het moet. Bevinden ze zich daarom in de enactieve of iconische fase? Natuurlijk niet, want ze bezitten voor het begrip in kwestie een symbool, het woord 'wenteltrap', al zal het wat de *definitie* van het begrip aangaat, de een wat meer, de ander wat minder moeite kosten, van de enactieve en iconische fase in de symbolische over te stappen.

Het getalbegrip 'drie' en het meetkundig begrip 'recht' (in tegenstelling tot 'krom') — eer het kind die woorden beheerst, kan het met wat ze bedoelen,

enactief vertrouwd zijn: het kan *driemaal* in de handen klappen en *recht* op iets af lopen, als hem dat wordt gesuggereerd — de *enactieve* fase — of het kan plaatjes met *drie* voorwerpen of plaatjes met *rechte* lijnen uitsorteren — de iconische fase. Met het beheersen van het woord *drie* is het kind in de *symbolische* fase; ‘drie’ is immers als woord een symbool voor het begrip *drie* (en analoog met *recht*). Maar ook ‘drie ogen op een dobbelsteen’ kan een symbool zijn, bijv. bij het ganzebordspel. Een verstandig tellend kind is in de symbolische fase, ook als dit tellen van balletjesschuiven op de abacus vergezeld gaat. Het optellen op de abacus is maar heel kort enactief; na de eerste keer is het al symbolisch, al is die symboliek een andere dan die van de geschreven cijfers. Romeinse cijfers zijn net zo symbolisch als arabische. Turven en kerven hoorden zelfs, toen de mensen nog geen telwoorden hadden, niet meer in de enactieve of iconische fase — ze zijn net zo symbolisch als romeinse of arabische cijfers. De cassière, die bedragen aanslaat, is noch enactief noch iconisch bezig. Wanneer een peuter als teken van blijdschap in zijn handen klappt, is hij t.a.v. blijdschap in de symbolische fase, al kan hij nog niet blij-blij-blij zeggen. Al in de kleuterschool aanvaarden de kinderen, dat in de tekening van een dansopstelling de dansers niet door poppetjes, maar — symbolisch — door streepjes worden weergegeven. Als de deuren naar ‘Heren’ en ‘Dames’ door plaatjes van een bebroekte en een berokte figuur zijn onderscheiden, is het niet omdat de binnenarchitect het gebruikend publiek in de iconische fase waande, maar omdat dit verschil in de honderden talen, die de mensheid spreekt, verschillend wordt gesymboliseerd. Trouwens, die plaatjes zijn ook al symbolen.

Met deze voorbeelden bedoel ik te zeggen, dat in onderwijsleersituaties, die ons hoofdzakelijk voor ogen zweven, Bruner’s trits weinig vruchtbaar is. Bruner’s toepassingsgebied is de psychologie van het zeer jonge kind, en daar laten die fasen zich inderdaad vullen.

2.4–2.5 Begripsverwerving en constitutie van mentale objecten

2.4 Ik wil op iets anders de nadruk leggen, iets dat ik in vroegere publicaties heb beklemtoond. Eer ik dit doe, een semantische analyse van de term ‘begrip’: Als ik van, zeg, het getalbegrip bij Euclides, Frege of Bourbaki spreek, bedoel ik na te gaan wat deze auteurs op ’t oog hadden, wanneer zij het woord ‘getal’ bezigden; wanneer ik van het getalbegrip bij de Papoea’s spreek, bedoel ik na te gaan, wat de Papoea’s van getallen afweten. Iemand die een verhandeling over het begrip fascisme schrijft, hoeft geenszins begrip voor het fascisme te hebben, en iemand, die dat leest, hoeft het er niet van te krijgen. Het begrip kunst is heel iets anders dan kunstbegrip. Ook andere talen kennen dit koppel (concept — concevoir; concept — to conceive; begreifen — Begriff), maar je kunt daar wat het begrijpen betreft, gemakkelijker naar andere woorden uitwijken (comprendre, to understand, verstehen). Het was misschien aan te bevelen geweest, als men het verschil, dat men tussen ‘het begrip kunst’ en ‘het kunstbegrip’ maakt consequent had doorgetrokken, maar om het nu te doen, is het te laat; ‘getalbegrip’ en ‘ruimtebegrip’ zijn in hun dubbele betekenis al ingeburgerd. Bovendien heerst

de verwarring, die ik nu signaleer, in alle taalgebieden, niet alleen al door de existentie van de boven aangehaalde koppels, maar dankzij een rationalistische⁵) filosofie van het wiskunde-onderwijs (en ook ander onderwijs), die te weinig met fenomenologie rekening houdt. Het is de filosofie en didaktiek van de begripsverwerving (concepts attainment), die, ofschoon oud en eerbiedwaardig, in deze eeuw dankzij nieuwe formuleringen nieuw gewicht en gezag heeft gewonnen. In de socratische methode, zoals door Socrates zelf beoefend, was de begripsverwerving de harde kant afgeslepen, doordat in die gedachtengang het verwerven een opnieuw verwerven, een zich herinneren was. Maar in algemeen beoefende praktijken, die in de verschillende systemen van Structural Learning slechts theoretisch uitgelijnd en scherper geformuleerd zijn, is aan de verleiding van de dubbelzin van begrip en begrijpen grif toegegeven: om een *X* te doen begrijpen, onderwijst men het begrip *X* (of tracht het te onderwijzen). Om getallen, groepen, lineaire ruimten, relaties te doen begrijpen, brengt men (zoals dit in de wandeling heet) het begrip getal, groep, lineaire ruimte, relatie aan. Of veeleer, men wil het doen. Het is namelijk duidelijk dat dit op de leeftijden, waarop men hierbij mikt, niet kan. En daarom gaat men die begrippen concreet belichamen (embodiment). Deze concretisering is echter doorgaans foutief; ze zijn zo grof, dat ze van de te belichamen begrippen niet het essentiële geven, ook als men door een variëteit van belichamingen met meer dan één facet rekening tracht te houden. Hun niveau is te laag, ver beneden het begrip, waarop men mikt. En didactisch is het, het paard achter de wagen spannen: abstracties te willen onderwijzen door ze te concretiseren.

De didactische fenomenologie moet de omgekeerde aanpak mogelijk maken. Men gaat uit van de verschijnselen, die om zeker orderingsmiddel vragen en van hieruit leert de leerling dit orderingsmiddel hanteren. Om dit te kunnen plannen, doet men een beroep op didactische fenomenologie. In de didactische fenomenologie van 'lengte', 'getal', enz. vindt men de verschijnselen, liefst zo breed mogelijk, vermeld, die door 'lengte', 'getal', enz. geordend worden. Wil men groepen onderwijzen, dan zal men dus niet van het begrip groep uitgaande concretisering trachten te vinden en die onderwijzen, maar men zal naar verschijnselen zoeken, die noodzaken, het mentaal object groep te constitueren. Zijn die voor een bepaalde leeftijd niet aan te geven, dan zal men de poging, het begrip groep aan te brengen, opgeven.

Ik heb hier wat de tweede methode aangaat, de term begripsverwerving vermeden. In plaats ervan spreek ik van constitutie van mentale objecten⁶) – dit gaat namelijk aan de begripsvorming vooraf en kan zelfs uitermate effectief zijn, ook als er nooit begripsvorming op volgt. Bij meetkundig realiseerbare mentale objecten (vierkant, bol, parallelle lijnen) is het duidelijk, dat de constitutie van het mentale object onafhankelijk is van die van het begrip (zelfs het symbool kan men missen); maar voor niet meetkundig gerealiseerde (getal, inductie, deductie) is het niet minder juist. Men dient dit dus in 't oog te houden als men deze didactische fenomenologie leest: dat in eerste instantie de nooemena als mentale objecten en niet als begrippen gezien worden en dat het materiaal wordt aangewezen waaruit ze worden geconstitueerd. Belangrijker dan indelen van voorstellingen

in enactieve, iconische en symbolische schijnt me het feit, dat een werken met de mentale objecten aan het expliceren in begrippen voorafgaat. In ieder afzonderlijk geval moet men vaststellen, welke criteria vervuld moeten zijn, wil men het object als mentaal geconstitueerd beschouwen. In het geval van 'lengte' zouden zulke voorwaarden zijn:

de bijvoegelijke naamwoorden die lengte aanduiden met 'lang, kort' integreren en onderling differentiëren,
lengtes door congruentie-transformaties en flexies vergelijken,
met veelvouden en eenvoudige fracties van een maatstaf lengtes meten,
de orde en additiviteit van de meetresultaten toepassen,
de transitiviteit van de lengte-vergelijking toepassen.

2.5 Tegenover de begripsverwerving door concrete belichamingen plaatste ik de op een fenomenologie gebaseerde constitutie van mentale objecten. Bij de eerste methode hebben de concretisering en een voorbijgaande betekenis. Het taartverdelen ten behoeve van de breuken mag vergeten worden, als de leerling de breuken algoritmisch onder de knie heeft. Wel komen dan zogenaamde toepassingen aan de beurt. In tegenstelling hiermee is het materiaal waarmee de breuken mentaal geconstitueerd worden, van definitieve waarde; toepassingen in de zin van de methode van begripsverwerving passen niet bij de methode van constitutie van mentale objecten.

3 VERZAMELINGEN

3.1–3.9 VERZAMELINGEN IN DE HOGERE WISKUNDE

3.1 Verzamelingen als doel in zichzelf

‘Verzamelingen als doel in zichzelf’ is een beperkt, niet zeer vruchtbaar en ook niet bepaald populair gebied van wiskundig onderzoek, termen die dit gebied karakteriseren zijn: machtigheid, continuümhypothese, wel-ordering, transfiniet ordinaalgetal, alefs. Tot het midden van onze eeuw had men in algebra en analysis nog behoefte aan transfiniete ordinaalgetallen, maar die zijn inmiddels geëlimineerd door het gebruik van het lemma van Zorn.

De algemene verzamelingsleer is een tijd lang onderwerp van diepgaand axiomatisch onderzoek geweest; in ’t bijzonder de continuümhypothese trok de aandacht.

3.2 Verzamelingen als substraten van structuren

Waar verzamelingen in de hogere wiskunde niet doel in zichzelf zijn, vervullen ze uiteenlopende taken.

Ze dienen als substraten voor structuren (een metrische ruimte, een groep, een categorie, is een verzameling met die en die eigenschappen); soms wordt hierbij – met het oog op zekere verzamelingstheoretische paradoxieën – de term verzameling vermeden en door ‘klasse’ vervangen. De structurering van de substraatverzameling kan op verschillende wijzen plaats vinden, bij voorbeeld:

- een verzameling wordt een metrische ruimte doordat een afstandsfunctie op de elementenparen van die verzameling vastgesteld is,
- een verzameling wordt een groep, doordat tussen de elementen ervan een zekere bewerking vastgesteld is,
- een verzameling van verzamelingen wordt een categorie doordat tussen de lidverzamelingen zekere afbeeldingen vastgesteld zijn.

Wanneer verzamelingen tot substraat voor zekere structuren dienen, worden er in ’t algemeen geen ingrijpende verzamelingstheoretische bewerkingen op uitgevoerd. Men vormt er *deelverzamelingen* van, vooral ter wille van deelstructuren, men *beeldt* substraten van structuren op elkaar *af*, om tot afbeeldingen van de structuren te geraken, men vormt verzamelingstheoretische *producten* van de substraten, om tot structuurproducten van de bijbehorende structuren te geraken, men splitst de substraatverzameling op in een verzameling bijv. van *equivalentieklassen*, om een nieuwe structuur te vormen.

3.3 Verzamelingen als taalmiddel

Nog zwakker, praktisch alleen als taalmiddel, treden verzamelingen veelal op, wanneer een predicaat door zijn extensie wordt vervangen; bijv. om herhaling van het predicaat ' n -keer differentieerbaar' te vermijden, voert men de verzameling der n -keer differentieerbare functies C^n in en drukt ' f is n -keer differentieerbaar' uit door $f \in C^n$. Van recente oorsprong zijn vaste symbolen voor verzamelingen, zoals $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, die de predicaten 'is een natuurlijk, geheel, rationaal, reëel, complex getal' vervangen.

Een op zichzelf belangwekkende operatie op verzamelingen, het vormen van de machtsverzameling $\mathcal{P}(A)$ van een verzameling A (d.w.z. de verzameling van de deelverzamelingen van A) functioneert puur als taalmiddel, wanneer het feit $C \subset A$ door $C \in \mathcal{P}(A)$ uitgedrukt wordt, of het feit dat Ω een verzameling van deelverzamelingen van A is, uitgedrukt wordt door $\Omega \subset \mathcal{P}(A)$ of zelfs door $\Omega \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. Soms treedt de lege verzameling puur als taalmiddel op, wanneer het niet-bestaan van oplossingen voor zekere voorwaarde door het leegzijn van de oplossingsverzameling wordt uitgedrukt. Een afbeelding van A naar B of een relatie van A naar B als deelverzameling van het product $A \times B$ te interpreteren, is eveneens een gebruik van een verzamelingstheoretische operatie, het verzamelingsproduct, als taalmiddel. Op essentiëler gebruik van de verzamelingentaal kom ik straks terug.

3.4 Verzamelingen in de topologie

Dat echt en expliciet met verzamelingen geopereerd werd, deed zich in de historie het eerst voor in topologische contexten. Limieten en convergentie hebben weliswaar tot substraat rijen en reeksen, maar geen verzamelingen, en ook bij het maximum van een functie haalde men de waardenverzameling er nog niet expliciet bij. Dit veranderde, toen men behoefte had aan de bovengrens van een functie (of functioneel) die geen maximum bezat — een door het principe van Dirichlet historisch belangrijk verschijnsel. Hier wordt de formulering door het expliciet maken van de waardenverzameling inderdaad vergemakkelijkt. Een analoog geval: als men bewijst dat een continue functie in een interval tussen een negatieve en een positieve waarde ergens verdwijnt, vormt men de verzameling der punten, waar de functie niet positief is, en van deze verzameling de bovengrens. Bovengrenzen, ondergrenzen, bovenlimieten, onderlimieten, verdichtingspunten, zijn inderdaad aanleiding om expliciet verzamelingen in te voeren en ermee te opereren. In reële en complexe functietheorie doet de behoefte zich voor, open en afgesloten verzamelingen, inwendige punten, en randpunten van verzamelingen te beschouwen — de tekeningen, die zo iets illustreren, versterken nog de verzamelingen-context. Van verzamelingstheoretische topologie wijst het bijvoegelijk naamwoord deze context uitdrukkelijk aan, maar in de algebraïsche is hij niet minder sterk.

3.5 Maten

Oppervlakte, inhoud, maat zijn verzamelingsfuncties, die op zeker ogenblik om expliciete verzamelingen vragen. Zolang het bij eenvoudige 'figuren' blijft, waaraan oppervlakte of inhoud toegekend wordt, is die behoefte niet aanwezig; ook het vlakke deel door horizontale as, een grafiek en twee ordinaten begrensd, waarvan de oppervlakte als integraal wordt uitgedrukt, hoeft nog niet expliciet als verzameling te worden beschreven. De behoefte doet zich wel voor als oppervlakten en inhouden aan vrij willekeurige verzamelingen worden toegekend: in de maattheorie. Hier doet dan ook verzamelingenalgebra essentieel mee: er worden verenigingen en doorsneden (niet alleen eindige) en complementen van verzamelingen gevormd. Maten, d.w.z. verzamelingsfuncties met zekere additiviteitseigenschappen, zijn voor veel mathematische verschijnselen een belangrijk ordeningsmiddel. Ook de waarschijnlijkheidstheorie werd als een maattheorie ingekleed.

3.6–3.7 Oplossingsverzamelingen van voorwaarden

3.6 In de klassieke meetkunde kende men expliciet de procedure, verzamelingen als oplossingsverzamelingen van voorwaarden in te voeren, alleen noemde men het niet verzamelingen, maar meetkundige plaatsen — de cirkel met middelpunt M en straal r is de meetkundige plaats van de punten, die van M de afstand r hebben. Van de verzamelingstheoretische bewerkingen speelde daar in 't bijzonder de doorsneevorming een rol.

3.7 Het principe, in een structuur de verzameling te vormen uit die elementen, die tot een gegeven element een bepaalde relatie hebben, is ook voor de algebra belangrijk. De veelvouden van 4 in $\mathbf{Z}$ vormen een deelverzameling, de verzameling van de door 4 deelbare gehele getallen. De verzamelingstheoretische doorsnede van viervouden en zesvouden, zijn de twaalfvouden — een verband tussen doorsnede en kleinste gemene veelvoud.

Van algebraïsche structuren vormt men deelverzamelingen die t.a.v. zekere bewerkingen gesloten zijn. Een verzamelingstheoretisch schema dat hierbij maatgevend is, wordt bij voorbeeld in 't geval van groepen als volgt toegepast. Zij G een groep en A een deelverzameling van G . Men zoekt de door A voortgebrachte ondergroep van G , d.w.z. de groep die men constructief verkrijgt, door de operaties van product en inverse, uitgaande van A , telkens weer toe te passen. De door A voortgebrachte ondergroep van G is echter ook met één slag te definiëren als de kleinste A omvattende ondergroep van G en nog weer anders als de doorsnede van alle A omvattende ondergroepen van G . Hetzelfde schema functioneert ook voor ringen, lichamen en dergelijke algebraïsche structuren.

We kwamen verzamelingen al in verband met deelbaarheidseigenschappen tegen. De veelvouden van een vast element a in een commutatieve ring R vormen het door a voortgebrachte *hoofdideaal*. Gaat men van een deelverzameling A van R uit en vormt men alle lineaire combinaties uit elementen van A met coëfficiënten uit R , dan verkrijgt men het door A voortgebrachte *ideaal*. Idealen I in R zijn

gekenmerkt als nietlege verzamelingen van R met de eigenschap: $a, b \in I \wedge c \in R \rightarrow a - b \in I \wedge ca \in I$. Het door A voortgebrachte ideaal van R is ook het kleinste A omvattende ideaal van R oftewel de doorsnede van alle A omvattende idealen. In $\mathbf{Z}$ is ieder ideaal hoofdideaal; hiermee houdt het bestaan van de grootste gemene deler van een verzameling $A \subset \mathbf{Z}$ verband. Bij voorbeeld het door 4 en 6 voortgebrachte ideaal, wordt ook al door hun grootste gemene deler 2 voortgebracht. Idealen en ideaaltheorie werden juist uitgevonden, om de deelbaarheidseigenschappen van ringen te beheersen, waar het bestaan van de grootste gemene deler niet verzekerd is, waar niet ieder ideaal hoofdideaal is. Met de idealen werden voor het eerst verzamelingen en verzamelingsmethoden in de algebra expliciet gemaakt.

3.8 Lemma van Zorn.

Het toepassen van verzamelingsleer in de hogere wiskunde, zoals we tot nu toe de revue lieten passeren, was allemaal licht tot zeer licht geschut. Het zwaarste geschut – en dan ook behoorlijk zwaar – is het lemma van Zorn. Het vervangt de transfinitie ordinaalgetallen van weleer en wordt enigszins langs dezelfde lijn bewezen als weleer de stelling dat elke verzameling een welordening toelaat. Ik formuleer het lemma van Zorn:

Zij Ω een nietlege verzameling van verzamelingen. Ω is op natuurlijke wijze partiëel geordend door middel van de inclusie. Een keten is een deelverzameling Θ van Ω zodat voor elk paar $A, B \in \Theta$ geldt: of $A \subset B$ of $B \subset A$ (een keten is *totaal* geordend). Stel dat van elke keten van Ω de vereniging tot Ω behoort. Dan bezit Ω een grootste element, d.w.z. er is een $X \in \Omega$, zodat voor geen $Y \in \Omega$ geldt: $X \subset Y$ en $X \neq Y$.

Met het lemma van Zorn bewijst men bij voorbeeld, dat elke groep G maximale echte ondergroepen bezit: Zij $a \in G$ en a niet het één-element van G ; men neme als Ω de verzameling van alle ondergroepen van G , waar a niet element van is. Zij Θ een keten in Ω ; de vereniging van de ondergroepen, die van Θ lid zijn, is klaarblijkelijk weer een ondergroep¹⁾ waar a niet element van is, behoort dus weer tot Ω . Volgens het lemma van Zorn bezit Ω een grootste element. Dit is een maximale ondergroep van G , die a niet tot element heeft, dus een maximale echte ondergroep.

Dit bewijs is typisch voor toepassingen van het lemma van Zorn. Een in de moderne algebra en analyse belangrijk begrip uit dit ideeëncomplex is het begrip filter.

Zij R een verzameling. Een filter F van R is een verzameling van deelverzamelingen van R met de eigenschappen:

$$\begin{aligned} &\text{de lege verzameling is niet lid van } F, \\ &A \in F \wedge B \in F \rightarrow A \cap B \in F, \\ &A \in F \wedge A \subset C \rightarrow C \in F. \end{aligned}$$

Met het lemma van Zorn toont men aan dat elk filter van R in een (van R verschillend) maximaal filter zit (ook ultrafilter genaamd).

Voor $a \in R$ is er één maximaal filter van R waar $\{a\}$ in zit, namelijk de verzameling van alle deelverzamelingen van R waar a element van is. Maar voor de rest zijn, zodra R oneindig is, maximale filters onoverzienbare en voor geen constructie toegankelijke verzamelingen. Elk maximaal filter F van R bezit namelijk de vreemde eigenschap:

voor elke $A \subset R$ of $A \in F$ of $R \setminus A \in F$.

3.9 Machtigheid

Alle verzamelingen, die in de tot nu toe opgesomde toepassingen optraden, bezaten een structuur en bij de verzamelingstheoretische bewerkingen, die we erop uitvoerden, was die structuur betrokken. Dit geldt ook t.a.v. het lemma van Zorn; Ω is immers een verzameling van verzamelingen en bezit daardoor de natuurlijke structuur van dat de ene lidverzameling deel van de andere kan zijn. De geheel structuurloze verzameling bezit één kenmerk, de machtigheid. Verzamelingen die zich één-één op elkaar af laten beelden, bezitten dezelfde machtigheid, en als A zich wel in, maar niet op B één-één laat afbeelden, is A van kleinere machtigheid dan B . Hiermee is dan operationeel gedefinieerd wat machtigheid is. Of men nog machtigheden als wiskundige objecten invoert (een machtigheid is een klasse van onderling gelijkmachtige verzamelingen) doet er niet veel toe.

‘Machtigheid’ is allereerst als historisch-filosofisch fenomeen te evalueren: de durf, een elementair en naar het schijnt om geen analyse vragend begrip als het aantal op ’t oneindige uit te breiden, ongeacht het bezwaar van mogelijke gelijkmachtigheid van een verzameling met een echte deelverzameling. In meer technisch opzicht blijkt machtigheid in vijf uitingen van betekenis: Ten eerste, de gelijkmachtigheid van een verzameling met een echte deelverzameling kan positief worden geëxploiteerd. Ten tweede, de op ’t eerste gezicht onverwachte aftelbaarheid van de verzameling der gehele, rationale, zelfs der algebraïsche getallen, maakt onverwachte constructies in die gebieden mogelijk. Ten derde, door de niet-aftelbaarheid van $\mathbf{R}$ wordt het bestaan van niet-algebraïsche getallen op eenvoudige wijze gewaarborgd, en algemener door het verschil in machtigheid kan een verzameling als *echte* uitbreiding van een andere onderscheiden worden. Ten vierde, het onverwachte verschijnsel, dat bij een oneindige verzameling de vorming van het product met zichzelf (de verzameling van de geordende paren) die machtigheid niet verhoogt, zodat bijvoorbeeld lijnstuk, vierkant, kubus enz. gelijkmachtig zijn en voor het kunnen onderscheiden van dimensies zwaarder geschat is vereist dan machtigheid, meer structuur, te weten een topologische. Ten vijfde, het welbekende ladenbeginsel: is een verzameling A in een van kleinere machtigheid afgebeeld, dan moeten er twee elementen van A zijn die hetzelfde beeld hebben.

3.10 Verzameling als puur taalverschijnsel

Ik ben zo uitvoerig op het verschijnsel verzameling in de hogere wiskunde ingegaan, omdat volgens sommigen gebleken zou zijn, dat verzamelingsleer – vroeger

een reservaat van de hogere wiskunde — al aan leerlingen van de basisschool kan worden onderwezen of zelfs al aan kleuters. Met 'verzamelingsleer' is dan echter iets anders bedoeld dan men er in de hogere wiskunde onder verstaat. In de tegenwoordige schoolwiskunde zijn de verzamelingen niet een ordeningsmiddel voor wiskundige (of niet-wiskundige) verschijnselen, maar doel in zichzelf. Doorsnede, vereniging, complement, machtsverzameling worden niet ingevoerd, waar en omdat de stof om deze ordeningsmiddelen zou vragen; er wordt veeleer stof geschapen, om deze operaties te oefenen — dit is trouwens een in de schoolwiskunde of in 't geheel op school niet ongewone wijze van leerstofschepping. In plaats van de verzamelingstheoretische schemata vanuit een aanwezige stof als ordeningsmiddelen te ontwikkelen, stelt men ze als holle vormen voorop en is dan aan zijn didactisch geweten verplicht, ze met — valse — concretisering te vullen. De verzamelingen, die zo ontstaan, blijven of in de handtastelijk concrete sfeer of zijn pure taalverschijnselen. Eindig veel disparate objecten tot een verzameling samenvatten, waaraan als gedachteding geen enkele behoefte bestaat, alleen om er verzamelingsbewerkingen op toe te passen, is één aspect van deze valse concretisering. Een ander zijn de zogenaamde Venn-diagrammen, een derde de zogenaamde logische blokjes. We zullen later zien, dat integendeel het eigenlijke probleem bij verzamelingen het abstract herkennen is.

De verzameling als puur taalverschijnsel uit zich bij dit soort schoolwiskunde in de cultus van het verzamelingenscheppen in extensie. Men kan inderdaad ieder predicaat in een verzameling omzetten, de verzameling van de dingen, die dit predicaat bezitten. Uit 'is rood' vormt men 'de verzameling van de rode dingen', uit 'heeft lange haren en draagt een bril' 'de verzameling van de langharige brillendragers', ook als doorsnede voor te stellen van de verzameling der langharigen en de verzameling der brillendragers. Of meer in de wiskunde: uit 'is groter dan 7 of kleiner dan 3' vormt men de 'verzameling der getallen groter dan 7 of kleiner dan 3', ook voor te stellen als vereniging van de verzameling der getallen > 7 en de verzameling der getallen < 3 . Of 'is deler van' wordt omgezet in 'de verzameling der paren $\overline{x}, \overline{y}$ ' met x deler van y . In de hogere wiskunde schept men verzamelingen in extensie, waar dit zakelijk gemotiveerd is. In het soort schoolwiskunde, dat we hier op 't oog hebben, is het oefenstof, en wat dan geoefend wordt, is een gebied, waaraan in de hogere wiskunde alleen maar terloops aandacht wordt geschonken, het parallelisme tussen logische en verzamelings-theoretische bewerkingen:

aan $\wedge$ (en) beantwoordt $\cap$ (doorsnede)
aan $\vee$ (of) beantwoordt $\cup$ (vereniging)
aan $\neg$ (niet) beantwoordt $R \setminus \dots$ (complement)

Nu laat de laatste regel al zien, dat hier iets niet klopt. Om aan 'niet' het 'complement' te doen beantwoorden, moet men weten, ten aanzien waarvan men het complement neemt. Ik heb het hier met R aangeduid; als begrip draagt het verschillende namen: 'basisverzameling', 'universum', 'keuzeverzameling', 'referentieverzameling', enz. Het is een begrip dat alleen in dat soort schoolwiskunde voorkomt; in de normale wiskunde is het onbekend.

De oorzaken hiervan liggen dieper dan alleen de moeilijkheid met de negatie. De echte wiskunde is een *zinvolle activiteit* in een *open gebied*, niet een lukrake in een a priori vastgelegde referentieverzameling. Wel wordt in de axiomatiek van de verzamelingsleer gestipuleerd, dat men van elk object een verzameling kan maken, dat van elke verzameling van verzamelingen de vereniging bestaat en bij elke verzameling de machtsverzameling, dat bij een predicaat zijn extensie als verzameling bestaat enz. In de schoolwiskunde, die ik schetste, tracht men dit ook waar te maken, terwijl men in de echte wiskunde niet de minste behoefte heeft aan, zeg, de vereniging van de verzameling van de natuurlijke getallen, die niet macht van een priemgetal of door drie deelbaar zijn, mèt de verzameling van de eindige deelverzamelingen van een 3-dimensionale vectorruimte, mèt de verzameling van alle zonsondergangen. Verzamelingen worden gevormd en gebezigd, waar er behoefte aan bestaat.

Wat het parallelisme van logische en verzamelingstheoretische bewerkingen aangaat, kan er inderdaad op zeker ogenblik de behoefte worden gevoeld, de equivalentie

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q,$$

eventueel ook

$$(p \vee q) \wedge r \leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

door het verzamelingstheoretische analogon toe te lichten. Er kan moeilijk iets tegen worden ingebracht, op een ogenblik dat deze logische equivalenties werkelijk in een behoefte voorzien. (Het is trouwens kenmerkend voor het heersende dogmatisme dat de overeenkomstige verzamelingstheoretische gelijkheden

$$\begin{aligned} R \setminus (A \cap B) &= (R \setminus A) \cup (R \setminus B) \\ (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \end{aligned}$$

dan nog onjuist geconcretiseerd plegen te worden, namelijk met Venn-diagrammen in plaats van rechthoekverdelingen (fig. 1–2). Nodeloos verder te gaan met het parallelisme tussen logische en verzamelingstheoretische bewerkingen, in 't bijzonder het nog tot ' $\rightarrow$ ' en ' C ' trachten uit te breiden, is schoolvosserij. En schoolvosserij is uiteraard ook het hele ritueel van verzamelingen als puur taalverschijnsel.

	B	$R \setminus B$
A	$A \cap B$	$A \cap (R \setminus B)$
$R \setminus A$	$(R \setminus A) \cap B$	$(R \setminus A) \cap (R \setminus B)$

fig. 1

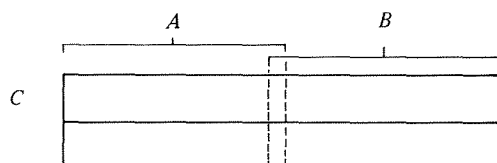


fig. 2

3.11 De goede referentie-verzameling

Ik zei daarstraks: ‘De echte wiskunde is een *zinnvolle activiteit* in een *open gebied*, niet een lukrake in een a priori vastgestelde referentie-verzameling.’ Leerplan-ontwerpers en leerboekauteurs menen klaarblijkelijk onderwijzenden en onderwezenen vastere grond onder de voeten te bieden als ze wiskundige activiteiten tot een vaste referentie-verzameling beperken; mogelijke verrassingen worden zo-doende voorkomen. In de kansrekening heeft het principe van de vaste referentie-verzamelingen enorme verwarring gesticht, in plaats van vaste grond onder de voeten een moeras van tegenstrijdigheden. In de traditionele kansrekening kan men echter ook leren, hoe men het wel moet doen, en dat wil ik hier uiteenzetten.

Neem een dobbelsteen. De zes mogelijke uitslagen van een worp vormen zo’n referentie-verzameling R . Omtrent de worp doet men uitspraken, bijv. dat de uitslag x even is, of < 3 , of > 6 . Deze uitspraken bepalen deelverzamelingen van R ; de deelverzamelingen van R vormen een ‘Borelsysteem’, waarin men verzamelingenalgebra kan spelen, verenigingen, doorsneden, complementen vormen.

Maar deze referentie-verzameling is van geen enkel belang. Direct worden er worpen met twee, drie, ..., n dobbelstenen beschouwd of wordt er met één dobbelsteen twee keer, drie keer, ..., n keer gedubbeld, of wordt samen met de dobbelsteen een munt opgegooid, enz. Dit vereist steeds weer nieuwe referentie-verzamelingen, die uit de oude ontstaan door producten te vormen, producten met eindig veel, maar ook met oneindig veel factoren. Men werkt als het ware in een open referentie-verzameling, die elk ogenblik naar behoefte door nieuwe factoren verrijkt of door verwaarlozing van factoren verarmd kan worden. Een lezing over kansrekening begint soms met de aankondiging dat de spreker de referentieverzameling (preciezer: het kansveld) zo ruim veronderstelt, dat elke ter sprake komende stochastische variable zinvol is. De kansrekening beschikt daarbij in de stochastische variabelen over een middel, om op elk ogenblik de referentie-verzameling waar het om gaat, naar voren te laten treden. Zo beschouwt men bijvoorbeeld de uitkomst van de n -de worp met zekere dobbelsteen als een stochastische variabele x_n gedefinieerd op een kansveld, dat in elk geval de n -de worp van die dobbelsteen tot factor heeft, maar nog tal van andere factoren kan bezitten.

Dit is een beschouwingswijze, die overal past, waar men met referentie-verzamelingen wil werken.

Ik wil dit nader verduidelijken. Laten we twee referentie-verzamelingen bekijken,

- R_1 de verzameling der bloemen met predicaten zoals
... is rood, ... is veelkleurig, ... is hoog,
- R_2 de verzameling der dieren met predicaten zoals
... is een zoogdier, ... leeft in Afrika, ... is uitgestorven.

Als beide soorten uitspraken in dezelfde context moeten staan, wordt de juiste

referentie-verzameling verkregen niet door R_1 en R_2 bij elkaar te gooien, maar door hun product

$$R = \overline{R_1, R_2}$$

te vormen. Zo kan iedere uitspraak p over R_1 als een van R worden beschouwd, die door de tweede component niet beïnvloed wordt; evenzo iedere uitspraak q over R_2 als een over R , waarbij de eerste factor niet meedoet. Zodoende wordt de uitspraak

$$x \in A$$

omtrent R_1 ($\supset A$) opgevijseld tot een uitspraak

$$\overline{x, y} \in \overline{A, R_2}$$

en de uitspraak

$$y' \in B$$

omtrent R_2 ($\supset B$) tot een uitspraak

$$\overline{x, y'} \in \overline{R_1, B}.$$

De uitspraak

de bloem is rood

omtrent bloemen wordt opgevijseld tot een uitspraak

omtrent

$$\overline{\text{bloemen, dieren}},$$

door te constateren

in het paar $\overline{\text{bloem, dier}}$ is de bloem rood,

een uitspraak, die natuurlijk met

de bloem is rood

equivalent is, zodat we de ingewikkeldere vorm missen kunnen en niet eens hoeven in te voeren.

Om nu het verband tussen uitspraaklogica en verzamelingenalgebra te leggen, dat we in 3.10 behandelden, moet men ervoor zorgen dat alle uitspraken waar men zich mee bezig wil houden (of alle predicaten) op dezelfde verzameling van objecten slaan, dat ze dus hetzelfde domein bezitten. Dit wordt bereikt door het product van die domeinen van alle in de context verschijnende uitspraken te vormen en dan elke uitspraak althans in theorie op te vijzelen tot dat nieuwe domein, de referentie-verzameling van de gegeven context. De context uitbreiden betekent dan de referentie-verzameling door nieuwe factoren te verrijken. De context vernauwen betekent uit de referentie-verzameling factoren weg te laten, dus te projecteren op een armere referentie-verzameling met een beperkter stel factoren.

Wat ik hier uiteenzette is geen ordeningssysteem der wiskunde, maar veeleer een systeem om uitspraken over de realiteit wiskundig, in 't bijzonder met verzamelingsbegrippen te ordenen. Het is minder voor de wiskunde relevant dan voor de relatie tussen de wiskunde en haar toepassingen. Men zou de meest omvangrijke referentie-verzameling, waarmee men, van de realiteit komende, te maken krijgt, 'wereld' kunnen noemen. 'Wereld' in deze zin is dan niet een verzameling van ruimte- en tijdpunten, niet de verzameling van de objecten in de ruimte-tijd, in 't geheel geen fysisch gegeven, maar de referentie-verzameling van de context die van de realiteit handelt. 'Wereld' is het product van onnoemelijk veel factoren, de factoren 'bloemen', 'dieren', 'kleuren', 'werpen van munten', 'werpen van dobbelstenen', 'tijdstippen', 'ruimtestippen', 'personen', 'gevoelens', 'gedachten', ga zo maar door. Als ik een der uitspraken doe

de bloem is rood
het dier leeft in Afrika
de dobbelsteen vertoont een zes

dan houd ik me met één factor, één facet van die 'wereld' onder verwaarlozing van de ander bezig, doe ik alle drie samen, dan heb ik iets meer van de wereld te pakken. Maar ook dit is nog een kleine referentie-verzameling. Realistische contexten hebben veel ruimere referentie-verzamelingen – actueel, maar ook potentieel door hun openheid, door de potentie van uitbreiding.

Dat deze fenomenologische analyse voor de wiskunde minder relevant is dan voor de toepassingen van de wiskunde (bijv. voor de kansrekening waar zij vandaan komt) hangt samen met eigenaardigheden van de wiskunde-taal vergeleken bij de omgangstaal, waarin de toepassingen worden geformuleerd. Ik moet op deze eigenaardigheid nog terugkomen, maar loop op het essentiële vooruit: De variabelen van de wiskunde-taal zijn in principe omnivalent; die letters kunnen alles aanduiden en beperkingen moeten expliciet worden gemaakt. Zulke variabelen zijn in de omgangstaal zeldzaam, de variabele 'iets' komt er het meest dichtbij. De domeinen van variabelen zijn in 't algemeen zeer beperkt; 'de bloem' past alleen op bloemen, 'nu' alleen op tijdstippen. Maar dit heeft dan ook het grote voordeel dat men aan het taalkundige symbool voor die variabele meteen de kleine referentie-verzameling, het facet van de wereld, kan herkennen waar zij toe beperkt is, en dit sluit twijfelingen omtrent de referentie-verzameling van een context praktisch uit. Het is trouwens ongeveer dezelfde situatie als bij de stochastische variabelen, die geen variabelen in de wiskundige zin zijn. Als ik het resultaat van de eerstvolgende worp met zekere dobbelsteen $\underline{x}$ noem, dan is de uitspraak

$$\underline{x} = 3$$

van een ander karakter dan een uitspraak

$$x = 3$$

in een wiskundige context. De variabele x moet op de een of andere manier wor-

den gebonden om in een uitspraak te verschijnen. Over de uitspraak $\underline{x} = 3$ kan ik direct uitspraken doen zoals '... is waar' of '... heeft de kans $\frac{1}{6}$ '.

3.12 Elementaire structuren

In didactisch-fenomenologisch opzicht dient er onderscheiden te worden tussen het impliciet en het expliciet gebruik van verzamelingen. We weten immers, dat het voor het goed functioneren van mentale objecten niet vereist, vaak ook niet eens bevorderlijk is, dat zij geëxpliceerd worden. Voor de didactische fenomenologie van verzamelingen als mentale objecten is dit bijzonder belangrijk, omdat de omgangstaal – anders dan met getallen en meetkundige objecten het geval is – geen termen kent om verzamelingen *in 't algemeen* aan te duiden. Toch moeten verzamelingen als substraten van structuren vroegtijdig in de cognitieve ontwikkeling een rol spelen, al worden ze als zodanig natuurlijk niet herkend en geïsoleerd.

Verzamelingen, zoals ze zich in de spontane ontwikkeling voordoen, zijn en blijven sterk gestructureerd. Dit is niet verbazingwekkend. De aandacht wordt eerder door structuren dan door het structuurloze opgeëist, en de neiging het structuurloze te structureren, overheerst die van het gestructureerde te destructuren, althans voor zover van opbouwende en niet van vernielende activiteiten sprake is.

Om voorbeelden te geven wijs ik zulke structuren aan: Allereerst de *structuur der opeenvolging* of *file*, het naast of achter elkaar plaatsen van objecten bijv. om 'treinen' te maken, waarmee gereden wordt, het op elkaar plaatsen van blokken, eventueel volgens de grootte. Of hetzelfde in het ritmisch-acoustische of ritmisch-gymnastische, eventueel met elkaar en met files van harde objecten gecombineerd. Het vroegtijdig zinloos tellen – ook in verkeerde volgorde – hoort hierbij. Uit een gegeven file een nieuwe scheppen door regulier overslaan (bijv. in een tegelpatroon één of twee tegels overspringen) is een verfijnd systeem van structureren, evenzo het regelmatig inlassen in een gegeven file van nieuwe elementen.

Door een file van periodiciteiten te voorzien (in kralensnoeren regelmatig kleuren laten afwisselen) maakt men uit de file een *herhalingsstructuur*. Bij herhalingsstructuren kan men didactisch onderscheiden: het passief herkennen van, het namaken en het kunnen beschrijven. Herhalingsstructuren worden niet alleen lineair, maar ook in vlak en ruimte ontwikkeld – het zou interessant zijn na te gaan, in welke stadia de potentiële oneindigheid van deze herhalingsstructuren bewust wordt. Verwant met de herhalingsstructuur is de *kringstructuur*, het cyclische rangschikken van objecten, van personen rond een tafel of een middelpunt; als mentale structuren de dagcyclus, de weekcyclus, de jaarcyclus.

Meer topologische structuren: de *omwegstructuur* (het kind loopt een omweggetje om op 't eind de geleider weer te ontmoeten), de *randstructuur* (op randjes lopen), de *insluitstructuur* (een echte of symbolische insluiting van zichzelf of een ander door middel van een getekende of anderszins gemarkeerde insluiting),

de *slagboomstructuur* (het wegversperren met uitgestrekte armen), de *verstop-pertje-structuur*, de *om-de-hoek-kijk-structuur*, *doolhof-structuren*.

Deze lijst van algemene structuren kan aangevuld worden met meer gespeciali-seerde: de blokkendoos, die niet op willekeurige manier kan worden ingepakt, de puzzel, die op één bepaalde manier wordt samengesteld, dus met zeer nauwe onderlinge relaties van de samenstellende delen, het gezin in 't algemeen of in diverse realiseringen, dat gestructureerd is naar generaties, geslachten en ver-wantschap, de inhoud van de speelgoedkast, die naar veel kenmerken is gestruc-tureerd, de zitplaatsen in de auto of in de bus, een kwartet spel.

Ik kom op deze structuren, die in een grote rijkdom van didactische stof ver-werkt kunnen worden, op de meest geschikte plaatsen terug. De opsomming diende hier, om er een idee van te geven, hoe sterk het cognitieve bezit vroeg-tijdig door structuren beheerst wordt. Bij sommige herkent men duidelijk, bij andere minder duidelijk en bij de rest met veel moeite een aan de structuur als substraat onderliggende verzameling. 'Men' — dat is de auteur en zijn lezer. Her-kent het jonge kind de substraat-verzameling? — we laten nog in het midden of dit herkennen voor hem in 't geheel relevant zou zijn.

3.12a Ordestructuren

Van al deze elementaire structuren schijnen het gemakkelijkst en het vroegst voor mathematisering toegankelijk de ordestructuren, de lineaire en de cyclische (met veeleer als storend element partiële ordes). Ook zij worden uit rijkere structuren door verarming verkregen, en wel op bijzonder effectieve wijze. Dit rijkere materiaal is uiteraard in den beginnen van concreet karakter — ik bedoel met handen, voeten, zintuigen vatbaar. In de lijn van ontwikkeling zou men als orderelaties eerst die van

het ruimtelijk bevatten,
het ruimtelijk opeenvolgen

willen plaatsen. Hoe het met

het tijdelijk opeenvolgen

is gesteld, is niet gemakkelijk te zeggen. Bekend zijn de moeilijkheden, die vele (hoewel niet alle) kleine kinderen hebben met 'gisteren' en 'morgen' — ze gebrui-ken hetzelfde woord voor allebei, en wel naar ik meen, bij voorkeur 'morgen'. Wat mankeert hier? Het mentaal besef van de tijdrichting, het besef van zoiets als een toekomst die er immers (nog) niet is? Of komt de voorkeur voor 'morgen' eenvoudig van het veel vaker horen van dit woord?

Daphne (3; 8) krijgt een aantal snoepjes. 'Dit bewaren we voor morgen', zegt Moeder. Daphne: 'En dit voor gisteren. En dit voor Donderdag'. Moeder: 'Donderdag is vandaag.' Daphne: 'Dan voor Vrijdag.'

Orderrelaties komen verder tot uitdrukking in

het vergelijken van ruimtelijke en tijdelijke afmetingen en hoeveelheden
gekenmerkt door comparatieven en superlatieven, zoals

langer, korter, dikker, hoger, ouder, meer, voller, enz.,
voorzetsels, zoals

vóór, achter, na, tussen, enz.
en bijwoorden, zoals

eerst, dan
— in welke volgorde zou ik niet weten. Verder weg schijnt te liggen, hoewel
misschien alleen ten dele, het

vergelijken van intensiteiten
door
zwaarder²), warmer, zoeter, liever, mooier, enz.

Orderrelaties worden

waargenomen,
geconstateerd,
handelend nagebootst,
geschapen,

indien het kind een wel voorgeschreven weg — van een steentje naar het volgen-
de, van de ene trede naar de volgende volgt of min of meer bewust kiest, van de
ene steen naar een meest nabije in de omgeving springend, van de ene boomtak
naar een naast hogere.

In veel concreet materiaal — paden, trappen, snoeren, rechte en kromme lineaire
voorwerpen, nesten van voorwerpen — wordt

globale orde, d.w.z. totaal vergelijken
gesuggereerd, maar onder minder concrete omstandigheden, bij tijdelijke of
intensieve criteria, zal deze globale suggestie ontbreken. Terwijl in het eerste
geval de globale orde

aanvaard en wellicht achteraf geanalyseerd
wordt, zou in de andere uit de

locale orde d.w.z. paarsgewijs vergelijken
een globale orde worden
gesynthetiseerd.

Schakel tussen locale en globale orde is uiteraard de

transitiviteit

— zekere twee locale betrekkingen gecombineerd leveren een derde; gemathematiseerd:

$$a < b \wedge b < c \rightarrow a < c.$$

Transitiviteit is, voorzover niet definitorisch bepaald, een empirisch feit. Cognitief gezien is het complex van orderelaties, zoals het zich ontwikkelt, een complex van verantwoorde — en soms ook onverantwoorde — analogieën, taalkundig gesteund door superlatieven, zoals

groot, groter, grootst,
zoet, zoeter, zoetst,

enz. Het afzetten van tijdstippen, gewichten, intensiteiten, enz. op een getallenlijn kan de suggestie van globale lineaire orde opwekken.

Voor de constitutie van

een mentaal object 'geordende verzameling'

lijken me noodzakelijk, zo niet ook voldoende, het in dit geval

operationeel beheersen van transitiviteit³)

en het

operationeel inverteren van die orde.

Voor de constitutie van

het mentaal object 'lineaire orde'

lijkt me noodzakelijk het

operationeel beheersen van endo- en isomorfieën van ordes,

en het

verwerpen van slechts partiële ordes.

De uiteenzetting is zich geleidelijk gaan toespitsen op lineaire ordes.

Cyclische ordes

zijn a priori

globaal

gegeven,

ruimtelijk

— het blokje rond, om de boom heen, de kralenketting —
of

tijdelijk

— de dagcyclus, de wekelijkse cyclus, de draaimolen, het telkens opnieuw iets herhalen. Dit globale karakter is in het bereik van het mentale object in beperkte mate vatbaar door

locaal analyseren

— een geordend tripel bepaalt het verschil tussen een cyclische orde en zijn omgekeerde
— buurtschapsrelaties bepalen de globale cyclische orde, maar formaliseren van

hetgeen aan de transitiviteit beantwoordt,

ligt al ver weg in de begripssfeer van de cyclische orde.⁴⁾ Daarentegen lijkt voor de constitutie van cyclische orde nog belangrijker dan voor die van lineaire orde

het operationeel beheersen van endo- en isomorfieën,
het operationeel inverteren van orde.

In een vlakke meetkundige context wordt de cyclische orde verrijkt met

rechtsom en linksom,

hetgeen we op geschikte plaatsen nader moeten bezien.⁵⁾

3.13 Het elimineren van structuur

Voor het herkennen van de substraat-verzameling is vereist, dat men de op haar rustende structuur geheel weg kan denken. Dit is heel moeilijk als de structuur door natuurlijke volgorde of natuurlijke topologie tot stand is gebracht, zoals in de meeste voorbeelden van algemene structuren. Het is gemakkelijker, hoewel ook nog moeilijk genoeg, als de structuren op classificaties berusten. De kleuren in de kralenvoorraad zijn gemakkelijker weg te denken dan de structuur van het gezin. Het gemakkelijkste gaat het als de elementen niet of nauwelijks onderscheidbaar en niet onderling gerelateerd zijn (gelijksoortige chips, een kudde schapen, de kwartetkaarten van de achterkant) of — het andere extreem — als het geheel een hutspot is, die tot generlei structurering uitlokt.

De didactici, die jonge kinderen expliciet met verzamelingen vertrouwd willen maken, hebben blijkbaar met het probleem geworsteld, hoe men structuren elimineert, hoe men de suggestie van een ongestructureerde verzameling opwekt. De meest voor de hand liggende methode, niet onderscheidbare objecten, is het minst gebruikelijk, vermoedelijk als gevolg van een foutieve concretisering van de eis 'dat de elementen van een verzameling verschillend moeten zijn'. Zeer gebruikelijk daarentegen is de 'hutspot' als paradigma en suggestie van de structuurloze verzameling. De objecten worden in het Venn diagram of tussen accolades dan op een wijze geplaatst, die elke suggestie van orde uitsluit, door elkaar, en als

het cijfers of letters zijn, schots en scheef in het Venn diagram en in chaotische orde tussen accolades. Men zondigt expres tegen wat het kind omtrent orde beleeft – de orde in 't gezin, waar ieder zijn plaats aan tafel kent en ieder zijn bed heeft om in te slapen, de orde in de opgeruimde speelgoedkast, in de bloementuin – om het tot het begrip van de structuurloze verzameling te brengen. Er wordt gesuggereerd, dat als elementen van verzamelingen objecten optreden, die vrij in de ruimte bewegelijk zijn – een ontologie, die op een scheve fenomenologie berust. In verreweg de meeste gevallen hebben verzamelingen *mentale* objecten tot elementen, en als puntverzamelingen aan de orde komen, moet de leerling weer aanleren, wat hem met moeite is afgeleerd: dat nu bij de afzonderlijke elementen van puntverzamelingen de plaats het enige is dat telt.

Ondanks de chaotische orde in het Venn diagram of tussen de accolades is de suggestie, dat het op de plaats niet aankomt, niet bijster sterk. In tegendeel, onderwijzer en leerling moeten er expres op worden gewezen, zoals ze er ook op moeten worden gewezen, dat een verzameling, in strijd met de taalkundige suggestie, ook uit één, ja zelfs uit geen element kan bestaan. En dat op hoger bevel, want alleen zo kan dit als object ingevoerd worden, zonder dat er enige aanleiding toe is.

De didactische middelen, die men toegepast ziet, om kinderen van structuur onblote verzamelingen als mentale objecten te laten constitueren, zijn eenvoudig paardemiddelen. Het is niet te constateren of en hoe zij functioneren, want de constitutie van het mentale object wordt in feite overgeslagen en er wordt tot een taalkundige formulering overgegaan, die geen mentaal object dekt. Met deze taalkundige producten wordt dan op taalkundig niveau verder geopereerd, naar daarstraks door mij uiteengezet werd.

3.14–3.16 Gelijkheid

3.14 Wat in deze paardekuren vooral stoort, is de benadering met oogkleppen. Voorzover verzamelingen vlak bij de realiteit worden geconstitueerd, is een bredere context vereist. 'Nabij de realiteit' moet niet Venn diagrammen van plaatjes betekenen, maar een levende context.

Men vindt soms in schoolboeken de uitleg: Een verzameling is bepaald als van elk object vaststaat of het er element van is of niet. Dit is een absurditeit; zou dit waar zijn, dan zou ik niet meer van een verzameling natuurlijke getallen mogen spreken, zonder precies de elementen aan te geven. Eveneens is de suggestie misleidend, als zou het verzamelingskarakter daardoor bepaald zijn, dat het op de plaatsing van de elementen niet aankomt.

Beslissend is veeleer, wat bij verzamelingen gelijkheid betekent. Wil men over verzamelingen spreken, dan moet men criteria voor gelijkheid geven. Stellen twee plaatjes hetzelfde gezin voor, stelt een plaatje hetzelfde gezin voor als aan de overkant woont? Zijn het dezelfde knikkers, die vorige week en die nu in de knikkerzak zitten? Staan bij *A* en bij *B* dezelfde soorten bomen in de tuin? (Hier zijn de *concrete* bomen door *soorten* vervangen.) Hebben *A* en *B* dezelfde rapportcijfers?

Natuurlijk, om die vragen te beantwoorden moet men allereerst weten of de bij die verzamelingen betrokken individuele elementen paarsgewijs gelijk zijn, dus wat bij onsamengestelde objecten gelijkheid betekent. Maar verder moet natuurlijk van de samengestelde de samenstelling bekend zijn.

Met 'bredere context' bedoel ik formeel de ontologische vraag naar gelijkheid, d.w.z. in 't algemeen, niet bepaald voor het verzamelingsbegrip, criteria van gelijkheid te geven. Uiteraard geen absolute, maar door de context bepaalde criteria. In deze context wil ik me nu begeven; in materieel opzicht denk ik daarbij aan grootste realiteitsnabijheid, en wat het didactisch milieu betreft aan jonge kinderen. Ik schets een breed thema.

3.15 Een aantal plaatjes van hetzelfde kerkgebouw, van verschillende kanten onder verschillende hoeken, onder verschillende belichting genomen, misschien één foto voor een restauratie, één met steigers, één na de restauratie. Is het dezelfde kerk? — een vraag die aan discussie onderworpen, bevestigd of ontkend wordt. Het doet er niet toe, wat het resultaat is; waar het op aankomt is te beseffen en te laten beseffen, dat criteria vereist zijn, om duidelijke vragen te beantwoorden en dat je die criteria niet cadeau krijgt.

In de discussie zal naar analogie-argumenten worden gezocht. Is een mens in andere kleren, met een tand meer of minder een ander, een vrouw die door te trouwen er een naam bij heeft gekregen, een aanstaande moeder met een kind in haar buik, zijn ze andere mensen? 'Ik voel me een ander mens', 'Saulus werd Paulus', 'de zoutpilaar, die Lots vrouw heet' — er valt over alles te discussiëren. Misschien is het uiteindelijke resultaat: Dat kerkgebouw is aldoor hetzelfde, maar 'het kerkgebouw vóór de restauratie', 'het kerkgebouw tijdens de restauratie', 'het kerkgebouw na de restauratie' zijn verschillende objecten. Wiskundig geformaliseerd: Ik vorm uit K (kerkgebouw) en t (tijdstip) het paar $\lceil K, t \rceil$, en plaats naast K en naast elkaar de objecten $\lceil K, t_1 \rceil$, $\lceil K, t_2 \rceil$, $\lceil K, t_3 \rceil$ — allemaal verschillend. Analoot kan men de andere gevallen behandelen, het kerkgebouw naar verschillende aspecten, Saulus-Paulus vóór en na Damascus enz.

Als men het kerkgebouw resp. Paulus als onsamengesteld beschouwt, is het kerkgebouw vóór, tijdens, na restauratie, of Paulus vóór en na Damascus een samengesteld — mentaal — object, maar de wijze van samenstellen, door mentale *paar*-vorming verschilt nogal van die waarop een gezin, een blokkendoos, een leg-puzzel, de zitgelegenheid in bus of auto, een kwartetspel is samengesteld. We kunnen in de laatste voorbeelden de wijze van samenstellen interpreteren als die waarop een verzameling uit zijn elementen is samengesteld. Daarbij dient, zoals eerder opgemerkt, de in al deze voorbeelden aanwezige structuur te worden geëlimineerd, hetgeen niet altijd even gemakkelijk is. Dit kan soms door criteria van gelijkheid geschieden. Het gezin blijft hetzelfde, als zijn leden zich verplaatsen, blokkendoos en puzzel veranderen niet, als men met hun delen schuift (de ordelijk ingepakte toestand kan als apart object worden beschouwd), het kwartetspel blijft onder het schudden zichzelf; alleen aan de zitgelegenheid in de bus valt met die middelen niet veel te doen.

Maar al deze voorbeelden tonen meer structuur, en die valt met deze operaties

niet weg te werken. Gezin, blokkendoos, puzzel, kwartetspel, zitgelegenheid blijven niet alleen als verzameling, maar ook als structuur aan zichzelf gelijk, zolang er geen delen van veranderen of zoekraken.

Ik wil deze gelijkheid van structuur met een ander voorbeeld toelichten. Neem een speelbord van 'Mens erger je niet' zoals je dat in de winkel kunt kopen — met een heel eenvoudige structuur en een verzameling vierkantjes als verzamelingssubstraat. Neem een tweede, precies congruent. Is dit hetzelfde object? Neen, niet als concreet speelbord. Maar je kunt ze beide zien als plaatjes van het — meer abstracte — Mens-erger-je-niet-speelbord. De speelborden kunnen trouwens ook van verschillende fabricage zijn, van verschillend formaat, met afwijkende kleuren en toch als plaatjes van hetzelfde dienst doen. (Mochten ze in het aantal velden verschillen, dan zou men Mens-erger-je-niet-spelen met uiteenlopende veldtallen onderscheiden, zoals bij het damspel het geval is met internationaal en Pools-Duits damspel.) De concrete borden treden hier als plaatjes van een mentaal bord op, zoals we van een gezin verschillende kiekjes kunnen maken, een blokkendoos, een puzzel, een kwartetspel, de zitgelegenheid in auto of bus als abstract schema kunnen opvatten, dat op verschillende — congruente of niet congruente — wijzen is gerealiseerd. Het woord 'plaatje' doet aan iets tweedimensionaals denken, de voorbeelden, die ik gaf, suggereren visuele of instrumentele realiseringen, maar het op verschillende wijze opzeggen van éénzelfde gedicht of het — idem — zingen van een lied kan evenzeer als 'plaatje' van een abstracter object worden opgevat. Een meer omvattende term dan plaatje zou hier 'model'⁶) zijn — de concretisering is zijn modellen van een meer abstracte structuur.

In 't Mens-erger-je-niet-geval is deze structuur wat men in de wiskunde een — gerichte — graaf noemt. Men kan de velden vervangen denken door hun middelpunten (knopen van de graaf) en van naburige velden, in de richting waarin ze bij het spel doorlopen worden, de middelpunten door pijlen verbonden denken. Dit is een vereenvoudigd topologisch beeld van het gebruikelijke Mens-erger-je-niet-bord. Daarachter zit een echt abstracte structuur, vrij van alle meetkunde: de verzameling P van de knopen en op deze verzameling een speciale relatie $R(x, y)$ (er wijst een pijl van x naar y). Men kan de substraatverzameling echter ook anders kiezen: men doet bij de verzameling P van de knopen nog de verzameling Q van de pijlen en voegt er de relaties R_1 en R_2 aan toe: $R_1(x, y)$, knoop x is de staart van pijl y ; $R_2(x, y)$, knoop x is de punt van pijl y . Wat men tot substraatverzameling van een structuur maakt, is een kwestie van smaak en doelmatigheid.

Tussen twee haakjes: Ik heb hier de structuur van het speelbord van Mens-erger-je-niet geanalyseerd, niet het spel. Deze structuur is ingewikkelder. Er komen stellen pionnen bij, er komt een begrip positie bij — een positie is een zekere relatie tussen de knopen van de graaf en de pionnen — er is een regel hoe uit een positie een nieuwe ontstaat, een gegeven over de beginpositie en een regel over de consequenties van de eindpositie. Maar laat ik het hier bij het speelbord laten. Ik kom tot de andere structuren terug. Allereerst hèt, of veeleer een bepaald, gezin, zeg van twee volwassenen, vader en moeder, en drie kinderen, jongen,

meisje, jongen. De structuur is hier gevarieerder dan op 't Mens-erger-je-niet-bord. Er zit een lineaire orde op, volgens leeftijd, classificaties volgens generaties en volgens geslacht en een stamboom. Men kan echter ook in 't oog vatten h t gezin, waarvan de afzonderlijke gezinnen modellen zijn; daar zou dan plaats moeten zijn voor meer of minder dan twee generaties, voor ingewikkeldere of onsamenhangende stambomen enz. De structuur van de blokkendoos wordt door klassen van meetkundige vormen bepaald, misschien ook functionele klassen. Bij de puzzel zou men aan een (niet-gerichte) graaf kunnen denken — de afzonderlijke stukken door punten gerepresenteerd en hun nabuurschap door verbindings-lijnstukken, maar deze structuur zou te ruw zijn, want ze zou nu niet toestaan de puzzel zo te reconstrueren, dat ik twee reconstructies als essentiëel dezelfde puzzel beschouw. De meetkundige vlakverdeling zoals door de puzzel gegeven is, is veeleer de echte structuur waar het hier op aankomt, dus de rechthoekige puntverzameling in een stel deelverzamelingen opgesplitst; als ik dit als de structuur beschouw, verwaarloos ik alleen datgene waarmee de puzzelstukken beplakt of beschilderd verschijnen.

3.16 In de eerste verzamelingen-roes was de postzegelverzameling het paradigma voor verzameling in Nederland. Men vond daar zelfs een argument, waarom van een verzameling alle elementen verschillend moeten zijn: een goede postzegelverzamelaar neemt van elke postzegel er maar één in zijn verzameling op. Volgens dit argument zouden de 50-ct-postzegels, op 1 augustus 0 uur, 1975, op het hoofdstokkantoor in Utrecht aanwezig, geen verzameling vormen.

Twee verschillende begrippen postzegel zijn hier in 't spel. Het concrete bedrukte en gegomde papiertje, en de soort, waarvan dat papiertje een specimen is. (Dit begrip soort is niet voor elke verzamelaar hetzelfde; de een kent en verzamelt meer verfijnde soorten dan de ander, maar dit doet er hier niet toe.) Wat is nu een postzegelverzameling? De verzameling bedrukte stukjes papier? Ja en neen. De postzegelverzameling van de verzamelaar X groeit, verandert door ruil, enz., en blijft toch dezelfde. Goed, dat is geen nieuw gezichtspunt; we kunnen dit verhelpen door te spreken van de postzegelverzameling van X op het tijdstip t . Is dat een verzameling? Wel, als ik in deze verzameling het specimen van één bepaalde soort effectief of in gedachten door een ander van dezelfde soort vervang, blijft het toch dezelfde *postzegelverzameling*, terwijl de *verzameling* veranderd is.

De postzegelverzamelaar verzamelt geen papierstukjes, maar soorten. Niet in die zin, dat hij eigenaar van soorten wordt. Een postzegelverzameling is geen verzameling van soorten. In een postzegelverzameling zijn postzegelsoorten door specimina gerepresenteerd — niet alle soorten en misschien sommige meer dan één keer.

In de tuinen van A en B staan dezelfde soort bomen — dit voorbeeld kwamen we al vroeger tegen. In alle Y - Z -boekwinkels kun je dezelfde boeken kopen; bij alle M - N -ijsverkopers koop je dezelfde ijsjes; de landen P en Q hebben dezelfde fauna. Ja natuurlijk, een boek als concreet object kan maar in   n boekwinkel staan, twee ijsjes zijn nooit dezelfde, en de ene leeuw is niet de andere.

Het begrip dat hierbij past is niet ‘verzameling’, maar assortiment, hetzelfde assortiment postzegels, bomen, boeken, ijsjes, dieren. Men beschouwt de verzameling Ω van alle postzegels, bomen, boeken, ijsjes, dieren, respectievelijk. Die verzameling is in soorten verdeeld, die een verzameling Σ vormen. Een assortiment is een verzameling soorten, dus een deelverzameling van Σ .

Het lijkt een wat zwak begrip; zo’n assortiment zou ook geheel leeg kunnen zijn. In zichzelf is zo’n assortiment ook armoedig: een verzameling met een heel klein beetje structuur (doordat zijn elementen soorten zijn) – in ’t geval van de postzegelverzameling inderdaad alleen maar de lijst van de erin vervatte postzegels. Maar er zit op deze verzameling een sterke externe structuur, de gerelateerdheid tot de verzameling Ω van alle postzegels enz. en tot de postzegelverzamelingen van de andere verzamelaars. Het assortiment krijgt zijn betekenis door het feit dat het assortiment is van de in soorten verdeelde verzameling Ω . Zodoende wordt het zinvol te vragen of twee postzegelverzamelaars hetzelfde assortiment postzegels bezitten (al zijn het gescheiden verzamelingen), of de ene een groter dan de andere, of dat zij elkaar overlappen, of dat ze geheel vreemd zijn (ze verzamelen verschillende landen of verschillende tijden).

Een postzegelverzameling is dus een verzameling (van papierstukjes) plus een assortiment. De verzameling is om zo te zeggen extern gestructureerd. Dit is een in de wiskunde welbekende wijze van structureren. Men kan een groep, een lineaire ruimte, in zichzelf bestuderen; men kan echter ook de nadruk leggen op de relaties van die groep, die lineaire ruimte tot andere. Men is dan bezig in wat men noemt de categorie der groepen, der lineaire ruimten; de voor de afzonderlijke groep of ruimte externe structuur uit zich in de zogenaamde morfismen van de categorie.

3.17 Structuren als mentale objecten

Behalve in kunstmatige voorbeelden en sommetjes verschijnen verzamelingen vaak begiftigd met en afhankelijk van structuren en kunnen ze alleen via die structuren zichtbaar worden gemaakt. De verzameling wordt als substraat duidelijk, als de structuur herkend en bewust geëlimineerd is. Dit was de zin van de voorafgaande discussie. De voorbeelden van structuren, die we kozen, waren van natuurlijke herkomst. Ik verwerp kunstmatige niet, maar men moet zich hun gebreken duidelijk maken. De logische blokken, bij voorbeeld, lijden aan vier euvelen: alles is vóórgestructureerd, structuur is tot classificatie beperkt, ze spiegelen een gesloten (zelfs eindig) mathematisch universum voor, waarin verzamelingenalgebra wordt bedreven, en tenslotte, de relevante predicaten bepalen steeds precies één element – alle vier deze verschijnselen zijn uitdrukking van een systematisme, dat, zoals systematisme jammer genoeg steeds doet, veel didactici in de wiskunde aantrekt. Dit neemt niet weg dat logische blokken, verstandig gebruikt, een van vele nuttige hulpmiddelen kunnen zijn.

Het herkennen van structuren en via de structuren van substraatverzamelingen is een schematiserende abstractie, die in het didactisch proces concrete steun verdient, hoewel niet noodzakelijk zo concrete steun als door logische blokken

wordt geboden. Veel meer ligt voor de hand het tekenen van plaatjes die de structuren en substraten schematisch weergeven, dus bij voorbeeld behalve 't Mens-erger-je-niet-bord ook de schematiserende graaf. Voor classificaties volgens één kenmerk is het voor de hand liggende en meest suggestieve plaatje het stel zakken (fig. 3)

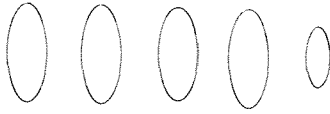


fig. 3

bij dubbele classificatie twee elkaar overkruisende stellen zakken (fig. 4).

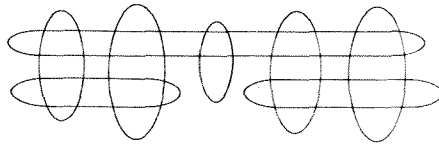


fig. 4

Een kaartspel wordt geschematiseerd als product van

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, B, V, K, A\}$$

en

$$\{K, S, H, R\}.$$

Er zijn talrijke manieren om assortimenten schematisch voor te stellen: door een check-list, door een geschematiseerde bladzij van een postzegelalbum met sommige plaatsen ingevuld en sommige niet, door een plaatjescatalogus-bladzij met sommige aangestreept. Maar bij al deze voorstellingen blijft de verzameling Ω in het duister. Wil men dit verhelpen dan kan men deze plaatjes met die van de classificatie combineren.

We zullen meer van dit soort schema's tegenkomen. We beklemtonen wederom dat ze *niet begrippen concretiseren* — zoals de Venn diagrammen moeten doen — maar uit *reële structuren door schematiserende abstractie afgeleid zijn* en dienst moeten doen bij het *constitueren van mentale objecten*. Of en hoe snel en door hoeveel etappes men verder gaat naar de constitutie van begrippen is een tweede. De etappes zijn door hun verbaal apparaat gekarakteriseerd. Men kan simpel woorden al als 'verzameling', 'groep', 'geordende verzameling', 'graaf', 'gerichte graaf' voor dit en dat invoeren, zoals men van getallen en optellen spreekt, men kan individuele structuren door letters aanduiden, men kan er in het formaliseren zelfs zover gaan, dat men bij het aanduiden van een structuur de substraat-verzameling en de structurerende relatie formeel onderscheidt (dus bijv. een geordende verzameling door $\langle V, < \rangle$ aangeeft). Het hangt van het niveau van formaliseren af of dit puur namen zijn, om de objecten op te roepen dan wel of men op 't oog heeft, het mentaal opereren met die objecten door een formeel

opereren met die namen te beschrijven. Uit het traditionele rekenonderwijs weet men dat vroegtijdig formaliseren mogelijk is (het cijferend rekenen is de eerste geheel geformaliseerde activiteit die het kind leert); men weet ook, dat voortijdig formaliseren schadelijk kan zijn. Deze ervaringen zou men zich bij de didactische stof, die we hier behandelen, eveneens te nutte moeten maken: een formeel apparaat alleen daar te introduceren waar het mentale objecten dekt en waar het vereist is om operaties met die objecten te beschrijven of te vergemakkelijken. Met dit voor ogen zal ik enkele verzamelingstheoretische begrippen de didactisch-fenomenologische revue laten passeren. Bij elk hunner wil ik het minimale formele apparaat trachten aan te geven, waarmee constitutie van mentale objecten mogelijk geacht kan worden.

3.18–3.30 AANTAL ALS VERZAMELING THEORETISCH OBJECT

3.18 Constitutie van aantallen

Ik behandel hier niet de constitutie van het aantal; dat is een thema voor Hoofdstuk 4. Ik moet er echter enigszins op vooruitlopen, voorzover de constitutie van verzamelingen en van hun bewerkingen er bij betrokken is. Ik zie in de constitutie van het aantal de volgende activiteiten:

Van structuren met hetzelfde substraat de structurerende component elimineren, om de substraatverzamelingen te verkrijgen,

en in dit verband de inclusierelatie in een orderelatie om te zetten ('kleiner' i.p.v. 'zit in').

Van het isomorfisme van structuren met verschillend substraat, gebruik maken, om verschillende verzamelingen te vergelijken.

Van de transitiviteit van gelijkheid en van orde (door aantal) gebruik maken.

Men mist hier misschien

het structuurvrij vergelijken van verzamelingen,

dat ons door de theoretische verzamelingsleer als het ware voorgeschreven wordt voor het vergelijken van machtigheden, maar al mocht dit op het niveau voor begripsvorming belangrijk zijn, op het niveau van constitutie van mentale objecten is het, zoals spoedig zal blijken, irrelevant en ineffectief. Ik moet deze uitspraak echter direct door één uitzondering afzwakken. Op *kwalitatieve* schaal komt het structuurvrij vergelijken van verzamelingen ten behoeve van het aantal wel voor. Of de ene verzameling *veel* meer elementen dan de andere heeft, kan met één oogopslag te zien (of met het blote oor te horen) zijn, zonder dat de betrokken verzamelingen gestructureerd zijn of worden. Er zijn vroege ontwikkelingsstadia waarin een korte rij geconstitueerde kleine aantallen uitmondt in een onbepaald 'veel' dat taalkundig trouwens door een *bepaald* telwoord uitgedrukt

kan zijn. De ontwikkeling schrijdt dan voort met de differentiatie van het 'veel'. De mentale constitutie van 'veel' zou, althans ten dele, door een procedure van structuurvrij vergelijken kunnen geschieden, en hiermee zou het structuurvrij vergelijken via de motor van het 'veel' de ontwikkeling van het aantal als mentaal object kunnen beïnvloeden.

Ik kom terug tot de drie activiteiten, die ik in het begin van deze sectie als essentieel voor de constitutie van het aantal heb geponeerd. Om wat ik daar zei toe te lichten, herinner ik aan bekende proeven: Men legt twee rijen van voorwerpen zo gestructureerd, neer (fig. 5), dat door het langer zijn van de tweede



fig. 5

ad oculos gedemonstreerd wordt, dat in de tweede rij meer voorwerpen liggen (er wordt van de isomorfie van een structuur met een deelstructuur van een andere gebruik gemaakt en van de transitiviteit); dan schuift men de tweede rij samen zodat beide nu dezelfde lengte hebben (om steeds nog de gelijkheid in aantal te beweren, moet de verandering van structuur worden geëlimineerd en daarna weer transitiviteit worden toegepast). Dergelijke proeven gelden bij psychologen als test op 'conservatie'; op welk punt de zogenaamde niet-conserveerders stranden, onthullen ze niet.

Wat deze drie activiteiten voor de constitutie van aantallen betekenen, komt later aan de orde. Hier houdt ons de rol bezig, die verzamelingen, impliciet of expliciet, in deze spelen.

Men kan zich afvragen: spelen ze werkelijk een rol? Zoals ik herhaaldelijk heb uiteengezet⁷⁾ zijn grondtelwoorden — ook onbepaalde — al taalkundig een andere categorie dan bijvoeglijke naamwoorden; als ik van een voetbalelftal wil zeggen, niet dat elke speler, maar dat de club goed is, kan ik niet volstaan met 'elf goede voetballers', maar ik moet het bijvoeglijk naamwoord 'goed' aan het object 'elftal' hechten, 'een goed elftal' of 'een goed voetbalteam'. Telwoorden echter slaan vanzelf op een collectief van dingen, een voetballer is niet veel of elf, maar het zijn veel of elf voetballers. Alleen wordt dit collectief niet expliciet aangeduid zoals in 't geval van het voetbalteam; de telwoorden stempelen door hun aanwezigheid datgene waar ze op slaan tot een collectief.

Nu is het zo gesteld, dat in de eerste stadia van de ontwikkeling de telwoorden — en de onuitgesproken mentale aantallen — niet op verzamelingen, maar op structuren gericht zouden kunnen zijn. Het ligt voor de hand dit althans voor het aantal 2 te vermoeden; vroegtijdig wordt het kind attent gemaakt op de natuurlijke paren: twee ogen, twee oren, twee handen, het ouderpaar, zon en maan, tweelingen. Is op dit ogenblik het tweetal al mentaal geconstitueerd of is het een nieuwe stap, dat de twee in ongestructureerde tweetallen wordt herkend? De tweetallen, die we net opsomden, zijn namelijk meer of minder sterk gestructureerd: de eerste drie door 'rechts en links', maar ook extern, omdat een vereniging van ogenparen enz. een natuurlijke classificatiestructuur vertoont, hetgeen

ook voor het ouderpaar geldt, bij 'zon en maan' is een interne structuur duidelijk; bij de (eeneiige) tweelingen is de structuur zwak of afwezig.

Natuurlijke drietallen zijn minder opvallend, natuurlijke viertallen wel: de poten van vele dieren en tafels, in 't eerste geval weer een sterke structuur, in 't tweede minder. Natuurlijke vijftallen, de vingers van een hand, worden aan het kind expliciet als middel van constitutie van een aantal opgelegd. Mogelijk geschiedt dit met weinig succes, gezien de sterke, maar weinig doelmatige, structuur van het vingersysteem, die nog door allerlei versjes wordt beklemtoond — het is altijd hetzelfde drietal of viertal vingers dat opgestoken wordt, wanneer kinderen het antwoord op de vraag naar hun leeftijd van deze verplichte geste doen vergezellen.

Structuren beletten de constitutie van het aantal, maar zijn ook, naar me voorkomt, onmisbaar voor de instigatie van dit proces. Ik herhaal het voorbeeld van Bastiaan (4; 3) met de aalbessen:

Aan de rechthoekige eettafel zit hij tegenover zijn zusje, de vader tegenover de moeder, de grootmoeder tegenover de grootvader; bij het dessert heft hij ineens zijn lepeltje triomfantelijk en zegt opgewonden: 'Zoveel zijn wij'. Ik vraag 'waarom?' en hij antwoordt 'ik zie het zo', om onmiddellijk door te gaan: 'twee kinderen, twee volwassenen, twee opa en oma'. Vermoedelijk lagen de aalbessen ook in de dobbelsteenconfiguratie op de lepel, maar dat kon ik niet zien. Tot die tijd toe was Bastiaan nog heel onzeker met getallen en weigerde hij hardnekkig te tellen. Deze gebeurtenis markeert duidelijk in zijn ontwikkeling de constitutie van het aantal.

Op grond van deze en andere waarnemingen beschouw ik het gestructureerd vergelijken van verzamelingen als een belangrijk element in het ontstaan en de ontwikkeling van de mentale aanvallen. Volwassenen dringen aan kinderen een speciale aard van gestructureerd vergelijken op: door middel van de geordende verzameling der natuurlijke getallen, waarmee een gegeven verzameling V uitgeteld wordt. Twee aanmerkingen zijn hier op hun plaats: Enerzijds is voor 't vergelijken van verzamelingen N niet beslist nodig. Het is wel vaak, maar niet altijd doelmatig, N als 'bemiddelaar' tussen de te vergelijken verzamelingen te gebruiken. Er zijn gevallen, waarop we nog terug moeten komen, waarbij dankzij met elkaar gerelateerde structuren in de te vergelijken verzamelingen de tussenkomst van N bepaald ondoelmatig is. Anderzijds is de tussenkomst van N in 't algemeen niet voldoende om van een verzameling het cardinaalgetal vast te stellen. Behalve als dit getal zeer klein is, moet men voor de bepaling ervan òf van een in V aanwezige structuur gebruik maken, òf, mocht die er niet zijn, V structureren, om zeker te zijn dat V bij het tellen één-één uitgeput wordt. De elementen van V kunnen zich in ruimtelijke of tijdelijke lineaire orde bevinden, als kralensnoer, als voorbijrijdende trein, als klokslagen. Is dit niet het geval, dan wordt aan V een orde opgelegd. Hoe — dit is niet triviaal en moet geleerd worden. Het kan met zoiets als coördinaten geschieden: men constitueert mentaal een rij van boven links naar boven rechts, legt er een tweede rij onder, en gaat zo tot rechts beneden door. Als variatie hierop kent men het 'ploegen': eerste rij van boven links naar boven rechts, tweede rij van rechts naar links, en zo verder afwisselend. In het horizontale of drie-dimensionale veld zal men

achteraan beginnen en naar voren doorgaan, of omgekeerd. Men ziet ook poolcoördinaten — oplossingen — spiraalachtig van buiten naar het midden of omgekeerd.

Het structureren door naar coördinaten op te lossen kan bij de lerende bevorderd worden door voorbeelden waarbij zulke structuren opvallend aanwezig zijn; de leerling wordt daardoor verleid ze elders, waar ze zwakker zijn, mentaal te versterken, en waar zij ontbreken, op te leggen. Een andere wijze van structureren is door classificatie: als de elementen van V naar vorm of kleur of grootte verschillen, kunnen deze kenmerken tot classificatie worden gebruikt; met nabijheid als classificerende relatie kan men tot locale groeperingen in V komen, die mentaal of door echte omgrenzingen gemarkeerd zijn.

Het kwam me er hier op aan de betekenis te onderstrepen van structuren bij de mentale ontwikkeling van aantallen en aantal en bij het bepalen van aantallen in de realiteit. Hoewel aantal een kenmerk van de structuurloze verzameling is, kan het in de ontwikkeling en toepassing op de realiteit alleen via structuren werkzaam zijn (althans wat preciese aantallen betreft en niet onbepaalde, zoals door 'veel' en 'weinig' worden beschreven). Dit heeft uiteraard didactische consequenties. Het behelst een waarschuwing, om de mentale constitutie van aantallen niet aan de structuurloze verzamelingen te willen ophangen, zoals systeem fanatici gaarne willen, noch te eenzijdig bij de uittellende structuur van $\mathbf{N}$ zoals opvoeders gaarne doen die het kind de getallenrij leren.

Ik beperk me hier tot deze opmerking. Een fenomenologie van het getal was hier niet mijn bedoeling. Daarop ga ik later in, en dan zullen de methoden van bepaling van aantallen in de realiteit systematisch aan de beurt komen.

3.19 Aantallen van verzamelingen door een structuur verbonden

Wel zal ik hier structuren bespreken, die bij het bepalen van aantallen en van relaties tussen aantallen een rol spelen.

Allereerst het vergelijken van aantallen van verzamelingen die onderling door een structuur verbonden zijn. Deze structuur kan uit een min of meer expliciete afbeelding tussen de verzamelingen V_1 en V_2 bestaan. Voorbeelden:

de neus van x ; V_1 een verzameling mensen, V_2 hun neuzen — door het neuzentellen wordt het aantal mensen in V_1 vastgesteld,

stembriefje van x ; in plaats van de stemmen die op iemand of iets zijn uitgebracht, telt men de stembriefjes.

haken en ogen,

plaatsbewijs van plaats x in de schouwburg; de onbezette plaatsen worden met behulp van de resterende plaatsbewijzen vastgesteld,

het uittellen van een verzameling door de elementen met telwoorden of cijfergetallen te nummeren.

Een meer verfijnde relatie tussen twee of meer verzamelingen, die aanleiding geeft tot vergelijken volgens machtigheid, is het alternerend lineair rangschikken. Men verdeelt de kaarten van een kaartspel gelijk onder vier personen A, B, C, D door met A beginnende in cyclische orde deze personen telkens één kaart (of hetzelfde aantal kaarten) te geven. In een gerichte kralensnoer waar de kleuren A, B, C, D cyclisch afwisselen zijn er evenveel van dezelfde kleur als de snoer met A begint en met D eindigt — deze structuur bepaalt namelijk afbeeldingen waarbij aan een kraal van kleur A, B, C zijn opvolger-kraal van kleur B, C, D toegewezen wordt.

Ook bij vlakke structuren kent men dit verschijnsel: Een schaakbord bezit evenveel zwarte als witte velden. Dit geldt trouwens voor elke dergelijke structuur van m bij n velden, zodra m of n even is. Voor $m = 2$ (fig. 6) ordene men



fig. 6

boven elkaar liggende velden aan elkaar toe, om te zien dat er evenveel zwarte als witte zijn, en hieruit volgt hetzelfde voor alle even m door splitsing in stroken van twee hoog. Naar dezelfde methode blijkt voor oneven m en n dat de aantallen zwarte en witte velden met één verschillen.

Een analoog verschijnsel doet zich voor bij een vlakverdeling in gelijkzijdige driehoeken van afwisselende kleur of bij andere regelmatige en regelmatig gekleurde vlakke structuren (fig. 7–8). Men ziet met één oogopslag dat globaal elke kleur

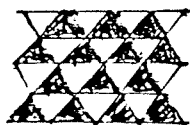


fig. 7

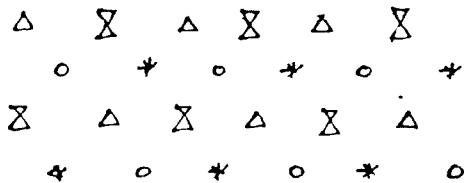


fig. 8

even vaak voorkomt; het vereist omzichtigheid, wil men een eindig stuk uit het oneindig patroon knippen, zodat werkelijk elke kleur even vaak voorkomt.

Het zijn allemaal gevallen waarbij men de gelijkmachtigheid van verzamelingen niet door uittellen, maar door één-één-afbeelden vaststelt; de afbeeldingen zelf zijn natuurlijke afbeeldingen van meetkundige aard, niet willekeurige zoals bij de in Venn diagrammen uitgedrukte structuurloze verzamelingen gebruikelijk. Naar mijn ervaringen zijn kinderen al in voor-schoolleeftijd in staat de gelijkheid globaal te herkennen — zij het dan zonder motivering; ook brengen ze gelijkverde-

lingen van een stapel gelijksoortige dingen tot stand door er afwisselend telkens een op aparte stapels te leggen (aan personen te geven).

3.20 Aantallen van verzamelingen in verenigingsstructuur

De formules

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B \quad \text{voor } A \cap B \text{ leeg}$$

en

$$\#[A, B] = \#A \cdot \#B$$

en analoge met meer summanden en factoren beschrijven geformaliseerde feiten, die aan zekere methoden van tellen en verzamelingen vergelijken ten grondslag liggen. Deze methoden zijn geenszins vanzelfsprekend.

Bij het tellen van grote hoeveelheden objecten (stokjes, blikjes, paperclips enz.) door groepen van telkens twee kinderen in 2e klassen basisschool kwamen de kinderen, die niet in het 1e jaar ons experimentele programma hadden gevolgd, niet spontaan op het idee het werk te verdelen, terwijl in 2e klassen, die in 't eerste jaar het nieuwe program hadden gevolgd, ze wel spontaan op dit idee kwamen.

Het is één ding om wanneer een verzameling in deelverzamelingen verdeeld is, volgens de optelformule te handelen; wie het beheerst, hoeft nog niet genegen te zijn, een verzameling opzettelijk te verdelen, om hiervan gebruik te maken. Dit is bij alle volgende structuren, die we behandelen, een wederkerend verschijnsel: gebruik maken van gegeven en aanbrengen van nieuwe structuren kunnen bekwaamheden van verschillend niveau zijn; het hangt er veel van af hoe duidelijk of hoe vaag die structuur is.

3.21 Aantallen van verzamelingen in rechthoekstructuur

De abstracte verzameling van paren uit A en B wordt meetkundig gevisualiseerd door de 'rechthoekstructuur' (fig. 9): A en B wordt een horizontale resp. verticale

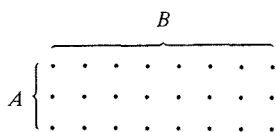


fig. 9

ordestructuur opgelegd, en het paar $\lceil a, b \rceil$ wordt in de doorsnijdig van rij a en kolom b gevisualiseerd. Bij kleine verzamelingen op zijn minst even effectief is het ritmische model voor de verzameling der paren zoals men bijv. van het opzeggen van de getallenrij af het oplezen van een matrix kent (éénentwintig, tweeëntwintig, drieëntwintig, ... éénendertig, ... éénenveertig, met klemtoon op het eerste deel en verwaarlozing van het tweede, respectievelijk a -één-één, a -één-twee, a -één-drie, ..., a -tweé-één, a -tweé-twee, ...).

Maar ook bij visualisering of rythmisering kan de herkenbaarheid van de productstructuur nog meer of minder vaag zijn. In een vergaderzaal met m rijen van elk n stoelen, die wederom in rechte kolommen zijn gerangschikt, is de productstructuur duidelijk herkenbaar. Verspringen de stoelen van opeenvolgende rijen telkens met een halve stoelbreedte (zoals ook de sterren in de Amerikaanse vlag), dan moeten er twee productstructuren uit elkaar worden gerafeld om de productformule toe te passen. Of de productstructuur van de stoelen kan gaten of andere onregelmatigheden vertonen, die eerst aangevuld of anderszins weggewerkt moeten worden, aler de productstructuur duidelijk wordt. Het aantal aanslagen op een schrijfmachine-vel is volgens lijnen gestructureerd, maar de structurering volgens de volgorde van aanslagen, hoewel op een lijst van de schrijfmachine aangegeven, is minder sterk.

De productstructuur is bij gelijkmatigheid van de twee factoren versterkt tot een vierkantstructuur; in de meetkundige visualisering als vierkant is de gelijkheid der machten zonder tellen herkenbaar. De vierkantstructuur nodigt er toe uit, dat men andere structuren als delen ervan gaat structureren. Bijvoorbeeld de ‘randstructuur’ (fig. 10), die als verschil van twee vierkantstructuren begrepen

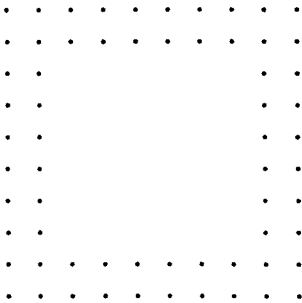


fig. 10

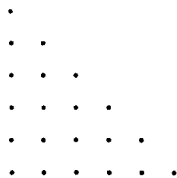


fig. 11

en als zodanig geevalueerd kan worden of die ‘driehoekstructuur’, (fig. 11), die tot een vierkantstructuur wordt aangevuld, om op haar beurt opgevat te worden als vereniging van twee congruente driehoeksstructuren met als doorsnee de diagonaal, hetgeen tot numerieke evaluatie leidt:

$$\begin{aligned}
 n^2 &= \Delta + \Delta - n, \\
 \Delta &= \tfrac{1}{2}(n^2 + n).
 \end{aligned}$$

Al deze meetkundige visualisering, rechthoek, vierkant, driehoek, worden natuurlijk niet noodzakelijk euclidisch verwezenlijkt, die patronen kunnen affien

of zelfs topologisch vervormd optreden, als maar de structurering naar rijen en kolommen min of meer duidelijk wordt. De kolommen kunnen i.p.v. de lineaire orde een cyclische dragen, zodat het product als het ware door een cilinder gedragen wordt, of, als ook de rijen cyclisch geordend zijn, door een torus. De kolom-elementen kunnen de zijvlakken van een dobbelsteen zijn, zodat de productverzameling uit de zijden van een aantal naast elkaar geplaatste dobbelstenen bestaat.

Anderzijds kan juist de euclidische structuur een essentiële rol bij het vergelijken van verzamelingen spelen. Bij een rij of een toren van congruente objecten kan de lengte resp. de hoogte criterium voor het aantal zijn: even lange rijen of even hoge torens bevatten hetzelfde aantal objecten. Een groot aantal dergelijke objecten wordt geteld door ze in rijen van tien of torens van tien te ordenen, waarvan het tiental maar één keer door tellen en daarna door congruentie verzekerd wordt.

Waar de rechthoekstructuur van de verzameling van de paren niet a priori gegeven is, kan haar mentaal beeld door visuele beelden gesteund zijn. Als uit m jongens en n meisjes alle paren jonge-meisje gevormd moeten worden, kunnen de actuele paren niet tegelijk aanwezig zijn; elke jongen en elk meisje kan tegelijk maar in één paar figureren. Echter met n plaatjes van elke jongen en m plaatjes van elk meisje kan men alle gewenste plaatjes van paren vormen (fig. 12); het

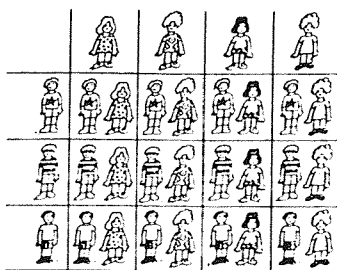


fig. 12

rechthoek-schema is er dan om die $m \cdot n$ plaatjes te ordenen, zodat men er zeker van is dat er geen ontbreekt en geen dubbel optreedt. Wanneer dit een keer be-seft is, kan het figuurlijke element vervallen en een van figuurlijke trekken ont-daan, diagrammatisch rechthoekschema voldoen, dat vroeg of laat door een der-gelijk maar mentaal schema wordt vervangen.

3.22 Aantallen van verzamelingen in gelijkverdelingsstructuur — m manden met elk n eieren

Ik beklemtoonde eerder⁸⁾ dat in heel wat gevallen de rekenkundige product-operatie niet of niet zonder meer door een verzamelingstheoretisch product wordt gerechtvaardigd. In ' m manden met elk n eieren' suggereert het resultaat ' $m \cdot n$ eieren' een verzamelingsproduct, dat echter niet aanwezig is. Dit is een afbeeldingsstructuur, die ik *gelijkverdeling* wil noemen. De verzameling C van de

eieren is in de verzameling A van de manden afgebeeld (ei x ligt in mand y) en bij deze afbeelding f heeft elk element van A evenveel originelen ($\#f^{-1}a = \#f^{-1}b$). Hierbij hoort de formule

$$\#C = \#A \cdot \#f^{-1}a \quad (a \in A)$$

In het hier behandelde geval kan men de *gelijkverdeling* ietwat kunstmatig tot een product omstructureren: men nummert in elke origineelverzameling (elke mand) de eieren willekeurig van 1 tot $\#f^{-1}a$; hierdoor zijn de afzonderlijke $f^{-1}a$ ($a \in A$) éénéén op elkaar afgebeeld en verschijnt C gerepresenteerd door het product van

$$A \text{ met } \{1, 2, \dots, f^{-1}a\}.$$

In weer andere gevallen is er een natuurlijkere relatering van de afzonderlijke $f^{-1}a$ ($a \in A$) met elkaar door de structuur aangewezen. De verzameling der poten van n katten wordt aan de ene kant door de katten gestructureerd, aan de andere kant door de verzameling {linker voorpoot, rechter voorpoot, linker achterpoot, rechter achterpoot}.

Als een boek op elke van zijn n bladzijden twee plaatjes bevat, één onderaan en één bovenaan, kan men het aantal van die plaatjes zowel als n keer twee plaatjes zien, als ook twee keer n plaatjes, namelijk: n bovenplaatjes en n onderplaatjes. In het aanvankelijk leren van de vermenigvuldiging zijn er veel voorbeelden juist van de vorm $n \cdot m$ waarbij n een groot en m een klein getal is. Zolang de tafels nog niet beheerst worden en de vermenigvuldiging als herhaalde (n -keer herhaalde) optelling uitgevoerd wordt, zijn zulke vermenigvuldigingen praktisch ontoegankelijk. De onderwijzer heeft dan de neiging, de commutativiteit van de vermenigvuldiging en haar toepassing te verordineren. In plaats hiervan kan men begripsmatig te werk gaan, door de structuur zo te versterken, dat zij als $m \cdot n$ gezien wordt — bijv. n keer twee plaatjes gezien als n bovenplaatjes en n benedenplaatjes, dus twee keer n plaatjes.

In andere gevallen kan het bepaald ondoelmatig zijn de gelijkverdeling tot een productstructuur te versterken. Als in een club A van n personen een voorzitter en een secretaris moet worden gekozen en naar het aantal mogelijkheden wordt gevraagd, ligt een verzameling van 'besturen' voor, die naar voorzitter en secretaris is gestructureerd. Bij de afbeelding f , die elk bestuur op zijn voorzitter afbeeldt, zijn de origineelverzamelingen $f^{-1}a$ (voor diverse a) niet zinvol op elkaar af te beelden, zodat de gelijkverdeling tot de productstructuur versterkt wordt; met pogingen, dit wel te doen, kan men alleen verwarring stichten. De gelijkverdeling is derhalve als structuur sui generis didactisch vereist.

Het in de laatste alinea gegeven voorbeeld laat echter nog een andere structuring toe: de geordende paren uit *verschillende* elementen van A (iemand kan niet gelijktijdig voorzitter en secretaris zijn), hetgeen tot het aantal

$$\#A \cdot \#A - \#A = n^2 - n = n(n - 1)$$

leidt. Gaat het om meer factoren (voorzitter, secretaris, penningmeester) dan wordt deze aanvulling tot volle producten echter moeizaam.

3.23 Wegenmodel van het product

Men moet het rechthoeksbeeld van het verzamelingenproduct niet à tort et à travers willen doorzetten en zeker niet als het andere op den duur even effectieve beelden zou verdringen of onmogelijk maken. In het door mij vaak aangehaalde voorbeeld van 'drie wegen tussen A en B , twee wegen tussen B en C , op hoeveel manieren kan men van A over B naar C komen?' duikt een van het rechthoekbeeld volstrekt verschillend beeld op. Men kan de leerling natuurlijk helpen het in een rechthoekbeeld om te zetten, maar ritmische structurering van de wegbeschrijving is wellicht effectiever. In elk geval is het wenselijk dat de leerling de wegenstructuur — eenmaal ontward — als structuur sui generis ter belichaming van het verzamelingenproduct ontmoet. Terwijl de visualisering van verzamelingenproducten door rechthoeken zich alleen nog tot drie factoren voortzet (gevisualiseerd door balken i.p.v. rechthoeken) kent de visualisering door wegstructuren geen beperkingen t.a.v. het aantal factoren. Wanneer de wegenstructuur eenmaal als productstructuur herkend is, wordt ze met graagte aangegrepen om omgekeerd verzamelingenproducten te visualiseren. De wegenstructuur, aanvankelijk een probleemsituatie, die door het verzamelingenproduct opgehelderd wordt, wordt tot de rang van een model verheven, het *wegenmodel* van het verzamelingenproduct. Het is een uiterst flexibel model; het laat willekeurig veel factoren toe. Het nodigt uit producten met 'gelijke' factoren door heen- en weerlopen tussen A en B te belichamen. (' N gelijke factoren' door ' N -keer heen- of weerlopen') (fig. 13). Het nodigt ook uit, om problemen zoals



fig. 13

dat van voorzitter en secretaris (uit 3.22) te belichamen door het heen- en weerlopen met verbod van eerder doorlopen wegen. Zo kan de verzameling der rijen ter lengte n zonder herhaling uit een verzameling met N leden belichaamd worden door het heen- en weerlopen tussen A en B (fig. 12) met verbod van reeds doorlopen wegen.

3.24 Boommodel van het product

De taak, vlaggen te kleuren, de bovenste baan met drie kleuren, de middelste met twee andere, de onderste weer met twee andere, alle voorgeschreven, wordt na mislukte pogingen door de leerlingen gestructureerd volgens 'bovenste baan, middelste baan, onderste baan'. Dit zal een handelingsstructuur zijn ('eerst alle vlaggen met bovenste baan zwart' enz.) als in te kleuren vlaggenschema's getekend voorliggen; hieruit kan zich bij het beschrijven een verbale, evtl. ritmisch geaccentueerde structuur ontwikkelen. Schematiseren leidt tot het *boommodel* (fig. 14).

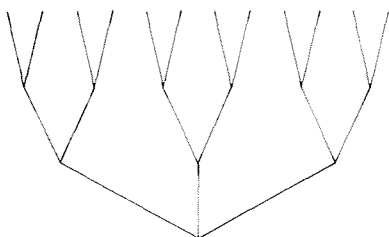
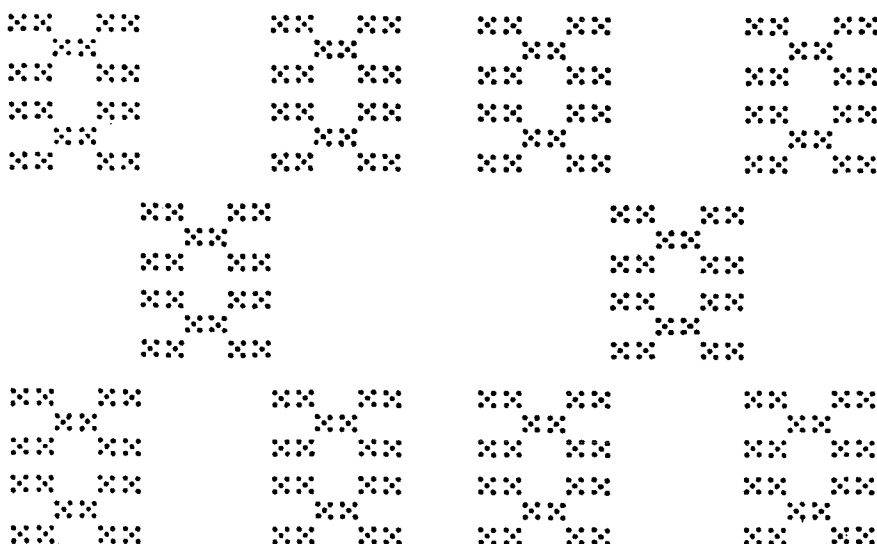


fig. 14

Een variatie op het boommodel is het *substitiemodel* dat tot fraaie patronen aanleiding kan geven (zie fig. 15).



Het boommodel, dat voor veel toepassingen gereed ligt, legt van het verzamelingsproduct niet adequaat rekenschap af, omdat de gelijkheid van de takken op hogere niveaus niet gevisualiseerd wordt. Door identificatie van de knopen op gelijk niveau kan men echter van het boommodel weer naar het wegenmodel (fig. 16) overstappen.

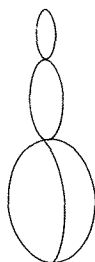


fig. 16

3.25 Gelijkverdelende relatie

Een relatie tussen twee verzamelingen A en B kan worden gevisualiseerd als deelverzameling van het rechthoekbeeld van $\overline{A, B}$, maar vaak zal dit beeld weinig illustratief zijn. Effectiever is de visualisering door een verzameling van verbindingen tussen de met elkaar gerelateerde elementen van A en B – in 't geval $A = B$ een verzameling *gerichte* verbindingen (pijlen) – (fig. 17). In het

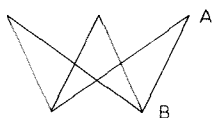


fig. 17

geval van de volle relatie – elk element van A gerelateerd met elk element van B – leidt dit tot een beeld van het verzamelingenproduct van A en B . Hoewel dit beeld als model van het product minder geschikt is, dient de leerling er wel omgekeerd het product in te herkennen.

In combinatorische problemen spelen een rol wat ik *gelijkverdelende relaties* wil noemen: een relatie tussen A en B zodat elk element van A met k elementen van B is gerelateerd en elk element van B met l van A . Van A gaan dan in het model $k \# A$ lijnen uit en van B gezien zijn het er $l \# B$, hetgeen leidt tot de vergelijking

$$k \# A = l \# B,$$

die bij aftelproblemen een rol speelt.

Voorbeelden:

- 1) A : de hoekpunten van een kubus,
 B : de ribben,
 relatie: lid van A ligt op lid van B
 $k = 3, l = 2,$
 $3 \cdot 8 = 2 \cdot 12.$
- 2) X heeft N leden,
 A : deelverzamelingen van X met u leden
 B : deelverzamelingen van X met v leden ($u < v$),
 relatie: inclusie.

$$\begin{aligned} \#A &= \binom{N}{u}, \#B = \binom{N}{v}, \\ k &= \binom{N-u}{N-v}, l = \binom{v}{u} \\ \binom{N-u}{N-v} \binom{N}{u} &= \binom{v}{u} \binom{N}{v}. \end{aligned}$$

Het is de moeite waard, om een belangrijk verschil tussen deze voorbeelden te

signaleren. De verzamelingen A en B van het eerste voorbeeld (en dergelijke voorbeelden) zijn evenals de relatie tussen de twee verzamelingen visueel gegeven. In het tweede voorbeeld – ook als voor u en v bepaalde getallen zijn ingevuld – zijn A en B puur verbaal gegeven; wel kan de beschrijving belangrijk vereenvoudigd worden als men van u -tallen en v -tallen uit X spreekt (i.p.v. deelverzamelingen met u resp. v leden). Ondanks deze verbale wijze van definiëren is er een kans dat de verzamelingen A en B in dit verband als mentale objecten geconstitueerd worden en wel dankzij de visuele kracht van de relatie van inclusie tussen de elementen van A en van B .

3.26 Structuur van de machtverzameling

Een dergelijk verschijnsel vertoont zich bij $\mathcal{P}(X)$, de verzameling der deelverzamelingen van X . Ook hier komt een verbale definitie voor, die alleen operationeel kan worden te midden van een vrij sterk geformaliseerde wiskunde. Wil men op lager niveau $\mathcal{P}(X)$ als mentaal object doen constitueren, dan moet men de vrije sterke en visueel werkzame structuur van $\mathcal{P}(X)$ niet verwaarlozen. Die structuur komt tot stand door de relatie van inclusie tussen de elementen. $\mathcal{P}(X)$ kan voor kleine X als een door de inclusie gerichte graaf worden opgevat (fig. 18).

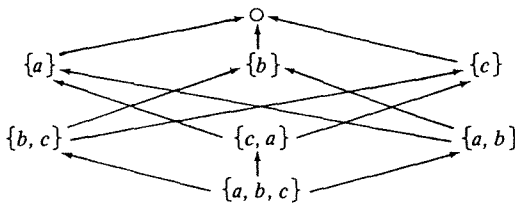


fig. 18

met $X = \{a, b, c\}$), waardoor de structuur van $\mathcal{P}(X)$ schematisch gevisualiseerd wordt. Met de overgang van $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ naar $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$ kan de inductie worden aangebaand die tot de formule

$$\mathcal{P}(X) = 2^n \text{ voor } X = n \text{ leidt.}$$

3.27 Model van de verzameling van de deelverzamelingen met k elementen

Laten we nog eens terugkomen op de verzameling A der u -tallen uit een verzameling X met N leden⁹). Om de verzameling A in 't bijzonder met het oog op de bepaling van $\#A$ mentaal te constitueren, zijn er meer wijzen dan de op 't eind van 3.25 aangeduide. Ik noem er hier enkele van op.

Men introduceerde de verzameling C der $(u - 1)$ -tallen uit X en de inclusie-relatie tussen A en C , die een gelijkverdelende relatie is.

Men introduceert de verzameling D der rijen bestaande uit u verschillende leden van X (die eerder bijvoorbeeld door middel van een boommodel of het wegomodel van fig. 15 belichaamd is) en de vergeet-afbeelding van D op A die een rij (lid van D) omzet in zijn substraatverzameling.

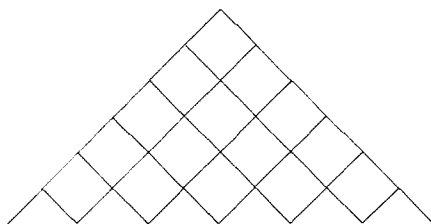


fig. 19

Men introduceert op X een orde, interpreteert een element van A als een keuzerij ter lengte N , behelzende u -keer de keuze 'ja' en $(N - u)$ -keer de keuze 'neen' en visualiseert dit door een 'bord van Galton' van $N + 1$ verdiepingen: aan 'neen' beantwoordt een val naar links, aan 'ja' een naar rechts; alle keuzerijen met u 'ja' eindigen op de u -de plaats (van links met 0 beginnende geteld) op de onderste verdieping.

De verzameling A wordt dus belichaamd door de verzameling der valwijzen. Op het bord van Galton, die op de u -de plaats van de $(N + 1)$ -de verdieping eindigen.

3.28 Ladenbeginsel

Voor de laatste voorbeelden tonen hoe belangrijk voor de constitutie van verzamelingen als mentale objecten een aanwezige of nog aan te brengen structuur kan zijn. Eerder¹⁰⁾ heb ik moeilijkheden van leerlingen onderzocht in een problemen-complex, dat wij met de term 'ladenbeginsel' plegen te omschrijven. Het bleek dat leerlingen geen moeilijkheden hadden met problemen van het type

Zijn er in een schoolklas altijd kinderen die in dezelfde maand jarig zijn?

en grote moeilijkheden met het type

Zijn er twee mensen op de wereld met evenveel haren op hun hoofd?

of

Zijn er twee lucifersdoosjes met evenveel lucifers?

De analyse toonde aan dat de moeilijkheid niet zat in het cardinale getalfeenomeen, maar in het constitueren van beslissende verzamelingen. Bij het eerste type zijn de verzamelingen waar het om gaat — de kinderen in een klas en de maanden van het jaar — direct duidelijk, bij het tweede type — ogenschijnlijk met het eerste isomorf — is dit niet het geval. De verzameling der mensen of der lucifersdoosjes is onproblematisch, de andere — men zou oppervlakkig zeggen N — bezit in eerste aanleg te weinig structuur om bij het oplossen te helpen. Aan N dient een externe structuur opgelegd te worden — als verzameling van mogelijke aantallen van haren op hoofden of mogelijke aantallen van lucifers in lucifersdoosjes —, wil het ladenbeginsel werkzaam worden. In problemen waar het cardinale getalfeenomeen een rol speelt, kan het meer gebeuren, dat door de probleemgegevens N extern gestructureerd is en dat het erop aankomt, deze structuur te herkennen.

3.29 Formeel apparaat ter constitutie van de relevante structuren

Met het laatste voorbeeld ben ik eventjes buiten het in 't begin van 3.19 gestelde kader getreden – structuren te bespreken die bij het bepalen van aantallen en van relaties tussen aantallen een rol spelen. Het ladenbeginsel is veeleer een methode om uit de ongelijkheid van aantallen conclusies omtrent afbeeldingen van verzamelingen te trekken. Ik neem nu echter de draad weer op bij het eind van 3.17 waar ik aankondigde, bij mijn voorbeelden aangaande aantal als verzamelingstheoretisch object het minimale formele apparaat aan te geven, waarmee constitutie van de relevante mentale objecten mogelijk geacht kan worden. Dit apparaat zal in elk geval belangrijk minder inhouden dan dat waarmee ik die voorbeelden hier gepresenteerd heb; hoewel ook deze presentatie op een nog sterker geformaliseerde wijze had kunnen geschieden. Ook een zwakkere formalisering was voor de presentatie beschikbaar geweest. Ik had in plaats van N en u ook 20 en 4 kunnen zeggen. Ik had echter moeilijk letters als X , A , B voor verzamelingen kunnen vermijden of de presentatie was door omslachtigheid en ondoorzichtigheid bedreigd. Ik had het teken $\#$, maar nauwelijks het woord 'aantal' kunnen vermijden; evenmin had ik woorden als 'verzameling', 'vereniging', 'product', enz. kunnen missen, want over hun didactisch-fenomenologische waarde was ik iets aan het vertellen. In het onderwijs, zeker aan jonge kinderen, kan het echter – ten hoogste – de bedoeling zijn iets met verzamelingen, verenigingen, producten enz. te doen, echter niet te vertellen, wat er de status van is.

Voor de constitutie van aantallen heb ik in 3.18 criteria aangegeven en geïllustreerd, die op het cardinale vergelijken van meer of minder duidelijk gestructureerde verzamelingen doelden. De terminologie, waarin dit vergelijken gemeenlijk al op voorschoolleeftijd plaats heeft, is gekenmerkt door woorden als 'evenveel', 'meer', 'minder'. Evenveel zwarte als witte, evenveel sterretjes als rondjes, of meer of minder. Zo niet al bij de kleuter, dan toch in de onderbouw van de basisschool kan men op deze constatering de vraag 'waarom' laten volgen. Na iedere zwarte komt een witte, naast elk sterretje is er een rondje – zou het antwoord kunnen zijn en de leerling zou deze vage uitspraak in pijlentaal kunnen preciseren – dit zou dan inderdaad een nieuw symbolisch middel zijn, waarmee de taal van de leerling paradigmatisch verrijkt wordt, en dit middel zou veeleer gebruikt worden om een zichtbare afbeelding te beschrijven en te verduidelijken, dan om, zoals in moderne methoden nogal eens geschiedt, een arbitraire gezochte, overbodige afbeelding te construeren. Is er aanleiding en behoefte om verbale constructies als 'verzameling der witten, zwarten, sterretjes, rondjes' in te voeren en van afbeeldingen van deze verzamelingen te spreken? Ik zie het er niet zitten. De verzameling der witten heeft evenveel elementen als die der zwarten (of 'heeft hetzelfde aantal' of 'hetzelfde cardinaal') is een zwaarwichtige formule, waarmee de wiskunde-taal zeer bewust van de omgangstaal wordt losgemaakt – een losmaking van taal, die een losmaking van realiteiten op zijn minst suggereert, zoniet paralleliseert of inleidt of bezegelt.

De additiviteit van het aantal bij vereniging van vreemde verzamelingen is het definiërende beginsel voor de optelling van aantallen en achteraf een te consta-

teren feit en een hulpmiddel bij het efficiënt tellen. ‘ a balletjes en b balletjes samen zijn $a + b$ balletjes’ (met voor a en b uiteraard bepaalde getallen) is het minimale taalmiddel om dit te verwoorden. In verzamelingentaal is het de formule

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B.$$

Het is op, zeg, basisschoolniveau zowat de enige gelegenheid om zich van het teken $\cup$ te bedienen (voor $\cap$ zijn er iets meer). Tussen de formulering in omgangstaal en de formalisering door middel van deze formule zijn er overgangen zoals ‘vorm ik de vereniging, dan worden de aantallen opgeteld’. Wat wordt met enige formalisering buiten de omgangstaal voor het begrip van de optelling gewonnen? Ik zie er niets. Het didactische probleem der rekenoperaties is — afgezien van de algoritmiek — een toepassingsprobleem, waar ik nog op terugkom. De leerling moet bijvoorbeeld leren dat optelling vereist is, om te weten hoeveel geld hij gisteren had, als hij nu zoveel heeft en zoveel ondertussen uitgegeven heeft, dat ik een 7 moet optellen bij mijn leeftijd om te weten hoe oud iemand is, die 7 jaren ouder is. Verzamelingen helpen in dit geval weinig, want zo men nog van 7 knikkers een verzameling kan maken, met 7 gulden of 7 jaren is dit een gekunsteld zoniet dubieus gedoe.

In hogere mate dan de optelformule kan de productformule

$$\#[A, B] = \#A \cdot \#B$$

rechten op explicitering doen gelden. De formule komt niet uit een pure definitie voort — althans zolang vermenigvuldiging als herhaalde optelling gegenereerd wordt. Er is geen twijfel dat de parenverzameling als mentaal object vroegtijdig geconstitueerd kan en moet worden en dat de productformule operationeel kan en moet functioneren. Moet de formule ook geëxpliceerd worden en in welke vorm? Ja, en wel in paradigmatische vorm, waarbij misschien één paradigma niet voldoende is.

Uit 4 jongens en 3 meisjes kan men $4 \cdot 3$ paren vormen,

4 wegen van A naar B en 3 van B naar C geven $4 \cdot 3$ van A over B naar C ,

en misschien nog enkele andere. Moet men verder gaan, bijv. de 4 en 3 te vervangen door letters? In plaats van ‘zoveel dingen’, ‘het aantal elementen van een verzameling’? Het zou in dit geval minder gezocht zijn, dan bij de optelformule, omdat de leden van het paar in de vermenigvuldigingsformule inderdaad ongedwongen als verzamelingen geïnterpreteerd kunnen worden. Tot een zekere grens. De productformule leidt via het rechthoekmodel van de parenverzameling tot de oppervlakteformule voor rechthoeken. Dat men dan, om er de verzamelingen binnen te slepen, de lengte en breedte moet interpreteren als verzameling van de keren dat een maateenheid langs de ene en de andere zijde is afgezet, is zo absurd, dat, naar ik meen, nog geen auteur dat heeft aangedurfd. Het blijft, voorzover ik zie, steeds in de sfeer van

4 horizontaal en 3 verticaal geeft $4 \cdot 3$ hokjes,

dezelfde omgangstaal-benadering als in de eerder gegeven voorbeelden, of wel strak geformaliseerd,

oppervlakte = lengte maal breedte,

een vereenvoudigde in plaats van complicerende formalisering en een die duidelijk van alle verzamelingentaal gespeend is.

Moet men bij gelijkverdelende afbeeldingen uitgaan boven omgangstaalformuleringen zoals

5 dozen eieren met in elk 12 eieren geeft $5 \cdot 12$ eieren,

of bij gelijkverdelende relaties boven

uit elk van de 8 hoekpunten 3 ribben en op elke van de 12 ribben 2 hoekpunten zijn 24 paren $\langle \text{ribbe, hoekpunt} \rangle$

(uiteraard met schematische illustraties)? Wel, bij de gelijkverdelende relaties kan het de moeite waard zijn, het niet bij de slordige motivering van 'die is drie keer geteld' te laten, maar te begrijpen en te doen begrijpen, dat achter dit 'meervoudig tellen' een tellen van de relatieparen $\langle \text{ribbe, hoekpunt} \rangle$ zit.

3.30 Behoefte aan verdergaand formaliseren

De verzamelingen, waarvan in dit hoofdstuk overwegend sprake was, hadden de bijzonderheid dat ze gevisualiseerd (of anderszins belichaamd) waren, en dan op een wijze, die aan de ene kant eerlijker, maar aan de andere kant ook vaak veel subtieler was dan die bij Venn-diagrammen. Juist om deze reden kan men hier voortijdige formalisering missen, althans als de voorbeelden, waarin ze optraden, voldoende paradigmatische kracht bezitten.

Waar en in welke mate kan in 't geheel een behoefte aan formaliseren ontstaan? Ik moet op deze vraag die later in een bredere context gesteld en beantwoord wordt, hier vooruitlopen. Ik bedoel, als ik de vraag stel, niet alleen een formaliseren, dat de grenzen van de omgangstaal overschrijdt, maar ik let ook op zulke adaptaties van de omgangstaal, die vanuit de omgangstaal gezien zich als jargon voordoen. De verzamelingen, die we in dit hoofdstuk beschouwden, hebben markante namen of kunnen door markante namen worden aangeduid zoals 'mens-erger-je-niet-bord' of 'valwegen, die in hok k uitkomen'. Ik heb ze soms met letters aangeduid, maar dit geschiedde omdat ik veel van deze voorbeelden naast elkaar moest behandelen en dan op een efficiënte en economische wijze onderscheiden.

Formaliseren is een taalkundige bezigheid, en de behoefte aan formaliseren is in eerste aanleg een behoefte aan verbeterde communicatiemogelijkheden (communicatie met anderen of met zichzelf); in 't bijzonder worden verregaande eisen aan het formalisme gesteld als mondelinge, vaak ostentatieve communicatie plaats moet maken voor schriftelijke en andere van ostentatieve mogelijkheden verstoken communicatie. Talen hebben echter niet alleen een communicatieve taak. Ze doen ook dienst als gesloten, min of meer automatisch functio-

nerende systemen. In een verdergaand stadium van formaliseren bestaat de behoefte, dit automatisch functioneren zo veel mogelijk te garanderen, het formaliseren wordt dan dienstbaar gemaakt aan het ontwikkelen van algoritmen.

Wat het communicatieve aspect van het formaliseren aangaat, kan men nog onderscheiden: formaliseringsen aangaande de vocabulaire, soms van vereenvoudigende, soms van verduidelijkende aard, en formaliseringsen aangaande de syntaxis, meestal van systematiserende aard. Een voorbeeld van het eerste: het herinterpreteren van 'vierhoek' uit de omgangstaal en het introduceren van termen zoals vierkant, rechthoek, ruit, parallelogram; een voorbeeld van het tweede: de afspraak dat vierkanten bij de ruiten en bij de rechthoeken worden gerekend. Een ander voorbeeld voor 't eerste: het aanduiden van *bepaalde* objecten door letters, een voorbeeld van het tweede: het gebruik van letters om *variabelen* aan te duiden.

Historisch voor het eerst werden letters voor variabelen gebruikt in de euclidische meetkunde, klaarblijkelijk ten behoeve van communicatie: zodra meetkundige constructies en redeneringen schriftelijk moeten worden vastgelegd, falen demonstratieve uitdrukkingsmiddelen zoals 'dit punt' en 'dat punt'; ze worden door conventionele variabelen, door letters aangeduid, vervangen. Deze situatie wordt echter door de tot de uiteenzetting behorende tekening gecompliceerd, zodra dezelfde letters ook bij punten op 't papier staan, hebben ze tevens het voorkomen van *constante* eigennamen van die punten. Aan de andere kant heeft dit formaliseren in de meetkunde een uitloperijtje naar de algoritmische kant toe: een rechte door de twee punten *A* en *B* krijgt geen gloednieuwe naam, maar de algorithmische naam *AB*. Van een enigszins naar automatismen toe ontwikkelde algorithmiek kan daar echter geen sprake zijn.

Een formalisering van grote waarde en grote consequenties, waaraan wij zo gewend zijn geraakt, dat we ze nauwelijks als zodanig ondervinden, was de schepping van het ons vertrouwde systeem van getallennotatie. In tegenstelling met het oud-egyptische systeem en de zogenaamde romeinse cijfers, die als het ware woordelijke vertalingen van de telwoorden der omgangstaal voorstellen, is het indisch-arabische systeem een vertaling van de abacus-taal en historisch duidelijk gemotiveerd door de behoefte, de voordelen van de uitdrukkingswijze van de abacus op het poederbord of op 't schrijfpapier over te brengen. De indisch-arabische cijfers zijn een onlosmakelijk aandeel van onze schrijftaal (over de grenzen heen van elke schrijftaal) geworden; dat ze er desniettemin een vreemd lichaam in zijn gebleven, blijkt al uit het feit, dat ze niet in de taalles, maar in de rekenles worden onderwezen. Terecht, want hun onberispelijke syntaxis lijkt maar matig op de syntaxis van de in de taalles onderwezen taal. De formalisering van de getallentaal door de indisch-arabische notaties is in hoge mate gemotiveerd door het algoritmische vervolg, het indisch-arabische rekenen. Ook de aanduiding van de bewerkingen is geformaliseerd, binnen de omgangstaal en door speciale aan de omgangstaal vreemde symbolen.

Het schriftelijk fixeren van een gesproken taal is een andersoortige bezigheid van formaliseren — primitiever, minder gespecialiseerd en minder tot algoritmisieren

uitnodigend. Het is zeker geen toeval dat men het onderwijs in beide formalismen op dezelfde leeftijd laat beginnen en dat beide formalismen ook wat de vruchtbaarheid van het onderwijs betreft, sterk op elkaar gelijken. Ik zal daar later nog op moeten terugkomen.

De functie van het formaliseren van het getalsysteem is allereerst een communicatieve, en pas met de algoritmiek van het cijferen wordt het formalisme dienstbaar gemaakt aan het garanderen van automatismen. Te vaak wordt wiskunde hiermee geïdentificeerd. Moderne wiskunde op de basisschool is dan ook graag in deze zin geïnterpreteerd. Volgens traditionele opvattingen wordt het kind met het begin van de schoolplicht vatbaar voor het leren van formalismen (hoewel niet voor het leren formaliseren), maar dit houdt geenszins in dat dit ook het tijdstip is van formalisering ten behoeve van automatisering. Vernieuwers wilden blijkbaar geen genoegen nemen met die formalismen, die volgens traditionele opvattingen in de onderbouw van de basisschool horen. Een groot aantal nieuwe formalismen zijn voor dit ontwikkelingsstadium uitgevonden, waarbij de communicatieve functie vaak dubieus en de automatische binnen de nauwe grenzen van spelletjes blijft. Alleen formalismen met een geprononceerd communicatief karakter zijn tot nu toe een succes gebleken. Ik denk hierbij aan pijlentaal voor rekenkundige bewerkingen en hun omkeringen en aan symboliseren van bewerkingen op de getallenlijn. Niemand heeft het tot nu toe gewaagd, verder te gaan en vroegtijdig afbeeldingen door letters aan te duiden; het hangt van de hele staat van formaliseren af in welke ontwikkelingsfase dit mogelijk zou kunnen zijn. Het meest voor de hand liggend en ook experimenteel beproefd zijn letters voor variabelen, die getallen of grootheden voorstellen — iets waarmee mogelijk te laat wordt begonnen. Ten aanzien van de verzamelingen, die ons in dit hoofdstuk bezig hebben gehouden, kan ik pas in een vrij gevorderd stadium een behoefte aan formaliseren en formalismen ontdekken.

4 NATUURLIJKE GETALLEN

4.1–4.9 FENOMENOLOGISCH

4.1 Naar Peano

Veel van wat hier zou moeten staan, is al eerder¹) uiteengezet; om mezelf niet te herhalen, vat ik dat te midden van het andere samen.

De op hoog niveau gebruikelijke invoering van de natuurlijke getallen is de axiomatiek van Peano:

Een verzameling $\mathbf{N}$ (de ‘natuurlijke getallen’) met

- (1) een element $0 \in \mathbf{N}$ en
- (2) een 1-1-afbeelding f (‘opvolger van’) van $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$,

zodat

- (3) $f\mathbf{N} = \mathbf{N} \setminus \{0\}$

(dus: elk element heeft precies één opvolger en — op 0 na — precies één voorganger) en

- (4) $(0 \in M \subset \mathbf{N}) \wedge (fM \subset M) \rightarrow M = \mathbf{N}$

(dus: $\mathbf{N}$ is — bij dezelfde f — minimaal t.a.v. de eigenschappen (1) en (3)).

Men formuleert (4) ook met uitspraken i.p.v. deelverzamelingen, het ‘principe der volledige inductie’:

- (4') Zij E een eigenschap van natuurlijke getallen zodat
 $E(0)$ en
 $E(n) \rightarrow E(f(n))$ voor alle $n \in \mathbf{N}$,

dan

$$E(n) \text{ voor alle } n \in \mathbf{N}.$$

Stelt men

$$M = \{n \in \mathbf{N} \mid E(n)\},$$

dan is in de veronderstellingen van (4')

$$0 \in M$$

en wegens

$$n \in M \rightarrow E(n) \rightarrow E(f(n)) \rightarrow f(n) \in M$$

ook

$$fM \subset M$$

dus wegens (4)

$$M = \mathbf{N}$$

dus

$$E(n) \text{ voor alle } n \in \mathbf{N}.$$

Dus $(4) \rightarrow (4')$ en op de omgekeerde weg beredeneert men $(4') \rightarrow (4)$.

In $\mathbf{N}$ worden nu 'inductief' de bewerkingen ingevoerd, de optelling door

$$a + 0 = a$$

$$a + f(n) = f(a + n) \text{ voor alle } n,$$

waarmee dan — dit vereist een nogal lastig bewijs — algemeen het optellen

$$a + b,$$

gedefinieerd is, dat — ook weer inductief te bewijzen — de welbekende verschijnselen van commutativiteit en associativiteit vertoont. Analoog gaat het met de vermenigvuldiging:

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot f(n) = a \cdot n + a,$$

De orderrelatie in $\mathbf{N}$ is geen probleem.

Van hier kan men een brug slaan naar de cardinaalgetallen: men stelt voor alle $n \in \mathbf{N}$

$$\#\{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leq x \leq n\} = n,$$

waarbij nog te bewijzen valt dat al deze machtigheden paarsgewijs verschillen. Dit zijn dan de 'eindige machtigheden', en een verzameling met een van deze machtigheden heet eindig. Eveneens valt te bewijzen, dat voor eindige verzamelingen M_1, M_2

$$\#(M_1 \cup M_2) = \#M_1 + \#M_2 \quad \text{als } M_1 \cap M_2 = \emptyset,$$

$$\#[\overline{M_1}, \overline{M_2}] = \#M_1 \cdot \#M_2,$$

dat dus de inductief en de verzamelingsachtig gedefinieerde bewerkingen overeenkomen.

In Peano's axiomatiek verantwoordt $\mathbf{N}$ de telrij, f de teldaad en eigenschap (4) het moeilijk in woorden te vatten idee dat door de in successie uitgevoerde teldaad de telrij wordt uitgeput. $\mathbf{N}$ is een statisch iets geworden; de actie, de tijd, lijkt geëlimineerd.

In het algorithmische vlak wordt die telrij decimaal als het ware geconcretiseerd: in

$$n = a_k \dots a_1 a_0$$

mogen voor de a_i symbolen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 staan; de teldaad verandert deze symbolen op een welomschreven wijze. Alleen schijnbaar is hier het oneindige ingekapseld; het keert terug in de index k (het aantal cijfers min 1), dat gelukkig van lager orde is dan n zelf.

4.2 Naar Euclides

De fenomenologie achter Peano's axiomatic is het in de tijd verlopende telproces; de telwoorden één, twee, drie, ... zouden eigenlijk als eerste, tweede, derde, ... moeten worden gelezen. Oorspronkelijker dan deze is een andere fenomenologie, die we het eerst in Euclides VII vertolkt vinden en die tot Peano, maar ook nog langer de theoretische uiteenzettingen van het getalbegrip bepaalde.

Euclides zegt

Eenheid is hetgeen waarnaar elk ding één wordt genoemd.
Getal is een uit eenheden samengestelde verzameling,

en nog de door Felix Klein in 't leven geroepen Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften²)

Dinge zählen heisst sie als gleichartig ansehen, zusammen auffassen, und ihnen einzeln andere Dinge zuordnen, die man auch als gleichartig ansieht. Jedes von den Dingen, denen man beim Zählen andere Dinge zuordnet, heisst *Einheit*; jedes von den Dingen, die man beim Zählen anderen Dingen zuordnet, heisst *Einer*. Das Ergebnis des Zählens heisst *Zahl*. Wegen der Gleichartigkeit der Einheiten untereinander und der Einer untereinander ist die Zahl unabhängig von der Reihenfolge, in welcher den Einheiten die Einer zugeordnet werden.

Hilbert in 1904³) tracht nog vanuit een dergelijke fenomenologie de getallenleer te funderen, en vanuit dezelfde fenomenologie zijn zijn formalistische aanzetten later te begrijpen.

Van Euclides tot H. Schubert bestaat het getal uit eenheden (Einsen bij Schubert) — een gedachteding samengesteld uit onderling gelijksoortige enkelvoudige gedachtedingen. Het getal als aantal wordt bij Euclides alleen in 't geval van de eenheid expliciet genoemd: door middel van de eenheid kun je van een ding zeggen dat het één ding is. Euclides had kunnen toevoegen, dat ze door middel van de tweeheid, drieheid, ... twee dingen, drie dingen... genoemd worden. Over de wijze waarop deze benaming tot stand komt, heeft hij gezwegen. Dit is er dan later — door verschillende auteurs — verschillend geformuleerd⁴) — bijgekomen. Om een stel dingen te tellen, moet men ze als stel zien, en wel van als gelijksoortig beschouwde dingen — koeien en paarden als een kudde van dieren, want achter het telwoord moet een zelfstandigheid staan — en aan deze objecten worden andere, eveneens gelijksoortige, toegevoegd — balletjes op het telraam of turfstroken of vergeestelijkingen ervan, die dan de getallen vormen.

Zulk een beschouwing was, toen Schubert er de Encyklopädie mee inleidde, nog heel gewoon, hoewel al achterhaald — althans in zover in de loop van de 19e eeuw de volledige inductie zich steeds dringender als de voornaamste eigenschap van $\mathbb{N}$ had voorgedaan en op 't eind van die eeuw door Peano als zodanig was

geformaliseerd. Dit is dan de heden geprefereerde ordinale benadering van de natuurlijke getallen, die het meest rechtstreeks en onder beklemtoning van het voor de wiskunde essentiële tot het wiskundig gebruik van de getallen als reken-grootheden leidt. Het is een nadeel van deze benadering dat een fenomenologie, waarbij het getal uit eenheden *bestaat*, hierbij niet past en dat er het feit dat met getallen *iets* geteld wordt, dat getallen aantallen van iets zijn, achteraan komt, aan het eind van een moeizame weg.

4.3–4.8 NAAR CANTOR, FREGE, RUSSELL-WHITEHEAD

4.3 Het getal als aantal van iets is Cantor's benadering. Cantor zegt⁵):

'Mächtigkeit' oder 'Kardinalzahl' von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hilfe unseres aktiven Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahiert wird ...

Da aus jedem einzelnen Elemente m , wenn man von seiner Beschaffenheit absieht, eine 'Eins' wird, so ist die Kardinalzahl $\bar{M}$ (von M) selbst eine bestimmte aus lauter Einsen zusammengesetzte Menge, die als intellektuelles Abbild oder Projektion der gegebenen Menge M in unserem Geiste Existenz hat.

Daarna volgt pas de definitie

Zwei Mengen M und N nennen wir 'äquivalent' und bezeichnen dies mit

$$M \sim N \text{ oder } N \sim M$$

wenn es möglich ist, dieselben gesetzmässig in eine derartige Beziehung zueinander zu setzen, dass jedem Element der einen von ihnen ein und nur ein Element der andern entspricht.

En later:

dass zwei Mengen M und N dann und nur dann dieselbe Kardinalzahl haben, wenn sie äquivalent sind.

Het 'dann' wordt daardoor gemotiveerd, dat, wanneer het om het cardinaalgetal van M gaat, het op ligging en soort van de elementen van M niet aankomt, en men derhalve de elementen van M volgens de toevoeging door de overeenkomstige van N kan vervangen. Het 'nur dann' is nog eigenaardiger gemotiveerd

dass zwischen den Elementen von M und den verschiedenen Einsen ihrer Kardinalzahl $\bar{M}$ ein gegenseitig eindeutiges Zuordnungsverhältnis besteht ... Wir können daher sagen, dass $M \sim \bar{M}$. Ebenso ist $N \sim \bar{N}$. Ist also $\bar{M} = \bar{N}$ so folgt $M \sim N$.

Men ziet de wiskundige opbouw hier vervlochten met een fenomenologie, die de euclidische voortzet: het cardinaalgetal van M bestaat uit eenheden, zij het dan uit misschien meer dan eindig vele.

Het kan geen kwaad, zou men zeggen, want het enige waar het op aankomt, is de definitie van equivalentie. Het is voldoende, te weten, wanneer verzamelingen gelijkmachtig zijn; wat machtigheid van een verzameling is, doet er niet toe. Het is de *intentionele* begripsvorming van machtigheid: ik ken twee verzamelingen dezelfde machtigheid toe als ze equivalent zijn.

4.4 De machtigheden zijn *cardinaalgetallen* ook in die zin, dat men er bewerkingen mee kan uitvoeren, die als volgt gedefinieerd worden: de optelling via de vereniging, de vermenigvuldiging via het verzamelingsproduct:

$$\begin{aligned}\#M_1 + \#M_2 &= \#(M_1 \cup M_2) \quad \text{als } M_1 \cap M_2 = \emptyset \\ \#M_1 \cdot \#M_2 &= \#[\overline{M_1}, M_2].\end{aligned}$$

Dit is dus — voor eindige verzamelingen — eenvoudiger dan via Peano en ook de diverse wetten voor deze bewerkingen vereisten nauwelijks enige moeite.

Bij de bewerkingen komt trouwens nog het machtsverheffen

$$(\#M_1)^{\#M_2} = \#(M_1^{M_2}),$$

waarbij $M_1^{M_2}$ is gedefinieerd als de verzameling der afbeeldingen van M_2 in M_1 .

4.5 Niettegenstaande de in de laatste alinea van 4.3 gedane concessie heeft men ook op de vraag wat machtigheid nu eigenlijk is, een treffend antwoord kunnen formuleren. Het is van G. Frege en Russell-Whitehead afkomstig en een schoolvoorbeeld van wat men *extensionele* begripsvorming noemt. Alle met M equivalente verzamelingen moeten dezelfde machtigheid bezitten, dus definieert men als machtigheid van M de equivalentie-klasse van alle met M gelijkmachtige verzamelingen; dit is immers het enige dat ze gemeen hebben. (Tussen twee haakjes: De klasse van de met M gelijkmachtige verzamelingen is een object waar men voorzichtig mee moet omgaan, zoals uit diverse paradoxen blijkt; de term 'klasse' i.p.v. 'verzameling' is als een waarschuwingssein bedoeld.) Men is bij Frege-Russell mijlenver van de fenomenologie van Euclides-Cantor, en wat daar geformuleerd wordt, is zo verbijsterend ongewoon, dat bijv. Piaget deze definitie weer zó gelezen heeft, alsof een cardinaalgetal een klasse van equivalente eenheden was.

4.6 Op dit ogenblik zijn we niet in machtigheden in 't algemeen geïnteresseerd, maar speciaal in getallen, d.w.z. eindige machtigheden.

Cantor⁶) begint met een verzameling E_0 met één element om er het cardinaalgetal 1 aan toe te kennen, voegt aan deze verzameling een element toe, om aan de nieuwe E_1 het cardinaalgetal 2 toe te kennen:

Durch Hinzufügung neuer Elemente erhalten wir die Reihe der Mengen

$$E_2 = (E_1, e_1), E_3 = (E_2, e_2), \dots,$$

welke in unbegrenzter Folge uns sukzessive die übrigen, mit 3, 4, 5, ... bezeichneten, sogenannten endlichen Kardinalzahlen liefern. Die hierbei vorkommende hilfsweise Verwendung derselben Zahlen als Indizes rechtfertigt sich daraus, dass eine Zahl erst dann in dieser Bedeutung gebraucht wird, nachdem sie als Kardinalzahl definiert worden ist.

Uit de laatste zin volgt, dat de natuurlijke getallen hier niet als bekend verondersteld, maar echt gedefinieerd worden.

Alle door dit proces verkrijgbare cardinaalgetallen heten eindig. De verzameling van de eindige cardinaalgetallen ($\mathbb{N} \setminus \{0\}$) heeft de (aftelbaar oneindige) machtigheid $\aleph_0$. Elke oneindige verzameling M (d.w.z. een waarvan het cardinaalgetal

niet eindig is), bevat een aftelbaar oneindige, hetgeen als volgt blijkt: men pakt een element a_1 van M ; daar M oneindig is, is $M \neq \{a_1\}$; er is dus een a_2 in M met $a_2 \neq a_1$; daar M oneindig is, is $M \neq \{a_1, a_2\}$; zo ga men door, waarbij een oneindige rij $a_1, a_2, \dots$ van verschillende elementen van M ontstaat.

4.7 Cantor's presentatie van de natuurlijke getallen is even naïef als die van Euclides. Het enige verschil is, dat de getallen niet statisch aanwezig zijn, zoals bij Euclides, maar in de tijd worden voortgebracht; ook het uittellen van een deelverzameling van de machtigheid $\aleph_0$ uit een oneindige verzameling geschiedt in de tijd. Het nieuwe bij Cantor ligt niet in de presentatie van de natuurlijke getallen, maar in de voor het eerst duidelijke verklaring van wat het betekent, dat een getal het aantal van een verzameling dingen is.

Wat het eerste punt betreft, heeft Frege een minder naïeve weg verkend: hij nam alle verzamelingen Φ van cardinaalgetallen met de eigenschappen

Φ bevat de 1

met elk cardinaalgetal bevat Φ het met 1 grotere,

en van al deze verzamelingen vormde hij de doorsnede — dus de kleinste — en dat was dan de verzameling der eindige cardinaalgetallen. Dit is een inmiddels zeer gebruikelijk geworden methode om in de tijd geprojecteerde constructie-aanwijzingen als het ware in één slag te beschrijven. Frege zelf bekent aan het slot van zijn werk, dat zijn opzet door de inmiddels bekend geworden paradoxen op losse schroeven is komen te staan.

Russell-Whitehead zijn voorzichtiger te werk gegaan: ze beschouwen op dit punt geen verzamelingen van cardinaalgetallen, maar geven voor elke eindige machtigheid een voorbeeld-verzameling aan. Ze definiëren verzamelingen Φ naar Frege's recept, echter met als elementen geen cardinaalgetallen, maar eindige verzamelingen:

Φ bevat de lege verzameling,

Φ bevat met elke verzameling X ook de verzameling $X \cup \{X\}$,

en bepalen weer onder deze verzamelingen Φ de kleinste.

De voorbeelden voor de eindige cardinaalgetallen zijn dus

$\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$

Het lijkt, zoals een satiricus opmerkte, een bibliotheek met

in het eerste deel niets,

in het tweede deel het register van het eerste deel,

in het derde deel het register van het tweede,

enz.

en dit zijn dan opeenvolgend de eenheden, waaruit de getallen volgens Russell-Whitehead zijn samengesteld.

4.8 Het bestaan van deze — of enige — oneindige verzameling moet door Russell-Whitehead hierbij uitdrukkelijk geëist worden.

Een ander punt waar Cantor naïef te werk ging, was het uittellen van een aftelbaar oneindige uit een oneindige verzameling M . Om dit uittellen in één slag te beschrijven, denkt men zich van *elke* niet-lege deelverzameling van X een element $\varphi(X) \in X$ aangewezen. De aftelbaar oneindige deelverzameling A van M die men op 't oog heeft, bestaat uit achtereenvolgens de elementen

$$a_0 = \varphi(M), a_1 = \varphi(M \setminus \{a_0\}), a_2 = \varphi(M \setminus \{a_0, a_1\}), \dots$$

Precieser definieert men inductief

$$\begin{aligned} A_0 &= \{\varphi(M)\} \\ A_{i+1} &= A_i \cup \{\varphi(M \setminus A_i)\} \text{ voor alle } i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

en tenslotte

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i.$$

Of zonder expliciete inductie: Men beschouwe alle verzamelingen Φ (met als elementen deelverzamelingen van M) met de eigenschap

$$\{\varphi(M)\} \in \Phi$$

en

$$\text{als } X \in \Phi, \text{ dan } X \cup \{\varphi(M \setminus X)\} \in \Phi,$$

en wederom van deze verzamelingen de kleinste (d.w.z. de doorsnee van allemaal).

Het onmisbare werktuig voor deze definitie is de functie φ die aan elk niet-leeg deel X van M een element van X toewijst — een functie waarvan het bestaan door middel van het zogenaamde keuze-axioma wordt verkregen.

4.9 Naar Dedekind

Een aftelbaar oneindige verzameling kan één-één op een echt deel worden afgebeeld; de zojuist verkregen A bij voorbeeld door een f waarvoor $fa_i = a_{i+1}$. Dus kan iedere oneindige verzameling één-één op een echt deel worden afgebeeld — de M van zonet door A volgens f af te beelden en de rest identiek. Een eindige verzameling daarentegen kan nooit één-één op een echt deel worden afgebeeld.

Deze karakteristieke eigenschap van oneindige verzamelingen, met echte delen gelijkmachtig te zijn, was voor R. Dedekind⁷⁾ het uitgangspunt voor een zeer originele theorie der eindige verzamelingen.

In de tot nu toe weergegeven theorieën werden de eindige machtigheden inductief voortgebracht, al was tenslotte de inductiviteit op de ene of andere manier ingekapseld. In Dedekinds methode komt de inductie er vanzelf. Dedekind definieert

een verzameling is oneindig, als hij met een echt deel gelijkmachtig is

en uiteraard

een verzameling is eindig, als hij niet oneindig is.

Hij gaat van een oneindige verzameling M uit — zijn bewijs voor de existentie van een oneindige verzameling is niet overtuigend.

Aangezien M oneindig is, bestaat er een één-één-afbeelding f van M op een echt deel. Zij $a \in M \setminus fM$. Men definieert een deel N van M door

- (1) $a \in N$,
- (2) $fN \subset N$,
- (3) N is minimaal t.a.v. 1 en 2.

Met N voor $\mathbb{N}$, a voor 0 en f als opvolgerfunctie heeft men hier precies het stel eigenschappen, dat $\mathbb{N}$ definieert. Tevens heeft men — zonder het keuze-axioma — in de oneindige M een met $\mathbb{N}$ gelijkmachtige, dus aftelbaar oneindige deelverzameling gevonden.

4.10–4.11 DIDACTISCH-FENOMENOLOGISCH GETOETST

4.10 Mocht men het een of ander in de voorafgaande analyse van te hoog niveau en daarom misplaatst vinden, dan moet ik daartegenover stellen, dat het als leerstof in moderne wiskundeboeken voorkomt — boeken bestemd voor bij voorbeeld het 6e schooljaar. Het lijkt daar een gesloten systeem, maar in werkelijkheid is het om zo te zeggen in klompen op zijn tenen lopen, het tentoon spreiden van subtiliteiten in een grof lacuneuze context. Ik heb dit eerder⁸) uit de doeken gedaan.

Het moet uit het voorafgaande duidelijk worden, hoe elke verdieping van het getalbegrip verder wegleidt van de fenomenologie van het naïef beleefde getal. De uit de Elementen van Euclides geciteerde definities vertolken een direct van de abacus en de rekenpenningen geabstraheerd weten omtrent getallen. Ze hebben geen operationele waarde in de getallenleer die ze inleiden. De volledige inductie is vanaf de oudheid, bij tijd en wijle, soms zelfs diepgaand, toegepast, maar pas door Pascal geformuleerd. Er kwamen steeds meer voorbeelden en een steeds bewuster gebruik van de volledige inductie, maar pas twee en een halve eeuw na Pascal werd de sleutelpositie van de volledige inductie voor het begrip ‘natuurlijk getal’ duidelijk. Het werd duidelijk dat de volledige inductie kon dienen om de rekenkundige bewerkingen te definiëren en hun eigenschappen te bewijzen. Als men wil, kan men Peano’s axiomatic als descriptief beschouwen; ze is in een wiskunde, waar de volledige inductie een voorname rol speelt, operationeel. Men kan die axiomatic daarenboven als definitorsch beschouwen, als hetgeen het natuurlijk getal definieert; dan is Peano’s axiomatic alleen operationeel voorzover men zich in het gebied van de grondslagen der wiskunde beweegt.

Voorzover Cantor’s definitie van cardinaalgetal het getal beschrijft als aantal en de aandacht vestigt op de invariantie ervan bij één-één-afbeeldingen, is zij

fenomenologie van het naïef beleefde getal; voorzover zij als definitie van het getal bedoeld is, is zij grondslagenonderzoek van de wiskunde; worden hierbij Frege's en Russell-Whitehead's formuleringen gebezigd, dan is het grondslagenonderzoek met middelen, die aan een diepgaande grondslagen-theoretische critiek zijn ontsproten. Dedekind's definitie van oneindige verzameling, die op een uiterst geestige blikwisseling berust, veronderstelt een wel voorzien arsenaal van wiskundige strategieën.

De definitie van optelling en vermenigvuldiging door volledige inductie kan als een adequate fenomenologische beschrijving van het naïeve optellen door voorttellen en van het naïeve vermenigvuldigen als voortgezet optellen (tafelproductie) worden gezien; als werkelijke definitie opgevat, hoort zij in de grondslagen van de wiskunde; hetzelfde geldt van de diverse wetten van deze operaties, waarbij aan te tekenen valt, dat deze wetten, voor aantallen i.p.v. teltallen uitgesproken, evident zijn, en dat de behoefte aan bewijzen ervoor alleen door de systematiek van de teltal-benadering wordt ingegeven.

De definitie van de optelling in de aantal-benadering geeft adequaat weer, wat bij het samenvatten van hoeveelheden geschiedt, zij het dan op een taalkundig hoog niveau; om praktisch werkzaam te zijn, moet zij door de voorttel-definitie aangevuld worden. De definitie van de vermenigvuldiging in de aantal-benadering geeft adequaat het rechthoekmodel van het vermenigvuldigen weer, een onmisbaar complement bij de als herhaalde optelling gedefinieerde vermenigvuldiging. Voor de definitie van de machtsverheffing in de aantal-benadering (zie 4.4) is er in de traditionele schoolwiskunde geen analogon, maar het is er wel te scheppen en het zou de moeite waard zijn er aandacht aan te besteden.

4.11 De getallen en bewerkingen met getallen en het tellen dienen er allereerst toe, zekere verschijnselen, die met hoeveelheden te maken hebben, te ordenen. Bij alle theorieën der natuurlijke getallen kan men deze ordeningsmiddelen als wortels aanwijzen. Alle theorieën gaan echter verder. De wiskunde kent een neiging tot wat ik vroeger anontologisering heb genoemd: de banden met de realiteit doorsnijden. Deze neiging is alleszins gerechtvaardigd. Ze is het resultaat van historische en individuele ontwikkeling en mag niet bij de lerende als aanwezig verondersteld worden. Nog minder kan de lerende als ontvankelijk voor een ge-anontologiseerde wiskunde gelden. Pogingen zoiets aan te bieden, leiden noodzakelijk tot valse concretisering.

Hulpmiddelen in het anontologiseringsproces zijn: een blikwisseling van descriptie naar definitie, waarbij verkregen eigenschappen van wiskundige objecten opgevat worden als definities van die objecten, om zodoende die objecten van hun oorsprong los te maken, en het vervangen van intentionele door extensionele begripsvorming. Beide hulpmiddelen zijn niet zonder meer aanwezig. Ze veronderstellen ontwikkeling en oefening.

Wanneer de leerling, die ruiten op 't oog identificeren kan, uit de menigte van eigenschappen van de ruit enkele karakteristieke isoleert, die een formele definitie van de ruit voorstellen, voltrekt hij een locale blikwisseling en een allereerste stap op weg naar de anontologisering van de meetkunde. Dezelfde stap bij het

natuurlijk getal is veel groter, omdat de getallen hem veel vertrouwder zijn en de blikwisseling veel globaler is. Liefst nog moeilijker is de extensionele begripsvorming door equivalentie, waaraan ik eerder de nodige aandacht heb besteed⁹). Hiermee worden didactisch nauwe grenzen gesteld aan theorieën van het natuurlijk getal in het onderwijs.

4.12 Fenomenologisch op te laag niveau

Een door mij tot nu verwaarloosde 19e eeuwse stroming was gekenmerkt door een oppervlakkig soort formalisme. De natuurlijke getallen werden daar als symbolen, cijferreeksen, gezien, waarmee men volgens afgesproken regels bewerkingen uitvoerde. Tot op zekere hoogte is dit niet eens zo'n gekke fenomenologie; het is zelfs heel treffend, namelijk voorzover het een bepaald rekenonderwijs en de door dat onderwijs aan te kweken attitude beschrijft: de attitude, getallen als symbolen te zien en ermee volgens afgesproken regels te rekenen.

Desniettemin is deze fenomenologie geheel ontoereikend. Zij verantwoordt niet de betrokkenheid van de getallen en van het rekenen op een realiteit, waarin getallen en bewerkingen zinvolle tegenhangers hebben. Bovendien komt men met deze fenomenologie niet uit boven het begrijpen van het meest primitieve rekenen. De activiteit, die hier beschreven wordt, is die van een rekenmachine, maar bepaald niet die van de rekenaar, die met een rekenmachine kan omgaan en die op een hoger niveau moet begrijpen waar de getallen en de bewerkingen op doelen. Het is een feit, dat er in de 19e en ook nog lang in de 20e eeuw een behoefte bestond aan rekenaars die getallen en bewerkingen op deze primitieve manier beleefden, en deze behoefte rechtvaardigde dan maatschappelijk een overeenkomstig rekenonderwijs. Met de opkomst van allerlei geperfectioneerde rekeninstrumenten en hun productie op grote schaal, is aan mensen die volgens deze principes zijn opgeleid, geen behoefte meer. Indien getallen en de bewerkingen met getallen onderwezen worden, dan mag dit onderwijs niet gelijkstaan met het programmeren van een computer, voor wie er inderdaad alleen maar symbolen en afgesproken en uit te voeren bewerkingen bestaan.

Het primitieve 19e eeuwse formalisme heeft in de 20e eeuw plaats moeten maken voor een veel dieper begrepen formalisme. Hier wordt niet bepaald het rekenen, maar de hele wiskunde als een taal met een overeengekomen syntaxis beschouwd. Het is dan echter zo, dat de wiskundige zich niet in deze taal beweegt, maar er beschouwingen over houdt, die van syntactische of van semantische aard kunnen zijn. Iets dergelijks geldt voor formale talen in 't algemeen, die tegenwoordig uitgebreid worden bestudeerd; 'gesproken' worden ze alleen door en met computers.

4.13 Ontwikkelingsverschijnselen

Van het begrip 'natuurlijk getal', dat ons tot nu toe in dit hoofdstuk bezig heeft gehouden, wend ik me tot het mentaal object of de mentale objecten, die bij de verwerving van dit begrip een rol kunnen spelen. Ik gebruik het meervoud 'men-

tale objecten', omdat ik op zijn minst afzonderlijke natuurlijke getallen en *het* natuurlijke getal als mentale objecten moet onderscheiden, wellicht ook nog aantallen en teltallen, aantal en tental. Voor de verwerving van het begrip 'natuurlijk getal' er zeker nog meer dan dit vereist: de constitutie van zekere relatiepatronen tussen de natuurlijke getallen.

Ontwikkelingsfeiten omtrent de constitutie van getallen en het getal zijn, voorzover mij bekend, schaars. Kleine cardinaalgetallen schijnen vroeg geconstitueerd te worden, naar men zegt, 2, 3, 4 respectievelijk op de leeftijden van 2, 3, 4 jaren. In 3.18 stelde ik de vraag welke rol structuren hierbij spelen; er zouden veel vragen aan toe te voegen zijn: in welke mate de bedoelde getallen aan bepaalde voorwerpen of soorten voorwerpen of aan een bepaalde presentatie gebonden zijn, of en hoe de geconstitueerde getallen verbaal of enactief uitgedrukt worden, wat in een stadium van beperkte constitutie het voortzetten van de constitutie belet of stimuleert. Dit voortzetten heeft trouwens naar mijn ervaringen, althans wat het verbaliseren aangaat, het karakter van differentiatie: een telwoord, dat in de zin van 'vele' wordt gebruikt, gaat een specifieke rol spelen en wordt door een ander vervangen, dat dan als equivalent van 'vele' fungeert.

De meeste kinderen leren tellen eer ze het cardinaalgetal geconstitueerd hebben; het is een opzeggen van telwoorden, aanvankelijk in willekeurige orde, later op orde, maar met lacunes, tenslotte zonder lacunes. Ze leren in deze periode ook *iets* tellen; het is aanvankelijk willekeurig wijzen naar de te tellen voorwerpen, later een meer systematische procedure; met het één-één-uitputten kunnen nog eersteklassers moeite hebben, ook al weten zij dat het zo hoort. Het verband tussen aantal en tental kan ondanks de verbalisering nog zoek zijn. Mij is slechts één geval bekend van een kind bij wie het tellen pas na volledige constitutie van het aantal inzette (zie 3.18).

4.14 Conservatie

Bij dit gebrek aan feiten is er geen andere weg dan een fenomenologische. Feitelijk sloeg Piaget deze weg in toen hij — door wiskundige denkbeelden beïnvloed — conservatie als een kenmerk koos voor wat hier constitutie van het getal heet. Voor het aantal zoals het door Cantor is gedefinieerd, is inderdaad conservatie of — zoals de wiskundige zegt — invariantie t.o.v. zekere transformaties het kenmerk.

Met 'conservatie' heb ik me eerder kritisch beziggehouden (1.25). De term werkt vertroebelend, omdat niet duidelijk is, ten aanzien van welk soort transformaties invariantie in 't oog wordt gevat. In 't geval van lengte waren dit volgens mijn opsomming congruenties, flexies en breek- en maaktransformaties of permutaties van delen. Aantal lijkt een eenvoudiger geval: men kan alles, wat daar met transformatie te maken heeft, onder het begrip één-één-afbeelding brengen. Men kan, ja, maar wat kan, moet nog niet. Het zou kunnen zijn, dat men dan dingen op één noemer bracht, die met verschillende en onder verschillende omstandigheden leerbare bekwaamheden te maken hebben. Bovendien zagen we al in 3.18—27, dat bij de constitutie van het aantal meer dan verzamelingen en één-één-afbeel-

dingen zekere structuren en isomorfismen een rol zouden spelen.

Niemand kan tot op heden zeggen of de nadruk, die Piaget op conservatie legde, terecht was, of zekere invarianties inderdaad kenmerkend voor de constitutie van zekere wiskundige objecten zijn, of zoiets geldt voor alle wiskundige objecten waarvoor Piaget conservatie-criteria heeft ontwikkeld, voor sommige, of voor geen enkele. Ik vermoed, dat Piaget in principe de juiste weg heeft ingeslagen, en ik stel dat hij had mogen eisen, in alle details kritischer te worden gevolgd dan het geval is geweest.

Een ander, meer principieel element is Piagets methode van waarnemen — tijdelijke *dwarssneden* i.p.v. longitudinale observatie. Het onoverkomelijke bezwaar van de gevolgde methode is, dat de geobserveerde conservatie-verschijnselen mogelijk alleen criteria — ik gebruikte die term al — van de mentale constitutie van wiskundige objecten zijn en niet ontwikkelingsverschijnselen op de weg ernaar toe.

4.15 Invarianties bij één verzameling

Met al deze voorbehouden wil ik Piaget volgen in het fenomenologisch opsporen van invarianties, die bij de constitutie van het aantal een rol zouden kunnen spelen. Ik noem er allereerst vier, die alle betrekking hebben op een enkele verzameling objecten, dus niet op het vergelijken van twee verzamelingen:

invariantie
in het tijdsverloop,
bij wijziging van het standpunt,
bij schudtransformaties,
bij breek- en maaktransformaties.

Deze termen vereisen enige toelichting, vooral de eerste.

Een kind (4; 8) telt zijn vingers. 'Vijf'. En hoeveel had je er gisteren? 'Ik weet het niet meer.' Een ander kind (4; 6) lacht om die vraag.

Dit voorbeeld toont aan, dat de invariantie van het aantal in het tijdsverloop geenszins vanzelfsprekend is; dit inzicht wordt door de een vroeger, door de ander later verworven. Het is geen puur logisch feit. Deze invariantie is immers aan voorwaarden gebonden. Het kind kent omstandigheden, waaronder iets meer of minder wordt — planten die ontkiemen, bloemen die afvallen, gezinnen die groter of kleiner worden, druppels die zich delen en samensmelten.

Als er iets bijkomt, wordt het meer,
als er iets afgaat, wordt het minder,
als er niets mee geschiedt, blijft het gelijk.

dit zijn principes voor alle soorten grootheden, discrete en continue. De moeilijkheid is alleen, te weten of er niets mee gebeurd is. Een groot complex van feitelijkheden is bij dit weten betrokken, en een volwassene kan zich moeilijk voorstellen, dat en hoe hijzelf in zijn ontwikkeling dit weten heeft verworven.

Een dergelijk verschijnsel is invariantie bij wijziging van standpunt. Een verzameling die naar een andere plaats gebracht en daar waargenomen wordt of op dezelfde plaats door een andere beschouwer waargenomen wordt, moet steeds hetzelfde aantal bezitten. Ook dit is niet vanzelfsprekend. Het kan een ontdekking zijn, naar een oorzaak te zoeken, waarom een verzameling van een ander standpunt waargenomen meer of minder kan zijn.

De schudtransformaties hebben ook weer op één verzameling betrekking: de koekjes op 't bord worden verschoven, de bloemen in de vaas verschikt, de schapen van een kudde lopen door elkaar — er is een, althans mentale, continuïteit tussen begin- en eindtoestand, die de invariantie garandeert. Evenmin als de invariantie in het tijdsverloop of bij wijziging van standpunt is bij mijn weten die onder schudtransformaties ooit in proeven van Piaget-aard bij kinderen echt getoetst. Ten eerste is bij de klassieke proef voor conservatie van aantal in de schudtransformatie een misleiding ingebouwd doordat de discrete verzameling van objecten zo gepresenteerd wordt, dat door de presentatie behalve het aantal nog een lengte bepaald is, die uitdrukkelijk niet invariant wordt gehouden. Ten tweede wordt de aan schudden onderworpen verzameling met een ongewijzigde vergeleken, hetgeen een extra moeilijkheid produceert.

Bij het tijdsverloop, de wijziging van standpunt en het schudden zou men kunnen stellen, dat het niet om behoud van het aantal, maar om behoud van verzameling gaat: de verzameling vingers, koekjes, dieren, blijft dezelfde in het tijdsverloop, bij wijziging van standpunt en bij het schudden, en dus blijft ook het aantal, als eigenschap van de verzameling, behouden.¹⁰⁾ Ik heb er geen bezwaar tegen als men het zo wil zien; ik denk ook niet, dat het er veel toe doet. Het geval van de breek-maak-transformaties ligt anders, hier wordt één verzameling gebroken en herbouwd. De redenen, waarom ik deze transformaties apart behandel, zijn analoog aan die bij de 'lengte'; pas vanuit de 'lengte' ben ik trouwens op dit soort transformaties en hun grote betekenis attent geworden.

Bij het breken wordt een discrete verzameling in twee of meer gesplitst, waarbij de delen uit elkaar gehaald of ook alleen maar door een echte of symbolische wand gescheiden worden; bij het maken worden ze samengevoegd of wordt de scheiding opgeheven. De objecten blijven inmiddels wel bij elkaar horen, hetgeen in de tussenvraag 'zijn het er *samen* nog evenveel?' tot uitdrukking kan komen.

Evenals bij 'lengte' lijken me bij 'aantal' de breek-maak-transformaties het meest effectief om de invariantie in 't algemeen te ontwikkelen. Het leerproces zou als volgt verlopen: Men haalt een klein aantal objecten uit de verzameling, om ze — eventueel op een andere plaats — weer toe te voegen. Men herhaalt deze procedure gedurig, terwijl men steeds vraagt, 'is het nu meer geworden, of minder, of is het gelijk?'

Indien men prijs stelt op informatie omtrent de ontwikkeling van behoud van aantal, moet men deze invariantieverschijnselen van elkaar en van andere gescheiden toetsen. Men zou dus vragen moeten stellen zoals 'hoeveel zijn het er gisteren geweest?', 'hoeveel zijn het er als je van die kant kijkt?', 'hoeveel zijn het er nu?' (na het schudden), 'hoeveel zijn het er nu samen?' (na het breken). Een kind, dat met een van de invarianties niet vertrouwd is, zal niet in staat zijn, de

vraag direct te beantwoorden: het zal eventueel opnieuw trachten te tellen.
Een kind, dat nog niet telt, zal men dezelfde vragen met 'zijn het er evenveel?'
i.p.v. 'hoeveel zijn het er?' stellen.

4.16 Het teltal

Meermalen is opgemerkt, dat veel kinderen tellen voor ze het getal als mentaal object hebben geconstitueerd. We kunnen onderscheiden

tellen, d.w.z. de getallenrij opzeggen,
iets tellen, d.w.z. onder het telgebeuren de telwoorden verbinden met de elementen van de uit te tellen of te produceren verzameling,
na het telgebeuren het telresultaat als aantal van de getelde of geproduceerde verzameling opvatten.

Het tellen kan al of niet gepaard gaan met

inzicht in de structuur van het systeem der telwoorden.

Met de vragen

wat volgt op 3?
wat volgt op 23?
wat volgt op 9?
wat volgt op 29?
wat volgt op 99?
wat gaat vooraf aan 4?
wat gaat vooraf aan 24?
wat gaat vooraf aan 10?
wat gaat vooraf aan 30?
wat gaat vooraf aan 100?
wat komt eerder, 6 of 9?
wat komt eerder, 26 of 29?
wat komt eerder, 29 of 36?

worden verschillende aspecten van dit inzicht getoetst. Kinderen, die dit structuurinzicht niet bezitten, tellen bij zichzelf van 1 af tot ze bij de gewenste plaats aankomen.

Het inzicht in de structuur van het systeem der telwoorden wordt vergemakkelijkt of in veel gevallen tot stand gebracht door

het lezen en schrijven van getallen,
het schriftelijk voortbrengen van de getallenrij.

Deze bekwaamheid hangt niet van het 'iets tellen' en het verband met het aantal af.

Het tellen met tien, met honderd

maakt het mogelijk 'sneller op te schieten'; bij sommige spelen is het gebruikelijk. Door de huisnummers wordt

het tellen met twee

gesuggereerd. Moeilijk is het

achteruit tellen,

als het niet door de bekendheid met het schriftbeeld wordt gesteund. Ook het

vanuit een gegeven getal een gegeven aantal stappen
vooruit of achteruit tellen

is in principe onafhankelijk van het iets tellen en het verband met het aantal. Maar vaak zal de tel-activiteit gemotiveerd zijn door een gepaard gaan met een 'iets tellen'.

De te tellen objecten kunnen

zichtbaar, voelbaar, hoorbaar, kinestetisch, ritmisch,
dit gecombineerd,
bewegelijk, vast,
aanwijsbaar, beschouwbaar, mentaal

zijn; het telgebeuren kan begeleid zijn door bewegingen van

vingers, ogen, handen, voeten of andere lichaamsdelen.

De getelde objecten kunnen

aangewezen, gemerkt, afgezonderd

worden. De getallen kunnen nauw aan de te tellen objecten gehecht zijn, zoals bij het

afbeelden van de getallenrij op de getallenlijn

en het

opereren op de getallenlijn.

Het gaat dan om het

tellen van stappen op de getallenlijn

en het

samenvatten van verzamelingen van stappen tot sprongen.

Even illustratief is het

meetellen¹¹⁾ van stappen in de realiteit,
meetellen¹¹⁾ van treden op trappen,

dat

echt of gesymboliseerd

kan geschieden, algemener het

meetellen van ritmische gebeuren.

Een gebruikelijke 'fout' bij het stappen en treden tellen is het tellen van de 'nulde stap' en 'nulde trede' als 'één'. Het zou kunnen, dat het

iets tellen als meetellen van het ritmisch telgebeuren

(de wijsvinger laten verspringen) tot stand komt en beleefd wordt. Terwijl het

goed meetellen van een ritmisch gebeuren (bijv. van het ritmisch telgebeuren) als een probleem van coördinatie

zich voordoet, is het

goed uittellen een probleem van organisatie.

Het kan zijn

organisatie door afzonderen of door merken van het getelde

of als het getelde niet kan worden gemanipuleerd,

organisatie door aanwezige structuren
of door structureren.

Hierdoor moet dan

overslaan en meervoudig tellen voorkomen

worden.

Het is een bekend verschijnsel, dat in zeker stadium kinderen op de vraag 'hoeveel zijn het er?' tellen, zeg, 1, 2, 3, 4, 5, echter in plaats van de vraag met de laatst uitgesproken 'vijf' te beantwoorden, op de herhaalde vraag 'hoeveel zijn het er dan?' opnieuw gaan tellen. Ze vatten dus nog niet het telresultaat als het kenmerk van de verzameling op, dat we aantal noemen. Men kan deze stap mogelijk provoceren als men de vraag

hoeveel zijn het er?

vervangt door de opdracht

geef me ... balletjes

uit de verzameling balletjes. Als het kind hierop met tellen reageert, wordt het gedwongen het telresultaat als het aantal balletjes op te vatten. In deze lijn kan men het kind opdragen het

uitzoeken van m balletjes uit een verzameling van n balletjes met $m < n$,
 $m = n$, $m > n$.

en zodoende

naar gelang en aard van uitvoerbaarheid de cardinale orderelatie trachten te helpen constitueren.

Het sterkste stimulans tot het constitueren van het aantal is in deze lijn besloten in structurele isomorfie — als ik met succes de ogen van een zestal personen heb geteld, hoef ik de oren niet overnieuw te tellen. Het inzicht ontstaat, dat

isomorf gestructureerde verzamelingen isomorfe telstructuren bezitten,

dus

isomorf gestructureerde verzamelingen tot hetzelfde telresultaat leiden, een deel tellen tot een kleiner telresultaat leidt.

Het inzicht kan worden gegeneraliseerd, waarbij van het tellen wordt geabstraheerd: zonder te tellen concludeert het kind dat een groep personen evenveel ogen als oren hebben. Dit leidt tot het inzicht dat

isomorfe structuren reeds potentieel isomorfe telstructuur bezitten,

en tot de mogelijkheid

op grond van structurele isomorfie van verzamelingen te zeggen, dat ze evenveel elementen hebben.

op grond van bevatzijn te zeggen, dat een verzameling minder elementen heeft.

Zijn drie verzamelingen in het spel en is de eerste met de tweede op grond van een andere structuur isomorf dan met de derde, dan moet toch geconcludeerd kunnen worden, dat de tweede en derde evenveel elementen bezitten. Dit is mogelijk door de *anders*soortige structuren door *gelijk*soortige telstructuren te vervangen. Hieruit kan

het gebruik van transitiviteit van 'evenveel als' en 'minder dan'

zich ontwikkelen.

Hiermee zou dan vanuit het teltal na eliminatie ervan en onder behoud van de mogelijkheid van telstructuur het aantal als mentaal object geconstitueerd zijn.

4.17 De structuur van het telsysteem

De *mathematische* structuur van het telsysteem is de opvolger-relatie met de welbekende eigenschappen die het verschijnsel van inductie mogelijk maken en zodoende N definiëren. Maar genetisch- en didactisch-fenomenologisch is het telsysteem met een zwaardere structuur begiftigd, waaruit dan N pas door een theoretiserende verschraling is afgeleid.

Allereerst genetisch: aan het verwerven van de getallen gaat dat van de telwoorden vooraf — een op enkele onregelmatigheden na door middel van tientalligheid goed gestructureerd systeem, dat meestal geïntegreerd met de overige taal-

schat verworven wordt. Maar hoe dan ook, er kan geen twijfel over bestaan dat het verwerven van de mathematische structuur van N pas door die van de sterkere structuur, waarmee N begiftigd is, de tientalligheid, mogelijk wordt gemaakt — van het vóór en achteruit tellen tot de numerieke bewerkingen toe. In de echte wiskunde is de tientallige structuur van N niet in tel — geheel terecht. Hetgeen niet terecht is, is het gebrek aan aandacht — voor zover mij bekend — in ontwikkelingsonderzoek voor de tientallige structuur. Er is een neiging de ontwikkelingsfazen — soms ook de didactische fazen — te willen aflezen uit de wetenschapsstructuur en liefst nog uit één bepaalde wetenschapsstructuur, bij voorbeeld het systeem van Bourbaki. Door sommige ontwikkelingspsychologen, zoals Piaget, is dit parallelisme zelfs tot principe verheven, en wat de leerstoforganisatie van de wiskunde aangaat, is deze zienswijze, zo niet al eerder, dan toch met nieuw aplomb in Royaumont (1959) en Dubrovnik (1960) tot uitdrukking gekomen. Uiteraard en terecht komt de tientalligheid van N niet voor in wetenschapsstructuren van de wiskunde, tenzij als een curiositeit waar terloops gewag van wordt gemaakt. In genetisch en didactisch onderzoek dat door het denkbeeld van de wetenschapsstructuur gestuurd of beheerst wordt, is er dan ook geen aanleiding, aandacht aan deze sterkere structuur van N te schenken. Dit verklaart het gebrek aan belangstelling waarvan boven werd gerept. Voor wie genetisch en didactisch-fenomenologisch te werk gaat is de sterkere structuur van N echter een *conditio sine qua non* en dan ook een argument te meer om het denkbeeld te verwerpen dat de spontane of geleide ontwikkeling wetenschapsstructureel zou zijn bepaald.

Opgemerkt zij trouwens dat zelfs indien men de tientalligheid verwerpt als zijnde irrelevant in de wetenschapsstructuur van de wiskunde, men er niet aan voorbij mag gaan, dat het principe van bundeling van vaste aantallen eenheden ter introductie van hogere eenheden wel degelijk een beginsel is dat ergens in de wetenschapsstructuur zou passen — zie de gelijkverdeling en gelijkverdelende relatie in 3.22 en 3.25. Wat onmathematisch lijkt is de beperking tot één systeem van bundeling. Maar ook het structureren door bundeling in 't algemeen is in het ontwikkelingsonderzoek verwaarloosd.

In de tientallige structuur van N kunnen we twee componenten onderscheiden,

de (tientallige) bundeling,

de positionele ordening van de bundels.

Beide zijn oud, welbekend aan alle beschavingen. Ik sluit de oudste niet uit — de sumerisch-akkadische en de egyptische. De 60-talligheid, die we uit de spijker-schrift-teksten kennen, was een finesse van professionele rekenkunde, kunstmatig opgelegd aan een op zichzelf tientallig stelsel; de positionele ordening van de bundels was daar eveneens aanwezig. Bij de Egyptenaren lijkt wel de bundeling aanwezig te zijn, maar de positionele component te ontbreken. Er kan echter geen twijfel aan bestaan dat het feitelijk werken met getallen, in 't bijzonder met grote, vanaf de oudste tijden, op de een of andere vorm van abacus geschiedde en een abacus hoe ook geconstrueerd, belichaamt nu eenmaal het positioneel

beginsel. In het spijkerschrift werden de getallen ook positioneel *geschreven*. Hetgeen betrekkelijk nieuw is, is het tientallige *cijfersysteem*; er ging echter gedurende lange tijd een 10-tallige abacus aan vooraf, die door het 10-tallige cijfersysteem geleidelijk verdrongen werd, naarmate schrijfmaterialen ruimer beschikbaar kwamen. Helaas — zou men er uit een didactische visie aan kunnen toevoegen.

Voor de mathematisch niet geschoolde is de tientallige telstructuur een onvermijdelijk element van het telsysteem. Het is de vraag of de 'gewone man' ooit de tientalligheid als inessentieel element van het telsysteem elimineert, gezien de geringe behoefte aan zo'n eliminatie zolang er geen echte wiskunde in 't geding komt. Wel weten sommigen, dat men het ook met andere telsystemen kan doen, en dat bijv. computers in het tweetallig stelsel werken. Bij de meesten is deze wetenschap niet diep geworteld of averechts gericht: de indruk kan ontstaan dat een talstelsel — op welke basis dan ook — nodig is, dat bij N zo'n extra structuur als de tientalligheid onmisbaar is. De grote rol, die de tientalligheid in rekenpuzzels speelt, wijst op een andere mentaliteit dan die in de wiskunde heerst en op prijs gesteld wordt.

Niet uit theoretisch, maar uit praktisch perspectief is de extra structuur van N , de tientalligheid, waardevol en onmisbaar. Ook uit fenomenologisch-didactisch oogpunt. De extra structuur is een machtig middel, om de te kleurloze opvolgerstructuur van N beter te beheersen. Men krijgt pas vat op het telsysteem door het tientallig te structureren, of men verbeeldt zich ten minste, dat dit zo is, en wat de routinebeheersing aangaat, klopt het ook. Het uitvoeren van de rekenbewerkingen en het schatten van 'orde van grootte' wordt door middel van de tientalligheid georganiseerd. Pas bij een geavanceerd bezig zijn met wiskunde komt het idee en de behoefte op, uit de fenomenale structuur van het telsysteem het talstelsel te elimineren, om de echt mathematische N te verkrijgen.

Het is bekend hoe ten behoeve van het tellen van een groot aantal gelijksoortige voorwerpen, tevens de tientalligheid wordt geconcretiseerd: men legt de objecten in rijen van tien neer, die tot vierkanten van tien bij tien worden gecombineerd: tot tienersystemen van deze vierkanten, enz. Of men bouwt torens van tien of honderd gelijksoortige munten, bij het geldtellen. Dit principe is gesystematiseerd in materiaal van blokjes, staven van tien blokjes, platen van tien staven, blokken van tien platen.

Met dit materiaal wordt van de tientallige structuur alleen de bundeling geconcretiseerd — de positionele orde wordt verwaarloosd. Deze component wordt ten volle belichaamd in de abacus — een (althans in het Westen) herontdekt millennia oud instrument. Terwijl dit soort instrumenten zich in de dagelijkse rekenpraktijk van Rusland en het Verre Oosten tot op heden heeft gehandhaafd, zijn ze in het Westen met de opkomst van de Indisch-Arabische cijfers verdwenen — merkwaardigerwijs ook uit het onderwijs. Wel kenden we het telraam, waar elk balletje echter evenveel waard is. Als didactisch hulpmiddel begint thans de abacus weer populair te worden; als ik me niet vergis, was de herinvoering aan Maria Montessori te danken.

In tegenstelling tot de Oosterse abacus met zijn tusseneenheden van 5, 50 enz.

is onze onderwijs-abacus, evenals de Russische, puur tientallig. Bij de Russische volgen de eenheden, tientallen enz. elkaar verticaal op, terwijl onze onderwijs-abacus de door de cijfer-schrijfwijze bepaalde orde volgt. Er zijn er met tien en met twintig balletjes op een lijn — bij twintig zijn het tien van de ene en tien van een andere kleur, maar men zou even goed op een getekende abacus met willekeurig veel chips kunnen werken. Er is op dit soort abaci een veelduidigheid van getalvoorstelling; bij de standaardvoorstelling, die aan de cijfervoorstelling beantwoordt, is het aantal gebruikte balletjes minimaal.

Een afwijkende vorm van tientallige abacus is de zogenaamde Minicomputer, waarbij de getallen van 0 tot 10 op elke plaats volgens het tweetallig stelsel zijn voorgesteld.

Dit waren enkele technische details over de abacus. Eer ik op het gebruik en de concretisering ervan in de rekenpraktijk terugkom, nog iets principieels. Bij de verdringing van het rekenen op de abacus door het cijferend rekenen slaakte ik eerder de verzuchting 'helaas'. Waarom dit 'helaas'? Is het niet een weelde, waar je geen afstand van mag doen, om cijferend vrijelijk getallen naast en onder elkaar te mogen schrijven, als je deze activiteit dan confronteert met het werken in het keurslijf van een abacus, hoe flexibel ook geconstrueerd en gebruikt?

Inderdaad, een weelde voor degene die sterke benen heeft. Het netjes onder elkaar schrijven is de voorwaarde voor het functioneren van het positionele stelsel en met 'netjes' bedoel ik dan niet een calligrafisch verschijnsel, maar het observeren van het positie-idee. Tot de 10-tallige *breuken* toe. Een in N voortreffelijk cijferende leerling die moeite heeft met tientallige breuken, toont aan dat hij de essentie van de positionaliteit niet heeft gevat.

Door de abacus, in welke vorm dan ook, wordt de lerende gedwongen zich er telkens opnieuw op te bezinnen, wat eenheden, tientallen, honderdtallen,... zijn, maar evenzeer wat er met tienden, honderdsten,... aan de hand is, en hoe ze allemaal uit elkaar ontstaan. Het lijkt een keurslijf, dit abacus-rekenen, akkoord: voor wie er uit is gegroeid. Maar de kans om eruit te groeien moet je dan ook aan hen geven, die er zonder niet kunnen, voor wie de andere keus alleen maar zou zijn: de chaos van cijfers.

4.18 Invariantie bij meer verzamelingen

In 4.15 werden behoudsaspecten t.a.v. één enkele verzameling behandeld. Het aantal wordt echter pas bij het vergelijken van meer verzamelingen een essentieel kenmerk en instrument.

Ik herinner aan de opsomming in 3.18 van activiteiten, die samen de constitutie van het aantal zouden vormen:

Van structuren met hetzelfde substraat de structurerende component elimineren, om de substraatverzamelingen te verkrijgen,

en in dit verband de inclusierelatie in een orde-relatie om te zetten ('kleiner' i.p.v. 'zit in').

Van het isomorfisme van structuren met verschillend substraat gebruik maken, om verschillende verzamelingen te vergelijken.

Van de transitiviteit van gelijkheid en van orde (door aantal) gebruik maken.

De structuren, waarvan hier sprake is, kunnen gegeven zijn, om vervolgens ontdekt en gebruikt te worden; ze kunnen ook opzettelijk aangebracht worden. De meest gebruikelijke structuur die men aan ongestructureerde of onvoldoende gestructureerde verzamelingen in deze context oplegt, is telstructuur, maar het is, zoals de voorbeelden in 3.18–3.30 aantonen, bepaald niet de enige en meestal is zij ook slechts werkzaam via een aanwezige of aangebrachte één-, twee- of driedimensionale ordestructuur of enige andere structuur, die pas het systematisch tellen mogelijk maakt.

In 4.16 duidde ik aan hoe de constitutie van het aantal zich door eliminatie van telstructuur zou kunnen voltrekken; aanleiding tot de eliminatie zouden hierbij andere, opvallende structuren zijn die de telstructuren verdringen — als voorbeeld gaf ik de relatie tussen ogen en oren bij het bepalen van hun aantal voor een groep mensen.

Mijn fenomenologische schets van de constitutie van het aantal via het teltal laat varianten en kortsluitingen toe. Het is in principe denkbaar en het komt in feite voor, hoewel het uitzonderlijk te zijn schijnt, dat het aantal niet via het teltal geconstitueerd wordt en er zelfs aan voorafgaat.

In beide gevallen is de invariantie van het aantal onder één-één-afbeeldingen, hoewel *mathematisch* de voornaamste en zelfs constituerende eigenschap van het begrip aantal, een verschijnsel a posteriori, vergeleken bij de invariantie onder isomorfie; hetzelfde geldt voor de invariantie van de orde door aantal. Voor het constitueren van deze invarianties is vereist, niet alleen dat structuren verschaald worden tot verzamelingen door eliminatie van het structurele element, maar bovendien de verschraling van isomorfieën van structuren tot afbeeldingen van verzamelingen. De behoudsbeginselen, die dan verworven kunnen worden, zijn: is de afbeelding f van A in B

één-één-op,	dan $\#A = \#B$
één-één-in-niet op,	dan $\#A < \#B$
op-niet-één-één.	dan $\#A > \#B$

en omgekeerd

is $\#A = \#B$ en f één-één, dan f op,
is $\#A = \#B$ en f op, dan f één-één,
is $\#A < \#B$, dan f niet-op,
is $\#A > \#B$, dan f niet-één-één.

Moderne methoden plegen dergelijke eigenschappen met paren van Venn-diagrammen te onderwijzen en te toetsen. Dergelijke oefeningen zijn valse concretisering, die de mentale constitutie van deze eigenschappen veeleer kunnen beletten, althans het toepassen ervan kunnen bemoeilijken. Bij toepassingen komt

het aan op het herkennen van relevante verzamelingen en afbeeldingen. Dit is gebleken bij proeven met het ladenbeginsel, dat een efficiënte toets is op de laatste onder de boven opgesomde eigenschappen.

4.19 Het schattend vergelijken van aantallen

Ik wees eerder op de rol die onbepaalde telwoorden als ‘veel’ en ‘weinig’ in de constitutie van het aantal spelen; van hetzelfde karakter zijn de woorden ‘meer’ en ‘minder’ voorzover ze ruwe schattingen uitdrukken, dus afgeleid zijn uit ‘veel meer’, ‘veel minder’.

Aan dit schattend vergelijken van aantallen ligt een — meestal onbewust gehanteerd — schema ten grondslag, dat ten behoeve van de didactiek geëxpliciteerd dient te worden: twee verzamelingen voorwerpen A en B worden vergeleken,

terwijl A , op zijn minst even dicht verdeeld als B ,
een *grotere ruimte* beslaat dan B .

of

terwijl A , *dichter dan B verdeeld*, op zijn minst dezelfde ruimte beslaat als B ;

een conflict ontstaat als

A , *dichter dan B verdeeld*, *minder ruimte* beslaat.

Bij de toepassing van dit schema worden de door twee verzamelingen

ingenomen ruimtes op 't oog globaal vergeleken

terwijl

de dichtheden lokaal vergeleken worden

en

de homogeniteit van elke verdeling globaal beoordeeld wordt.

Een speciaal geval hiervan is:

A en B zijn in gelijke ruimtes dicht gepakt,
terwijl de voorwerpen uit A minder ruimte in beslag nemen dan die uit B .

Een variant:

De A en B opnemende ruimtes zijn door verzamelingen A' en B' respectievelijk vervangen waarvan bekend is dat hun aantallen gelijk of het ene groter dan het andere is.

Nog een variant:

De ruimtes zijn door tijdsintervallen vervangen,
terwijl de elementen van A en B gebeurtenissen zijn.

Algemeen laat het hier uiteengezette principe zich als volgt formuleren:
 Men beschouwe een — eindige — verzameling X met al zijn deelverzamelingen.
 X is intern of extern zo gestructureerd, dat zijn deelverzamelingen, behalve het *aantal* $\#$ nog een zeker *karakter* k bezitten; dit karakter laat zich extensief beschrijven, d.w.z. door middel van een grootheid die zich bij het samenstellen additief gedraagt:

$$k(Y_1 \oplus Y_2) = k(Y_1) \oplus k(Y_2).$$

We noemen zo iets een

k -homogene verzameling.

Denkt men namelijk bij k aan

volume (oppervlakte, lengte)
 gewicht
 tijdsduur,

dus bij $k(Y)$ aan

volume (oppervlakte, lengte) in beslag genomen door Y ,
 gewicht van de gezamenlijke leden van Y ,
 tijdsduur van de gezamenlijke evenementen van Y ,

dan is

$$\delta(Y) = \#Y/k(Y),$$

het aantal leden van Y per

volume (oppervlakte, lengte)-eenheid
 gewichtseenheid
 tijdseenheid

onafhankelijk van $Y (\subset X)$, hetgeen de uitdrukking ‘ k -homogene verzameling’ rechtvaardigt.

$$\delta(X) = \#X/k(X)$$

is hetgeen we in de inleidende voorbeelden de

dichtheid

van de verdeling noemden.

We kunnen ook hier van een *verdelingsdichtheid* t.a.v. k ,

$$\delta(X) = \#X/k(X),$$

spreken.

Laten nu A en B twee k -homogene verzamelingen zijn. Het principe, dat we wensen te formuleren, luidt:

als $k(A) > k(B)$ en $\delta(A) \geq \delta(B)$ dan $\#A > \#B$
 als $k(A) \geq k(B)$ en $\delta(A) > \delta(B)$ dan $\#A > \#B$,

terwijl voor

$$k(A) > k(B) \text{ en } \delta(A) < \delta(B)$$

een conflict zich voordoet.

De k -ongelijkheden in de premisses kunnen globaal worden getoetst, de δ -ongelijkheden lokaal en wellicht bij wijze van steekproef.

De uitspraken na toepassing van dit beginsel kunnen ook scherper zijn

meer dan dubbel zo veel,
meer dan half zo veel,

enz. indien de schattingen van k of δ hiertoe aanleiding geven – op deze uitbreiding zullen we in het hoofdstuk ‘Verhoudingen’ systematisch ingaan.

4.20–4.28 DE CONSTITUTIE VAN DE OPTELLING ALS MENTALE HANDELING

4.20 Het was vrij lang gebruikelijk de operatie van vereniging van twee verzamelingen met het plus-teken aan te duiden – dus $A + B$ i.p.v. $A \cup B$ – en er zijn schrijvers, vooral over maattheorie, die dit blijven doen. Voor 't eerst is men van deze notatie afgestapt in de topologische algebra, waar men in optelstructuren behoefte had aan de notatie $A + B$ voor de verzameling van de $a + b$ met $a \in A$ en $b \in B$.

Het plus-teken voor de verenigingsvorming was uiteraard geïnspireerd door het nauwe verband tussen verenigen en optellen dat door

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B \text{ (voor } A \cap B = \emptyset)$$

beschreven is en dat in feite gebruikt wordt om het optellen te definiëren:

Als men m en n moet optellen verschaft men zich tot elkaar vreemde verzamelingen A en B waarvan ze de aantallen zijn,

$$m = \#A, n = \#B, A \cap B = \emptyset,$$

verenigt deze verzamelingen en stelt

$$m + n = \#(A \cup B).$$

De uitkomst is – dit valt te bewijzen – van de keuze van A en B onafhankelijk, d.w.z. als

$$\#A = \#A', \#B = \#B', A' \cap B' = \emptyset,$$

dan

$$\#(A \cup B) = \#(A' \cup B').$$

Op het laagste niveau is dat dan ook de manier om op te tellen: de lerende, die m en n op moet tellen, verschaft zich inderdaad de benodigde verzamelingen van vingers, kralen, strepen enz.

Maar het kan ook, dat de verzamelingen er al zijn, dat hem niet gevraagd wordt

m en n op te tellen, maar aantallen van op de een of andere manier gegeven objecten.

5 auto's en 3 auto's samen.

waarbij die auto's echt kunnen zijn, hier vijf en aan de overkant drie, of door claxongeluiden vertegenwoordigd, of in speelgoedgedaante, of getekend, of door een verhaal gesuggereerd, ook nog met de variatie dat het vijftal op de ene en het drietal op een andere manier gerealiseerd is. Wel, als er iets aan de handtastelijke concreetheid ontbreekt, kan de rekenaar zich gelijkmachtige plaatsvervangers A' en B' verschaffen voor de verzamelingen A en B , die hij eigenlijk zou moeten verenigen, en dat kunnen dan verzamelingen van vingers, kralen, strepen zijn. Maar in al deze gevallen zijn de aantallen, die opgeteld moeten worden, toch duidelijk herkenbaar als aantallen van verzamelingen en is de opteloperatie duidelijk herkenbaar als weerspiegeling van een verenigingsoperatie, al zijn die verzamelingen zelf misschien niet zo goed meer bereikbaar en is het verenigen niet direct praktisch uit te voeren.

4.21 Problemen ontstaan pas als

op te tellen summanden niet direct als aantallen van verzamelingen herkenbaar zijn

of

de opteloperatie niet direct als weerspiegeling van een samenvatten herkenbaar is.

In

5 knikkers en 3 knikkers

zijn de betrokken verzamelingen en is de operatie duidelijk herkenbaar. Minder duidelijk is dit al in het geval

Jan heeft 5 knikkers, Piet heeft er 3 meer, hoeveel heeft hij er?

Men krijgt Piet's verzameling van knikkers niet door twee *gegeven* verzamelingen te verenigen. Wat men wel kan doen, is de nog denkbeeldige verzameling knikkers van Piet te splitsen, in een verzameling knikkers die met die van Jan gelijkmachtig is, en een verzameling van 3 knikkers, die hij meer heeft, en dit splitsen kan nog op veel manieren geschieden. De formule

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B$$

wordt ook hier toegepast, maar dan bij een gegeven $A \cup B$ dat eerst in A en B gesplitst moet worden.

Een ander type van minder duidelijke herkenbaarheid van de betrokken verzamelingen is

Jan heeft 5 knikkers, gisteren had hij er 3 meer, hoeveel had hij er gisteren?

Hier moet een 'verloren' verzameling mentaal gereconstrueerd worden, om met een wel aanwezige verenigd te worden.

In

Jan heeft vandaag drie knikkers gewonnen, hoeveel heeft hij er meer dan gisteren?

is weliswaar niet echt iets op te tellen, maar toch wordt die optelling gesuggereerd door de woorden 'gewonnen' en 'meer', en de vage verzameling van Jan's bezit gisteren vertroebelt de situatie verder. Hoewel gecompliceerder lijkend is

Jan heeft gisteren 5 knikkers gewonnen en vandaag nog eens 3 knikkers, hoeveel heeft hij nu meer dan eergisteren?

misschien een gemakkelijker geval, want hier is tenminste echt iets op te tellen. Hoe staat het echter, als 'gewonnen' door 'verloren' en 'meer' door 'minder' wordt vervangen?

Dit soort voorbeelden zou aan te vullen zijn met andere, waarbij de betrokken verzamelingen wel nog enigszins te herkennen zijn, maar — vooral door taalkundige misleidingen — de operatie moeilijker als optelling herkend wordt, zoals in

Jan heeft 3 knikkers verloren en heeft er nog 5, hoeveel had hij oorspronkelijk?

waar 'verloren' een aftrekking i.p.v. een optelling associeert.

4.22 Deze schat van voorbeelden laat zich onbegrensd vermenigvuldigen, maar we bepalen ons tot een keuze, om een ander type optelopgaven te signaleren waar de betrokken verzamelingen belangrijk onduidelijker zijn en waar constructie van deze verzamelingen uit de in de opgave vermelde objecten zelfs minder gewenst is. In

5 treden en 3 treden
5 dagen en 3 dagen
5 km en 3 km
5 guldens en 3 guldens
5 keer en 3 keer

kan van verzamelingen bestaande uit 5 en 3 elementen nauwelijks meer sprake zijn. Terwijl bij de eerste groep voorbeelden de verzamelingen nog in de object-sfeer reconstrueerbaar waren, is dit hier zeer bezwaarlijk. Beelden, die verzamelingen van 5 of 3 knikkers moesten voorstellen, kunnen — bijv. als Venn-diagrammen — realistisch zijn, maar bij 5 en 3 getekende rondjes een toelichting, dat dit 5 en 3 dagen zijn, is niet meer dan verbalisme.

Let men bij dit soort voorbeelden op de inkleding van de optelling, dan ontstaan nieuwe problemen van herkenbaarheid. Neem

Jan is 5 jaar, hoe oud is hij over 3 jaren?
Vandaag is het 5 januari; wat is het over 3 dagen?
Het is 5 uur, hoe laat is het over 3 uur?

met allerlei variaties, die bijv. in blikwisseling tot stand komen.

4.23 Hoe komt de overdracht van de bij het verenigen van verzamelingen verworven rekenkundige kennis naar dit soort opgaven didactisch tot stand? Mogelijk wordt het uitvoeren van de numerieke optelhandeling eenvoudig door de bekendheid met de van de echte verzamelingsoperaties uit geabstraheerde reksom $5 + 3$ gesuggereerd. Zeker is dit het geval bij zulk een schema als '5 keer en 3 keer', waar aanduidingen ontbreken wat dan 'keer' aanwezig is, geschiedt, gedaan wordt, genomen wordt. Waren de getallen oorspronkelijk aantallen, en het opereren ermee een opereren met aantallen, dan zijn ze in deze opgaven al tot telwoorden en algoritmische operaties op telwoorden (rekentallen) verschaald. Het behoeft geen verbazing te wekken dat na zulk een didactische aanpak — die dan ook in zulk een rekenonderwijs telkens herhaald wordt — kinderen falen bij de redactiesommen, bij het toepassen van de bewerkingen. De overgang van

5 knikkers en 3 knikkers

naar

5 dagen en 3 dagen

enz. voltrekt zich bij deze didactische aanpak via

$5 + 3$,

dus algoritmisch en zonder dat het optellen van dagen opnieuw inhoudelijk wordt beleefd. Hoe kan en moet het beter?

4.24 Ik heb eerder op de nauwe verwevenheid van aantal en teltal, ook bij de bewerkingen, gewezen. $5 + 3$ is cardinaal gedefinieerd, maar wordt vanouds ordinaal uitgerekend — verzamelingsdogmatici hebben dit met Venn-diagrammen trachten didactisch tegen te gaan, maar gelukkig met weinig succes, gezien de natuurlijke neiging tot tellend opereren. De uitkomst van $5 + 3$ wordt verkregen door van 5 uitgaande 3 stappen verder te tellen: bij de 5 kralen op de abacus schuift men er — één, twee, drie — 3 bij, beide summanden en de som zijn door materiële verzamelingen gerepresenteerd. Of: vanuit de mentale 5 wordt verder geteld 6, 7, 8 waarbij achter elkaar duim, wijsvinger, middenvinger omhoog gaan, om de afwikkeling van de tweede summand te sturen. Of: hetzelfde zonder de vingers, waarbij de optelactiviteit door ritmische of visuele voorstellingen wordt gestuurd.

Men zou kinderen de elementaire optelsommen op dezelfde wijze kunnen bijbrengen, die veelal bij de tafels van vermenigvuldiging wordt beoefend, door bewust te laten memoriseren. Misschien wordt het zelfs hier en daar zo gedaan, maar het schijnt toch geen regel te zijn. De opteltafels worden veeleer door het

telkens weer uitvoeren van elementaire optelsommen 'ingesleten'. Maar dit inslijten is zeker niet de enige functie van de elementaire optelactiviteit. Door het optellen wordt de optelling als zinvol ervaren en de zin ervan zo begrepen, dat hij zelfs zonodig geëxpliciteerd kan worden; door deze zingeving wordt de overdracht voorbereid naar optellingen toe, waar de summanden en de som niet door verzamelingen zijn gerepresenteerd. Kortom, door het optellen wordt de optelling als mentale activiteit geconstitueerd.

Voorbeelden ervan gaf ik daarstraks. 5 treden en 3 treden — de voet staat op de vijfde en verder gaat het — één, twee, drie in gedachten — naar de zesde, zevende, achtste — hardop als 1, 2, 3 geteld. 5 dagen en 3 dagen — blader maar drie blaadjes verder op de kalender. 5 km en 3 km — de wegwijzer wijst 5 km naar waar je vandaan bent gekomen, en 3 km naar waar je naar toe moet, en laat je van stip 5 drie verder tellen naar stip 8. Bij de vijf guldens, misschien door een bankbiljet gepresenteerd of door twee rijksdaalders, worden er — zes, zeven acht — drie toegevoegd, die mentaal als één, twee, drie geteld worden.

4.25 Niet alleen qua stoffelijke realisering, maar ook structureel verschillen deze voorbeelden van die van de eerste groep. Er wordt niet zo maar een vereniging gevormd van twee ongestructureerde verzamelingen. Het zijn niet zo maar als bij de knikers 5 en 3 losse treden, dagen, km, guldens, keren, die bij elkaar geharkt worden, maar ze volgen op elkaar in de ruimte of in de tijd, niet als elementen van een verzameling, maar als stappen op een weg, in een proces dat van zijn kant een telproces suggereert en misschien ontketent.

Ik wees er vroeger op dat telprocessen in de tijd — en evt. ook in de ruimte — zijn ingebed. In het continue verloop worden door het uitspreken van het getal, door het aanwijzen van een object, tijd- of ruimtestippen geaccentueerd, en dat kan meer of minder scherp gebeuren — een snoer met kralen zo groot als een duivenei of als een mosterdzaadje, dicht aan elkaar geregen of losjes gespreid. Een file auto's tellen — ze volgen op afstanden van elkaar en ze worden één voor één geteld. De wagons van een goederentrein tellen, een continue stroom die geleed wordt door de buffers — de achterbuffers wel te verstaan, want met de achterbuffer van een wagon is zijn ranggetal pas 'af', en net zo is het bij de kilometer teller van de auto. Het tellen bij het verstoppertje spelen door wie 'hem' is — de telwoorden worden over een interval gerekt, en na '100' is het 'ik kom'.

Je telt knikers, maar je telt evenzeer intervallen — 'één-en-twintig' is een seconde. Het komt er op aan, waar je je zin op zet, op de te tellen ruimtelijke of tijdelijke verschijnselen, of op het articuleren van de ruimtelijke of tijdelijke stroom. Je kunt natuurlijk beweren: mathematisch is het allemaal hetzelfde, de losse knikers, de kralen losjes of dicht aan een snoer, de rijen van ruimte of tijdsintervallen het zijn allemaal verzamelingen, ze hebben aantallen en aan het optellen ervan ligt een verenigen ten grondslag. Dit is ook zo, het toont alleen maar, hoe universeel mathematische begrippen zijn. Als je aan elke km van de weg zijn eind toevoegt, aan elk jaar de klokslag, waarmee het eindigt, aan elke m^3 water dat de Maasbrug passeert, zijn laatste druppel, aan elke ton meel die uit de molen

stroomt, zijn laatste stuifje, krijg je zelfs een afbeelding, waarbij de rij elkaar opvolgende intervallen op een stippenrij wordt afgebeeld — een één-één-afbeelding van iets, dat continu lijkt, maar dat door deze afbeelding in een discreet lijkend stel mootjes wordt geknipt. Dit is dan de mathematische rechtvaardiging van een procedure waarbij met het natuurlijke getal in een continu medium wordt geteld; maar deze mathematische rechtvaardiging is ook weer niets anders dan wat ontuitgesproken eraan ten grondslag ligt en expliciet kan worden gemaakt.

Hoe oud ben je? ‘Vier’, zegt het kind, en steekt vier vingers op, en het weet dat er op een precies bepaald ogenblik een vijfde bij zal komen. Aleer het natuurlijk getal als kenmerk van verzamelingen in het *discrete* is geconstitueerd, wordt het in ’t *continue*, op grootheden, toegepast. De voorbeelden die ik eerder gaf — lengte, tijd, geldwaarde —, zijn er paradigmatisch voor. Het continue opklimmen wordt door treden gescandeerd, de tijdstroom door kalenderbladen, de straatweg door km-palen, het geld door munten en bankbiljetten, en het keer-nemen is een wederkeren van hetzelfde — het zijn deze scanderingen, die geteld worden. Grootheden werden in het traditionele rekenonderwijs uitgesteld, tot de kinderen met het rekenen zo ver waren, dat zij gewone en tientallige breuken aan konden. Deze terughoudendheid is nergens door gerechtvaardigd, behalve dan door een ondidactisch systematisme. De eerste stap in de analyse van een grootheid, waarbij de grootheid door de natuurlijke veelvouden van een eenheid metend gescandeerd wordt, is vroegtijdig mogelijk en wenselijk; het optellen kan en moet van de discrete, door verzamelingen vertegenwoordigde, hoeveelheden onmiddellijk overgebracht worden naar grootheden. In moderne methoden begint men veel vroeger met meten dan volgens de traditie, maar dit meten is dan nog te weinig met de bewerkingen op natuurlijke getallen geïntegreerd.

4.26 Het onvolprezen universele middel om grootheden en daarmee ook de hen scanderende natuurlijke getallen te visualiseren is de getallenlijn, waarop voorlopig alleen de natuurlijke getallen geïndividualiseerd en benoemd worden. In de wiskunde-didactiek van het voortgezet onderwijs is de getallenlijn aanvaard, maar nog vaak onvolmaakt en ondeskundig geëxploiteerd; in het basisonderwijs dringt zij geleidelijk door. Te geleidelijk. De vooruitgang wordt enerzijds door de Venn-diagrammen, anderzijds door meer rudimentaire meetkundige materialen zoals de Cuisinaire-staven belet. Dat een getallenlijn zo gemakkelijk op papier kan getekend worden en men er geen merkartikel van kan maken, dat samen met de methode moet worden gekocht, werkt vermoedelijk ook ten nadele van de getallenlijn.

De Cuisinaire-staven — die trouwens in feite van Fröbel komen — waren indertijd een grote stap vooruit: een vertaling van natuurlijke getallen in lengtes, van operaties met natuurlijke getallen in operaties met lengtes. De scanderingen in de continue stroom zijn hier geconcretiseerd, de intervallen gestold, in gekleurde staven belichaamd. De lengtes zijn uit het verband van ‘de lengte’ gerukt; de staafjes kunnen nog net getallen, maar geen andere grootheden representeren. De getallenlijn munt op meer punten uit boven materiaal zoals de Cuisinaire-

staafjes: bij de getallenlijn komt de virtuele oneindigheid beter tot uitdrukking. Bij de getallenlijn is men aan geen schaal gebonden; getallenlijnen op verschillende schalen (bijv. op 't bord en op 't papier) worden voetstoots ondanks de incongruentie met elkaar geïdentificeerd. En tenslotte het belangrijkste: bij het manipuleren van de Cuisinaire-staafjes wordt de weg van het visuele naar het mentale via een niet terzake doende motoriteit afgebogen. We zullen later zien wat ter zake doende motoriteit is en hoe die bij het werken met de getallenlijn tot uitdrukking komt.

Het lijkt misschien vreemd, dat ik deze beschouwingen onder het opschrift 'De constitutie van de optelling als mentale handeling' houd. Tellen en optellen zijn in de constitutie van het getal onlosmakelijk verbonden; tellen is het optellen van telkens één, en optellen geschiedt tellende. Dit kenmerkt dan ook de getallenlijn en haar didactiek, waar we ons thans mee bezig houden.

Het getal a staat op de getallenlijn waar a is afgelopen. a wat?

a cm van de liniaal,
 a km van de weg,
 a auto's van de file,
 a boeken op het rek,
 a bladzijden van het boek (alleen de tientallen),
 a tikken van de klok,
 a uren, dagen, jaren van de tijdas,
 a gram of kg van de unsterschaal,
 a cc van het maatglas.

Ja echt *afgelopen*. De liniaal- of straatweg wordt afgelopen met echte of denkbepaalde voeten, de file loopt af, de boeken worden erop gezet of afgehaald, het boek wordt doorgebladerd tot blz. a , de tijd loopt af en de wijzer van de unster loopt naar gewicht a . Het is op de getallenlijn een continue afloop, die gescandeerd is of wordt of kan worden. Het getal a staat waar het 'vol' is. Ik kan er continu naar toe, of in een sprong. En die sprong wordt ook weer continu aangeduid, door een boog met een pijlpunt, waarboven misschien nog een $+a$ prijkt. De sprong kan uit sprongetjes samengesteld gedaan of gedacht worden. De sprong kan van elk uitgangspunt geschieden, met dezelfde boog en $+a$ aangeduid, en dat geeft dan de optelling weer, een optellen in één slag of in stapjes ontbonden. De tussenstapjes kunnen geëxpliciteerd of vervaagd zijn. De getallenlijn kan — zoals bij een liniaal — alleen maar de tientallen becijferen, met eenheden-streepjes ertussen, of — zoals bij een maatglas — alleen de 50-tallen becijferen met tientallenstreepjes ertussen, of alleen de 100- of 1000-tallen, zoals de kilometers langs de weg. Dan wordt er geïnterpoleerd: de 175 is ongeveer *daar* tussen de 100 en de 200. En tenslotte is er de lijn (of straat) zonder streepjes of cijfers, alleen met een oorsprong.

Hoe ver is het van hier naar hier op de getallenlijn? De stapjes worden geteld. Maar je kunt dat 'van hier naar daar' ook tussen de wijsvinger en duim nemen, naar 0 terugbrengen en aflezen. Het optellen van n bij m kan tellende geschieden, maar ook in één slag door hetgeen bij n afgelopen is tussen de vingers te

nemen en naar m over te brengen — tussen de vingers, of op een latje of strookje. I.p.v. tellende wordt er meetkundig opgeteld. Maar dan kun je de getallen op de getallenlijn missen. De getallenlijn beeldt een grootheid af en het meetkundig verplaatsen op de getallenlijn vertolkt het optellen bij die grootheid — en het aftrekken trouwens ook.

Hier kunnen we dus het optellen ook laten beginnen, bij grootheden i.p.v. knikkers, maar dan uiteraard bij gevisualiseerde en aan een getallenlijn gebonden grootheden — de lengte op de liniaal, het volume op de maatglasschaal, het gewicht op de unsterschaal en — moeilijker — de tijd op de tijdas. Davydov¹²) heeft laten zien hoe men het optellen en aftrekken bij grootheden — lengte, volume — aan het numeriek rekenen kan laten voorafgaan en ten behoeve en ten bate van het rekenen. Ik heb het bij een jongen, 5; 6 oud, die nauwelijks kon rekenen, met lengte, volume, maar vooral gewicht geprobeerd, hem zien zinvol werken met die grootheden, tot enig begrip voor de wet van Archimedes¹³) toe.

Wel, grootheden is niet iets, dat volgens het opschrift van het *hoofdstuk* hier ter discussie zou staan, maar volgens het opschrift van de *paragraaf* is het optellen aan de orde en dit moet van begin af aan breder worden gezien dan een bewerking alleen op natuurlijke getallen. De natuurlijke getallen zijn kenmerken van discrete verzamelingen, het optellen ervan gaat terug op het verenigen van verzamelingen. Het verzamelingstheoretische medium van grootheden is het continue, het optellen bij grootheden gaat terug op een samenvoegen. Het universele model van grootheden is de straal, nog onbecijferd, gestructureerd door het congruent verplaatsen, dat zeker aan het optellen bij grootheden beantwoordt. Voor de grootheid wordt een eenheid aangewezen en overeenkomstig wordt op de straal een 1 geplaatst; laat men dan optellen bij grootheid en getal aan elkaar beantwoorden, dan wordt de straal gescandeerd door stippen beantwoordende aan de natuurlijke getallen, de getallenlijn, en is de cardinale optelling in de meetkundige vertaald.

4.27 Met de voorstelling van de natuurlijke getallen op de getallenlijn zijn we ver verwijderd van hun cardinale oorsprong, met de meetkundige optelling ver van het optellen als verenigen van verzamelingen. Het verband tussen aantal en meettal is didactisch gelegd via teltal en grootheid. Men kan het, zoals ik eerder uiteenzette, ook kortsluiten door de straal in congruente intervallen op te delen en een getal op te vatten als het aantal van een verzameling — op elkaar volgende — intervallen. Hoe dan ook, het natuurlijk getal dringt zich van meet af aan op in zijn verschillende aspecten. Alleen een systeemfanaticus kan zich hieraan stoten. Het natuurlijk getal heeft nu eenmaal vele aspecten en een ervan is, dat het ook als meetgetal gebruikt en onmisbaar is, en wel niet alleen in de toepassingen van de rekenkunde, maar ook terwille van haar didactiek.

Toepassingsproblemen rond de optelling ontstaan — ik zei het daarstraks — wanneer de op te tellen summanden niet direct als aantallen van verzamelingen en de optelling niet als vereniging herkenbaar, en pogingen tot een verzamelingsinterpretatie gezocht en averechts zijn. Het is daarom — zette ik inmiddels uiteen — dat de constitutie van de optelling en het leren optellen van meet af aan

breder moeten zijn georiënteerd, naar het optellen van grootheden, die alleen weer kunnen worden gerepresenteerd op de getallenlijn (waar aanvankelijk alleen de natuurlijke getallen geaccentueerd zijn). Noch het regres tot verzamelingen, noch algoritmen volgens verbale kenmerken kunnen bij het oplossen van die problemen echt helpen. De Venn-diagram visualisering van het optellen is te nauw, het vroegtijdig algoritmiseren sluit het gevaar in van een verkeerde blikrichting, die het hele denken onwiskundig kan beïnvloeden. Het kan heilzaam zijn, de optelling vroegtijdig ruim te begrijpen en op een wijze te visualiseren, die wiskundig definitief kan worden genoemd.

Dit sluit in dat niet pas het optellen, maar reeds het tellen vroegtijdig begeleid wordt door activiteiten op de getallenlijn. Een knikker meer uit de vaas om te tellen, wordt vergezeld van een blokje laten aansluiten bij de blokjesrij op de getallenlijn. Het schattend tellen wordt begeleid door vage aanduidingen op de getallenlijn. 'Meer' en 'minder' duiden richtingen op de getallenlijn aan; 'zoveel meer' en 'zoveel minder' preciseren hoe ver in deze richtingen wordt voortgeschreden. Twee getallenlijnen, voor Jan en Piet, en de knikkers die Jan van Piet wint, worden samen als lijnstuk van de Piet-lijn op de Jan-lijn overgebracht, maar op dezelfde wijze wordt het overhevelen van inhouden en gewichten van het ene vat in het andere voorgesteld. Het optellen van door objecten gegeven getallen in concreto, of gesymboliseerd aan de vingers, op de abacus, en in de streepjeslijst is een der toegangen, die zeker niet verwaarloosd moet worden, maar het is niet de enige. De andere, bredere, is via de grootheden en de getallenlijn.

4.28 Ik noemde daarstraks de visualisering van de optelling op de getallenlijn definitief. Dit klopt voorzover ik me tot $\mathbf{N}$ beperk. De uitbreiding tot $\mathbf{Z}$ lijkt op elementair niveau kunstmatig. Meer voor de hand ligt de uitbreiding naar twee dimensies, als vectoroptelling in $\mathbf{R}^2$ of in de rooster $\mathbf{Z}^2$ (die dan de uitbreiding naar $\mathbf{Z}$ insluit). Deze optelling zal dan meetkundig geïntroduceerd worden, door parallel verschuiving van vectoren; achteraf kan er een rekenkundige uitdrukking voor worden gevonden. Dit onderwerp kan in een ruim veld van vrije activiteiten leiden, die de meer gebonden, eigenlijk rekenkundige activiteiten motiverend kunnen beïnvloeden. In hoofdstuk XI zullen we hierop terugkomen.

4.29 De optelstructuur van $\mathbf{N}$

De optelstructuur van $\mathbf{N}$ behelst uiteraard meer dan alleen de kunst van het optellen. Ze is om zo te zeggen het geheel van de relaties

$$a + b = c$$

eventueel ook uitgedrukt als

$$c - b = a \text{ (voor } b \leq c \text{)}$$

maar ook aangevuld met

$$a + b + c = d$$

$$a + b = d - c,$$

en al hetgeen men in deze richting nog zou kunnen verzinnen.

Op een hoger niveau behelst zij de ervaring en op een nog hoger de geformuleerde wetenschap omtrent eigenschappen zoals

commutativiteit,
 associativiteit,
 equivalentie van $a + b = c$ en $c - b = a$

en veel meer van deze eigenschappen.

Deze structuur groeit bij de leerling naarmate hij in $\mathbf{N}$ doordringt, maar fundamentele eigenschappen zoals de juist genoemde kunnen ten volle al in een zeer beperkt deel van $\mathbf{N}$ duidelijk ervaren en zelfs geformuleerd worden.

De structuur van $\mathbf{N}$ is ten dele voor memoriseren toegankelijk; daarbuiten wordt ze verkregen en ontleed met algoritmiek in het tientallige stelsel — iets waar we nog op terug moeten komen.

Met de voorafgaande beschrijving heb ik die structuur echter nog zeer onvolmaakt in de greep. De relatie

$$a + b = c$$

kan bijvoorbeeld worden gestructureerd door c voor te schrijven en naar oplossingen $\lceil a, b \rceil$ te vragen, dus naar een lijst van splitsingen zoals

$$8 = + \begin{array}{cccccccc} 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

met zelf weer de opvallende structuren van de aflopende en oplopende rij in de centrale symmetrie. Wel. splitsingen zijn ook nuttig voor de algoritmiek der tientaloverschrijding bij het optellen, maar dit is niet alles. Een structuur zoals van deze lijst nodigt tot vragen uit 'waarom?', die met hun antwoorden de optelstructuur van $\mathbf{N}$ beter laten begrijpen. Het blijft niet bij die ene lijst, er zijn er meer, voor elke c één. Twee-dimensionaal geïnterpreteerd, in de rooster, gaan deze lijsten in puntverzamelingen over met opvallende inwendige en uitwendige structuren.

Andere lijsten ontstaan als

$$a + b = c$$

bij vaste b als voorwaarde voor a, c wordt beschouwd, zoals in

$$3 = - \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & \dots \end{array}$$

wederom met een opvallende structuur die om verklaring vraagt. Wat kenmerkt deze puntenparen, gezien op de getallenlijn?

De orderrelatie hoort, in 't bijzonder in de context van de optelling eveneens tot de structuur van $\mathbf{N}$. Dat meer optellen iets groters en meer aftrekken iets kleiner

oplevert, ligt wel voor de hand, maar dit betekent nog niet, dat de gevolgtrekkingen hiervan, bijv. bij het oplossen van ongelijkheden, direct gebruikt worden. Als

$$x + 4 < 10$$

opgelost moet worden, is het niet direct vanzelfsprekend, van de *grootste* oplossing hiervan uit te gaan. Om

$$x + y < 10$$

op te lossen is heel wat inzicht in de structuur van $\mathbf{N}$ vereist.

Andere optelstructuren in $\mathbf{N}$ zijn de rekenkundige rijen

$$1 \quad 4 \quad 7 \quad 10 \quad \dots,$$

aan sprongrijen op de getallenlijn beantwoordend.

Waar ontmoeten twee rijen de vorige en

$$2 \quad 6 \quad 10 \quad 14 \quad \dots$$

elkaar — het te beantwoorden is gemakkelijk, maar om het te begrijpen is de vermenigvuldigstructuur van $\mathbf{N}$ vereist.

Het honderdveld is een structuur in $\mathbf{N}$ en de rekenkundige rijen in het honderdveld vertonen een aparte structuur. De opteltafel zelf is een structuur in $\mathbf{N}$, symmetrisch t.a.v. de diagonaal, met schaakbordachtige verdeling in even en oneven getallen — waarom?

Eigenschappen van zulke structuren kunnen opgespoord, begrepen, verklaard worden. Eigenschappen van $\mathbf{N}$ kunnen gekend en toegepast worden, zoals de commutativiteit, om — voor groter gemak — het kleinere bij het grotere getal op te tellen en niet omgekeerd, en de associativiteit, om optellingen algoritmisch te vereenvoudigen, bijv. bij het aanvullen van tientallen.

4.30 De constitutie van de aftrekking als mentale handeling

De aftrekking na de optelling te bespreken betekent uiteraard geen scheiding van de twee bewerkingen en zeker niet een opeenvolging in het genetisch of didactisch proces. In de contexten waarin de optelling didactisch aangeboden wordt of zich aanbiedt, is de aftrekking vanzelf present en spoedig expliciet te maken.

Formeel resulteert

de aftrekking als omkeerbewerking van de optelling,

en ook in feite is dit een niet te verwaarlozen verschijningsvorm van de optelling.

$$8 - 3 = 5 \quad \text{want } 5 + 3 = 8,$$

met dit soort redenering laat elke aftreksom zich tot een — misschien reeds routinematig beheerste — optelsom terugbrengen. Bij de deling als omkeerbewerking van de vermenigvuldiging is dit dan ook — na het tafelleren — de manier om elementaire deelsommen te leren. Bij de aftrekking is zoiets minder gebruike-

lijk, en er zijn gegronde redenen voor. Het redeneerschema voor het omkeren van een bewerking zal een zesjarige vermoedelijk minder liggen dan een achtjarige, maar vooral: de aftrekking laat in het gebied van de elementaire sommen dezelfde concreetheid toe als de optelling, hetgeen van de deling in verhouding tot de vermenigvuldiging bezwaarlijk kan worden gezegd.

Zoals het optellen van getallen in de objectsfeer aan een toevoegen, beantwoordt het aftrekken aan een afhalen. De oudere rekenboekjes hadden met het uitbeelden ervan grote moeite: de Venn-diagrammatici wisten er totaal geen raad mee of produceerden de merkwaardigste hersenkronkels. Wat er inmiddels voor in de plaats is gekomen, getuigt van een nieuwe geest, die over ontwikkelaars vaardig is geworden: verstrakking en dogmatische unificering wijken voor het verbeeldingskrachtig scheppen van situaties om mentale handelingen pictoraal te suggereren. Wat het aftrekken aangaat: verwelkte bloemen, opvliegende vogels, weglopende kabouters, afbrekende muurtjes of torentjes en ga zo maar door. De door het plaatje gesuggereerde rekensom is vaak niet uniek bepaald; als bij het plaatje een verhaal verteld moet worden, kan het in de stijl zijn van

er waren er c	
er gingen er b af	$c - b = a$
dus er bleven er a over	

of

er waren er c	
er bleven er a	$c - a = b$,
dus er gingen er b weg	

maar ook van

a blijven	
b lopen weg	$c = a + b$
zijn samen c	

maar men hoeft dit gebrek aan uniciteit volstrekt niet als een didactisch gebrek te beschouwen.

De objecten, die in de plaatjes verschijnen, kunnen wanordelijk of op een rij geplaatst zijn; de objecten die van die rij afgehaald worden kunnen aan de ene kant, of aan de andere kant staan, maar ook kris kras middenin. Maar evenmin als het verenigen van expliciet gegeven verzamelingen voldoende is voor de mentale constitutie van de optelling, is bij het aftrekken het rechtstreeks afhalen voldoende. 'Waar is er meer van en hoeveel meer?' — om die vraag, bij een plaatje van twee soorten voorwerpen gesteld te beantwoorden, is een indirect afhalen vereist: van de ene verzameling wordt een verzameling gelijkmachting met de andere afgehaald.

Evenmin als bij het optellen is bij het aftrekken het aantalapect toereikend voor de mentale constitutie van de bewerking. Ik kan ervan afzien, de argumenten, die ik bij de optelling tentoon heb gespreid, te herhalen. Ook het aftrekken moet

breder geconstitueerd worden, voor grootheden, meetkundig geïnterpreteerd, op de getallenlijn.

Bij het effectief aftrekken, op de abacus, de streepjeslijst, de getallenlijn of mentaal observeert men twee methoden

het vóór afhalen
het achter afhalen

en het tellen van wat er overblijft. ‘Van 8 kinderen 3 meisjes, hoeveel jongens?’ wordt beantwoord met ‘van 4 tot 8’, en dan worden de getallen van 4 tot 8 op de vingers één-twee-drie-vier-vijf’ geteld. Of die drie worden van achteren eraf gehaald: één eraf is 7, nog één eraf is 6, nog één eraf is 5 en inmiddels zijn duim, wijsvinger en middenvinger opgestoken om de voortgang van het proces te sturen. De kinderen komen er gauw achter welke methode de doelmatigste is: als de aftrekker kleiner dan de helft van het aftrektal is het vóór afhalen, anders is het achter afhalen.

Bij het meetkundig aftrekken op de getallenlijn zijn er ook deze twee manieren: de aftrekker wordt congruent vanuit het begin of vanuit het eind van het aftreklijnstuk afgezet en de rest wordt opnieuw gemeten.

De meetkundige concreetheid van de getallenlijn is vooral van betekenis voor het begrijpen van sommen zoals

$$a - \dots = c$$
$$\dots - b = c.$$

4.31 De constitutie van de vermenigvuldiging als mentale handeling

De vermenigvuldigwoorden ‘dubbel’ en ‘keer’ gaan aan het vermenigvuldigen als rekenkundige operatie jaren vooraf:

ik heb het je drie keer gezegd,
ga drie keer heen en weer,
de klok sloeg drie keer,
als de wijzer nog drie keer rond is,
je moet nog drie keer slapen, dan ben je jarig.

Het is

drie keer iets doen, ondergaan, beleven, afwachten.

En dan, onder het optellen door, nog eer de vermenigvuldiging op ’t programma staat, is het ineens

drie keer vier knikkers pakken,
of kort
drie keer vier knikkers,
en dat betekent

vier knikkers en vier knikkers en vier knikkers.

Geen operatie — ook niet het optellen en het aftrekken — dient zich met zulk een vanzelfsprekendheid aan.

De definitie die aan de epifanie van de vermenigvuldiging ten grondslag ligt, is de inductieve, door verder optellen, en zo wordt het product in feite ook berekend, zo worden de tafels van vermenigvuldiging voortgezet. Met in gedachten hetgeen bij de optelling uiteen is gezet, ligt het voor de hand dit 'keer nemen' vroegtijdig ook bij *grootheden* uit te voeren, immers dit is een van de functies van de vermenigvuldiging:

3 kg, 3 m, 3 km (reis)

kosten zoveel als 3 keer

1 kg, 1 m, 1 km,

3 km fietsen

duurt 3 keer zo lang als

1 km fietsen,

drie van hetzelfde

wegen drie keer zoveel als

één,

en ga zo maar door. Maar vooral op de getallenlijn is de vermenigvuldiging als herhaalde optelling effectief:

3 balken reiken 3 keer zo ver als 1 balk,

met 3 stappen (sprongen) kom je 3 keer zo ver,

met 3 omwentelingen legt een wiel 3 keer die weg af.

En zo kan

3 keer 4

gerealiseerd worden door achter elkaar

3 staafjes, stappen, sprongen van 4

op de getallenlijn.

Tot hier toe was het vermenigvuldigen niet meer dan herhaald optellen. De 3 rijen knikkers van 4 knikkers werden

achter elkaar

geplaatst. Dan komt de blikwisseling: ze worden

netjes onder elkaar

geplaatst, een tweedimensionale rangschikking, het

rechthoekmodel

van de vermenigvuldiging, uit twee verzamelingen A en B wordt

de paar- of productverzameling $\overline{[A, B]}$

gevormd. Deze omstructurering ontsluit nieuwe aspecten van het product: om

$$m \cdot n$$

te definiëren (of te berekenen), verschaft men zich twee verzamelingen A, B met

$$m = \#A, n = \#B,$$

vormt de paarverzameling $\overline{[A, B]}$ en stelt

$$m \cdot n = \#\overline{[A, B]},$$

waarbij van betekenis is dat deze uitkomst niet van de speciale keus van A en B afhangt.

Pas door het rechthoekmodel van het product worden eigenschappen van de vermenigvuldiging duidelijk zoals de commutativiteit — ik denk de rechthoek een kwartslag gedraaid — de distributiviteit — twee rechthoeken van dezelfde hoogte (of breedte) bij elkaar geschoven (fig. 20–21).

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b & \cdot & \cdot & \cdot & ab = ba \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & a & & \end{array}$$

fig. 20

$$\begin{array}{cccc|cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ c & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (a+b)c = \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & = ac + bc \\ & a & & & b & & & \end{array}$$

fig. 21

In het voorafgaande waren

paarverzameling en rechthoekmodel dienstbaar aan herstructurering van de aan het rekenkundig product ten grondslag liggende verzamelingen,

onder meer om inzicht in eigenschappen van de vermenigvuldiging over te brengen. Als het ware de omgekeerde functie vervullen.

paarverzameling en rechthoekmodel als structuren, die in verzamelingen ontdekt of aangebracht worden, om hun aantallen als producten te berekenen.

Aan deze functie is in Hoofdstuk III ruimschoots aandacht besteed.

Het rechthoekmodel leidt op natuurlijke wijze tot de

oppervlakte van de rechthoek.

Bij de overgang van de discrete getallenrij naar de getallenlijn werden de discrete puntachtige knikkers als het ware tot eenheidsstokjes verdicht; nu worden er vierkante tafeltjes van, die tot een rechthoekige tafel aan elkaar sluiten. De oppervlakte van die tafel wordt in eenheidstafeltjes uitgedrukt, met — uitgesproken of onuitgesproken — de vermenigvuldiging van lengte en breedte als rekenkundige bewerking. Op de rol, die het rechthoekmodel in 't algemeen bij de vermenigvuldiging van grootheden met elkaar speelt, komen we in ander verband nog terug.

Hetgeen in 't voorafgaande omtrent paarverzameling en rechthoekmodel gezegd was, laat zich uitbreiden tot

tripelverzameling en balkmodel.

Het balkmodel maakt

de associativiteit

inzichtelijk en leidt tot de

inhoud van de balk

in eenheidsblokjes uitgedrukt. Verzamelingen worden

als drietallen gestructureerd

ten behoeve van aantalberekeningen.

In Hoofdstuk III leerden we voor productverzamelingen met twee of meer factoren nog andere modellen kennen, zoals

het boommodel, het wegenmodel

als veraanschouwelijking van productstructuren.

4.31a De rol van de gelijkverdelingsstructuur in leerprocessen ten behoeve van de vermenigvuldiging

In de reeks modellen voor vermenigvuldiging, die ik zonet opsomde, heb ik dat van 3.22

m manden met elk n eieren

overgeslagen. Niet opzettelijk, maar als een verzuim, dat ik trouwens in 3.22 en reeds eerder anderen als fout heb aangewreven. Ik heb zelf over het hoofd gezien, wat ik eerder in vrijwel de hele didactische literatuur als ernstige lacune heb gesignaleerd; in dogmatische vooroordelen t.a.v. het verzamelingtheoretische productenmodel bevangen, ben ik pas door het observeren van leerprocessen opnieuw op mijn eigen ideeën attent gemaakt.

Vermenigvuldiging is in eerste instantie herhaalde optelling en deze herhaalde optelling kan bijzonder doelmatig door paarverzameling in het rechthoekmodel — het verzamelingtheoretisch product — worden gestructureerd, onder meer om aantallen als producten te berekenen. Dit model is echter ontoereikend. Ontoe-

reikend niet in de mathematische zin, want door de eieren te nummeren kan men aan de eierenverzameling de sterkere structuur opleggen als paarverzameling met als elementen

「mand, nummer van ei in zijn mand」.

Wel ontoereikend in didactische zin, omdat een mathematisch voor de hand liggende herstructurering zich geenszins in leerprocessen — spontaan of gestimuleerd — behoeft voor te doen en, als zij zich wel voordoet, niet voldoende bewust behoeft te worden om waar nodig expliciteerbaar en beschikbaar te zijn.

Ik beschouw een sequentie van vraagstukken:

- (a) Een figuur, voorstellende zeven manden met in elk zes eieren. Vraag: hoeveel eieren?
- (b) Een figuur, voorstellende zeven manden met de legende: in elke mand zijn er zes eieren. Vraag: hoeveel eieren?
- (c) De tekst: Ik heb zeven manden; in elk zitten er zes eieren. Vraag: hoeveel eieren?
- (c') Of meer gestroomlijnd: 7 manden à 6 eieren, hoeveel eieren?

Het is een sequentie van 'materieel' en 'figuurlijk' naar 'mentaal' en 'verbaal' die trouwens nog aangevuld en verfijnd zou kunnen worden. De feitelijke situatie, die ik in een (traditionele) 3e klas basisschool observeerde¹⁴) was die van vraagstuk (b).

Leerling *A* telde — zeer snel — 1, 2, 3, 4, 5, 6 met zijn vinger bij de eerste mand, 7, 8, 9, 10, 11, 12 met zijn vinger bij de tweede mand enz. tot en met 37, 38, 39, 40, 41, 42 met zijn vinger bij de laatste mand.

Leerling *B* telde met zijn vinger van de ene naar de andere mand glijdende: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42.

Leerling *C* deed als *B*, maar zonder van zijn vinger gebruik te maken.

Leerling *D* zei: $7 \times 6 = 42$.

(Men zou in deze reeks nog tussen leerling *A* en *B* een variant *A'* kunnen inschakelen, die net als *A* doet, maar zonder zijn vinger als merkteken.)

Hoe zouden deze leerlingen in situatie *a* of *c* hebben gereageerd, in 't bijzonder zou leerling *D* in situatie *a* tot optellen zijn overgestapt en zou leerling *A* de situatie *c* als echt vermenigvuldigingsprobleem hebben geïnterpreteerd of tot geen enkele prestatie in staat zijn geweest? Speelt bij *B* en *C* in de gegeven situatie *b* wel het vermenigvuldigingsidee mee? In plaats van op de manier van $1 \times 6 = 6$, $2 \times 6 = 12$, $3 \times 6 = 18$,... is het gemakkelijker de tafel van 6 op te zeggen in de dreun 6, 12, 18,... en onderwijl met de vinger of blik op de manden of — in abstracto — op de vingers tellende het aantal stappen van de vermenigvuldiger te controleren. Een hele rist van vragen. Iemand die deze leerlingen gedurende een langere tijd had kunnen observeren, zou er wel iets zinnigs over kunnen zeggen.

Of een van de leerlingen in de gegevens een structuur van paarverzameling heeft

gezien, valt evenmin te beoordelen, zolang kennis omtrent eerdere leerprocessen in deze ontbreekt. De structurerende cesuur na telkens zes mag als bij alle leerlingen werkzaam worden verondersteld, bij *A* gemarkeerd door de verplaatsing van de vinger, bij *B* en *C* door het tellen in sprongen van zes. De slechts mentale aanwezigheid van de eieren werkte zeker positief ten gunste van deze structurering. Men mag stellen dat situatie *a* minder bevorderlijk voor het structureren zou zijn geweest.

Hoe zouden dezelfde leerlingen op een telprobleem in rechthoekschema (zeven rijen van elk zes eieren) hebben gereageerd? *A* zou vermoedelijk eveneens hebben geteld; *B* en *C* zouden vermoedelijk door dergelijke voorbeelden leren het rechthoekmodel direct als vermenigvuldiging te interpreteren.

Opnieuw vragen. Ik heb me zelden zó gefrustreerd gevoeld door het gebrek aan continuïteit van de leerprocessen die ik nu eenmaal in staat ben te observeren.

4.32 De vermenigvuldigstructuur van $\mathbf{N}$

De vermenigvuldigstructuur van $\mathbf{N}$ is het geheel van de relaties

$$a \cdot b = c,$$

eventueel ook uitgedrukt

$$c : b = a,$$

maar ook aangevuld met

$$a \cdot b \cdot c = d,$$

$$a \cdot b = d : c$$

en al hetgeen men in deze richting kan verzinnen.

Op een hoger niveau behelst zij de ervaring en op een nog hoger niveau de wetenschap omtrent eigenschappen als

commutativiteit,

associativiteit,

distributiviteit,

equivalentie van $a \cdot b = c$ en $c : a = b$

en veel meer van deze eigenschappen.

Deze structuur groeit bij de leerling naarmate hij in $\mathbf{N}$ doordringt, maar fundamentele eigenschappen zoals de juist genoemde kunnen ten volle al in een zeer beperkt deel van $\mathbf{N}$ duidelijk ervaren en zelfs geformuleerd worden.

De structuur van $\mathbf{N}$ is ten dele door het memoriseren van tafels toegankelijk; daarbuiten wordt ze verkregen en ontleed met algorithmiek in het tientallig stelsel — iets waarop we nog terug moeten komen.

Met het voorafgaande heb ik de structuur echter nog zeer onvolmaakt in de greep. De relatie

$$a \cdot b = c$$

kan bijvoorbeeld worden gestructureerd door a vast voor te schrijven en b de getallenrij te laten doorlopen — er ontstaat voor c een rekenkundige rij met verschil a , op de getallenlijn door een sprongrij veraanschouwelijkt.

Of ik kan c vast voorschrijven en systematisch zijn splitsingen in twee factoren opstellen en door een rij rechthoeken met gegeven oppervlak illustreren.

Ik kan in meer factoren splitsen, ook in priemfactoren. Delers, veelvouden, restklassen zijn andere structuurmiddelen. Deelbaarheidseigenschappen kunnen vereenvoudiging bij het vermenigvuldigen mogelijk maken.

Evenals bij de optelstructuur van N verdient de ordestructuur aandacht bij de vermenigvuldigingsstructuur van N . Het ligt ook weer voor de hand, dat grotere factoren tot grotere uitkomsten leiden, maar dit sluit nog geenszins de blikwisseling in:

als het product gegeven is gaan vergroting van de ene en verkleining van de andere factor hand in hand

dit anti-ordelijke gedrag, dat bij de deling

kleinere porties — grotere aantallen

grotere porties — kleinere aantallen

een grote rol speelt.

Nog op een andere wijze is de ordestructuur van N bij de deling werkzaam: door een rekenkundige rij wordt de getallenrij in intervallen verdeeld;

welke getallen liggen in zo'n interval?

in welk interval ligt een gegeven getal?

zijn dan relevante vragen.

4.33 De constitutie van de deling als mentale handeling

De verhouding van het delen tot het vermenigvuldigen is veel ingewikkelder dan van het aftrekken tot het optellen. Tussen vermenigvuldigen en delen is er veel minder symmetrie dan tussen optellen en aftrekken. Deze discrepantie strekt zich van de eenvoudigste aanzetten tot de vol ontwikkelde begrippen uit. Of je een getal van een ander kunt aftrekken, kun je zo zien, het is 'het kleinste van het grootste'. Of een deling opgaat, is een verrassing. Er is bij het aftrekken niets dat aan de rest bij het delen doet denken of het zou moeten zijn $3 - 8 = 0$ rest 5 (d.w.z. als het om guldens gaat, is dat de rest die je schuldig blijft). Aan de andere kant zijn er naast de principieel ondeelbare objecten andere — continue — die wel onbeperkte deelbaarheid suggereren, die dus tot uitbreiding naar Q^+ uitnodigen, en daar staan weinig suggesties van onbeperkte aftrekking, dus uitbreiding naar Z , tegenover.

De deling treedt niet zo universeel als omgekeerde operatie van de vermenigvuldiging op als de aftrekking van de optelling. Voor het drie keer een handeling uitvoeren, waarvan ik voorbeelden gaf, is er geen tegenhanger in het delen te bedenken. Zelfs half is geen goede tegenhanger van dubbel — hiervan getuigt

het bestaan van een grotere en een kleinere helft in de omgangstaal.
Naar zijn fenomenologische oorsprong doet het delen zich op drie wijzen voor, als

voortgezet afhalen,
verdelen,
omkeeroperatie van het vermenigvuldigen.

Het delen als *voortgezet afhalen* is de tegenhanger van het vermenigvuldigen als voortgezet toevoegen:

hoe vaak kun je een hoopje van 3 van deze stapel afhalen,
hoe veel sprongen van 3 heb je van hier tot daar nodig,
hoe veel keer gaat de lat van 3 m in de ganglengte op,
hoe veel keer kun je 3 liter uit het vat scheppen?

Van het getal of de grootheid a kun je q keer d aftrekken, dit betekent, dat na q keer aftrekken iets overblijft,

$$a = qd + r \text{ met } r < d.$$

De ouderwetse handrekenmachine, die geen tafels kent, vertolkt dit herhaald afhalen. met dien verstande dat de procedure in 't algemeen niet met d begint, maar met een zo groot mogelijke $10^m d$, om de rest met $10^{m-1} d$ te bewerken, enz. Ook bij de gebruikelijke staartdeling is de afhaalstructuur te herkennen, zij het dan door de kennis van tafels verkort.

Hier tegenover staat het verdelen, zeg onder q personen, van een hoeveelheid gelijksoortige voorwerpen. Er ontstaan q 'gelijke delen'¹⁵) en ieder van de q personen krijgt er één van, *een q -de deel*, — een merkwaardige terminologie als je er goed over nadenkt, waaraan we echter zo gewend zijn, dat we er niets vreemds in zien.¹⁶) In alle talen die mij bekend zijn, wordt het rangtelwoord gebruikt om aan te duiden van hoeveel delen het deel er één is — afgezien natuurlijk van de tweedeling, waarvoor dan speciale uitdrukkingen als 'helft' bestaan. Nog merkwaardiger is de terminologie, wanneer niet een hoeveelheid objecten onder q personen wordt verdeeld, maar een getal, zeg 12, in 3 delen; 4 is dan niet *een* derde deel van 12, maar *het* derde deel. Het lijkt zo gemakkelijk, van het concrete verdelen naar het abstracte over te stappen en hiermee van een q -de deel naar het q -de deel, maar of het voor de lerende even gemakkelijk is, volgt er nog niet uit.

Het *verdelen* van kleine hoeveelheden in een klein aantal delen is veelal een aanschouwelijke procedure, zeker wanneer het om *grootheden* gaat, waar dan ook in principe *zonder rest* wordt verdeeld. Het wordt — vooral als eerlijk verdelen onder een aantal personen — vroeg beoefend en begrepen, bij voorbeeld op die wijze, dat in de kring telkens aan elk evenveel wordt gegeven tot 'de koek op' is, of iets over is, dat niet meer te verdelen valt. Men kan deze procedure ook onder het beeld van het herhaald afhalen vatten; wat dan in elke ronde afgehaald wordt, is een aantal gelijk aan het aantal partners, en het aantal rondes geeft aan, hoeveel ieder krijgt.

Vroeger stonden deze twee verschijningsvormen van de deling als

verhoudingsdeling

en

verdelingsdeling

bekend; ze werden als zodanig apart beoefend.¹⁷⁾ Bij de verhoudingsdeling is de vraag

hoeveel keer gaat d in a op?

bij de verdelingsdeling

hoe groot is een (het) q -de deel van a ?

Het verschil valt vooral op, als a en d gelijksoortig benoemde getallen zijn,

hoeveel personen krijgen iets als je van a gulden aan ieder d geeft?

hoeveel gulden krijgt elk van q personen als er a gulden te verdelen zijn?

Bij beide aspecten van het delen verschijnt de rest in dezelfde functie, als rest, waar niets meer afgehaald kan worden of als rest, die niet verder eerlijk te verdelen is.

Bij de deling als *omkeerooperatie* van de vermenigvuldiging, is de situatie anders. De rekenkundige rij van de veelvouden van d bepaalt in N intervallen en $a \in N$ moet in één hunner geplaatst worden; is het dat tussen qd en $(q+1)d$, dan is q het quotient van ' a gedeeld door d '. Na q stappen van d op de getallenlijn blijven nog r enkelvoudige stappen te doen.

Dit is dan ook de wijze waarop elementaire delingen *geleerd* worden: men oriënteert zich in het geraamte van de tafel van d en plaatst a erin. Uiteraard is goed functioneren van de tafels vereist, wil dit lukken.

Men kan de twee soorten deling van boven ook uit de hoek van de vermenigvuldiging als verschillende omkeerooperaties bekijken. Als ik

$$a = q \cdot d$$

lees als: a is q keer d , dan zijn de factoren q en d a priori niet gelijkwaardig: d is hetgeen q keren genomen wordt. Dit is vooral voelbaar als d niet zo maar een getal, maar een benoemd getal of een grootheid is,

$$3 \text{ weken} = 3 \cdot 7 \text{ dagen},$$

$$3 \text{ dozijn} = 3 \cdot 12 \text{ stuks},$$

$$3 \text{ biljetten van } f 25 \text{ zijn waard } f 3 \cdot 25.$$

De verzameling, waarvan het product het aantal is, draagt een bepaalde structuur, die maakt, dat de factoren a priori niet verwisselbaar zijn.

In de vergelijking

$$a = qd$$

kan ik dan bij gegeven a en d naar q vragen — de verhoudingsdeling — of bij

gegeven a en q naar d — de verdelingsdeling. Ook als omkeerooperatie van het vermenigvuldigen doet de deling zich dan als een verschijnsel met twee facetten voor. Wel, men zou ook bij de optelling de twee summanden kunnen onderscheiden en twee vragen stellen,

hoeveel moet ik bij a optellen, om c te krijgen?

bij wat moet ik b optellen, om c te krijgen?,

maar de asymmetrie is daar lang niet zo opvallend als bij de vermenigvuldiging, waar de ene factor benoemd en de andere onbenoemd kan zijn.

Nu is op de keper beschouwd het tweetal aspecten van de deling onvoldoende. Er worden immers ook benoemde met benoemde getallen vermenigvuldigd, grootheden met grootheden.

lengte maal breedte = oppervlakte

hoeveelheid maal eenheidsprijs = prijs

tijd maal snelheid = weg

tijd maal rentevoet maal hoofdsom = rente

en je kunt dit soort vergelijkingen naar de ene of de andere factor oplossen, zonder dat er dan verschillende soorten deling worden onderscheiden. En dat is ook goed zo. De kracht van de wiskunde is in haar universaliteit besloten. Je kunt alle verzamelingen met hetzelfde soort getallen tellen, alle grootheden met hetzelfde soort getallen meten. Getallen hebben een aantal- en een teltal-aspect; de optelling heeft een cardinaal, een ordinaal en een meetaspect, de vermenigvuldiging heeft het aspect van herhaald optellen en dat van de paarvorming en zo heeft de deling weer haar zeer gevarieerde aspecten. Maar ondanks deze rijkdom van aspecten is het telkens dezelfde operatie, en dit feit komt in de algoritmiek tot uiting. Onder het rekenen mag je de oorsprong van je getallen vergeten en de oorsprong van de rekensom in een opgave. Maar tegelijkertijd moet je in staat zijn van de algoritmische eenvoud tot de fenomenale veelvoud terug te keren, om in die veelvoud de eenvoud te ontdekken. Aspecten zijn er om dan erkend en dan verwaarloosd te worden, en de bekwaamheid om dit te doen hoort ook bij de constitutie van het te constitueren object.

4.34–4.43 DE ALGORITMIEK IN N

4.34 Op 't eind van het vorige nummer werd de algoritmiek al aangeraakt, en ook in 3.30 was de algoritmiek ter sprake gekomen. Bij de deling dacht ik aan die speciale algoritmiek die haar bekroning in de zogenaamde staartdeling vindt, maar men kan algoritmiek ook in een algemenere zin vatten als het volgen van een weg van regels waarbij elke stap een zonder te veel moeite te nemen, aan zekere criteria gebonden beslissing vereist. Aan de computer zal deze weg nauwer voorgeschreven zijn dan aan de mens; de mens zal de vrijheid nemen, een vermenigvuldiging met 98 te interpreteren als een met 100–2 en dan de distributieve wet toe te passen, maar voor wie een computer programmeert, zullen vaak de

voordelen van minder rekenwerk niet opwegen tegen de nadelen van een ingewikkelder programma. Het is net als met de Bank waar één klant een aantal rekeningen heeft: de Bank zal er niet om denken, porto te willen besparen door de mededelingen aan de klant omtrent zijn diverse rekeningen in één enveloppe te stoppen, want de besparing weegt niet op tegen de kosten, die zo'n ingewikkelde programmering met zich mee brengt, wil het systeem foolproof zijn. Daarentegen zal de particulier die aan de Bank mededelingen moet doen t.a.v. verschillende rekeningen, die wel in één enveloppe insluiten (maar niet op hetzelfde vel plaatsen). Voor het oversteken van een straat zal de voetganger regels er op na houden zoals 'ogen eerst links, dan rechts' (niet doelmatig bij éénrichtingsverkeer), maar op een algoritmiek zal dit systeem nauwelijks lijken, tenzij het een door verkeerslichten beveiligde kruising is, waar men met de regel kan volstaan 'oversteken bij groen licht'.

Algoritmen zijn geen doel in zichzelf, hoewel het er soms op lijkt. Ze dienen er toe een ingewikkelde reeks handelingen — misschien ingewikkeld tot onuitvoerbaarheid toe — te vereenvoudigen. Inzichtelijkheid wordt daarbij verdrongen door automatisme. Het automatisme — nu niet meer of slechts onvoldoende gecontroleerd door inzicht — moet betrouwbaar functioneren. Bij de computer wordt dit door goed programmeren bereikt. Mensen zijn veelal moeilijker te programmeren. De programmering wordt door herhaling ingesleten; dit gaat bij de een vlugger dan bij de ander, maar feilloos functioneren is iets uitzonderlijks. Hierdoor wordt het nut van het aanleren van algoritmen serieus beperkt, en zeer zeker dat van een niet inzichtelijk aanleren. Hoeveel tijd en moeite zou besteed moeten worden aan het aanleren van een algoritme dat de lerende, naar verwacht mag worden, maar zelden zal toepassen? In een periode van onwerkzaamheid zal de algoritmische vaardigheid vervagen of teloor gaan. Als er dan toch eens een gelegenheid komt voor het toepassen van het geleerde, zal het vergeten of in de mist opgegaan zijn. Wie het algoritme inzichtelijk heeft geleerd, zal dan misschien nog in staat zijn, het te reconstrueren. 'Daar was zo'n maniertje', en van de wijze waarop het maniertje was geleerd, kan afhangen of de reconstructie gelukt.

De algoritmiek, die hier aan de orde is, komt voort uit een verregaande formalisering. Mentale objecten worden door taalkundige symbolen gefixeerd of zelfs vervangen — in de talen van de abacus en van het cijfersysteem —, operaties op mentale objecten worden gesteund of zelfs vervangen door syntactisch streng geregelde operaties op de taalkundige symbolen — het cijferen —, relaties tussen die mentale objecten worden aangegeven en zelfs vervangen door syntactisch geregelde uitspraken, eigenschappen van die operaties en relaties worden — maar dit is een nieuw stadium van algoritmisering, het algebraïsche — in formules uitgedrukt of door formules vervangen.

4.35 De gebruikelijke algoritmiek van de bewerkingen in $\mathbb{N}$ berust op de tientallige structurering van $\mathbb{N}$ gevolgd door een formalisering door middel van het positiestelsel. Een getal $n \in \mathbb{N}$ wordt dus ontleed als som

$$n = a_i 10^i + a_{i-1} 10^{i-1} + \dots + a_0$$

waarbij $i \in \mathbb{N}$ en voor de a_j de waarden 0, 1, ..., 9 zijn toegelaten; schrijft men nog $a_i \neq 0$ voor, dan is deze ontleding uniek. In de positievoorstelling wordt n dan weergegeven als

$$a_i a_{i-1} \dots a_0,$$

d.w.z. met a_j balletjes, fiches, strepen in de j -de kolom (van rechts, te beginnen met 0) van de abacus, of met het cijfersymbool voor a_j op de j -de plaats (van rechts, te beginnen met 0) van het schrijfmateriaal. (Ik verwaarloos hier abaci met tusseneenheden van 5, zoals in het Verre Oosten in gebruik.)

Bij de nu in gebruik zijnde schoolabaci zijn de kolommen door metalen beugels met 20 balletjes elk gerealiseerd — voor de getallenrepresentatie heeft men in elke kolom er maar 9 nodig, de rest dienen als reserve bij het optellen en het ontbinden van hogere eenheden. Zodoende is op de schoolabacus de getalvoorstelling niet uniek; wel is er een unieke 'zuinigste' voorstelling, de gereduceerde, die de cijfervoorstelling getrouw weerspiegelt, waarbij dus op elke beugel ten hoogste 9 balletjes vertoond worden.

Deze niet-uniciteit van de getalvoorstelling, betrokken op de uniciteit van de gereduceerde voorstelling is voor het aanvankelijk leren van het optel- en aftrek-algoritme van grote betekenis; het is om deze bijzonderheid dat de abacus boven het cijferbeeld de voorkeur verdient in deze leerperiode. Het cijferbeeld hoeft daarbij geenszins verwaarloosd te worden, in tegendeel de twee taken

stel een geschreven getal — op verschillende manieren — op de abacus voor,
schrijf een op de abacus — willekeurig — gegeven getal in cijfers op

zorgen er op de meest natuurlijke wijze voor, dat de leerlingen worden voorbereid op de

overdracht van tien eenheden als een hogere eenheid naar links
overdracht van een eenheid als tien lagere eenheden naar rechts

bij het

optellen

en

aftrekken.

Bij de optelling

$$8 + 5$$

worden uit de balletjesvoorraad op de beugel van de eenheden eerst 8, daarna nog 5 balletjes zichtbaar gemaakt, hiervan worden 10 afgehaald en door één balletje in de tientallen-kolom vervangen, het resultaat wordt als 13 gelezen.

Bij de aftrekking

$$13 - 8$$

$$18 + 5$$

is op de abacus

$$(10 + 8) + 5 = 10 + (8 + 5) = 10 + 13 = 23$$

gestructureerd, op de getallenlijn is de nabijheid van 20 veel directer,

$$18 + 5 = 18 + (2 + 3) = (18 + 2) + 3 = 23.$$

Ook bij het hoofdrekenen wordt deze methode vaak toegepast.

Zolang de abacus of een tussenvorm tussen abacus en cijferen de algoritmiek beheerst, doet het er niet veel toe in welke volgorde de diverse kolommen behandeld worden.

$$\begin{array}{r} 365 \\ 287+ \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c|c} 3 & 6 & 5 \\ \hline 2 & 8 & 7+ \end{array} \rightarrow 5 \mid 14 \mid 12 \rightarrow 6 \mid 4 \mid 12 \rightarrow 652$$

is één mogelijkheid, maar veel andere zijn denkbaar.

$$\begin{array}{r} 365 \\ 287- \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c|c} 2 & 16 & 5 \\ \hline 2 & 8 & 7- \end{array} \rightarrow 0 \mid 8 \mid \begin{array}{c} 5 \\ 7 \end{array} \rightarrow 0 \mid 7 \mid \begin{array}{c} 15 \\ 7 \end{array} \rightarrow 0 \mid 7 \mid 8$$

kan eveneens aan variaties van volgorde onderworpen worden. De gang van rechts naar links in de definitieve algoritmiek dringt zich op als de methode die de kortste schrijfwijze toelaat. Het definitieve cijfer-algoritme is — in tegenstelling met die van het hoofdrekenen — zo uitgelijnd dat men, met een kolom bezig, geen blik slaat naar de links volgende.

Bij het hoofdrekenen pleegt de gang van links naar rechts geoefend te worden. Soms wordt in het onderwijs een systeemscheiding tussen hoofdrekenen en cijferen opgebouwd, bepaald door horizontaal of verticaal plaatsen van de summanden; vaak ontbreekt bij leerlingen het besef dat beide keer dezelfde operaties aan de orde zijn. Natuurlijk is het goed, de op te tellen of af te trekken getallen niet altijd onder elkaar te geven; de leerlingen moeten ook de gelegenheid krijgen, zelf de gegevens goed onder elkaar te schrijven.

In de definitieve algoritmiek zijn de haptische of visuele hulpmiddelen vervangen door 'onthouden' en 'lenen'. Complicaties als het achter elkaar onthouden, en het actief worden van nieuwe kolommen en meer summanden bij het optellen, het in successie lenen bij het aftrekken, kunnen de mentale activiteit belasten; nog sterker kan de belasting zijn bij het hoofdrekenen, als elke visuele steun ontbreekt en leerlingen het resultaat van de eerste partiële operatie vergeten zijn, wanneer ze net de tweede voltooid hebben. Gebrekkig cijferend optellen en aftrekken — nog meer geldt dat voor het vermenigvuldigen — is vaak geen gevolg van gebrekkig begrip, maar van gebrek aan aandacht en concentratie. Ook als leerlingen geboeid zijn, kan de aandacht gauw verslappen, zeker op die

leeftijd, waarop men kinderen het cijferen tracht bij te brengen. Ook goede leerlingen vergissen zich gedurig; minder goede kunnen, als ze falen, ontmoedigd worden, tot het definitieve afhaken toe.

Het leren cijferend optellen en aftrekken werd hier als een — ik zeg niet geleidelijke, maar — stapsgewijze ontwikkeling gezien.¹⁸) Die stappen moeten liefst spontaan door het kind worden gezet; in de gang, zoals die hier is aangeduid, moet dit mogelijk zijn. Zo mogelijk moeten die stappen ook door de onderwijzer geobserveerd en — ter versterking — aan de leerling bewust worden gemaakt. Leerlingen die niet te strict geleid worden, ontwikkelen soms hun eigen methoden. Ik zag er bij voorbeeld een die bij het aftrekken vrij systematisch de aftrekker naar boven aanvulde tot een rond getal,

$$\begin{array}{r} 365 \\ 287- \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 365 \\ 300- \\ 13+ \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 65 \\ 13+ \\ \hline \end{array} \rightarrow 78$$

Misschien is deze methode zelfs te prefereren boven de geijkte. Maar een leerling, die zoiets verzint, handelt inzichtelijk genoeg, om ook de geijkte manier te leren.

Aan de andere kant moeten leerlingen, die er niet aan toe zijn, een bepaalde stap op de weg van algoritmisering te zetten, er niet naar toe geduwd worden. Dit zijn algemene didactische beginselen, maar in 't geval van het leren cijferen speciaal relevant. Inzichtelijkheid door een algoritme vervangen is zinvol, als het algoritme zelve inzichtelijk is ontwikkeld en niet als aan een blinde opgelegd. 'Baat het niet, dan schaadt het niet', is een niet overtuigende uitvlucht. Algoritmiek dient door algoritmiseren geleerd te worden.

4.36 Dit spontane algoritmiseren is bij de vermenigvuldiging veel moeilijker aan te banen. De moeilijkheid van de operatie is groter en de natuurlijke motivatie niet sterk genoeg om die moeilijkheid te overwinnen. De vermenigvuldiging is als herhaalde optelling gedefinieerd en als je 4 keer 8 of 4 keer f 8 steeds opnieuw door een optelsommetje kunt verkrijgen, als je de prijs van 20 Nieuwjaarskaarten à f 0.50 kunt vaststellen door 20 keer 0.50 aan te slaan, is een extra stimulans nodig, om uitkomsten van vermenigvuldigingen in het geheugen vast te leggen. Eens voor altijd in het geheugen vast te leggen — had ik haast gezegd, maar dit is nu net niet wat er gebeurt. We weten, dat zo iets kan, zich iets in één slag inprenten — een naam, een telefoonnummer, een verjaardag — als we ons er maar op concentreren. Maar tafels leren lijkt blijkbaar meer op het achter elkaar aan twintig mensen voorgesteld worden, en er zijn maar weinigen, die op zoiets hun aandacht kunnen zetten. Tafels leren is een proces van inslijten, van overhevelen uit het korte in het lange geheugen. De beloning voor het leren van de tafels, maar ook de eigenlijke oefening in het gebruik van de tafels komt bij het cijferend vermenigvuldigen, d.w.z. de oefeningen waarmee het leren van de tafels gemotiveerd wordt, komen pas, als de lerende enigszins met de tafels vertrouwd is — een gaping die niet gemakkelijk te overbruggen is.

Serieuus onderzoek naar hoe het leren van tafels te leiden, zijn me niet bekend — ik bedoel onderzoeken naar de feitelijke leerprocessen die bij het leren van de tafels plaats vinden.¹⁹⁾ En dit zouden dan nog leerprocessen zijn die, in tegenstelling tot vele andere, gemakkelijk te herkennen en moeilijk mis te verstaan zijn. De leerlingen ontwikkelen tal van strategieën om zich het telkens weer berekenen van tafelproducten te vergemakkelijken. Het is, van bekende producten verder of terug te rekenen, vooral vanaf de kwadraten n^2 ($n = 1, \dots, 9$) die een speciale aantrekkingskracht uitoefenen, maar ook eenvoudig als zeg 7×8 wordt gevraagd, zich herinneren, dat op de vorige bladzij 6×8 was gedaan en terugbladeren om van die uitkomst gebruik te maken. Ik vermoed, dat men met wat kennis omtrent de strategieën van de leerlingen, de oefeningen in het tafelleren heel wat doelmatiger kon opzetten.¹⁹⁾

4.36a Op dit punt ben ik in de oorspronkelijke versie direct naar het cijferend vermenigvuldigen in 't algemeen (4.37) overgestapt. Ondertussen zijn mij bij remedial work op 't eind van de basisschool de oorzaken duidelijk geworden voor het falen van zekere fundamentele en, naar het lijkt, eenvoudige automatismen van het positioneel stelsel die in **N**, maar ook bij de kommagetallen onmisbaar zijn, willen de algoritmen in 't geheel functioneren. De geautomatiseerde regels die ik bedoel zijn:

vermenigvuldiging met 10 door een nul aan te hangen
vermenigvuldiging met 100 door twee nullen aan te hangen

enz. en algemeen

vermenigvuldiging met 10 ... 0 door er zoveel nullen aan te hangen als er achter de één staan.

De inversen hiervan, op de deling betrekking hebbende, zijn:

deling door 10 door een eventuele nul op 't eind af te strepen,
deling door 100 door twee eventuele nullen op 't eind af te strepen,

enz. en algemeen

deling door 10 ... 0 door zoveel eventuele nullen op 't eind af te strepen als er achter de één staan.

Bij volwassenen, van studenten van pedagogische akademies tot hoogleraren in de exacte vakken, heb ik naast — uiteraard — vertrouwdheid met deze regels het onvermogen geconstateerd, die regels te motiveren, en zelfs het gebrek aan enige behoefte tot motivering van de regels — een tekortkoming die bij P.A. studenten met het oog op hun toekomstige taak wellicht ernstiger is dan bij hoogleraren. Sommigen, misschien velen, onder hen zullen de regels inzichtelijk geleerd hebben of althans inzichtelijk geleerd zijn. Het lijkt me een typisch geval van verstopping van de bronnen van inzichtelijkheid door routinematige oefening. Wel moet ik zeggen dat ik in de door mij geraadpleegde boekjes eveneens een gebrek aan inzicht heb geconstateerd, zij het dan van didactisch inzicht

in het stimuleren door didactische sequenties van doelmatige leerprocessen naar deze regels toe.

Laten we beginnen met het verschijnsel dat de tafels van 2, 3, ... met de fraaie getallen 20, 30, ... eindigen. Het is een verschijnsel waarop lerenden met gevoelens reageren, variërend tussen voldoening en verbazing, dat ze in elk geval niet koud laat – je stuurt bij het telkens weer opbouwen van de tafels naar de veilige haven van tien-keer toe. Van deze emotionele betrokkenheid dient gebruik te worden gemaakt om het verschijnsel te verklaren.

Geschiedt dit niet dan loopt de weg naar de regels van daarstraks als het ware empirisch inductief:

$$10 \times 1 = 10, 10 \times 2 = 20, 10 \times 3 = 30, \dots, 10 \times 10 = 100, 10 \times 11 = 110, \dots$$

dus tien keer betekent een nul op 't eind. En van hier leidt een gemakkelijke – tè gemakkelijke – lijn naar de veelvouden van 100, 1000, enz. Het is duidelijk dat dit leerproces, hoewel inzichtelijk, te weinig inzicht verschaft. Hoe wordt dit inzicht verkregen?

Het verschijnsel van de fraaie tafelp producten van daarstraks moet allereerst dieper worden verklaard, te weten via de commutatieve wet

10 tweetjes zijn 2 tientjes,
10 drietjes zijn 3 tientjes

enz. – op de abacus of met ander materiaal geadstrueerd en in geschreven cijfers als promotie door aanhangen van een nul

twee eentjes in twee tientjes
drie eentjes in drie tientjes

enz. Hiermee is de onmisbare schakel in het leerproces aangewezen, naar het beleven en tenslotte formuleren van de regel van vermenigvuldigen met 10 door aanhangen van een nul: de promotie van

tientallen in honderdtallen door aanhangen van een nul,
honderdtallen in duizendtallen door aanhangen van een nul

als weerspiegeling van de vermenigvuldiging met 10.

Een volgende stap zou zijn het begrijpen van vermenigvuldiging met 100, 1000, ... als herhaalde vermenigvuldiging met 10, om dan zodoende te begrijpen de promotie van

tientallen in duizendtallen door aanhangen van twee nullen

als weerspiegeling van de vermenigvuldiging met 100, enz.

Een (intelligente) 12-jarige beweert telkens dat vermenigvuldiging van iets met 10 en van de uitkomst weer met 10 neerkomt op vermenigvuldiging met 20. Zij beheerst wel de regel van het een keer aanhangen van een nul, maar zonder begrip; zij beheerst niet die van vermenigvuldiging met 100, enz. Zij weet niet hoeveel 1000×1000 is. Zij kent niet de regel voor de deling door 10. Zij mist vrijwel elk begrip voor tientallige breuken.

Hierbij hoort het verband met deling door 10, 100, ..., voorzover mogelijk, geëxpliceerd te worden. Deze didactische sequentie vindt uiteraard een vervolg bij de tientallige breuken (zie 5.24a).

Het is een vraag die we dan opnieuw moeten opwerpen, of, wanneer en in welke mate in een dergelijke sequentie van de machtsnotaties

$$\begin{aligned}10^2 &= 10 \times 10 \\10^3 &= 10 \times 10 \times 10\end{aligned}$$

gebruik gemaakt moet worden. De exponentenwet is een machtig hulpmiddel, dat didactisch averechts kan uitpakken ($10^2 \times 10^3 = 10^5$). De lezer realiseer zich dat de machtsnotaties in 4.37 voor hem bestemd zijn, maar dat dit niet de uiteindelijk overdracht op de leerling behoeft uit te sluiten.

4.37 Het cijferend vermenigvuldigen in het tientallig stelsel berust op de kennis van de tafels, d.w.z. de producten

$$i \cdot j \text{ met } i, j = 0, 1, \dots, 9,$$

op de regel

$$10^p \cdot 10^q = 10^{p+q}$$

en de toepassing van de distributieve wet. Van twee getallen m , n , tientallig voorgesteld,

$$\begin{aligned}m &= a_k 10^k + \dots + a_0, \\n &= b_l 10^l + \dots + b_0\end{aligned}$$

is het product

$$m \cdot n = (a_k 10^k + \dots + a_0) \cdot (b_l 10^l + \dots + b_0)$$

opgebouwd uit de deelproducten

$$a_i 10^i \cdot b_j 10^j = a_i b_j \cdot 10^{i+j}.$$

Deze deelproducten moeten uitgerekend en dan netjes bij elkaar geraapt worden, volgens een principe dat verzekert, dat alle aan de beurt komen en geen dubbel. De vraag hoe dit het doelmatigste geschiedt, zou door het vermenigvuldigings-algoritme moeten worden beantwoord. Laten we de gebruikelijke oplossingen eventjes vergeten en ons afvragen hoe we zulke problemen aanpakken als ze kersvers op ons afkomen.

Welnu, meteen dringt een tweedimensionaal patroon zich op, de tabel met twee ingangen. Een factor wordt gewoon, horizontaal opgeschreven, rechts de eenheden en met machten van 10 voortschrijdend naar links, de andere verticaal van onderen naar boven; in de kruising van de 10^i -rij en de 10^j -kolom wordt $a_i b_j$ geplaatst, dus met weglating van telkens de factor 10^{i+j} ;

	b_l	b_{l-1}		b_1	b_0
a_k	$a_k b_l$	$a_k b_{l-1}$	...	$a_k b_1$	b_0
a_{k-1}	$a_{k-1} b_l$	$a_{k-1} b_{l-1}$	...	$a_{k-1} b_1$	$a_{k-1} b_0$
.					
.					
.					
a_1	$a_1 b_l$	$a_1 b_{l-1}$	...	$a_1 b_1$	$a_1 b_0$
a_0	$a_0 b_l$	$a_0 b_{l-1}$	...	$a_0 b_0$	$a_0 b_0$

Deze deelproducten $a_i b_j$, voorzien van de factoren 10^{i+j} , moeten dus bij elkaar geharkt worden.

Welke onder hen dragen dezelfde factor 10^p ? Men krijgt

$$\begin{aligned}
 & a_0 b_0 10^0 \\
 & + (a_1 b_0 + a_0 b_1) 10^1 \\
 & + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) 10^2 \\
 & + (a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3) 10^3 \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

en daarmee heb ik al gesuggereerd hoe ze bij elkaar moeten worden geharkt — volgens de schuine lijnen onder een hoek van 45° van links onder naar rechts boven. Ik vermoed dat iedereen het zo zou doen als hij vanuit dit algemene uitgangspunt het cijferend vermenigvuldigen opnieuw zou moeten uitvinden. Het is trouwens dezelfde manier als waarop je twee veeltermen in x

$$\begin{aligned}
 & a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\
 & b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \dots + b_1 x + b_0
 \end{aligned}$$

met elkaar vermenigvuldigt.

In de hokjes van dit schema staan getallen met twee cijfers, die je door de tafels worden geleverd. Laten we een numeriek voorbeeld invullen,

	7	6	5
7	49	42	35
8	56	48	40
9	63	54	45

en geassembleerd

10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
49	98	146	94	45

oftewel onder elkaar

$$\begin{array}{r}
 1 \ 4 \ 9 \ 4 \ 5 \\
 9 \ 8 \ 6 \ 4 \\
 4 \ 9 \\
 \hline
 6 \ 0 \ 3 \ 5 \ 8 \ 5
 \end{array}$$

hetgeen ook in 't hoofd, met 'onthouden' kan geschieden.

Hoe je dit assembleren volgens de schuine lijnen nader uitvoert, is immers een kwestie van techniek. Het zou bijvoorbeeld met de abacus kunnen. Je plaatst er eerst 45 op, dan een kolom opgeschoven 40 en 54, nog een kolom opgeschoven 35, 48, 63 enz. Opgeschreven

$$\begin{array}{r}
 45 \\
 400 \\
 540 \\
 3500 \\
 4800 \\
 6300 \\
 42000 \\
 56000 \\
 490000 \\
 \hline
 603585
 \end{array}$$

Je hangt er dus telkens zoveel nullen aan als aan de schuine lijnen beantwoorden, maar je kunt de nullen ook meteen weglaten. Veiligheidshalve kun je steeds bij de rijen en kolommen en de schuine lijnen ook de macht van 10 plaatsen, waaraan ze beantwoorden, dus

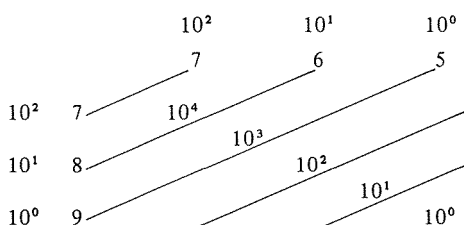


fig. 22

Je kunt ook de sommaties in de schuine lijnen in je hoofd doen en het resultaat dus meteen in één regel opschrijven — dat is dan wat je verkorte vermenigvuldiging noemt, dus het is niets nieuws, wat ik hier gepresenteerd heb.

Wat ik net uiteen heb gezet, ligt wiskundig het meeste voor de hand, maar het is niet de gebruikelijke cijfermethode. Daar zijn uiteraard redenen voor. Allereerst historische. Tradities van de abacus uit, maar ook toevalligheden kunnen een rol hebben gespeeld bij de eerste keuze van het systeem, maar toen het er eenmaal was, bleef het er. Het is niet gemakkelijk in zoiets verandering te brengen. Het is veiliger, de onderwijzer een methode te laten onderrichten, die hij

beheerst dan één die hij zelf moet leren en die niet overtuigend beter is dan de oude.

Maar er zijn ook didactische argumenten ten gunste van de gebruikelijke methode en misschien geven die de doorslag. Na het leren van de tafels en na sommen zoals

$$3 \cdot 40 = \quad , \quad 30 \cdot 40 =$$

enz. zullen de eerste echte cijfersommen zoiets zijn als

$$24 \cdot 2 = \quad , \quad 24 \cdot 8 =$$

De rechthoekige tabel zou hier slechts één kolom vertonen

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} & 8 \\ 2 & 16 \\ 4 & 32 \end{array}$$

maar de gebruikelijke methode

$$\begin{array}{r} 24 \\ 2 \times \\ \hline 8 \\ 40 \\ \hline 48 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \\ 8 \times \\ \hline 32 \\ 160 \\ \hline 192 \end{array}$$

doet het in dit geval duidelijker.

De volgende stap in het leerproces is het weglaten van de nullen en de verkorting van de procedure; er komt minder op 't papier te staan, en er wordt meer mentaal gedaan: 2 maal 4 is 8, 2 maal 2 is 4; 8 maal 4 is 32, 2 opschrijven, 3 onthouden, 8 maal 2 is 16, en 3 onthouden is 19. De uitkomst kan zonder tussenstappen in één regel worden opgeschreven.

Hiermee is dan ook het vervolg uitgetekend. Het gaat via

$$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{80 \times} \end{array}$$

dat uiteraard tot het nu beheerste

$$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{8 \times} \end{array}$$

wordt teruggebracht en dan met een 0 wordt aangevuld. Uiteraard zullen hier ook al

$$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{800 \times} \end{array}$$

een dergelijke beurt krijgen.

Voor

$$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{82 \times} \end{array}$$

ligt nu de splitsing in twee stappen

$$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{2 \times} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \\ \underline{80 \times} \end{array}$$

voor de hand. Tenslotte wordt dit weer in één schema gecombineerd tot

$$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{82 \times} \\ 48 \\ \underline{1920} \\ 1968 \end{array}$$

en tenslotte kan hier nog de nul vervallen.

Men zou hier, vooral op 't eind, niets moeten overhaasten;

$$\begin{array}{r} 789 \\ \underline{765 \times} \end{array}$$

mag gerust een tijd lang in naast elkaar staande

$$\begin{array}{r} 789 \\ \underline{5 \times} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 789 \\ \underline{60 \times} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 789 \\ \underline{700 \times} \end{array}$$

worden gedaan. Dit helpt misschien ook, om

$$\begin{array}{r} 789 \\ \underline{705 \times} \end{array}$$

beter te doen begrijpen.

Het loopt vrij natuurlijk, zoals hier uiteengezet. In de termen van de rechthoekige tabel betekent het dat de deelproducten geassembleerd worden, volgens kolommen, 0-de kolom, 1-ste kolom, enz. en in de kolommen van onderen naar boven, 0-de rij, 1-ste rij, enz. Maar deze tabel van deelproducten zelf wordt niet expliciet. Ik stel die twee methoden tegenover elkaar, zonder een conclusie te trekken. Ikzelf doe het volgens de methode die ik op school heb geleerd en die ik – ondanks pogingen – nooit door de efficiëntere verkorte methode heb kunnen verdrijven.

4.38 Men hoeft ook in een leerproces dat op het gewone algoritme aanstuurt, het rechthoekschema niet uit te sluiten, van zijn meetkundige overtuigingskracht kan men, ook terwille van de betekenis van het product voor de oppervlakteberekening, wel degelijk gebruik maken. Voorstellen ten deze zijn meermalen gedaan en in het Wiskobas curriculum²⁰) is zoiets uitgewerkt.

Het product $m \cdot n$ wordt gevisualiseerd door een weefsel, n schering- en m inslagdraden (fig. 23)

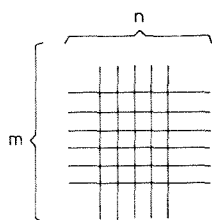


fig. 23

Het aantal kruispunten wordt min of meer handig geteld of berekend. De draden worden dan bij bosjes van 10 samengevat. Dan wordt 24.8 (fig. 24)

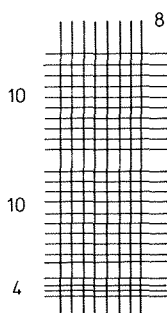


fig. 24

en een dergelijk maar ingewikkelder patroon illustreert $24 \cdot 82$, waarbij weer handig tellen van de kruispunten de actie structureert (fig. 25).

Van de abacus uit wordt gesuggereerd, tien dunne draden tot een dikke samen te vatten, dus voor $24 \cdot 82$

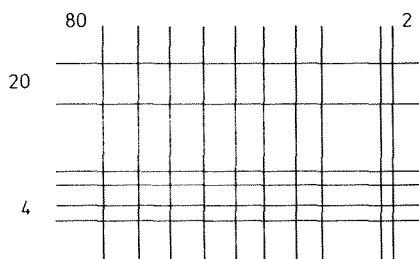


fig. 25

hetgeen aan het handig tellen nog meer structuur geeft.

De methode laat zich tot factoren met meer dan twee cijfers uitbreiden, hoewel dit nauwelijks aan te raden is. Inmiddels moet de echte algoritmisering aan de gang gekomen en flink voortgeschreden zijn. Het meetkundige beeld moet het tenslotte afleggen, op den duur moet de visualisering het algoritmische proces niet mogen verstoren. Maar het moet wel, waar het nodig is, oproepen kunnen

worden, en dit is in 't bijzonder bij de oppervlakte van de rechthoek het geval. Het weefsel wordt daar een vlechtmat, de draden worden stroken, de horizontale en verticale, zeg van 1 mm dik, wat de dunne aangaat, en van 1 cm de dikke. Het is niet zo absurd, ook weefseldraden hebben immers een dikte en ze liggen nauw genoeg bij elkaar om een oppervlak op te vullen.

4.39 De meetkundige instap vanuit de weefsels tot het cijferend vermenigvuldigen en de direct algoritmische behoeven elkaar niet in de weg te staan of uit te sluiten. Het is nuttig als de in beide werkzame gelijksoortige beginselen op gevarieerde wijze worden belichaamd. Aan de andere kant — dit moet beklemtoond worden — mag men niet verwachten en moet men er niet op aandringen dat alle leerlingen even snel vorderen op de weg naar totale algoritmisering van de vermenigvuldiging, waaraan trouwens ook weinig behoefte bestaat.

4.40 Van de vier hoofdbewerkingen is de deling uiteraard de moeilijkste; het algoritme zit gecompliceerd in elkaar en is in al zijn onderdelen moeilijk te onthouden: om het nog moeilijker te maken, komt er een element in, dat bij de andere algoritmen onbekend is, het schatten van partiële quotiënten. Weinigen bereiken redelijke vaardigheid en zekerheid in het delen, en onge oefend raken die bekwaamheden gauw in vergetelheid. Of men het delen als herhaald aftrekken of als verdelen interpreteert, doet er voor het leren van de algoritmiëk niet veel toe, maar de eerste benadering leent zich beter tot het zelfwerkzaam vinden en beschrijven van de hierbij toegepaste procedure.

56789 door 3 delen

is dus telkens 3 aftrekken, maar dit aftrekken hoeft niet een bij één, ook niet mondj esmaat te gebeuren, je trekt 3 een flink aantal keren tegelijk af, 10 000 keer in 't onderhavige geval, en zo ga je door

56789	
<u>30000</u>	10 000 ×
26789	
<u>24000</u>	8 000 ×
2789	
<u>2700</u>	900 ×
89	
<u>60</u>	20 ×
29	
<u>27</u>	9 ×
2	

hetgeen samen 18929 keer oplevert met een rest 2. De leerling zal aanvankelijk in gebreke blijven de hele portie die aan de beurt is, af te trekken; het zal eventjes

duren voor hij door heeft, dat de beslissing hoeveel keer af te trekken op een elementaire deelsom neerkomt. Grote deeltallen bevorderen uiteraard de neiging zoveel mogelijk tegelijk af te trekken.

Het boven ontwikkelde patroon wijkt nauwelijks van het definitieve af. In plaats van onder elkaar schrijft men de deelquotiënten tenslotte bovenaan onder weglating van de nullen, en laat men ook bij de deelproducten de nullen weg, om het gebruikelijke patroon te verkrijgen.

In dit voorbeeld had de deler maar één cijfer. De moeilijkheden doen zich pas echt voor bij delers met meer cijfers. Het zou misschien aanbeveling verdienen als deze uitbreiding pas aan de beurt komt, wanneer het delen door één-cijfergetallen algoritmisch goed functioneert.

4.41 De moeilijkheden met de deling beginnen dus pas als de deler meer dan één cijfer heeft, en ze nemen met het aantal cijfers toe; ze kunnen als technische moeilijkheden blijven bestaan, ook wanneer de leerling het principe heeft begrepen. Bij de massa rekenwerk, die zulke staartdelingen met zich meebrengen, mag het een wonder heten, als er geen foutje insluipt; van drie staartdelingen maar één goed maken — kan een ontmoedigende ervaring zijn, maar dat is dan toch maar wat normaal bereikt wordt; is de balans nog slechter, dan bestaat alle kans, dat de leerling helemaal afhaakt. Van praktische waarde zijn deze staartdelingen nauwelijks; in de praktijk komt daar de rekenmachine aan te pas.

Van het massale rekenwerk afgezien is er nog een andere factor, die het leren van de staartdeling met delers van meer cijfers bemoeilijkt. Om de partiële quotiënten te vinden, behoeft men bij één-cijfer-delers alleen maar de tafels te kennen; men moet bij deling door, zeg, 7, een gegeven getal (< 70) kunnen plaatsen tussen de sporten van de ladder van 7. Niets dergelijks is beschikbaar bij deling door 47; de tafel van 47 is geen geheugenstof. Als 331 door 47 gedeeld moet worden, moet men aftasten welk veelvoud van 47 nog net onder 331 zit. De manier is, 47 naar boven af te ronden tot 50. Men kijkt naar de 5 en vraagt, hoeveel keer die in 33 zit. Het is 6 keer. 50 zit 6-keer in 331, met een flinke rest $47 < 50$, dus moet het partiële quotiënt op zijn minst even groot zijn. Als we boffen, klopt 6. Maar $6 \cdot 47 = 282$, hetgeen 49 minder dan 331 is, dus was 6 te weinig. Het moet 7 zijn, dus

$$331 : 47 = 7 \text{ rest } 2.$$

Een lange redenering met veel rekenwerk om deze partiële uitkomst te verkrijgen, en dat is, als het deeltal langer is, nog maar de eerste stap. Met het probeerwerk komt erbij de ervaring van het telkens falen, een nieuw element van onzekerheid hetgeen het werk niet ten goede komt.

4.42 De deelbaarheid is een structuur van $\mathbf{N}$, die eveneens algoritmisch wordt benaderd.

Er zijn algoritmische regels voor deelbaarheid door 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10; een betrekkelijk eenvoudige is er nog voor deelbaarheid door 11 en een, die de moeite van memoriseren niet waard is voor 7. De drievouden van 37 zien er eenvoudig

uit; met de veelvouden van 142857 zijn grapjes uit te halen, die dieper zijn te funderen.

Deelbaarheidsregels zijn welbekend, maar zelden wordt de vraag naar het waarom gesteld; ze worden als empirische feiten beschouwd. De negenproef kan op de abacus geïllustreerd worden: Een kraal van de ene naar de andere beugel overhevelen maakt een verschil dat een veelvoud van 9 is, bijvoorbeeld:

$$10\,000 - 1\,000 = 9\,000.$$

Alle kralen naar de beugel van een eenheden overhevelen levert de cijfersom, die van het oorspronkelijke getal dus met een veelvoud van 9 moet verschillen. Deling door 9 levert voor beide dezelfde rest.

Om na te gaan of een getal N priem is en om het in factoren te splitsen, als het samengesteld is, deelt men achter elkaar door de priemgetallen 2, 3, ..., waarbij men even voor $\sqrt{N}$ mag stoppen.

Voor het bepalen van de grootste gemene deler van twee getallen is er een algoritme, naar Euclides genoemd.

4.43 We hebben de algoritmiek in $\mathbf{N}$ met de meeste vanzelfsprekendheid op de 10-tallige structuur in $\mathbf{N}$ gebaseerd. Ik meen ook dat dit zo hoort. Ik geef toe dat de meeste vernieuwers veel doen aan structuren met andere grondtallen. Ze wekken de indruk, dat het wiskunde is, als men in plaats van tientallig in een ander positie-systeem rekent. Het is niet meer dan een andere algoritmiek en zeker geen uitdrukking van wiskunde. Sommigen menen, dat het principe van het positiestelsel beter begrepen wordt, als het niet alleen tientallig, maar in grotere verscheidenheid wordt belichaamd. Hiervan is echter, voorzover mij bekend, niets gebleken. Voor mij is de introductie van afwijkende positie-systemen veel eerder een symptoom van vernieuwing door nieuwe leerstof. Vergeleken bij al die wiskunde die uit een dieper doordenken van de leerstof en zijn relaties tot de realiteit resulteert, zijn afwijkende positie-systemen maar een grapje. Grapjes horen er ook in het onderwijs, en leerlingen door grapjes motiveren is goede didactiek, en wat dit betreft kan een afwijkend positie-systeem een goed grapje zijn. Natuurlijk hebben afwijkende positie-systemen hun betekenis, in 't bijzonder het tweetallige, ten behoeve van computers. Het *bedrijven* van algoritmiek in zulke stelsels kunnen we aan computers overlaten. Een context waarin afwijkende positie-systemen meer kunnen betekenen, zullen we straks (5.27) tegenkomen.

5 BREUKEN

5.1–5.2 DE TITEL

Het is geen ontsporing van mijn pen wanneer hier boven ‘Breuken’ en niet ‘Positieve rationale getallen’ als titel van dit hoofdstuk verschijnt. Het lijkt een ouderwetse terminologie, want volgens de tegenwoordige opvatting zijn de rationale getallen de eigenlijke mathematische objecten, die hier bedoeld zijn. Het klopt, en wel als consequentie van de wijze waarop de wiskundige zijn formules interpreteert. Als a en b getallen zijn, is

$a + b$ *niet* de opdracht ‘tel b op bij a ’,

maar weer een getal, te weten de som van a en b . Zodoende is

$3 + 2$ weer een getal,

dat je, korter, ook met ‘5’ mag aanduiden, maar ook, als je wilt, met ‘ $10 - 5$ ’ of met ‘ $\sqrt{25}$ ’ of met ‘ $\log_{10} 10^5$ ’.

$3 + 2 = 5$

is dus *niet* te lezen als

als ik 2 bij 3 optel komt er 5 uit,

maar als

$3 + 2$ en 5 zijn hetzelfde ding —

soms ook geformuleerd

‘3 + 2’ en ‘5’ zijn verschillende namen van hetzelfde ding,

zoals bijvoorbeeld ook

‘Amsterdam’ en ‘de hoofdstad van Nederland’

namen van hetzelfde ding zijn.

Links en rechts van het ‘is’-teken staat *hetzelfde* object vermeld.

Zo is dan ook in

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \dots$$

steeds van hetzelfde ding sprake, dat alleen maar op verschillende wijze is voorgesteld, en dit ding is een *rationaal getal*. Wel, je kunt afspreken dat je voor dit getal de schrijfwijze $\frac{2}{3}$ wilt prefereren en algemeen van elk rationaal getal die

schrijfwijze als breuk, waar teller en noemer de grootste gemene deler 1 hebben, de verkleinde breuk, zoals je voor het getal 5 de schrijfwijze '5' prefereert boven $3 + 2$, $10 - 5$, enz., maar toelaatbaar zijn de andere ook. Toch is er een verschil: '5' is niet alleen maar de *voorkeur* naam voor het getal 5, het is zijn *eerste* naam, de naam waaronder het mij is voorgesteld, waaronder ik het heb leren kennen, en ' $3 + 2$ ' en ' $10 - 5$ ' zijn bijnamen, waarmee ik het ook kan oproepen. Daarentegen is ' $\frac{2}{3}$ ' alleen maar de eenvoudigste naam van zeker rationaal getal en van vele rationale getallen zou ik niet eens kunnen zeggen, onder welke naam ik ze het eerste ben tegengekomen. Dat is dan een van de redenen, waarom de diverse breukaanduidingen voor één en hetzelfde rationaal getal veel meer een eigen leven leiden en waarom er een bijzondere naam voor ze bestaat: breuk.

Maar hoe dan ook, het mathematische object waar het om gaat, is het rationaal getal en niet de breuk. Toch heb ik, bewust, het woord 'breuken' in de titel geplaatst. De breuk is de fenomenologische bron van het rationaal getal, en dan een bron die gedurig blijft vloeien. Breuk of wat daaraan in andere talen beantwoordt, is het woord, waaronder het rationaal getal zijn intrede doet, en in alle talen die me bekend zijn, heeft dit woord iets te maken met breken. Rationaal getal wekt veel minder gewelddadige associaties; ratio betekent hier 'reden' (niet van 'redelijk', maar van 'evenredig'), rationaal getal is het redengetal, de verhouding, tegenover het irrationale getal, het meetbare tegenover het onmeetbare — een geleerde context, veel geleerder dan die van 'breuk'.

5.2 Inderdaad hebben breuken veel met verhoudingen te maken, en ik heb gearzeld of ik onder 'Hoofdstuk 5' niet het woord 'verhouding' moest plaatsen. Niet als vervanger van 'breuken', maar als onderwerp dat voorrang eiste — voorrang om didactische redenen, maar ook terwille van de expositie. 'Verhoudingen' zijn tot hoofdstuk 6 uitgesteld, maar ik zal er in dit hoofdstuk af en toe eens op vooruit moeten lopen. Van 't begin worstel ik in dit boek met beslissingen over voorrang en kan maar hopen, dat het in die strijd bij kleerscheuren blijft: het hoofdstuk Breuken heb ik al enkele keren binnenste buiten gekeerd. Het is de overvloed aan fenomenen, door breuken en bewerkingen met breuken vertolkt, die het me zo moeilijk maakt. Wil ik een fenomenologie schrijven, dan moet ik aan al deze fenomenen behoorlijk aandacht schenken; wil ik alles netjes op een rij zetten, dan kom ik gauw in de verzoeking van te vereenvoudigen, hetgeen in strijd met de fenomenologische taak zou zijn.

Het is waar, de didactiek van de breuken gaat vereenvoudigend te werk. Bij het natuurlijk getal is de veelsporigheid van de instap traditionele regel. Bij de breuken veronderstelt men de leerlingen ver genoeg gevorderd, om ze met één instap vanuit de realiteit genoeg te laten nemen. Voor mij is dit de oorzaak, waarom breuken slechter functioneren dan natuurlijke getallen, waarom er zo velen zijn, die nooit breuken leren.

Mijn opzet is dus de breuken in hun volle fenomenologische weelde te presenteren, en ik kan slechts hopen, dat ik zelf niet in die overvloed verdrink.

5.3 De breuken in de dagelijkse taal

5.3.1 *half zo* (analoog met even zo, eens zo, dubbel zo)

gevolgd door

... , veel, lang, zwaar, oud ...

vergelijkt hoeveelheden of grootheidswaarden.

Minder gebruikelijk:

een derde zo, twee derde zo

... veel, lang, zwaar, oud ...

5.3.2 *twee een derde keer zo*

... veel, lang, zwaar, oud, ...

is als het ware een uitbreiding van

twee keer zo

... veel, lang, zwaar, oud ...

Nauwelijks tot de dagelijkse taal kunnen

een derde keer zo

... veel, lang, zwaar, oud, ...

worden gerekend.

5.3.3 *helft van, derde (deel) van, kwart van, vijfde (deel) van, ...*

beschrijft een hoeveelheid of een grootheidswaarde door middel van een andere.

Bepaalde en onbepaalde lidwoorden brengen hier schakeringen aan:

een, de, het

helft van, derde (deel) van, kwart van, vijfde (deel) van, ...

een, de, het

taart, weg, reis, uur, kilo, geld, miljoen, lot, ...

Ook

een, de, het

helft van, derde (deel) van, kwart van, vijfde (deel) van

zeven

taarten, uur, kilo, miljoen.

Ook veelvouden kunnen hier worden gevormd

twee derden van, drie kwart van, twee vijfden van, ...

een, de, het

taart, weg, reis, uur, geld, miljoen, ...

- 5.3.4 Althans ten dele kunnen hier de zelfstandige naamwoorden ook door
bijvoeglijke worden vervangen:
een, de, het
half, halve, kwart
taart, weg, reis, uur, geld, miljoen, lot.

Met

derde, vijfde

gaat dit niet zo gemakkelijk. In

een, de, het
derde, vijfde
taart, weg, reis, uur, geld, miljoen

overheerst de betekenis van derde, vijfde als *rangtelwoord*. Wel gaat het met

twee derde, twee vijfde
taart, uur, miljoen, lot,...

zonder deze dubbelzinnigheid.

- 5.3.5 Van het bijvoegelijk naamwoord naar het maatgetal, dat dan ook in
cijfers geschreven wordt,

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 5\frac{1}{4}$$

m, kg, l, sec, fles, miljoen.

- 5.3.6 Een merkwaardig en zeer belangrijk verschijnsel — naar ik meen in
alle talen aanwezig — is

keer of *maal*

bij breuken. In 5.3.2 noemde ik het al bij

... keer zo ...

‘Keer’ hoort bij het vermenigvuldigen (zie 4.31). Het is met natuurlijke *m*

m keer iets doen ondergaan, beleven, afwachten.

bijv.

m keer *n* knikkers pakken (*m* · *n* knikkers)
m keer een meetstok er langs leggen (*m* keer zo groot)
m keer de sleutel in het sleutelgat draaien,
m keer de klok, renbaan, aarde rond,
m keer een wiel afrollen,
m keer heen- en weer schommelen.

Op zeker ogenblik worden voor die *m* echter breuken toegelaten: Het gemakke-

lijkt begrijpt men in deze taalkundige uitbreiding nog de gemengde breuk.

2 keer zo lang

sleept

$2\frac{1}{3}$ keer zo lang

met zich mee.

$\frac{1}{3}$ keer zo lang

ligt niet voor de hand, maar de gehelen in de gemengde breuk suggereren hoe de

$2\frac{1}{3}$ keer zo lang

bedoeld is: als

2 keer zo lang en dan nog $\frac{1}{3}$.

Bij cyclische of anderszins periodieke processen spreekt

$\frac{1}{2}$ keer, $\frac{1}{3}$ keer, $\frac{2}{3}$ keer,...

ook wel zonder de gehelen voor zich zelf. In

$\frac{1}{2}$ keer, $2\frac{1}{2}$ keer de sleutel in het sleutelgat draaien

$\frac{1}{3}$ keer, $2\frac{1}{3}$ keer de klok, renbaan, aarde rond

$\frac{1}{2}$ keer, $2\frac{1}{2}$ keer heen en weer geschommeld

$\frac{1}{3}$ keer, $2\frac{1}{3}$ keer een wiel afrollen

suggereert de breuk een handeling waarvan de laatste fase maar ten dele wordt uitgevoerd. En als men aan de meetbeweging — bijv. het aanleggen van een centimeter — denkt, wordt

$\frac{1}{3}$ keer zo lang, $2\frac{1}{3}$ keer zo lang

duidelijker als een proces van periodiek neerleggen van de meetstok waarvan de laatste schakel weer slechts gedeeltelijk is uitgevoerd.

5.3.7 Natuurlijke terminologie is

3 keer ...

$\frac{1}{3}$ van ...

ook nog

$\frac{2}{3}$ van ...

met erachter een

getal, hoeveelheid objecten, deelbaar object, grootheidswaarde

zoals

7, 30 knikkers, 1 taart, 5 kg.

In rekenen en wiskunde is hier aan één term behoefte. Een enkele keer kan men hier wel het echte *keer* door *van* vervangen

3 (pakketten) *van* 5 kg.

maar dit is een ander *van* dan dat van de breuken, synoniem met

à

of

van ... het stuk.

Terwille van de uniformiteit moet volgens de traditie

keer ook de rol van *van*

overnemen. In rekenboeken wordt dit meestal verordineerd:

$\frac{1}{3}$ *keer* betekent $\frac{1}{3}$ *van*.

In 't voorafgaande werden wegen van

van naar *keer*

uitgetekend: De ene is

2 keer,

via

$2\frac{1}{3}$ keer,

naar

$\frac{1}{3}$ keer;

de andere is die van het cyclische of periodieke proces

2 keer de klok rond

$\frac{1}{3}$ keer de klok rond.

Later bij vermenigvuldiging van breuken kom ik hierop terug.

5.3.8 Op weer een andere wijze suggereert

van, ook wel eens *op*

een breuk in

3 *van*, *op* de 5 (Nederlanders wonen in de stad)

5 *van*, *op* 100 (5%)

(de auto rijdt) 1 *op* 10

(de schaal is) 1 *op* 1000

1 (kans) *op* 6

Analoog in een mengsel

3 *van* de 5 delen

of door de onderdelen naast elkaar te plaatsen

3 delen zout en 2 delen peper.

5.3.9 Bijzonder merkwaardig lijkt de terminologie

elk derde lot wint

elke vijfde mens is een Chinees.

Dit is, naar het schijnt, de oorsprong van de breukwoorden in de rangtelwoorden: men telt aldoor 1, 2, 3, ..., 10 en haalt er telkens *de tiende* uit; al die 'tinden' samen is *het tiende* van 't geheel. Dat er dan *deel* achter wordt geplakt, is een contaminatie met 'in tien delen'.

5.4 De breuk als breker

5.4.1 Breuken veroorzaken

Hoe hoeveelheden verdeeld worden, evtl. met rest, is al uiteengezet. Bij het verdelen van stoffelijkheden, die door grootheden worden gemeten, worden zeer uiteenlopende methoden toegepast: het 'breken' kan

irreversibel, of reversibel, of slechts symbolisch

geschieden. Voor de gelijkheid van de delen kan

op 't oog of op 't gevoel

worden gezorgd of er kunnen meer verfijnde methoden worden toegepast. Een ervan is het

dubbelvouwen

aan het eigenlijke halveren vooraf te laten gaan, en het zogenaamde

driedubbelvouwen

aan het in drieën delen;

herhaald dubbel of driedubbelvouwen

leidt tot andere breuken.

Zware stoffelijkheden worden door

afwegen op de handen of op de weegschaal

door midden gedeeld, waarbij een

telkens weer corrigeren van ontbrekend evenwicht

wordt toegepast. Het

proberend vergelijken en corrigeren

speelt ook bij andere door grootheden gemeten stoffelijkheden een rol, bijv. bij het verdelen van vloeistof over een aantal congruente glazen, waarbij de hoogtes worden vergeleken.

Vlakke en ruimtelijke figuren of voorwerpen, maar ook grote hoeveelheden worden, wat oppervlakte of inhoud aangaat, soms verdeeld door

van congruenties en symmetrieën gebruik te maken,

zoals bij voorbeeld de taart in congruente sectoren, soms

op 't oog of op 't gevoel.

Bij al deze voorbeelden heb ik het echt meten buiten beschouwing gelaten. Ik heb ze opgesomd, om er de aandacht op te vestigen. Bij de mentale constitutie van de diverse soorten grootheden, lijkt het eerlijk verdelen mij een belangrijke schakel – veel belangrijker dan wat soms onder de naam conservatie wordt onderzocht. Voorzover ik weet, is er door ontwikkelingspsychologen nauwelijks aandacht aan geschonken. Kinderen van 7–8 jaar, die, zoals ik herhaaldelijk heb geconstateerd, van een onregelmatige vlakke figuur de helft of een derde (van de oppervlakte) door kleuren kunnen aangeven, hebben een belangrijke component van het mentaal object 'oppervlakte' te pakken; kennis van de formule voor de oppervlakte van de rechthoek bij kinderen van 10–12 jaar – hetgeen de ontwikkelingspsycholoog pas echt vindt – behoeft geenszins een teken van vooruitgang te zijn, het kan zelfs achteruitgang betekenen. Ik heb trouwens eerder op de betekenis van de breek-maak-transformaties voor de ontwikkeling van grootheden als mentale objecten gewezen.

5.4.2 *Geheel en deel*

Het meest concreet presenteert de breuk zich, als een 'geheel' in 'delen' is of wordt

gesplitst, geknipt, gesneden, gebroken, gekleurd,...

of als zodanig wordt

ervaren, voorgesteld, gedacht.

In dit complex van verschijnselen zullen we enige classificatie trachten aan te brengen die door voorbeelden wordt toegelicht.

Het geheel kan

discreet of continu,
bepaald of onbepaald,
gestructureerd of structuurloos

zijn — om uitersten aan te geven waartussen overgangen mogelijk zijn.

De aandacht kan gericht zijn op

één deel, een aantal delen, alle delen.

De delen zelf kunnen — in 't geval van een continu geheel —

samenhangend of onsamenvastend

zijn. De wijze van verdeling kan

gestructureerd of structuurloos

zijn.

5.4.3 *Voorbeelden — bepaald geheel (fig. 26–32)*

Uit een zak met 100 knikkers — discreet bepaald geheel — heb ik een tiende gepakt: ik let op dit tiende, en misschien nog op de resterende negen tienden. Dezelfde knikkers liggen voor me, of rollen langs me — gestructureerd als een rij —, ik heb er willekeurig tien gepakt — ongestructureerd kiezen —, of de eerste tien of telkens de tiende — gestructureerd kiezen.

Van 60 kralen in een pot zijn er $\frac{1}{6}$ rood, $\frac{1}{3}$ wit, $\frac{1}{2}$ blauw — een discreet bepaald geheel, gestructureerd qua kleur, structuurloos qua ruimtelijke verdeling. Hetzelfde op een ketting — ruimtelijk gestructureerd als geheel en, indien de kralen elkaar netjes opvolgen, zeg 1 rode, 2 witte, 3 blauwe, ook qua verdeling.

Een loterij — discreet bepaald geheel, gestructureerd door nummering — de aandacht valt op de delen, die zekere winsten halen.

Een strook — continu, van bepaalde lengte, met een lineaire structuur — waarvan een of meer segmenten gekleurd zijn, zeg als Nederlandse driekleur — samenhangende delen — of hier wat rood daar wat rood — onsamenvastende delen, structuurloos of gestructureerd verdeeld.

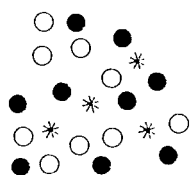


fig. 26

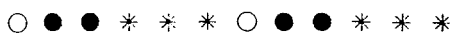


fig. 27

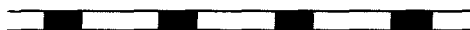


fig. 28

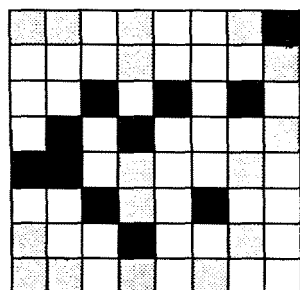


fig. 29

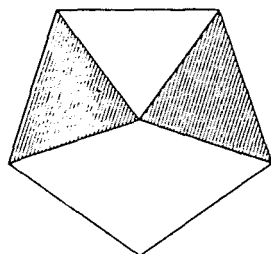


fig. 30

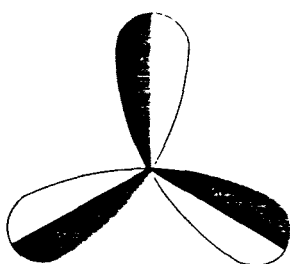


fig. 31

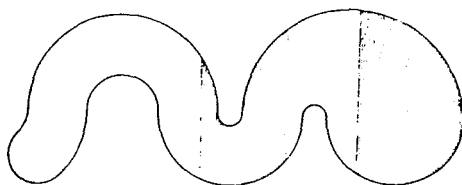


fig. 32

Hetzelfde bij een cirkelschijf – continu, bepaald, cyclisch gestructureerd, in sectoren verdeeld, die afzonderlijk of samengevat delen vertegenwoordigen (denk aan roulette, kanstol, sectordiagram).

Hetzelfde met min of meer gestructureerde meetkundige figuren:

Een vierkant met of zonder een onderliggende roosterstructuur, of een uit roosterhoekpunten geconstrueerd veelhoekvlak met of zonder de onderliggende roosterstructuur, op regelmatige of onregelmatige wijze verdeeld.

De ribben of zijvlakken van een cubus in parallelle viertallen resp. paren samengevat.

Kromlijng begrensd vlakdelen of door gesloten oppervlakken begrensd ruimtedelen, regelmatig of onregelmatig, op uiteenlopende wijze verdeeld.

5.4.4 Voorbeelden – onbepaald geheel (fig. 33–34)

De mensheid – discreet, onbepaald geheel – verdeeld naar bloedgroepen, waarbij de aandacht op één of meer bloedgroepen kan vallen – het geheel kan verder ongestructureerd of naar sexe, ras, aardrijkskundige verspreiding, enz. gestructureerd zijn.

Een kralen ketting van onbepaalde, evt. oneindige, lengte – discreet, onbepaald, lineair gestructureerd – evenals de ketting van bepaalde lengte, verdeeld naar rangnummers of kleuren, die structuurloos of gestructureerd kunnen zijn geplaatst.

Een strook van onbepaalde, evt. oneindige lengte – continu, onbepaald, lineair gestructureerd – evenals de strook van bepaalde lengte segmentsgewijze gekleurd, in onsamenhangende delen, die structuurloos of gestructureerd verdeeld zijn.



fig. 33

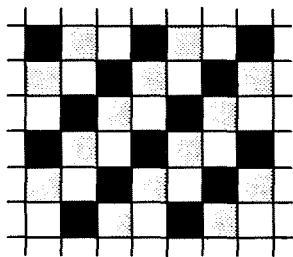


fig. 34

Een muur of tegelvloer – continu van onbepaalde afmetingen, gestructureerd in een patroon van bakstenen resp. tegels – verdeeld naar kleur, glans, tekening, materiaal van baksteen resp. tegel – onsamenhangende delen, gestructureerd of ongestructureerd verdeeld.

De lucht – continu, onbepaald, ongestructureerd geheel – verdeeld in gassen, zuurstof, stikstof, enz. – samenhangende delen, structuurloze verdeling.

De aardbodem — continu, onbepaald, ongestructureerd geheel — verdeeld naar bodemgebruik — onsamenvangende delen, structuurloze verdeling.

Boekdruk in Nederlandse taal — discreet, onbepaald, ongestructureerd geheel — verdeeld naar lettersymbolen — structuurloze verdeling.

De tijd — continu onbepaald geheel — verdeeld naar diverse oogmerken.

Opmerking: Alle voorbeelden zijn met een korreltje zout te nemen. Waar ik van ‘gestructureerd’ heb gesproken, is het best mogelijk, als het er niet op aankomt, structuur te verwaarlozen, en waar ik het ‘structuurloos’ bedoelde, juist structuren in te voeren. Van discreet naar continu zijn er overgangen: als de deeltjes zo klein worden, dat men geredelijk van ‘continu’ kan spreken. In een discreet geheel kan een ‘samenhang’ ook door buurschap worden opgebouwd.

Opmerking. In de meeste voorbeelden is een statische beschrijving gekozen: iets *is* verdeeld of wordt als zodanig beschouwd. Men leze echter de voorbeelden tevens in de zin ‘iets *wordt* verdeeld’. Voor sommige ligt dit heel erg voor de hand, bij de kralen in de pot, de loterij, het kleuren van stroken en vlakken; bij de laatste voorbeelden (lucht, aardbodem en druk) wellicht minder, al zijn ook hier situaties denkbaar met de nadruk op het ‘wordt’ i.p.v. het ‘is’.

5.4.5 *Geheel, deel en breuk*

Alleen in de aanhef van 5.4.2 kwam de breuk expliciet ter sprake, maar zowel in de algemene uiteenzetting als ook in de voorbeelden 5.4.3—4 was het uiteraard de bedoeling, aan het verband tussen deel en geheel een breuk te koppelen. Deel en geheel worden numeriek vergeleken volgens maatstaven, die in de diverse voorbeelden verschillen.

De vraag ‘hoeveel keer gaat een deel in ‘t geheel op?’ is alleen zinvol, als vaststaat wat voor delen als gelijkwaardig te beschouwen zijn. Het criterium kan zijn

aantal
of
waarde van zekere grootheid.

We komen hierop nog terug.

Ondanks de veelzijdige classificatie en de weelde van mogelijke voorbeelden, is de benadering van de breuk vanuit ‘deel-geheel’ niet alleen fenomenologisch, maar ook mathematisch veel te beperkt, aangezien die benadering alleen echte breuken oplevert. De traditionele rekendidactiek kent alleen deze benadering, en dan nog vernauwd tot iets van de status van het taartverdelen. Na het concrete taartverdelen — met alleen echte breuken — wordt meteen op het verdelen van abstract gegeven hoeveelheden en grootheidswaarden overgestapt; met willeurige beschikkingen als dat ‘ $\frac{1}{2}$ keer’ hetzelfde is als ‘ $\frac{1}{2}$ van’, en met rekenregels gaat het dan direct naar de breuk als rationaal getal. Sommige vernieuwers hebben hier nog de etappe van ‘breukoperator als inverse van de vermenigvuldigungsoperator’ ingeschakeld. Dit zou een vooruitgang kunnen zijn, ware het niet dat ook hier de oriënteringsbasis veel te smal is.

Algoritmisch ingestelde leerlingen leren het werken met breuken hoe dan ook; leerlingen die minder of geheel niet algoritmisch ingesteld zijn, leren het bij vallen en opstaan of in 't geheel niet. Er zijn er die na 1–2 jaar breukrekenen net de algoritmen beheersen, maar totaal niet weten wat breuken betekenen en wat je ermee doet, en anderen die zelfs niet de breuknamen kennen. De fenomenologische armoede van de instap lijkt me een belangrijke oorzaak van dit didactisch falen.

5.5 De breuk als vergelijker

5.5.1 *Vergelijken van concrete objecten*

In de traditionele didactiek wordt over 't hoofd gezien, dat de concreetheid van de breuk niet bij het breken van een geheel in delen eindigt. Door middel van breuken worden, zoals de taalkundige analyse in 5.3 aantoont, objecten met elkaar vergeleken, die van elkaar gescheiden zijn of als zodanig

ervaren, voorgesteld, gedacht

zijn of worden --

er zijn hier half zoveel vrouwen als mannen,
de bank is half zo hoog als de tafel,
de straat is $2\frac{1}{2}$ keer zo breed als de stoep,
Jan verdient de helft van wat Piet verdient,
koper is half zo zwaar als goud.

Dit vergelijken geschiedt t.a.v. zekere kenmerken,

direct of indirect.

Direct: men legt de te vergelijken objecten op elkaar of zo dicht naast elkaar of beschouwt ze anderszins als zodanig dat het kleinste deel van het grootste is, en brengt dan de breuk als vergelijker van concrete objecten terug tot de breuk als breker van een concreet object.

Indirect: men laat een derde object, een maatstaf, bemiddelen tussen de twee te vergelijken objecten, doordat men hem van het ene naar het andere transporteert of als getransporteerd beschouwt.

De voorbeelden van daarstraks laten een andere formulering toe:

het aantal vrouwen hier is de helft van het aantal mannen,
de hoogte van de bank is de helft van die van de tafel,
de breedte van de straat is $2\frac{1}{2}$ maal die van de stoep,
het inkomen van Jan is de helft van dat van Piet,
het (soortelijk) gewicht van koper is de helft van dat van goud.

Hier worden dus niet

objecten qua aantal of hoeveelheidswaarde

vergeleken, maar de

aantallen of hoeveelheidswaarden zelf.

Het lijkt een overbodige finesse, dit te onderscheiden, en inderdaad wordt in de ontoereikende fenomenologie van psychologisch onderzoek en in de traditionele didactiek erover heen gestapt. In onze fenomenologische analyse is die onderscheiding echter niet overbodig. Men dient zich ten volle te realiseren dat aan het vergelijken van aantallen en grootheidswaarden het vergelijken van objecten qua aantal en grootheidswaarden voorafgaat en er immanent in aanwezig blijft, althans aanwezig dient te blijven, willen de breuken meer zijn dan een formalisme.

5.5.2 *Breuk en grootheid*

We hebben al eerder uiteengezet, hoe dit verdelen in drie gelijke delen plaats kan vinden, bij kleine hoeveelheden op het oog, bij grote door afwisselend wegnemen van gelijken, of algoritmisch door deling als inverse van de vermenigvuldiging. Als de deling opgaat, komt er niets principieel nieuws. Gaat de deling niet op, dan rijst bij realistische problemen de vraag naar de verdeling van de rest. Indien deze verdeling praktisch mogelijk is, is het *mathematische* verdelingsprobleem en zijn relatie tot het *reële* verschoven. Het is niet meer een eindige verzameling, die verdeeld wordt, het model van de eindige verzameling past niet meer bij het reële verdelingsprobleem. Er worden bijv. niet zes — discrete — broden verdeeld, maar brood, in een hoeveelheid die willekeurig deelbaar wordt voorgesteld, waarbij dan nader omschreven is wanneer hoeveelheden elkaar kunnen vervangen, wanneer zij als 'gelijk' worden aangezien.

Het mathematisch model dat bij deze verdelingstaken past, is *grootheid*. In Hoofdstuk 1 kwam het al ter sprake, maar het verdient nog meer aandacht. Inmiddels herhalen we kort de *essentialia*.

Om in een systeem hoeveelheden een grootheid te constitueren is vereist:

een equivalentierelatie die de vervangbaarheid van objecten (bijv. hoeveelheden van zekere stof) door elkaar beschrijft en leidt tot *gelijkheid* in de grootheid,

een samenstellen van objecten (hoeveelheden), dat tot het *optellen* in de grootheid leidt,

de willekeurige beschikbaarheid van objecten van gegeven grootheidswaarde (d.w.z. in elke equivalentieklas) die het *onbeperkt uitvoeren van de optelling* en dus ook de vermenigvuldiging met natuurlijke getallen mogelijk maakt,

de mogelijkheid van deling van een object in willekeurig veel elkaar vervangende deelobjecten, die tot *deling door natuurlijke getallen leidt*.

De *vermenigvuldiging met natuurlijke getallen* is hierbij als herhaalde optelling een afgeleide bewerking; daarmee wordt 'n-de deel van' de inverse operatie

van 'n keer'. Samenstellen van vermenigvuldiging en deling leidt tot *vermenigvuldiging met rationale getallen*.

Als het ons alleen om de wiskunde te doen was, hadden we, om te zeggen wat een grootheid is, met eisen t.a.v. optelling en deling kunnen volstaan. In een *fenomenologische* benadering moeten we met de objecten beginnen en door een equivalentie-relatie klassen vormen, die pas de grootheidswaarden voorstellen. De onbeperkte beschikbaarheid van zulke objecten in een equivalentieklasse is hierbij inderdaad een onvermijdelijke vereiste. Ik beklemtoon dit hier bij de breuken, omdat uit gebrekkig fenomenologisch inzicht in deze materie een gebrekkige breuken-didactiek is voortgevloeid.

In onze uiteenzetting valt een asymmetrie tussen vermenigvuldiging en deling op. De operator 'n-de deel van' laat zich namelijk niet alleen op de grootheid, maar reeds op de objecten toepassen. 'n-de deel' is dan werkelijk concreet deel van een gegeven iets. Daarentegen laat 'n-keer' zich niet met het gegeven object alleen realiseren, men moet er andere, geheel willekeurig bij kunnen halen, en in feite erbij halen, terwijl men met 'n-de deel van' binnen het gegevene kan blijven en alleen de *keuze* van het deel willekeurig is.

Deze asymmetrie is zo opvallend, dat geen fenomenologische analyse eraan voorbij kan gaan, en geen breukendidactiek over de resultaten van zulk een analyse heen zou mogen stappen. Juist op dit punt blijkt de breukendidactiek echter defectief te zijn, en het ligt voor de hand, de oorzaak in een defectieve fenomenologische analyse te zoeken. De breuk als deel van iets is van zulk een overtuigende en meeslepende concreetheid, dat men met deze fenomenologische instap genoeg neemt en al het andere vergeet. In alle voorbeelden, gevisualiseerd of niet, beperkt men zich tot het breken. Het *n*-de deel wordt uitsluitend *binnen* het geheel gezien of verbeeld — iets dat met 'n-keer' principieel onmogelijk zou zijn. Fenomenologisch leidt deze instap tot de echte breuken (< 1). Bij de gemengde breuken (> 1) zou dan de ontoereikendheid van deze instap moeten blijken, maar als men zover is, is de mathematisering van de breuk en de breukoperaties al in volle gang, zo niet al voltooid: de vereiste uitbreiding tot gemengde breuken wordt dan in de stroom van de mathematisering eenvoudig meegesleept of puur formeel, zonder enige fenomenologische binding, voltrokken. Uitdrukkingen als $1\frac{1}{2}$ staan alleen op het papier: ze hebben geen enkele binding meer met een realiteit, die bij de echte breuk nog wel zichtbaar werd gemaakt.

'De breuk als breker' is niet alleen een te smalle, hij is ook een eenzijdige start. Het is vreemd, dat bij alle vernieuwingspogingen hierin zo weinig verandering is gebracht. In moderne fenomenologische analyses is het begrip grootheid met zorgvuldigheid benaderd; ook de rol, die equivalenties en breuken hier spelen, is erkend, maar nergens is aan deze fenomenologische analyse een didactische wending gegeven, in 't bijzonder heeft men zich te weinig gerealiseerd, dat de didactiek van de grootheden niet op die van de breuken kan voortbouwen, dat veeleer voor een didactisch fenomenologische benadering van de breuken juist de grootheden vereist zijn. 'De breuk als breker' kan met een zeer beperkt equivalentiebegrif genoeg nemen; het is daar voldoende iets 'in *n*

gelijke delen' te kunnen delen. Maar in de didactische werkelijkheid heeft men aan een wijder werkzaam equivalentiebegrip behoefte en aan de onbeperkte beschikbaarheid van objecten in elke equivalentieklasse. Hiervan blijkt tot op heden te weinig in de breukendidactiek en in 't bijzonder in de keuze van didactische modellen.

5.6 Aspecten van de breuk

We vatten het in 5.4.5 uiteengezette formeel samen en vullen het aan:
Naar gelang van de mentale nadruk op het

handelen of constateren,

verschijnt de breuk

in een *operator* of in een *relatie*

— door midden delen, halveren versus 'half zo groot als'.

De breukoperator of de breukrelatie kan werken op resp. onderling relateren,

objecten

t.a.v. zekere kenmerken (aantal, lengte, salaris, gewicht,...) — de helft van de stok, de bank is half zo hoog als de tafel, enz. — of

hoeveelheids- of groothedswaarden

— deze lengte is de helft van die, dit gewicht is $2\frac{1}{2}$ keer dat.

Zijn de te vergelijken objecten

deel en geheel

of als zodanig beschouwd, dan is sprake van de breuk in de

breekoperator of *breekrelatie*.

Staan de te vergelijken objecten

los van elkaar

dan spreken we liever van de breuk in de

*verhoudingsrelatie*¹⁾

Gaat het wederom om hoeveelheden en grootheden, dan treedt de breuk in de

verhoudingsoperator

op, die een aantal lengte, gewicht in andere omzet.

Van de verhoudingsrelatie, die tussen objecten geconstateerd wordt, en de verhoudingsoperator, die op hoeveelheds- en groothedswaarden opereert, komt men via een overgangsvorm, de breuk in de

transformator,

zoals in ‘op halve grootte afbeelden’, ‘op $2\frac{1}{2}$ maal zijn lengte uitrekken — de operatie wordt

op het object zelf

toegepast, echter niet bij wijze van breken, maar

afbeeldende of vervormende.

We verlaten nu stapsgewijze de concrete sfeer rond het optreden van de breuk en komen tot de

breuk als maatgetal

bij een eenheid — $2\frac{1}{2}$ in: $2\frac{1}{2}$ kg, $2\frac{1}{2}$ m, $2\frac{1}{2}$ cc, $2\frac{1}{2}$ fles —, waarbij ook hoort $\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, ...

op de getallenlijn,

de breukoperator als

inverse van de vermenigvuldigingsoperator,

en de

breuk als rationaal getal.

Zoals eerder opgemerkt introduceert de traditionele didactiek de breuk alleen in de breukoperator en stapt van hier direct naar het einde van die reeks, de breuk als rationaal getal, over.

5.7 De breuk in een operator

Onder de drie in 5.5 opgesomde aspecten komt drie keer een operatoraspect voor

de breukoperator

die *concrete objecten* in gelijkwaardige delen zegt te *breken*,

de verhoudingsoperator

die *grootheidswaarden in verhouding* tot elkaar zet,

de formeel gedefinieerde breukoperator

in het *getallengebied*.

De verschillen lijken gezochte finesses, zijn het didactisch echter niet — het medium waarin de breukoperator werkzaam is, wordt stapsgewijs van zijn concreetheid beroofd. Aanvankelijk werkt hij op de concreet geciteerde objecten, terwijl hun grootheidsaspecten factoren zijn die de eerlijkheid van de verdelingsprocedure controleren, dan zijn de grootheden zelf object, terwijl over de concrete objecten, die met die grootheden gemeten worden, gezwegen of anderszins heengestapt wordt — een merkwaardige tussenvorm: de transformator,

die als het ware de substantie behoudt, maar de grootheidswaarde evenredig verandert. Tenslotte speelt de breukoperator in het pure getallengebied, om in de behoefte aan een omkering van vermenigvuldigingsoperatoren te voorzien.

In de verhoudingsrelatie is de verhoudingsoperator als het ware gesteld van een bewerking tot de relatie tussen voorwerp en uitkomst van de bewerking. De breuk als maatgetal, als stip op de getallenlijn en uiteindelijk als rationaal getal is het gevolg van het toepassen van de breukoperator op een eenheid. In alle aspecten van de breuk werkt het operatoraspect door. Het moet zeker in de didactiek van de breuken overeenkomstig gewaardeerd worden, en in moderne ontwerpen geschiedt dit ook. Dit gaat dan jammer genoeg met misvattingen gepaard, tot uiting komende in formuleringen zoals de 'breuk als operator'. Natuurlijk is zulk een opvatting logisch mogelijk, evenals getallen en vectoren als operatoren opgevat kunnen worden — op welke didactische klippen deze logica schipbreuk lijdt, heb ik eerder²) uiteengezet. Zowel de interpretatie van de breuk als operator als ook de hiermee verbondene terminologie is onhoudbaar. Men heeft echt behoefte ook aan de breuk als getal, en die mag dan ontstaan door de breukoperator op een eenheid toe te passen. Men moet dus wel degelijk in de operator de breukoperatie van de breuk onderscheiden. De operator met een breuk *erin* heeft geen behoefte aan een dubbelganger van de breuk als operator.

Nu is het een feit dat het operatoraspect bij breuken belangrijk is, veel belangrijker dan bij de natuurlijke getallen. Bij de constitutie van het mentaal object 'natuurlijk getal' is het samengroeien van cardinale en ordinale wortel beslissend, en pas als de natuurlijke getallen geconstitueerd zijn, wordt er met ze geopeerd en worden uit de getallen operatoren zoals 'drie meer dan', 'drie minder dan', 'drie keer (zoveel als)' gevormd.

Bij de breuken daarentegen staat het operatorische in het begin, en dit feit rechtvaardigt een didactiek, die zich — overdrijvend — operatoropvatting noemt. Een operatie die men al bij de gehele getallen kent, is het verdelen. Wordt een eindige verzameling gelijksoortige objecten — bijvoorbeeld onder drie personen — in drie gelijke delen verdeeld, dan is elk deel een derde deel, d.w.z. een derde van het geheel — het is een vreemde terminologie, waarvan ik de troebele bron in 5.3.9 heb aangewezen, maar dit curieuze gebruik van het rangtelwoord is ons zo ingeslepen, dat we er niets merkwaardigs meer aan vinden, laat staan ervan steigeren, en dat we ons niet eens afvragen wat er aan de hand is als jaar aan jaar cohorten van schoolkinderen er niet inkomen.

5.8 Modellen voor de verhoudingsrelatie (fig. 35–38)

Het universele model voor grootheid is 'positief getal', gevisualiseerd op de getallenlijn als 'lengte', maar ook andere modellen zijn, speciaal in verband met breuken, didactisch gebruikelijk: oppervlakte, volume, gewicht, tijd — om er enkele te noemen. Lengtes en oppervlaktes hebben hun eigen visualiserings; volumes kunnen met enige voorzichtigheid grafisch gevisualiseerd worden, maar echte ruimtelijke visualiserings die tevens 'palpabiliserings' kunnen zijn, lijken meest aan-

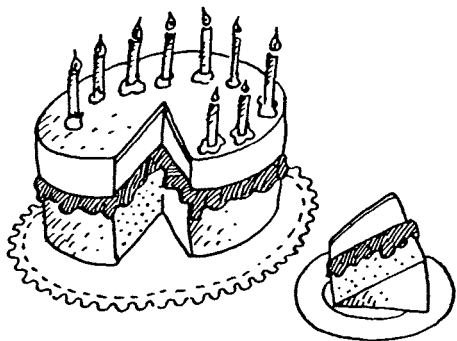


fig. 35

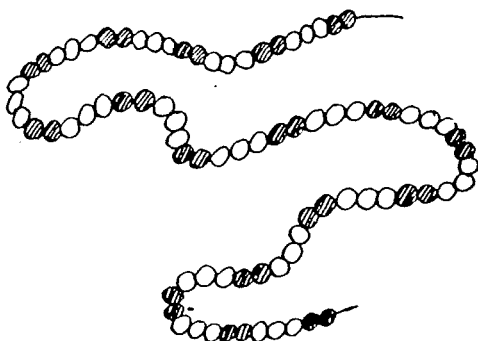


fig. 36

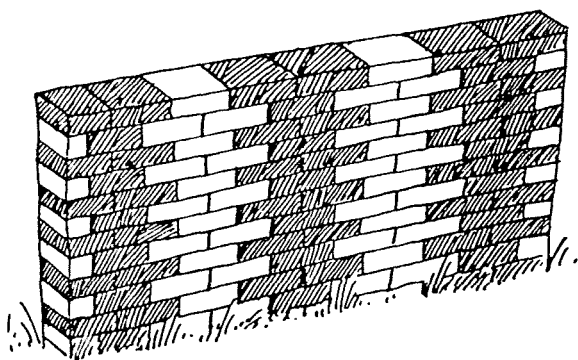


fig. 37

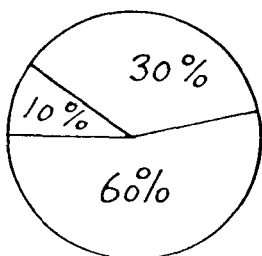


fig. 38

gewezen. Gewichten kunnen lineair gevisualiseerd worden, op de schaal van een veerbalans of op de arm van een ouderwetse unster waar een loopgewicht verplaatst wordt, de tijd op de tijdas, als afrolsel als het ware van de wijzerplaat van de klok. Elk van deze modellen verdient hier onze aandacht voorzover het voor de verhoudingsrelatie ingezet kan worden.

Men mist in deze lijst het klassieke model voor breuken, de taartverdeling en ook meer recente als breukendozen ontbreken hier. In de didactische praktijk mag men ze zeker niet overslaan. De taartverdeling is de voorloper op algemenere sectorverdelingen van de cirkel, die in statistische sectordiagrammen ruime toepassing vinden en die voor de roulettes en kanstollen worden gebruikt. Als didactisch model van breuken zijn ze vooral effectief als diverse sectoren bij elkaar geraapt moeten worden, om uitspraken te doen van het type 'm delen van de n' of 'p delen dit tegen q delen dat'. Op een draaiende tol p delen van de ene kleur te mengen met q delen van een andere om nuances van mengkleuren te krijgen, is illustratief voor mengverhoudingen. Evenzo kan men vloeistoffen van verschillende smaak met elkaar in gegeven verhouding mengen en het mengsel in een sectordiagram illustreren. Nog fraaier zijn kralensnoeren, muren en andere patronen, waarin kralen, stenen enz. van verschillende kleur of vorm elkaar regelmatig afwisselen in een bepaalde breukverhouding — drie witte op twee zwarte — zonder dat aan de afmeting van het geheel grenzen zijn gesteld. In alle gevallen moeten hierbij, als het op breuken aankomt, de afzonderlijke aandelen in breuken worden uitgedrukt. Ook de breukendoos kan fraai voor het uitleggen van histogrammen worden gebruikt, hoewel ik moet zeggen dat ik nog nergens gezien heb dat zo iets werkelijk geschiedt.

Wie deze traditionele modellen gebruikt, moet wel van hun ontoereikendheid doordrongen zijn. Hij mag zich door hun grove concreetheid er niet toe laten verleiden, op deze te smalle instap te vertrouwen. De taartverdeling vindt binnen één taart plaats; bij de cirkelverdeling is de gehele cirkel het al omvattende, dat in sectoren wordt verdeeld. De wijzerplaat is in dit geval nog soepeler te hanteren; door de relatie tot de tijd kan de beperking tot een uur of een halve dag doorbroken, de plaat als het ware op de tijdas afgerold worden. De breukendoos is liefst nog beperkter, niet alleen naar boven toe, maar ook wat mogelijke delen aangaat. De verdelingsmogelijkheden van een getekende rechthoek zijn vergeleken bij die van een breukendoos uitgebreider, maar zo lang de rechthoek alleen maar onderverdeeld wordt, is hij ook weer niet meer dan een rigide blokkendoos.

Voor het visualiseren van grootheden ten behoeve van de breuken komen in eerste instantie lengtes en oppervlaktes in aanmerking. Lengtes ontstaan uit rechte lange voorwerpen door middel van de congruentie als de equivalentierelatie; laat men willekeurige lange voorwerpen toe dan moeten de congruenties met breek- en maaktransformaties of met flexies worden aangevuld. Oppervlaktes ontstaan uit vlakke voorwerpen door de equivalentierelatie van oppervlaktegelijkheid, die we nog nader moeten behandelen; ook hier doen congruenties en breek- en maaktransformaties bij het tot stand brengen van de equivalentieklasse mee. Ook bij de taartverdeling worden cirkelsectoren volgens congruentie

vergeleken, die dan oppervlakte- of volume-gelijkheid moet garanderen. Lijnstukken zijn de eenvoudigste visuele representanten van grootheden. Twee groothedswaarden, die in breukverhouding tot elkaar staan, zijn het eenvoudigste te visualiseren door twee lijnstukken, die in dezelfde verhouding staan (fig. 39); om het zien van de breukverhouding te vergemakkelijken, kunnen relevante onderdelen gemarkeerd zijn; bij voorkeur vertoont men de representerende lijnstukken parallel. Maar dit zal zeker niet de enige manier zijn. Twee bomen naast-elkaar (fig. 40), waarvan de ene in een breukverhouding tot de ander staat, die door zelf meten of door hulpschalen geconstateerd kan worden; twee boeken met diktes in breukverhouding; leeftijden op de tijdas, gewichten op de schaal van de veerbalans zijn andere voorbeelden. Het zijn voorstellingen, waarin veelal meer dan alleen één lineaire afmeting te zien valt en waar de andere afmetingen eveneens een onderwerp van discussie kunnen zijn – dus niet zulke magere sprietten als pure lengtes.



fig. 39

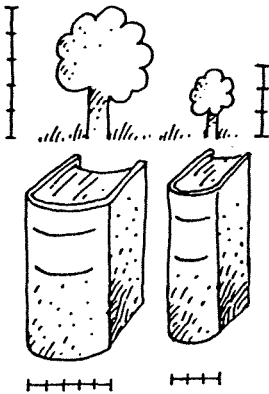


fig. 40

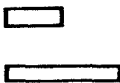


fig. 41

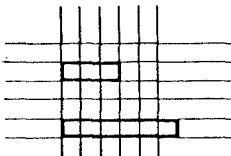


fig. 42

Een stilisering van wat ik niet zo magere lengtes heb genoemd, zijn lage rechthoeken, stroken, in één dimensie overeenstemmend, in de andere variabel (fig. 41). Wil men dit systematiseren, en het vergelijken van de oppervlakten vergemakkelijken, dan tekent men deze stroken op een ruitjespatroon als ondergrond (fig. 42), waar dan alleen het aantal ruitjes geteld behoeft te worden. Maar ook dit moet weer niet de enige manier zijn; men moet ook wel degelijk toelaten dat de plaatjes elkaar overlappen of de ruitjesstructuur doorbreken.

In al deze gevallen — ik beklemtoon het nog eens — kunnen de meetkundige objectparen — lijnstukken, vlakdelen — voor zichzelf staan om breuken te belichamen, maar ze kunnen evenzeer anderssoortige objectparen — twee bomen, twee boeken, twee zware lichamen, twee tijdsintervallen — interpreteren, die in hun breukverhouding begrepen moeten worden. Hierbij kunnen zeer concrete koppelingen optreden: gewicht en prijs op de winkelbalans, het gewicht in de schaal en de lengte op de weegbalk of op de schaal van unster of veerbalans.

5.9 Modellen voor de verhoudingsoperator

In de voor de hand liggende meetkundige voorstelling wordt ' $\frac{3}{5}$ van' door twee figuren geïllustreerd, waarvan de ene volgens lengte of oppervlakte $\frac{3}{5}$ van de andere is. Door deze voorstelling wordt ' $\frac{3}{5}$ van' slechts onvolmaakt als operator weergegeven. Het is alsof men een functie niet door een *grafiek*, maar door een *punt van de grafiek* illustreerde. Hoewel dit bij een lineaire functie toereikend is, bevredigt het toch niet. Wil men de werking van ' $\frac{3}{5}$ van' als het ware met één slag over het hele toepassingsdomein suggereren, dan zijn andere middelen vereist. Bijzonder populair is tegenwoordig hiervoor het beeld van de machine — in 't onderhavige geval zou het de ' $\frac{3}{5}$ van' machine zijn. Dit is dan een meestal door een conventionele tekening geïllustreerde verbale suggestie. De in de machine ingegeven grootheden kunnen al door puur numerieke data zijn vervangen, maar ze kunnen ook meetkundig voorgesteld zijn. De machine zelf bezit daarentegen geen meetkundige of anderssoortige structuur, het is een 'black box'. Bij leerboekauteurs, onderwijzenden noch leerlingen heb ik ooit een ander dan puur verbaal gebruik van die machines kunnen constateren, ze suggereren geen relatie tot concreet verwezenlijkte breukoperaties. Ik heb de indruk dat ze hun oorsprong te danken hebben aan pogingen om — in plaats van functies als mentale objecten — het functiebegrip in te voeren; de valse concretisering, die bij zulke pogingen onvermijdelijk zijn, hebben hier de vorm van een schijnconcretisering, een verbale suggestie, aangenomen.

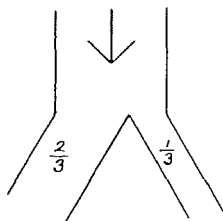


fig. 43

Veel meer concreetheid wordt door het stroomverdelingsbeeld van breuken belichaamd. (Fig. 43.) Weliswaar bestaat de grootheid, die daar in- en uitstroomt, alleen in de verbeelding – zij is als het ware door een onbepaalde tijd vervangen –, maar het vertakkingsbeeld kan zelfs meetkundig nauwkeurig het breukdeel (en het resterende deel) weergeven.

Welk model men ook kiest, men houdt de vrijheid, het willekeurig te interpreteren, de stroomgrootheid bijvoorbeeld als lengte, gewicht, geldwaarde.

5.10 Afbeeldingsmodellen voor de verhoudingsoperator

Men krijgt een volledig meetkundig en bovendien globaal beeld van de breukoperaties als men ze echt als meetkundige operatie opvat. Hiervoor zijn, als men zich tot rechten beperkt, een aantal mogelijkheden, alle affiene afbeeldingen (fig. 44):

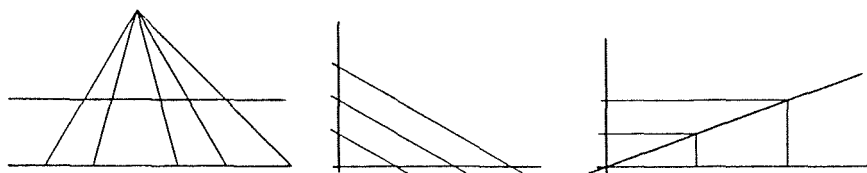


fig. 44

centrale projectie van een rechte op een evenwijdige (lampschaduw)

parallelprojectie van een rechte op een andere (zonschaduw)

het samenstel van twee parallelprojecties (zoals gebruikelijk bij de grafische voorstelling van de lineaire functie).

Dat men de meetkundige constructie in details moet uitvoeren, heeft zijn voordelen en zijn nadelen – men maakt zich alle details duidelijk, maar het procédé is ook omslachtig.

Fraaier is het gebruik van

vlakken – i.p.v. rechten – als projectietaferelen.

De detailconstructies zijn hier moeilijk door te voeren, maar kunnen ook gemist worden, als de taferelen zo gedifferentieerd zijn, dat duidelijk is welke punten als origineel en beeld bij elkaar horen. Ik denk hierbij dus aan twee plaatjes naast elkaar (fig. 45) waarvan het ene een vergroting of verkleining van het andere is, zodat dezelfde breukverhouding in alle details geconstateerd kan worden. Ook driedimensionaal laat zich dit met maquettes op verschillende schaal, uitvoeren. Een gevaar waarop men bij de twee- en driedimensionale voorstelling attent moet zijn, is de mogelijke verwarring van lengte-, oppervlakte- en inhoudsverhouding. Desniettemin kan men, ook als het op de lengtes aankomt, terwille van de grotere globale zeggingskracht vlakdelen als expressie-middelen prefereren; om dan

toch de nadruk op de lengtes te leggen, kan men zich van twee kunstgrepen bedienen:

men neemt als vlakdelen smalle stroken die alleen volgens de lengte getransformeerd worden, terwijl men plaatsen door ornamenten vastlegt;

of men neemt echte vlakdelen, transformeert in alle richtingen met dezelfde breukverhouding, maar brengt op die vlakdelen tekeningen aan die ééndimensionaliteit suggereren, zoals wormen, slangen, zwepen, brilmonturen.



fig. 45

5.11 Mathematische theorie van de rationale getallen vanuit de verhoudings-operator

Het is wel bekend hoe men mathematisch de rationale getallen invoert vanuit de natuurlijke (of gehele) getallen. Men beschouwt paren – breuken – met niet verdwijnend tweede lid en schrijft een equivalentie-relatie

$$\lceil m, n \rceil \sim \lceil m_1, n_1 \rceil \leftrightarrow mn_1 = m_1n$$

voor; rationale getallen zijn dan de equivalentieklassen van deze paren. Voor de paren en overeenkomstig voor de equivalentieklassen definieert men verder de bewerkingen op doelmatige wijze.

Ik schets hier hoe het loopt als men de vermenigvuldigingsoperator als uitgangspunt kiest en daarbij niet een a posteriori axiomatische, maar een a priori genetische weg volgt. De breuken worden niet, hoe dan ook, gedefinieerd, maar ontdekt en beschreven.

We beschouwen een grootheid G en in G de vermenigvuldigingen met natuurlijke getallen ($\neq 0$), die een verzameling M vormen, met als bewerking binnen M de samenstelling. M is dan een

commutatieve halfgroep
met een één
en schrapregel: $a \circ x = a \circ y \rightarrow x = y$.

In 't algemeen kan men zulke halfgroepen tot groepen uitbreiden, hetgeen niet moeilijk te bewijzen valt.

In 't onderhavige geval wordt het vergemakkelijkt doordat de elementen van de halfgroep als vermenigvuldigingen in een grootheid G gegeven zijn. Ik zet de diverse stappen achter elkaar (kleine latijnse letters staan voor natuurlijke getallen $\neq 0$):

- (1) k -maal is een 1-1-afbeelding van G op zichzelf.
- (2) De inverse van k -maal heet ' k -de deel van'.
- (3) De ' k -maal' vormen een verzameling M , de ' k -de deel van' een verzameling M^{-1} .
- (4) $(k\text{-maal}) \circ (m\text{-maal}) = km\text{-maal}$.
- (5) M is gesloten en commutatief onder samenstelling.
- (6) Gegeven een verzameling V en 1-1-afbeelding ϕ, ψ van V op zichzelf. Uit

$$\phi \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \phi^{-1} = \text{identiteit}$$

volgt:

Als ϕ met ψ commuteert dan ook ϕ met ψ^{-1} en ϕ^{-1} met ψ^{-1} ; bovendien $(\phi \circ \psi)^{-1} = \psi^{-1} \circ \phi^{-1}$.

- (7) Toepassing van (6) op G i.p.v. V en twee vermenigvuldigingen in G i.p.v. ϕ, ψ leidt tot

$M \cup M^{-1}$ is met de samenstelling als operatie commutatief.

- (8) Uit het laatste deel van (6) volgt:

$$(n\text{-de deel van}) \circ (l\text{-de deel van}) = (nl\text{-de deel van}).$$

- (9) Men definieert

$$\left(\frac{m}{n} \text{ van}\right) = (m\text{-maal}) \circ (n\text{-de deel van}),$$

hetgeen volgens (7) ook geschreven kan worden als

$$= (n\text{-de deel van}) \circ (m\text{-maal}).$$

Hierbij is $\frac{m}{n}$ nog niet als symbool voor een rationaal getal bedoeld, maar als een willekeurig, uit m en n samengesteld symbool.

- (10) De vermenigvuldigingsregel

$$\left(\frac{m}{n} \text{ van}\right) \circ \left(\frac{k}{l} \text{ van}\right) = \left(\frac{mk}{nl} \text{ van}\right)$$

wordt uit (9), (8), (7) afgeleid.

- (11) $\left(\frac{k}{k} \text{ van}\right) = 1\text{-maal}$

volgt uit (8) en (2).

- (12) De schrapregel

$$\frac{mk}{nk} \text{ van} = \frac{m}{n} \text{ van}$$

volgt uit (10) en (11). Hiermee laten zich de rationale getallen als klassen van breuken invoeren.

- (13) De $\left(\frac{m}{n} \text{ van}\right)$ vormen een verzameling N , die volgens (11) gesloten en commutatief is.

- (14) $\left(\frac{m}{n} \text{ van}\right)$ is een 1-1-afbeelding van G op zichzelf, met $\left(\frac{n}{m} \text{ van}\right)$ als inverse.

- (15) N is een commutatieve groep van 1-1-afbeeldingen van G op zichzelf.

Het lijkt schrikwekkend gecompliceerd, en daarbij is van de rationale getallen alleen maar hun optreden in vermenigvuldigingsoperatoren verantwoord; hun optelling ontbreekt hier nog; ze zijn ook niet uit de operatorformulering losge-

maakt. De voorstaande sequentie moet echter niet zo worden opgevat, dat ook maar één van de beschreven stappen geëxpliciteerd wordt, tenzij paradigmatisch gespecialiseerd. Wanneer we nader analyseren, wat in deze gedachtengang didactisch is vereist, dan komen we tot de volgende sequentie:

het mentaal object 1-1-afbeelding, zij het dan gespecialiseerd op rekkingen en inkrimpingen van de getallenstraal,

de mentale activiteit van het samenstellen en inverteren van afbeeldingen, het herkennen van ' k -keer' (voor paradigmatische k) als 1-1-afbeelding en het identificeren van zekere afbeeldingen als ' k -keer',

het zien en kunnen identificeren van de inverse van ' k -keer' als ' k -de deel van' of ' $\frac{1}{k}$ van' (als zodanig bekend van delingsproblemen),

het mentaal samenstellen van ' k -keer' en ' m -keer' (voor paradigmatische k en m) en het herkennen van het samenstel als ' km -keer',

het mentaal samenstellen van ' n -de deel van' en ' l -de deel van' (voor paradigmatische n en l) en het herkennen van het samenstel als ' nl -de deel van',

het als definitie stellen en als afbeelding herkennen van $\left(\frac{m}{n} \text{ van}\right)$ als samenstel van (m -keer) en (n -de deel van) in willekeurige volgorde,

het mentaal samenstellen van $\left(\frac{m}{n} \text{ van}\right)$ en $\left(\frac{k}{l} \text{ van}\right)$ en het vatten van de vermenigvuldigingsregel,

het vatten van de schrapregels,

het inverteren van $\left(\frac{m}{n} \text{ van}\right)$ als $\left(\frac{n}{m} \text{ van}\right)$.

De enige stappen uit de mathematische analyse, die in deze denkbeeldige didactische sequentie niet verschijnen, zijn die waarbij van zekere paren van afbeeldingen de commutativiteit geconstateerd wordt. In de meeste gevallen is deze eigenschap zo vanzelfsprekend, dat enige explicitering alleen verwarring kan stichten. Het enige geval, waarin deze explicitering vereist is en dus in de lijst is opgenomen, is de commutativiteit van (m -keer) en (n -de deel van).

Misschien wekt het verbazing dat in de mathematische analyse de inverse van ' m -keer' niet direct als ' $\frac{1}{m}$ keer' i.p.v. ' $\frac{1}{m}$ van' is vernoemd; in een mathematische opzet is immers elke vrijheid van nomenclatuur toegestaan. Het is geschied omdat — zoals tussen haakjes gezegd — de inverse van ' m -keer' met het eerder bekende en aanschouwelijk gewortelde ' m -de deel van' vereenzelvigd moet worden en omdat voor een etikettering van deze inverse met ' $\frac{1}{m}$ keer' een motiveering vereist is, die zorgvuldig moet worden voorbereid.

De voorafgaande opzet kan moeilijk bij die van de invoering van rationale getallen als equivalentieklassen van getallenparen worden vergeleken; de opzet met operatoren volgt een didactische sequentie, terwijl die met equivalentie-klassen de tot slot verworven vaardigheid formeel verantwoordt.

In welke mate is nu de boven beschreven en mathematisch verantwoorde sequentie realiseerbaar? Wel, die vraag is slecht geformuleerd. In feite moet deze sequentie in elke didactiek van de breuken aanwezig zijn; onze didactische sequentie is veeleer een check-list. Het eigenlijke probleem is dat deze sequentie veel te mager is. Alleen volgens deze sequentie opereren, zou een door misplaatst streven naar methoden-reinheid geïnspireerd hobbyisme zijn. De sequentie is te mager, haar basis te smal. Het is een marcheren met oogkleppen, die zoals zal blijken, toch niet voldoende bescherming tegen storingen garanderen.

De mathematische en de didactische sequentie beginnen bij afbeeldingen (vermenigvuldigen) in een grootheid. Deze grootheid moet op de een of andere wijze gespecificeerd zijn en de meest voor de hand liggende specificatie is lengte, gevisualiseerd op de aan de kinderen — naar we mogen veronderstellen — welbekende getallenstraal (of getallenlijn). De vermenigvuldiging met natuurlijke getallen als vermenigvuldigers zijn daar inderdaad duidelijk herkenbaar, evenals hun producten en inversen. De intuïtieve herkenbaarheid is echter niet toereikend; voor de communicatie is verwoording vereist, die in den beginne wel demonstratief van aard mag zijn, maar op den duur belangrijk verfijnd moet worden door middel van relatieve en functionele taalmiddelen³). Een stel pijlen van x (variabel) naar mx blijft als aanduiding van (m -maal) nog te zeer in de demonstratieve sfeer. Nog meer verfijnde taalkundige middelen zijn vereist, bij voorbeeld

een punt met A aanduiden,

zijn beeld bij ' m -maal' door mA ,

zijn beeld bij $\left(\frac{1}{n} \text{ van}\right)$ door $\frac{1}{n}A$,

zijn beeld bij $\left(\frac{m}{n} \text{ van}\right)$ door $\frac{m}{n}A$,

dus positief rationale schalen op de getallenstraal uitzetten en in onderling verband brengen.

Dit zou een zeer doelmatige detail-oefening kunnen zijn, ware het niet dat de getallenstraal de kinderen al bekend is als oneindige liniaal, waarop de natuurlijke getallen gehuisvest zijn, en misschien al door interpolatie enkele breuken. Deze aanwezigheid laat zich niet verdonkeremanen, ze wordt zelfs gesystematiseerd: door de operatie $\left(\frac{1}{m} \text{ van}\right)$ op de op de getallenstraal reeds aanwezig

geachte natuurlijke getallen toe te passen ontstaan de rationale getallen op de getallenstraal. Dit zou niet hinderen als het in dit verband niet te vroeg was.

De rationale getallen vervullen nu een dubbele functie: als getallen, gehuisvest op de getallenlijn en in de verhoudingsoperatoren. Wel, zoiets is tenslotte onvermijdelijk en op zeker ogenblik *moet* deze consequentie aanvaard en bewust gemaakt worden; maar het ogenblik *moet* dan ook zo gekozen kunnen worden, dat de consequentie bewust gemaakt *kan* worden, dat de dubbele rol van de rationale getallen goed en zonder storing gespeeld kan worden.

Maar dit is niet het voornaamste didactische bezwaar tegen de magere didactische sequentie. Niet voor niets heb ik de breuken op een breed fenomenologisch front laten optrekken, maar van deze fenomenologische weelde moet dan ook worden geprofiteerd. Die stappen, die ik in de mathematische sequentie heb uitgezet, moeten niet in abstracto, maar in een gevarieerde context worden gedaan; zelfs als ze één keer paradigmatisch genomen kunnen worden, mag men niet verwachten, dat de *didactische* sequentie waarin ik de *mathematische* didactisch trachtte te verwezenlijken, de gewenste paradigma's vanzelf omvat.

Ik voeg er nog aan toe, dat naast de didactische verwezenlijking van de mathematische sequentie nog vereist is onder te brengen

de optelling en aftrekking van breuken,

de losmaking van de breuk uit de verhoudingsoperator,

de vervanging van ' $\frac{m}{n}$ van' door ' $\frac{m}{n}$ maal'.

De algoritmisering en formalisering van het breukrekenen laat ik dan nog onbesproken.

Ik schets nu een rijke didactische sequentie voor het breukrekenen.

5.12–5.23 RIJKE DIDACTISCHE SEQUENTIE VOOR HET BREUKREKENEN

5.12 Acht flessen bier onder drie personen eerlijk verdeeld — een 10-jarig meisje reageerde erop met een staartdeling op te zetten en me dan te verwijten, dat ik haar een som gaf, 'die niet opging'. Op mijn excuus 'ze hebben het toch maar eerlijk verdeeld' reageerde ze alsof ze uit een droom wakker werd geschud — er waren ineens meer dingen tussen hemel en aarde dan waaromtrent haar rekenonderwijs wist.

Zij tekende schetsmatig acht flessen naast elkaar en deelde elke in drie delen, wees aan elke persoon acht derden toe (zij kende het woord nog niet), en wel, omdat dit voor het verdere verloop vereist was, aan *A* de meest linkse, aan *C* de meest rechtse en aan *B* de overblijvende middenin.

Mogelijk zullen er leerlingen zijn die de onderste derden van elke fles aan *A*, de middelste aan *B*, de bovenste aan *C* toewijzen. Kan het nog anders? — luidt de vraag dan, en men laat de kinderen een grote variëteit van oplossingen opsporen. (Er zijn er, van naamsverwisselingen afgezien, 280, maar die allemaal te vinden is niet de bedoeling van de vraag.)

Hetzelfde vraagstuk met andere getallen. Speciaal instructief is naast elkaar te plaatsen de verdeling van

24 flessen onder 5 personen.
 26 flessen onder 5 personen.

De leerlingen leren in een visuele context

ten behoeve van een m -deling, gehelen in m -den omzetten (voor kleine m),
 via additieve splitsingen van k in $k_1 + k_2 + \dots + k_i$ additieve splitsingen van
 $\frac{k}{m}$ in $\frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} + \dots + \frac{k_i}{m}$ te verkrijgen,
 in 't bijzonder het afsplitsen van gehelen te oefenen.

Hierbij wordt aanvankelijk de notatie k m -den gebruikt en later tot de notatie
 $\frac{k}{m}$ overgestapt. Bij afsplitsing van gehelen, aanvankelijk notaties zoals $1 + 1 + \frac{2}{3}$,
 $2 + \frac{2}{3}$, tenslotte ook $2\frac{2}{3}$.
 Het doel is

optelling, aftrekking en orderrelatie van $\mathbf{N}$ isomorf over te brengen op
 $\frac{1}{m} \mathbf{N} \left(x \rightarrow \frac{x}{m} \right)$.

Bij loslating van de visuele binding kan dit door tafels zoals

0	1	2	3
$\frac{0}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$

0	1	2	3	4
$\frac{0}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$
$= 0$		$= \frac{1}{6}$	$= \frac{1}{4}$	$= \frac{1}{3}$

worden gesteund.

Hierbij kan systematisch het vereenvoudigen bij noemers zoals 12, 24, 60 worden geoefend.

Deze tafels worden

opnieuw gevisualiseerd op getallenlijnen

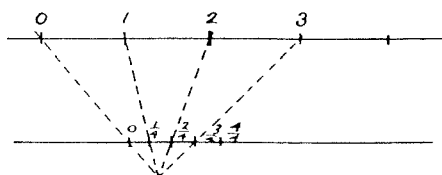


fig. 46

of

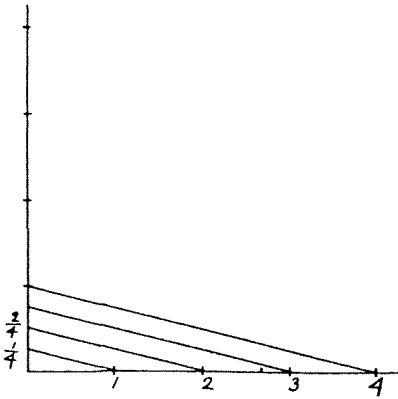


fig. 47

waar corresponderende punten verbonden zijn. (Fig. 46–47.)

Vermenigvuldigingen worden als voortgezette optellingen voorbereid, door de vraag bij

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}:$$

hoe kun je dit ook zeggen?

Voorzichtige voorbeelden van delingen:

de helft van $\frac{2}{3}$, van $\frac{4}{3}$, van $\frac{6}{3}$.

Nog voorzichtiger

een derde van $\frac{2}{3}$,

5.13 De flessen bier worden onder echtparen verdeeld en na de deling binnen elk echtpaar. Een iets compactere sequentie als daarstraks met het doel

optelling, aftrekking, orderrelatie van $\frac{1}{n}\mathbf{N}$ over te brengen naar $\frac{1}{pm}\mathbf{N}$

$\left(x \rightarrow \frac{1}{m}x\right)$ en het isomorfisme $x \rightarrow \frac{1}{pm}x$ als product van de isomorfismen

$x \rightarrow \frac{1}{m}x$ en $x \rightarrow \frac{1}{p}x$ te vatten.

Hetzelfde gevisualiseerde met boom- of stroommodellen. (Fig. 48.)

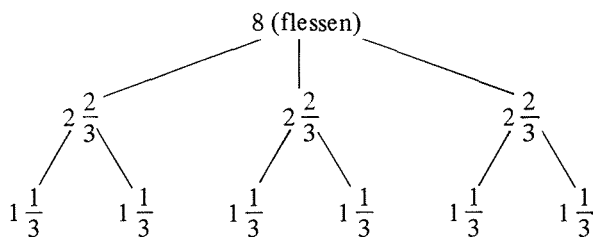


fig. 48

5.14 Plaatjes met veel schapen; de boer verkoopt 1 op de 3 (oftewel $\frac{1}{3}$). Schrap ze. Hoeveel blijven er over? Als dit 120 schapen geweest zijn, hoeveel zijn er verkocht, hoeveel blijven er over?

$$\frac{1}{3} \text{ van } 120 = \quad , \quad \frac{2}{3} \text{ van } 120 =$$

Honderdveld; kleur $\frac{1}{5}$ van de vakjes rood. Kan dit nog anders? Kleur $\frac{2}{5}$ rood. Kan dit nog anders? Maak er mooie patronen van.

Idem met een muur van bakstenen — geheel aantal onduidelijk.

Loterij met 1000 loten. Een op de vijf wint. Hoe bepaal je welke?

Een op de vijf loten wint de inzet terug; van de winnende wint een op de drie de dubbele inzet.

Er zijn tien hoofdprijzen — dat is één op de ... ?

Neem een strook en vouw hem dubbel, driedubbel. Hoeveelste deel is de gevouwen strook van de oorspronkelijke? Maak uit een strook door vouwen een strook die het zesde deel is.

Stroken onder elkaar in visuele lengte-verhouding $m : n$; als deze A waard is, hoeveel is die waard?

Bij deze opgaven is het doel:

gevallen van de functie $x \rightarrow \frac{1}{m}x$ in numerieke inkledingen en visualiserings herkennen en evalueren.

5.15 $\frac{m}{n}$ trad tot nu toe systematisch alleen als getal op bij maten zoals $\frac{2}{3}$ fles, $\frac{2}{3}$ strook. Van het volgende is het doel:

de functie $x \rightarrow \frac{m}{n}x$ constitueren, construeren en herkennen.

Hier staat de boom A .

Teken boom B half zo groot als boom A ,

teken boom C drie keer zo groot als boom B ,

teken boom D een derde van boom C ,

teken boom E vijf keer zo groot als boom D ,

teken boom F een derde van boom E .

Ik schrijf ook

$$B = \frac{1}{2} \text{ van } A$$

$$C = 3 \text{ keer } B = \dots A$$

$$D = \frac{1}{3} \text{ van } C = \dots B = \dots A$$

$$E = 5 \text{ keer } D = \dots C = \dots B = \dots A$$

$$F = \frac{1}{3} \text{ van } E = \dots D = \dots C = \dots B = \dots A.$$

Ik heb een

loop  waar ik alles 3 keer zo groot door zie

en een

loop  waar ik alles $\frac{1}{3}$ zo groot door zie.

Ik kijk door ze achter elkaar naar die bloem (fig. 49):

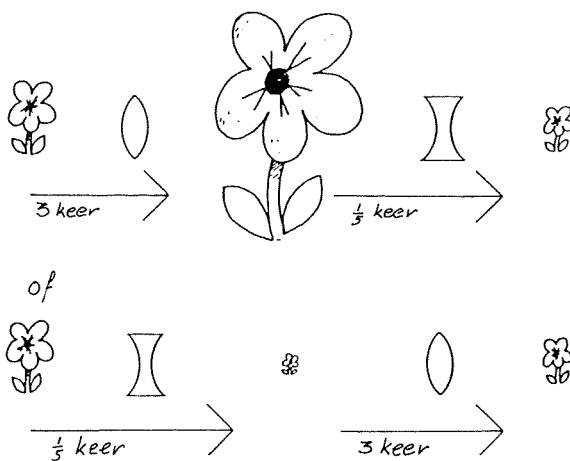


fig. 49

Wat is beide keer de uitkomst?

Een aantal gevarieerde voorbeelden moeten dienen om

het samenstellen van functies $x \rightarrow mx$, $x \rightarrow \frac{1}{n}x$ in willekeurig aantal, visueel gesteund en numeriek geïsoleerd, te oefenen, bijv. $\left(\frac{1}{3} \text{ van}\right) (5 \text{ keer}) \left(\frac{1}{6} \text{ van}\right) (2 \text{ keer})$, toegepast op lengtes en op getallen te evalueren en als $\frac{5}{9}$ van te herkennen.

5.16 Het volgende dient om

$\frac{m}{n}$ van te vervangen door $\frac{m}{n}$ keer.

Zoals eerder opgemerkt, komt deze equivalentie in alle methodes uit de lucht vallen. Het vervelende is dat ‘3 keer’ een natuurlijke operatie is, evenals ‘ $\frac{1}{3}$ van’, terwijl de taal aan de analogie tussen beide geen recht doet wedervaren. Er is echter, zoals eveneens opgemerkt, één gelegenheid waar de taal – elke taal voorzover ik weet – de overgang van ‘ $\frac{m}{n}$ van’ naar ‘ $\frac{m}{n}$ keer’ wel toelaat, namelijk bij cyclische processen:

draai de sleutel $2\frac{1}{2}$ keer in het sleutelgat om,
de grote wijzer is $3\frac{1}{3}$ keer de klok rond,
de satelliet is $10\frac{2}{5}$ keer de aarde rond, waar is hij nu?
de draaimolen is $5\frac{1}{2}$ keer rond gegaan,
idem het grote rad – waar ben je dan?

Het gaat ook bij onregelmatige kringen,

berg- en dalbaan,
spookhuis,

en met heen- en weergaande

$3\frac{1}{4}$ keer heen- en weer geschommeld,
 $3\frac{1}{3}$ keer van Utrecht naar Rotterdam gereisd.

Dit ‘keer’ kan nu als vermenigvuldigingsoperator op getallen worden geïnterpreteerd

$3\frac{1}{3}$ keer de klok rond – hoeveel minuten?
— de klok rond is 60 minuten, $3\frac{1}{3}$ keer de klok rond is ...
 $10\frac{2}{5}$ keer de aarde rond, hoe lang duurt dat?
— één keer duurt ...
 $5\frac{1}{2}$ keer de draaimolen rond, hoe lang duurt dit, hoeveel kost het, hoeveel paardjes zijn dat?

$3\frac{1}{3}$ keer Utrecht-Rotterdam, hoeveel kost het?

En de wenteltrap:

$5\frac{2}{3}$ keer de wenteltrap rond – hoeveel treden?

Van de cyclische processen naar de periodieke:

$3\frac{1}{2}$ honderd keer tikken (aanslagen op de schrijfmachine, verspringen van km-teller, sprongen).

Verder naar lengtes door afrollen:

Een wiel afrollen, waar is het na 1, 2, 3 keer rond, na $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$ keer rond?

Dit leidt op natuurlijke wijze tot

$1\frac{1}{2}$ keer, $2\frac{2}{3}$ keer een gegeven lengte, die ook numeriek

gegeven zijn kan.

Zo wordt door natuurlijk taalgebruik het ' $1\frac{1}{2}$ -keer', ' $2\frac{1}{3}$ -keer' enz. gevestigd. Ik heb hierbij als voorbeelden tot nu toe alleen gemengde breuken genomen, hetgeen didactisch belangrijk is. Bij ' $4\frac{2}{5}$ keer' wordt door het hoofdbestanddeel 4 gesuggereerd welke operatie is uit te voeren; de $\frac{2}{5}$ wordt dan maar meegesleept; met het voortschrijden van de didactische sequentie dient men echter steeds meer echte breuken tussen de gemengde te strooien.

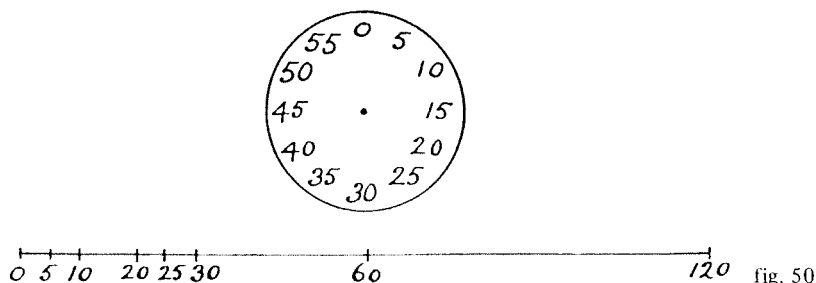
5.17 Er staan nu

$\frac{m}{n}$ van' en ' $\frac{m}{n}$ keer'

naast elkaar; ze moeten echter nog

met elkaar geïdentificeerd

worden. Dit geschiedt door ze toe te passen in gevallen waarin ze beide zinvol zijn, bijvoorbeeld in gevisualiseerde klok-problemen. (fig. 50).



$$\frac{1}{3} \text{ keer } 60 \text{ (de klok rond)} = \frac{1}{3} \text{ van } 60 \text{ (het lijnstuk)}$$

$$2 \frac{2}{3} \text{ keer } 60 \text{ (de klok rond)} = 2 \frac{2}{3} \text{ van } 60 \text{ (het lijnstuk)}$$

Men dient

de identificering bewust te maken,

om bij fouten erop terug te komen.

Eveneens

$$\text{bewust: } \frac{2}{3} \text{ van } 1 = \frac{2}{3} \text{ keer } 1 = \frac{2}{3}.$$

Het identificeren van de breuk en de breukoperator met de breuk als rationaal getal wordt echter tot een latere gelegenheid uitgesteld.

' $\frac{5}{3}$ van' was als

$$'5 \text{ keer } \frac{1}{3} \text{ van' of } \frac{1}{3} \text{ van } 5 \text{ keer van'}$$

ingevoerd en hoort nu

$$\text{bewust: } 5 \text{ keer } \frac{1}{3} \text{ keer of } \frac{1}{3} \text{ keer } 5 \text{ keer}$$

te worden. Algemeen horen andere voorbeelden nu herhaald te worden om

$$\text{bewust } \frac{m}{n} \text{ van' door } \frac{m}{n} \text{ keer'}$$

te vervangen.

5.18 Bij een punt A op de getallenlijn wordt systematisch de rationale schaal der $\frac{m}{n} A$ geconstrueerd die als zodanig zijn genoteerd, waarbij de uitdrukking als ' $\frac{m}{n}$ keer A ' wordt gelezen.

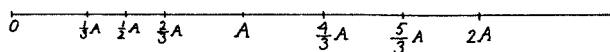


fig. 51

In dit beeld (fig. 51) wordt paradigmatisch

van een punt $\frac{p}{q} A$

het $(m \text{ keer})$ -beeld

het $\frac{1}{n}$ keer-beeld

het $\frac{m}{n}$ keer-beeld

aangewezen, dus

op de schaal van de rationale veelvouden van A

de operatie ' $\frac{m}{n}$ keer' toegepast,

met het doel de formule

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} A = \frac{m \cdot p}{n \cdot q} A$$

paradigmatisch te valideren.

Van hier wordt, door weglaten van de A , de

vermenigvuldigingsformule

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

paradigmatisch bewust

gemaakt.

Hierop sluiten oefeningen aan die in 't bijzonder gevallen als

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = 1$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{l} = \frac{m}{l}$$

enz. insluiten.

5.19 Het ligt voor de hand, hier de deling der breuken op te laten aansluiten, namelijk

als omkeeroperatie van het vermenigvuldigen:

$$(?x) ax = b$$

Van het geval $b = 1$ werd het vraagstuk op 't eind van 5.18 opgelost,

$$(?x) ax = 1$$

wordt opgelost, door de breuk waardoor a is gegeven, op zijn kop te zetten, en om nu

$$(?x) ax = b$$

op te lossen, behoeft men dus de b voorstellende breuk met de op zijn kop gezette breuk voor a te vermenigvuldigen. Hiermee is het probleem van het delen van breuken echter didactisch niet opgelost; er ontbreekt hier elke aanduiding, dat delen een operatie is, die iets met een realiteit te maken heeft.

$b : a$ te interpreteren in de zin van een

verdelingsdeling

d.w.z. als een verdeling van b in a delen, is eveneens een averechts procedure zodra a niet geheel is. Daarentegen valt iets te zeggen voor de interpretatie van $b : a$ als

verhoudingsdeling,

d.w.z. als antwoord op de vraag

hoeveel keer zit a in b ,

bijvoorbeeld als lengtes gevisualiseerd.

Het is doelmatig deze vraag dan eerlijk in de context ‘verhoudingen’ te plaatsen, waarin wij ons in ’t volgende hoofdstuk zullen begeven. We veronderstellen deze context hier als didactische voorwaarde, met als operationele slotsom: de del-sommen

$b : a$ en $bc : ac$ ($c \neq 0$) zijn equivalent,

d.w.z. hebben dezelfde oplossing. Dit is inderdaad, zoals we nog zullen zien een belangrijk beginsel dat pas bij de breuken zinvol wordt — voor delingen met rest klopt het niet.

Dit beginsel kan natuurlijk ook vanuit de deling als omkering van vermenigvuldiging worden gemotiveerd,

$ax = b$ en $acx = bc$ ($c \neq 0$)

hebben dezelfde oplossing x . Het kan, behalve in de context ‘verhoudingen’ ook met eenvoudigere aanloopjes worden gemotiveerd:

$\frac{2}{3}$ gaat in $\frac{4}{3}$ even vaak op als 2 in 4

$\frac{2}{3}$ gaat in 6 even vaak op als 2 in 18

$\frac{2}{3}$ gaat in $\frac{7}{6}$ even vaak op als 4 in 7

$\frac{2}{3}$ gaat in $\frac{8}{5}$ even vaak op als 10 in 24.

De zin van het principe is

het delen van breuken terug te brengen tot dat van *gehele* getallen via dat van *gelijknamige* breuken ...

een procedure die formeel equivalent met die van

het vermenigvuldigen met de omgekeerde breuk

is, maar didactisch beter te motiveren.

5.20 Het optellen, aftrekken en volgens grootte vergelijken van breuken wordt

door het beeld van de getallenrechte gesteund, zoals in 5.12 is voorbereid:

De wederzijdse ligging van

$$\frac{1}{4}N \text{ en } \frac{1}{6}N$$

$$\frac{1}{4}N \text{ en } \frac{1}{6}N$$

visueel begrijpen; voor paradigmatische p , q een r zoeken, zodat

$$\frac{1}{p}N \text{ en } \frac{1}{q}N \text{ door } \frac{1}{r}N$$

wordt omvat.

Optellen; aftrekken en ordevergelijken wordt overeenkomstig 5.12 binnen een $\frac{1}{n}N$ uitgevoerd, die dus in elk afzonderlijk geval wordt vastgesteld.

5.21 Combinaties van optelling en vermenigvuldiging in stroommodellen oefenen (fig. 52).

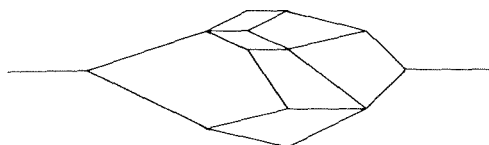


fig. 52

5.22 Tenslotte wordt het verworvene met vergrotingen en verkleiningen geoefend.

Platen I, II, III van hetzelfde object.

overgang van I naar II door vermenigvuldiging met a

overgang van II naar III door vermenigvuldiging met b
van I naar III?

(a , b paradigmatische breuken)

De terminologie ‘vergroten’ en ‘verkleinen’ is onderwerp van discussie. Waarom verdient ‘vermenigvuldiging’ de voorkeur?

5.23 In de traditionele breukendidactiek is de vermenigvuldiging veeleer aan het rechthoekpatroon gebonden dan aan de breukoperator. In de hier uiteengezette didactische sequentie werd voor de breukoperator gekozen; in die *opbouw* is het rechthoekpatroon van de vermenigvuldiging moeilijk te plaatsen. Dit betekent echter niet dat het verwaarloosd moet worden. Het kan op zijn minst bij 5.20 aansluiten, dan echter niet in de beperkte traditionele vorm waarbij één rechthoek *onderverdeeld* wordt.

De volgende didactische sequentie is gebaseerd op een voorafgaande behandeling van oppervlakken van rechthoeken en dergelijke figuren; zij is geborduurd op het patroon van (fig. 53)

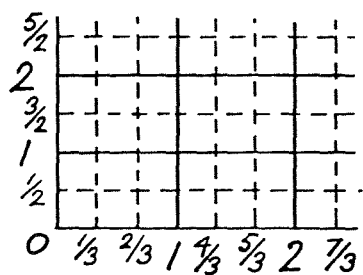


fig. 53

het cartesisch product van $\frac{1}{n}N$ en $\frac{1}{q}N$.

De standaard opgave is:

bepaal de oppervlakte van een rechthoek met zijden $\frac{m}{n}$ en $\frac{p}{q}$.

Hierbij kan aansluiten een sequentie:

Gegeven een rechthoek, maak rechthoeken met dezelfde oppervlakte.

Deze rechthoeken worden met gemeenschappelijke ZW hoek getekend en in tabellen bijeengebracht (fig. 54).

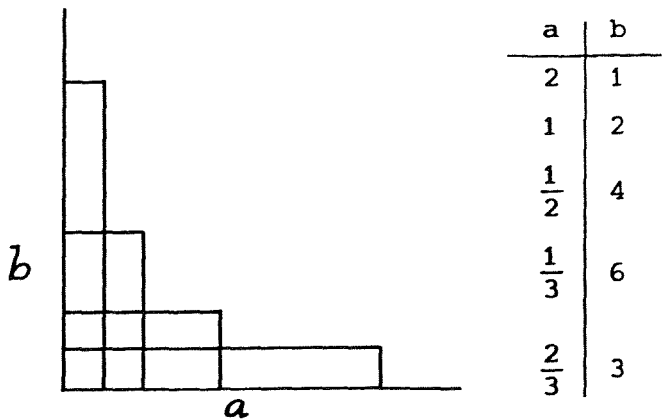


fig. 54

Gegeven een rechthoek, maak rechthoeken met a -keer die oppervlakte.

We komen op deze sequentie in het hoofdstuk ‘Oppervlakte’ terug.

5.24 Decimale breuken

De decimale breuken zijn, reeds in hun oorsprong bij Stevin, nauw gelieerd aan een decimaal systeem van maten. In dit verband zouden ze worden behandeld en dan in 't bijzonder met onderwerpen zoals: Waarom decimale breuken naast de gewone? Het afronden en de nauwkeurigheid van decimale breuken. Percentages, permilles en standaardschrijfwijze. Hier beperken we ons tot hetgeen nauw bij de opzet van 5.12 aansluit.

De decimale breuken (of kommagetallen) worden achtereenvolgens als elementen van de steeds fijnere *netten*

$$\frac{1}{10} \mathbf{N} \quad \left(\frac{1}{10} \cdot 31 \text{ geschreven als } 3,1 \right)$$

$$\frac{1}{100} \mathbf{N} \quad \left(\frac{1}{100} \cdot 314 \text{ geschreven als } 3,14 \right)$$

$$\frac{1}{1000} \mathbf{N} \quad \left(\frac{1}{1000} \cdot 3141 \text{ geschreven als } 3,141 \right)$$

enz. ingevoerd — parallel hiermee overgangen van mm naar cm, dm, m en van g naar dg, hg, kg, enz.

De verbanden worden — als vroeger — gelegd tussen de lagen

$$\mathbf{N}, \frac{1}{10} \mathbf{N}, \frac{1}{100} \mathbf{N}, \frac{1}{1000} \mathbf{N}, \dots$$

d.w.z.

$$a = \frac{1}{10} \cdot 10a \text{ enz.}$$

dus

$$3,14 = 3,140 \text{ enz.}$$

Optelling, aftrekking, ordevergelijking worden in elk net

$$\frac{1}{10} \mathbf{N}, \frac{1}{100} \mathbf{N}, \frac{1}{1000} \mathbf{N}, \dots$$

afzonderlijk beoefend.

De vermenigvuldiging verbindt twee netten met elkaar. Wegens

$$\frac{1}{10^p} a \cdot \frac{1}{10^q} b = \frac{1}{10^{p+q}} a \cdot b \quad (a \in \mathbf{N}, b \in \mathbf{N})$$

is

$$\frac{1}{10^p} \mathbf{N} \cdot \frac{1}{10^q} \mathbf{N} \subset \frac{1}{10^{p+q}} \mathbf{N}.$$

Het algoritme van het cijferend vermenigvuldigen wordt aangevuld met een regel omtrent het plaatsen van de komma.

Bij de deling zorgt men volgens 5.19 ervoor dat deeltal en delers tot hetzelfde net horen, dus dat het vraagstuk in de vorm

$$\frac{1}{10^m} b : \frac{1}{10^m} a$$

gebracht is, waardoor het met

$$b : a$$

equivalent wordt.

5.24a Een didactische opmerking

Bij ‘remedial teaching’ en bij observaties op Pedagogische Akademies (zie ook 4.36a) is mij gebleken dat de gebruikelijke didactiek van tientallige breuken, die afstuurt op regels voor het plaatsen van de komma tot een gehele blokkade van het inzicht en de behoefte aan inzicht kan leiden. Als deze regels eenmaal geformuleerd en geleerd zijn, is het vrijwel onmogelijk, foutieve toepassingen ervan door een beroep op inzicht te corrigeren. Die regels kunnen als het dan moet het eindpunt van een ontwikkeling zijn, die niet kunstmatig bespoedigd mag worden. Ze dienen op verschillende niveaus te worden begrepen.

Het laagste is ervan uit te gaan, dat vóór de komma de helen staan en hierop naar rechts volgen de tienden, honderdsten, enz. naar links de tienden, honderden, enz. Bij vermenigvuldiging met 10 resp. deling door 10 worden de helen in tientallen, resp. tienden omgezet enz. Een abacus met komma kan dit illustreren. Nuttig is ook een ladder van verfijning

.
 .
 .
 1000
 100
 10
 1
 0,1
 0,01
 0,001
 .
 .
 .

die met de maten van het metrieke stelsel in verband kan worden gebracht. Vermenigvuldigen met en deling door 10, 100, 1000, ... wordt als actie op deze ladder ervaren. Het vermenigvuldigen van (positieve en negatieve) machten van

10 onderling wordt hierdoor voorbereid. Men zou zich kunnen afvragen of niet ook de gebruikelijke schrijfwijze van machten van 10 moet worden geïntroduceerd (zie 4.36a). Maar hoe ook geschreven, het vermenigvuldigen en delen van (positieve en negatieve) machten van 10 dient aan de formele introductie en de oefening van het vermenigvuldigen en delen van tientallige breuken in 't algemeen vooraf te gaan. Het terugbrengen zoals in 5.24 uiteengezet van het vermenigvuldigen en delen in dit gebied tot dat in $\mathbf{N}$ door middel van het uitsplitsen van machten van 10 (al of niet als zodanig geschreven) verdient de voorkeur boven het laten leren van regels omtrent de plaatsing van de komma.

5.25–5.26 DECIMAALBREUKONTWIKKELING

5.25 De deling van decimale breuken is hiermee teruggebracht tot die van gehele getallen, d.w.z. tot hetgeen men ook noemt, de

ontwikkeling van $b : a$ oftewel de breuk $\frac{b}{a}$ in een decimale breuk,

die naar men weet, ook oneindig lang mag zijn.

Tot nu toe verschenen decimale breuken als breuken met als noemer een macht van 10. Een breuk of deelsom van deze vorm moet zich dus van

$$\frac{b}{a} \text{ in } \frac{e}{10^n}$$

laten transformeren. Een breuk $\frac{b}{a}$ in verkleinde vorm, waarvoor dit zou willen kunnen, moet dus een noemer a bezitten die in een geschikte macht van 10 opgaat, d.w.z.

de noemer mag geen andere priemfactoren dan 2 en 5 bezitten.

Voor andere breuken is een dergelijke – eindige – ontwikkeling niet mogelijk. De omzetting van

$$\frac{b}{a} \text{ in } \frac{e}{10^n}$$

geschiedt door middel van de deling

$$10^n b : a = e,$$

berust dus op

$$b : a = \frac{1}{10^n} (10^n b : a),$$

d.w.z. men stapt bij het deeltal en op het eind bij het quotiënt van de eenheden tot de $\frac{1}{10^n}$ -den als nieuwe eenheden over alvorens de deling uit te voeren.

In feite geschiedt dit successievelijk:

na de eerste deling van $a : b$ met rest worden de eenheden van de rest in tienden omgezet en met hen de deling voortgezet, waarbij het quotiënt een aantal tienden -- dus eerste plaats achter de komma -- is; de dan blijvende rest van tienden wordt in honderdsten omgezet en met hen de deling voortgezet waarbij het quotiënt een aantal honderdsten -- dus tweede plaats achter de komma -- is, enz.

Bevat de noemer van $\frac{b}{a}$ alleen priemfactoren 2 en 5, dan moet deze procedure met het gewenste resultaat eindigen; uiteindelijk gaat de deling op. In andere gevallen zal dit niet het geval zijn: er ontstaat een oneindige decimaalbreuk, zoals in

$$\frac{1}{3} = 0,33 \dots$$

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857 \dots$$

Wat hierover wiskundig valt te zeggen, is van geheel ander karakter dan wat we tot nu toe in deze didactische fenomenologie behandelden. Het valt wiskundig hetzij onder 'getallentheorie', hetzij onder 'oneindige reeksen', maar dit neemt niet weg dat een fenomenologische benadering mogelijk is, die het tegenwoordige kader niet doorbreekt.

5.26 Het is bepaald niet vereist de hier optredende oneindige ontwikkelingen van breuken *nu* in het kader van oneindige reeksen of ook maar van oneindige decimaalbreuken in 't algemeen te plaatsen; dat zou later kunnen geschieden. Evenmin is het nodig de getallentheorie die de periodiciteit van deze ontwikkeling verantwoordt, hier in te roepen. We doen het elementairer.

Deling door a , zoals net beschreven, produceert bij elke stap, een rest die, als geheel getal opgevat, $< a$ is. Dus zijn er onder de eerste a resten zeker twee gelijke te vinden. Het gebeurt een keer voor het eerst dat er in de rij van resten één gelijk is aan een eerder opgetreden rest, zeg, de j -de rest is gelijk aan de i -de. Maar dan verloopt de hele procedure vanaf de j -de deling precies als vanaf de i -de, het stuk van

i -de tot $(j - 1)$ -de quotiënt

herhaalt zich periodiek.

De decimaalontwikkeling van een rationaal getal

wordt op den duur periodiek.

De ontwikkeling kan

zuiver periodiek

zijn, of aan de periode gaat

een aanloopje vooraf.

Voorbeelden van het eerste

$$\frac{1}{3} = 0,3 \dots \quad \frac{1}{7} = 0,142857 \dots$$

van 't tweede

$$\frac{1}{6} = 0,166 \dots \quad \frac{1}{35} = 0,0285714285714 \dots$$

Hoe kan men zien, welk geval zich voordoet?

De voorbeelden suggereren: De decimaalontwikkeling van $\frac{b}{a}$ verkleinde $\frac{b}{a}$ is

zuiver periodiek dan wel niet

naar gelang of de noemer a

niet of wel

een priemfactor 2 of 5 heeft.

Dit vermoeden blijkt inderdaad juist te zijn:

De periode bij de ontwikkeling van $\frac{b}{a}$ ontstond doordat voor zekere i en j de rest van de i -de en j -de deling dezelfde zijn, d.w.z.

$$10^i b \text{ en } 10^j b \text{ geven dezelfde rest}$$

bij deling door a . Anders gezegd

$$(10^j - 10^i)b \text{ is door } a \text{ deelbaar.}$$

Bezit nu a geen priemfactor 2 of 5 dan volgt hieruit

$$(10^{j-i} - 1)b \text{ is door } a \text{ deelbaar,}$$

dus al

$$10^{j-i} b \text{ en } b \text{ geven dezelfde rest}$$

bij deling voor a . Dus de periode begint direct achter de komma. Oftewel:

als a geen priemfactoren 2 of 5 heeft, is de ontwikkeling van $\frac{b}{a}$ puur periodiek.

Nu het omgekeerde: Stel de ontwikkeling is puur periodiek, zeg met een periode van lengte l . De periode als natuurlijk getal opgevat zij c . Dus

$$\frac{b}{a} = c \left(\frac{1}{10^l} + \frac{1}{10^{2l}} + \dots \right).$$

De uitdrukking c tussen de haakjes kan bijvoorbeeld als volgt worden berekend

$$10^t e = 1 + e,$$

dus

$$e = \frac{1}{10^t - 1}.$$

Dus

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{10^t - 1}.$$

$10^t - 1$ heeft zeker geen factor 2 of 5, dus a evenmin. Dus:

als de ontwikkeling van $-\frac{b}{a}$ verkleinde $-\frac{b}{a}$ puur periodiek is, heeft de noemer a geen priemfactor 2 of 5.

5.27 Andere grondtallen

Ten aanzien van het kennisnemen van en werken in andere positiestelsels dan het tientallige geldt bij breuken hetzelfde als in 4.43 uiteengezet. Aan een klein verschil moet echter aandacht worden besteed. Men mag in 't algemeen niet verwachten, dat verwisseling van grondtal meer inzicht scheppend werkt, behalve wat betreft de niet opgaande en tot oneindige ontwikkelingen leidende delingen. Als in het tientallige geval begrepen is, welke noemers tot oneindige ontwikkelingen leiden, waarom deze uiteindelijk periodiek zijn en in welke gevallen zuiver periodiek, kan de overgang tot een ander grondtal g nieuwe perspectieven openen: In de plaats van de delers van 10 treden die van g , en dit heeft uiteenlopende gevolgen naar gelang of g een priemgetal, een macht van een priemgetal of een anderszins samengesteld getal is. Of deze inzichten de daaraan bestede moeite van het invoeren van andere positionele stelsels waard zijn, hangt uiteraard van de gehele onderwijssituatie af, maar in 't bijzonder van de groep leerlingen waaraan dit onderwijs besteed moet zijn.

6 VERHOUDINGEN EN EVENREDIGHEID

6.1 Een voorrede middenin

Dit hoofdstuk – nu gewijzigd – was de eerste proeve van didactische fenomenologie die ik – in 1973 – in het Duits op papier zette. Aanleiding was een theoretische uiteenzetting door een onderwijskundige omtrent leerdoelen, waarin als voorbeeld – aan een omvangrijker werk ontnomen – ‘verhouding’ door welgeteld één leerdoel vertegenwoordigd was. Ik heb herhaaldelijk betoogd, dat aan het formuleren van leerdoelen vooraf moet gaan het observeren van leerprocessen, waaruit die doelen zouden kunnen blijken, en dat bij het observeren van leerprocessen evenals bij het ontwikkelen van leerstof didactische fenomenologie een onmisbare voorwaarde is. Om duidelijk te maken wat bij het destilleren van leerdoelen uit schoolboeken en toetsenverzamelingen ontbrak, heb ik het voorbeeld ‘verhouding’ aangegrepen ter verduidelijking van wat didactische fenomenologie is en kan. Wie naleest wat ik toen heb geschreven – en het klinkt in de tegenwoordige versie nog door, wordt getroffen door een strakheid van zeggingswijze die men niet als mijn manier gewend is – ik zal trouwens straks redenen aanvoeren waarom die ook wel door het speciale onderwerp bepaald is en niet alleen door mijn gerichtheid op het schrijven van een didactische fenomenologie.

In mei 1975 hield ik lezingen in Berlijn. Ik ontmoette daar voor het eerst Christine Keitel met wie ik al had gecorrespondeerd. Ik vertelde haar van mijn manuscript ‘Vorrede zu einer Wissenschaft vom mathematischen Unterricht’, dat klaar was, en van een ‘Didaktische Phänomenologie mathematischer Grundbegriffe’ die op stapel stond. Ik beloofde haar een werk, streng wetenschappelijk van stijl tot onleesbaarheid toe. Christine smeeke mij: ‘Tun Sie das nicht’, met de stembuiging van ‘das haben Sie nicht nötig’, en haar woorden zijn in mijn geest blijven wroeten.

In de zomer van 1975 lag er dus het hoofdstuk over verhoudingen en een zeer provisorische schets van ‘Breuken’, maar het eerste hoofdstuk moest nog worden begonnen. ‘Verzamelingen’ natuurlijk. Ik worstelde er mee en het lukte niet. De stof was weerbarstig en de strakke stijl, die mij bij ‘Verhouding’ zo wonderwel gelukt was, liet mij in de steek. Geen regel kwam op ’t papier.

Ik nam een kloek besluit. ‘Getallen’ – neen. ‘Meetkunde’ – neen. Ik koos ‘Lengte’ en na een korte poos was het hoofdstuk in details geconcipeerd. Maar weer lukte het schrijven niet – de strakke stijl van het hoofdstuk ‘verhoudingen’ die mij nog als ideaal voor ogen zweefde. Moet ik iets, dat zich er niet voor leende, in een keurslijf persen om het te doen schijnen wat het niet was?

Ik heb het niet nodig. Ik hoef me geen geleerd lijkende taal aan te meten om

diepte voor te spiegelen. Ik heb geen carrière voor me waarin zo'n taal tot aanbeveling zou kunnen strekken, en ik stel er geen prijs op het nageslacht aan het werk te zetten om dieptes van een onleesbare tekst te doorgronden. Aan mijn geestelijk portret valt niets meer te wijzigen, op mijn denkbeeld van wetenschappelijkheid hoef ik geen correctie aan te brengen. Simplex sigillum veri — vertaal ik als: wat waar is mag je onomwonden zeggen.

Ik wist het nu, maar wat moest ik doen? Ik las en herlas het stuk over 'verhouding'. Het was goed en het was ook goed geschreven. Het was duidelijk en het was ook eerlijke stijl. Waarom kan ik over 'lengte' niet net zo schrijven? Ik probeerde formuleringen, en niets lukte. Wel, ik moest los van dat model. Maar hoe? Ik kende het stuk over 'verhouding' als van buiten. Ik moest die la van mijn geest dicht doen en een andere openen.

En zodoende besloot ik, van het Duits over te stappen op 't Nederlands. Ik zou de didactische fenomenologie in 't Nederlands schrijven — om haar later eens in andere talen over te brengen. Een taal kan je besmetten; het Nederlands is het enige proza waarin ik nooit beproefd heb diepzinnigheden te zeggen.

Toen ik een keer het besluit omtrent de taal genomen had, kwamen me nog meer argumenten te hulp. De fenomenologie was begonnen en bedoeld voor de ontwikkelaars naast me in hun dagelijkse werk en de discussies daaromtrent; geen ander zal er — vertaald of onvertaald — veel van kunnen profiteren. Het is voor onze omgang en het wordt in onze omgangstaal geschreven.

Dit was een voorrede op de verkeerde plaats. In het Woord Vooraf dat nog geschreven moet worden, hoort dit dan ook te worden gezegd.

6.2 De logische status van 'verhouding'

Dit werd me pas laat duidelijk: dat door zijn logische status 'verhouding' zich boven de begrippen verheft, die we tot nu toe de revue lieten passeren. Toen begreep ik pas goed, dat en waarom ik 'verhouding' van breuken moest scheiden.

Verhouding is een functie van een geordend paar getallen of grootheidswaarden. Som, verschil, product, quotiënt zijn dit ook, maar ze zijn het in een algoritmische zin, er is een recept om de aan een speciaal paar toe te wijzen functie-waarde expliciet uit te rekenen, of althans zo te doen als of — want wat reken je

dan uit als je '3 : 4' met ' $\frac{3}{4}$ ', beantwoordt?

De verhouding kun je ook 'uitrekenen' door er een quotiënt van te maken, door

3 staat tot 4

als

3 gedeeld door 4

te lezen, maar dan doe je de 'verhouding' geweld aan; je haalt er nu van de 'verhouding' juist af, hetgeen het als 'verhouding' waardevol maakt.

'Verhouding' is een functie van een geordend paar getallen of grootheidswaarden. Maar wat zijn de functiewaarden van deze functie? Opnieuw getallen, op-

nieuw grootheidswaarden? Je zou het zo kunnen opvatten, maar dit is juist niet de bedoeling, want dan zou de verhouding niets anders dan het quotiënt zijn. De ‘verhouding’ is er om over gelijkheid van verhoudingen te kunnen spreken zonder te weten hoe ‘groot’ de verhouding is, om zinnol

$$a \text{ staat tot } b \text{ als } c \text{ staat tot } d$$

te kunnen zeggen, zonder erop vooruit te lopen dat dit

$$a \text{ staat tot } b$$

tot een getal of grootheidswaarde

$$\frac{a}{b}$$

kan worden gereduceerd die dan voor

$$c \text{ staat tot } d$$

dezelfde is:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Ik heb bij ‘aantal’ en ‘lengte’ beklemtoond hoe het herkennen van gelijkheid en ongelijkheid, groter en kleiner zijn, fenomenologisch voorafgaat aan opteloperaties en meetoperaties – het is jammer dat dit simpele feit ongeloofwaardig wordt gemaakt door onjuist opgevatte conservatiebeginselen. Wil men ‘verhouding’ fenomenologisch even serieus nemen als aantal en lengte, dan mag men verwachten dat ook daar gelijkheid en ongelijkheid, groter en kleiner zijn een dergelijke rol spelen; men moet in elk geval bij het fenomenologisch speuren naar deze wortels uitkijken.

Mochten deze vermoedens bevestigd worden – en dit zal inderdaad het geval zijn – dan is de logische status van verhouding in zijn fenomenologische context als volgt te omschrijven

verhouding is een equivalentierelatie in de verzameling van geordende getallen paren (of grootheidswaarden-paren), formeel aangeduid als

$$a : b = c : d$$

indien het paar $\lceil a, b \rceil$ equivalent met het paar $\lceil c, d \rceil$ is.

We gaan niet nader in op de (axiomatische) eisen waaraan deze equivalentierelatie moet voldoen.

Dat na keuze van een eenheid e de equivalentieklasse van het paar a, b ook door één getal (één grootheidswaarde) gekarakteriseerd kan worden, te weten door de u met

$$a : b = u : e$$

is in deze benadering een inzicht a posteriori, die trouwens alleen dan van waarde

is, als die e van geen willekeur afhangt (bijv. de numerieke eenheid 1 is). A priori is verhouding iets dat van *twee* getallen of grootheidswaarden afhangt; elke uitspraak omtrent verhouding – evenredigheid – regardeert dus *vier* getallen of grootheidswaarden.

Op deze complicatie doelde ik toen ik in 't begin van deze paragraaf verhouding qua logische status plaatste boven andere begrippen die tot nu toe aan de orde waren. Quotiënten en breuken zijn een algoritmisch middel om deze complicatie te reduceren, de logische status te verlagen, ten koste – zoals het dan veelal gaat – van het inzicht. Men mag zich afvragen of 'breuken' inzichtelijk kunnen worden geleerd zonder inzicht in 'verhouding'; de twijfel hieromtrent heeft de vormgeving van het hoofdstuk 'Breuken' beïnvloed. De invloed had sterker kunnen zijn, maar een integratie van de fenomenologische analyse van 'breuken' en 'verhouding' heb ik niet aangedurfd. Ik aarzel nog of ik op de twee hoofdstukken 'Breuken' en 'Verhouding en evenredigheid' niet een hoofdstuk 'Breuken, verhouding en evenredigheid' moet laten volgen.

De logische status van 'verhouding' die ik hier uiteen heb gezet, impliceert dat 'verhouding en evenredigheid' intenser wiskunde is, wiskunde op hoger niveau dan tot nu toe aan de orde was. Dit feit heeft dan – komt mij voor – ook de strakke stijl van mijn eerste proeve van didactische fenomenologie bepaald. Door de keuze van dit onderwerp, het meest mathematische op elementair niveau, viel ik met mijn neus in de mathematische boter. De strakke stijl was niet bepaald door mijn wens didactische fenomenologie te schrijven, maar door de keuze van het onderwerp. De poging deze stijl bij andere onderwerpen te willen imiteren was slecht gemotiveerd en tot mislukking gedoemd.

De lezer zal met een chaotische afwisseling van stijlen in dit werk genoeg moeten nemen. Ze wortelen niet in gemoedstoestanden, maar in onderwerpen en visies op onderwerpen.

6.3 Verhouding als relatie in en tussen grootheden

Om de uiteenzettingen waar het op aan komt niet over te belasten, begin ik met een aantal begrippen, termen en notaties in te voeren. Ik wil me van een ongedwongen taal bedienen en zo spaarzaam mogelijk formaliseren; bij voorbeeld wil ik me permitteren van 'gelijke grootte' te spreken, wanneer precies objecten van dezelfde grootte bedoeld zijn, van gelijke afstanden, gewichten, tijden, wanneer ik eigenlijk van wegen van dezelfde lengte, lichamen van hetzelfde gewicht, tijdsintervallen van dezelfde duur zou moeten spreken; ook kan het geschieden, dat ik van de verhouding van twee objecten spreek in plaats van de verhouding van de grootte, het volume of het gewicht van die objecten, van de verhouding van twee metalen in een legering in plaats van de verhouding van hun massa's. Ik begin met een reeds sterk gemathematiseerd voorbeeld, dat van

de eenparige beweging:

- (1) in gelijke tijden worden gelijke wegen afgelegd,

en dat is equivalent met

(2a) de wegen verhouden zich als de tijden,

althans wanneer — zoals vanzelf spreekt — continuïteit van de beweging wordt verondersteld;

(2b) de weg is evenredig met de tijd

is slechts een andere formulering van 2a en

(3) de weg is een lineaire functie van de tijd

ligt er vlak bij, en hetzelfde geldt voor

(4) de snelheid is constant.

Ik licht het voorafgaande eventjes toe.

Uit (1) volgt

in de dubbele tijd wordt de dubbele weg afgelegd,

in de drievoudige tijd wordt de drievoudige weg afgelegd,

algemener

in n -keer de tijd wordt n -keer de weg afgelegd.

Laat

$$s = f(t)$$

de weg s als functie f van de tijd t zijn. We zagen net

$$f(nt) = nf(t) \text{ voor } n \in \mathbf{N}.$$

Vervang hier t door $\frac{1}{n}t$. Dan staat er

$$f(t) = nf\left(\frac{1}{n}t\right)$$

oftewel

$$f\left(\frac{1}{n}t\right) = \frac{1}{n}f(t),$$

dus

in $\frac{1}{n}$ van de tijd wordt $\frac{1}{n}$ van de weg afgelegd.

Vervang in de laatste formule t door mt ($m \in \mathbf{N}$):

$$f\left(\frac{m}{n}t\right) = \frac{1}{n}f(mt) = \frac{m}{n}f(t).$$

Dus voor elke (positieve) rationale α geldt

in α -keer de tijd wordt α -keer de weg afgelegd,

$$f(\alpha t) = \alpha f(t).$$

Continuïteit van f garandeert dat dit niet alleen voor rationale, maar ook voor (positieve) reële α juist is.

Neem nu twee tijden, t_0 , t . Stel

$$\alpha = t/t_0.$$

Dan

$$f(t) : f(t_0) = f(\alpha t_0) : f(t_0) = \alpha f(t_0) : f(t_0) = \alpha = t : t_0$$

hetgeen de formulering 2a of 2b is. Maar dit laat zich ook schrijven als

$$f(t) = (f(t_0)/t_0) t,$$

hetgeen formulering 3 is, oftewel

$$f(t)/t = f(t_0)/t_0,$$

hetgeen formulering 4 is.

Dat 1 uit de anderen volgt, is triviaal.

We hebben hier met twee grootheden — lengte en tijd — te maken. f is een functie die aan een tijd (d.w.z. de duur van een tijdsinterval) een lengte (die van een weg afgelegd in die tijd) toewijst. De verhoudingen waar hier sprake van was, zijn die *binnen één systeem* (tijd of lengte). Er werd geëist dat de verhoudingen in het ene systeem gelijk zijn aan de corresponderende in het andere — dit was juist de eis van eenparigheid.

We noemen deze

verhoudingen binnen één systeem: *intern*.

Dit in tegenstelling tot de externe, waar direct sprake van zal zijn.

Zijn t_1 , t_2 tijden en s_1 , s_2 de corresponderende wegen dan zegt de eenparigheid:

$$s_1 : s_2 = t_1 : t_2.$$

Laten we ons nu laten verleiden, hier de middentermen te verwisselen, dan staat er

$$s_1 : t_1 = s_2 : t_2,$$

ook weer een gelijkheid van twee verhoudingen, alleen zijn dit nu verhoudingen van weg tot tijd,

verhoudingen tussen twee systemen: *extern*

genoemd, en de eenparigheid wordt nu zo uitgedrukt, dat de

verhouding weg tot tijd constant

is.

Verhoudingen kunnen ook als

quotiënten

opgevat worden en dan beantwoordt aan

de interne verhouding een getal,

maar aan

de externe verhouding weer een grootheid,

in casu het

quotiënt van weg en tijd: snelheid.

De hele redenering, in 't bijzonder het verwisselen van de middentermen van een evenredigheid, is voor ons gesneden koek. Ik vraag me af of we ons altijd voldoende realiseren dat dit voor lerenden bepaald niet zo vanzelfsprekend behoeft te zijn. In het oudere rekenonderwijs kende men deze moeilijkheden wel. Men trachtte ze de baas te worden met twee soorten deling, de verhoudings- en de verdelingsdeling. Met het verdwijnen van deze siamese tweeling schijnt tegenwoordig ook het begrip voor dit probleem zoek te zijn geraakt. Waar het gevoel voor de gedachtesprong van interne naar externe verhouding ontbreekt, vraagt niemand zich meer af of hij voor de lerende niet te groot zou kunnen zijn.

De antieke meetkundige traditie stond alleen formuleringen met *interne* verhoudingen toe, algebraïsche operaties met grootheden werden alleen in deze ingewikkelde meetkundige inkleding toegelaten. Het is een van de complicaties van Griekse wiskunde, dat bij het ontbreken van externe verhoudingen de verwisseling van de middentermen en evenredigheden in 't algemeen niet toegestaan is en omzeild moet worden. De antieke traditie heeft in de theoretische natuurwetenschappen nog lang doorgewerkt. Men denke bijv. aan de wetten van Kepler

in gelijke tijden veegt de voerstraal gelijke oppervlakten uit,

de kwadraten van de omlooptijden verhouden zich als de derde machten van de grote assen.

In handel en techniek gaven rekenaars bepaald de voorkeur aan directe algebraïsche operaties met grootheden, in 't bijzonder externe verhoudingen. Zuivere wiskundigen kennen het probleem nauwelijks omdat ze nog steeds weinig begrip tonen voor het rekenen met grootheden.

De eenparige beweging was hier als paradigma bedoeld. De generalisatie mag aan de lezer worden overgelaten. Het is nu wel duidelijk wat ik met

interne verhoudingen (binnen een grootheid)

en

externe verhouding (tussen twee grootheden)

bedoel. Ook is wel duidelijk bij afbeeldingen van grootheden de

invariantie van de inwendige verhoudingen

en de daarmee equivalente

standvastigheid van de externe verhoudingen,

die

lineariteit van de afbeelding

betekent — ons voorbeeld van

de eenparige beweging als lineaire afbeelding van tijd op weg.

De lineariteit van een afbeelding t is overeenkomstig op twee manieren gedefinieerd

impliciet (postulatorisch)

‘aan de som beantwoordt de som’, $f(x + y) = f(x) + f(y)$,

expliciet (algoritmisch)

$f(x) = \alpha x$ voor zekere α en alle x .

Nog eens: het is zo vanzelfsprekend dat we er nauwelijks nog aan denken, maar we mogen niet verwachten, dat het zo maar uit ons onbewuste in dat van onze leerlingen diffundeert.

Het is nog iets gecompliceerder dan ik het hier uiteenzette.

Bij de eenparige beweging moesten aan tijdsintervallen van gelijke lengte, waar dan ook aflopend, wegintervallen van gelijke lengte beantwoorden. Dat aan het samenvoegsel van twee aansluitende tijdsintervallen het samenvoegsel van de beantwoordende wegintervallen beantwoordt, wordt niet expliciet genoemd; het is in het begrip ‘beweging’ besloten, en analoog is het bij andere paren grootheden, zeg volume en gewicht van een stof gesteld. Heb ik het daarentegen over de functie f die een grootheid op een andere afbeeldt, dan is van de afzonderlijke tijds- of wegintervallen (en dergelijke) al geabstraheerd, ze zijn door hun lengtes en duren (en dergelijke) vervangen, en hetgeen ik dan uitdrukkelijk te eisen verplicht ben, is juist dat (zoals bij de objecten aan samenvoegsel samenvoegsel) bij de groothedswaarden aan som som beantwoordt. Ik had dit in sterk geformaliseerde vorm puntiger kunnen zeggen, maar wilde te veel formalisme vermijden.

6.4 Positie- en compositiestaten

We moeten ‘verhouding’ in een veel breder kader zien dan als relatie in of tussen grootheden. Ik geef dit kader aan door zulke disparate voorbeelden als

- 6.4.1 een verzameling van diersoorten met hun gemiddelde gewichten of andere kwantitatieve kenmerken,
- 6.4.2 een verzameling van vliegverbindingen met bijbehorende prijzen (of afstanden),
- 6.4.3 een verzameling van landen met hun inwonertallen (of oppervlakten),
- 6.4.4 een verzameling van waren met hun prijzen (of gewichten),

- 6.4.5 de verzameling van de componenten van een legering, met bijbehorende massa's,
- 6.4.6 de verzameling van de leeftijdsklassen van een bevolking met de bijbehorende aantallen,
- 6.4.7 de verzameling van de gebruikscategorieën van de bodem van een land met de bijbehorende oppervlakten.
- 6.4.8 de verzameling van de ziektes met telkens het aantal ziektegevallen voor een bepaald jaar,
- 6.4.9 de verzameling van de puntenparen van een vlakke figuur met de bijbehorende afstanden.

Het *gemeenschappelijke* in deze voorbeelden is

een verzameling, in 't vervolg veelal door Ω , Ω' , ... aangeduid,

en

een functie op deze verzameling, in 't vervolg veelal door w , w' , ... aangeduid,

waarvan de waarden tot een zekere grootheid behoren.

Tussen de eerste vier (6.4.1–4) en de tweede vier (6.4.5–8) voorbeelden is er echter een diepgaand *verschil*:

In de eerste groep zijn de elementen van Ω

objecten in een primitieve zin en Ω is door *gemeenschappelijke* trekken van die objecten gedefinieerd (diersoorten, vliegverbindingen, landen, waren),

in de tweede groep zijn de elementen van Ω

klassen van een 'populatie' die door zekere in de populatie relevante criteria onderscheiden zijn (diverse leeftijden in een bevolking enz.)

In de eerste groep

beschrijft de functie w inwendige eigenschappen van de elementen van Ω ,

in de tweede groep

beschrijft de functie w de grootte van de diverse klassen (niet noodzakelijk een geheel getal, zie voorbeeld 6.4.5).

Ik wil – vrij willekeurig – het eerste en tweede respectievelijk

positiestaat

compositiestaat

noemen.

Het laatste, zeer belangrijke, voorbeeld (6.4.9), is van een geheel ander karakter; we komen er in 6.5 op terug.

Positie- en compositiestaten onderscheiden zich uiteraard in het gebruik. Ze treden meestal koppelsgewijs op. Voor dit algemeen te formuleren, licht ik het aan voorbeelden toe:

Een koppel positiestaten:

Ω een verzameling van landen,
 w de functie, die van elk het inwonertal aangeeft,
 w' de functie, die van elk de oppervlakte aangeeft;

de verhouding van w tot w' (bevolkingsdichtheid) kan variëren: een land heeft 'naar verhouding' het zelfde (een groter, een kleiner) aantal inwoners als (dan) een ander.

Ω een verzameling plastic zakjes in de supermarkt met erop vermeld
 w de prijs
 w' het gewicht,

de verhouding van w tot w' (eenheidsprijs) kan variëren; voor zakjes die 'dezelfde' waar bevatten, zal die verhouding dezelfde zijn; hier zijn w en w' lineair afhankelijk.

Een koppel compositiestaten:

We beschouwen twee metaal-legeringen met 'dezelfde' componenten. De componenten van de legeringen vormen twee verzamelingen

Ω en Ω'

met de bijbehorende massafuncties

w en w'

— bijvoorbeeld

30 kg brons bestaande uit 20 kg koper en 10 kg tin

65 kg brons bestaande uit 40 kg koper en 25 kg tin

Ω en Ω' zijn beide de verzameling

{ koper, tin },

op de eerste resp. tweede legering betrokken, en

w (koper) = 20 kg	w (tin) = 10 kg
w' (koper) = 40 kg	w' (tin) = 25 kg.

In het algemeen kan de verhouding van w tot w' variëren — roder of geler koper; zijn w en w' lineair afhankelijk dan is het 'dezelfde' legering.

Twee bevolkingen — van Nederland en van de Filippijnen — zijn volgens leeftijds-klassen opgedeeld.

Ω en Ω'

zijn de leeftijdsklassen

$\{ [0, 1), [1, 10), [10, 20), \dots \}$.

w en w'

zijn de resp. aantal mensen in die leeftijdsklassen.

In de ene bevolking zijn er naar verhouding meer zuigelingen, meer bejaarden, enz. dan in de andere.

In het geval van een paar *positiestaten* is sprake van

één verzameling Ω

met twee functies w, w' er op,

waarvan de — veelal *externe* — verhouding in 't oog wordt gevat.

In het geval van een paar *compositiestaten* is sprake van

klassenindelingen Ω en Ω' van twee populaties, uitgevoerd volgens hetzelfde principe en op natuurlijke wijze met elkaar geïdentificeerd

met twee functies w, w' er op,

waarvan de — doorgaans *interne* — verhoudingen in 't oog worden gevat en eventueel vergeleken.

6.5 Structuurstaten

We gaan nu met het voorbeeld 6.4.9 door. Het vertoont ons

een verzameling Ω gebaseerd op een sterke — bij voorkeur meetkundige — structuur Σ met een maatfunctie w .

In casu was Σ een vlakke figuur, bijv. het hele vlak, Ω de verzameling van zijn puntenparen, w de afstandsfunctie.

Men zou ook kunnen denken aan voor

Ω de verzameling der vlakke krommen met w als booglengte,

Ω de verzameling der rechthoeken met als w de oppervlakte daarvan.

Ik zal een dergelijk systeem Ω, w

een structuurstaat

of nauwkeuriger

een Σ -structuurstaat

noemen (indien Σ de structuur is waarover hij is gevormd).

In het gebruik treden structuurstaten weer koppelsgewijs op, Ω, w en Ω', w' , waarbij het echter kan gebeuren dat $\Omega = \Omega'$ en $w = w'$ is.

Een koppel structuurstaten:

Ω is de verzameling der puntenparen van een vlakke figuur Σ ,
 Ω' is de verzameling der puntenparen van een vlakke figuur Σ' ,
 w en w' zijn de respectievelijke afstandsfuncties.

Verder is er een afbeelding

$$f \text{ van } \Sigma \text{ in } \Sigma',$$

die zich op natuurlijke wijze als afbeelding

$$f \text{ van } \Omega \text{ in } \Omega'$$

voortzet. Een voor ons relevante eigenschap van f is

gelijkvormigheid.

Evenals de eenparigheid van een beweging in 6.3 kan gelijkvormigheid allereerst gekarakteriseerd worden door

f beeldt puntenparen met onderling gelijke afstand in puntenparen met onderling gelijke afstand af

oftwel

f behoudt afstandsgelijkheid

of — rijker geformuleerd, maar equivalent —

f voert paarsgewijs congruente in paarsgewijs congruente figuren over,

oftewel

f behoudt congruentie.

In deze formulering treden nog geen ‘verhoudingen’ op.

Onder de — uiteraard vanzelfsprekende — veronderstelling van continuïteit is deze karakterisering equivalent met

f behoudt verhoudingen, d.w.z.

$$w'(f\alpha) : w'(f\beta) = w(\alpha) : w(\beta), (\alpha, \beta \in \Omega).$$

Het gaat hier om

het behoud van *inwendige* verhoudingen

respectievelijk in Ω en in Ω' genomen. Evenals in 6.3 bij de grootheden kan

gelijkvormigheid

van f in

de constantie van *uitwendige* verhoudingen

worden uitgedrukt

$$w'(f(\alpha)) : w(\alpha) = w'(f(\beta)) : w(\beta) \quad (\alpha, \beta \in \Omega).$$

Een ander voorbeeld:

Ω een verzameling van lijnstukken, w de lengte-functie;

Ω' de verzameling van vierkanten op deze lijnstukken, w' de oppervlakte-functie.

Het gebruik hiervan behoeft niet nader te worden toegelicht.

6.6 Het optreden van verhoudingen in 6.3.5 onderling vergeleken

In 6.3 treden verhoudingen in en tussen *grootheden* op,
in 6.4 in en tussen positie- en compositiestaten,
in 6.5 in en tussen structuurstaten.

De gevallen 6.3 en 6.5 gelijken op elkaar door de strakke mathematische structuren die eraan ten grondslag liggen, terwijl in 6.4 de structuren mathematisch vrij zwak zijn. 6.3 en 6.5 lijken ook voorzover op elkaar dat de belangrijke eigenschap van

evenredigheid of gelijkvormigheid

gedefinieerd kan worden

zonder verhoudingen

puur door

behoud van gelijkheid of congruentie.

In de gevallen 6.4 kan zoiets niet of alleen met betrekkelijk ingewikkelde redeneringen

Het geval 6.5 onderscheidt zich voordelig van 6.3 doordat

congruentie van figuren krachtiger zichtbaar gemaakt kan worden dan gelijkheid van grootheidswaarden.

Didactische consequenties zullen straks uit deze verschillen voortvloeien.

6.7 Verhouding bij gelijkvormigheden

In onze fenomenologie verschuiven we nu het accent naar het didactische.

Verhouding als begrip en zelfs al als mentaal object vereist een hoog niveau van ontwikkeling. Daarentegen is het gevoel voor, het zien van, verhoudingen opmerkelijk vroeg in de ontwikkeling aanwezig. Volgens Piaget zouden topologische begrippen aan euclidische voorafgaan. Dit is echter – we komen er nog op terug – alleen ten aanzien van de ruimtelijke relaties van inclusie, exclusie, overlapping, het geval, maar zulke relaties zou een wiskundige nauwelijks tot de topologie rekenen, al is dit bij psychologen gebruikelijk. Werkelijke topolo-

gische eigenschappen aanvaarden, d.w.z. de equivalentie onder continue één-één-afbeeldingen tot maatstaf nemen, is volstrekt niet iets dat vroeg in de ontwikkeling geplaatst kan worden; in tegendeel het is iets veel te geraffineerd om zo vroeg verwacht te kunnen worden. Piaget en de onderzoekers, die zijn termen en experimenten herhalen, zijn hier danig in de war. Uit de onbekwaamheid van kleine kinderen om cirkels en vierkanten zo te tekenen, dat ze behoorlijk van elkaar verschillen, concludeerden ze op predominantie van het topologische. Kinderen zijn echter zeer vroeg in staat, cirkels en vierkanten duidelijk te onderscheiden, en daar komt het op aan — dat kleine kinderen tekeningen in boeken en van volwassenen met andere maatstaven meten dan hun eigen productie, is een soort systeemscheiding die, naar ik meen, niet nader onderzocht is.

Dat kinderen gelijkheid en het groter- en kleiner-zijn van objecten vroegtijdig herkennen, kan voor geen twijfel vatbaar zijn, evenmin dat ze gelijkvormigheid als een operationele equivalentie hanteren. Ik ga zelfs zover, te stellen dat congruenties en gelijkvormigheden ingebouwd zijn in dat deel van ons centraal zenuwstelsel, dat de optische percepties verwerkt. Het onverwijld kunnen heridentificeren van objecten na draaiing (van object of lichaam) en na afstands-wijziging veronderstelt in het centraal zenuwstelsel als het ware een computer-programma voor het elimineren van dit soort afbeeldingen — hoe zulk een programma eruit zou kunnen zien, is voor mij een groot raadsel, zijn existentie, waaraan ik niet twijfel, iets als een wonder.

Het kind herkent vroegtijdig tekeningen en modellen van dieren, meubels, auto's, fietsen, boten als beelden van deze objecten, onverschillig op welke schaal zij het origineel weergeven, en zelfs tekeningen of modellen op verschillende schaal naast elkaar worden als beelden van hetzelfde object aanvaard. 'Hoe groot is een walvis in het echt?' kan een kind vragen, overtuigd dat de plaat — van de schaal afgezien — de walvis getrouw weergeeft. Wel zijn er ook van die schetsmatig, met één lijn getekende, walvissen, maar zelfs dit verschil tussen een fotografisch getrouw beeld en een karakteristieke schets wordt begrepen.

Wegingen met een veerbalans, die Bastiaan (5; 6) uitvoerde, werden op een horizontaal en op andere schaal getypte veerbalans aangetekend. Bastiaan merkte wel onbeduidende verschillen in de cijfernotatie (1 i.p.v. 1) op, maar noch het verschil in oriëntatie noch de afwijkende schaal. Het getypte beeld van de veerbalans was een structureel getrouw beeld.

Na een reeks zonnedagen ziet Bastiaan (6; 1) weer wolken en zegt: 'Het zal regenen'. Ik: 'Neen, dit zijn heel hoge wolken, daar komt geen regen uit; regenwolken zijn laag en donker.' Hij: 'Hoe hoog zijn die wolken?' Ik (overdrijvend): '10 duizend meter.'. Hij: 'En hoe hoog zijn regenwolken?' Ik: 'Duizend meter'. Hij: 'Dus (op de grond wijzend) als wij hier zijn, en dit (wijst ongeveer 30 cm hoog) zijn regenwolken, dan zijn dat (wijst ongeveer 1 meter hoog) geen regenwolken.'

Zonder aarzelen aanvaarden kinderen dat op het schoolbord objecten tien keer zo groot als op het werkblad worden getekend, dat de getallenlijn op het schoolbord 1 dm tot eenheid heeft, tegen die op het werkblad met 1 cm als eenheid. Zij aanvaarden naast elkaar getallenlijnen waarbij hetzelfde interval i.p.v. de eenheid een tiental of een honderdtal voorstelt. Kinderen zouden echter onmiddellijk protesteren tegen wijzigingen van de structuur die tegen de gelijkvormigheid

van de afbeelding in zouden gaan:

wat onderling gelijk is in het origineel
moet onderling gelijk zijn in het beeld

waaruit naar we weten volgt

de invariantie van de interne verhoudingen,
die afbeeldingen karakteriseert als
gelijkvormigheden.

Dit, zoals we ook zullen zeggen,

verhoudingsgetrouw afbeelden

is de kinderen vroegtijdig vertrouwd bij afbeeldingen van vlakke of ruimtelijke figuren — schilderijen, copieën van schilderijen, maquettes. Systematische of toevallige afwijkingen van dit afbeeldingsbeginsel worden geconstateerd, bij voorbeeld

het gebruik van verschillende maatstaven in verschillende richtingen,
het gebruik van verschillende maatstaven bij verschillende figuren,
het gebruik van verschillende maatstaven bij onderdelen van dezelfde figuur,

maar dit geschiedt niet door verhoudingen of maatstaven expliciet te maken, maar in formuleringen zoals

het hoofd is veel te groot — namelijk vergeleken bij de romp,
dit is veel te lang — vergeleken bij de breedte,

— aanmerkingen t.a.v. het gebrek aan gelijkvormigheid, maar dan zonder explicitering van verhoudingen.

Het vereist al dieper inzicht in meetkundige relaties om andere parameters als criteria erbij te betrekken:

wat in 't origineel een rechte hoek is, moet er in het beeld ook een zijn,

want

gelijkvormigheden laten de hoeken invariant.

Met dit — wat ik noemde — zien van of gevoel voor gelijkvormigheid is het kind uiteraard nog ver verwijderd van gelijkvormigheid als mentaal object, of als begrip. Ik noem hier een aantal tussenniveaus op:

Verhoudingsgetrouwheid of -ongetrouwheid van afbeeldingen zien,
Verhoudingsgetrouwe afbeeldingen maken,
Conflicten bij het maken van verhoudingsgetrouwe afbeeldingen beslissen,
Criteria voor verhoudingsgetrouwheid, zoals

behoud van lengtegelijkheid,
behoud van congruentie,
behoud van interne verhoudingen,
constantie van externe verhouding,
behoud van hoeken,
operatief hanteren,
formuleren,
in verband met elkaar brengen,
en over het noodzakelijke en voldoende zijn van dergelijke criteria
beslissen.

In deze sequentie treden aanvankelijk

verhoudingen niet expliciet

op, dan kan

verhoudingsgelijkheid (intern of extern) expliciet

worden en pas in laatste instantie worden de

verhoudingen zelf expliciet.

Het is een sequentie zoals analoog bekend van lengte en andere grootheden.

Deze meetkundige context van 'verhouding' heeft vergeleken bij andere het grote voordeel van krachtige visualiteit. Waar het didactisch op aankomt is het

visueel redeneren geleidelijk te verbaliseren.

Meestal zijn contexten van 'verhouding' niet visueel van aard, maar kunnen dan gevisualiseerd worden. Vroegtijdige bekendheid met de verhoudingsgetrouwe afbeeldingen is een steun voor de visualisering van a priori niet visuele contexten van 'verhouding'. Hiervoor is echter vereist dat de gevisualiseerde verhouding enigszins losgemaakt wordt uit de context van de globale gelijkvormigheden. Om de visualiserende brug te slaan van niet visuele naar visuele verhoudingen, moet de stricte visualisering door gelijkvormigheid afgezwakt worden.

Gelijkvormigheid is mathematisch een afbeelding, die zich van vlak op vlak uitstrekt. In elke visualisering neemt men genoeg met lineaire of vlakke figuren, die door hun afmeting en structuur het hele vlak suggereren, stukken werkelijkheid en hun plaatjes, behangpatronen en andere structuren die naar binnen en buiten voortgezet kunnen worden gezien. Voor alle activiteiten en hun diverse niveaus die we zonet opsomden is zo niet vereist dan toch bevorderlijk

de rijke structuur van origineel en beeld,

het feit, althans de suggestie, dat het ene beeld is van het andere.

Te weinig structuur kan een beletsel zijn, om gelijkvormigheden van figuren ook maar optisch te herkennen — dit geldt trouwens ook bij volwassenen. De min of meer algoritmische criteria om gelijkvormigheid te herkennen, kunnen echter uit rijker gestructureerd materiaal geïsoleerd en daarmee geoefend worden langs

de boven aangegeven lijn van activiteiten, om dan ook in minder gestructureerd materiaal werkzaam te zijn.

Van het feit, dat het ene beeld is van het andere, naar de *suggestie* ervan is het maar een kleine stap: het ontbreken van elke suggestie kan een beletsel zijn, om ook maar aan gelijkvormigheden te denken, indien het kunnen missen en zelf aanvullen van deze suggestie niet in het leerproces is voorbereid.

Getekende rechthoeken moeten op hun gelijkvormigheid worden vergeleken – alleen al het – structurerend – toevoegen van de diagonalen verandert wan-successen in successen. Het vergelijken van weglengten op plattegronden en in de werkelijkheid functioneert beter dan van omtrekken van kale gelijkvormige rechthoeken. Dat alle cirkels met elkaar gelijkvormig zijn, is een inzicht dat door gestructureerde cirkels verworven kan worden, zoals onze guldens, kwartjes, dubbel-tjes die – recto gezien – zelfs in oppervlakte-details gelijkvormig zijn. De kale cirkel is geen goed medium om de interne verhouding van omtrek (of rollend afgelegde weg) tot middellijn te vatten. Beter is de aanpak via de externe verhouding van middellijnen en omtrekken bij verschillende (en gelijkvormig gestructureerde) cirkels.

Ik vat het zojuist uiteengezette samen in een lijst van activiteiten:

Hetgeen

in een rijk gestructureerde context

t.a.v. verhoudingen en verhoudingsgetrouwheid

beoefend, erkend, geëxpliciteerd

wordt, overdragen

in een minder (of weinig) gestructureerde context.

Ten behoeve van verhoudingen en verhoudingsgetrouwheid

een weinig gestructureerde context verrijken,

in een niet-meetkundige context meetkundige structuur aanbrengen,

een niet-meetkundige context in een meetkundige vertalen,

al dan niet meetkundige contexten als meetkundige beelden van elkaar begrijpen en laten functioneren.

6.8 Naar verhouding

Terwijl men met verhoudingsgetrouwe afbeeldingen een lange weg kan gaan zonder verbalisering van hetgeen als verhouding wordt gezien, ervaren, geconstrueerd, vereisen andere contexten vroegtijdige verbalisering, zij het dan niet direct die van verhoudingen, maar van het begrip

naar verhouding.

Als mentaal object is dit tegen het einde van de kleuterleeftijd enigszins aanwezig.

Deze chocola is zoeter omdat er — naar verhouding — meer suiker in zit.

Een vlo kan — naar verhouding — hoger springen dan een mens.

Een reis naar Zuidamerika is — naar verhouding — duurder dan een in Europa.

In Nederland zijn er — naar verhouding — meer fietsen dan in de Bondsrepubliek Duitsland.

In de expliciete formulering kan het 'naar verhouding' ontbreken, ook al is duidelijk, dat het op die plaats bedoeld is. De termen

naar verhouding meer, minder, evenveel

kunnen van

grof kwalitatief tot precies kwantitatief

bedoeld zijn; speciaal bij 'meer' of 'minder' kunnen schattingen beoogd zijn, die door

veel, zeer veel, iets

verfijnd kunnen worden.

Bij 'naar verhouding' ontbreekt een relatieterm, die

vanzelfsprekend

kan zijn of

expliciet toegevoegd wordt,

bijv.

in verhouding tot het aantal inwoners zijn er in Nederland meer fietsen dan in de Bondsrepubliek Duitsland.

Een mogelijke sequentie van niveaus:

Inzien dat ordeningen (van groter en kleiner, of meer en minder) gerelativeerd kunnen worden opgevat (naar verhouding groter, kleiner, meer, minder).

'Naar verhouding' begrijpen als 'in verhouding tot...' en op de relatieplaats het in het onderhavige geval vereiste invullen.

'Naar verhouding' en 'in verhouding tot' zinvol gebruiken.

'Naar verhouding' en 'in verhouding tot' uit de context aanvullen.

Operatief weten wat 'naar verhouding' en 'in verhouding tot' in 't algemeen betekent.

Uiteenzetten wat naar 'verhouding' en 'in verhouding tot' in 't algemeen betekent.

Van

grof kwalitatief tot precies kwantitatief

kunnen hierbij een aantal stadia worden doorlopen waarbij in laatste instantie naar gelang van het onderwerp

interne en externe verhoudingen

over relatieve ordening beslissen.

Opgaven waarin deze activiteiten beoefend worden, kunnen een visueel karakter hebben:

huizen, mensen en bomen op verschillende schaal

– welke horen bij elkaar en waarom?

een aantal personen en, op andere schaal, een aantal kledingstukken

– wat hoort samen?

muren op verschillende schaal en van verschillende diktes

– welke zijn dikker?

weilanden met bloemen, vijvers met kikkers, hemels met wolken

– waar zijn er naar verhouding meer?

Maar ook andere zintuigen kunnen erbij worden betrokken:

een groot orkest, maar dat naar verhouding zachte muziek voortbrengt.

6.9–6.12 NORMERING

6.9 Het complex van technieken, onjuiste toepassing van technieken, door die technieken bepaalde of liever niet bepaalde attitudes, dat ik met het woord ‘normering’ aanduid, wil ik door een aantal voorbeelden introduceren:

Als we ons de aarde als speldekknop denken (1 mm middellijn),

verschijnt de zon als een bol met middellijn 10 cm op een afstand van 10 m.

De maatstaf-reductie dient om krasse verhoudingen te visualiseren; men kiest een vertrouwde eenheid als uitgangspunt, hoe groot de schaal is, doet er weinig toe.

Als we de ontwikkeling van het leven op aarde zich in een etmaal laten voltrekken, is de oermens een minuut geleden opgetreden en de menselijke beschaving een seconde geleden begonnen.

Het lijkt veel op het eerste voorbeeld: nu een tijdschaal-reductie, die eventueel door een lineaire tekening kan worden geïllustreerd. De eenheid ‘dag’ is hier voor de grootste component gekozen, terwijl in het eerste voorbeeld met de speldekknop was begonnen.

De voorbeelden

Een op de vijf kinderen die geboren worden, is een Chinees,
Een op de vier auto's is een Fiat

tonen een voorkeur voor verhoudingen die als 'één op de...' zijn genormeerd.

Een recept 'boeuf à trois moutardes' voor vier personen...

— als maaltijd-eenheid wordt voor recepten vaak 4 gekozen, in veel gevallen zal dit omrekeningen besparen. Het is echter riskant om bijvoorbeeld bij bakprocedures zonder meer op evenredigheden te vertrouwen.

De zuiverheid van drink- en zwemwater wordt aangegeven met

zoveel gram zout in één liter

of

zoveel colibacteriën in één cc,

waarbij de hoeveelheden, die gedronken worden of waarin gezwommen wordt van geheel andere afmetingen zijn en de feitelijk onderzochte hoeveelheden weer van andere, maar dit blijft geheel buiten beschouwing.

De afvalproductie wordt met zulk een vage eenheid als

een inwonerequivalent

gemeten, dat alleen maar dient om de productie van huishoudingen en industriële bedrijven te schatten en er een belasting aan te verbinden.

De kracht van nucleaire ontploffingen wordt in

kilotonnen TNT

gemeten, een merkwaardige normering die veeleer dient om nucleaire bommen onderling dan met conventionele springstof te vergelijken.

Als de kosten van levensonderhoud in 1965 op 100 worden gesteld, komen ze in 1975 op 147

— een voorbeeld voor de veel gebruikte indexcijfers, waarbij bij voorkeur van een basis 100 wordt uitgegaan. In andere gevallen wordt het gemiddelde als maat genomen en gelijk aan 100 gesteld, bijvoorbeeld bij het I.Q.:

de gemiddelde score in een bepaalde populatie (van bepaalde leeftijd) wordt 100 gesteld om andere scores hiermee te meten.

Die 100 sluit aan de ene kant goed aan bij het tientallig stelsel, en bewerkt aan de andere kant dat desniettemin tientallige *breuken* zoveel mogelijk vermeden worden. Dat het 100 en niet bijvoorbeeld 1000 is, komt van het percent-rekenen. In het traditionele rekenonderwijs waren percent en rente nauw aan elkaar gelieerd. Dit is niet van ouds zo geweest; rente werd veeleer in 'één op de...' uitgedrukt (evenals bij belastingen die als tiende penning, dertiende penning, enz. werden geheven). Pas met de decimalisering van het geld werd het rente-percent-

rekenen effectief. De meest uitgebreide toepassing van het percentrekenen is tegenwoordig die bij compositiestaten:

het geheel wordt 100 gesteld, om er de delen in uit te drukken.

De bedoeling hiervan is

verschillende compositiestaten vergelijkbaar te maken,

waarbij de vergelijking nog

door visualisering gesteund

kan worden, bijv. door middel van sectordiagrammen. De behoefte aan dit vergelijkbaar maken van gegevens in de vorm van compositiestaten is tegenwoordig de sterkste motivering voor het percentrekenen; bovendien is het percentrekenen hier een werktuig, dat zich vanzelf aanbiedt, zodra het idee is opgevat dat ten behoeve van vergelijkbaarheid de totalen uniform genormeerd moeten worden, dus niet

als Nederland even groot was als de Bondsrepubliek,

noch

als de Bondsrepubliek even groot was als Nederland,

maar

stel de oppervlakte (het inwonertal) van beide op 100 (ook wel eens 1000), dan...

Het voorafgaande samenvattend, constateer ik een aantal niveaus t.a.v.

het overzichtelijk maken van positie- en structuurstaten door normering van een component,

het vergelijkbaar maken van compositiestaten door normering van het totaal (meestal op 100) waarbij de absolute gegevens en de schaafactor een zo ondergeschikte rol spelen dat zij niet of nauwelijks worden geëxpliciteerd,

begrijpen van de normering,

begrijpen van de zin van het normeren,

normeringen uitvoeren waar zulks geëist wordt,

normeringen uitvoeren waar zulks doelmatig is,

deze activiteit operatief begrijpen

en beschrijven

en in een groter raam plaatsen.

6.10 Het voor deze benadering karakteristieke vergeten van de ongenormeerde gegevens en de schaafactor kan een averechtse uitwerking hebben:

er wordt aan van normering afhankelijke data, bijv. index-cijfers, absolute betekenis toegekend, in 't bijzonder worden van verschillende normeringen afkomstige data zonder hernormering met elkaar vergeleken;

het getal 100 gaat een als het ware magische rol spelen;

percentages die van verschillende normeringsprocedures afkomstig zijn, worden opgeteld of tot -- niet gewogen -- gemiddelden verwerkt;

het wekt verbazing en wordt niet begrepen, wanneer -- zeg bij verkiezingen -- een partij in alle kiesdistricten zijn percentages vooruit ziet gaan, terwijl over 't geheel het percentage zakt;

er wordt dubbelop genormeerd, zoals in het voorbeeld -- uit een dagblad -- in 1972 is het nationaal product per hoofd van de bevolking van Brazilië met 5% gestegen, maar deze stijging is voor 't grootste deel te niet gedaan, doordat de bevolking in dezelfde tijd met 4½% steeg.

6.11 Subtieler en tevens gevaarlijker is de uitwerking van het vergeten van de ongenormeerde gegevens doordat, bijv. bij statistieken, tevens vergeten wordt

hoe nauwkeurig de genormeerde gegevens zijn:

één op de twee, of 50% kan uit een totaal van net twee verkregen zijn of als een min of meer ruwe schatting uit een totaal van duizend of een miljoen.

Nauwkeurigheidskwesties kunnen zich bij meetresultaten voordoen of ze kunnen van stochastische oorsprong zijn -- trouwens ook bij metingen, exacte of schattende, is de bron van de onnauwkeurigheid uiteindelijk weer stochastisch. 'Nauwkeurigheid' verdient afzonderlijk te worden behandeld, maar inmiddels willen we dit onderwerp in 't verband van normering van verhoudingsgegevens al aangeraakt hebben. We komen er trouwens in dit hoofdstuk nog in een ander verband op terug.

6.12 Er doen zich gevallen voor waar normeringen plaats vinden of erom gevraagd wordt, hoewel ze niet ter zake doen of zelfs vertroebelend werken. Voorbeelden:

Een om de evenaar van de aarde sluitend touw wordt met 1 meter verlengd om weer, nu op afstand de evenaar te omgeven. Kan er een mens onderdoor kruipen?

Op deze opgave wordt met een vraag naar de straal of diameter van de aarde gereageerd, die er gezien het lineaire verband tussen straal en omtrek niet toe doet.

Jan en Piet wonen en werken op hetzelfde adres; Jan fietst 30 minuten over de afstand, terwijl Piet er 40 over doet. Jan vertrekt 5 minuten na Piet. Waar haalt hij hem in?

Op deze opgave wordt meestal met een vraag naar de afstand tussen woon- en werkplaats gereageerd, die er ook weer om lineariteitsredenen niet toe doet.

Nog krasser: de vraag van een leerling, die van het metrische op het angelsaksische matensysteem moet overschakelen: Hoe groot is hier π ?

Het voorafgaande laat zich als volgt samenvatten:

Inzicht in de irrelevantie van normeringen bij lineaire betrekkingen.

6.13 Visualiseringen

Het begrijpen van verhoudingen kan door visualisering gestuurd, maar ook verdiept worden. Ter illustratie van

positiestaten: histogrammen of beeldstatistieken

compositiestaten: cirkelsectordiagrammen en andere vlakverdelingen.

Voorbeeld van gevisualiseerde positiestaten: De EEG-landen worden, wat hun oppervlakte betreft, door

rechthoeken van gelijke basis en van met de oppervlakte evenredige hoogte weergegeven, die als in een histogram naast elkaar zijn geplaatst; de inwonertallen door

rijen menselijke figuren (elk bijv. één miljoen vertegenwoordigend);

beide beelden kunnen zo gecombineerd worden, dat

de menselijke figuren telkens in de rechthoeken worden geplaatst,

om de uiteenlopende dichtheid van bevolking (verhouding van inwonertal tot oppervlakte) te visualiseren.

Voorbeeld van gevisualiseerde compositiestaten:

Een cirkel in sectoren opgedeeld beantwoordende aan en wat oppervlakte aangaat, evenredig met de gebruikscategorieën van de bodem van een land –

voor verschillende landen naast elkaar uitgevoerd, illustreert

de verschillen qua bodemgebruik

(meer of minder agrarisch gebruik enz.).

Dergelijke visualiseringen zijn verhoudingsgetrouwe afbeeldingen, waarbij echter op andere verhoudingen dan die van afstanden van puntenparen wordt gelet, in het onderhavige geval op

verhouding van oppervlakten van landen, inwonertallen,
bodemoppervlakten naar gebruikscategorieën,

aan de ene kant en

oppervlakten van vlakke figuren

aan de andere kant.

Men kan een sequentie van niveaus schetsen:

Histogrammen, beeldstatistieken, vlakverdelingen en dergelijke voorstellingen als verhoudingsgetrouwe beelden van positie- en compositiestaten

begrijpen,
construeren,

conflicten bij de constructie beslechten,
principes van de voorstellingen

begrijpen,
beschrijven,

de verhoudingsgetrouwheid als gemeenschappelijk principe

begrijpen,
beschrijven.

Bij het vergelijken van twee of meer op deze wijze voorgestelde positie- of compositiestaten met behulp van de visuele voorstelling vragen van

‘naar verhouding evenveel, meer, minder’ beslissen,

dergelijke beslissingen door manipulatie van het materiaal mogelijk maken,
de principes van dergelijke beslissingen

begrijpen,
beschrijven.

6.14 Structurele visualiseringsen

Door middel van structuurstaten worden niet alleen verhoudingen en evenredigheden, maar ook gehele lineaire verbanden gevisualiseerd. Men kan hierbij grafische en nomografische methoden onderscheiden

de grafiek van de lineaire functie (fig. 55),
de zonnenschaduw (fig. 56),
de lampenschaduw (fig. 57).

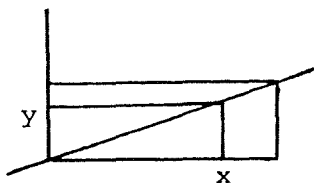


fig. 55

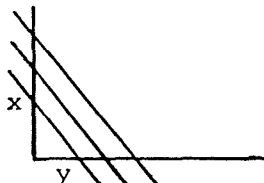


fig. 56

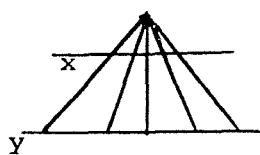


fig. 57

Deze visualiseringsen zijn, hoewel veel te weinig gebruikt, didactisch bijzonder effectief. In de lijn van de geometrisering van het elementaire onderwijs maken zij grote kans op didactische exploitatie als modellen.

Interne en externe verhoudingen en hun onderling verband

zijn met deze modellen bijzonder effectief

te zien
te begrijpen
te beschrijven.

Men houde zich dit vooral bij de lezing van 6.15 voor ogen.

6.15 Algoritmiseringen

Tegenhanger van de visualisering is de numerieke verwerking.

Het verifiëren van verhoudingsgetrouwheid van een afbeelding f wordt vereenvoudigd door de opmerking dat men voor

niet voor alle paren A, B

de geldigheid van

$$w(A) : w(B) = w'(f(A)) : w'(f(B))$$

hoeft te verifiëren. Uit de

geldigheid voor A, B en B, C

volgt immers de

geldigheid voor A, C —

de

transitiviteit van de verhoudingsgetrouwheid.

(Bij de afstandsverhoudingsgetrouwe afbeeldingen komen hierbij vereenvoudigingen, die op meetkundige feiten berusten; in het vlak is het voldoende om de verhoudingsgetrouwheid na te gaan voor de afstanden van twee vaste punten; de rest wordt door congruentiestellingen gegarandeerd.)

Minder triviaal is het, dat verhoudingsgetrouwheid zich door constantie van de schaal, dus door een externe verhouding laat beschrijven.

Belangrijk is ook het inzicht dat

compositie van verhoudingsgetrouwe afbeeldingen weer verhoudingsgetrouwe afbeeldingen oplevert

en

het gedrag van schalen (externe verhoudingen) bij compositie.

Voor afbeeldingen van grootheden is het belangrijk in te zien dat verhoudingsgetrouwheid in wezen al door

de isomorfie t.a.v. de optelling in de grootheid

wordt gegarandeerd.

Ik formuleer weer enkele niveaus:

Het toetsen op verhoudingsgetrouwheid van afbeeldingen vereenvoudigen door gebruik van

transitiviteit van verhoudingsgetrouwheid,
meetkundige congruentie-eigenschappen,
de externe verhouding en de schaal,
isomorfieën tussen grootheden t.o.v. optelling,
het gedrag bij compositie van afbeeldingen;

de constructies van verhoudingsgetrouwe afbeeldingen vergemakkelijken door middel van dezelfde beginselen;
conflicten bij het toepassen van deze beginselen beslechten;
deze beginselen

operatief begrijpen en
beschrijven;

relaties tussen deze beginselen

operatief begrijpen en
beschrijven.

Hierbij komt in de lijn van de algoritmisering:
Verhoudingen in de zin van het breukrekenen

operatief begrijpen en
beschrijven;

eigenschappen van verhoudingen als eigenschappen van breuken

operatief begrijpen en
beschrijven;

verhoudingsgetrouwheid van afbeeldingen van grootheden als lineariteit van afbeeldingen

operatief begrijpen en
beschrijven;

hun eigenschappen als eigenschappen van lineaire afbeeldingen

operatief begrijpen en
beschrijven.

Het omgekeerde, dat eigenlijk in het hoofdstuk Breuken zou horen, kan hier expliciet aan worden toegevoegd:

Breuken in de zin van verhoudingen

operatief begrijpen en
beschrijven.

Eigenschappen van breuken als eigenschappen van verhoudingen

operatief begrijpen en
beschrijven;

lineaire afbeeldingen in het talgebied als verhoudingsgetrouwe afbeeldingen
van grootheden

operatief begrijpen en
beschrijven;

hun eigenschappen als eigenschappen van verhoudingsgetrouwe afbeel-
dingen

operatief begrijpen en
beschrijven.

Verhoudingsgetrouwe afbeeldingen dienen niet alleen als illustratie, maar hebben
eigen cognitieve taken als modellen, zoals het eerste voorbeeld (de eenparige
beweging) als afbeelding van de grootheid lengte op de grootheid tijd) liet zien.

De verhoudingsgetrouwe afbeeldingen worden als zodanig

grafisch (de rechte als beeld van de lineaire functie)
nomografisch en
met de rekenliniaal

geïllustreerd en

door evenredigheidstafels en
door formules van lineaire functies

gealgoritmiseerd.

Ik vermeld niveaus:

het lezen,
het maken,
het operatief begrijpen
en het beschrijven

van de principes van deze hulpmiddelen,

geïsoleerd en
in onderling verband.

6.16 Criterium voor verhoudingsgetrouwheid

De principes op grond waarvan men

herkent en voorspelt

dat een afbeelding verhoudingsgetrouw is, liggen dieper en zijn moeilijker toe-
gankelijk. Een component ervan is in de fenomenologie van de grootheden opge-
sloten, waar we nog op terug moeten komen. Inmiddels enkele aanwijzingen.

Ik begin met een exemplarische lijst van bijvoeglijke naamwoorden, waarvan de betekenis direct duidelijk zal worden.

vele, groot, lang, breed, hoog, dik, veel, vol, lang, zwaar, snel;
sterk, oud, scherp, stomp, zacht, dicht;
helder, warm, rood, luid, nat, hoog;
zoet, mooi, pijnlijk;
schrander, interessant, slaperig, zwaar;
waardevol, duur, rijk.

Er komen woorden meermalen in voor; bij het eerste 'zwaar' kan men aan gewicht denken, bij het tweede aan zwaar werk, bij het eerste 'lang' aan afstand, bij het tweede aan duur; bij het eerste 'hoog' aan bergen, bij het tweede aan tonen, maar dat doet er in 't vervolg niet toe.

Wel kan men vragen:

Welke eigenschappen laten vergelijkende trappen toe?

Welke eigenschappen laten verdubbeling toe?

('Verdubbeling' staat hier paradigmatisch voor vermenigvuldiging, evt. ook halvering en andere deling en tenslotte ook voor optellingen.)

Hoe gaat men vergelijkende trappen na?

Hoe gaat men verdubbeling na?

Hoe maakt men vergelijkende trappen?

Hoe maakt men verdubbelingen?

Dit zijn vragen van realiteitskarakter, maar met een sterk logische of veeleer taalanalytische component.

De kernvraag is die naar het verdubbelen. Het middel om te verdubbelen is het samenvoegen van 'gelijken'. Uit een toren maakt men een dubbel zo hoge, door een gelijke erop te zetten. Men verdubbelt een gewicht suiker, door een gelijk gewicht eraan toe te voegen. Dat het niet altijd even gemakkelijk gaat, kan men aan de temperatuur zien. Ook de snelheid van een rollende bal wordt niet verdubbeld, door hem met een andere van dezelfde snelheid te verenigen.

Parameters die zich additief gedragen bij het samenvoegen heten

extensief

— aantal, lengte, oppervlakte, volume, gewicht, energie, helderheid (van een lichtbron), elektrische lading, zijn er voorbeelden van; andere zoals temperatuur, kleur, zoetheid, heten

intensief.

Echter ook de temperatuur, of veeleer het temperatuurverschil is als *extensief* parameter op te vatten, zoniet van een toestand, maar toch van een proces. Wat samengevoegd wordt, zijn dan niet toestanden, maar processen. Bijvoorbeeld t.a.v. de temperatuur: een temperatuurverschil verkregen bij verhitting door middel van een warmtebron W gedurende een tijd t , wordt verdubbeld door

‘hetzelfde’ proces te herhalen (dit klopt uiteraard alleen binnen zekere grenzen). Bij (vectoriële) snelheden is het verdubbelen samenvoegen weer van een andere aard: als A t.a.v. B en B t.a.v. C dezelfde snelheid bezit, heeft A t.a.v. C de dubbele.

Het principe op grond waarvan verhoudingsgetrouwheid van afbeeldingen wordt verklaard en voorspeld, luidt:

Twee onder dezelfde samenvoeging extensieve parameters zijn verhoudingsgetrouw gerelateerd.

Ik beweer niet dat dit diep graven ook een diepe waarheid aan het licht heeft gebracht. De uitkomst is niets anders dan hetgeen een goed onderwijzer of leraar – meer of minder bewust – er bij zou halen, om zijn leerlingen duidelijk te maken, wanneer de regel van drie wel of niet te pas komt. ‘Wie de dubbele tijd werkt, moet het dubbele verdienen’ zegt hij en schrijft misschien onder twee op elkaar aansluitende gelijke lijnstukken twee keer hetzelfde geldbedrag. Of ‘in de dubbele tijd de dubbele weg’ met een dergelijke illustratie.

Het is duidelijk dat men uit de zes vrouwen van koning Henry VIII zo niets kan opmaken omtrent het vrouwental van Henry IV, want het nummer van koningen met dezelfde naam laat zich onder geen enkele samenvoeging als extensieve parameter duiden. Ook is het duidelijk dat de regel van drie niet past bij het vraagstuk ‘als een man een zekere weg in 3 uur aflegt en zijn zoon dit in 2 uur doet, hoe lang hebben ze nodig als ze samen optrekken?’ – immers het samen optrekken, bijvoorbeeld van even snelle lopers, is geen operatie waarbij de looptijd verdubbeld wordt. Maar ook bij de arbeiders, die zeker werk eerst afzonderlijk en dan samen doen, is de kern de vraag:

verdubbelt de arbeidstijd als twee gelijken naast elkaar werken?

Neen, de tijd wordt gehalveerd, dus is de reciproke werktijd, *bij dit samenvoegen*, wel een extensieve parameter.

Ik noteer de volgende niveaus:

In reële contexten en probleemsituaties beslissen over het al dan niet verhoudingsgetrouw zijn,

reële contexten en problemen zo bewerken, dat verhoudingsgetrouwheid naar voren komt,

hierbij conflicten oplossen,

principes voor dergelijke beslissingen en constructies

operatief begrijpen en

beschrijven.

Hierbij kunnen steunactiviteiten vereist zijn, op de volgende niveaus:

Om zich over verhoudingsgetrouwheid te oriënteren

parameters die onder dezelfde samenvoeging extensief zijn

beschouwen,

opzoeken,

de betekenis van dergelijke parameters voor verhoudingsgetrouwheid
vatten en
verklaren.

In deze steunactiviteiten zijn de volgende niveaus te onderscheiden:

Omtrent parameters van toestanden of processen beslissen of zij onder
zekere samenvoeging extensief zijn,
bij samenvoegingen extensieve parameters opsporen,
bij parameters samenvoegingen opsporen, waaronder zij extensief worden.
Bij elkaar horende samenvoegingen en extensieve parameters opsporen,
operatief begrijpen wat extensieve parameters zijn en
het beschrijven.

6.17 Niet-lineariteit

Door tal van verschijnselen wordt gesuggereerd dat evenredigheid, verhoudingsgetrouwheid, lineariteit, universele modellen zijn; door het gedurig gebruik ervan wordt geloof erin bevestigd. Op zijn minst als approximatie lijkt het lineaire verband in veel gevallen als fenomenaal beschrijvingsmiddel aangewezen. We geven hier gevallen aan waar deze primitieve fenomenologie theoretisch mank gaat:

het niet-lineaire gedrag van oppervlakten en inhouden bij lineaire vermenigvuldiging

de variabiliteit — en dan op niet-lineaire wijze — van nauwkeurigheid in metingen en stochastische gegevens bij vermenigvuldiging van de steekproef.

Een historisch interessant voorbeeld:

De weddenschap van minstens één zes in 4 worpen met een dobbelsteen werd gelijkgesteld aan die op een dubbelzes in 24 worpen met twee dobbelstenen.

Nog een historisch voorbeeld:

Het *problème des partis*¹) meende men door een lineaire verdeling van de inzetten te moeten oplossen.

In beide gevallen een door langdurige praktijk bevooroordeeld vertrouwen in de lineaire functie (of regel van drie) waar een principiële aanpak vereist is. Op al deze voorbeelden moeten we als de gelegenheid zich voordoet nog terugkomen.

6.18 Het gebruik van verhoudingen en evenredigheden

Het gebruik komt er in 't algemeen op neer dat uit drie van de termen in

$$a : b = c : d$$

de vierde voorspeld wordt.

Hierbij kunnen de verhoudingen aan beide kanten

intern

bedoeld zijn en op

gelijke of verschillende grootheden

betrekking hebben, bijv.

a, b twee stroken en c, d geldwaarden

of

a, b twee wegen op een landkaart en c, d lengtes.

Of ze kunnen

extern

bedoeld zijn, bijv.

a, c twee stroken en b, d geldwaarden

of

a, c twee wegen en b, d lengtes.

Het kan ook dat een der verhoudingen

expliciet als zodanig gegeven

is, zodat feitelijk maar twee gegevens voorgelegd zijn, bijv. kan in 't geval van externe verhouding

weg: tijd, resp. gewicht: volume

expliciet als

snelheid resp. dichtheid

gegeven zijn.

Een eerder (4.19) uitvoerig behandeld verschijnsel is het benaderend vergelijken van hoeveelheden van wat we daar noemden

k -homogene verzamelingen.

In de tegenwoordige terminologie zouden we de relatie tussen het aantal $\#$ en het karakter k van een verzameling (benaderend) verhoudingsgetrouw noemen. De methode wordt gebruikt om aantallen en aantalverhoudingen te schatten.

Het doelmatig gebruik van evenredigheden sluit in

verwisseling van middentermen om het verband van interne en externe verhouding te exploiteren,

onafhankelijk van de plaats van de onbekende onder de gegevens te handelen,

de definitiorische eigenschappen van interne en externe verhouding te exploiteren,

zich van visualisering en modellen te bedienen,

evenredigheden samen te stellen en te splitsen.

6.19 'Verhouding' in het onderwijsleerproces

Deze sectie is een toevoeging achteraf, gesuggereerd door ervaringen in de Pedagogische Akademie, maar wortelend in principes, die ook later door voorbeelden geïllustreerd zullen worden.

Ik heb eerder – in 6.7 -- erop gewezen dat kinderen – zelfs op kleuterschoollleeftijd – in visuele contexten het verhoudingsgewijze en de verhoudingen kunnen vatten (fig. 58–59).

Het IOWO-thema 'De groeten van de reus' laat de kinderen uit het spoor, door de hand van de reus op het bord achtergelaten, schatten, hoe groot de reus zelf is.



fig. 58

Meer moeilijkheden bereidt het thema 'De kamping' met zijn ingebouwde numerieke hints die veeleer een directe benadering in de weg staan, vooral als de kinderen het meten al met het gebruik van de lineaal hebben leren identificeren.

Analoog:

Monica (5; 8) bouwt torens uit congruente blokken. Ze is heel goed in staat torens van verschillende hoogte – ook op uiteenlopende bases geplaatst – te vergelijken. Ze heeft 11 blokken op elkaar gezet. Ik vraag haar hoe hoog 20 wordt. Ze wijst plm 2–3 blokken hoger. Ik laat haar verder bouwen. Bij 13 blokken geeft ze een iets beter antwoord op de vraag, hoe hoog 20 zou worden. Ik vraag haar hoeveel er nog bij moeten. Ik zie haar lippen bewegen. Kennelijk telt ze – telkens weer van 14 tot en met 20 en is elke keer opnieuw ontgoocheld omdat ze op 't eind niet weet hoeveel ze heeft. Ik doe het haar voor: onder het tellen de vingers opsteken.

Dit verhaal is er onder meer om mijn gebrekkige didactiek te ontmaskeren: premature en nodeloze vertaling van verhoudingsproblemen in het numerieke. Zo iets is kenmerkend voor hoe het wiskunde-onderwijs overheerst wordt door het rekenonderwijs.

In het traditionele onderwijs verschijnen verhoudingen veel te laat en dan meteen gealgoritmiseerd. In zekere moderne systemen zijn verhoudingen geheel geëlimineerd en door de lineaire functie vervangen, die dan door één model, de grafiek, gevisualiseerd wordt.

Voor P.A. studenten is 'verhouding' òf een vage, niet bewust gemaakte relatie, òf een geheel gealgoritmiseerd en geautomatiseerd verschijnsel – in het gunstigste geval met als expressiemiddel de verhoudingsmatrices. De mentale objecten 'verhoudingsgewijs' en 'verhouding' blijken door numerieke associaties geblokkeerd te zijn. Het kost moeite de studenten visuele modellen te doen scheppen, waarmee zij voor leerlingen de toegang tot de mentale objecten kunnen openen; ze zien ook niet, of met moeite, de relevantie van dergelijke modellen in. Het ligt voor de hand te concluderen dat dit een gevolg is van het naar snelle algoritmisering gestuurde leerproces t.a.v. verhoudingen, dat zijzelf hebben ondergaan.

Ik bedoel hiermee echter niet bepaald dat deze studenten geen periode van inzichtelijkheid t.a.v. 'verhoudingsgewijs' en 'verhoudingen' hebben gehad. Het behoeft niet zo te zijn, het is zelfs niet waarschijnlijk, dat zij 'verhoudingsgewijs' en 'verhoudingen' van meet af aan gealgoritmiseerd (en daarna geautomatiseerd) hebben ervaren. Veeleer – en dit geldt voor velerlei leerprocessen, speciaal in de wiskunde – kunnen oorspronkelijke bronnen van inzichtelijkheid verstopt en kan de terugweg naar inzichtelijkheid geblokkeerd zijn door het feit van algoritmisering en automatisering. De neiging tot autonomie van algoritme en automatisme is sterk. Dit is ook goed te begrijpen – te veel inzichtelijkheid kan in veel situaties hinderlijk zijn. Toch moeten we de kwade gevolgen van deze blokkade in 't oog vatten. Is er iets tegen te doen en zo ja, wat?

Ik zal hierop meermalen – bij andere gelegenheden – een antwoord geven. Het is meestal noodzakelijk, maar zeker niet voldoende, dat algoritmen en automatismen inzichtelijk worden *verworven*. Het leerproces dient op een wijze te worden gestuurd dat de bronnen van inzichtelijkheid in het proces van algoritmisering en automatisering niet verstopt raken, en dit kan, naar ik me voorstel, bereikt

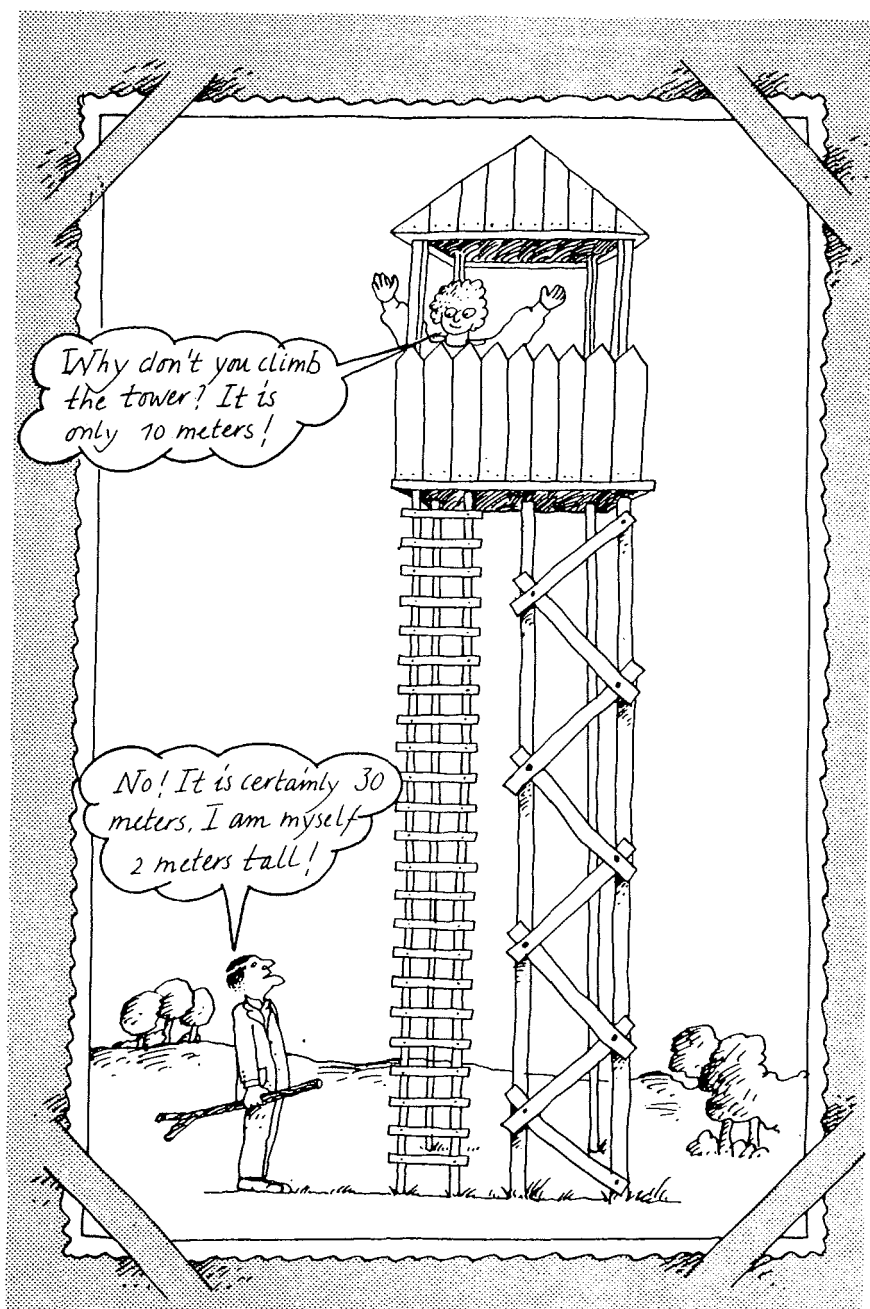


fig. 59

worden door telkens weer, in het proces van algoritmisering en automatisering, maar ook na de voltooiing daarvan, waar het te pas komt, bij deze bronnen terug te keren, in de zin van een steeds intensere bewustmaking van hetgeen in de eerste aanleg nauwelijks bewust werd, en steeds krachtigere verbalisering van hetgeen in eerste aanleg vermoedelijk in 't geheel niet werd geverbaliseerd. Dit sluit in, wat 'verhoudingsgewijs' en 'verhoudingen' aangaat, een telkens terugroepen en opnieuw tot denkmodellen abstraheren van de visuele modellen. Hetgeen, meen ik, in veel methoden mis is, is: genoeg nemen met éénmaligheid van zekere beslissende stappen in het leerproces, met het herhaald oefenen van de resultaten van zulke stappen i.p.v. de stappen zelf. Een correctie hierop: de stap laten herhalen, als iets misloopt met het automatisme. Ook dit is onvoldoende. De stap van inzichtelijkheid naar automatisme moet al worden herhaald om de bekwaamheid tot herhaling te waarborgen.

NOTEN

NOTEN HOOFDSTUK 1

- ¹⁾ P. Bryant: *Perception and Understanding in Young Children*. London 1974, Chap. 3.
- ²⁾ Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht, S.244. – Weeding and Sowing, p. 255. (Auteur [91] resp. [87]).
- ³⁾ Wie het begrip ‘affiene afbeelding’ niet kent, leze parallelprojecties.
- ⁴⁾ Auteur [84].
- ⁵⁾ Mathematik als pädagogische Aufgabe, 187. – Mathematics as an Educational Task, 203. (Auteur [78] [100] resp. [40].)

NOTEN HOOFDSTUK 2

- ¹⁾ Is het toeval dat – met nog Habermas erbij – de meest pretentieuze producenten van onverstaanbare taal in de Duitse filosofie, met H beginnen?
- ²⁾ Mathematik als pädagogische Aufgabe, speciaal Kap. II, XVII. – Mathematics as an Educational Task.
- ³⁾ Vorrede, – Weeding and Sowing.
- ⁴⁾ Studies in Cognitive Growth, ed. J.S. Bruner, Toward a theory of instruction, 1966, 10–11.
- ⁵⁾ In de 18e eeuwse zin van epistemologie van a priori begrippen.
- ⁶⁾ Fischbein spreekt hier van intuïties, een woord dat ik liever vermijd, omdat het dubbelzinnig is: aanschouwing en illuminatie.

NOTEN HOOFDSTUK 3

- ¹⁾ Inderdaad: Zij $a, b \in \cup_{H \in \Theta} H$, dan $a \in H_1, b \in H_2$ voor zekere $H_1, H_2 \in \Theta$; hier $H_1 \subset H_2$ of $H_2 \subset H_1$; in het eerste geval $a, b \in H_2$, dus $a^{-1} b \in H_2$, dus $a^{-1} b \in \cup_{H \in \Theta} H$, en analoog in het tweede geval – dit is weer een het lemma van Zorn typerende redenering.
- ²⁾ In de ontwikkeling is ‘zwaarte’ oorspronkelijk intensief.
- ³⁾ Reeds op 4-jarige leeftijd aanwezig, zoals P. Bryant – tegen Piaget in – overtuigend heeft aangetoond. (*Perception and Understanding in Young Children*. 1974).
- ⁴⁾ Zie: Mathematik als pädagogische Aufgabe, II, 435–437. – Mathematics as an Educational Task, 472–476.
- ⁵⁾ 10.2 en 14.12–16.
- ⁶⁾ Dit is, naar ik in *Vorrede* (Weeding and Sowing) heb uiteengezet, een van de twee diametraal tegengestelde betekenissen van ‘model’, model als ‘Nachbild’. Model als ‘Vorbild’ zou juist het abstracte Mens-erger-je-niet-spel zijn, de abstracte blokkendoos, waar naar de concrete zijn gefabriceerd, het gedicht of liedje zoals ze op ‘t papier of voor de geest van de auteur staan.
- ⁷⁾ Bij voorbeeld Vorrede ..., 215 ff. – Weeding and Sowing, 215 sq.

- ⁸⁾ In 'Mathematik als pädagogische Aufgabe', 176, 228. – Mathematics as an Educational Task, 190, 250.
⁹⁾ Men denke hier steeds voor N en u vaste getallen gesubstitueerd.
¹⁰⁾ Vorrede ..., 210 ff. – Weeding and Sowing, 210 sq.

NOTEN HOOFDSTUK 4

- ¹⁾ Mathematik als pädagogische Aufgabe, Kap. 11. – Mathematics as an Educational Task. Chap. 11.
²⁾ IA1 (1898), H. Schubert, Grundlagen der Arithmetik. In zijn kritiek op H. Schubert's stuk (Über die Zahlen des Herrn H. Schubert, Jena 1899) staat G. Frege iets sterker dan in die op Hilbert's Grundlagen der Geometrie (Jahresb. d. DMV 12 (1903), 319–324, 368–375), maar aan platvloersheid doet de ene kritiek voor de andere niet onder. Frege's wanbegrip voor fenomenologie aan de ene en axiomatic aan de andere kant is symptomatisch gebleken voor de logistische instelling in 't algemeen.
³⁾ Verhandlungen des III. Internationalen Mathematik-Kongresses in Heidelberg 1904. Van 3. tot 7. Aufl. Anhang VI van 'Grundlagen der Geometrie'.
⁴⁾ bijv. E. Schröder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Leipzig, 1873.
⁵⁾ Math. Ann. 46 (1897), p. 481–483 = Gesamm. Abh. 282–284.
⁶⁾ Math. Ann. 46 (1897), 214–215 = Gesamm. Abh. 289–290.
⁷⁾ Was sind und was sollen die Zahlen 1887, 1893.
⁸⁾ Mathematik als pädagogische Aufgabe, Kap. 11. – Mathematics as an Educational Task.
⁹⁾ Mathematik als pädagogische Aufgabe, 36–38, ..., 207–208. – Mathematics as an Educational Task 30–32, ..., 226–227.
¹⁰⁾ Ik had deze drie invarianties ook bij 'lengte' kunnen noemen; in dat geval zou de invariantie ook als invariantie van lang voorwerp kunnen worden geïnterpreteerd.
¹¹⁾ d.w.z. met het gebeuren mee.
¹²⁾ Zie auteur [53].
¹³⁾ Zie auteur [64].
¹⁴⁾ Ik heb het probleem hier, beantwoordende aan mijn modelterminologie, met manden en eieren geformuleerd, terwijl het in feite karavans en personen waren.
¹⁵⁾ (d.w.z. gelijkmachtige of anderszins gelijkwaardige delen).
¹⁶⁾ In Hoofdstuk V, bij de breuken, komen we erop terug.
¹⁷⁾ Zie ook: Mathematik als pädagogische Aufgabe I, 229–230. – Mathematics as an Educational Task, 252–254.
¹⁸⁾ Dit is inmiddels meer systematisch in de *progressieve schematisering* geschied. Zie: A. Dekker, H. ter Heege, A. Treffers: 'Cijferende vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas.' OW & OC.
¹⁹⁾ Inmiddels is er ten deze wel het een en ander bekend. Zie b.v. H. ter Heege: 'Vermenigvuldigungsstructuren.' W. Bartjens 2 (1982/3), No. 2–3, 73–75.
²⁰⁾ Leerplanpublicatie 10, Wiskobas Bulletin 8, nr. 5–6, nov. 1979.

NOTEN HOOFDSTUK 5

- ¹⁾ Verhoudingsrelatie lijkt een pleonasme, maar 'verhouding' geeft hier het numerieke aspect van de relatie weer.
²⁾ Mathematik als pädagogische Aufgabe, 236–238. – Mathematics as an Educational Task, 260–262.
³⁾ Zie Vorrede ... Kap. IV, Abschr. 15. – Weeding and Sowing.

NOTEN HOOFDSTUK 6

- ¹⁾ Mathematik als pädagogische Aufgabe II, 528–529. – Mathematics as an Educational Task, p. 584.