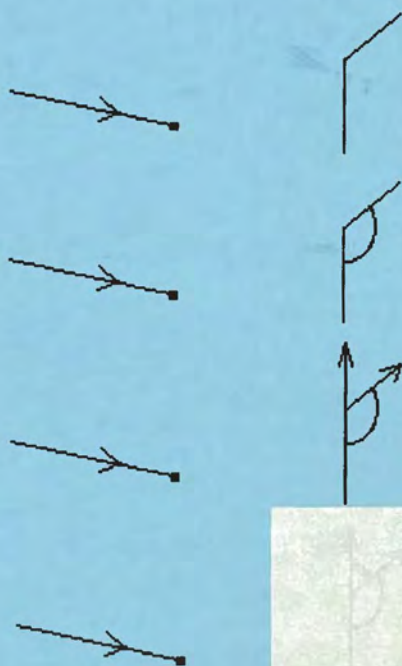


Uitleggen van Wiskunde

S. Kemme



OW  OC



Freudenthal instituut
Archief

Uitleggen van Wiskunde

Uitleggen van Wiskunde

S. Kemme



**vakgroep onderzoek wiskundeonderwijs en onderwijs computercentrum
rijksuniversiteit utrecht**

Reeds verschenen:

- Nr 1 Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas
 (A. Dekker, H. ter Heege, A. Treffers)
- Nr 2 Oppervlakte bij Wiskobas en inzichtverwervend handelen
 (A. Dogger)
- Nr 3 Aanzet voor een nieuwe breukendidactiek volgens Wiskobas
 (L. Streefland)
- Nr 4 Didactische fenomenologie van wiskundige structuren (1)
 (H. Freudenthal)
- Nr 5 Wiskobas in methoden
 (R.A. de Jong)
- Nr 6 De baas over de computer
 (P. Bergervoet, e.a.)
- Nr 7 Mathématiques pour tous à l'âge de l'ordinateur
 (J. de Lange Jzn)
- Nr 8 Mathematics, Insight and Meaning
 (J. de Lange Jzn)
- Nr 9 Realistisch breukenonderwijs
 (L. Streefland)
- Nr 10 Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen
 (F.J. van den Brink)
- Nr 11 Contexts Free Productions, Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education
 (K. Gravemeijer, M. van den Heuvel, L. Streefland)

Colophon:

Vertaalwerk en vormgeving: S.L. Kemme

Druk: Technipress, Culemborg

© 1990 vakgroep onderzoek wiskundeonderwijs en onderwijs computercentrum
rijksuniversiteit utrecht

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, microfilm of op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de houder van het copyright.

INHOUD.

Bladzijde

Inleiding.	3
Hoofdstuk 1: De theorie van het uitleggen.	5
1.1. Begripsafbakening.	5
1.2. Uitleggen in de literatuur.	8
1.3. Uitleggen als taalhandeling.	11
1.4. Begrijpend gedrag.	15
1.5. Verwijzen, betekenis geven en betekenis krijgen.	21
1.6. Soorten van uitleg.	26
1.7. Uitlegstrategieën.	29
1.8. Structuur, moeilijkheid en duidelijkheid.	32
Hoofdstuk 2: Vragen en methoden van onderzoek.	36
2.1. Algemeen.	36
2.2. Het seminarium, presentatie van een wiskundig onderwerp.	39
2.3. Uitleggen door analogie en context.	42
2.4. Letters en formules.	44
2.5. Vaardigheden in 2 MAVO en 2 Atheneum.	47
2.6. Hoeken.	50
Hoofdstuk 3: Het seminarium, presentatie van een wiskundig onderwerp.	52
3.1. Een beschrijving van de situatie.	52
3.2. Het interaktiedilemma.	55
3.3. Hennie: "Geen minnetje!!!!Goed hè!"	58
3.4. Ron: "Zolang ik niks hoor ga ik door."	65
3.5. Interactie: een terugblik.	73
3.6. Moeilijkheid en duidelijkheid.	76
3.7. Moeilijkheid en duidelijkheid in 4 fragmenten.	79
3.8. Moeilijk en/of duidelijk: een terugblik.	89
Hoofdstuk 4: Uitleggen door analogie en context.	91
4.1. Heksen en treinen in de klas.	92
4.2. Analogie en context.	98
4.3. Negatieve getallen, de heks en het treintje nader geanalyseerd.	102
4.4. Conclusies.	106

	Bladzijde
Hoofdstuk 5: Letters en formules.	108
5.1. Variabelen.	108
5.2. Het gebruik van letters in de wiskunde, een betekenis analyse.	115
5.3. Protocol 860219	123
5.4. Protocol 860227	131
5.5. Protocol 860409	138
5.6. De voor- en na-toets.	151
5.7. Tot slot.	160
Hoofdstuk 6: Vaardigheden in 2 MAVO en 2 Atheneum.	162
6.1. De weegschaal in Moderne Wiskunde.	162
6.2. Vergelijkingen n klas 2 MAVO en Atheneum.	167
6.3. Het proefwerk over vergelijkingen.	171
6.4. Conclusies.	178
Hoofdstuk 7: Hoeken.	180
7.1. Hoeken om ons heen.	180
7.2. Hoeken in de wiskunde.	183
7.3. Hoeken en de niveautheorie.	187
7.4. Hoeken in de klas.	190
7.5. Analyse van de uitleg.	197
7.6. Hoeken in de klas (vervolg).	201
7.7. Analyse van het tweede uitlegfragment.	211
7.8. De opdrachten.	215
7.9. Conclusies.	217
Hoofdstuk 8: Uitleggen is een vak.	219
8.1. Moeilijkheid en duidelijkheid.	219
8.2. Interactie.	222
8.3. Uitlegsoorten en uitlegstrategieën.	224
8.4. Kun je leren uitleggen?	226
Bijlage 1: De seminariumonderwerpen.	230
Bijlage 2: De voor- en natoets.	232
Aantekeningen.	242
Summary.	243
Literatuur.	245
Register.	250

INLEIDING

Dit proefschrift is een verslag van ervaringen. Niet mijn eigen maar ervaringen van anderen. Gedurende een aantal jaren heb ik gekeken naar het uitleggen van wiskunde door studenten en docenten. Ik heb het vakmanschap bewonderd. Ik heb me verwonderd over onhandigheden en me afgevraagd wat er aan de hand was. Wat hier is verzameld, is slechts een 'systematische' greep uit al die ervaringen. Dit proefschrift laat zien hoe het kan, niet hoe het beter kan. Het beschrijft en probeert te verklaren. Het geeft misschien inzicht in de dingen die gebeuren bij het uitleggen van wiskunde. Mogelijk levert het daarmee indirect een bijdrage aan de verbetering van dat vakmanschap.

Als belangrijke eis heeft bij het onderzoek voorop gestaan dat het relevant moet zijn voor de dagelijkse praktijk van het wiskundeonderwijs. Dat betekent dat het onderzoek herkenbaar moet blijven voor docenten. Deze beide voorwaarden impliceren dat de onderzoeksomgeving per definitie een authentieke onderwijsomgeving is en dat theorievorming leidt tot praktische resultaten. Bovendien dient dit verslag leesbaar en begrijpbaar te zijn voor wiskundedocenten. Er zal voorzichtig moeten worden omgesprongen met wetenschappelijk jargon en gecompliceerde wetenschappelijke technieken.

Bij het kijken naar lessen en het bestuderen van de protokollen onstond het besef dat uitleggen een vorm van taalgedrag is in een gecompliceerde situatie en dat juist die complexiteit essentieel is. Daarom zal bij het onderzoek die complexiteit intact moeten blijven. Dit heeft geleid tot de keuze van de taalhandelings- theorie als methodisch analysekader. Daarin wordt immers een essentieel belang toegekend aan de omgevingsfactoren als definiërende elementen van een taalhandeling.

In hoofdstuk 1 wordt vanuit het kader van de pragmatische taalhandelings- theorie een terminologie ontwikkeld rondom het uitleggen van wiskunde. Die terminologie richt zich vooral op het uitleggen als verschijnsel. Zo wordt precieser afgebakend wat onder 'uitleggen' wordt verstaan, wat de relatie is tussen uitleggen en begrijpen en welke soorten uitleggen en strategieën er zijn. Bovendien worden een aantal nevenaspecten omschreven die in het vervolg een belangrijke rol zullen spelen.

Het onderzoeksterrein is zo uitgebreid dat het nodig bleek om bepaalde gebieden af te bakenen. In hoofdstuk 2 wordt een beschrijving gegeven van de keuzen die zijn gemaakt. Daarin komen aan de orde: de onderwerpen van onderzoek, de vragen die worden gesteld en de methode van onderzoek. Daarmee kijkt dit hoofdstuk vooruit naar de andere hoofdstukken.

De cursus "Presentatie van een wiskundig onderwerp" kan worden opgevat als een cursus in het leren uitleggen van wiskunde. Studenten leggen uit aan medestudenten. De situatie is echt (er wordt niets nagespeeld), maar is toch niet zo ingewikkeld als een doorsnee klas in het voortgezet onderwijs. Er is ook meer bekend over de situatie, bijvoorbeeld over de voorkennis van de studenten. De gereduceerdheid en de

echtheid maken deze situatie bij uitstek geschikt om te onderzoeken. Hoofdstuk 3 bevat een beschrijving van dit gedeelte van het onderzoek. In het bijzonder is gekeken naar: de relatie tussen de moeilijkheid van een onderwerp en de duidelijkheid van een bijbehorende uitleg en de interactie in de uitlegsituatie.

Een uitleg die gebaseerd is op een voor leerlingen inleefbare context blijkt in sommige situaties wel te functioneren en in andere situaties niet. In hoofdstuk 4 zijn twee van dergelijke situaties, rondom de invoering van negatieve getallen, gedetailleerd onderzocht. Er is gezocht naar oorzaken van deze verschillen in effect.

In hoofdstuk 5 wordt gekeken naar de introductie van letters en formules in de brugklas. Hierbij wordt een heterogene brugklas (MAVO, HAVO, VWO) vergeleken met twee gymnasium-brugklassen. Vanuit een uitgebreide betekenisanalyse van het voorkomen van letters en formules in de wiskunde worden de verschillen in uitlegsituaties bestudeerd. Op de achtergrond bij dit gedeelte van het onderzoek staat de actuele vraag in hoeverre formele aspecten van de wiskunde in deze verschillende omgevingen onderwijsbaar zijn.

In klas 2 worden lineaire vergelijkingen geïntroduceerd aan de hand van een weegschaalmodel. Ook hier vindt weer een uitleg plaats vanuit een inleefbare context. Interessant is na te gaan wat de verschillen zijn in uitleg-situaties bij dezelfde leraar in een MAVO-klas en een Atheneumklas. Het gaat hierin met name om het verwerven van algebraïsche vaardigheden. Leren Atheneumleerlingen dat sneller? Welke betekenis kennen MAVO-leerlingen toe aan deze vaardigheden? In hoofdstuk 6 worden twee lessituaties en resultaten van proefwerken met elkaar vergeleken en worden suggesties gedaan voor verbeteringen in het uitleggen van wiskundige vaardigheden.

In het laatste hoofdstuk dat betrekking heeft op een wiskundig onderwerp, hoofdstuk 7, is bewust gekozen voor een onderwerp uit een andere hoek van de wiskunde: de introductie van hoeken. Na een betekenisanalyse over het voorkomen van hoeken in de wiskunde en het wiskundeonderwijs, volgt een gedetailleerde analyse van een les waarin hoeken worden geïntroduceerd in een gymnasiumbrugklas. Belangrijk is hierin om zorgvuldig na te gaan op welke wijze de betekenis-verwerving van een dergelijk complex begrip in een classesituatie gestalte kan krijgen en welke eisen dit stelt aan de uitleg.

In hoofdstuk 8 tenslotte komen een aantal lijnen uit de voorgaande hoofdstukken bij elkaar die samen een beeld vormen van een aantal 'vakmatige' aspecten van het uitleggen van wiskunde. Met name komt in de laatste paragraaf de vraag aan de orde of je kunt leren uitleggen.

HOOFDSTUK 1: DE THEORIE VAN HET UITLEGGEN VAN WISKUNDE.

"De wereld was nog zo jong dat vele dingen nog geen naam hadden en om ze te noemen, moest je ze aanwijzen met je vinger."

Gabriel García Márquez: Honderd jaar eenzaamheid.

In dit hoofdstuk worden relaties gelegd tussen de cognitieve psychologie en de verschillende theorieën over het begrijpen van wiskunde, wordt kennis gemaakt met ideeën uit de pragmatische taaltheorie en wordt een terminologie ontwikkeld rondom het uitleggen van wiskunde.

§ 1.1: BEGRIPSAFBAKENING.

Hoe leg je uit wat 'uitleggen van wiskunde' is? Of: hoe leg je uit wat je onder uitleggen van wiskunde verstaat? In deze paragraaf wordt een eerste verkenning gegeven van de term 'uitleggen'. We zullen dat doen door voorbeelden te geven, door het contrast aan te geven met andere vormen van informatieoverdracht (zoals: vertellen) en door een omschrijving te zoeken in de vorm van een voorlopige werkdefinitie.

Voorbeelden.

In iedere onderwijs- en leer-situatie komen ogenblikken van uitleg voor. Daarbij zijn vele mogelijkheden denkbaar:

- een doceerles over de barok,
- een geschreven gebruiksaanwijzing bij een blikopener,
- een klasseggesprek over de wet van Hooke,
- een wiskunde praktikum over het ontbinden in factoren.

In deze voorbeelden wordt iets uitgelegd. De docent of de tekst geeft een gevraagde of ongevraagde verduidelijking van begrippen of handelingen. Die uitleg kan mondeling of schriftelijk plaatsvinden.

Passieve en actieve uitleg.

In het algemeen zijn we geneigd om een doceersituatie een duidelijker vorm van uitleggen te noemen dan een praktikum of een klasseggesprek. Toch kan in al deze situaties sprake zijn van uitleg doordat van de luisteraar gevraagd wordt iets te begrijpen. We moeten ons niet laten misleiden door het verschil in werkvorm. In dit verband is het zinvol om onderscheid te maken tussen **passieve en actieve uitleg**. Bij een passieve uitleg wordt van de toehoorder gevraagd aandachtig te luisteren. Alle nodige informatie wordt door de uitlegger aangedragen. De toehoorder hoeft deze alleen maar te verwerken. De uitlegger is in de eerste plaats informatieverschaffer. Bij een actieve uitleg wordt van de toehoorder gevraagd zelf het één en ander aan informatie te vergaren. De uitlegger bepaalt welke informatie dat zal zijn en geeft aan (indien nodig) op welke wijze die informatie gekombineerd kan worden om het uitgelegde te kunnen begrijpen. De uitlegger is een procesbewaker die de situatie schept waarin de uitleg kan plaatsvinden en de voortgang controleert en bevordert.

Uitleggen en vertellen.

Je vertelt het verhaal van Roodkapje en de wolf maar je legt uit hoe Roodkapje door de wolf werd verslonden en tenslotte door de jager werd bevrijd. Je vertelt dat er getallen bestaan waarvan het kwadraat negatief is maar je legt uit waarom de vergelijking $x^2 = -2$ geen reële wortels heeft.

Wat is het verschil tussen uitleggen en vertellen? Bij het vertellen van het sprookje van Roodkapje wil je graag dat je toehoorders meeleven met het verhaal (dat ze bang worden en weer blij dat het toch nog zo goed is afgelopen). Bij het uitleggen hoe dat allemaal in zijn werk is gegaan, wil je dat je toehoorders dat gaan begrijpen. Je vertelt je leerlingen van het bestaan van complexe getallen om hen iets te laten zien van de uitgebreidheid van het vak, ze hoeven niet precies te weten wat complexe getallen zijn. Je legt uit dat $x^2 = -2$ geen reële wortels heeft omdat ze dat goed moeten begrijpen, want ze hebben het verder nodig.

Tussen vertellen en uitleggen bestaat een verschil in **bedoeling**, dat wil zeggen: een verschil in effect dat de spreker bij de hoorder wil zien te bereiken. Voor vertellen is dat effect: meeleven, kennisnemen van. Voor uitleggen: begrijpen. Het verschil in effect is een verschil in gedrag. 'Meeleven' en 'kennisnemen van' zijn andere vormen van gedrag dan 'begrijpen'.

Tussen uitleggen en vertellen bestaat ook een verschil in **verwachting** bij de hoorder. De hoorder wil het uitgelegde graag begrijpen. De hoorder wil door het vertelde geboeid worden, wil graag in kennis gesteld worden van de feiten.

Voor het slagen van een uitleg of een vertelling dient er in ieder geval een mate van overeenstemming te zijn in deze intenties van spreker en hoorder.

Het verschil in intenties tussen uitleggen en vertellen is van invloed op de inhoud van de uitleg of de vertelling.

Je kunt vertellen dat een punt een stip zonder dikte is. Het is een mededeling. Er valt verder niets aan te begrijpen. De hoorder kan er kennis van nemen.

Je kunt ook uitleggen dat een punt een stip zonder dikte is ("Je moet goed begrijpen wat een punt is. Het is een abstrakt denk-objekt. Het bestaat dus niet fysisch, maar alleen in onze gedachten,..."). De spreker wil hiermee bereiken dat de hoorder zich gaat realiseren wat de gevolgen zijn van dat gegeven. Hiermee wordt de inhoud ineens veel complexer.

Het is niet zo dat de intenties van spreker en hoorder voor eens en voor altijd vast liggen. Een vertelling kan over gaan in een uitleg. Bijvoorbeeld op verzoek van de hoorder.

(Hoorder: "Wat bedoelt u daar nou mee: "een stip zonder dikte"? Alle stippen hebben toch dikte? Spreker: Ja dat is natuurlijk zo. Je moet goed begrijpen wat een punt is. Het is een abstrakt denk-objekt. Het bestaat dus niet fysisch, maar alleen in onze gedachten,...").

Er kan dus een verschuiving van intenties plaatsvinden tijdens het gesprek, zowel bij spreker als bij hoorder.

Het verschil tussen uitleggen en vertellen kan geen strikt onderscheid zijn. Een vertelling kan een moraal hebben die iets uitlegt. Bij voorbeeld: dat meisjes met rode

kapjes beter niet alleen naar hun grootmoeder kunnen gaan. Soms is een extra uitleg nodig om de moraal van de vertelling duidelijk te maken.

Kort samengevat en toegepast op onderwijssituaties: de leraar heeft met het uitleggen de bedoeling dat de leerling die uitleg begrijpt. Dat wil zeggen: dat het gedrag van de leerling(en) in overeenstemming is met de eisen die de leraar ten aanzien van dat begrijpen voor deze uitleg en deze leerlingen stelt. De leerling wil de uitleg begrijpen. Ook de leerling heeft een intentie met de uitleg.

Terminologie.

Ter voorkoming van misverstanden is het nodig enkele afspraken over de terminologie te maken. Uitgangspunt bij deze afspraken is de situatie in het onderwijs.

Met **docent** wordt bedoeld: de uitlegger, de spreker. Dit suggereert een docerend persoon. Bedoeld is evenwel: de persoon die de uitleg verzorgt. Dat kan zijn: de leraar, de schrijver van een gebruiksaanwijzing, TV-presentator.

In de zin: "ik kan je uitleg niet helemaal volgen" heeft het woord 'uitleg' een dubbele betekenis. Het kan het uitleg-proces betekenen: in de zin van: "alles is me stap voor stap duidelijk, maar ik zie niet hoe het in elkaar zit". Het kan ook de inhoud van de uitleg aangeven. Met **uitleg** wordt bedoeld: het uitleg-proces. De inhoud van de uitleg zullen we aangeven met het **uitgelegde**.

Met **leerling** bedoelen we: de (toe)hoorder, de gebruiker. De keuze van dit woord laat de betekenis van een actieve leerling toe. De keuze suggereert echter ook een bepaalde verhouding (leeftijdsverschil, gezagsverhouding) tussen docent en leerling hetgeen niet per se het geval hoeft te zijn.

Voorlopige werkdefinitie van uitleggen:

Uitleggen is een vorm van taalgedrag waarbij de docent de bedoeling heeft het uitgelegde door de leerling te laten begrijpen.

Begrijpen voert tot een, door de docent gewenste, vorm van gedrag van de leerling met betrekking tot het uitgelegde.

In deze werkdefinitie worden uitleggen en begrijpen als een siamese tweeling aan elkaar gesmeed. Het een kan niet zonder het ander. Over begrijpen is meer geschreven dan over uitleggen. In een volgende paragraaf wordt dit precieser omschreven. Daarmee wordt dan ook vollediger uitgelegd wat uitleggen is.

§ 1.2: UITLEGGEN IN DE LITERATUUR.

In de vorige paragraaf is het uitleggen gekenmerkt als een taalhandeling met een specifieke bedoeling. De omschrijving is nog vaag en vraagt om een verder operationalisering. Daartoe wordt in deze paragraaf onderzocht welke omschrijving anderen hebben gegeven aan uitleggen.

Edwards en Westgate geven in hun boek "Investigating Classroom Talk"(1987), een breed overzicht van het onderzoek en de resultaten van protocol-analyses van onderwijssituaties. Hun overzicht betreft zowel taalkundig onderzoek als onderzoek dat gericht is op gedragsanalyses van docenten in klassesituaties. Ze constateren dat erg veel aandacht is gericht op het classificeren van vragen en hun functies in onderwijssituaties, maar dat er verrassend weinig bekend is over het terrein van het uitleggen. Uitleggen is daarbij "niet alleen het ordenen van argumenten, maar vooral het leggen van verbanden met bestaande kennis en begrip van degenen tot wie de uitleg is gericht." In deze opvatting horen kennis en begrip bij elkaar. Het zijn bekende feiten, maar ook bekende feiten die op een nieuwe manier kunnen worden geïnterpreteerd en daardoor worden begrepen. Een uitlegger legt dus verbanden tussen voor hemzelf bekende kennis en begrip en die van de toehoorder.

Bishop (1988) beschrijft het uitleggen vanuit een cultureel-antropologische invalshoek als één van de universele activiteiten van de wiskundige 'enculturation'. "Het is de activiteit die de menselijke cognitie uittilt boven het niveau van het zonder meer ervaren van de omgeving". "Uitleggen is de activiteit van het aan het licht brengen van relaties tussen verschijnselen."

Volgens Bishop is de meest duidelijke relatie, door uitleggen tot stand gebracht, de analogie. Het is een handeling die verbanden legt tussen verschijnselen die op elkaar lijken en daarmee iets duidelijk maakt over de kenmerken van die verschijnselen.

Een meer complexe vorm van het uitleggen is het verhaal. Daarmee is het mogelijk om meer dynamische verschijnselen te verklaren zoals het proces van het leven, eb en vloed. Verhalen kunnen een moraal hebben of een boodschap.

De mogelijkheid om iets uit te leggen hangt sterk samen met het vermogen van taal om taaluitingen ('discourse') met elkaar te verbinden. Van de Indo-Europese talen is bekend dat die beschikken over een zeer uitgebreid repertoire van logische samenstellingen. Elke taal schijnt dit vermogen op één of andere manier in zich te hebben.

De manier van uitleggen in een bepaalde cultuur heeft, volgens Bishop, een diep effect op de voor een cultuur dominante kijk op het ontstaan van de wereld. Het levert criteria voor een besef van waarheid en is de wortel van een uitlegsysteem dat feiten op een specifieke manier weet te combineren. In die zin kan ook de wiskunde worden opgevat als een krachtig uitlegsysteem.

Als basisbegrippen van het wiskundige uitleggen noemt Bishop: analogieën; classificaties; conventies; hiërarchische classificaties; verhalen; logische samenstellingen; linguïstische uitleg: logische argumenten, bewijzen; symbolische uitleg: vergelijking, ongelijkheid, algoritme, functie; visuele uitleg: grafieken,

diagrammen, kaarten, matrices; wiskundige modellen, criteria: interne waarheid, externe generaliseerbaarheid.

Hoe geeft de leraar vorm aan een uitleg? Op dit punt wordt Bishop heel expliciet. Hij geeft allereerst een scherpere omschrijving van uitleggen.

" Uitleggen is een speciale manier om de relaties en verbindingen te leggen tussen een nieuw idee en andere bekende, begrepen en algemeen aanvaarde ideeën. Door uitleggen wordt het onbekende in verband gebracht met het bekende, het ongebruikelijke met het gebruikelijke, het uit te leggen verschijnsel met het al uitgelegde." [1]

Hij maakt onderscheid tussen de rationele, bewijs-achtige en de analogische, metaforische manier van uitleggen in de wiskunde. Het logische uitleggen vraagt een andere aanpak dan het analogische. Het eerste verbindt ideeën in opeenvolgende stappen, het tweede door parallelle verbindingen.

Goffree (1979) formuleert het uitleggen als één van de mathematisch-didactische aangrijpingspunten. Het is één van de punten die de aandacht van docenten bij de voorbereiding kan richten op een fundamenteel aspect van wiskundige onderwijsleersituaties. Goffree omschrijft het uitleggen als volgt:

"In onderwijsleersituaties worden leerlingen vaak voor moeilijkheden geplaatst. De onderwijsgevende moet deze moeilijkheden niet alleen signaleren, maar zo mogelijk al tevoren inschatten. En dat niet alleen om ze te kunnen voorkomen! Bepaalde moeilijkheden immers, kunnen een gunstig effect hebben op het verloop van een leerproces. Om die reden kunen specifieke moeilijkheden zelfs in een onderwijsleerproces gepland worden.

Didactische activiteiten in dit verband, inclusief de bijbehorende hulp aan leerlingen, vatten we samen onder het hoofd 'uitleggen'."

Hij kent verschillende aspecten toe aan het uitleggen: passief en actief, lokaal en globaal. In de actieve en onderzoekende benadering van Wiskobas krijgt 'duidelijk maken' de betekenis van 'toegankelijk maken en bewust maken'. Er zijn verschillende mogelijkheden voor een dergelijke aanpak. Goffree noemt: blikwisseling en het inbouwen van extra moeilijkheden.

Goffree (1982) legt in zijn didaktiekboek voor de PABO een expliciete verbinding tussen uitleggen en begrijpen. Begrijpen wordt daarin benaderd vanuit de cognitieve psychologie van Piaget. Hij noemt een aantal mogelijke uitlegstrategieën: voorzeggen, zeggen wat ze moeten doen, vereenvoudigen, omstructureren, verwoorden, symboliseren, zeggen wat de (denk)fout is, de denkfout zelf laten ontmaskeren, bewustmaken door middel van een conflict, de denkfout in een ander licht plaatsen, concretiseren, helpen de structuur te zien, materialiseren.

In een latere studie, Van de Heuvel-Panhuizen, Goffree (1986) komt het uitleggen ook uitgebreid aan de orde. De auteurs wijzen op de gebruikelijke identificatie van uitleggen met doceren en instructie geven en ze zetten zich daartegen af. Ze leggen een sterke nadruk op de relatie tussen uitleggen en begrijpen. Ook hier wordt de verbinding gelegd met de cognitieve psychologie. Bij het uitleggen wordt het cognitieve schema opgerakeld, actueel gemaakt. Er worden nieuwe elementen aan toegevoegd. Bij een geslaagde uitleg vormen de oude en nieuwe elementen een nieuw cognitief schema.

Een dergelijke omschrijving van uitleggen laat een veel ruimere interpretatie toe dan

alleen maar doceren en instructie geven. Aan de hand van een uitgebreide situatiebeschrijving maken ze duidelijk dat uitleggen niet meteen betekent: "zeggen hoe het zit" of "zeggen hoe het moet", maar ook:

"stimuleren, uitlokken, bewust maken door vragen te stellen, door hints te geven, of soms alleen maar door achteloos iets te laten zien. Er is eigenlijk meer sprake van 'inleggen' in de zin van 'in de situatie leggen', dan van uitleggen. [...] Uitleggen betekent hier steeds flexibel inspelen op en gebruik maken van de inbreng van de kinderen. Het is meer een inlevend méédenken dan logisch voorddenken."

In die zin is het uitleggen

"niet alleen gebaseerd op een eigen inzicht in de leerstof, maar moet het geënt worden op wat de leerling aan inzicht met zich meebrengt."

Drie stromingen.

In dit korte overzicht zijn drie invalshoeken aan het woord geweest: de taalkundige, de cultureel antropologische en de wiskundig-didactische. In de eerste twee ligt een sterke nadruk op de brugfunctie van uitleggen tussen het bekende bij de uitlegger en het nieuwe, onbekende bij de toehoorder. Goffree cs leggen daarentegen meer nadruk op het vermogen van de toehoorder om nieuwe zaken zelf te construeren. De uitlegger is daarbij iemand die daarvoor de geschikte situatie schept en die het proces van ontdekken stuurt en begeleidt.

In de taalkundige benadering ligt de nadruk sterk op de studie van het taalgedrag. Aan de hand van protocolanalyses wordt geïnventariseerd welke 'zetten' er worden gedaan in het taalspel en probeert men de regels van het spel te achterhalen. Dit levert een goed inzicht op over de sociale context waarin het taalgedrag kan plaatsvinden. Over het algemeen zijn deze regels echter weinig domeinspecifiek. Het eigen-aardige van het schoolvak met zijn eigen moeilijkheden en mogelijkheden, komt nauwelijks aan de orde.

De cultureel-antropologische benadering plaatst het uitleggen in de globale setting van cultuurverschillen en cultuuroverdracht. De specifieke sociale context van een klassesituatie komt daarin nauwelijks aan de orde.

In de cognitieve leer-psychologie wordt het leren vooral benaderd als een individueel ontwikkelingsproces. In een les is een docent echter met een klas bezig en probeert deze iets aan een klas uit te leggen, niet enkel aan een individuele leerling. Gelukkig ontleent Goffree zijn ideeën aan het reken- en wiskunde-onderwijs in klassesituaties. Daarmee is de domeinspecifieke inbreng vanuit de wiskunde en de praktijkrelevantie van de klassesituatie voldoende aanwezig en overstijgt het de cognitieve leer-psychologie. De ontwikkelde ideeën zijn bedoeld als handreikingen aan aanstaande docenten. Ze hebben niet de pretentie van een didactische theorie. Ze lijken een veelbelovend beginpunt voor een dergelijke theorie.

§ 1.3: UITLEGGEN ALS TAALHANDELING.

In vervolg op de voorlopige omschrijving van uitleggen in paragraaf 1 en de omschrijvingen vanuit de verschillende invalshoeken uit de literatuur van paragraaf 2, bevat deze paragraaf een verdere precisering van 'het uitleggen'. De pragmatische taalhandelingstheorie is hierbij het uitgangspunt. Juist in de pragmatische taalhandelingstheorie is het mogelijk de betekenisoverdracht van kennis, begrippen en vaardigheid in relatie met de sociale context te bestuderen. Daarmee lijkt het mogelijk een systematische verbinding te leggen tussen de specifiek wiskundige kennisoverdracht en de sociale context van de klassesituatie.

In de taalhandelingstheorie wordt het taalgedrag tussen twee personen opgevat als een handeling waarbij de ene persoon (de spreker) iets bij de andere persoon (de hoorder) wenst te bereiken. Daarmee is bijvoorbeeld 'goeiedag zeggen' gelijkwaardig aan de lichamelijke handeling 'je hand opsteken'. Beide handelingen beogen hetzelfde effect.

Een taalhandeling heeft een (propositionele) inhoud en een bedoeling (intentie). De inhoud van 'goeiedag zeggen' is het gebaar zelf of de gesproken woorden met hun betekenis. De bedoeling van 'goeiedag zeggen' kan zijn: je aanwezigheid bij de hoorder kenbaar te maken, of: een gesprek te beginnen met de hoorder.

Searle (1977), één van de grondleggers van de taalhandelings-theorie, vat het spreken op als een vorm van gedrag dat door regels wordt geleid. Searle heeft een aantal algemene voorwaarden opgesteld op grond waarvan men taalhandelingen als geslaagd mag beschouwen. Searle gaf deze voorwaarden de status van 'nodig en voldoende'-voorwaarden. Daarmee gaf hij aan dat de voorwaarden zowel een analyserende rol (nodige voorwaarden) als een definiërende rol (voldoende voorwaarden) bij het bestuderen van specifieke taalhandelingen kunnen vervullen. Toepassing van deze regels geeft een nadere karakterisering van de taalhandeling 'uitleggen'. In het volgende overzicht zijn de regels direct toegepast op het uitleggen. De indeling in zes voorwaarden is ontleend aan Hulshof e.a. (1980).

1. Voorwaarde van inhoud.

De taaluiting telt als uitleg wanneer de docent door middel van de taaluiting de leerlingen in kennis stelt van een samenhang tussen feiten of een verklaring van gebeurtenissen en wetmatigheden die voor de leerlingen nieuw en onbegrepen zijn.

Toelichting.

Deze voorwaarde van inhoud geeft een inhoudelijke karakterisering van het uitleggen. De samengesteldheid van deze karakterisering (samenhang geven, verklaring geven) geeft aan dat onder 'uitleggen' taalhandelingen met verschillende inhouds worden gedefinieerd.

2.Essentiële voorwaarde.

De taaluiting 'uitleggen' geldt als poging de verstrekte informatie door de leerlingen te doen begrijpen.

Toelichting.

De essentiële voorwaarde kenmerkt het gedrag dat de docent bij de leerlingen wenst te realiseren. Het geeft de bedoeling van de docent weer. Begrijpen wordt hierin dus gezien als een vorm van gedrag.

3.Voorwaarde van oprechtheid (echtheid).

De docent wil werkelijk bereiken dat de leerlingen de uitleg begrijpen.

Toelichting.

Met de voorwaarde van oprechtheid worden onechte taalhandelingen uitgesloten. De docent moet de oprechte wil hebben zijn doel te bereiken bij de leerlingen. De docent is bereid daar extra moeite voor te doen. Is dat niet het geval, dan is er sprake van een onechte situatie. Het ziet er wel uit als een uitleg, maar het is het niet. Iets dergelijks is het geval als de docent niet reageert op vragen van de leerlingen of de uitleg zodanig inricht dat verwerking van de verstrekte informatie praktisch onmogelijk is (bijvoorbeeld door een extreem hoog tempo).

4.Voorbereidende voorwaarden.

- De docent gaat er niet bij voorbaat vanuit dat de leerlingen de uitleg niet willen begrijpen.
- De docent gaat er niet bij voorbaat vanuit dat de leerlingen het uitgelegde al begrijpen.
- De docent is bij voorbaat bereid het gedrag van de leerlingen te herkennen als begrijpend gedrag.

Toelichting.

In dit drietal voorwaarden wordt aangegeven hoe de positie van de docent is ten opzichte van de leerlingen vóórdat het initiatief tot de uitleg wordt genomen. Ook hier is weer een poging gedaan diè factoren weer te geven die kenmerkend zijn voor het uitleggen. De dubbele ontkenning in de eerste voorwaarde is een bewuste afzwakking van de bewering: "de docent gaat ervan uit dat de leerling de uitleg wil begrijpen". Het kan namelijk het geval zijn dat de leerlingen bij het begin van de uitleg deze helemaal niet willen begrijpen, maar dat de interesse tijdens de uitleg wordt gewekt.

Voor de tweede voorwaarde geldt een soortgelijke afzwakking. De derde voorwaarde stelt niet dat de docent ieder gedrag van de leerlingen als begrijpend gedrag zal herkennen, maar dat hij daartoe bereid is om dat te doen.

In de voorwaarden is sprake van een sterke gerichtheid op de docent. Dit is een direct gevolg van de benadering vanuit de taalhandelingstheorie. De docent doet een 'zet' in het taalspel, de zet van het uitleggen, de leerlingen reageren daarop met een antwoordzet, begrijpend gedrag of niet begrijpend gedrag. De docent is echter de initiatiefnemer en uitvoerder van de uitlegzet, al of niet daartoe door de leerlingen aangezet.

Sleutelwoord in deze nieuwe omschrijving is weer het woord 'begrijpen'. Het is het antwoordgedrag dat de docent door de uitleg wenst te realiseren. Een volledige omschrijving van uitleggen vraagt dus ook een uitgebreide karakterisering van het begrijpen. Dit zal in één van de volgende paragrafen gebeuren.

Bovenstaande voorwaarden garanderen niet het slagen van een uitleg. Een mislukte uitleg telt dus ook als een uitleg als tenminste aan de voorwaarden is voldaan. Een uitleg is als taalhandeling geslaagd als de docent het gewenste gedrag bij de leerlingen heeft bereikt. De volgende voorwaarden geven aan waaraan tenminste voldaan zal moeten zijn opdat een uitleg kan slagen. De voorwaarden zijn geen garantie voor een geslaagde uitleg. Het zijn noodzakelijke voorwaarden, ze zijn niet voldoende.

5. Voorwaarden van intentie.

- Er is een mate van overeenstemming tussen docent en leerlingen over de wijze waarop de uitleg zal worden uitgevoerd.
- De leerlingen hebben vertrouwen in de kennis van de docent over het onderwerp en in de capaciteiten van de docent om dit te kunnen uitleggen.
- De leerlingen willen het uitgelegde begrijpen en zijn bereid activiteiten te verrichten om de uitleg te kunnen volgen.
- De intenties van docent en leerlingen zijn met elkaar in overeenstemming, voor wat betreft de inhoud van de uitleg en de eisen die de uitleg stelt aan het gedrag van docent en leerlingen.
- De docent verwacht niet bij voorbaat van de leerlingen dat zij niet geïnteresseerd zijn in de uitleg.
- De leerlingen verwachten niet bij voorbaat van de docent dat die niet geïnteresseerd is in de moeilijkheden die de leerlingen kunnen hebben bij het begrijpen van de uitleg.

Toelichting.

Deze voorwaarden hebben betrekking over het verwachtingspatroon dat docent en leerlingen van elkaar hebben ten aanzien van het gedrag en de situatie waarin de uitleg plaatsvindt.

6. Voorwaarden van verstaanbaarheid.

- Docent en leerlingen kunnen elkaar verstaan en begrijpen in een gemeenschappelijke taal of in een combinatie van talen.
- Docent en leerlingen kunnen fysiek met elkaar communiceren.
- De docent spreekt voor de leerlingen begrijpelijke taal wat betreft zinslengte, woordkeus,....
- De leerlingen beschikken over (basis-)kennis en (basis-)handelingen om de uitleg te kunnen volgen.

Toelichting:

Dit zijn de voorwaarden die het mogelijk maken dat docent en leerlingen elkaar fysiek en mentaal kunnen verstaan.

In de formulering van deze voorwaarden is bewust voor de meervoudsvorm "leerlingen" gekozen omdat daarmee impliciet een aantal voorwaarden aan de situatie van de klas als geheel worden gesteld. Hoewel strikt genomen het slagen van een uitleg een kenmerk is van het slagen van een taalhandeling tussen twee personen, de docent en een leerling, zal er in het algemeen een sterke invloed van het klassegebeuren op de kwaliteit van de uitleg plaatsvinden. In die zin kunnen de voorwaarden op twee manieren gelezen worden: de voorwaarden gelden voor iedere leerling afzonderlijk en voor de hele klas.

§1.4. BEGRIJPEND GEDRAG.

Uitleggen en begrijpen horen als siamese tweelingen bij elkaar. Het een kan niet zonder het ander. In het voorgaande is het uitleggen omschreven als een handeling die het begrijpen als begrijpend gedrag wenst te realiseren. In deze paragraaf zullen deze termen worden verduidelijkt. Allereerst wordt een overzicht gegeven van gangbare wiskundige didaktische opvattingen over het begrijpen van wiskunde. We streven hierbij niet naar volledigheid (zie daarvoor: Goffree e.a. 1981). De keuze van deze theorieën is vooral ingegeven om de bruikbaarheid daarvan te toetsen aan de opzet van het onderzoek. Daarna zal een voor het onderzoek hanteerbare keuze gemaakt worden.

Inzicht.

Van Hiele omschrijft 'inzicht' in zijn proefschrift "De problematiek van het inzicht" (van Hiele, 1957) als de mogelijkheid van leerlingen om adequaat te handelen in nieuwe situaties. In "Begrip en Inzicht" (van Hiele, 1973) vraagt hij zich af op welke wijze inzicht toetsbaar is. Hij komt daarbij tot de volgende konklusie:

"Voorwaarde voor inzicht is het adequaat kunnen handelen in een nieuwe situatie. Inzicht is toetsbaar, als docent en leerling samenwerken. Het is voor een leerling minstens zo belangrijk om te weten of hij inzicht verkregen heeft, als voor de docent.

Op examens constateert men meestal slechts inzicht dat verworven is aan de hand van antwoorden die de kandidaat reeds vroeger in een of andere vorm gevonden heeft. Men moet er naar gissen, of dit een reproductie is van eigen inzicht of van dat van anderen.

Het adequaat handelen in een nieuwe situatie wijst slechts dan op verworven inzicht, als men zeker is dat de handeling voortkomt uit de intentie van de leerling."

Men kan op een objectieve manier beoordelen of deze intentie bij de leerling aanwezig is door:

"waar te nemen of de kandidaat moeilijk tot het samenvoegen der onderdelen van zijn redenering komt, of men vaak hem de helpende hand moet bieden. Men controleert of de intentie er is door de kandidaat een opgaaf van dezelfde structuur maar van andere vorm te laten maken."

Het is duidelijk dat de toevoeging van het 'intentionele handelen' ingegeven is door de moeilijkheden om in de praktijk te kunnen constateren of een leerling inzicht vertoont. Daarvoor zou een leerling adequaat moeten handelen in nieuwe situaties. Een dergelijke omschrijving geeft onvoldoende houvast om op basis van waargenomen leerlinggedrag te kunnen constateren of een leerling inzicht vertoont. Wat is adequaat, wat is nieuw? Deze criteria zijn in sterke mate afhankelijk van de opvattingen van de waarnemer. Van Hiele stelt dat het intentionele in het handelen is af te leiden uit specifiek waarneembaar gedrag in specifieke toetsituaties. Het is bijvoorbeeld niet voldoende aan de leerling te vragen of hij deze oplossingsmethode bewust heeft gekozen met het doel dat.... Het gevaar is dan aanwezig dat een leerling een voor hem voordelig antwoord geeft of dat hij helemaal geen antwoord kan geven omdat hij over dat soort vragen niet heeft nagedacht.

De opvattingen van van Hiele over 'inzicht' zijn niet zonder meer van toepassing op 'begrijpen' in het algemeen. Wanneer heeft een klas een uitleg begrepen? Letterlijk betekent 'begrijpen': het zich eigen maken (iets be-grijpen). Een leerling kan een

uitleg begrijpen, zonder dat hij die intentioneel en adequaat kan toepassen in een nieuwe situatie. Begrijpen is een ruimer begrip dan inzicht, inzicht is een speciale vorm van begrijpen.

Schema's.

Een meer algemene opvatting over het begrijpen van wiskunde is te vinden in het werk van Skemp (Skemp, 1971). Grondidee in deze opvatting is de vooronderstelde ordening van aanwezige kennis en vaardigheden in 'schema's'. 'Schema' is een algemene psychologische term, ontleend aan Piaget, waarmee de aanwezigheid van mentale structuren wordt aangegeven. Een schema is een associërend netwerk van begrippen, feiten, handelingen, emoties, ...die op één of andere manier aan elkaar gelieerd zijn. Een gedeelte van het schema rondom 'getal' kan bijvoorbeeld zichtbaar gemaakt worden door alle directe associaties met dat woord op te noemen. Een schema heeft twee functies: het integreert bestaande kennis en het is mentaal gereedschap voor het verwerven van nieuwe kennis. Nieuwe kennis kan in een schema worden verwerkt zonder dat daarvoor de structuur van het schema ingrijpend hoeft te veranderen. Dit wordt assimileren genoemd. Het kan echter ook nodig zijn dat de nieuwe kennis zodanig in strijd is met bestaande schema's dat structurele aanpassing nodig is vóórdat deze nieuwe kennis verwerkt kan worden. Deze structurele aanpassing van een schema wordt accomoderen genoemd. 'Begrijpen' is in de opvatting van Skemp niets anders dan het assimileren van nieuwe kennis in een schema.

Op basis van deze ideeën heeft van Dormolen de algemene onderwijs- strategie O(riënteren) O(ntwikkelen) V(erwerken) uitgewerkt voor het leren van begrippen (Van Dormolen, 1974, 1982). Deze strategie is een fasegewijze en doelgerichte aanpak voor het leren van (nieuwe) wiskundige begrippen.

In latere publicaties (Skemp, 1979a, 1979b) heeft Skemp een meer gedetailleerde uitwerking gegeven van zijn opvattingen over begrijpen. Hij onderscheidt daarbij drie soorten begrijpen:

- Instrumenteel begrijpen: het vermogen om een geschikte oplossings- methode voor een probleem toe te kunnen passen zonder daarbij te weten waarom de methode werkt.
- Relationeel begrijpen: het vermogen om specifieke regels of procedures af te kunnen leiden uit meer algemene wiskundige betrekkingen.
- Logisch begrijpen: het vermogen wiskundige symbolen met relevante wiskundige ideeën te verbinden en deze ideeën tot ketens van logische argumentatie te combineren.

Deze drie soorten van begrijpen kunnen, volgens Skemp, ieder gekombineerd worden met twee soorten van mentale activiteiten: intuïtieve en reflectieve. Intuïtieve activiteiten richten zich op de direct waarneembare omgeving. Het gaat om de gebruikelijke waarneembare handelingen: een deur sluiten, thee zetten, schrijven, cijferend optellen. Reflectieve activiteiten sturen de intuïtieve activiteiten. Ze zijn het gevolg van een nadere bezinning op de intuïtieve activiteiten en ze kunnen een verandering van die intuïtieve activiteiten teweeg brengen. In combinatie met de drie vormen van begrijpen onderscheidt Skemp zo zes toestanden van begripend gedrag.

Ook hier zien we een verschuiving van een algemeen theoretische omschrijving naar één die meer gesteld is in termen van waarneembaar leerlingengedrag.

Luisteren, navertellen, inzicht.

Zwaneveld en Van Dormolen (1977) onderscheiden drie niveaus van begrijpen:

- **Het receptieve niveau.** De leerling geeft aan dat de uitleg is begrepen, maar kan de uitleg niet navertellen in eigen woorden. De uitleg bevat voor de leerling geen onduidelijkheden en geeft geen aanleiding tot een nadere toelichting of herhaling.

- **Het reproductieve niveau.** De leerling heeft de uitleg op receptief niveau begrepen en kan de uitleg in eigen woorden reproduceren.

- **Inzicht.** De leerling heeft de uitleg op reproductief niveau begrepen en kan het uitgelegde zelfstandig intentioneel toepassen in nieuwe situaties.

We kunnen deze driedeling opvatten als een uitbreiding van de opvatting van van Hiele rondom inzicht. We zien hier een expliciete formulering van 'begrijpen' in termen van waarneembaar leerlingengedrag.

Hoewel deze driedeling helder geformuleerde criteria geeft voor de drie verschillende niveaus blijkt het in de praktijk onmogelijk te zijn ze op een zinvolle manier toe te passen. Er doen zich een aantal fundamentele moeilijkheden voor:

- Is de indeling wel zo cumulatief als wordt gesuggereerd? Hoe klassificeren we een leerling die zelfstandig een aantal nieuwe opgaven weet op te lossen maar er niet bij kan vertellen hoe hij het heeft gedaan?

- Wanneer is er sprake van een nieuwe situatie? Is het oplossen van de $y^2+3y+2=0$ met behulp van de a,b,c-formule een nieuwe situatie nadat deze is voorgedaan met $x^2+3x+2=0$?

- Meer principieel is het bezwaar dat de indeling suggereert dat 'inzicht' de hoogste vorm van begrijpen is. Hierin zit bij voorbaat een visie op wiskunde-onderwijs verborgen waarbij men in het wiskunde-onderwijs altijd zou moeten streven naar juist deze vorm van begrijpen. Dit maakt de indeling ongeschikt om er praktijksituaties mee te kunnen analyseren. Een leraar kan immers wel een heel ander doel voor ogen hebben bij zijn uitleg. In zo'n situatie is een konstatering dat de uitleg niet geslaagd zou zijn omdat inzicht niet bereikt is, onjuist en alleen maar een gevolg van de impliciete visie van de waarnemer. In dit opzicht zal onze opvatting van begrijpen vrij moeten zijn van een à priori visie op het wiskundeonderwijs.

Er zit een frappant verschil in de mogelijkheden tot observatie tussen de eerste en de laatste twee soorten van begrijpen. Hoe kun je als docent/onderzoeker constateren of een leerling een uitleg op receptief niveau heeft begrepen? De leerling zou daar zelf melding van moeten kunnen maken. De mededeling: "ja, ik kon het goed volgen" is daarbij echter zeer onbetrouwbaar. Een dergelijk antwoord kan immers worden ingegeven door allerlei sociaal wenselijke factoren. De leerling zal op zijn minst een korte globale samenvatting moeten kunnen geven.

Begrijpend gedrag.

Het bovenstaande verschaft ons de middelen om 'begrijpen' te formuleren in termen van waarneembaar 'begrijpend gedrag' van leerlingen. Welke vorm van gedrag bij een gegeven uitleg geïnterpreteerd kan worden als begrijpend gedrag, zal sterk afhangen van de gegeven uitleg.

Als we een gebruiksaanwijzing voor een blikopener schrijven dan schept die de verwachting dat de lezer daarmee blikken kan openen. De uitleg is begrepen als de lezer op grond van de aanwijzingen blikken kan openen.

In het algemeen schept iedere uitleg verwachtingen omtrent het gedrag van de leerling. Dit gewenste gedrag zullen we **begrijpend gedrag** noemen.

Omschrijvingen van dit gedrag zijn soms in omschrijvingen van doelstellingen terug te vinden.

Bijvoorbeeld: de leerling kan vergelijkingen van het type $ax^2 + bx + c = 0$ met behulp van de a,b,c-formule oplossen. In een dergelijke situatie is er sprake van instrumenteel begrip.

Of: de leerling is in staat een kwadratische vergelijking op de meest efficiënte wijze op te lossen en kan achteraf een verantwoording te geven van de gekozen oplossingsmethode. Dat betekent dat de leerling de beschikking heeft over een arsenaal van oplossingsmethoden en weet in welke situatie welke methode het meest geschikt is en waarom die het meest geschikt is. In een dergelijke situatie is er sprake van inzicht in de oplossingsmethoden voor kwadratische vergelijkingen.

In die zin vinden we de vormen van begrijpend gedrag terug zoals ze geformuleerd zijn door Skemp en Zwaneveld cs.

Of het één een hogere vorm is van begrijpen dan het andere is moeilijk te zeggen. Het hangt af van de personen en van de criteria die men stelt aan de kwaliteit van de handeling. De a,b,c-formule is een krachtige en doeltreffende oplossingsmethode voor alle kwadratische vergelijkingen. Ze geeft direkt inzicht in de oplosbaarheid en de oplossingen van elk type kwadratische vergelijkingen. Voor iemand die alleen maar geïnteresseerd is in de oplossingen en voor wie de gekozen methode en het meerdere rekenwerk niet van belang is, is dit een hoge vorm van begrijpen en doet het onderzoek naar de meest geschikte oplossingsmethode vooraf, alleen maar aan als primitief gedoe en verspilling van tijd, energie en geheugen. Voor iemand die geïnteresseerd is in elegante methodes van het oplossen van kwadratische vergelijkingen geldt de a,b,c-formule juist als een primitieve vorm van begrijpen. Ze geeft immers totaal geen inzicht in de relatie tussen type vergelijking en de meest geschikte oplossingsmethode.

Dat betekent dat we niet bij voorbaat de hierarchische ordening in niveaus van begrijpen zullen overnemen. Iedere vorm van begrijpend gedrag heeft haar eigen waarde, passend bij de gegeven uitleg.

Hoe ziet dat begrijpende gedrag er bij een gegeven uitleg nu concreet uit? Met het volgende denkbeeldige voorbeeld wordt geprobeerd het een en ander wat tastbaarder te maken. Het gaat om de uitleg waarom-een-kwadraat-nooit-negatief-is. Naast iedere uitleg-stap staat de bijbehorende begrip-stap.

Uitleg	Begrijpen
Een kwadraat ziet er zó uit: $x^2 = x \cdot x$	Herkennen en accepteren van de formele presentatie van een kwadraat
Een positief getal keer een positief getal is positief	Herkennen en accepteren van een bekende regel
Als x positief is, dan dus ook $x \cdot x$	Toepassen van de regel op de formele situatie
Een negatief getal keer een negatief getal is positief	Herkennen en accepteren van een algemene regel
Als x negatief is dan is dus $x \cdot x$ positief	Toepassen van de regel op de formele situatie
$0 \cdot 0 = 0$	Herkennen van een feit.
x is positief of negatief of 0 , in alle gevallen is dus $x \cdot x$ positief of 0.	Kombineren van bovenstaande verklaringen.

Sleutelwoorden bij het begrijpen van deze samengestelde uitleg zijn: **herkennen, accepteren, toepassen en combineren.**

Begrijpend gedrag zal lang niet altijd zo ondubbelzinnig bij de uitleg zijn vastgelegd als in de situatie van de blikopener en de uitleg waarom-kwadraten-nooit-negatief-zijn. Ook hoeft dat begrijpend gedrag niet vooraf door de docent gekozen en bekend te zijn. Het is mogelijk dat de docent tijdens de uitleg tot één of andere (impliciete) keuze komt. In zo'n situatie kan er sprake zijn van een zekere onderhandeling. Tijdens de uitleg kan de docent erachter komen wat in de gegeven situatie haalbaar is. Het enige dat dan vóór de uitleg vaststaat is de te behandelen leerstof, niet welke doelstellingen daarbij worden nagestreefd. Tenminste niet in die zin dat er sprake is van ondubbelzinnig waarneembaar na te streven gedrag. Hooguit heeft de docent vage algemene plannen op de langere termijn over de mate van beheersing van het onderwerp aan het eind van een hoofdstuk of een onderwerp. Een dergelijke situatie verschaft de docent de mogelijkheid om in te kunnen spelen op onverwachte gebeurtenissen tijdens een les. Dat deze situatie niet ondenkbaar is, wordt aangegeven door het feit dat docenten veelal niet in staat zijn studentleraren te helpen bij het formuleren van doelstellingen voor hun lesvoorbereidingen en daar ook het nut niet van inzien.

Deze opvatting over begrijpend gedrag impliceert dat we de vormen van begrijpen zoals geformuleerd door Skemp en Zwaneveld cs zullen accepteren als vormen van begrijpend gedrag. We zullen echter niet de taxonomie accepteren in de verschillende niveaus. We gaan er van uit dat er veel meer mogelijke vormen van begrijpend gedrag van wiskunde zijn, waarvan sommige in een taxonomische relatie met elkaar kunnen staan.

Daarnaast betekent deze keuze dat we gedrag van leerlingen pas in nauwe relatie met de gegeven uitleg als begrijpend gedrag zullen kunnen identificeren. We zullen moeten zien te achterhalen hoe de docent aan de leerlingen duidelijk maakt welke verwachting de uitleg stelt aan het gewenste begrijpende gedrag van de leerlingen. Daarnaast staat de vraag hoe leerlingen herkennen welke vorm van begrijpend gedrag van hen verwacht wordt? Wat zijn de signalen in een uitleg waar ze dit uit af kunnen leiden?

§ 1.5. VERWIJZEN, BETEKENIS GEVEN EN BETEKENIS KRIJGEN.

In §1.4. is 'het begrijpen' omschreven vanuit het idee van waarneembaar, begrijpend gedrag. Daarmee is een poging gedaan waarneembare criteria te formuleren op grond waarvan een docent of onderzoeker kan besluiten of een uitleg wel of niet geslaagd is. In deze paragraaf wordt dieper ingegaan op het uitleggen als een situatie waarin 'betekenis-overdracht' plaatsvindt. Het begrijpen wordt zo geïnterpreteerd als een gebeurtenis waarin sprake is geweest van effectieve betekenisoverdracht. Daarvoor wordt een terminologie ontwikkeld rondom 'betekenis'.

Verwijzen.

Woorden hebben meestal een verwijzende functie. Met 'verwijzen' wordt bedoeld: het gebruik van woorden roept een bepaalde associatie op bij de spreker en de hoorder. Het gebruik van het woord 'fiets' kan bij de spreker een associatie oproepen van een tweewielig voertuig, door spierkracht aangedreven. Die associatie kan zuiver visueel zijn (een plaatje in je hoofd) of verbaal ('een tweewielig voertuig, door...'). Zo kunnen zelfstandige naamwoorden verwijzen naar fysische objecten (bv: fiets) of naar mentale objecten (bv: π of een kubus), kunnen werkwoorden verwijzen naar handelingen en kunnen bijvoeglijke naamwoorden en bijwoorden verwijzen naar eigenschappen van objecten en handelingen. Deze indeling is natuurlijk al te voor de hand liggend. Het is heel lastig te bepalen waar een woord in het algemeen naar kan verwijzen. Zelfs binnen een specifieke situatie hoeft een woord niet ondubbelzinnig te verwijzen naar één object, handeling of eigenschap, maar kan dit ook verwijzen naar een 'wolk' van objecten, handelingen, eigenschappen, emoties,.....

Het resultaat van de verwijzingen van een woord, een uitdrukking noemen we de **betekenis** van dat woord, die uitdrukking. Ook emotionele en intentionele verwijzingen worden daarmee in de betekenis opgenomen. Deze terminologie is geschikt om bepaalde effecten binnen een uitlegsituatie te beschrijven. Ter illustratie volgt onderstaand fragment.

In dit fragment probeert de docent duidelijk te maken hoe je vergelijkingen kunt gebruiken om redaktiesommen op te lossen. De klas is een tweede klas van de MAVO. In de vorige lessen hebben de leerlingen geleerd eenvoudige vergelijkingen op te lossen. Het fragment speelt zich af aan het begin van de les.

Fragment 1 (Kempe, 1984).

- 1 (L is de leraar, A,B,C, ... zijn leerlingen)
[L. leest het volgende raadsel dat hij van te voren op het bord heeft geschreven hardop voor]
L: In een klas zit een aantal leerlingen. Als er tweemaal zoveel waren en dan nog eens 10 erbij, dan waren er 42.
- 5 [Het raadsel gaat verder met: hoeveel leerlingen zitten er in de klas? Voordat L deze vraag kan stellen, roepen 2 à 3 leerlingen het goede antwoord (16) al]
L: Jij zegt: 10 eraf en delen door 2.
A: Ja.
L: Is er iemand die een ander antwoord heeft? 8? Waarom 8?
- 10 B: Nou het is twee keer, dan tel je het erbij en die 16 moet je nog eens door 2 delen, want er staat: als er tweemaal zoveel waren...

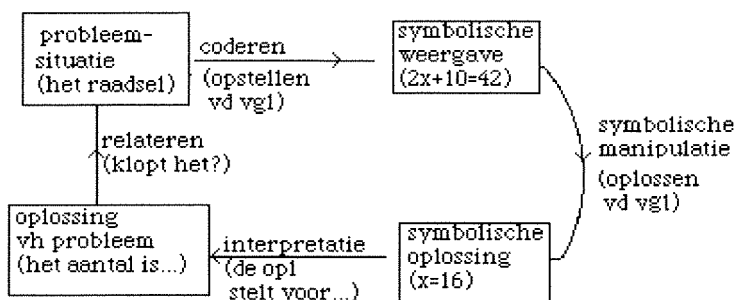
- L: Ja.
 B: ...en dan nog 10 erbij, dan waren er 42, dan moet je dus door 4 delen.
 L: Van de 10 tweemaal, dat wordt viermaal, dan zou je dus door 4 moeten ...
 15 C,D: 16.
 L: 16 is inderdaad goed, want kijk maar even, 16, als je nou tweemaal zoveel hebt dan krijg je 32 en als je er dan nog 10 bij hebt zit je op 42. Dit verhaaltje daarvoor kunnen we een vergelijking opstellen als we even denken dat het aantal leerlingen in de klas x is. Wat voor vergelijking zou je hierbij op kunnen schrijven? Nee wacht even. Jij zegt $x = 16$. Oplossingsverzameling is 16. Ja, dit
 20 is eigenlijk zo'n beetje de laatste stap voordat je zegt: de oplossing is dat en dat. Maar wie weet er een andere vergelijking te geven, de vergelijking waarmee je helemaal aan het begin kunt beginnen? We weten allemaal het antwoord wel, maar we zouden toch kunnen proberen of we hier een vergelijking bij zouden kunnen opzoeken. Wie heeft daar een ideeetje voor? Daar komen x -en in voor, daar komt een $=$ -teken in voor. Erik? Probeer eens.
 25 Er: $2x$
 L: $2x$
 Er: Ja en eh ...
 L: Plus 10.
 Er: Plus 10.
 30 A: Is 16.
 Er: Is 42.
 A: Is 16.
 L: Nee, is 42.
 Er: Zie je wel.
 35 L: Dit is keurig netjes in wiskunde opgeschreven. Tweemaal het aantal leerlingen, wat ik dus x noem, en daar 10 bij optellen, is gelijk aan 42. En als je die vergelijking hebt kun je die vergelijking oplossen en vind je dus 16. Wie weet hoe je die vergelijking moet oplossen?

Allereerst zullen we, op basis van dit fragment, proberen te achterhalen wat de verwijzingen van L zijn van de uitdrukking 'vergelijking'.

In de regels 18,19,20 stelt L voor om voor het raadsel een vergelijking op te stellen. Daarbij wordt het aantal leerlingen in de klas x genoemd. De verwijzing van vergelijking is hier: een **symbolische weergave van een situatie**. Het verwerpen van het antwoord " $x=16$ " (19,20) bevestigt dit. Dit antwoord past niet bij deze verwijzing omdat de situatie er niet uit is terug te lezen. L wil een vergelijking hebben "waarmee je helemaal aan het begin kunt beginnen" Samen met Erik komt hij zo op $2x + 10 = 42$. In 35,36 tenslotte versterkt hij nog eens deze verwijzing door de vergelijking terug te vertalen. De letter x wordt daarbij ingewisseld voor "het aantal leerlingen". Een andere, meer algemene, verwijzing van 'vergelijking' is : "iets met een x en een $=$ -teken erin" (24), dat wil zeggen: een **symbolische uitdrukking van een speciale vorm**.

Tenslotte refereert L met vergelijking aan "iets dat je kunt oplossen" (36,37) . Daarmee doelt hij waarschijnlijk op het formeel manipuleren van de vergelijking dat uiteindelijk tot een uitdrukking van de gedaante ' $x = \dots$ ' voert. De verwijzing van vergelijking is dan: een **symbolische uitdrukking die zich op een specifieke manier laat manipuleren**.

Deze referenties van 'vergelijkingen' passen in een totaal-beeld van wiskunde als hulpmiddel om de werkelijkheid te verklaren en te manipuleren. Schematisch zijn daarin de volgende fasen en handelingen te onderscheiden:



De pijlen geven een chronologische volgorde aan. Ook bij L vinden we die volgorde terug.

In de tweede plaats zullen we proberen te achterhalen wat de referenties van de leerlingen zijn van de uitdrukking 'vergelijking'. Dat is moeilijk af te leiden uit dit beperkte fragment. De leerlingen kunnen aan verschillende zaken refereren als ze 'vergelijking' gebruiken. Bovendien komen niet alle leerlingen aan het woord. De enige aanwijzingen zijn de spontane reactie " $x = 16$ " (19) en de dialoog tussen Erik en L.

Het antwoord " $x=16$ " wijst naar 'vergelijking' als een symbolische uitdrukking van een speciale vorm. De verwijzing van L met 'vergelijking' als symbolische weergave van een probleemsituatie, is gezien de trage dialoog met Erik, niet erg aktueel bij Erik. Alleen met hulp van L komt Erik tot $2x + 10 = 42$ (24 tm 34). De moeilijkheden bij deze vertaling van een probleemsituatie naar een symbolische weergave daarvan, worden misschien veroorzaakt door de als...dan- gedaante van het raadsel en door het onrealistische karakter van de situatie.

In het volgende fragment, dat aansluit op het vorige, zullen we wat meer zicht kunnen krijgen op de betekenis van 'vergelijking' voor één leerling.

Fragment 2 (vervolg van fragment 1).

- 1 [De vergelijking $3x-4=11$ is zojuist opgelost via de stappen $3x=15, x=5$. Een leerling gaf als oplossing: je telt er 4 bij op en deelt door 3.]
- A: Ik snap het niet.
- L: Wat snap je niet?
- 5 A: Hoe u aan die 5 bent gekomen. Ik had die 4 bij die 11 opgeteld, dan krijg je 15.
- L: Dat is goed. Dat is prima. En dan staat er $3x=15$. Snap je dan niet hoe ik aan die $x=5$ kom?
- A: Ja. Dat snap ik niet.
- L: Nee. Wat staat hier? [Wijst naar $3x=15$] Kun je dat eens precies zeggen?
- A: $3x$.
- 10 L: Wat betekent $3x$?
- A: 15.
- L: Ja. OK. Wat betekent $3x$? Wat wil dat zeggen?
- B,C,D: 3 maal x

- L: 3 maal x. Nou even ... Nou zal ik het helemaal in woorden zeggen wat het is: 3 maal een getal is
 15 15. Maar welk getal moet daar staan? [wijst naar x]
 A: 5.
 L: En hoe kom je daaraan?
 B,C,D: 15 gedeeld door 3.
 L: Ja? [Kijkt A aan] Echt?
 20 A: Ja.

Ondanks de reactie van A op de laatste vraag van L of hij het heeft begrepen, is het niet duidelijk of dat ook echt zo is.

A snapt niet waarom $x=5$ de oplossing is van $3x=15$. Met de vragen: "Wat staat hier?" (8), "Wat betekent $3x$?" (10,12) en "Wat wil dat zeggen?" (12) probeert L de verwijzingen van de leerlingen zelf naar boven te halen en tegelijkertijd aan te sturen op de betekenis van 'vergelijking' als symbolische weergave van een probleemsituatie. De vragen zijn half-open. Ze laten ruimte voor eigen interpretatie van de leerlingen, maar ze suggereren ook een bepaalde richting. De vraag: "Wat staat hier? Kun je dat eens precies zeggen?" is dubbelzinnig. Die kan betekenen: "Wat wordt er bedoeld met $3x=15$?" (vraag naar betekenis) of: "Wat staat hier letterlijk?" (lees eens voor). A kiest de laatste mogelijkheid. Doorvragen van L levert het antwoord 15 op (11). Het getal 15 is immers hetzelfde als $3x$ vanwege het gelijkteken. Door de vraag nog eens te herhalen wijst L dit antwoord af (12). B,C en D komen met : drie maal x. $3x$ wordt hiermee opgevat als een afkorting van ' $3 \times x$ ' of 'drie maal x'. $3x=15$ heeft een formeel abstracte verwijzing die gebaseerd is op vervangingsregels. $3x$ mag worden vervangen door 15, of door $3 \times x$ zoals ook $3x=15$ mag worden vervangen door $x=5$ omdat je beide kanten door 3 mag delen (18). Vergelijkingen zijn speciale autonome objecten met hun eigen specifieke gebruiksregels. Het zijn combinaties van lettertekens die herleid kunnen worden volgens de regels van het letterrekenen. Deze verwijzing is: **een symbolische weergave (afkorting) van een symbolische situatie.**

Binnen de verwijzing van L van 'vergelijking', als symbolische weergave van een probleemsituatie, ligt de oplossing $x=5$ zonder gerekend voor het oprapen. Hij probeert dat ook uit te lokken door de vraag "Welk getal moet daar staan?" (15). Desondanks volharden B,C en D in hun eigen interpretatie en lossen ze de vergelijking op door die te herleiden (18). Het is onduidelijk of dat bij A ook het geval is (16).

Betekenis geven, betekenis krijgen.

Samengevat zien we een duidelijk verschil in de referenties van 'vergelijking' tussen docent en leerlingen. Dit verschil karakteriseert de inhoud van de uitleg. L wil dat de leerlingen eenvoudige problemen in vergelijking kunnen weergeven en tegelijkertijd een vergelijking kunnen interpreteren als een weergave van een realistische situatie. Dit betekent dat de leerlingen hun eigen referenties van 'vergelijkingen' zullen moeten loslaten en moeten inruilen voor die van de docent.

In een latere fase, bij het formeel oplossen van de vergelijking, hebben ze die verwijzing echter wel weer nodig.

In de fragmenten 1 en 2 zien we dat de docent een ruimere betekenis probeert te

geven aan het woord 'vergelijking'. Zijn eigen betekenis van dat woord is opgebouwd uit de twee componenten: "vergelijking' als symbolische weergave van een probleemsituatie' en "vergelijking' als zelfstandig symbolisch object met eigen herleidingsregels'. Voor de leerlingen is alleen de laatste component aktueel (voor zover dat tenminste uit deze twee fragmenten valt af te leiden). In de uitleg ontstaat een situatie van betekenis-geven en betekenis-krijgen die nauw verbonden is met het ontwikkelen van referenties rond het woord 'vergelijking'.

De betekenis van de docent wordt gedeeltelijk bepaald door het gebruik van vergelijkingen in de wiskundige wereld. Dit gebruik dikteert als het ware de betekenis aan de docent, het **geeft** 'vergelijking' een betekenis voor de docent . Door de eigen interpretatie van dat gebruik door de docent en door de mogelijkheden en onmogelijkheden van de situatie in de les **krijgt** 'vergelijking' ook een betekenis. Betekenis-geven en -krijgen zijn niet van elkaar te scheiden. Ze zijn een gevolg van de positie van de docent binnen de wiskundige wereld en de situatie tijdens de uitleg. Hetzelfde geldt voor de leerlingen. Door hun eigen interpretaties van de uitleg ontwikkelen ze eigen referenties van 'vergelijkingen' en **geven** ze daarmee betekenis aan 'vergelijking'. De activiteiten van de docent, de gekozen leerstof en de situatie in de les zorgen ervoor dat 'vergelijking' voor hen een bepaalde betekenis **krijgt**.

A had de uitleg van L begrepen als hij de verwijzing van L van het symbool x als een in te vullen getal had herkend en geaccepteerd. Dan was onmiddellijk duidelijk geweest dat het getal 5 aan de vergelijking voldeed. 'Begrijpen' is in deze situatie: het herkennen en accepteren van een bepaalde verwijzing van de docent. Begrijpen is het resultaat van het betekenis geven en krijgen door middel van referenties van woorden en uitdrukkingen.

§ 1.6. SOORTEN VAN UITLEG.

Uitleggen **dat** in een rechthoekige driehoek geldt dat $a^2 + b^2 = c^2$, is iets anders dan uitleggen **waarom** in een rechthoekige driehoek geldt dat $a^2 + b^2 = c^2$. Hetzelfde geldt voor begrijpen. Begrijpen **dat** in een rechthoekige driehoek geldt dat $a^2 + b^2 = c^2$, is iets anders als begrijpen **waarom** in een rechthoekige driehoek geldt dat $a^2 + b^2 = c^2$. Het eerste vraagt een verwijzing van de letters in de formule naar bijbehorende zijden in de driehoek, een herkenning van de kwadraten in de formules, een herkenning van de opbouw van de formule, enz... Het tweede vraagt bovendien naar een dwingende reden voor het waar zijn van de bewering. Beide soorten uitleg vragen een eigen aanpak en leiden tot verschillende resultaten. De woorden 'waarom', 'wat', 'hoe' en 'dat' blijken bij dit onderscheid sleutelwoorden te zijn. In feite is hier sprake van verschillende taalhandelingen, elk met eigen regels. In het volgende overzicht worden een aantal van die verschillende soorten uitleg op een rij gezet. Bij iedere situatie wordt de kenmerkende voorwaarde van inhoud vermeld.

1. Uitleg waarom...

1.1. ... iets het geval is.

In de uitleg wordt een verklaring gegeven van een feit.

1.2. ... iets het geval kan zijn.

In de uitleg worden mogelijkheden opgenoemd waaronder bepaalde feiten zich kunnen gaan voordoen.

1.3. ...iets niet het geval is.

...iets niet het geval kan zijn.

Vanuit de verwachting dat iets het geval is worden redenen aangegeven die het voordoen van een feit onmogelijk maken.

1.4. ...je iets op een bepaalde manier moet uitvoeren.

In de uitleg wordt een verklaring gegeven van het slagen van de handeling als het op de voorgestelde manier gebeurt en van het mislukken van de handeling als je het anders doet.

2. Uitleg wat ...

2.1. ...het geval kan zijn.

Er wordt een opsomming gegeven van een aantal mogelijke situaties, eventueel gekoppeld met voorwaarden die het optreden van dergelijke situaties rechtvaardigen.

2.2. ...het geval is.

Van een ingewikkelde situatie worden deelsituaties zichtbaar gemaakt, eventueel wordt zichtbaar gemaakt hoe deze onderling samenhangen.

2.3. ...de overeenkomst is tussen ...

Gemeenschappelijke kenmerken tussen begrippen, verschijnselen, handelingen worden aangegeven.

2.4. ...het verschil is tussen ...

Het constateren van afwijkingen in eigenschappen van begrippen,

verschijnselen, handelingen.

2.5. ...iets voorstelt.

...iets is.

De uitleg verwijst naar voor de leerling bekende begrippen of handelingen en brengt die in verband met een bepaald (nieuw), onbekend woord, een onbekende tekening, een onbekend gebaar, etc...

3. Uitleg hoe ...

3.1. ...je iets moet doen.

De uitleg maakt duidelijk op welke wijze een handeling moet worden uitgevoerd.

3.2. ...iets in elkaar zit.

Het zichtbaar maken van de structuur van een bepaald, bekend apparaat, een bepaald, bekend begrip, door het zichtbaar maken van de onderdelen en hun onderlinge samenhang.

4. Uitleg dat...

4.1. ...iets het geval is.

Het voorkomen van een onbekend of gedeeltelijk bekend verschijnsel wordt zichtbaar gemaakt.

4.2. ...iets het geval kan zijn.

Er worden argumenten gegeven die het vermoeden versterken voor het optreden van een bepaald, bekend verschijnsel of een bepaalde, bekende situatie.

4.3. ...iets niet het geval is.

...iets niet het geval kan zijn.

Er worden redenen gegeven die het vermoeden weerleggen dat een bepaald, bekend verschijnsel zich voordoet.

Deze opsomming is niet volledig. Ook is er een overlap tussen de verschillende situaties mogelijk. Dat betekent dat er uitleggen te bedenken zijn die een mengvorm zijn van bovenstaande vormen. Iets dergelijks wordt op een fraaie wijze zichtbaar in de volgende afleiding:

$$\begin{aligned}x^2 - x^2 &= x^2 - x^2 \\(x + x)(x - x) &= x(x - x) \\x + x &= x \\2x &= x \\2 &= 1\end{aligned}$$

De uitleg kan worden opgevat als een uitleg-waarom-2=1. De formele afleiding geldt daarbij als een dwingende reden. Tegelijkertijd kan de uitleg gelden als een uitleg-waarom-je-niet-door-0-mag-delen.

Deze verschillende voorwaarden van inhoud leggen een sterke claim op de verwachtingen van docent en leerling omtrent het begrijpend gedrag. Het maakt nogal wat verschil of je moet begrijpen hoe je iets moet doen of waarom iets het geval is. Duidelijkheid omtrent deze voorwaarden van inhoud tijdens de uitleg, kan dus in belangrijke mate bijdragen aan de totale duidelijkheid van de uitleg. De leerling weet

immers van te voren wat hem of haar te wachten staat en kan de aandacht daar op richten. Deze duidelijkheid ontstaat op een vanzelfsprekende manier in het geval dat de uitleg een antwoord is op een vraag. Een dergelijke vraag kan door leerlingen gesteld zijn, maar ook door de docent als introductie op de uitleg. Deze vragen kunnen worden opgevat als de **kernvragen** van de uitleg (Goffree, 1979). Ze vormen als het ware de clou van het verhaal, het punt waar alles om draait.

§ 1.7. UITLEGSTRATEGIEEN.

Je kunt uitleggen wat de wortel van een getal is door het geven van voldoende voorbeelden. Op den duur hecht zich dan een idee bij de leerling over wat in het algemeen de wortel uit een getal is. Je kunt ook uitleggen wat de wortel van een getal is door te laten zien dat de 'omgekeerde' bewerking van kwadrateren weer een nieuw getal oplevert.

Je kunt uitleggen wat een regelmatig veelvlak is door een ondubbelzinnige karakterisering van de kenmerken te geven en vervolgens te laten zien dat de 5 regelmatige veelvlakken aan de omschrijving voldoen. Of door de 5 veelvlakken te tonen en daaruit een meer algemene omschrijving afleiden.

Deze keuzen van volgorde karakteriseren de strategie waarmee een docent denkt iets te kunnen uitleggen. De keuze van de strategie zal in het algemeen sterk afhangen van doel en inhoud van de uitleg, van de situatie en van de persoonlijke voorkeuren van de docent. Van Dormolen (1974) houdt een sterk pleidooi voor de O(riënteren)S(orteren)A(bstractie)E(xpliciteren)V(erwerken)-strategie waarin abstractie wordt opgebouwd vanuit reflectie op concrete ervaringen. In een later stadium (Van Dormolen, 1982) is deze strategie veralgemeend tot de algemene onderwijsstrategie O(riënteren) O(ntwikkelen)V(erwerken). De omschrijvingen en voorbeelden die van Dormolen geeft zijn over het algemeen echter ontleend aan uitlegsituaties die het verwerven van inzicht tot doel hebben. Vanuit onze bredere opvatting van begrijpend gedrag, zullen we rekening moeten houden met meer verschillende soorten uitlegstrategieën.

De meest voor de hand liggende twee mogelijkheden zijn: van concreet naar abstrakt of van abstrakt naar concreet. Binnen deze groffe indeling zijn echter een groot aantal andere mogelijkheden denkbaar. We zullen ons daarbij vooral richten op de keuze van het inhoudelijke middel waarmee een docent iets probeert uit te leggen.

De verschillende aanpakken van uitleg in de aanhef van deze paragraaf kunnen worden gekenmerkt door verschillende keuzen van een uitlegmiddel. Bij het eerste voorbeeld wordt gebruik gemaakt van de gemeenschappelijke kenmerken tussen de verschillende getallen om tot een generaliserend begrip 'wortel van een getal' te komen. Het uitlegmiddel is hier: **analogie**. Bij de tweede uitleg worden een nieuw begrip opgebouwd vanuit bekende begrippen. Het is een uitleg door **synthese**. We zullen nog andere uitlegmiddelen onderscheiden: uitleggen door **analyse**, **genetische uitleg**, **exemplarische uitleg**.

1. Uitleggen met behulp van analogie.

In het beginvoorbeeld, waarbij uitgelegd wordt wat een kwadraat is aan de hand van voldoende voorbeelden, is er sprake van een **generaliserende analogie** (van bijzondere gevallen naar een algemeen begrip). De gekozen voorbeelden hebben allemaal een kenmerk gemeenschappelijk. Ze zijn onderling analoog. Herkenning van dit kenmerk leidt tot een algemener begrip. Vanuit overeenkomstige kenmerken in

speciale gevallen onstaat een beeld van de algemene situatie.

Hoe leg je uit hoe je x^{100} moet differentiëren? Bijvoorbeeld door de bekende algemene regel van voor het differentiëren van x^n tot te passen. In een dergelijk geval is er sprake van **specialiserende analogie** (van een algemene situatie naar een bijzonder geval). Op basis van analogie wordt het bijzondere geval uitgelegd vanuit het bekende algemene geval.

Er kan ook uitleg zijn met analogie zonder dat er expliciet sprake is van generalisatie of specialisatie. Bijvoorbeeld: je kunt uitleggen wat een derdemachts wortel is met behulp van analogie met de tweedemachts wortel. Dit is een uitleg met behulp van **analogie zonder meer** (van het ene geval naar het andere geval).

Een andere mogelijkheid is de **metaforische analogie**. Hierbij wordt het uit te leggen begrip of handeling in verband gebracht met een situatie die in feite volkomen los staat van het uit te leggen object, maar er een structurele modelmatige overeenkomst mee vertoont. Een bekend voorbeeld is de uitleg van het oplossen van lineaire vergelijkingen met behulp van een balans.

Bij **exemplarische analogie** wordt aan de hand van één karakteristiek (gereduceerd) voorbeeld zichtbaar wat er in het algemeen (in meer complexe situaties) aan de hand is. Het voorbeeld bevat de essentiële kenmerken van het nieuwe in zich, door de reductie vallen deze echter sterker op. Klassiek is in dit verband het voorbeeld van het zonnestelsel aan de hand waarvan de gravitatie-wetten van het hele heelal kunnen worden uitgelegd. Het uitleggen hoe je x^n moet differentiëren aan de hand van x^{137} valt in deze categorie. Ook het tekenen van figuren bij meetkunde of analyse valt hieronder. Aan de hand van één specifieke figuur kunnen algemene zaken worden zichtbaar gemaakt. In tegenstelling tot metaforische analogie, maakt de situatie waarnaar verwezen wordt zelf deel uit van de algemene situatie.

2. Uitleggen met behulp van synthese.

Bij een uitleg door synthese wordt het nieuwe opgebouwd vanuit het bestaande door toevoeging van nieuwe elementen (assimilatie) of wijzigen van bestaande elementen (accommodatie). Door het met elkaar in verband brengen van een aantal groundbegrippen of handelingen kan een nieuw begrip of handeling ontstaan. Een waarom-uitleg kan bestaan door het met elkaar in verband brengen van één of meer argumenten. Een voorbeeld hiervan is de uitleg van 'het oplossen van kwadratische vergelijkingen' op de meest elegante manier. Door steeds toevoegen van nieuwe handelingen (buiten haakjes halen, ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen, a,b,c-formule toepassen) onstaat een complexe totaal-handeling.

3. Genetische uitleg.

Hierbij groeit het uitgelegde vanuit één eenvoudige situatie die voortdurend wordt aangepast aan nieuwe algemenere situaties. Door voortdurende confrontatie met nieuwe feiten vindt een aanpassing en verder uitbouw van de begripsvorming plaats. Het begrip 'groeit' vanuit een eenvoudige kiem. (zie Wagenschein, 1980) Een voorbeeld hiervan is de opbouw van het begrip negatief getal vanuit natuurlijke getallen en van het reële getal vanuit de rationale getallen.

4. Uitleg op basis van analyse.

Dit uitlegmiddel is min of meer tegengesteld aan uitleg door synthese. Vanuit een globaal bekend idee ontstaat een steeds gedetailleerder beeld. De leerling begrijpt dan 'hoe het precies in elkaar zit'. Een voorbeeld hiervan is de uitleg waarom-een-kwadraat-altijd-nooit-negatief-is van § 1.4.

§ 1.8. STRUKTUUR , MOEILIKHEID EN DUIDELIJKHEID.

De structuur.

Door binnen een gegeven uitleg kernvragen te inventariseren, ontstaat een beeld van de structuur van de uitleg. Meestal zal een uitleg zijn opgebouwd uit deelen die op zich een uitleg zijn van een deelvraag. In de uitleg waarom-een-kwadraat-altijd-nooit-negatief-is van §1.4. is er sprake van uitlegstappen. Hier correspondeert iedere stap met een deelvraag. Op deze wijze wordt de volgende structuur zichtbaar:

Uitleg-waarom-een-kwadraat-altijd-nooit-negatief- is.

Uitleg hoe je een kwadraat kunt schrijven.

Uitleg waarom een kwadraat van een positief getal weer positief is.

Uitleg waarom een kwadraat van een negatief getal weer positief is.

Uitleg dat een getal positief of negatief of 0 is.

Doordat een deelvraag weer opgebouwd kan zijn uit deelen ontstaat een soort geneste structuur van een uitleg.

Bij uitleggen hoe-je-iets-moet-doen is er in het algemeen sprake van een lineaire opeenvolging zonder nesting. De totale handeling bestaat in zo'n geval uit het in de juiste volgorde uitvoeren van deelhandelingen. Een dergelijke uitleg heeft een lineaire structuur.

Van uitleggen waarom-iets-het-geval-is zal een sterkere nesting te verwachten. Iedere verklaring roept een aantal deelverklaringen die zullen moeten worden gekombineerd. De diepte van de nesting zal in hoge mate verantwoordelijk zijn voor de complexiteit van de uitleg.

Moeilijkheid.

Moeilijk om uit te leggen = moeilijk om te begrijpen.

Toch komt het voor dat een leerling zegt: "het is eigenlijk helemaal niet zo'n moeilijk onderwerp, maar hij legt het zo ingewikkeld uit." In zo'n geval is er wel sprake van een discrepantie tussen uitleggen en begrijpen. De uitspraak van de leerling heeft echter ook de ondertoon: "Je zou het misschien veel eenvoudiger kunnen uitleggen." Iets wat zich gemakkelijk laat begrijpen, laat zich ook eenvoudig uitleggen. En omgekeerd.

Wat is een moeilijk onderwerp? Dat is een subjectief gegeven. Wat voor de één moeilijk is, hoeft dat voor de ander helemaal niet te zijn. In een groep leerlingen is er dus altijd sprake van relatieve verschillen in moeilijkheidsgraad: een onderwerp wordt door de één moeilijker gevonden dan door de ander. Ook zijn de verschillen tussen onderwerpen relatieve verschillen. Het ene onderwerp is 'moeilijker' dan het andere. Dit intuïtieve gegeven roept onmiddellijk de vraag op hoe het verschil in moeilijkheidsgraad tussen twee onderwerpen, voor een gegeven groep toehoorders, zichtbaar gemaakt kan worden. Welke factoren maken het ene onderwerp moeilijker dan het andere?

Er zijn twee fundamentele factoren aan te wijzen:

- de mogelijkheden die het onderwerp biedt om een relatie te leggen met bekende en herkenbare zaken ,
- de mate van samenhang en structuur van het onderwerp.

1. De relatie met bekende en herkenbare zaken.

In de eerste plaats kan men hierbij denken aan **de mate van nieuwheid** van het onderwerp voor de toehoorder. Gaat het om nieuwe, binnen het onderwerp voor het eerst gedefinieerde, begrippen? Gaat het om een nieuwe onverwachte samenhang tussen reeds bekende begrippen? Gaat het om een nieuw gezichtspunt van waaruit reeds bekende feiten en begrippen worden geïnterpreteerd?

Ook valt onder deze faktor **de mate van abstractie** van het onderwerp voor de toehoorder. Onder abstractie wordt hierbij verstaan: de wijze waarop de feiten, begrippen en handelingen los zijn gemaakt van de waarneembare werkelijkheid. Deze mate van abstractie is echter een relatief gegeven. Het gaat om de mate van abstractie ten opzichte van het reeds bekende. Bijvoorbeeld: een bewijs dat een vierhoek een vierkant is op grond van kenmerkende eigenschappen, is voor een leerling uit de zesde klas van het vwo een gemakkelijker onderwerp dan voor een leerling uit de eerste klas omdat die vwo 6 leerling al vertrouwd is met het op deze manier benaderen van meetkundige figuren.

2. Samenhang en structuur.

Veelal is een onderwerp opgebouwd uit een aantal onderdelen die naar elkaar verwijzen en die in een zekere relatie met elkaar staan.

Vanuit de ordening bekeken kan er sprake zijn van een **chronologische samenhang**, waarin het ene onderdeel chronologisch volgt op het andere (bijvoorbeeld bij een algoritme) of van een **hiërarchische samenhang** (waarin een onderdeel deel uitmaakt van een groter geheel dat op zich weer een onderdeel vormt, enzovoorts). In dat laatste geval is er sprake van een gelaagdheid in de structuur van het onderwerp. Vanuit de betekenisinhoud bekeken kan er sprake zijn van van een **logische samenhang**, waarbij het ene onderdeel in een logische relatie staat met andere onderdelen (bijvoorbeeld bij een bewijs); van een **definiërende samenhang** (waarbij het ene onderdeel gedefinieerd wordt als combinatie van andere onderdelen); een **specialiserende samenhang** (het onderdeel is een speciaal geval van een algemener gesteld onderdeel); een **generaliserende samenhang** (het onderdeel is een generalisatie van andere onderdelen); een **samenhang naar analogie** (het ene onderdeel is sterk verwant met het andere). Er kan verschil bestaan in de moeilijkheidsgraad bij een gegeven samenhang. Een logische samenhang met kwantoren heeft een hogere moeilijkheidsgraad dan een een logische samenhang die alleen uit conjuncties van argumenten is opgebouwd. De diepte van de gelaagdheid, de lengte van de chronologische keten, de mate van complexiteit waarin de onderdelen geassocieerd zijn, het aantal onderdelen bepalen mede de moeilijkheidsgraad van een onderwerp.

Dit alles leidt tot een meerdimensionale karakterisering van de moeilijkheid van een onderwerp. Het is daarom niet altijd goed aan te geven of het ene onderwerp moeilijker is dan het andere. Het kan wel in een bepaald opzicht moeilijker zijn. Bijvoorbeeld doordat het meer nieuwe elementen bevat, of doordat er langere chronologische ketens zijn, of doordat er een diepere gelaagdheid aanwezig is.

Duidelijkheid.

Welke elementen bepalen of een uitleg duidelijk is? Natuurlijk spelen hier in de eerste plaats uiterlijke factoren zoals verstaanbaarheid, het bordschrift, bordindeling, tempo, enzovoorts... een belangrijke rol. In §1.3 zijn dat de voorwaarden van verstaanbaarheid genoemd. We gaan ervan uit dat aan deze voorwaarden in voldoende mate is voldaan om een uitleg te doen slagen. Desondanks kan aan deze voorwaarden voldaan zijn zonder dat de uitleg duidelijk is.

In de gedragswetenschappen wordt 'duidelijkheid' doorgaans opgevat als de mate van ondubbelzinnigheid waarmee een spreker zijn verwachtingen omtrent andermans gedrag weet over te dragen. Een docent vertoont 'duidelijk' gedrag als de leerlingen precies weten welk gedrag van hen geëist wordt en welke toleranties daarin zijn toegestaan.

In de communicatieleer wordt met de 'duidelijkheid' van een signaal aangegeven wat de kans is dat het signaal verkeerd wordt geïnterpreteerd. Bij een onduidelijk signaal is de kans groot dat er een verschil ontstaat tussen het verzonden en ontvangen signaal. Bij een duidelijke boodschap, opgevat als een combinatie van signalen, geldt bovendien nog de eis van volledigheid en consistentie. De boodschap mag geen elementen bevatten die elkaar tegenspreken en de boodschap, moet volledig zijn ten aanzien van de inhoud.

Bij het uitleggen zijn beide elementen van duidelijkheid terug te vinden. Uitleggen schept verwachtingen ten aanzien van het begrijpend gedrag van de toehoorder en bij uitleggen vindt betekenisoverdracht plaats. Een duidelijke uitleg heeft dus zowel te maken met de duidelijkheid ten aanzien van deze verwachtingen omtrent begrijpend gedrag als wel ten aanzien van de verstrekte informatie.

Een instructie is duidelijk als de toehoorder op ieder ogenblik weet wat er moet gebeuren en welk doel de handeling dient.

Een bewijs is duidelijk als het goed 'te volgen is' én als de relatie tussen de stelling en de verklaring door de toehoorder als bewijs wordt herkend en geaccepteerd. Zo kan een formeel bewijs over de continuïteit van een functie in een bepaald punt, stap voor stap goed zijn te volgen en toch geen duidelijk bewijs zijn omdat het formele niet hoeft te stroken met de intuïtieve betekenis van 'continuïteit', waardoor het bewijs niet als verklaring geaccepteerd kan worden.

Uit deze twee voorbeelden blijkt dat duidelijkheid een **lokaal**, een **globaal** en een **interlokaal** niveau heeft. Het lokale niveau geeft aan dat de uitleg stap voor stap is te volgen. Met het globale niveau wordt bedoeld dat de uitleg staat in een aanwijsbaar kader, een aanwijsbaar doel heeft (eventueel binnen een groter geheel). Het interlokale niveau geeft de verbinding tussen beide voorgaande aspecten aan: er is

een zichtbare en geaccepteerde overeenstemming tussen het doel van de uitleg en de inhoud. Bij het zojuist gegeven voorbeeld was aan dit laatste niet voldaan.

Het lokale niveau.

Lokale duidelijkheid treedt op als de verstrekte informatie ondubbelzinnig is en betekenis heeft binnen de gegeven context. Dat wil zeggen: de gebruikte terminologie verwijst naar ondubbelzinnig gegeven begrippen en handelingen en de verwijzingen kunnen door de toehoorder als betekenisvol worden geïnterpreteerd.

Het globale niveau.

Bij globale duidelijkheid geeft de spreker aan het begin van ieder nieuw uitlegfragment aan wat het doel is van de komende uitleg en aan het eind dat dit doel bereikt is. Met globale duidelijkheid worden de verwachtingen van de uitlegger ten aanzien van het begrijpend gedrag van de toehoorder zichtbaar gemaakt. Dat kan bijvoorbeeld gebeuren door het formuleren van de kernvragen van een uitleg: "Ik ga nu vertellen waarom de functie f continu is in het punt $(p, f(p))$ ". Ook hier geldt weer de eis van ondubbelzinnigheid en betekenisvolheid van de informatie. Het gevolg van deze duidelijkheid is dat er een indeling ontstaat in afgebakende fragmenten.

Het interlokale niveau.

Interlokale duidelijkheid heeft betrekking op de samenhang tussen de delen en het geheel van een uitleg(fragment). Het geeft aan op welke wijze de stappen in een uitleg met elkaar samenhangen en op welke wijze door de opeenvolging van stappen het gestelde doel bereikt wordt. Interlokale duidelijkheid wordt vaak bereikt door de bekende tussenvoegsels als: "hieruit volgt", "dus", "samengevat", "wellicht", "bij nader inzien", "enzovoorts...", enzovoorts... Een ander onderdeel van interlokale duidelijkheid is de mate van overeenstemming tussen doel en inhoud van de uitleg, de consistentie en de volledigheid. Ook de volgorde van de onderdelen in een uitleg zijn van belang voor de interlokale duidelijkheid. Bij een chronologische samenhang zullen de onderdelen ook in een herkenbare chronologische volgorde moeten staan. Hetzelfde geldt voor de logische volgorde bij een logische samenhang. Het zal duidelijk moeten zijn wat een aanname is, wat een gevolg, een tegenspraak enz...

Samengevat.

Door het idee om aan de hand van de kernvragen de structuur van een uitleg bloot te leggen, ontstaat de mogelijkheid om een uitleg te analyseren op inhoudelijke elementen van moeilijkheid en duidelijkheid.

HOOFDSTUK 2: VRAGEN EN METHODEN VAN ONDERZOEK.

"Als de storm witte koppen op zee maakt, hoe komen die dan tot stand en waar gaan ze naar toe? En wat is de reden?

Dit alles en nog veel meer probeerde Pappa te weten te komen, maar het was een zeer moeilijke opgave. Hij werd moe en onwetenschappelijk en schreef: een eiland heeft geen bruggen en geen afrastering en dus kun je niet op- en niet buitengesloten worden. Dat betekent dat men zich voelt als... Nee. Pappa haalde een zwarte streep door deze gedachte. Toen schonk hij zijn aandacht aan het magere hoofdstuk Feiten.

En daar dook die fruikende gedachte weer op dat de zee helemaal geen wetten kende.

Maar hij wees dat idee haastig van de hand. Hij wilde begrijpen. Hij moest in het reine komen met de zee om ervan te kunnen houden en om zijn zelfrespect te kunnen bewaren."

Tove Jansson: Pappa Moem en de mysteriën van de zee.

In hoofdstuk 1 is de terminologie ontwikkeld van waaruit het verschijnsel 'uitleggen van wiskunde' wordt bekeken en beschreven. In deze terminologie zitten impliciete keuzen verborgen ten aanzien van de methodologie en de vragen van het onderzoek. In dit hoofdstuk worden deze keuzen expliciet gemaakt.

Bovendien wordt vooruitgekeken naar de volgende hoofdstukken. Deze bevatten vooral empirisch materiaal. Per hoofdstuk worden de onderzoeksvragen vermeld, wordt de onderzoeksmethode zichtbaar gemaakt en wordt een verantwoording gegeven van de methode.

§ 2.1. ALGEMEEN.

Deze paragraaf geeft een overzicht en een verantwoording van de globale vragen van het onderzoek en de gekozen onderzoeksmethode.

Doel van het onderzoek.

Het uitleggen speelt een centrale rol in het onderwijs. Dit onderzoek is een poging om feiten en samenhangen rondom het uitleggen zichtbaar te maken en zodoende een bijdrage te leveren aan de ontwikkeling van een theorie van het uitleggen van wiskunde die ondersteund wordt door observaties.

Geschiedenis en werkwijze.

In een eerste aanzet is een theorie van het uitleggen van wiskunde ontwikkeld. Daarin werd een poging gedaan het uitleggen te beschrijven vanuit het theoretische raamwerk van de pragmatische taaltheorie. Fragmenten hiervan zijn in hoofdstuk 1 terug te vinden.

Tegelijkertijd zijn geluidsopnamen en video-opnamen van lessituaties verzameld. Daarbij is vooral gekozen voor situaties bij ervaren docenten rondom de nieuwe actuele leerstof van het huidige-programma. De opnames zijn woordelijk uitgeschreven in protokollen.

Vanuit de eerste proef-analyses van de protocollen en de principes van de theorie zijn onderzoeksvragen geformuleerd en is een methode van onderzoek bij deze vragen gekozen. Het streven was de lessituaties in de totale complexe samenhang te bestuderen. Dat wil zeggen: zonder een keuze vooraf te maken voor één van de drie basiscomponenten: docent, leerling(en), leerstof. Daarbij bleken twee vragen van belang:

- wat valt er uit te leggen aan een onderwerp?
- hoe gebeurt dat?

De eerste vraag leidde tot een keuze van mathematische didaktische analyses van de uit te leggen onderwerpen vóór door betekenisanalyses van de gehanteerde terminologie vanuit de optiek van de referenties van taalgedrag.

De tweede vraag leidde tot een methode van protokolanalyse met nadruk op het proces van uitleggen in een gegeven situatie. Dat vraagt om een gedetailleerde analyse van enkele lessen in plaats van globale statistische analyses van vele lessen. Er is een zogenaamde 'vier-koloms-methode' ontwikkeld: de eerste kolom bevatte een letterlijke weergave van het protocol, de tweede kolom een samenvatting van ieder uitlegfragment, de derde kolom een karakterisering van het fragment en de vierde kolom het bijbehorende lesmateriaal.

Bij deze vragen van onderzoek en onderzoeksmethodes zijn onderwerpen uit het wiskunde-onderwijs gekozen die de moeite van het bestuderen waard leken. Bij de keuze is gestreefd naar actualiteit en breedte: de onderwerpen hebben betrekking op de huidige situatie in het wiskunde-onderwijs, ze bestrijken een breed gebied in de wiskunde (algebra en meetkunde) en een breed gebied in het onderwijs (onderbouw en bovenbouw).

Op basis van deze keuzen is begonnen met het meer systematisch verzamelen van materiaal.

Bij het uitwerken van het materiaal rond het eerste onderwerp, letterrekenen, bleek de gekozen vierkoloms-methode van protokolanalyse niet goed bruikbaar. De systematiek was niet duidelijk genoeg ontwikkeld om tot ondubbelzinnige invulling van de kolommen 2 en 3 te komen. Bovendien was de systematiek te oppervlakkig en te algemeen om inzicht te geven in het proces van uitleggen in een gegeven situatie.

Bovendien bleek dat de verzameling van gekozen onderwerpen te ambitieus was voor het kader van het onderzoek. Er moest een keuze worden gemaakt. Dit heeft geleid tot een keuze van onderwerpen waarin zich een specifiek uitlegprobleem voordoet. Daarnaast is de keuze ingegeven door de beschikbaarheid van observatiemateriaal en de actualiteit en spreiding van de onderwerpen binnen het wiskundeonderwijs. Dit resulteerde tot de volgende vragen:

- Waarom functioneren sommige contexten wel en andere niet bij het uitleggen van het rekenen met negatieve getallen?
- Wat zijn de verschillen in uitleg tussen drie docenten in drie brugklassen bij het leren hanteren van formules?
- Wat zijn de verschillen in het uitleggen van formele vaardigheden tussen 2 MAVO en 2 Atheneum?

- Hoe verloopt een uitleg van het begrip hoek die uitgaat van het complexe aan de werkelijkheid ontleende reeds bekende begrip?

Er is alleen geobserveerd bij docenten waarvan vaststond dat ze een langdurig stabiele relatie met een klas hadden. De klassen werden bij het begin van de opnamen kort ingelicht over het doel van de opnamen. De apparatuur is bewust bescheiden gehouden. De opnamen zijn van achteruit het lokaal gemaakt en waren in eerste instantie gericht op het gedrag van de docent. De indruk bestaat dat de invloed van de video op het gedrag van de leerlingen minimaal was en dat ze na vijf minuten vergeten waren dat er een camera in het lokaal aanwezig was.

Tijdens de uitvoering van het onderzoek werd duidelijk dat het studieonderdeel "presentatie van een wiskundig onderwerp" voor derde en vierde jaars wiskundestudenten aan de universiteit, een schat aan materiaal opleverde. Iedere student verzorgde twee keer een presentatie. Per presentatie werden video-opnamen gemaakt, werd een enquête over de kwaliteit van de presentatie ingevuld en werden suggesties voor verbeteringen gemaakt. Dit maakte een vergelijking mogelijk tussen de studenten onderling en tussen de twee presentatie van dezelfde student. Ook hier is bij de bestudering van het materiaal niet gekozen voor een globale statistische vergelijking van de hele situatie, maar zijn twee onderwerpen in détail bekeken. Dat zijn:

- Wat is het verband tussen de moeilijkheidsgraad van een uitleg en de duidelijkheid?
- In hoeverre levert interactie een bijdrage aan de duidelijkheid van de uitleg?

Op basis van het geanalyseerde materiaal heeft een herziening plaatsgevonden van de theorie. Daaruit zijn een aantal aandachtspunten afgeleid. Hierdoor werd het mogelijk verschillende aspecten van uitleggen in de protocollen met elkaar in verband te brengen. Tenslotte zijn vanuit dit hernieuwde theoretische kader, afsluitende gemeenschappelijke conclusies afgeleid.

§2.2: HET SEMINARIUM "PRESENTATIE VAN EEN WISKUNDIG ONDERWERP".

Sinds jaar en dag verzorgt de afdeling didaktiek van de Rijksuniversiteit van Groningen het seminarium "Presentatie van een wiskundig onderwerp". Het seminarium bestaat uit een mondeling en een schriftelijk gedeelte. Bij het schriftelijk gedeelte schrijven de studenten een werkstuk over een door henzelf gekozen wiskundig onderwerp en voor een door hen gekozen denkbeeldig publiek. Bij de beoordeling wordt gelet op de wiskundige correctheid, de leesbaarheid, de opbouw, de lay-out en de geschiktheid voor het gekozen publiek. Het onderzoek beperkt zich tot het mondelinge gedeelte van het seminarium.

De situatie.

Een uitlegsituatie wordt bepaald door de onderlinge relaties tussen spreker, hoorder en onderwerp. In een klassesituatie in het reguliere onderwijs is het bijzonder moeilijk een volledig beeld van deze relaties op te bouwen. Het is immers onmogelijk om de hele voorgeschiedenis in de verhouding tussen docent en leerlingen te kennen, laat staan te beschrijven. Hetzelfde geldt voor de wiskundige beheersing van de leerstof door de leerlingen. Het is onmogelijk precies aan te geven wat van het onderwerp wel en wat niet is behandeld. Ook de verschillen tussen de leerlingen zijn van dien aard dat een beschrijving van de beginsituaties alleen maar zeer onvolledig kan zijn.

Bij het seminarium ligt de situatie aanmerkelijk eenvoudiger. De studenten zien elkaar meestal voor het eerst in dit groepsverband. Er hebben zich nog geen patronen gevormd. Ook de begeleidende docent ziet de studenten meestal voor het eerst. De gekozen meetkundige onderwerpen zijn in vele opzichten nieuw voor alle studenten. Voor wat het onderwerp betreft beginnen ze allemaal met een schone lei. Er zijn uiteraard wel grote verschillen in wiskundige en didactische kwaliteiten tussen studenten die een rol kunnen spelen bij het uitleggen.

Bij de keuze van de onderwerpen is ook gestreefd naar wiskunde die interessant is voor de studenten. Het zijn afgeronde onderwerpen uit de meetkunde rondom één of andere stelling, bijvoorbeeld: de Euler-lijn, de negenpuntscirkel, de stelling van Morley, het kleuren van kaarten. Het gevolg hiervan is dat de studenten moeite willen doen om het gepresenteerde te begrijpen. Ze spelen geen rol van leerlingen in een klas. De spreker speelt niet de rol van leraar. De situatie is een echte uitlegsituatie waarin een spreker iets wil uitleggen aan een geïnteresseerd publiek. Na een voordracht wordt een enquête afgenomen. Door deze enquête wordt de beoordelingsronde duidelijk van het uitleggen gescheiden en worden dubbelrollen tussen luisteraar en beoordelaar vermeden. Aan het begin van de cursus is dit trouwens nog eens expliciet met de studenten doorgenomen. In de nabespreking wordt deze opzet consequent doorgetrokken. Beoordelings- argumenten die verwijzen naar klassesituaties (zoals: "op school zou je nu ordeproblemen hebben gehad") worden als niet terzake afgedaan. ("Het betreft hier geen schoolsituatie en in deze situatie waren er geen ordeproblemen.")

Deze beide omstandigheden, de gereduceerdheid van de (begin)situatie en de echtheid van de uitleg, maken het seminarium bij uitstek geschikt voor dit onderzoek.

Om de situatie zo weinig mogelijk door het onderzoek te verstoren, is analyse achteraf toegepast. Alle video-opnamen zijn bewaard. Relevante fragmenten zijn uitgewerkt tot protocollen. Ook de ingevulde enquêtes en verslagen zijn verzameld en bewaard.

De studenten waren niet op de hoogte van het onderzoek. Alle activiteiten hadden voor hen een duidelijke relatie met het doel van de cursus.

Hoewel de begeleidende docent tevens onderzoeker was, heeft dit niet geleid tot extra onderzoeks-activiteiten tijdens de cursussen. De docent had ruime ervaringen met het begeleiden van de cursus zonder dat er van het onderzoek sprake was. Tijdens de twee cursussen waarbij het materiaal is verzameld, is zoveel mogelijk geprobeerd om de vroegere situatie te handhaven. Er kan hooguit impliciet sprake zijn geweest van beïnvloeding van de cursus door het onderzoek, doordat de docent misschien attenter reageerde op mogelijke kwaliteitsverbetering van de uitleg dan normaal het geval was.

Er zijn twee cursussen geanalyseerd: de cursus 86/87 en de cursus 88/89. De eerste cursus bestond uit 6 studenten en dus 12 voordrachten. Aan de tweede cursus namen 10 in de eerste ronde deel waarvan één een vrijstelling had voor de tweede ronde, zodat er 19 voordrachten waren.

Het interactie-dilemma.

Een docent die geen reacties krijgt op de uitleg, kan dat interpreteren met: "de uitleg was zó duidelijk dat verdere opmerkingen of vragen overbodig waren."

Een leerling kan zijn mond houden omdat die denkt: "Het zal wel aan mij liggen dat ik het niet snap."

Een dergelijke situatie kan een interactie tussen docent en leerlingen volledig blokkeren. Hoewel in de gegeven situatie een goede interactie misschien heel functioneel had kunnen zijn.

Onderzoeksvragen zijn in dit verband:

- Wanneer treden dergelijke blokkades op?
- Hoe kan dat worden voorkomen?
- Welke mate van interactie is functioneel in een gegeven situatie?

De enquête bevat vragen naar de mate van interactie. Ook reageren de studenten daar zelf op in hun aanwijzingen aan de student-leraar. Hieruit valt het één en ander af te leiden over de mate en de gewenstheid van de interactie. Daarnaast is het mogelijk vanuit de video-opnamen te analyseren hoe de interactie heeft plaatsgevonden.

Moeilijkheid en duidelijkheid.

Over het algemeen bouwen docent en leerling tijdens een uitleg een globaal oordeel op over de kwaliteit van een uitleg. Aan het eind van de uitleg zijn beide in staat om een kwalificering te geven in termen van 'geslaagd', 'minder geslaagd', 'onduidelijk', enz... Een dergelijk oordeel is in de enquête terug te vinden. In vraag 3 wordt naar de mening gevraagd over de duidelijkheid van de uitleg. Dit opent de mogelijkheid het verband tussen deze globale oordelen en de andere factoren, die in de enquête worden genoemd, te onderzoeken. Met name doet zich de mogelijkheid voor om te onderzoeken wat het verband is tussen de moeilijkheidsgraad van het onderwerp (zoals dat door de toehoorder is ervaren) en de duidelijkheid van de uitleg. In het algemeen zou men een uitspraak wensen over de waarheid van de volgende beweringen:

- Hoe gemakkelijker het onderwerp, des te duidelijker de uitleg.
- Hoe gemakkelijker het onderwerp, des te onduidelijker de uitleg.
- Hoe moeilijker het onderwerp, des te onduidelijker de uitleg.
- Hoe moeilijker het onderwerp, des te duidelijker de uitleg.
- Hoe duidelijker de uitleg, des te gemakkelijker het onderwerp.
- Hoe duidelijker de uitleg, des te moeilijker het onderwerp.
- Hoe onduidelijker de uitleg, des te moeilijker het onderwerp.
- Hoe onduidelijker de uitleg, des te gemakkelijker het onderwerp.

Omdat het slechts om kleine aantallen gaat, zal met de statistische indicaties zeer voorzichtig moeten worden omgesprongen. Deze zullen zoveel mogelijk moeten worden getoetst aan het beschikbare video-materiaal.

§2.3. UITLEGGEN DOOR ANALOGIE EN CONTEXT.

Treffers beschrijft in zijn boek "Three Dimensions" (1987) een raamwerk voor een theorie van wiskundeonderwijs. Centraal staat daarbij de opvatting dat het leren van wiskunde een vorm van mathematiseren is: "een organiserende en structurerende activiteit waarin met behulp van verworven kennis en vaardigheden tot nu onbekende regelmatigheden, verbanden en structuren worden ontdekt". Hij maakt onderscheid tussen horizontale mathematisering, waarin probleemvelden buiten de wiskunde worden getransformeerd binnen de wiskunde, en verticale mathematisering, waarin de ontwikkeling volledig binnen de wiskunde plaatsvindt. Het progressief mathematiseren is een lerende activiteit die tot een steeds verder voortschrijdend geheel van wiskundige kennis en vaardigheden leidt. Het onderwijs wordt daarbij geïnspireerd door de volgende vijf uitgangspunten:

- **de fenomenologische exploratie** waarin realistische verschijnselen worden onderzocht met het doel een rijke schat aan intuïtieve ervaringen te verwerven van waaruit essentiële aspecten zich kunnen ontwikkelen,
- **het aanreiken van verticale instrumenten** zoals modellen, schema's, diagrammen, symbolen met het doel het informele intuïtieve en het formeel reflectieve te kunnen overbruggen,
- **het ondersteunen van zelfvertrouwen** zodat de leerlingen tot eigen producties en constructies kunnen komen,
- **de interactiviteit** met producties en constructies van andere leerlingen zodat zich verkortingen in hun eigen procedures kunnen ontwikkelen en momenten van reflectie kunnen ontstaan,
- **de verwevenheid** met de andere gebieden van de wiskunde.

Op deze wijze probeert het 'realistisch' wiskunde-onderwijs de beide vormen van mathematiseren met elkaar te verweven die traditioneel door de structuralistische, empiristische en mechanistische stromingen als gescheiden worden benaderd. Volgens de opvattingen van het realistische wiskunde-onderwijs start het onderwijs met contextrijke situaties die als model kunnen dienen voor verdere wiskunde en waarin de formele operaties verankerd zijn in informele procedures die leerlingen hanteren om de context-problemen te kunnen oplossen.

Voor de introductie van het rekenen met negatieve getallen en het leren oplossen van lineaire vergelijkingen door middel van realistische contexten zijn deze uitgangspunten van extra belang. Juist in deze situaties wordt een harmonische verwevenheid van abstracte, formele en empirische elementen nagestreefd.

In relatie met deze problematiek worden in hoofdstuk 4 twee situaties van contextgebruik geanalyseerd: de heks en het treintjesmodel (bewerkingen met negatieve getallen). Deze voorbeelden zijn ontleend aan Moderne Wiskunde, brugklasdeel, 4^{de} editie.

In het bijzonder wordt de volgende vraag onderzocht:

Waarom is de 'heks' wel een effectieve context en het 'treintjes'- model niet?

Deze vraag wordt onderzocht aan de hand van een mathematisch didactische analyse van de twee contexten. Uitgangspunt is hierbij de inventarisatie van de referenties van de gebruikte wiskundige terminologie in relatie met klasse-observaties.

Vanuit deze gegevens wordt gekeken naar de meer algemene vraag:

- aan welke voorwaarden moet een context voldoen opdat er zich een bruikbare analogie kan ontwikkelen?

§2.4.LETTERS EN FORMULES.

Een typerend probleem.

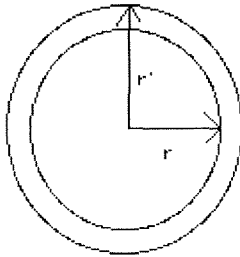
Span een touw strak rond de aarde langs de evenaar. Knip het daarna door , zet er een meter tussen en span het weer mooi strak op een konstante afstand van de evenaar. Hoeveel centimeter zal het touw dan van de evenaar afstaan?

In de oplossing van dit probleem lijkt het gebruik van formules onvermijdelijk. Een aanpak door proberen met concrete gegevens, lijkt al gauw tot een onontwarbare kluwen van grote en kleine getallen.

De basisformule is:

$$\text{nieuwe omtrek} = \text{oude omtrek} + 100 \text{ cm.} \quad (0)$$

Stel r is de straal van de aarde en r' is de nieuwe straal van de touwcirkel.



Dan geldt:

$$2\pi r' = 2\pi r + 100 \quad (1)$$

$$\text{dus:} \quad r' = r + 100/2\pi \approx r + 16 \quad (2)$$

Het antwoord, 16 cm, is verbazingwekkend groot.

Deze formele aanpak geeft niet alleen snel het goede antwoord, ze laat ook zien dat de oplossing onafhankelijk is van de straal van de aarde.

Dit voorbeeld maakt duidelijk dat het gebruik van formules en het formeel manipuleren daarmee ook op elementair niveau zinvol kan zijn. Het bevat alle essentiële aspecten van het gebruik van formules:

- formules als symbolische weergave van een situatie ((0) en (1)),
- het doelgericht manipuleren van de formule tot een antwoord (2),
- de (verbazingwekkende) interpretatie van het antwoord.

De wisseling van de interpretatie van de letters als afkorting van concrete grootheden (straal) tot formele rekensymbolen en weer terug, is onmisbaar voor het begrijpen van de oplossing en de oplossingsmethode.

Letterrekenen.

In contrast hiermee staat het volgende citaat (Lagerwerf, 1982):

"Letterrekenen is een visie op de schoolalgebra waarin de letters in het algemeen geen betekenis

hebben en waarin je met letters allerlei kunstjes leert uithalen die aan het rekenen van de basisschool doen denken. Om de kunstjes wat makkelijker te kunnen onthouden worden daarbij ezels- bruggetjes bedacht, waarin de letters ad hoc betekenissen krijgen. Bijvoorbeeld is dan $a + a = 2a$, omdat een appel plus een appel twee appels is, in plaats van omdat $2 + 2 = 2 \times 2$ en $5 + 5 = 2 \times 5$, en $365 + 365 = 2 \times 365$, enzovoort. Dan gaat het al lang niet meer om wiskunde, vind ik."

Lagerwerf neemt hierin duidelijk stelling tegen het formele manipuleren van formules, waarin letters een symbolische betekenis hebben.

De dualiteit ten aanzien van de betekenis van letters bij het letterrekenen vormt één van de belangrijkste knelpunten in het wiskunde-onderwijs.

Aan de ene kant bestaat er de noodzaak om binnen de wiskunde vaardig met formules te kunnen manipuleren. Deze vaardigheidseis brengt met zich mee dat letters in formules (tijdelijk) niet meer zijn dan te manipuleren objecten zonder praktische betekenis. Het je voortdurend afvragen wat één en ander precies voorstelt, zou de rekenvaardigheid alleen maar belemmeren.

Aan de andere kant bestaat het gevaar dat dit manipuleren ontaardt in een voor de leerlingen betekenisloos aanleren van trukjes die permanent los staan van iedere realiteit en waarvan de functie voor hen volstrekt onduidelijk is.

De didactische moeilijkheid zit in deze voortdurende wisseling van aan de realiteit gebonden formules naar formeel-symbolische manipulaties met die formules en het weer terug interpreteren van het resultaat naar de oorspronkelijke betekenis. (Zie: Freudenthal, 1973)

Dit probleem bestaat sinds er formules en wiskunde-onderwijs bestaan. Het is nauw verbonden met de achterliggende visie op het wiskunde-onderwijs en het doel dat men denkt te bereiken. In een realistische opvatting van wiskunde-onderwijs zal het betekenis geven aan formules meer centraal staan dan in een formeel-logische opvatting. Dat betekent dat er in de eerste opvatting minder noodzaak en ruimte is om aandacht te besteden aan het rekenen met formules dan in de andere opvatting. De onvermijdelijke overgang van 'realistische' formules naar het formele letterrekenen komt bij deze realistische opvatting veel scherper te liggen. Het suggereert een overgang in visies van betekenisvolle naar betekenisloze wiskunde die fundamenteel strijdig lijken te zijn. (Zie het citaat van Lagerwerf.)

In de recente leerplanontwikkelingen van het wiskunde-onderwijs is een duidelijke verschuiving naar een realistische opvatting van wiskunde te bespeuren. Dit heeft tot gevolg dat de vaardigheid van het rekenen met formules naar latere leerjaren wordt verschoven. Voorop staat een betekenisvolle introductie van formules, letters en variabelen in de eerste twee leerjaren. Eenvoudige herleidingen van formules hebben altijd een functie binnen één of andere realistische situatie. Lange rijtjes oefensommen komen niet meer voor. Deze keuze wordt ingegeven door de argumenten dat te weinig leerlingen zelfs maar de eenvoudigste algebraïsche vaardigheden leren beheersen, dat zelfs bij betere leerlingen nauwelijks transfer optreedt van de aangeleerde vaardigheden naar nieuwe situaties en dat de algebraïsche vaardigheden in feite niet

relevant zijn voor leerlingen die niet verder gaan met wiskunde na een basisvorming (zie: SLO, 1987).

Een uiterste consequentie van deze keuze is dat iedere formele- symbolische manipulatie, hoe eenvoudig ook, in de basisvorming wiskunde zal ontbreken. Hiermee wordt wiskunde een groot stuk van haar kracht ontnomen.

Oplossingstechnieken van wiskundige problemen zullen beperkt blijven tot de praktische ad hoc technieken en zullen moeilijk generaliseerbaar zijn.

Het probleem van het letterrekenen blijft zeker actueel in de vervolg- opleiding na de basisvorming, hoe die basisvorming er in de toekomst ook uit mag gaan zien. Er bestaat echter, ondanks de jarenlange traditie, nauwelijks een didaktiek die verder reikt dan de 'oefen en stamp'- methode. In deze zin ligt de didaktiek van het letterrekenen ver achter bij de reken-didaktiek van de basisschool. Daar zijn, op basis van wiskundig- didaktische analyses van de rekenalgoritmen, programma's ontwikkeld voor het aanleren van rekenvaardigheden waarin de wisseling tussen betekenisvolle en symbolische manipulatie een functionele plaats behoudt. Met name de aanpak van progressieve schematisering van WISKOBAS lijkt recht te kunnen doen aan een dergelijke wisseling van betekenis.

In hoofdstuk 5 wordt bekeken hoe letters en variabelen worden ingevoerd in de praktijk. Dit gebeurt door een vergelijking te maken tussen drie brugklassen van drie verschillende docenten. In drie verschillende brugklassen, met drie verschillende docenten, is bekeken hoe zij formules en het rekenen daarmee introduceren. Het gaat om twee gymnasium-brugklassen en een heterogene MAVO, HAVO, VWO- brugklas. De leerstof betreft in alle gevallen Hoofdstuk 3, Moderne Wiskunde deel 2, vierde editie: "Veranderlijken". Dit is het eerste hoofdstuk waarin het opstellen en gebruiken van letters en formules expliciet aan de orde komt. Vóór met dit hoofdstuk werd begonnen, is een voortoets afgenomen. Aan het eind van het hoofdstuk is een natoets afgenomen die tevens telde als eind-proefwerk. Voor- en na-toets hadden een gelijkwaardig niveau en sloten wat de inhoud betreft, zo dicht mogelijk aan bij de tekst van het hoofdstuk. De toetsen zijn opgesteld op basis van een inhoudelijke analyse van het hoofdstuk en concentreren zich rond de beheersing van een aantal kernbegrippen.

In elke klas is één les op de video opgenomen. Deze lessen zijn volledig in protocollen uitgeschreven. Door analyses van deze protocollen wordt geprobeerd te achterhalen op welke wijze de docenten in hun uitleg gestalte geven aan de leerstof. In de verwerking van de resultaten concentreren we ons allereerst op de verwijzingen van letters en formules en de eerste aanzet tot de verschillende letterreken-vaardigheden. Hierbij analyseren we de toetsen, de leerstof en de protocollen met behulp van de in hoofdstuk 1 ontwikkelde terminologie en indeling. Tenslotte worden de verschillen in resultaten op de toetsen met elkaar vergeleken vanuit het perspectief van de homogene tegenover de heterogene brugklas.

§2.5: VAARDIGHEDEN IN 2 MAVO EN 2 ATHENEUM.

Lineaire vergelijkingen.

Hoe lost een expert de volgende opgave op:

$$\text{Los op: } \frac{1}{6} - \frac{1}{4}x = 2x + \frac{1}{3}?$$

In de allereerste plaats werkt de uitdrukking "Los op" aan het begin van de opgave als een signaal dat aangeeft dat het gaat om een eindresultaat van de gedaante: " $x = \dots$ ".

Vervolgens verwijst de gedaante van de formule naar een lineaire vergelijking waarin breuken voorkomen. De breuken kunnen worden weggewerkt door links en rechts met 12 te vermenigvuldigen. Dat levert een gelijkwaardige vergelijking zonder breuken:

$$2 - 3x = 24x + 4$$

Eerst x naar links brengen door links en rechts met $24x$ te verminderen:

$$2 - 27x = 4$$

Dan alle getallen naar rechts door links en rechts met 2 te verminderen:

$$-27x = 2$$

Links en rechts delen door -27 :

$$x = -\frac{2}{27}.$$

Klaar.

Wat is er precies gebeurd? Er is een herkenning van het type opdracht in combinatie met de middelen waarmee de opdracht uitgevoerd kan worden. Er is duidelijk sprake van een doelgerichte strategie naar het eindresultaat. Er is een besef van 'eenvoudiger' gedaante van een vergelijking en van de middelen waarmee dat bereikt kan worden. De oplosser beschikt over voldoende rekenvaardigheden om de stappen te kunnen uitvoeren.

De bovenbeschreven oplossing is er één van het type zoals we graag zouden willen dat alle leerlingen dat zullen kunnen. Hoe is dat te realiseren?

De brochure.

Onder de titel "Vaardigheden" verschijnt in 1975 een brochure over de algebraïsche vaardigheden van leerlingen (Van Dormolen 1975). De ondertitel luidt: "1001 redenen waarom leerlingen geen (goede) routine hebben". De brochure analyseert een aantal situaties waarbij het leerlingen ontbreekt aan voldoende algebraïsche rekenvaardigheden en geeft een aantal mogelijke oorzaken. Op basis van de 'inzicht' definitie van van Hiele (zie §1.4) wordt vaardigheid omschreven als:

"routine die met inzicht gepaard gaat, waardoor problemen niet alleen adequaat en intentioneel aangepakt worden, maar ook binnen een redelijke tijd tot een goed einde gebracht kunnen worden."

Vaardigheid wordt gesteld tegenover trucmatige routine die berust op klakkeloze kennis. Bij trucmatige routine is er ook sprake van handelen in een redelijke tijd, maar ontbreekt het doelgerichte en wendbare karakter van vaardigheid waarmee voor leerling nieuwe problemen kunnen worden opgelost. Trucmatige routine berust vooral op gedachteloze reproductie van aangeleerde handelingen.

Wiskundige begaafdheid.

Krutetskii (1976) heeft onderzoek gedaan naar de bekwaamheden van wiskundig begaafde leerlingen, onder meer ten aanzien van formele vaardigheden in de wiskunde. Aan de hand van hardop-denken protocollen en het analyseren van schriftelijk materiaal, constateert hij opvallende verschillen tussen wiskundig begaafde en wiskundig minder begaafde leerlingen in het proces van informatie-verwerving en verwerking. Begaafde leerlingen zijn in staat te generaliseren op basis van één paradigmatisch voorbeeld. Ze generaliseren sneller en breder. Ze kunnen beter oplossingsmethodes generaliseren. Begaafde leerlingen ontwikkelen sneller verkortingen in probleemoplossende procedures dan minder begaafde leerlingen. Hun mentale processen zijn wendbaarder en meer flexibel. Ze hebben een sterker geheugen voor algemene relaties in een wiskundige situatie dan voor concrete gegevens. Dit alles wijst op een grotere geschiktheid voor expert-gedrag van wiskundig begaafde leerlingen ten aanzien van wiskundige problemen.

Representaties.

Een andere benadering van het verschijnsel 'betekenis-vol kunnen handelen' is het idee waarbij gehandeld wordt vanuit geschikte mentale representaties. Tijdens het oplossingsproces ontwikkelt zich een geheel van associaties van waaruit acties worden gegenereerd en het probleem wordt getransformeerd. Zo ontstaat een nieuwe situatie die weer nieuwe associaties genereert.

De betekenis van een probleem is gekoppeld aan de mentale representatie van dat probleem en het bijbehorende oplossingsproces. In het geval die representatie alleen maar bestaat uit een algoritme, is er sprake van een kale betekenis. Onder betekenis-vol verstaan we: rijk aan betekenissen. Dat wil zeggen: de representatie is wendbaar, toepasbaar, laat ruimte voor eigen constructies (met name verkortingen), roept voldoende associaties op. Kortom: de representatie bezit de kenmerken die leidt tot expertgedrag.

Davis (1984) legt sterke nadruk op het kunnen opbouwen van een geschikte mentale representatie van het probleem en het gelijktijdig kunnen uitvoeren van een meta-analyse van het verkregen (tussen-)resultaat. Een expert werkt als het ware gelijktijdig op twee niveaus: het uitvoerende en het reflecterende. Belangrijk element bij het opbouwen van een mentale representatie speelt, volgens Davis, het proces van herkenning. Een probleemsituatie bevat signalen (cues) en aanwijzingen (clues) die functioneren als sleutels waarmee een probleem-representatie wordt opgebouwd ("Wat is precies het probleem, om wat voor oplossingen gaat het?") en een terrein van relevante kennis wordt ontsloten ("Het zijn lineaire vergelijkingen"). Dit geheel van representaties kan de betekenis van het probleem worden genoemd.

Expertgedrag.

In het algemeen weet een expert betekenis-vol te handelen, ook in formeel-symbolische situaties. In aansluiting op de bevindingen van Krutetskii zien we echter dat een expert ook beter in staat is een geschikte representatie van het probleem op

te bouwen om van daaruit verder te kunnen handelen.

Meer specifiek betekent dit dat een expert:

- **doelgericht kan zoeken** naar een oplossing, dat wil zeggen: weet waarnaar gezocht moet worden en in welke richting dat het beste kan gebeuren,
- het oplossingsproces zelf **kan bijsturen**, dat wil zeggen: herkent wanneer een tussenoplossing waardevol, foutief of zonder waarde is en in aansluiting hierop een bepaalde richting weet te kiezen voor de volgende stappen,
- een **ruim arsenaal aan kennis en vaardigheden** heeft gekoppeld aan kennis over het toepassingsbereik van deze kennis/vaardigheden, dat wil zeggen: weet in welke situaties hij die kennis/vaardigheden wel of niet succesvol kan toepassen,
- over **verkortingen** beschikt in het oplossingsproces om daarmee het oplossingsproces aanzienlijk te kunnen versnellen en deze verkortingen ook weer ongedaan kan maken.

Er zijn een aantal manieren om te beoordelen of een leerling expertgedrag vertoont ten aanzien van bepaalde vaardigheden. Een gebruikelijke manier is die waarbij een leerling in een beperkte tijd bij een set 'gemengde opgaven' bij iedere opgave de meest efficiënte oplossingsmethode weet te kiezen.

Leerlingen worden doorgaans het eerst geconfronteerd met het formele letterrekenen in de wiskundige context van lineaire vergelijkingen. Dat heeft het voordeel dat het doel van de formele manipulaties op een gemakkelijke manier zichtbaar kan worden gemaakt. Het gaat immers om het vinden van een onbekend getal dat aan bepaalde voorwaarden moet voldoen. Dit geeft bij voorbaat een duidelijke richting en betekenis aan de formele herleidingen. In hoofdstuk 6 wordt onderzocht op welke wijze dit formele rekenen wordt geïntroduceerd aan de hand van de context van een weegschaal in een tweede klas van de MAVO en van het Atheneum. Het gaat om twee klassen met dezelfde leraar en hetzelfde boek. In het bijzonder gaat het om de vraag wat de verschillen zijn tussen beide klassen ten aanzien van de ontwikkeling naar expertgedrag en welke conclusies hieraan kunnen worden verbonden.

Van beide klassen is een les op de video opgenomen. Deze les heeft betrekking op hetzelfde gedeelte uit het boek. De opnamen zijn uitgeschreven in protokollen die vervolgens zijn geanalyseerd op verschillen in betekenis, in uitlegstrategieën en in leerlinggedrag. Aan het eind van het hoofdstuk is aan iedere klas een proefwerk afgenomen over de stof van het hoofdstuk. De resultaten van dit proefwerk zijn geanalyseerd vanuit de vraag wat er nu precies is bereikt met het gegeven onderwijs.

§2.6. HOEKEN.

Het woord 'hoek' is één van de bekendste woorden binnen de wiskunde dat tegelijkertijd een geheel autonome betekenis in de omgangstaal heeft: de hoek van een straat, de hoek van de kamer, een hoek omslaan, de hoek van een tafel.

Van Dale onderscheidt de volgende zes betekenissen:

1. (meetk.) onbepaalde ruimte begrepen tussen twee rechte lijnen of tussen twee of meer vlakken die elkaar ontmoeten; 2. (in het dagelijks leven) ruimte binnen twee verticale wanden waar die elkaar ontmoeten; in het bijzonder van een huis: de hoek van een kamer; 3. (vaak in verkl.) afgelegen, verborgen plaats: een schilderachtig hoekje; 4. streek: ik verwacht nog meer storm uit die hoek; door samenkomende vlakken gevormde uitstekende punt: stoot niet tegen de hoek van de tafel; 6. haak aan een hengel enz., waaraan visser het aas bevestigt.

Dergelijke homonymen komen veelvuldig voor in ons taalgebruik. Ze kunnen tot dubbelzinnigheden leiden als de context waarin ze gebruikt worden niet voldoende duidelijk is. Met "iemand gaat het hoekje om" kan letterlijk worden bedoeld dat die iemand een hoek van een steeg omslaat, maar ook dat iemand dood gaat. Vooral bij overdrachtelijk gebruik van een woord zal deze dubbelzinnigheid kunnen optreden.

Opvallend is het verschijnsel dat de nederlandse taal met het woord 'hoek' verschillende begrippen aangeeft; waar andere talen verschillende woorden voor die verschillende begrippen hebben. De hoek van een tafel heet in het engels 'corner' en in het duits 'Ecke'. Voor het wiskundige begrip hoek heeft men daar de woorden: 'angle' en 'Winkel'. (Dit laatste gebruik komt in het nederlandse ook voor bij 'winkelhaak') De haak van een vissnoer heet in het engels het met 'hoek' verwante 'hook'.

Het verschil in de betekenissen van het woord 'hoek' is nogal groot. Zoals in van Dale netjes wordt aangegeven wordt de betekenis vooral bepaald door de situatie waarin het woord gebruikt wordt. De grote verschillen tussen deze situaties hangen ten nauwste samen met de grote verschillen in betekenissen. Het is onmogelijk een gemeenschappelijk verband of een onderliggende analogie aan te geven in deze verschillende situaties. Dat geldt met name voor het verschil in betekenis tussen het wiskundige begrip hoek enerzijds en de andere betekenissen anderzijds. Het is niet zo dat dit wiskundige begrip kan worden opgevat als een metafoor of een overdrachtelijk gebruik van de andere betekenissen.

Deze diversiteit aan betekenissen plaatst een uitleg van 'wat-een-hoek-is' in een bijzondere positie. Aan de ene kant is het woord 'hoek' een voor de leerlingen bekend woord, aan de andere kant zijn de betekenissen zó divers en staan ze zover af van het wiskundige begrip dat het praktisch onmogelijk is om het wiskundige begrip hoek te ontwikkelen vanuit de andere dagelijkse taalbetekenissen van hoek.

In het onderzoek wordt geprobeerd inzicht te krijgen in de uitleg van 'wat-een-hoek-is' Allereerst wordt een wiskundig-didaktische analyse geschetst. Daarin wordt een betekenisanalyse gemaakt van de relatie tussen hoeken en realiteit, en wordt een

overzicht gegeven van verschillende opvattingen over hoeken in de literatuur. Hierbij wordt bijzondere nadruk gelegd op de niveautheorie van de van Hiele's.

Tenslotte wordt een les geanalyseerd waarin hoeken worden geïntroduceerd.

Centraal bij deze analyses staat de vraag wat het effect is van de uitleg van de docent:

- Wat moeten leerlingen doen met hoeken in de klas?
- Welke denk-activiteiten worden vinden daar plaats?
- Hoe ontwikkelen deze activiteiten zich ?
- Welk betekenis houden leerlingen uiteindelijk over naar aanleiding van de activiteiten in de klas?

In aansluiting op deze vragen wordt gekeken naar de vormgeving van de uitleg.

- Welke zijn de kernvragen van de uitleg?
- Hoe staat de ordening van de kernvragen in relatie met de veelzijdigheid van het onderwerp?
- Welke vorm van interactie vindt er plaats?
- Welke verwachtingen worden er gewekt over het begrijpend gedrag?
- Welke zijn de momenten van begrijpend gedrag?

HOOFDSTUK 3: PRESENTATIE VAN EEN WISKUNDIG ONDERWERP.

"Ik hoorde en zag. Zelf kon ik niets dan zwijgen.
Iets stuurde mijn schommelend evenwicht.
Kwam ik uit 't donker? Kwam ik uit het licht?
Was 't zakken van mijn denken? Was het stijgen?"

J.A. Dèr Mouw: In de hoogte.

Hoe leer je wiskunde uitleggen? Als niemand reageert op je verhaal, snappen ze het dan of zijn ze juist met stomheid geslagen? Moet je per sé vragen stellen om reacties te krijgen? Wordt een onderwerp gemakkelijk gevonden omdat de uitleg zo duidelijk is? Of is het juist andersom: wordt een uitleg duidelijk gevonden omdat het onderwerp gemakkelijk is.

§ 3.1: EEN BESCHRIJVING VAN DE SITUATIE.

De cursus: "Presentatie van een wiskundig onderwerp" is het eerste onderdeel van het prédoctorale gedeelte van de lerarenopleiding wiskunde. In de cursus wordt ervaring opgedaan in het presenteren van een wiskundig onderwerp. Het onderdeel is bedoeld voor alle derde- en vierde-jaarsstudenten die denken te maken te krijgen met het overdragen van wiskundige informatie.

In iedere groep wordt een volgorde in tweetallen vastgesteld waarin de studenten beurtelings een onderwerp presenteren. Ieder tweetal studenten krijgt een wiskunde tekst met de stof van de presentatie. De studenten krijgen de opdracht om de tekst zo begrijpelijk mogelijk in ca 20 minuten aan de medestudenten te presenteren. De docerwerkvorm wordt niet expliciet in de opdracht vermeld. Een andere werkvorm is toegestaan, maar komt weinig voor.

Het tweetal dient zelf een verdeling in de tekst te maken voor de twee voordrachten. Op deze manier wordt ieder tweetal gedwongen (minimaal) samen te werken. Er wordt dringend geadviseerd om vooraf even met elkaar proef te draaien. Soms is de samenwerking heel intensief, in andere gevallen beperkt die zich tot een voor de hand liggende splitsing van de tekst in twee stukken.

De gekozen onderwerpen staan op het wiskundige niveau van de studenten. Sommige studenten hebben moeite met de wiskunde. Ze kunnen dan vooraf terecht bij de begeleidende docent.

Er zijn twee rondes. Iedere student komt dus twee keer aan de beurt. Per bijeenkomst zijn er twee voordrachten. Direct na iedere voordracht wordt een enquête ingevuld die erop gericht is de student te informeren over de kwaliteit van de gegeven uitleg en waarin aanwijzingen worden gegeven kunnen worden voor verbetering.

De enquête.

BEOORDELING VAN

DOOR:

	-	0	+
1. Verstaanbaarheid:	☐	☐	☐
2. Bordindeling:	☐	☐	☐
3. Duidelijkheid van de uitleg:	☐	☐	☐
4. Mogelijkheid tot vragen stellen:	☐	☐	☐
5. Gebruik van de OH-projektor:	☐	☐	☐
6. Tempo:	☐	☐	☐
7. Indeling van het onderwerp:	☐	☐	☐
8. Taalgebruik (lange zinnen, moeilijke woorden,e.d.)	☐	☐	☐
9. Rekening houden met reacties van de groep:	☐	☐	☐
10. Bord schrift:	☐	☐	☐
11. Bordtekeningen:	☐	☐	☐
	niet		wel
12. Moeilijkheid van het onderwerp:	☐	☐	☐

OPMERKINGEN:

De studenten wordt gevraagd om op de open ruimte onderaan de enquête een 'brief' met aanwijzingen te schrijven aan de spreker. In een korte nabespreking kan een mondelinge toelichting worden gegeven op het geschreven commentaar. De docent-student heeft hierbij het eerste en laatste woord.

Door middel van reflectie op het gebeuren wordt geprobeerd de deskundigheid in de groep te ontwikkelen rondom het mondeling presenteren van een wiskundig onderwerp. De begeleidende docent is ook deelnemer aan deze evaluatie, maar bewaakt bovendien de procedure (de tijdslimiet van 20 minuten!) en geeft aanvullende informatie. In eerste instantie ligt het initiatief van de evaluatie echter bij de groep zelf.

De video.

Iedere voordracht wordt op video opgenomen. Per tweetal studenten worden, samen met de begeleidende docent, de voordrachten bekeken en besproken aan de hand van het gegeven commentaar. Daarbij wordt het commentaar getoetst aan de video-beelden en worden nieuwe opvallende zaken doorgesproken. Iedere student maakt een korte samenvatting van het gebeurde en een lijstje met actiepunten waarop bij een volgende voordracht gelet moet worden.

De onderwerpen.

De onderwerpen zijn gekozen door de begeleidende docent. Het zijn fragmenten uit engelse boeken over meetkunde (o.a. uit: Coxeter, 1961; Cadwell, 1966). In bijlage 1 wordt een volledig overzicht gegeven van de gekozen onderwerpen.

De keuze voor de meetkunde werd door een aantal motieven ingegeven:

- De onderwerpen zijn voor alle studenten nieuw. Alleen op deze wijze kan een echte uitleg-leersituatie ontstaan.
- Meetkundige onderwerpen leggen door het vóórkomen van figuren een sterke claim op de presentatie.
- Meetkunde is een sterk verwaarloosd onderwerp in de wiskundige opleiding.

De gekozen teksten zijn geen van alle wiskundig volledig uitgeschreven. Vaak worden alleen schetsen van bewijzen gegeven. Hierdoor zal de student bij de voorbereiding ook nog enige wiskundige activiteiten moeten verrichten.

In schema is de chronologische gang van zaken als volgt:



De cursus heeft het karakter van een training met sterke wiskundig-inhoudelijke elementen. Er zijn reflectieve ogenblikken ingebouwd met het gerichte doel om te komen tot een bewustwording van de eigen capaciteiten en zodoende de uitlegkwaliteiten te verbeteren.

Een student zal zich bij de voorbereiding allereerst de tekst wiskundig moeten eigen maken. Daarna zal een didactische plan voor de uitleg moeten worden ontworpen. Dat betekent: een indeling maken, een tijdschema maken, tekeningen voorbereiden, afleidingen van formules voorbereiden, vragen bedenken, enz... Op deze wijze vindt een constructie plaats van het materiaal voor de uitleg.

§ 3.2: HET INTERAKTIE DILEMMA.

Toehoorder (denkt bij zichzelf): "Ik snap het niet, maar dat zal wel aan mij liggen. Als ik er eens rustig naar kijk, dan kom ik er wel uit."

Spreker (denkt bij zichzelf): "Ze reageren niet, zelfs niet nadat ik ze daartoe heb uitgenodigd, dus zullen ze het wel snappen."

In deze twee zinnnetjes wordt een situatie geschetst die zich tijdens de cursus vaak heeft voorgedaan. Het geeft een misverstand aan dat zichzelf in stand houdt doordat de toehoorder voortdurend zichzelf de schuld blijft geven en doordat de spreker het zwijgen van de toehoorder op een verkeerde manier blijft interpreteren.

Deze situatie is kenmerkend voor de universitaire colleges. In een grote zaal met een groot publiek is het vrijwel onmogelijk om tot interactie tussen spreker en toehoorder te komen. Bovendien is de informatie- dichtheid per tijdseenheid zo hoog, dat een onvoorbereide toehoorder al gauw de draad zal kwijtraken en zich al snel zal beperken tot het klakkeloos overnemen van aantekeningen van het bord.

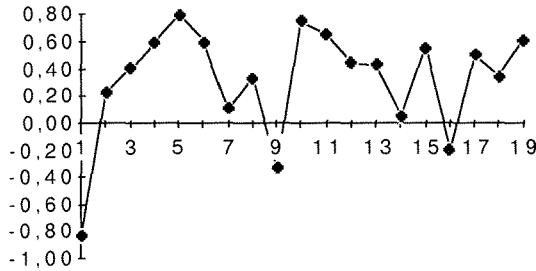
De studenten in de cursus zijn de laatste 3 à 4 jaar opgegroeid met dit patroon. Ze hebben het patroon zelfs 'overleefd'. Studenten die niet bestand zijn tegen dit onderwijspatroon, zijn inmiddels afgehaakt. Het is dus niet verbazingwekkend als dit patroon ook in het begin van de cursus duidelijk aanwezig zal zijn.

Om vanuit een passieve toehoorders- en een actieve sprekers-rol te komen tot een situatie waarin interactie mogelijk is, moet er zowel bij de toehoorder als bij de spreker het een en ander veranderen. De toehoorder zal zijn eigen schuldgevoel-drempel moeten zien te overwinnen en ook vragen durven stellen in situaties waarin hij niet zeker is van zijn eigen functioneren. De spreker zal zeer attent moeten zijn op signalen uit het publiek en positief te reageren op deze signalen.

De enquête bevatte twee vragen die betrekking hadden op de interactie in de groep. Het zijn de vragen 4 en 9. Vraag 4: "Mogelijkheid tot vragen stellen" vraagt naar passieve (bijvoorbeeld pauzeren) en actieve uitnodigingen van de spreker tot het stellen van vragen. Vraag 9: "Rekening houden met reacties uit de groep" vraagt naar een waardering over de manier waarop de spreker met (spontane) reacties uit de groep is omgesprongen. De correlatie tussen de antwoorden op beide vragen is bijzonder hoog: $r = 0.91$. Dat betekent dat we beide variabelen tot een variabele 'interactie' mogen samennemen zonder essentieel verlies van informatie. Deze variabele is berekend als het gemiddelde tussen vraag 4: "Mogelijkheid tot vragenstellen" en vraag 9: "Rekening houden met reacties uit de groep".

De onderstaande grafiek geeft een overzicht van de waarderingen die in de loop van de cursus 88/89 zijn toegekend aan de interactie.

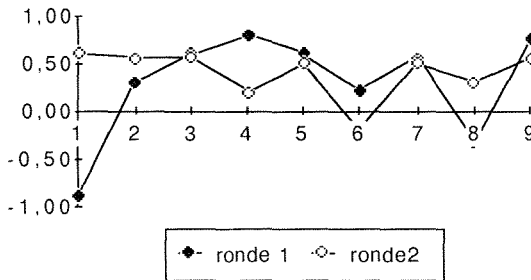
interactie 88/89

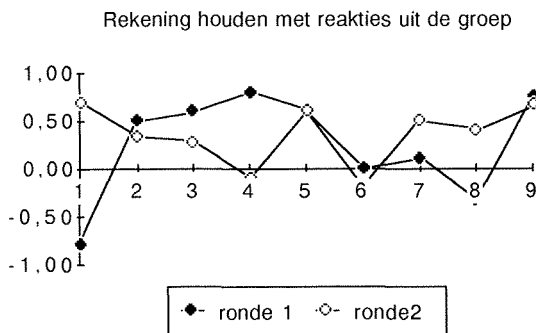


In de grafiek zien we een aanloopverschijnsel bij de eerste 5 sprekers. Daarna volgt een inzinking bij 7,8 en 9. De tweede ronde (vanaf 11) begint op een hoger niveau dan de eerste ronde. Er zijn twee inzinkingen, bij 14 (= 5) en 16 (=7). Gemiddeld genomen is er sprake van een lichte verbetering. Het gemiddelde over de eerste ronde is 0.27, over de tweede ronde is dat 0.38. Bij 1 (= 11) zien we een hele duidelijke toename in waardering, bij 6 (= 16) een heel duidelijke afname.

Om na te gaan wat de individuele effecten van de cursus zijn geweest op beide vragen, zijn in de volgende twee grafieken de resultaten van de twee vragen afzonderlijk per persoon bij elkaar gezet. De volgorde is niet een strikt chronologische volgorde. Wel is de chronologische lijn aangehouden, maar het kwam voor dat het koppel sprekers van één middag van volgorde wisselde in de tweede ronde. Persoon 2 uit de eerste ronde is niet opgenomen omdat die niet aan de tweede ronde meedeed. De nummering is dus niet dezelfde als van de voorgaande grafiek.

Mogelijkheid tot vragen stellen





Het verschil tussen eerste en tweede ronde wordt nog eens weergegeven in het volgende tekenoverzicht:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
vraag 4:	+	+	0	-	0	-	0	+	-
vraag 9:	+	-	-	-	0	-	+	+	0

Hieruit is geen duidelijke conclusie te trekken over het leereffect van beide aspecten. We zien bij 1 een groot positief effect en bij 4 een sterk negatief effect.

Naast de in de aanhef van deze paragraaf gesignaleerde beginsituatie van de studenten, zijn er nog twee andere factoren aan te wijzen die verantwoordelijk kunnen zijn voor de zwakke interactie bij het begin van de cursus.

In de eerste plaats zijn de onderwerpen van de presentatie min of meer afgeronde stukken tekst uit een boek waarvan sterk de suggestie uitgaat om die op een klassieke manier te presenteren. Deze teksten bevatten bijvoorbeeld geen tussentijdse vragen aan de lezer. Er zijn hooguit open plekken in de wiskunde, die niet expliciet zijn uitgewerkt en waarvan het aan de lezer zelf wordt overgelaten of die daar over wil nadenken.

In de tweede plaats is bij het begin van de cursus gezegd dat het om een echte situatie gaat waarvan het de bedoeling is dat het publiek nieuwe wiskunde op eigen niveau kan leren en waarin niet een denkbeeldige schoolklas wordt nagespeeld. Daar kan de suggestie van uitgaan dat het verboden is om de gebruikelijke gespreksvormen van een classesituatie in het voortgezet onderwijs te hanteren.

Opmerkingen over een mogelijk te hanteren werkvorm aan het begin van de cursus, zijn bewust achterwege gebleven. Voor een goede reflectie op de gehanteerde werkvormen tijdens de cursus was het noodzakelijk zo open mogelijk te starten.

In de volgende twee paragrafen wordt aan de hand van de verslagen en de protocollen geprobeerd een analyse te geven van de oorzaken van het sterke positieve effect bij spreker 1 en het sterke negatieve effect bij spreker 4.

§ 3.3: HENNIE: "GEEN MINNETJE!!!! GOED HE!"

De eerste voordracht.

Hennie geeft de eerste voordracht van de cursus. Het onderwerp is een tekst over de Euler-lijn en de negen-puntscirkel. Twee klassieke onderwerpen uit de vlakke meetkunde.

De situatie is nieuw en onduidelijk voor haar. Ze moet een voordracht houden, er zijn suggesties gedaan over het gebruik van de overheadprojector maar verdere richtlijnen ontbreken.

De voordracht wordt gekenmerkt door het volledig ontbreken van interactie met de groep, noch in actieve (bv: het stellen van uitnodigende vragen) noch in passieve zin (bv: pauzeren, oogcontact). Hoewel ze een overheadprojector gebruikt, kijkt ze niet naar de groep. Soms is het alsof ze tegen een denkbeeldig persoon praat. Ze kijkt dan schuin opzij naar een plaats waar geen toehoorders zitten. Ze presenteert de stof in een hoog tempo, op een gedisciplineerde manier, met gebruik van het bord of de overheadprojector. Ieder onderdeel van het verhaal leidt ze even apart in: "Ik ga bewijzen dat ...", "Ik ga iets vertellen over het zwaartepunt..." Deze inleidingen geven een korte adempauze, ze gaan even over iets anders dan over wiskundige afleidingen. Ze duren echter te kort om de toehoorder de rust te geven even voor zich zelf na te denken.

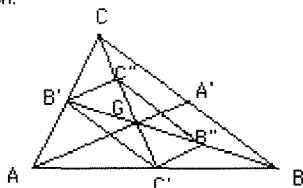
Het taalgebruik is onpersoonlijk. Het heeft geen duidelijke adressant. Ze richt zich tot niemand in het bijzonder en de toehoorder voelt zich niet persoonlijk aangesproken. Doordat ze haar blik niet op de groep richt, krijgt een uitdrukking als "Je ziet dat" een neutrale onpersoonlijke betekenis. Ondanks het gebruik van het persoonlijk voornaamwoord.

Het volgende fragment is een typisch voorbeeld van deze uitleg.

Fragment 3.

[5 minuten vanaf het begin]

Nou wou ik even iets vertellen over het zwaartepunt. Iedereen die kent dat wel maar ik vertel het toch heel even.



Het zwaartepunt in de driehoek krijg je door de helft van de zijden te nemen, A', B', C' . [wijst aan op de transparant] en van daaruit naar de tegenovergelegen hoekpunten een lijn te trekken en het snijpunt van die lijnen is het zwaartepunt. Het zwaartepunt deelt die zwaartelijn op een derde. Ik zal dat even kort uitleggen. Als je even twee extra punten erbij tekent, B'' en C'' [wijst aan] die liggen op de helft van GC . Nou weet je doordat C' op de helft van AB ligt en B' op de helft van AC , dat dus de lijn $C'B'$ evenwijdig is aan BC en de helft. Maar datzelfde kun je doen voor dubbelaccent. Als je dan kijkt naar BGC . Dan ligt B'' op de helft, C'' ligt op de helft dus ook $B''C''$ is evenwijdig aan BC en de helft daarvan. Dus je weet dat dat blauwe ding $[C'B'C''B'']$ een parallelogram is, omdat de zijden evenlang zijn en evenwijdig. Nou van een

parallelogram is gegeven dat de diagonalen elkaar doormidden snijden, dus het stukje C'G is evenlang als GC". Maar C" lag op de helft dus GC" is ook weer gelijk aan C"C dus die stukken zijn allemaal gelijk dus het zwaartepunt deelt de zwaartelijn in drieën althans verdeelt het op een derde.

De strikt zakelijke en onpersoonlijke aanpak is duidelijk zichtbaar. Er zit een heldere lijn in de presentatie van de feiten. Alles staat op zijn plaats en in de goede volgorde. De uitleg is goed 'georganiseerd'.

Onmiddellijk na de eerste voordracht vult ook Hennie een enquête over zichzelf in. Bij de opmerkingen schrijft ze:

"Van te voren de nadruk erop leggen, dat er vragen gesteld mogen worden.
Ik ben er eigenlijk niet zeker van of iedereen het wel begrepen heeft.
Zelf vragen of iedereen het snapt, desnoods nagaan ("leg maar eens uit dan")."

Ze heeft zich zorgvuldig voorbereid. In haar verslag schrijft ze :

"-Voorbereiding.

Ik vind dat we ons goed voorbereid hebben. Eerst de tekst uitgebreid doornemen, vragen aan elkaar, bewijzen uitwerken enz. Evt. vragen aan de docent. Na het verdelen v/d tekst begon ieder zijn deel uit te werken en tekening te maken, te bepalen wat op sheet te zetten en wat niet. Toen bleek dat Regi te veel had en ik te weinig, heb ik wat van haar overgenomen en ben ik ook als eerste gegaan (terwijl ik §1.6 en §1.7 had en Regi §1.5).

We hebben wel een keer of 4/5 geoefend in de zaal zelf en met gebruik van de OH-proj. Het weekend daarvoor heb ik op zaterdagavond geoefend op mijn familie. De enige die na 12!! min spreken het nog begreep was m'n moeder. Hier had ik dus al veel geleerd, tempo lager, tekeningen duidelijker, driehoeken helemaal aangeven en niet alleen A,B,C en de laatste zijde vergeten ..enz"

Hennie heeft de waarderingen van de enquête omgezet in cijfers van 1 tot en met 10. Zo komt ze tot het volgende 'rapport':

Verstaanbaarheid	10
Bordindeling	7
Duidelijkheid uitleg	7,5
Mogelijkheid tot vragen	1
Gebruik OH-projector	10
Tempo	6
Indeling onderwerp	6,5
Taalgebruik	9,5
Reakties groep	1
Bordschrift	7,5
Bordtekening	5,5
Moeilijkheid	niet moeilijk.

In haar verslag reageert ze daar als volgt op:

"- Het tempo had ik dus al aardig aangepast, nog niet genoeg maar gem. nog een zesje. Echter iedereen vond bij 4 en 9 een dikke 1. Dus contact met de groep was nihil. Verder vond men taalgebruik, verstaanbaarheid heel goed; uitleg, bordschrift, bordindeling ruim voldoende en indeling onderwerp, bordtekening en tempo maar matig. Gebruik OH-projector stonden alleen maar +."

Ze neemt zich voor de volgende ronde het volgende voor:

- "Allereerst moet dus contact met de groep verbeterd worden. Meer gelegenheid tot vragen, pauzes, kijk ze maar eens aan, enz.
- Het tempo moet nog meer omlaag.
- Zinnen meer met punten (einde zin)
- Niet te eentonig, doe eens enthousiast, meer spanning.
- Meer bord gebruiken."

Ook geven 4 toehoorders commentaar op hun enquête over het contact met de groep:

"Geen vragen, ligt ook aan de groep die ze gewoon niet stelt, misschien toch iets meer duidelijk maken dat ze interrupteren als ze iets niet snappen. Meer contact met de groep zoeken."

"Ik denk dat je beter aan moet geven wat het probleem is, en wat de oplossing. Doordat je geen gelegenheid gaf tot vragenstellen en redelijk snel ging ontschoot mij dat soms. Daardoor wordt de duidelijkheid van de uitleg (zie 3) minder goed."

"Weinig uitnodigend tot stellen van vragen."

"In het vervolg proberen rekening te houden met reacties uit de groep, dwz gelegenheid geven tot het stellen van vragen, en wellicht af en toe vragen of wat je uitlegt wel duidelijk is."

Het is opvallend dat er, ondanks het jarenlange patroon van colleges waarbij er nauwelijks gelegenheid is met de docent van gedachten te wisselen, bij deze allereerste voordracht van de cursus zoveel studenten spontaan aangeven dat er te weinig contact is geweest tussen de spreker en de groep.

De tweede voordracht.

Tussen de eerste en deze tweede voordracht zit een periode van 4 weken waarin de eerste ronde van alle eerste voordrachten is gehouden. Hennie is de eerste spreekster van de tweede ronde. Het onderwerp is: regelmatige veelvlakken waaronder een bewijs dat er maar 5 zijn. Het onderwerp is minder formeel is dan het vorige en leent zich wat gemakkelijker voor een wat lossere presentatie met concrete modellen.

Vanaf de eerste openingszin straalt ze een andere houding uit: "Ik hoop dat jullie er allemaal zijn ondanks het warme weer."

Hennie kijkt zeer gericht naar de groep. Ze stelt voortdurend vragen waarin ze uitnodigt tot meedenken en controleert of ze begrepen wordt. Haar toehoorders reageren spontaan. Ze durven te interrupteren met vragen en opmerkingen. Het volgende fragment toont wat de meerwaarde is van een dergelijke situatie.

Fragment 4.

[Anderhalve minuut na het begin]

He: Weet één van jullie misschien of er nog meer [convexe reguliere veelvlakken] zijn?

Een voorbeeld daarvan? Deze heeft bijvoorbeeld 6 vlakken.

A: Een piramide met 3 vlakken.

He: Heeft die dus geen drie vlakken. Hoeveel vlakken heeft die dan?

A: Vier vlakken heeft die dan.

He: Deze bedoel je? [Laat regelmatig viervlak zien.]

A: Ja die bedoel ik.

He: Die heeft vier vlakken, dat is er dus ook één.

- B: Is er ook één met 5 vlakken, 12 vlakken. Ik weet niet hoe die heet.
- He: Die heb je ook. [Laat regelmatig 12-vlak zien.] [Onverstaanbaar]. Ja, ja. Je ziet het is heel mooi dat jullie deze uitgekozen hebben, je ziet een heel grote overeenkomst, bij ieder punt namelijk komen drie zijden bijeen. Hier komen er drie bijeen [wijst een hoek aan op het 12-vlak], hier komen er drie bijeen [wijst hoek aan op de kubus] en hier ook [wijst aan op viervlak] Alleen het enige verschil is dat het hier [wijst op viervlak] het veelvlak is hier een driehoek, hier een vierkant [wijst op de kubus] en hier een 5-hoek [wijst naar het 12-vlak]. Dat is het enige verschil. Weet iemand nog een? [Wacht, kijkt.]
- A: Twee zulke piramides tegen elkaar.
- He: Ja [pakt 8-vlak]. Zo eentje bedoel je.
- A: Oh nee, dat is een ander, nou ja ik bedoel....
- He: Dit is dus een 8-vlak en hier komen er bij ieder punt 4 zijden bijeen, maar het is wel weer een driehoek. Dus het is eigenlijk de omgekeerde van deze [wijst naar de kubus], dit is een vierhoek en bij ieder punt komen drie zijden bijeen en dit is een driehoek daar komen bij ieder punt 4 zijden bijeen. En aan deze kun je de congruentie ook heel leuk zien. Want je zou in eerste instantie verwachten, dat als je hem zo pakt [pakt onder- en boven-hoekpunt en houdt 8-vlak vertikaal omhoog], dat alleen wanneer ik hem zó hou [draait de handen zodat de hoekpunten verwisseld worden], dat die dan exakt hetzelfde is. Maar dat is dus niet zo. Je kan hem ook zó vasthouden [houdt de handen horizontaal zodat het onderste hoekpunt rechts en het bovenste links komt te liggen, verplaatst de handen naar boven en onder]. Kijk en dan is die ook hetzelfde.
- Nou er is in ieder geval nog eentje [pakt 20-vlak]. Dat is een 20-vlak en bij deze heb je dus weer driehoekjes maar nu zitten er 5 zijden bij in ieder punt. Maar ook hier geldt weer hetzelfde: congruent, congruente hoeken en het is een regulier convex veelvlak. Zijn er nog meer denk je?
- A: En waarom is dat er niet één? Twee van die piramides zo tegen elkaar? [wijst naar 4-vlak]
- He: [Pakt 4-vlak] Je bedoelt hier nog eentje opzetten?
- A: Ja.
- He: Dan krijg je deze. [Pakt 8-vlak] Oh nee. Ja dan wordt die waarschijnlijk niet eh... Ja, ik weet het al. Als je hier eentje opzet hè, dan loopt hier [wijst vanuit hoekpunt een denkbeeldige ribbe aan] ook eentje weg.
- A: Ja dan zijn het er 4.
- He: Dan zitten hier [wijst hoekpunt aan] 4 zijden bijeen en hier [wijst beneden hoekpunt aan] maar 3. En dat is de bedoeling. Alle hoekpunten moeten congruent zijn.
- A: Oh ja.
- He: Dan is ie niet regelmatig.
- B: Kun je wel andere regelmatige [onverstaanbaar] piramiden?
- He: Ja dat zou kunnen, maar ik ga dus bewijzen dat er niet meer zijn. In eerste instantie toen dacht ik ook, toen ik dat las, er zijn er vast nog wel meer, maar het gekke is dat er niet meer zijn. Er is dus ook niet een 40-vlak of zo. Je denkt: nou ik versier wel wat in elkaar.

In het gesprek tussen Hennie en A wordt nader gepreciseerd wat bedoeld wordt met congruente hoeken en dus wat bedoeld wordt met regelmatig veelhoeken. Dit gesprek en de voortdurende vraag van Hennie of er nog meer zijn leidt tot een vermoeden bij B dat er niet meer kunnen zijn. Daarmee anticipeert hij op het komende bewijs dat de hoofdmoot van het vervolg is. In dit fragment is dus duidelijk sprake van een normale interactie die functioneel is in de hele uitleg. Docente en toehoorders reageren spontaan op elkaar (de interactie is normaal) en

de interactie levert een duidelijke bijdrage aan het doel van de uitleg (de interactie is functioneel).

In dit vervolg worden een aantal formules afgeleid. De uitleg krijgt meer een doceer-karakter en is daarmee, ook voor wat betreft de inhoud, beter te vergelijken met het fragment uit de eerste ronde. Nu pauzeert Hennie om de minuut. Ze vraagt of het duidelijk is, of de tekst te lezen is. Ze plaatst opmerkingen over de moeilijkheid. Hieronder volgt een typisch fragment uit dit gedeelte.

Fragment 5.

He: Zo heb je heel gemakkelijk het verband gekregen tussen F en E. Ziet iemand misschien ook het verband tussen E en V? V is dus het aantal hoekpunten. [wacht] V is het aantal hoekpunten en kijk je komt ook weer op 2E uit, want je telt ook opnieuw alle zijden weer dubbel. Kijk bijvoorbeeld eens naar de kubus. V is het aantal hoekpunten. In dit geval. Hoe kom je nu aan de zijden?

C: $qV = 2E$

He: [schrijft op het bord: $pF = 2E = qV$].

Ja prima. Want in ieder hoekpunt komen q zijden bijeen. Dus als ik q maal V neem, dan heb ik alle zijden twee keer geteld. Dan kom ik opnieuw op 2E uit. Is dat voor iedereen duidelijk of moet ik het nog een keer uitleggen? [wacht, kijkt]. Ja, iedereen snapt het. Nou van hieruit wordt het eigenlijk gewoon een hoop schrijfwerk want ik ga naar de formule van Euler toewerken. Dat komt een beetje uit de lucht vallen.

In dit fragment nodigt Hennie de toehoorders uit om zelf een suggestie te leveren voor het verband tussen V en E. Ze gebruikt het antwoord van C als opstap voor haar korte uitleg. In de laatste zin van het vorige fragment geeft ze signalen wat de toehoorders kunnen verwachten. Het functionele van deze uitleg komt tot uiting in deze drie basishandelingen: uitnodigen, inhaken op reacties, anticiperen.

Na de tweede voordracht zijn er twee opmerkingen over de interactie in de enquête:

"Ik kon geen zwakke punten ontdekken (op "teken klap om" na) . Positief: gelegenheid tot vragen stellen, hoewel daar weinig aanleiding toe was als gevolg van de duidelijke uitleg.

- Je hebt soms wat moeite om snel te begrijpen wat iemand bedoelt als die een opmerking maakt."

En Hennie reageert daar natuurlijk ook zelf op:

"Misschien toch nog te snel. Uitleg soms wat rommelig. Nog te weinig gelegenheid tot vragen. Stom die formule! (geen concentratie, was wel leuk voor de ontspanning, waarom vroeg maar 1 hoe dat zat?)"

Ook nu drukt ze haar prestaties weer uit in rapportcijfers:

Verstaanbaarheid	10
Bordindeling	10
Duidelijkheid uitleg	10
Mogelijkheid tot vragen	8,5
Gebruik OH-projector	9,5
Tempo	8,0
Indeling onderwerp	9,0
Taalgebruik	8,0
Reacties groep	8,5
Bordschrift	8,0

Moeilijkheid
Geen minnetje!!! Goed hè!

niet zo moeilijk.

Ze heeft zich weer zorgvuldig voorbereid:

"Ik moest het nu alleen voorbereiden. Het onderwerp vond ik ook veel moeilijker. In het begin snapte ik er dan ook niet veel van, totdat snachts om ± 1 uur mij een lichtje opging, eindelijk begon ik het te begrijpen. Nog wat vragen aan de docent en het werd zowaar leuk! Dit keer had ik niemand om mee te oefenen, dus heb ik een keer of 4 alleen geoefend. De eerste keer veel te lang (± 30 minuten), dus inkorten. Voornamelijk moest de uitleg korter en krachtiger. Daarna had ik het redelijk onder de knie. Of ik te snel ging kon ik moeilijk nagaan, dat moest ik ter plekke maar zien."

Ze heeft een bijzondere positieve ervaring over het vragenstellen aan de groep:

"Toen ik vroeg of men het verband tussen F en E kon geven, nadat ik zelf het verband tussen V en E gaf, kwam er beweging in de rijen. Men begon opeens (beter) na te denken."

Maar ze is nog niet tevreden:

"Toch nog vaker vragen of iedereen het snapt. Letten op taalgebruik, tempo nog aanpassen (niet eentonig worden) en veel beter reageren op reacties, concentreren op de vragen."

Analyse.

We zien een spectaculaire verandering in het gedrag van Hennie ten aanzien van de interactie tijdens de voordracht. Wat zijn nu de oorzaken van een dergelijke verandering?

Genoemd is al het feit dat ze de eerste voordracht hield en zich in en voor haar onduidelijke situatie bevond. Dat leidde misschien al te gemakkelijk tot een 'standaard'-gedrag van college-geven.

Door de zorgvuldige voorbereiding echter kon er in de organisatie van de voordracht niets mis gaan. Ze zat goed in de stof, had een uitgeprobeerde ordening van onderwerpen, had het tempo uitgeprobeerd. Daardoor kwam de gebrekkige interactie als enige minpunt naar boven. In de periode tussen beide voordrachten kon ze zich daar toen volledig op concentreren.

Opvallend is ook de volledigheid en het persoonlijke karakter van haar verslaggeving. Het wijst op een grote betrokkenheid en inzet. Ze wil het zo goed mogelijk doen en is bereid zich daarop te concentreren. Met een dergelijke houding kan het haast niet meer mis gaan.

Transmissie en interpretatie.

Er zitten opvallende verschillen tussen de drie fragmenten in de wijze van informatieverschaffing. In fragment 3 en 5 is er duidelijk sprake van een situatie van **transmissie** van informatie. Hierin is Hennie in de eerste plaats verstrekker van informatie. In fragment 3 legt ze uit waarom het zwaartepunt de zwaartelij in de verhouding 2 staat tot 3 verdeelt. In fragment 5 legt ze uit wat het verband is tussen het aantal hoekpunten en het aantal zijden. In fragment 3 is er geen interactie met de groep. In fragment 5 is er een sterke sturing naar het gewenste antwoord. Fragment 4 is een prachtig voorbeeld van een situatie waarin betekenisverwerving plaatsvindt door **interpretatie**. De terminologie is ontleend aan Van der Aalsvoort (1982). In het fragment legt Hennie uit wat een convex regelmatig veelvlak is. Ze geeft geen definitie of omschrijving. Ze stuurt niet aan op

een gewenste formulering van het begrip. Het begrip ontwikkelt zich in een dialoog. Ze stelt vragen, laat de toehoorders met suggesties komen, reageert daarop. Aan het spontaan aangedragen non-voorbeeld van A, laat ze zien wat eigenlijk het kenmerk van regelmatig is "de hoeken moeten congruent zijn". Ze begrijpt het voorbeeld van A eerst niet, maar deze krijgt toch de ruimte om erop terug te komen. Daardoor begrijpt A ineens wat er niet deugt aan zijn voorbeeld en wat er aan de hand moet zijn opdat een veelvlak regelmatig genoemd mag worden. Er wordt geen verdere omschrijving gegeven van wat congruent nu precies is. Maar het wordt volstrekt duidelijk aan de hand van de getoonde modellen en de nonvoorbeelden. Het beste bewijs dat de uitleg begrepen is, is de vraag van B of er nog andere regelmatige veelvlakken zijn.

Het is opvallend dat Hennie bij haar tweede voordracht een keuze maakt tussen verschillende werkvormen. Ze kiest bij het afleiden van formules bewust voor een doceervorm (zie laatste zin van fragment 5), bij de introductie van het nieuwe begrip 'regelmatige veelvlakken' voor een gespreksvorm. Ze heeft kennelijk een besef voor de relatie tussen de inhoud van de stof en een bijpassende werkvorm.

Normale en funktionele interactie.

In de eerste bespreking van de fragmenten 4 en 5 is de term 'normale en funktionele interactie' gebruikt. Een interactie is **normaal** als docent en toehoorders binnen een gegeven situatie 'normaal' op elkaar reageren. In de gegeven situatie leggen studenten aan medestudenten uit. De studenten kennen elkaar meestal van de andere colleges. De groep is klein, maximaal 12 personen. De drempel om te reageren is laag. In een dergelijke situatie past een 'klassegespreksvorm', eventueel afgewisseld met een doceervorm, binnen het onderlinge verwachtingspatroon. De interactie heet **funktioneel** als die een duidelijke sturende functie heeft in het uitlegproces. Bijvoorbeeld: de toehoorder durft onmiddellijk aan te geven dat hij een uitleg niet heeft begrepen en de spreker gaat serieus op het signaal in door de uitleg aan te passen bij de onduidelijkheden van de toehoorder. Of: de spreker stelt een suggestieve vraag die het denken van de toehoorders in een bepaalde richting stuurt. Bij een directe terugkoppeling van informatie over de kwaliteit van de gegeven uitleg, kan een uitleg niet mislukken. Er is immers een voortdurende uitwisseling van informatie totdat overeenstemming is bereikt.

Om vanuit de gebruikelijke situatie van de studenten met passieve toehoorders en een actieve spreker, te komen tot een situatie waarin een normaal-funktionele interactie mogelijk is, moet er zowel bij de toehoorder als bij de spreker het een en ander veranderen. De toehoorder zal zijn eigen 'schuldgevoel-drempel' ("het zal wel aan mij liggen") moeten zien te overwinnen en ook vragen durven stellen in situaties waarin hij niet zeker is van zijn eigen functioneren. De spreker zal zeer attent moeten zijn op signalen uit het publiek en positief moeten reageren op deze signalen.

§ 3.4: "RON: ZOLANG IK NIKS HOOR GA IK DOOR"

Bij de presentatie van Ron wordt de interactie in de tweede ronde (volgens de tekentoets) significant slechter gevonden dan bij de eerste ronde. In de eerste ronde was het gemiddelde van vraag 4 en 9: 0.8, er zijn alleen maar enen en nullen neergezet. Bij de tweede ronde was dat gemiddelde ongeveer 0. Er zijn veel nullen neergezet, afgewisseld met een enkele 1 of -1. Er zit ook een significant verschil in de beoordeling van de duidelijkheid. Van een 1 is hij naar -0.2 geduikeld. Verder wordt het tempo van de tweede presentatie door alle toehoorders als beter beoordeeld. Van een slecht gemiddelde van -0.7 gaat hij naar 0.5.

De eerste presentatie.

Deze presentatie is de eerste uit een serie van 4 over de meetkundige afbeelding 'inversie' in het platte vlak. Dit is een 'klassiek' onderwerp uit de vlakke meetkunde. Ron heeft zijn verhaal goed georganiseerd. Er zit een duidelijke lijn in. Na een inleidend verhaal over Euclides en Steiner, geeft hij een definitie van inversie. Vervolgens laat hij enkele eigenschappen zien van deze afbeelding en laat hij zien hoe je een inversie kunt construeren.

Hij staat ontspannen voor het bord. Loopt regelmatig heen en weer, kijkt naar de groep. Regelmatig vraagt hij of de uitleg duidelijk is:

"Dat ziet iedereen wel hoop ik hè."
"Is dat iedereen duidelijk? Ja?"
"Is dat leesbaar voor iedereen?"
"Zolang ik niks hoor ga ik door."

Ron wacht nauwelijks op een antwoord op deze vragen. Hij kijkt even naar de groep en gaat dan verder met zijn verhaal. De toon van de vragen is vriendelijk maar niet echt uitnodigend. Vooral de laatste opmerking in bovenstaand rijtje maakt zichtbaar dat het hier eigenlijk om rethorisch gestelde vragen gaat.

Drie keer wordt Ron onderbroken door een vraag of opmerking uit het publiek. Aan het eind van de presentatie wordt nog gevraagd een stukje uitleg te herhalen.

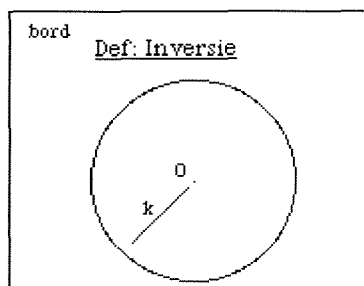
Het volgende is een kenmerkend fragment.

Fragment 6.

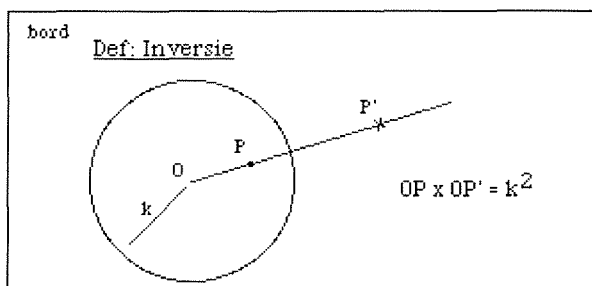
[Ron heeft zojuist een korte inleiding over de geschiedenis gegeven.]

Ro: Ja, ik zal nu de definitie van inversie maar geven. Dan kunnen we daarmee verder.

[Loopt naar de linkerkant van het bord, schrijft op: Def: Inversie.] Eh, bij een inversie gaan we altijd uit van een gegeven cirkel met middelpunt O en meestal zegt men dat de straal k is. [Tekent ondertussen op het bord.]

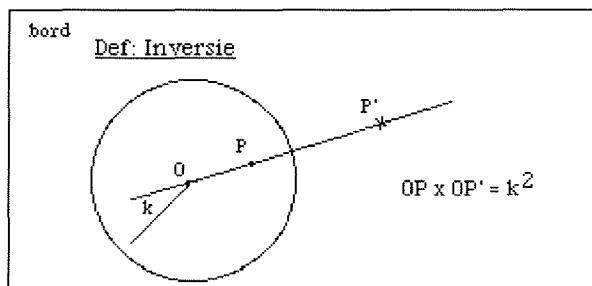


En als ik nu ergens in het vlak een punt heb, een punt P, ik kies hem nu ergens in de cirkel, hij mag er net zo goed buiten liggen, [tekent een punt P in de cirkel] dan zeg ik: de inverse van het punt P dat vind ik door OP te trekken, [tekent lijn van O naar P] daar komt ie, dan P', dat is de inverse van P, dat ligt ergens op die lijn, en wel zodanig dat $OP \times OP' = k^2$]



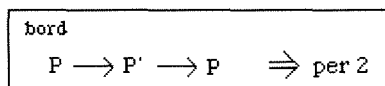
Dat is die definitie van die inversie. Dat ziet iedereen wel hoop ik hè.

A: [Onderbreekt Ro] De lijn OP die loopt ook door aan de andere kant ...[onverstaanbaar]
Ro:Ja daar heb je gelijk aan. [Trekt OP door aan de andere kant van O] Dan zou je in wezen twee krijgen, daar heb je gelijk in, maar deze gaat maar aan één kant door .



Ro:Eh, wat zien we hieraan? Hij is niet gedefinieerd voor het middelpunt. Als die P hier op O komt te liggen, dan zou OP 0 zijn, dan staat er 0 keer een getal en dat getal moet een

positief getal worden en dat wil niet, dus hij is voor het middelpunt O niet gedefinieerd. Dat is het enige punt waarvoor hij niet gedefinieerd is. [Wacht] Wat zien we nog meer? Ik zie P gaat naar P' [schrijft: $P \rightarrow P'$]. Maar wat gebeurt er met P' , als ik gewoon eens begin met P', die komt weer op P terecht [wijst aan in de figuur]. Ik heb hier [wijst naar P in de formule $OP \times OP' = k^2$] als het ware OP' staan en ik zoek nu [wijst naar OP'] een lijnstuk zodanig dat OP' keer die is k^2 . Dat is de oude OP weer. Dus ik zie dan dat P' gaat weer naar P. [Schrijft $P \rightarrow P' \rightarrow P$] Is dat duidelijk? Dus periode 2. [schrijft]



Dat is gewoon een eigenschap van de inversie.

Het actieve taalgebruik van Ron (Bijvoorbeeld: "ik kies hem nu ergens in de cirkel", "Als die P hier op O komt te liggen") begeleid met gebaren, tekeningen en tekst, maakt de uitleg goed te volgen. De vragen die hij stelt over de duidelijkheid van de uitleg zijn als het ware een onderdeel van dat actieve taalgebruik. Ze functioneren als signalen voor afsluiting van het onderwerp en overgang naar het volgende onderwerp. Ze zijn helemaal ingebed in het geheel van de uitleg. Ze zijn niet bedoeld om beantwoord te worden, hoewel dat natuurlijk niet is uitgesloten.

In het verslag naar aanleiding van deze presentatie schrijft Ron:

"Vorbereiding:

Eén week van te voren voor de eerste keer doorgenomen, daarna met Dries een verdeling gemaakt in twee stukken.

In de periode daarna heb ik alles grondig doorgenomen, en voor mijzelf een uittreksel gemaakt met daarin hetgeen ik wou vertellen.

Voor diverse tekeningen heb ik sheets gemaakt, nadat ik van te voren eerst heb bepaald wat op het bord en wat op sheet kwam te staan.

Daar ik dacht makkelijk in 20 minuten rond te kunnen komen, heb ik niet geoeftend (i.e. het opdreunen van mijn verhaal). Daags van te voren heb ik nog gevraagd aan Dhr Kemme of ik iets moest uitleggen, wat reeds eerder was uitgelegd. 's Ochtends van te voren heb ik voor de laatste maal nog alles één keer grondig doorgenomen.

Commentaar:

Gemiddelden: verstaanbh: +
 bordindeling : 0
 duidelijkheid: + (mijns inziens het belangrijkste punt!)
 moghl vragen: +
 gebruik OH: 0 of +
 tempo: - (allen vonden het te langzaam)
 indeling: 0
 taalgebruik: 0 of +
 reacties: +
 bordschrift: - of 0
 tekeningen: - of 0 (moeilijkheid: niet)

Over het algemeen vond men het tempo aan de trage kant en werd er teveel in details getreden.

Hier zal ik dus de volgende keer op letten.

Het handschrift vond men in het algemeen slordig, dit is volgens mij zeer moeilijk te

verbeteren, doch ik zal het proberen. De goede dingen zal ik zoveel mogelijk proberen aan te houden.

Opvallend was overigens dat allen de uitleg zeer duidelijk vonden, hetgeen volgens mij het belangrijkste punt is. Ondanks het lage tempo werd het geloof ik niet saai gevonden hetgeen gelukkig de kritiek een beetje verzacht.

Overigens komen mijn kritische kanttekeningen precies overéén met die van Dhr Kemme."

Het verslag is niet geheel in overeenstemming met de feiten. Ron vermeldt niet dat de presentatie te lang duurde en na 20 minuten is afgebroken, hoewel hij dit wel op zijn eigen enquêteformulier heeft opgeschreven en dit ook bij de opmerkingen van Kemme wordt vermeld:

"Zorg ervoor dat je nooit meer in tijdnood komt (bv. door proef te draaien)."

Aan het eind maakte Ron een wiskundige fout. Hij reageerde daar wel onmiddellijk in zijn eigen enquête op:

"Laatste klopt niet, moest te snel."

In zijn verslag komt dit echter niet terug.

Ron klampt zich erg vast aan de positieve beoordeling van de duidelijkheid van de uitleg. Hij vermeldt dit twee keer met de toevoeging dat dit toch wel het belangrijkste is. Zijn zelfkritiek is mild en leidt niet tot concrete voornemens.

De hoge score op de interactievragen wijzen op een normale interactie. Het zwakke interactiepatroon wordt volledig door de studenten geaccepteerd. Er worden twee opmerkingen over gemaakt in de enquêtes:

"Leuk dat je probeerde een reactie van de groep uit te lokken door een vraag te stellen in de vorm van ziet iemand dat. Je wachtte echter net tekort, naar mijn idee had best iemand mogen antwoorden."

"Vrij goed was het vragen of het duidelijk was."

Ook hieruit blijkt dat het interactiepatroon door de studenten wordt geaccepteerd. Misschien vanuit de gedachte dat de uitleg zo duidelijk was dat er eenvoudigweg niets te vragen viel. Dat de interactie niet functioneel is, valt af te leiden uit de lage score voor het tempo (te traag) in combinatie met de hoge score voor de interactievragen. Bij een functionele interactie treedt er, vanwege de voortdurende terugkoppeling, automatisch een goede afstemming in tempo op tussen spreker en luisteraars.

De tweede presentatie.

Deze presentatie gaat over twee stellingen uit de combinatorische meetkunde: de stelling van Blaschke en de stelling van Krasnoselskii (Cadwell, 1970). Beide stellingen zijn toepassingen van de stelling van Helly over de doorsnede van convexe verzamelingen in het platte vlak.

Het interactiepatroon in deze presentatie is niet opvallend anders dan bij de eerste presentatie. Ron doorspekt zijn verhaal met vragen naar de duidelijkheid en de

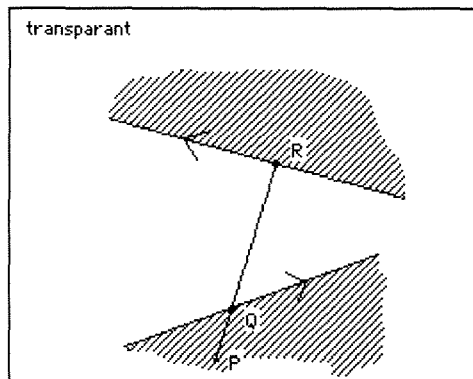
zichtbaarheid van het gepresenteerde. Hij kijkt daarbij wel naar de groep, maar wacht nauwelijks tot er een reactie komt. De vragen zijn bovendien van een toon die niet uitnodigt tot reactie. Het zijn eerder vragenderwijs gestelde mededelingen die aangeven dat er hier iets begrepen moet zijn. Studenten die wat te vragen of op te merken hebben moeten hem onderbreken. Ze doen dat door netjes een vinger op te steken, of door er gewoon maar doorheen te gaan praten. Dit komt in de eerste 15 minuten vijf keer voor.

In de laatste vijf minuten van de presentatie loopt Ron vast. Hij is bezig met een bewijs en komt er bij de laatste stap niet meer uit. Het is een uitgesproken voorbeeld van een mislukte uitleg. Bovendien komt het hele interactiepatroon in een merkwaardig daglicht te staan.

Het gaat om het uitleggen van het bewijs van de volgende stelling: "Als ieder drietal zijden van een stervormig gebied zichtbaar is vanuit een punt, dan is er één punt P waarvanuit alle zijden zichtbaar zijn." In het bewijs wordt bij iedere zijde, via een gekozen omloopsrichting, op een ondubbelzinnige manier een halfvlak gedefinieerd. De voorwaarde van de stelling komt dan overeen met de bewering dat ieder drietal dergelijke halfvlakken een niet lege doorsnede heeft. Het gaat er dan om te bewijzen dat de hele verzameling halfvlakken een niet lege doorsnede met een punt P heeft en dat vanuit dit punt P alle zijden van het stervormig gebied zichtbaar zijn.

Fragment 7.

Ro: [onverstaanbaar] Dan ga ik tenslotte nog aantonen dat ik vanuit dat gevonden gemeenschappelijke punt alle zijden echt kan zien. Die definitie die ik hier gebruikt heb. Als ik dat gedaan heb ben ik klaar.
 Nou dan heb ik eventjes een tekening gemaakt [legt transparant op OH-projector] van een situatie die eigenlijk niet kan optreden. Ik heb een stuk ster getekend waar...
 ...en ik ga eens uit van een zijde waar Q op ligt.



Ik teken daarbij het halfvlak, dat is dat groene hier en het punt P ligt hier dus ergens.

Als ik nou zeg nou ja eh die lijn PQ als ik die doortrekja?

B: Eh je gaat toch altijd rechtsom?

Ro: Rechtsom ja.

hoofdstuk 3

B: Die pijltjes....

Ro: Die staan toch zo naar rechts, we beschouwen toch de rechterkant....

B: Ja maar hoe kunnen die twee lijnen elkaar ontmoeten?

Ro: Ergens zit hier van alles tussen ja.

B: Ja maar [onverstaanbaar] dan ga je linksom.

C: Nee [onverstaanbaar]

Ro: Dat hoeft niet, dat hangt ervan af wat er allemaal tussenzit. Ja? Je weet niet precies wat er tussen zit. Ik heb gewoon twee zijden getekend. Ja? OK Eh ik verbind gewoon PQ en stel dus dat ik ergens een grens van die stervormige figuur snijdt in een punt R. Ik stel gewoon dat dat optreedt. Nou ik weet dat PQ ligt in elk geval binnen de figuur hè. Dat zit hier gewoon aan de rechterkant, dus aan de binnenkant van de figuur. Ja ik eh, bij Q overschrijd ik die grens. Dus dan moet QR er buiten liggen, buiten die ster. Dat ziet iedereen wel? Ja? Als ik dan naar R kijk en ik kijk naar het halfvlak dat erbij hoort, het blauwe halfvlak, dat ligt dus aan een heel andere kant, ver verwijderd van dat groene halfvlak en die twee halfvlakken hebben geen enkel punt gemeen. Dat ziet iedereen ook? Als ik dit zo stel dat die twee halfvlakken geen punt gemeen hebben. Ja? Nou dat is dus een tegenspraak want ik had net gezegd dat al die vlakken hebben allemaal één punt gemeen, namelijk dat punt P waar ik hier vanuit ben gegaan. Dus heb ik hier een tegenspraak bereikt. Deze situatie doet zich helemaal niet voor. Als ik die lijn PQ doortrek dan kom ik helemaal niet meer bij een ander punt van die grens van die stervormige figuur uit.

C: Maar je zei dat die halfvlakken oneindig groot waren, dan kunnen die toch heel veel verder naar rechts door lopen, zoals het er nu uitziet komen ze elkaar nog een keer tegen.

Ro: Dat zou inderdaad kunnen ja. Dat hangt er natuurlijk vanaf wat voor ster ik er nog tussen teken hè.

C: Ja, maar de vlakken lopen door. Die twee vlakken zijn nu, die twee halfvlakken zijn nu bepaald, hoe de ster er verder ook uitziet. Dan komen ze elkaar daar rechts toch tegen?

D: Als die twee doorgetrokken lijnen elkaar ergens daar buiten het raam snijden, dan komen die vlakken ook [onverstaanbaar].

Ro: Dat zou je zeggen hè. [gelach] Ik zit mezelf ook eventjes [gaat zitten] te denken hoe ik hier verder mee aan moet. Is het verhaal verder duidelijk wat ik zeggen wou? Ik wil nu dus beweren dat die twee halfvlakken geen punt gemeen hebben. Dat dat een tegenspraak is [gelach]. Dat is verder duidelijk? [wacht, kijkt, stilte, kijkt naar de figuur] Ik weet eigenlijk niet goed hoe ik daarmee aan moet. Ziet iemand anders dat? [wacht, stilte] Niemand ziet het verder ook? Ik zie het zelf ook niet trouwens, maar eh ... dat is leuk. Ook de intelligentste onder ons... [gelach]. Ja nee, het is wel goed. Ik ben eigenlijk wel klaar, ik zou het echt niet weten hoe ik dat op moet lossen. [wacht] Ja, ik wou het toch maar afsluiten hier. Het is misschien een beetje...

Dit fragment wordt tenslotte afgesloten met een korte discussie tussen Ron en de docent van de cursus over de bedoeling en de aanpak van het laatste gedeelte.

Het laatste gedeelte van de uitleg mislukt volledig. Niemand snapt wat Ron nu eigenlijk wil bewijzen en welke strategie hij daarbij wil volgen.

Het gaat om een bewijs uit het ongerijmde om aan te tonen dat iedere zijde vanuit P te zien is. Het bewijs uit het ongerijmde is een onverwacht element in de uitleg. Omdat de constructie van een halfvlak bij een zijde suggereert dat dat de punten bevat van waaruit de betreffende zijde zichtbaar is, ligt het voor de hand dat vanuit een punt P in de doorsnede van al dergelijke halfvlakken, alle zijden zichtbaar zullen zijn.

De aanname dat er een zijde zou kunnen bestaan die niet vanuit P te zien is, zou moeten impliceren dat er een halfvlak bestaat waar P niet in ligt. In ieder geval ontbreekt

deze lijn van het ongerijmde in het bewijs.

Duidelijk is hier sprake van een mislukte uitleg omdat de docent zelf de draad van het verhaal kwijt raakt. Een dergelijke situatie is niet meer te redden. Is er sprake van een black-out? Heeft Ron zich onvoldoende voorbereid? Raakte hij verstrikt in de logika van het bewijs uit het ongerijmde?

Ron schrijft zelf over deze presentatie:

"Vorbereiding:

Een week van te voren alles grondig doorgenomen en een verdeling gemaakt: Dries §1 t/m §3, Ron §4 t/m §. Maandag voor het seminarium bleek dat Dries 3 §'n teveel vond waarop de verdeling veranderd is: Ik zou §3 en §4 doen.

Voor §3 moest ik derhalve wat extra werk verrichten. Maandagmiddag begonnen met sheets maken en precies opgeschreven wat ik zou gaan vertellen.

Dinsdag heb ik nog één keer proefgedraaid om te zien of ik met de tijd rond zou komen.

Dit leverde verder geen problemen op.

Hierna heb ik alles nog een paar keer grondig doorgenomen.

Gemiddelde:

Verstaanbaarheid: +

Bordindeling: 0 à +

Duidelijkheid: 0

Mog. vragen stellen: 0

OH-projector: 0 à +

Tempo: 0 à +

Indeling: +

Taalgebruik: +

Reacties vd groep: - à +

Bordschrift: - à 0

Bordtek: - à 0

Moeilijkheid: niet

Wat ik erg jammer vind is dat men de uitleg gem met een 0 beoordeelt, hetgeen vooral te wijten is aan het allerlaatste. Toen ik mezelf op de video terugzag vond ik het trouwens nog wel meevallen!

Een probleem blijft mijn handschrift, helaas betekent bij mij netjes schrijven ook langzaam schrijven hetgeen het tempo niet ten goede zou komen.

Overigens was de tijd = 20 min ditmaal geen probleem. Reacties bij de groep uitlokken (= de groep bij het onderwerp betrekken) vond ik erg moeilijk bij dit onderwerp. Tweemaal kreeg ik de opmerking dat ik niet genoeg in de stof zat, hetgeen nu juist niet het geval was. Dit zat hem waarschijnlijk in de uitleg die niet duidelijk genoeg was.

Nogmaals: Toen ik mezelf terugzag op video vond ik dat ik over het algemeen wat te streng ben beoordeeld, zo slecht was het nu ook weer niet.

Hierbij doel ik op de beoordeling na afloop. Gelukkig blijkt uit de gemiddelden dat het nog naar de + kant uitslaat."

Ron is duidelijk aangeslagen door de kritiek, maar weet die niet te accepteren en om te zetten in actiepunten die tot een beter uitleggedrag zouden kunnen leiden.

Ondanks het feit dat er geen duidelijk verschil is in het interactiepatroon in vergelijking met de eerste keer is de waardering van de interactie ten opzichte van de eerste presentatie opvallend lager. Drie toehoorders geven commentaar op deze interactie:

"Je vraagt of er nog vragen zijn op een manier dat iedereen het wel begrijpt. "Dat ziet

iedereen wel hè?" (bijvoorbeeld)"

"Je kunt meer rekening houden met reacties en vragen uitlokken."

"Er waren mensen bij die een poging deden om je wat te vragen. Daar ging je niet op in.

Wat je ging vertellen sloeg niet op de vraag van Piet [=B]."

Analyse.

Er zijn twee mogelijke oorzaken aan te wijzen voor de lagere waardering van de interactie, ondanks het gelijkgebleven patroon.

In de eerste plaats is de cursus al een flink stuk gevorderd en kan er bij de toehoorders een veranderd kwaliteitsbesef zijn ontstaan rondom de eisen die aan de interactie worden gesteld. Met name de drie opmerkingen van de toehoorders wijzen in deze richting.

In de tweede plaats reageren de toehoorders waarschijnlijk sterk op het laatste gedeelte van een presentatie. Vooral vanwege het opvallende karakter. In het laatste fragment doet Ron een sterk en onverwacht beroep op de toehoorders om hem te helpen. Het contrast met het voorgaande is erg groot. Daar mochten toehoorders alleen te kennen geven of ze het wel of niet snapt en werd eigen initiatief niet gestimuleerd. De toehoorders worden hierdoor in een passieve rol gedwongen. Ze volgen de uitleg van Ron stap voor stap maar komen niet tot eigen ideeën. Ze worden daardoor in een bepaalde gedachtenlijn gedwongen. Het blijkt onmogelijk te zijn om dan ineens actief tot eigen ideeën te komen. Dat is jammer, want uit het fragment bij Hennie blijkt dat een verschuiving van een doceer-vorm naar een actieve vorm van zelfdenkzaamheid heel goed mogelijk is in de gegeven situatie.

In beide voordrachten vindt informatie-overdracht plaats door transmissie, hoewel er wel mogelijkheden waren geweest voor een interpreterende aanpak. Na de definitie van inversie was het bijvoorbeeld heel goed mogelijk een uitbreiding van de betekenis van inversie te bewerkstelligen door middel van een interpreterende aanpak waarin de deelnemers zelf op zoek gaan naar de consequenties van de definitie voor verschillende punten. Nu draagt Ron al het feitenmateriaal zelf aan. In het tweede fragment ligt de situatie ingewikkelder. Het zal niet zo gemakkelijk zijn door een interpreterende aanpak een keuze voor een bewijs uit het ongerijmde duidelijk te maken. Bewijzen uit het ongerijmde zijn uitlegsituaties waarom-iets-het-geval-is door te laten zien dat-het logisch omgekeerde-niet-het-geval-kan-zijn. Een ingewikkelde tegenstrijdige situatie die een strakke uitlegstrategie vraagt.

Gezien de reacties van de toehoorders, zijn de grenzen van een normale interactie overschreden. Dat de interactie niet functioneel is, blijkt in het bijzonder uit het laatste gedeelte van de uitleg. Interessant is de vraag of er een samenhang bestaat tussen transmissie en interpretatie enerzijds en normale functionaliteit van de interactie anderzijds.

§ 3.5: INTERAKTIE: EEN TERUGBLIK.

Deze korte paragraaf is een samenvatting en conclusie van de voorgaande drie paragrafen.

In §3.2. is het interactie dilemma geschetst. Het interactie dilemma levert zowel de toehoorder als de spreker argumenten om niet op elkaar te reageren, hoewel daar gezien de situatie wel aanleiding voor zou kunnen zijn. Die situatie kan zich voordoen als gevolg van een bestaand onderwijspatroon waarin interactie tussen spreker en toehoorder ontbreekt. Uit de statistische analyses van de enquêtes van het seminarium blijkt dat dit patroon na 4 presentaties is doorbroken. Sprekers doen pogingen om tijdens de presentatie in contact te komen met de toehoorders. Toehoorders erkennen het belang van een goede interactie. Ze uiten dit door tijdens de presentatie ongevraagd vragen en opmerkingen te maken en door kritischer te reageren in de enquête. De tweede voordracht van Ron toont echter aan dat het dilemma weer in volle hevigheid terug kan keren. De toehoorders kunnen door de docent in een zodanige positie worden gemanoeuvreerd dat de interactie volledig verloren gaat. In dit geval wordt dit veroorzaakt in een situatie waarin de docent de draad van zijn verhaal kwijtraakt en de toehoorders in het voorgaande in een passieve, afhankelijke positie zijn geplaatst zodat ze geen kans zien een helpende hand te bieden.

Verschillen in interactie.

De kwaliteit van een interactie laat zich beschrijven door het 'normaal' zijn en door het 'funktioneel' zijn. 'Normaliteit' is een globaal kenmerk van een situatie. Het wijst niet naar één specifiek interactiepatroon. Een normale interactie is een interactie die als vanzelfsprekend wordt geaccepteerd door spreker en toehoorders. Het betekent dat de verwachtingen van spreker en toehoorder over de interactiepatronen met elkaar in overeenstemming zijn. Dat kan ook een zeer zwakke interactie zijn als gevolg van grote groepen.

Bij een functionele interactie levert de wisselwerking tussen spreker en toehoorder een aanwijsbare positieve bijdrage aan de uitleg.

Normaliteit van een interactie is niet een noodzakelijke voorwaarde voor functionaliteit. In één van de presentaties geeft de spreker een schriftelijke opdracht aan de toehoorders die ter plaatse moet worden gemaakt. Dit was een duidelijke afwijking van het ontstane patroon. In eerste instantie vond men dat vreemd en was er enig verzet. Deze vorm van interactie was op dat ogenblik niet normaal, maar wel functioneel. Achteraf werd het nut van het gebeuren door de toehoorders duidelijk aangegeven.

De waarde van de termen 'normaal' en 'funktioneel' blijkt uit de beschrijving van de vier presentaties. Met name bij de tweede presentatie van Hennie zien we dat de toehoorders gaan meedenken en zelf suggesties gaan leveren. Het is een voortdurend bewijs dat de uitleg op een actieve manier is begrepen.

Bij de voordrachten van Ron speelt de interactie nauwelijks een rol in de uitleg. Hij volgt zijn eigen programma, in zijn eigen tempo. Bij zijn laatste presentatie wordt zelfs de grens van een normale interactie overschreden doordat nu plotseling eisen worden gesteld die niet in het opgebouwde verwachtingspatroon passen. De positieve

waardering van de interactie in de eerste voordracht van Ron, gekoppeld aan een negatieve waardering van het tempo, lijkt een goede indikator te zijn voor het niet functioneel zijn van de interactie.

Funktionele interactie betekent niet dat er ten allen tijde sprake is van een vorm van klassegesprek. In sommige situaties, bijvoorbeeld bij het afleiden van formules, kan het nodig zijn dat de spreker enige tijd alleen aan het woord is. De toehoorder volgt dan de uitleg stap voor stap, passief. Een dergelijke situatie kan door de toehoorders als volstrekt functioneel worden geaccepteerd. Ook in de tweede presentatie van Hennie treedt iets dergelijks op. Belangrijk hierin is evenwel dat ze de overgang aankondigt, heel nadrukkelijk en met redenen omkleed.

Verschillen in inhoud.

Bij de vier bestudeerde presentaties zien we grote verschillen in het leerproces ten aanzien van de interactie.

Er is een verschil in inzet die duidelijk blijkt uit de verschillen in voorbereiding tussen beide personen. Hennie is erop gericht om het zo goed mogelijk te doen. Ze probeert haar verhaal een aantal keren uit, trekt zich de kritiek aan, probeert zich doelbewust te verbeteren. Ron probeert zijn verhaal maar één keer uit, bereidt zich in een laat stadium voor, en reageert defensief op de geuite kritiek.

Er is een verschil in situatie. Doordat Hennie de eerste presentatie houdt en daarbij door gewoonte een zwak interactiepatroon vertoont, wordt ze hard met dit feit geconfronteerd. Ron weet dat een zekere interactie van hem verwacht wordt, hij bouwt een patroon op dat uiterlijk aan die verwachtingen voldoet en weet zo nog redelijk te scoren op deze variabele. Daardoor is het een niet zo zwaar kritiekpunt en zal hij zich daar bij zijn tweede presentatie niet zo op voorbereiden als Hennie.

Er is ook een duidelijk verschil in inhoud tussen de vier presentaties.

In de eerste presentatie van Hennie gaat het om een aantal stellingen uit de vlakke meetkunde. De bewijzen hebben het karakter van een waarom-uitleg, waarbij de dwingende reden wordt gevormd door samengestelde logische argumenten. De volgorde en de samenhang van de argumenten is belangrijk en vraagt om een strakke organisatie van de uitleg. De gehanteerde begrippen zijn duidelijk gedefinieerd. Hierdoor ontstaat bijna vanzelfsprekend een situatie waarin de leerstof van grote invloed is op het onderwijsgedrag van de docente.

In de tweede presentatie van Hennie gaat het in eerste instantie om de definitie van het begrip 'regelmatig veelvlak'. Dat is een uitleg wat een regelmatig veelvlak is. Daarbij kan ze een beroep doen op reeds aanwezige vage noties bij de toehoorders. Daarbij worden bekende woorden ('regelmatig', 'veelvlak') van een nieuwe betekenis voorzien. Het is een interpreterende uitleg. Een exakt wiskundige omschrijving is moeilijk te geven en is niet in overeenstemming met het vervolg van de uitleg. Bij de formele afleidingen van de relaties die gelden tussen het aantal vlakken dat in een hoekpunt samenkomt en het aantal zijden van een vlak, ligt de inhoud van de uitleg weer wel heel ondubbelzinnig vast. Hier laat Hennie zich volledig door de inhoud leiden.

Kennisoverdracht vindt plaats door transmissie.

Ook de eerste voordracht van Ron heeft betrekking op een definitie van het nieuwe

begrip inversie. Hoewel de elementen (cirkel, straal, afstand) waaruit 'inversie' is opgebouwd goed bekend zijn bij de luisteraars, is het idee om op deze wijze een transformatie in het vlak te definiëren volstrekt nieuw. Het is een uitleg door synthese: bekende elementen worden in een nieuwe samenhang aan elkaar gekoppeld tot een nieuw begrip. De betekenisverwerving van het begrip inversie heeft twee fasen: uitleggen hoe je een inversie kunt uitvoeren gevolgd door het uitleggen wat het effect is van inversie op diverse figuren in het vlak. De verwijzing van 'inversie' is een verwijzing naar de handeling en een verwijzing naar het effect van die handeling. Die dubbele verwijzing komt in de dubbele uitleg tot uitdrukking. Bij de eerste uitleg is er sprake van een onbekende handeling en ligt het voor de hand dat kennisoverdracht door transmissie zal plaatsvinden. Bij de tweede uitleg beschikt de toehoorder echter over alle elementen om zelf het verschijnsel te kunnen onderzoeken. Dit laat ook een interpreterende uitleg toe.

De laatste presentatie van Ron betreft een vorm van meetkunde die volstrekt nieuw is voor de toehoorders. Het gaat om bewijzen van stellingen via combinatorische redeneringen aan verzamelingen van convexe vlakke figuren. De logische ordening en samenhang is weer van essentieel belang. Het is onredelijk te verwachten dat de toehoorder zelf tot een bewijs zal komen. In een dergelijke situatie zal een beroep op de toehoorder om een vastgelopen docent te helpen, weinig succes hebben.

§3.6: MOEILIKHEID EN DUIDELIJKHEID.

Hoe beoordeelt een luisteraar de moeilijkheidsgraad van een uitleg? Hoe gemakkelijker het onderwerp, hoe duidelijker de uitleg? Of is het andersom: hoe duidelijker de uitleg, hoe gemakkelijker het onderwerp? Of is het een 'kip en ei'-kwestie waarvan je nooit kunt aangeven wat oorzaak en wat gevolg is?

De moeilijkheidsgraad van een onderwerp is een waardering die wordt toegekend aan een onderwerp nadat er iets over is uitgelegd (schriftelijk of mondeling of beide). Die waardering zal dus in het algemeen sterk afhankelijk kunnen zijn van de kwaliteit van de uitleg; zeker als het een nieuw onderwerp is. Vanuit dat gezichtspunt zal na een onduidelijke uitleg het onderwerp vaker moeilijk gevonden worden dan na een duidelijke uitleg.

Maar wat is een duidelijke uitleg? In het algemeen zal een uitleg duidelijk worden gevonden als die goed is begrepen. Dan is het onderwerp niet langer moeilijk meer. De moeilijkheden zijn juist door de uitleg opgelost. Een gemakkelijk onderwerp zal dus vaker worden geassocieerd met een duidelijke uitleg.

In de situatie van beoordelend luisteraar is dus te verwachten dat beide oordelen elkaar zullen beïnvloeden.

Door de enquête van het seminarium kunnen we op systematische wijze het verband onderzoeken tussen de waarderingen over de duidelijkheid van een uitleg en de moeilijkheid van het onderwerp. In de volgende kruistabel zijn de resultaten in absolute aantallen van beide vragen weergegeven:

		duidelijkheid			
		-		+	
moeilijkheid	wel	5	30	12	47
	moeilijk	5	47	47	99
	niet	4	17	41	62
		14	94	100	208

Kruistabel van studenten waardering

In percentages ziet de verdeling er als volgt uit:

		duidelijkheid			
		-		+	
moeilijkheid	wel	2	14	6	22
	moeilijk	2	23	23	48
	niet	2	8	20	30
		7	45	48	100

Kruistabel van studenten waardering
(in percentages).

We zien een duidelijk zwaarder gewicht in de rechterbenedenhoek. Door te kijken naar de kruistabel waarbij de rijen respectievelijk de kolommen op 100% zijn gezet,

ontstaat een meer gedetailleerd beeld van de relatie tussen moeilijkheid en duidelijkheid.

		duidelijkheid			
		-		+	
moeilijkheid	wel	11	64	26	100
	moeilijk	5	47	47	100
	niet	6	27	66	100
		22	138	139	

Kruistabel horizontaal op 100%

		duidelijkheid			
		-		+	
moeilijkheid	wel	36	32	12	80
	moeilijk	36	50	47	133
	niet	28	18	41	87
		100	100	100	

Kruistabel vertikaal op 100%

Iedere cel komt overeen met een uitspraak over het verband tussen moeilijkheid en duidelijkheid. Omdat de interpretatie van de tussengebieden nogal onzuiver is doordat die ook de categorie 'geen mening' kan bevatten, kijken we alleen naar de uitgesproken beweringen. Dit levert het volgende overzicht:

- B1:** Als het onderwerp niet moeilijk gevonden wordt, wordt de uitleg duidelijk gevonden. (66%)
- B2:** Als het onderwerp niet moeilijk gevonden wordt, wordt de uitleg onduidelijk gevonden. (6%)
- B3:** Als het onderwerp moeilijk gevonden wordt, wordt de uitleg onduidelijk gevonden. (11%)
- B4:** Als het onderwerp moeilijk gevonden wordt, wordt de uitleg duidelijk gevonden. (26%)
- B5:** Als de uitleg duidelijk gevonden wordt, wordt het onderwerp niet moeilijk gevonden. (41%)
- B6:** Als de uitleg duidelijk gevonden wordt, wordt het onderwerp moeilijk gevonden. (12%)
- B7:** Als de uitleg onduidelijk gevonden wordt, wordt het onderwerp moeilijk gevonden. (36%)
- B8:** Als de uitleg onduidelijk gevonden wordt, wordt het onderwerp niet moeilijk gevonden. (28%)

Uit dit overzicht blijkt een opvallende voorkeur voor bewering B1 met bewering B5 als tweede. Deze voorkeur gaat ten koste van de beweringen B2 en B6.

In deze situatie, waarin de toehoorders zich alleen maar een beeld kunnen vormen over de moeilijkheidsgraad van een onderwerp aan de hand van een gegeven uitleg, zou men ook een verband verwachten tussen het moeilijk zijn van het onderwerp en

het niet duidelijk zijn van de uitleg (B3 en B7). Dat laatste treedt dus niet op. Wel zien we een hoge score in de middencategorie bij een moeilijk onderwerp.

Een mogelijke verklaring voor dit verschijnsel is dat de moeilijkheids-graad meer van invloed is op de spreker dan op de toehoorder. Een toehoorder heeft meer afstand tot het onderwerp. Een toehoorder kan het besef hebben dat het onderwerp gemakkelijk is ondanks een gebrekkige uitleg die maar half is begrepen of dat het onderwerp moeilijk is zelfs bij een glasheldere uitleg daarover. Belangrijk hierin is de konstatering dat de toehoorder zich ondanks een duidelijke of onduidelijke uitleg een onafhankelijk beeld over de moeilijkheidsgraad kan vormen.

In §1.8. zijn een aantal inhoudelijke criteria afgeleid voor moeilijkheid van onderwerp en duidelijkheid van uitleg. Het gevonden positieve verband tussen het niet moeilijk worden gevonden van het onderwerp en de duidelijkheid van de uitleg, suggereert een oorzakelijk verband tussen niet-moeilijke onderwerpen en duidelijke uitleggen. Daarmee doet zich onmiddellijk de vraag voor of dit oorzakelijke verband kan worden teruggevonden. In de volgende paragraaf zullen de 4 uitleggen van Hennie en Ron hierop nader worden onderzocht.

§ 3.7. MOEILIKHEID EN DUIDELIJKHEID IN 4 FRAGMENTEN.

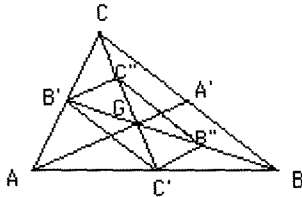
In deze paragraaf wordt moeilijkheidsgraad van de vier fragmenten van Hennie en Ron geanalyseerd. We bekijken daarbij de moeilijkheidsgraad van de gegeven uitleg vanuit de in §1.8. afgeleide kenmerken.

Fragment 3 (§3.3).

De uitleg wordt door de toehoorders duidelijk en niet moeilijk gevonden.

In dit fragment bewijst Hennie dat het zwaartepunt in een driehoek de zwaartelijnen in de verhouding 1:2 verdeelt. Dit is één zinnetje in Coxeter (1961) als een onderdeel van de uitleg dat het hoogtepunt, het zwaartepunt en het middelpunt van de omgeschreven cirkel op één lijn (de Euler-lijn) ligt. De gehanteerde begrippen zijn: driehoek, lijnstuk, hoekpunten, zwaartelijnen, zwaartepunt, parallellogram, diagonalen, evenlang zijn, evenwijdig zijn en doormidden snijden. Voor de toehoorders zijn dit allemaal bekende begrippen uit de vlakke meetkunde. Ze maakt gebruik van een bekende eigenschap van de middenparallel in een driehoek. Er worden geen nieuwe begrippen of resultaten ingevoerd. Uit de samenvatting van dit fragment blijkt hoe de onderdelen van de uitleg in een logische samenhang staan.

Samenvatting fragment 3.



Definitie zwaartepunt.

Uitleg dat het zwaartepunt de zwaartelijnen op een derde deelt.

Keuze van B'' en C'' halverwege GC en GB.

Uitleg dat C'B'C'' een parallellogram is.

Uitleg dat C'B' evenwijdig is met BC en de helft daarvan.

C' ligt op de helft van AB

B' ligt op de helft van AC

Uitleg dat C''B'' evenwijdig is met BC en de helft daarvan.

C'' ligt op de helft van GB

B'' ligt op de helft van GC

In een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor.

C'G is evenlang als GC''.

GC'' is evenlang als C''C.

In de samenvatting is terwille van het overzicht afgezien van de chronologische volgorde. Hennie geeft soms de argumenten vóór de conclusie, soms wordt de conclusie gevolgd door de argumenten. De (logische) gelaagdheid heeft in dit fragment een diepte 3. Zonder ze te vermelden gebruikt Hennie de algemene eigenschappen

dat de zwaartelijnen door één punt gaan en dat de middenparallel in een driehoek evenwijdig is met de overstaande zijde en de helft daarvan. Het is vanzelfsprekende achtergrond-informatie die sterk door de figuur wordt ondersteund. Het ontbreken van deze expliciete informatie is allerm minst storend. Integendeel het vermijden ervan zou de uitleg door een teveel aan vanzelfsprekende details kunnen bemoeilijken. Samengevat zien we dat het fragment een lage moeilijkheidsgraad heeft: het bevat geen nieuwe elementen, ondanks de gelaagde logische samenhang blijft, mede door een goede keuze van de achtergrondinformatie, een goed overzicht mogelijk.

Wat opvalt bij fragment 3 is de duidelijkheid in structuur van de uitleg en de duidelijkheid van de gehanteerde terminologie. Hennie geeft bij iedere overgang aan wat ze van plan is te gaan doen. Dat zijn de volgende zinnen:

"Nou wou ik even iets vertellen over het zwaartepunt. Iedereen kent dat wel maar ik vertel het toch even."

"Het zwaartepunt deelt die zwaartelijn op een derde. Ik zal dat even kort uitleggen."

Ze vertelt ook wanneer ze klaar is:

"...die stukken zijn allemaal gelijk dus het zwaartepunt deelt de zwaartelijn in drieën althans verdeelt het op een derde."

Dit betekent dat ze duidelijkheid schept op een interlokaal niveau.

Ook is er duidelijkheid op lokaal niveau. De door haar gehanteerde terminologie is ondubbelzinnig in de gegeven situatie. Iedereen weet wat er bedoeld wordt met 'zwaartelijn', 'evenwijdig',... (duidelijkheid op lokaal niveau).

Het fragment is zo kort, dat het doel van de uitleg in zicht blijft. Dit impliceert een duidelijkheid op globaal niveau.

Fragment 4 (§3.3).

De uitleg wordt door de toehoorders zeer duidelijk en niet zo moeilijk ervaren. Hennie wijkt in haar aanpak sterk af van de introductie die Coxeter (1961) geeft. Daarin worden in hoog tempo definities van convexe, uniform, regulier afgewisseld met bekende voorbeelden en historische gegevens. Hennie laat een aantal voorbeelden zien. Naar aanleiding daarvan ontstaat een discussie waarin de kenmerkende criteria zichtbaar worden. De getoonde voorbeelden zijn niet nieuw voor de toehoorders. Wel nieuw is het idee dat alle hoekpunten met elkaar 'congruent' zijn en dat je daarbij moet letten op het aantal vlakken dat in een hoekpunt samenkomt en dat het veelvlak in alle standen dezelfde uiterlijke vorm heeft. Daarmee introduceert Hennie een nieuwe manier van kijken naar bekende objecten. De uitleg is tevens een opstap naar de introductie van de Schäfli symbolen $\{p,q\}$ die aangeven dat er q regelmatige p -hoeken in ieder hoekpunt samenkomen. Uit de samenvatting blijkt weer de mate van gelaagdheid van de uitleg.

Samenvatting fragment 4.

Inventarisatie van convexe viervlakken.

Laat kubus zien.

Laat viervlak zien.

Laat twaalfvlak zien.

In ieder hoekpunt van de getoonde voorbeelden komen drie zijden bijeen.

Bij een viervlak zijn dat driehoeken.
Bij een kubus zijn dat vierkanten.
Bij een twaalfvlak zijn dat vijfhoeken.

Laat achthoek zien.

In ieder hoekpunt komen 4 driehoeken bij elkaar.
Een achthoek is de 'omgekeerde' van een kubus.
Alle hoekpunten zijn congruent met elkaar [door in verschillende standen te houden].

Laat twintig-hoek zien.

In ieder hoekpunt komen 5 driehoeken bij elkaar.
Alle hoekpunten zijn congruent met elkaar.

Twee viervlakken tegen elkaar zijn geen regelmatig veelvlak.

Niet alle hoekpunten zijn congruent met elkaar.

Zijn er nog meer regelmatige veelvlakken?

De samenhang van de uitleg is chronologisch van aard. Door een subtiele keuze van de eerste drie voorbeelden die een gemeenschappelijk kenmerk hebben weet Hennie de aandacht te richten op het tellen van het aantal vlakken dat in een hoekpunt samenkomt. Daarmee introduceert ze een nieuwe analytische manier van kijken naar veelvlakken. Het levert een criterium op om te beoordelen of een veelvlak regulier is. Dit nieuwe element is zó harmonisch verweven met de hele aanpak, dat het geen enkel probleem oplevert.

Samengevat zien we dat de uitleg een lage moeilijkheidsgraad heeft door de geringe gelaagdheid van de samenhang en de harmonische introductie van nieuwe gezichtspunten.

In dit fragment ontstaat de duidelijkheid door de aanwezigheid van de concrete modellen. Daardoor kan er geen misverstand ontstaan over de door Hennie gebruikte terminologie. Ze kan direkt aanwijzen wat ze bedoelt. Dat geldt in het bijzonder voor het tellen van het aantal vlakken dat in een hoekpunt samenkomt, het aanwijzen van de regelmatige veelhoeken waaruit het veelvlak is opgebouwd en het demonstreren van het regelmatig door het draaien van het voorwerp (lokale duidelijkheid). Daarnaast bezit haar uitleg een voor de toehoorder herkenbare opbouw: ze laat steeds meer voorbeelden zien en demonstreert daaraan wat nu essentieel is aan het regelmatig zijn (globale duidelijkheid).

Ze weet ook een duidelijkheid op interlokaal niveau te geven. Niet alleen geeft ze de overgangen goed aan, ze vertelt er ook bij waarom ze naar een andere werkvorm overgaat (zie laatste opmerking van fragment 5).

Fragment 6 (§3.4).

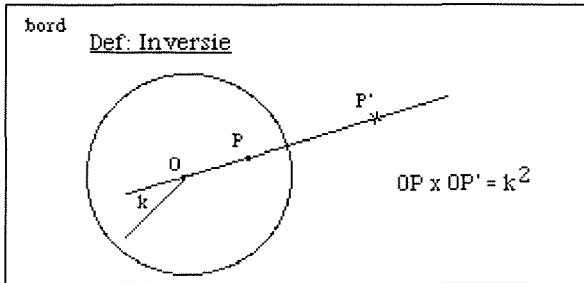
De uitleg wordt door de toehoorders duidelijk en niet moeilijk gevonden.

De uitleg sluit aan op de definitie van inversie zoals die in Coxeter (1961) wordt gegeven. Coxeter geeft eerst een stukje geschiedenis en geeft een globale karakterisering door de analogie met de spiegeling. Vervolgens wordt de definiërende vergelijking gegeven en worden enkele gevolgen daarvan vermeld.

Ron geeft een aktiegerichte beschrijving van inversie. Hij laat door tekenen zien hoe het

beeldpunt bij een gegeven punt ontstaat. Daarna volgen enkele eigenschappen van de afbeelding. Dit zijn niet dezelfde eigenschappen zoals die door Coxeter zijn gegeven.

Samenvatting fragment 6.



Uitleg wat inversie is.

Tekent cirkel met straal k en middelpunt O .

Tekent een punt P in de cirkel.

Tekent lijn door O en P .

Tekent P' op de lijn buiten de cirkel.

P' moet voldoen aan $OP \times OP' = k^2$.

Er is nog een punt P' dat aan de voorwaarde kan voldoen.

Uitleg dat P' niet is gedefinieerd als P in O wordt gekozen.

$PO = 0$ levert geen oplossing van de vergelijking.

Uitleg dat de periode 2 is.

Als je dan met P' begint, kom je weer op P terecht.

Inversie is een nieuw woord voor de toehoorders. Het verwijst naar een handeling die toegepast wordt op bekende concrete objecten. Aldus kan de toehoorder zich snel een voorstelling vormen van inversie als een methode om vanuit een punt in het vlak een ander beeldpunt te bepalen. De handeling heeft echter een geïsoleerd karakter doordat er geen relatie gelegd wordt met andere bekende transformaties in de vlakke meetkunde. De samenhang van de uitleg is sterk chronologisch. Dat wordt met name door het handelingskarakter in de hand gewerkt. Alles bij elkaar genomen zal dit uitlegfragment een lage moeilijkheidsgraad hebben ondanks het nieuwe karakter van het onderwerp.

De definitie van inversie in dit fragment heeft het karakter van een chronologische instructie. Dat geeft een groot houvast aan de toehoorder omtrent het verwachte begrijpende gedrag: ze hebben begrepen wat inversie is als ze de handeling zelf ook kunnen uitvoeren. De figuur op het bord geeft een ondubbelzinnige betekenis aan de gebruikte terminologie in deze situatie (lokale duidelijkheid).

Door het onderscheid dat Ron maakt tussen de definitie en de gevolgen van de definitie voor speciaal gekozen punten ontstaat een globale duidelijkheid. Ieder

fragment wordt daarbij begrensd door een vraag of een opmerking:

"Ja, ik zal nu de definitie van inversie maar geven."

"Dat ziet iedereen wel hoop ik hè."

"Eh wat zien we hieraan?"

"Wat zien we nog meer?"

De overgang van definitie naar een onderzoek van de gevolgen van de definitie is voor de toehoorders een heel gebruikelijke en vanzelfsprekende overgang. Daarmee is er voldoende interlokale duidelijkheid aanwezig.

Fragment 7 (§3.4).

De uitleg wordt door de studenten niet zo duidelijk en niet zo moeilijk gevonden.

Het is moeilijk om bij een mislukte uitleg de moeilijkheidsgraad van het onderwerp aan te geven. Bij het bepalen van de moeilijkheidsgraad beperken we ons echter tot een strikte inhoudelijke analyse. Daardoor wordt het misschien mogelijk het mislukken van de uitleg te verklaren vanuit andere oorzaken dan een te hoge moeilijkheidsgraad.

De wiskundige situatie van dit fragment speelt zich af in zogenaamde stervormige gebieden. Voor de meeste toehoorders van de presentatie zal dit een nieuw begrip zijn. Cadwell (1970), de basistekst voor de voordracht, definieert stervormig aldus:

"We gaan ons bezig houden met niet-convexe veelhoeken die stervormig zijn met betrekking tot een inwendig punt P. Dat betekent dat we alle volledige zijden vanuit P kunnen zien; of dat, als we P met een willekeurig punt Q van de rand in figuur 5(a) verbinden, de halfrechte PQ de veelhoek niet nog eens snijdt."

De tweede figuur laat een gebied zien dat geen enkel punt bezit met betrekking waartoe het stervormig is. De driehoeken die door de gestippelde lijnen zijn ontstaan, zouden ieder een punt moeten bevatten van waaruit alle zijden te zien zouden zijn, maar ze hebben een lege doorsnede.

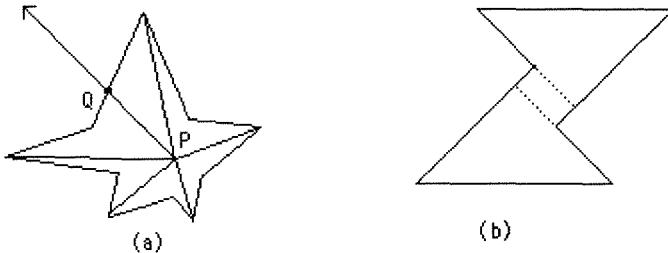
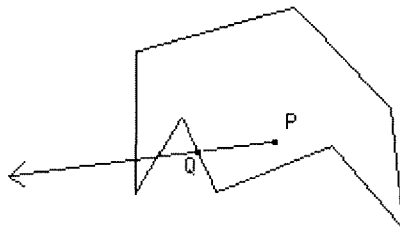


Fig. 5.

In de definitie wordt aan het suggestieve woord 'stervormig' een specifieke betekenis gegeven. In de eerste plaats wordt de eigenschap verbonden met het bestaan van een inwendig punt P in de figuur. Daarmee wordt een existentiële kwantor in de definitie ingevoerd. Vervolgens moeten vanuit dit punt alle zijden te 'zien zijn'. Dit is een verwijzing naar een concreet waarneembare context. Hiermee krijgt het woord 'stervormig' (=iets dat op een ster lijkt) een heel andere verwijzing en worden figuren stervormig genoemd die misschien helemaal niet meer zo op een ster lijken. De visuele betekenis van het woord verschuift naar een karakterisering op basis van een

waarneembaar verifieerbare eigenschap. Het 'stervormig-zijn' wordt niet langer meer gekenmerkt door een verzameling van figuren die min of meer op elkaar lijken, maar door het bestaan van een eigenschap waaraan de figuur moet voldoen. De kenmerkende eigenschap is echter wiskundig niet te verifiëren. Hoe kun je 'zien' dat een zijde helemaal zichtbaar is? De volgende stap is een vertaling naar een wiskundig verifieerbare karakterisering: "Verbindt het punt P met een willekeurig punt op een zijde en ga na of de halfrechte PQ de figuur niet nog eens snijdt." Hiermee is een ondubbelzinnig meetkundig criterium gegeven. Het verband met het eerder geformuleerde criterium is echter niet meteen duidelijk. De halfrechte PQ suggereert een soort lichtstraal vanuit P naar een zijde waarop Q ligt. Die zijde kan best helemaal vanuit P verlicht worden terwijl de lichtstraal verderop nog eens het stervormige gebied treft. De essentie is nu dat die tweede zijde niet meer vanuit P zichtbaar is, omdat die 'in de schaduw ligt' van de zijde waarop Q ligt.



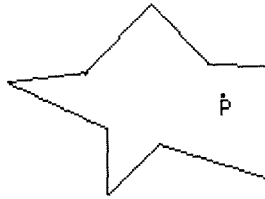
Figuur 5(b) is bedoeld als een non-voorbeeld van een stervormig gebied. De verklaring in de laatste zin is niet rechtstreeks duidelijk. Er ontbreken een paar stappen. Een driehoek is stervormig vanuit een punt in zijn inwendige. De figuur bevat twee driehoeken. Een dergelijk punt voor de hele figuur zou dus in beide driehoeken moeten liggen, maar dat kan niet want hun doorsnede is leeg.

De definitie legt een verbinding tussen bekende, herkenbare objecten maar doet dit op een niet vanzelfsprekende manier. Allereerst wordt het stervormig-zijn afhankelijk gesteld van het bestaan van een geschikt punt P terwijl het bekende woordgebruik verwijst naar een totale eigenschap van een figuur. In de tweede plaats strookt de waarneembare karakterisering niet rechtstreeks met de meetkundige karakterisering. Bovendien leidt het gegeven non-voorbeeld niet rechtstreeks tot een aanvullende betekenis. Deze factoren verhogen de moeilijkheidsgraad van de definitie.

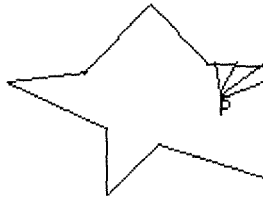
Ron presenteert de definitie als volgt:

Fragment 8.

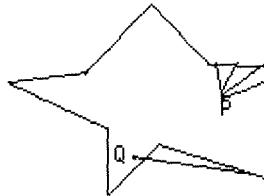
Ro: Laat ik maar eens een of andere mooie stervormige figuur tekenen. [Tekent]



'Ster' moet je dus in de ruime zin des woords zien. Ik heb even een begrip nodig wat het wil zeggen dat ik een zijde kan zien vanuit een bepaald punt P. Hoe definieer ik dat? Ik zeg dat ik dit stukje zijde hier [tekent] kan zien vanuit P als ik de lijn, de verbindingslijnen naar alle punten op die lijn, dat stukje van die ster [wijst zijde boven P aan], dat die al die lijnstukjes die ster maar één keer snijden.



Dus ze snijden hem hiervoor ergens of daarachter. Ja? Ik bedoel daar dus mee: als ik hier ga zitten, dit punt Q [tekent] kan ik dit lijnstuk kan ik niet zien. Als ik die rechtstreeks ga verbinden, kom ik hier al in de problemen, dan snij ik hier de ster eerder. Dat wil ik niet hebben ja?



A: Hij mag hem ook niet buiten nog snijden? Dus het lijntje dat rechts ligt bij Q zou je ook niet

Ro: Rechts ligt bij Q. Je bedoelt deze [wijst zijde onder Q aan]?

A: Ja, die kun je dus wel zien?

Ro: Die mag ik ook niet zien. Ik mag hem niet eerder snijden maar...

A: Maar ook niet later.

Ro:...maar ook niet later. Ja? OK. Nou zal ik eens eventjes de stelling opzoeken. Oh ja, ik ben nog één ding vergeten. Als ik alle zijden kan zien vanuit een bepaald punt P, dan pas noem ik die figuur stervormig ten op zichte van P. Dat is gewoon de naam die je eraan geeft. OK.

Ron wijkt nogal af van het boek bij zijn definitie. Allereerst geeft hij een defintie in twee fasen. Eerst definieert hij wat het wil zeggen dat een zijde zichtbaar is vanuit een punt. Hij gebruikt daarbij een soort lichtstraal idee: de verbindingslijntjes vanuit P

mogen de ster maar één keer snijden. Hij suggereert echter dat dat voor alle lijnstukjes moet gelden. Dit kan de vraag van A verklaren bij het tegenvoorbeeld Q: ze mogen de ster niet eerder maar ook niet later snijden. In tweede instantie definieert hij het stervormig zijn als het zichtbaar zijn van alle zijden vanuit één punt. De halfrechte van Cadwell komt in de definitie van Ron niet voor. Evenmin het nonvoorbeeld. Wat overblijft is een criterium van zichtbaarheid dat gekoppeld is aan lijnstukjes die vanuit een punt P naar de rand lopen en de ster maar één keer snijden. De definitie van Ron sluit daarmee goed aan bij bekende objecten. Er is een logische samenhang in twee fasen. Dit maakt de definitie niet moeilijk. Deze keuze komt hem in het vervolg echter duur te staan.

Het bewijs van de stelling gaat in Cadwell als volgt:

"In figuur 6(a) kiezen we een rotatie-richting met de wijzers van de klok mee, zodat het inwendige rechts van iedere zijde ligt. Met iedere zijde correspondeert het halfvlak aan de rechterkant; in de figuur is er een gearceerd. Deze halfvlakken zijn onbegrensde convexe gebieden. Een punt van waaruit een zijde te zien is moet in het halfvlak liggen

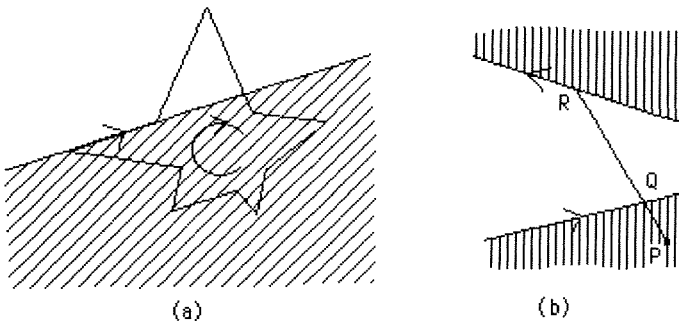


Fig. 6.

dat bij die zijde hoort. Dus elk drietal halfvlakken heeft een gemeenschappelijk punt. Daaruit volgt dat ze allemaal een gemeenschappelijk punt P hebben. Het is gemakkelijk te bewijzen dat P in de veelhoek ligt. We zullen laten zien dat de straal PQ geen andere doorsnijding dan Q met de rand kan hebben, dat wil zeggen dat alle zijden te zien zijn vanuit P.

Het bewijs gaat uit het ongerijmde: neem aan dat PQ de rand nog eens in R snijdt. In figuur 6(b) is er geen ander punt van de rand tussen Q en R gegeven. Dus QR ligt buiten de veelhoek, en het halfvlak bij de zijde waar R op ligt, ligt aan de andere kant van R ten opzichte van Q. Maar dit betekent dat P niet daarin kan liggen, een tegenspraak. Stel dat er andere punten tussen Q en R in liggen; stel dat S dat punt is dat het dichtst bij Q ligt. Op precies dezelfde manier geldt nu dat P niet in het halfvlak kan liggen dat bij de zijde hoort waar S op ligt.

Het bewijs laat zich als volgt samenvatten:

Met iedere zijde van de veelhoek correspondeert een halfvlak dat de veelhoek bevat.

Alle halfvlakken hebben een niet lege doorsnede P.

Ieder drietal halfvlakken heeft een niet-lege doorsnede.

Een punt van waaruit een zijde te zien is, ligt in het halfvlak bij die zijde.

Een halfvlak is een onbegrensd convex gebied.

P ligt binnen de veelhoek.

Vanuit P zijn alle zijden te zien.

Als er een zijde is die niet vanuit P te zien is dan is er een halfvlak waar P niet in ligt.

Er is een punt R op de rand en op de halfrechte PQ.

Als RQ buiten de veelhoek ligt dan ligt P niet in het halfvlak dat bij R hoort.

Als S een punt op de rand is, op de halfrechte, het dichtste bij Q, dan ligt P niet in het halfvlak dat bij S hoort.

Het bewijs heeft een logische samenhang van diepte 3. Essentieel is het gebruik van de wiskundige definitie van zichtbaarheid van een zijde vanuit een punt. Dat impliceert het bestaan van een punt R op de halfrechte door PQ.

Het bewijs bevat nogal wat niet vermelde achtergrondinformatie. Er wordt er een beroep gedaan op de zichtbaarheid vanuit een inwendig punt (volgens definitie); op de mogelijkheid om iedere veelhoek van een ondubbelzinnige oriëntatie te kunnen voorzien; op de stelling van Helley die in de voorgaande paragrafen is behandeld en die het bestaan van het punt P garandeert; op het vermogen van de lezer om zelf aan te tonen dat P binnen de veelhoek ligt, op het bestaan van het meest nabije punt S. De laatste stap, waarbij het meest nabije punt S wordt gekozen, lijkt overbodig. Waarom aan R niet meteen de eis gesteld dat dit het meest nabije punt is met de eigenschap.

Samen met het karakter van een ongerijmd bewijs, geeft dit een hoge moeilijkheidsgraad voor de toehoorders van de presentatie.

In fragment 8 legt Ron uit waarom vanuit P alle zijden zichtbaar zijn. Dit komt overeen met het bewijs uit het ongerijmde in Cadwell. In het voorgaande heeft Ron de lijn van Cadwell gevolgd en is gekomen tot het bewijs van het bestaan van een punt P.

Samenvatting fragment 8.

Uitleg waarom vanuit P alle zijden te zien zijn.

PQ snijdt de rand in R (tekening)

Lopen die pijlen wel goed?

QR ligt buiten de ster.

De twee halfvlakken hebben geen punt gemeen.

Tegenspraak met de eigenschap van P.

Punt R bestaat niet.

De twee halfvlakken snijden elkaar wel (zie tekening).

Vanuit de definitie die Ron heeft gegeven voor zichtbaar zijn van een zijde is de uitleg niet te volgen. De eerste stap in zijn uitleg sluit rechtstreeks aan bij de definitie van Cadwell. Er is geen direkt logisch verband tussen deze eerste stap en de definitie van Ron. De tekening schept onmiddellijk verwarring. Waarschijnlijk is dit een gevolg van de gebrekkige definitie van omloopsrichting in het voorgaande. Bovendien komt de

tekening te vroeg. Het feit dat de pijl bij R naar links wijst is een logisch gevolg van het feit dat aangenomen is dat QR buiten het gebied ligt. Bij Ron komt die mededeling als afgeleide uit de figuur. Ron concludeert dat de twee halfvlakken geen punt gemeen hebben. Uit de figuur blijkt dat dat wel degelijk het geval kan zijn. Dat levert ook geen probleem op. Het gaat er om dat het punt P niet in het halfvlak bij R kan liggen. Uit deze analyse blijkt dat de uitleg voor de toehoorders geen logische en geen chronologische samenhang bevat. De uitleg is een onsamenhangende verzameling van citaten uit Cadwell. Daardoor is de moeilijkheidsgraad zeer hoog is. Waarschijnlijk heeft Ron zich laten overvallen door de moeilijkheidsgraad van het bewijs in Cadwell en heeft hij niet de moeite genomen voor zichzelf een zorgvuldige reconstructie van het bewijs te maken. Deze constatering staat in een schril contrast met het oordeel van de toehoorders die de uitleg niet zo moeilijk vonden.

Wat gaat er mis ten aanzien van de duidelijkheid? In de eerste plaats is er onduidelijkheid op lokaal niveau:

-Er heerst verwarring over de term 'rechtsom'. In het voorgaande heeft Ron een omloopsrichting gedefinieerd in een veelhoek. Waarschijnlijk is dat niet duidelijk genoeg gebeurd.

-Ron trekt een conclusie die rechtstreeks in tegenspraak is met de tekening: "de halfvlakken bij Q en R kunnen geen punt gemeenschappelijk hebben".

Er is onduidelijkheid op interlokaal niveau door de onduidelijkheid over de structuur van het bewijs uit het ongerijmde. Wat wordt er precies aangenomen en hoe volgt daaruit een tegenspraak? Ook het ontbreken van informatie om de samenhang te kunnen herkennen is voor deze onduidelijkheid verantwoordelijk.

Tenslotte is er onduidelijkheid op globaal niveau doordat de verwachtingen die Ron stelt ten aanzien van het gedrag van de toehoorders onduidelijk worden. In het voorgaande mochten ze alleen maar opletten en ja knikken als ze het begrepen hadden, nu 'mogen' zij het bewijs op de goede manier afmaken.

In dit laatste fragment wordt zichtbaar dat het oordeel van de toehoorders niet strookt met de inhoudelijke waardering van de moeilijkheidsgraad van het onderwerp.

Ondanks de gesignaleerde onduidelijkheden en inhoudelijke moeilijkheden, ervaren de toehoorders toch dat het onderwerp niet moeilijk is. Misschien suggereert de vraagstelling eerder een oordeel over de moeilijkheidsgraad van het gehele onderwerp dan over de gegeven uitleg. De reactie kan dan worden verklaard uit het gegeven dat het hier gaat over elementaire meetkundige verzamelingen in het platte vlak.

§ 3.8. MOEILIJK EN/OF DUIDELIJK: EEN TERUGBLIK.

In §3.6 een verband geconstateerd tussen uitspraken van studenten over de duidelijkheid en moeilijkheid. Er blijkt dat de combinatie van waarderingen in de richting "niet moeilijk dan duidelijk", vaker voorkomt dan andere combinaties. Dat betekent dat in de andere situaties de waarderingen over duidelijkheid en moeilijkheid onafhankelijker van elkaar zijn. Bij een moeilijk gewaardeerd onderwerp is het oordeel over de duidelijkheid dus gevarieerder dan bij een niet-moeilijk onderwerp. Op dezelfde wijze wijst bij een gegeven oordeel over de duidelijkheid de waardering over de moeilijkheid niet in een bepaalde richting.

In §3.7. is geprobeerd de inhoudelijke moeilijkheidsgraad en elementen van duidelijkheid van een onderwerp zichtbaar te maken.

De kenmerken "de relatie met bekende en herkenbare zaken" en "de samenhang", zijn bekeken voor een viertal uitlegfragmenten. Op basis daarvan is geprobeerd een inschatting te geven van de inhoudelijke moeilijkheidsgraad van ieder fragment. Daarbij is zoveel mogelijk afgezien van vormelementen van de uitleg, zoals tempo en ordening. Belangrijke elementen bij de vaststelling van de moeilijkheidsgraad is de volledigheid van de verstrekte informatie en het beroep dat gedaan wordt op bekend veronderstelde achtergrondinformatie.

Bovendien is geprobeerd de verschillen in duidelijkheid tussen de vier fragmenten te verklaren. Hierbij is gelet op de duidelijkheid op het lokale, het interlokale en het globale niveau.

De zo ontwikkelde waarderingen over moeilijkheid en duidelijkheid stroken voor drie van de vier fragmenten met de oordelen van de studenten. Het vierde fragment wordt als moeilijk en niet duidelijk getaxeerd, de studenten beoordelen dit met niet moeilijk en niet duidelijk.

De vraag is nu of de ontwikkelde terminologie ook in staat is het in §3.6. waargenomen effect te verklaren.

Kijken we terug naar de beide ontwikkelde analyseprocedures rond moeilijkheid en duidelijkheid, dan zien we een sterk gemeenschappelijk element: de samenhang in de uitleg. Deze wordt vanuit verschillende invalshoeken bekeken. Bij de beoordeling van de moeilijkheids graad is gelet op **de mate van complexiteit** van de samenhang. Bij de beoordeling van duidelijkheid is gelet op **de zichtbaarheid** van de samenhang voor de toehoorder. Die zichtbaarheid hangt sterk samen met de interlokale duidelijkheid. Bij een lage moeilijkheidsgraad kan er in het algemeen sprake zijn van een eenvoudige samenhang in de uitleg. Een dergelijke samenhang zal gemakkelijker zichtbaar zijn dan bij een complexe situatie. Zo zal een lagere moeilijkheidsgraad sneller een duidelijke uitleg impliceren. Het omgekeerde effect was zichtbaar bij fragment 4. De moeilijkheidsgraad van de originele tekst ging kennelijk de krachten van Ron te boven. Hij was in ieder geval niet in staat de structuur van dat verhaal in zijn eigen presentatie te verwerken. In zo'n situatie letten de toehoorders bij de beoordeling van de moeilijkheidsgraad misschien op heel andere zaken dan de inhoudelijke moeilijkheid. Ze worden bij een mislukte uitleg geconfronteerd met de vraag of het

onderwerp moeilijk was. Dat onderwerp heeft maar nauwelijks tot ze kunnen doordringen. Wellicht dat hun aandacht bij de beantwoording van de vraag dan meer gericht is op de aard van het onderwerp en dat ze de vraag interpreteren als: ging de uitleg over moeilijke zaken?

HOOFDSTUK 4: UITLEGGEN DOOR ANALOGIE EN CONTEXT.

"Manieren leer je niet met lessen," zei Alice. "Met lessen leer je sommen maken, en zo."
"Kan je optellen?" vroeg de Witte Koningin. "Wat is een en een en een en een en een en een en een en een en een?"

"Weet ik niet," zei Alice. "Ik ben de tel kwijt geraakt".

"Ze kan niet optellen," kwam de Zwarte Koningin tussenbeide.

"Kan je aftrekken? Acht min negen."

"Acht min negen weet ik niet," antwoordde Alice heel vlug: "Maar -"

"Ze kan niet aftrekken," zei de Witte Koningin.

"Kan je delen? Als je een brood deelt door een mes-wat krijg je dan?"

"Ik denk -" begon Alice, maar de Zwarte Koningin antwoordde voor haar: "Boterhammen, natuurlijk. Probeer nu nog eens een aftreksom. Trek een been af van een hond: wat blijft er over?"

Lewis Carroll: De avonturen van Alice in Wonderland en Spiegelland.
(Vertaling: C.Reedijk en A.Kossmann.)

Het gebruik van realistische contexten begint gemeengoed te worden bij de ontwikkeling van het reken- en wiskundeonderwijs. Vanzelfsprekend ontstaan daarbij nieuwe didactische problemen. Sommige contexten blijken wel het gewenste effect te hebben, andere mislukken onverwacht. Ook blijken leerlingen heel verschillend te reageren. Met name ligt de vraag voor of zwakke leerlingen wel zoveel baat hebben bij het gebruik van contexten. Of ze niet blijven steken in het verhaaltje en daarmee niet voldoende aan de wiskundige essentie toekomen.

§4.1: HEKSEN EN TREINEN IN DE KLAS.

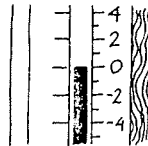
In Moderne Wiskunde, deel 1, 4de editie, wordt het rekenen met negatieve getallen geïntroduceerd met behulp van een denkbeeldige heks en denkbeeldige treintjes.

Door de context van de heks wordt een kunstmatige wereld gecreëerd waarin het optellen en aftrekken met negatieve getallen aanvaardbaar en voorstelbaar worden gemaakt.

- 17** We gaan op bezoek bij een heks, die in een grote ketel een vreemd drankje klaarmaakt. Ze heeft wonderlijke blokjes om de temperatuur in die ketel te regelen. Ze gebruikt warme blokjes die niet afkoelen en koude blokjes die niet smelten.
- Als er evenveel warme als koude blokjes in de ketel zitten, is de temperatuur in de ketel 0° . Gooit ze er nu bijvoorbeeld 8 warme blokjes bij, dan zal de temperatuur 8° worden. Als het recept van het drankje aangeeft dat de temperatuur 5 graden moet dalen, dan gooit ze er 5 koude blokjes in.



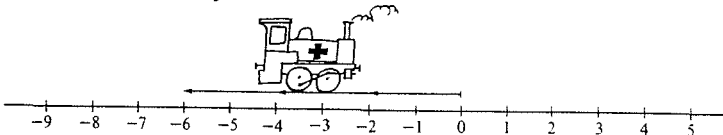
- a De temperatuur in de ketel is -4° .
De heks doet er 6 warme blokjes bij.
De temperatuur wordt ...
- b De temperatuur in de ketel is 8° .
De heks gooit er 10 koude blokjes in.
De temperatuur wordt ...
- c De temperatuur in de ketel is -2° .
De heks gooit er 3 koude blokjes in.
De temperatuur wordt ...



In volgende opgaven gooit de heks niet alleen blokjes in de ketel, ze haalt er ook uit. Een positief blokje uit de ketel halen heeft tot gevolg dat de temperatuur gaat dalen, een negatief blokje eruit halen heeft tot gevolg dat de temperatuur gaat stijgen.

Het vermenigvuldigen van negatieve getallen wordt uitgelegd aan de hand van het treintje.

'Maar hoe reken ik -3×2 uit?', vraagt Jeroen.
'Dat is eenvoudig', antwoordt zijn vader, 'dan laat je de positieve trein achteruit rijden.'



De uitkomst van -3×2 is -6 .

Er zijn twee soorten lokomotieven: positieve en negatieve. De positieve staan met hun voorkant naar rechts, de negatieve staan naar links. $3 \times \dots$ betekent dat het betreffende treintje vooruit rijdt, $-3 \times \dots$ betekent dat het betreffende treintje achteruit rijdt. 3×-2 is dus: het negatieve treintje legt 3 keer de afstand 2 vooruit af, -3×-2 is: het negatieve treintje legt 3 keer de afstand 2 achteruit af.

In de praktijk blijkt de heks-context aanzienlijk beter te werken dan de treintjescontext. Leerlingen gebruiken wel de heksencontext als verklaringsmiddel bij het uitrekenen van opgaven maar niet de treintjescontext.

Bij navraag bij een aantal leraren blijkt dat leerlingen vooral problemen hebben met het idee van negatieve treinen die achteruit rijden. De combinatie is te ingewikkeld en vraagt teveel uitleg die nog meer in de war maakt. Alleen sterke leerlingen hebben in de gaten dat je het 'abstract moet bekijken'. Vermenigvuldigingen met negatieve getallen worden, ondanks de aanwezigheid van het context, direct met de formele hulpregels 'min x min = plus' enz.. uitgevoerd.

Ook in 'Tegengesteld' (Goffree, Buys, e.a, 1989), worden de verschillen tussen beide contexten gesignaleerd. Goffree (1986,1989) observeert dat Annemarie in een bijlessituatie op heel natuurlijke wijze de heksencontext als verklaringsmiddel hanteert. Bij de treintjes vraagt het omzetten naar de voorbeeldsituatie, volgens hen, om nogal wat 'vertaal'-regels.

Studenten van een lerarenopleiding constateren :

- De overstap van het temperatuurbegrip naar de heks was niet zo moeilijk.
- De heks was eigenlijk te gemakkelijk. De leerlingen maakten de opgaven snel.
- $-9 + -8$ begreep een leerling pas, toen een student hem aan de blokjes herinnerde.
- De heks begrepen ze echt (naar aanleiding van het optellen). Blokjes konden leerlingen zich goed voorstellen."

Ook hier blijkt uit de laatste twee uitspraken dat de heksencontext functioneert als een verklaringsmiddel voor het werken met negatieve getallen.

Helaas zijn er geen lesobservaties beschikbaar over de heks in de klas.

In het volgende lesfragment komt de treintjes-context aan de orde.

Fragment 9:

Klas: Brugklas, mavo, havo, atheneum.

Methode: Moderne Wiskunde, 4 de editie.

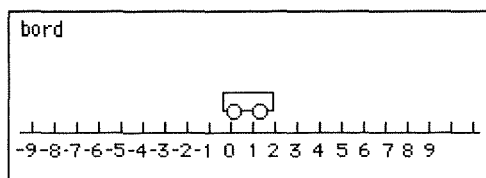
Th is de docent.

Het huiswerk was opgave 38 t/m 43.

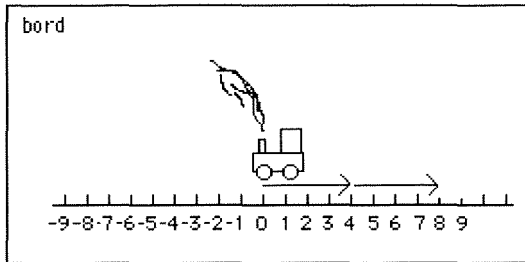
De antwoorden van opgave 38 zijn door de leerlingen beurtelings voorgelezen.

- 1 Th: Opgave 39. Dat ging over dat negatieve treintje, daar werd gevraagd om in een tekening duidelijk te maken hoe je -3×-2 uit kunt rekenen. Hoe heb je dat gedaan Remco?
- R: Eh ja, je schrijft het gewoon als 3×2 .
- 5 Th: Hoe heb je dat getekend? Je moest er een tekening bij maken.
- R: Dat heb ik niet.

- Th: Dat staat er toch [leest voor]: "Maak een tekening waaruit je de uitkomst van deze vermenigvuldiging kunt aflezen." Met behulp van zo'n treintje.
- R: Dat heb ik niet gedaan.
- 10 Th: Sandra?
- S: [onverstaanbaar]
- Th: Ik zal hem tekenen. [Pakt geodriehoek, tekent getallenlijn op het bord, geroezemoes.]
- 15 OK. Margriet, hoe heb je het gedaan? [Verbeterd de tekening op aanwijzingen van de leerlingen.] Ja. OK, iedereen even zijn mond dicht.
- M: Ik heb er een treintje ingetekend.
- Th: Ja. [Tekent op het bord.]



- Wat voor treintje is het?
- M: [onverstaanbaar]
- 20 Th: Welke kant staat de voorkant op? Die kant? [wijst naar rechts.] Hij gaat naar links hè, -3×-2 [wacht]. [Naam] zegt dat er -6 uitkomt, -3×-2 . Wie is het daar niet mee eens? Ja? [Naam]
- A: 6.
- Th: Hoe heb je het getekend dan?
- 25 A: Ik heb het niet getekend, maar 3×2 is 6 en het is twee keer min.
- Th: Jawel, maar dat heb je nog niet gehad.
- A: Mijn vader zei, min, min is plus. [onverstaanbaar]
- Th: Ja maar dat doe je bij optellen en aftrekken, maar dit is vermenigvuldigen. [Naam]
- B: Ik dacht -3 naar links en dan -2 keer de andere kant opdoen.
- 30 Th: [Wacht] Wat komt er dan uit? Je zegt het een beetje onhandig. Ja?
- C: Moet min keer min plus zijn?
- Th: Ja dat klopt wel maar dat krijg je straks pas, dat heb je niet gehad, het is de vraag hoe je dat met dat treintje moest tekenen. Als je nou 3×-2 had, hoe tekende je dat? Met dat treintje? [wacht] Ja?
- 35 D: [onverstaanbaar]
- Th: Ja. Dat ging dus 3 keer, dan ging het min-treintje vooruit. [Tekent pijlen in de figuur.] En als je nou -3×-2 hebt, wat zou je dan doen Harold?
- H: Dan gaat ie de andere kant op.
- Th: Dan rijdt ie achteruit, inderdaad. Dit treintje rijdt 3×2 achteruit. Dan kom je bij 6 terecht. Ja? [Wacht, kijkt rond] Is dat duidelijk? Wie heeft daar nog vragen over?
- 40 [Geen reacties] OK, dan doen we er gewoon nog eentje. Als ik -2×-4 heb. [Schrijft -2×-4 op het bord] Peter! Wat krijg je dan?
- P: -8 achteruit.
- Th: -8 achteruit?
- 45 P: Nou, hij gaat naar -8 .
- Th: Hij gaat naar -8 , -2×-4 ?
- P: Oh, 8.
- Th: Hij rijdt inderdaad 2×4 achteruit. Dus [tekent 2 pijlen]:



Ja? Goed laten we naar som 40 kijken. Zien of je dat wel goed gedaan hebt.

[Leerlingen lezen beurtelings de goede antwoorden op tot opgave k. Deze opgave krijgt een nadere uitleg.]

- Th: Wat heb je uit $-4 \times \frac{1}{4}$?
- 50 E: Die heb ik niet.
- Th: Als je die met het treintje doet, wat doet die dan?
- E: Achteruit.
- Th: Hoe vaak gaat die achteruit?
- E: Ja dat weet ik niet.
- 55 Th: Wie kan me dat vertellen? [Wacht] Alfons misschien?
- Alf: Som k?
- Th: Ja som k.
- Alf: -1
- Th: -1? [Wacht]. OK, wie is het daar niet mee eens? Rita?
- 60 Ri: [onverstaanbaar]
- Th: Er komt 1 uit, ja. Hoe kun je dat, als je dat nog niet zo kunt, hoe kun je dat met het treintje doen dan? Kijk er staat -4 keer $\frac{1}{4}$. Als het tweede getal negatief is, gebruik je het negatieve treintje. Ja? Het positieve treintje gebruik je als het tweede getal positief was. Je hebt dus een afstand van $\frac{1}{4}$. Er staat -4 keer $\frac{1}{4}$, dus
- 65 hij gaat 4 keer $\frac{1}{4}$ achteruit. Nou waar komt die dan terecht? Remco?
- Re: Eh, -6.
- Th: Nee ik heb het nog steeds over de letter k.
- F: 1.
- Th: 1, ja. OK.

[Er is weinig aandacht tijdens de uitleg. De les gaat verder met de behandeling van opgave 41.]

Een voorbeeld van een mislukte uitleg. Th heeft de bedoeling uit te leggen hoe je negatief keer negatief kunt uitrekenen met behulp van het treintje. De leerlingen geven geen enkel blijk van herkenning. Integendeel, ze blijven hardnekkig hun eigen strategie (min keer min is plus) hanteren. Tijdens de uitleg verslapt de aandacht. Leerlingen die een beurt krijgen weten niet meer over welke som het eigenlijk gaat (42,48).

Th is student-leraar die als onderdeel van de onderwijsstage een serie lessen verzorgt. De docent is niet aanwezig.

Er is sprake van onduidelijk taalgedrag van Th. Wat bedoelt Th in regel 2 met zijn vraag: hoe je -3×-2 uitrekent of hoe je dat moet hebben getekend? En is het duidelijk dat het hem gaat om vooruit of achteruit rijdende treintjes in vraag 18? Th maakt beurten aan leerlingen niet af, hij gaat zonder kommentaar over naar een andere

leerling. Hij herhaalt niet wat leerlingen zeggen om zodoende de opmerkingen naar de hele klas door te spelen.

Samenvatting.

Uitleg hoe je in een tekening duidelijk kunt maken hoe je -3×-2 uitrekent [1-41]

Hoe teken je -3×-2 ?

Wat voor treintje is het?

Welke kant staat de voorkant op?

[Uitleg mislukt]

Hoe teken je 3×-2 ?

Het min-treintje gaat 3 keer vooruit.

Hoe teken je -3×-2 ?

Dan gaat ie de andere kant op.

Uitleg hoe je -2×-4 uitrekent met het treintje. [41-48]

[Tekening zonder verdere toelichting]

Uitleg hoe je $-4 \times -\frac{1}{4}$ uitrekent met het treintje. [49-65]

Treintje gaat achteruit.

Hoe vaak?

Het tweede getal is negatief dus het negatieve treintje.

Bij positief getal het positieve treintje.

Je hebt een afstand van $\frac{1}{4}$.

Hij gaat $4 \times \frac{1}{4}$ achteruit.

Er staat -4 keer $\frac{1}{4}$

Ieder uitlegfragment correspondeert met een opgave. In het eerste fragment is er sprake van een dubbele uitleg-hoe-je-iets-moet-doen. Dat levert een onduidelijke situatie op en geeft de leerlingen de ruimte alleen maar op de formele methode te reageren. Nadat Th het misverstand uit de weg heeft geruimd mislukt de uitleg in eerste instantie. Daarna probeert Th het via het bekende 3×-2 . Dit is een voorbeeld van een **omkering van analogie**. "Als je nou 3×-2 had, hoe tekende je dat?" De uitlegstrategie is hierbij: "Het gaat net zo als bij ... maar dan precies omgekeerd." In het derde fragment probeert Th de vertaling van de symbolische notatie naar het treintje letterlijk aan te geven door het verband te leggen tussen het negatief zijn van het tweede getal en het soort treintje en het negatief zijn van het eerste getal en het achteruit rijden. Het is een uitleg door synthese waarin elementen worden gekombineerd.

Aan de orde is de bespreking van het huiswerk. Het doel daarvan is om te controleren of leerlingen dat gemaakt hebben en om zonodig, bij een verkeerde aanpak, bij te kunnen sturen. Dat laatste is hier vooral het geval. In een dergelijke situatie is een vraaggesprek de gebruikelijke werkvorm. De docent vraagt aan de leerlingen het antwoord, hoe ze daaraan gekomen zijn en haakt daar zonodig op in. De leerlingen zeggen of ze het huiswerk wel of niet hebben kunnen maken. Ze kunnen direct reageren als ze de uitleg van de docent niet snappen. De docent reageert daarop door de uitleg (in een andere vorm) te herhalen of door de mededeling dat hij dat straks nog

wel even apart individueel zal uitleggen. In de gegeven situatie maakt de interactie duidelijk wat de leerlingen kunnen en hebben gedaan en wat de wensen van de docent zijn. In die zin is er sprake van een normale interactie.

De leerlingen hebben de opgaven op een niet gewenste manier gemaakt. Th negeert de opmerkingen van de leerlingen dat ze de opgave anders hebben aangepakt. Hij stelt daar slechts tegenover dat het met het treintje moest. De interactie is daarmee niet functioneel. Bij een functionele interactie was de vraag gesteld: "Ja, maar waarom is $\min \times \min$ eigenlijk plus? Heeft je vader je dat ook verteld?" Daarmee worden de mogelijkheden geschapen voor een inhoudelijke sturing.

In het laatste uitlegfragment suggereert Th een algoritmische aanpak. Op zich is dat een te verwachten zet bij een uitleg-hoe-je-iets-moet-doen. Het algoritme is echter een combinatie van twee voorwaarden. Bekijk eerst het teken van het tweede getal. Als dit positief is, dan kijkt het treintje naar rechts, is het negatief dan kijkt het naar links. Bekijk daarna het eerste getal. Is dit positief dan rijdt het treintje vooruit, anders achteruit. Door deze combinatie van voorwaarden ontstaat een ingewikkelde logische structuur die de uitleg een hoge moeilijkheidsgraad geeft.

In dit fragment zien we duidelijk het door Goffree c.s. (1988) gesignaleerde probleem van sluiproutes die ontstaan bij de introductie van bewerkingen met negatieve getallen aan de hand van situaties binnen contexten. Onder **sluiproutes** verstaan ze ongewenste, blind uitgevoerde verkortingen die niet gedragen worden door inzicht vanuit praktische ervaringen of theoretische beschouwingen. Terecht plaatst Broekman (1989) de nodige vraagtekens bij hun beschouwingen. Hij vraagt zich af of: "negatieve getallen en de rekenregels die gelden in het formele systeem ($\mathbb{Z}, +, \cdot$) te krijgen zijn vanuit de aangereikte contexten, of alleen op te leggen door een interpretatie aan mingetallen te geven." Daarmee raakt hij één van de kernvragen over het gebruik van contexten bij negatieve getallen.

Er blijkt in de praktijk dus een groot verschil te zijn in didactische waarde van beide contextsituaties. Dat is merkwaardig omdat er zo op het eerste gezicht geen uitwendig didactisch verschil tussen beide contexten valt te bespeuren. Het betreft in beide gevallen bedachte kunstmatige situaties waarbij de notatie zich kan ontwikkelen als een adequate beschrijving van die situaties. In beide gevallen gaat het om minimale uitleg via een tekst die nauw verweven is met de opgaven. Om een inzicht te krijgen in het functioneren van de uitlegkracht van contextrijke situaties in het algemeen, is het belangrijk een verklaring te vinden voor dit verschijnsel. In de volgende paragrafen wordt de betekenisstructuur van negatieve getallen verder geanalyseerd en wordt onderzocht in hoeverre analogieën met vanzelfsprekende contexten hierin een rol kunnen spelen.

§4.2. ANALOGIE EN CONTEXT.

Onder een **context** verstaat men in het algemeen de situatie waarin een wiskundig probleem wordt gepresenteerd. Klassiek is het voorbeeld van de woordproblemen bij het traditionele rekenonderwijs. Bij een **realistische** context is de situatie geënt op in de realiteit herkenbare feiten. Het begrip realiteit heeft hierin een wat ruimere betekenis dan gebruikelijk (Treffers, 1987). De feiten hoeven niet fysisch correct te zijn. De situatie moet voor de leerling voldoende realiteitswaarde hebben. Dat kan dus ook een sprookjeswereld zijn.

Het doel van dit contextgebruik is heel verschillend. Dat kan zijn om de leerlingen vertrouwd te maken met het hanteren van wiskunde in praktijksituaties. In dat geval is de praktische waarde van de context essentieel. Contexten kunnen echter ook tot doel hebben een leeromgeving voor de leerlingen te bieden voor de ontwikkeling van algemene wiskundige begrippen en technieken. De realiteitswaarde is dan geen essentieel punt. Het gaat er veel meer om dat de leerling een denkmodel krijgt aangereikt dat voldoende rijk is van structuur en waarin de leerling zich voldoende kan inleven. Het is de bedoeling dat leerlingen geconfronteerd worden met situaties die voor hen vanzelfsprekend en aanvaardbaar zijn.

Dit geschetste onderscheid in functies van contexten is geen strikt onderscheid. Met name in de rekendidaktiek kunnen beide functies samenvallen.

In dit hoofdstuk komen alleen contexten aan de orde waarin het accent ligt op de begripsontwikkeling. De Lange (1987) noemt dit contexten van de derde soort. Vooral in de fase van begripsvorming van de wiskunde wordt veel waarde gehecht aan het gebruik van contexten (Treffers en Goffree, 1985). Een wiskundig begrip of wiskundig model ontwikkelt zich aan de hand van een context. De context is een 'ontwikkelomgeving' voor wiskunde. Regels en begrippen ontwikkelen zich vanzelfsprekend uit de in de context aangeboden problemen en door de context gesuggereerde oplossingsstrategieën. In die zin kan het gebruik van contexten in het wiskunde-onderwijs worden opgevat als een uitlegmiddel.

Freudenthal (1989) is zeer negatief over de keuze van de toepassingsgerichte contexten bij de introductie van negatieve getallen als winst en verlies, warm en koud, trap op en trap af. Geen enkel van deze contexten reikt volgens hem verder dan het optellen en aftrekken van negatieve getallen. Het zijn allemaal ad hoc situaties die zo snel mogelijk weer vergeten moeten worden en die meer te maken hebben met hersengymnastiek dan met gezond verstand. Freudenthal houdt een sterk pleidooi voor het aanbieden van de gecoördinatiseerde vlakke meetkunde als wiskundige totaal-context waaruit zich alle regels voor het rekenen met negatieve getallen laten ontwikkelen en waarin de leerlingen de efficiëntie van de gehanteerde formele notatie leren herkennen. Het vermenigvuldigen van negatieve getallen komt daarin overeen met het vergroten en in de oorsprong spiegelen van een pijl. Zo gaat de pijl (2,-3) bij een vermenigvuldiging met -2 over in (-4,6).

In de voorbeelden die in dit onderzoek zijn gekozen, worden gefantaseerde denkbeeldige situaties gepresenteerd. Het gaat om een heks en treintjes. Situaties die leerlingen in werkelijkheid niet zullen tegenkomen. Je kunt echter rekenen met negatieve getallen "net zo als de heks dat doet met blokjes" of "zoals dat met treintjes gaat".

Het gebruik van het koppelwoord 'als' geeft aan dat analogieën hierin een belangrijke rol spelen.

Analogie is een veelgebruikt middel tot uitleg waarbij nieuwe, onbekende zaken verklaard worden aan de hand van bekende. Hierbij vindt overdracht van kennis over de ene, bekende situatie plaats naar de andere, nieuwe situatie.

Polya(1945) werkt een aantal wiskundige problemen uit die door middel van analogie met andere bekende, reeds opgeloste problemen, kunnen worden aangepakt. Hij concentreert zich vooral op analogieën binnen het wiskundige probleemoplossen. Analogieën worden daarbij gekenmerkt door het aanwijzen of herkennen van overeenkomsten tussen verschillende situaties. Kern van het oplossingsproces is het herkennen van deze overeenkomst tussen een vertrouwde, bekende en een nieuwe onbekende situatie en vervolgens het toepassen van die overeenkomst in de nieuwe situatie.

David Pimm (1987) geeft een omschrijving van analogie vanuit een taalkundige invalshoek. Het verschijnsel 'metafoor' speelt hierin een belangrijke rol. De metafoor is de taalkundige uitdrukking waarbij de analogie wordt overgedragen. In "hij briesste als een leeuw" worden de briesende, afschrikwekkende eigenschappen van een leeuw op de persoon in kwestie overgedragen. Bij een dergelijke overdracht van eigenschappen wordt het hele bijbehorende semantische veld overgedragen, inclusief de onderliggende structuur tussen de eigenschappen en de associatieve samenhangen.

Als aanvulling op het analogie-begrip binnen de wiskunde van Polya, hanteert Pimm het idee van de **buiten-wiskunde metafoor**. Daarmee worden metaforen bedoeld die wiskundige ideeën en processen proberen uit te leggen en te interpreteren in termen van gebeurtenissen uit de omgevingswereld. Doel is hier echter ook om los te komen van de metafoor. Dat kan gebeuren door de grenzen van de metafoor te bepalen, door te laten zien welke eigenschappen niet van toepassing zijn in de nieuwe situatie. Maar ook door te laten zien dat het maar om een metafoor gaat.

Als voorbeeld van buiten-wiskundige metafoor noemt Pimm onder meer de weegschaal om vergelijkingen te leren vereenvoudigen. Deze beschrijving van buiten-wiskundige metafoor lijkt bij uitstek geschikt om het gebruik van contexten bij wiskundige begripsvorming te analyseren.

In déze betekenis zijn analogieën dus asymmetrische relaties tussen twee situaties. Ze suggereren een overeenkomst tussen een meer bekende en een minder bekende situatie. Door de analogie treedt er overdracht van kennis op in één richting: van een vertrouwde, aanvaarde situatie naar een onbekende of nieuwe situatie. Opvallend is het gebruik van koppelwoorden. Ze leggen de verbinding tussen de twee werelden en tegelijkertijd werken ze als een signaal dat de analogie niet letterlijk bedoeld is, dat het

maar om een analogie gaat. Vergelijk bijvoorbeeld de zin: "een vergelijking is zoiets als een weegschaal" met "een vergelijking is een weegschaal". In de eerste zin komt naar voren dat bepaalde eigenschappen van de weegschaal wél en andere niet op vergelijkingen van toepassing zijn. In de tweede zin treedt een identificatie op tussen vergelijking en weegschaal. Nu zijn alle eigenschappen van 'weegschaal' van toepassing op 'vergelijking'. Vergelijk dit met: "een vergelijking is een formule met een = -teken erin." Hierin worden vergelijkingen geïdentificeerd met formules met een speciale eigenschap.

Het gebruik van koppelwoorden geeft dus een duidelijke beperking aan de overdracht van betekenissen van weegschaal naar vergelijking. Welke eigenschappen precies zullen worden overgedragen zal sterk van de situatie afhangen waarin de analogie is gepresenteerd, van de associaties die leerlingen hebben met 'weegschalen' en van het vermogen van leerlingen om het gebruik van koppelwoorden in deze zin te interpreteren (van Dormolen, 1987).

Bij het leren van nieuwe begrippen door middel van een context, spelen analogieën een belangrijke rol. Binnen de context zijn analogieën het verwijzingsmiddel van de vertrouwde wereld (de context) naar nieuwe onbekende feiten en begrippen. De analogieën gaan daarmee functioneren als een verklaringsmiddel. Dat is de kracht van analogieën in een uitleg. Zoals de bewegingen in het zonnestelsel verklaard kunnen worden aan de hand van een tekening met cirkels, zo kunnen binnen het wiskundeonderwijs de contexten functioneren als modellen die verklaringen leveren voor nieuwe onbekende begrippen.

De bundel "Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics", Janvier (1987), bevat een aantal artikelen waarin de problematiek rondom het uitleggen door middel van context en analogie zichtbaar gemaakt wordt. Centraal staat hierin het idee van **representaties** van wiskundige kennis. Voor wiskunde in contexten is vooral het idee van **externe representaties** van wiskundige kennis van belang. Met **externe representaties** worden "alle symbolische organisaties (symbool, schema, diagram, etc.)" bedoeld die het "doel hebben een zekere wiskundige "realiteit" te representeren." (Dufour-Janvier, e.a. 1987). In die zin kan dus een context opgevat worden als een specifieke soort externe representatie. Contexten zijn: "Op ervaringen gebaseerde "scripts"-waarin kennis wordt georganiseerd rond "werkelijke" gebeurtenissen" (Lesh, e.a., 1987). Door de realistische omgeving worden in een contextrijke situatie zogenaamde 'phenomenologische primitieven' (p-prims) meegedefinieerd, dat zijn elementen uit de vanzelfsprekende ervaringswereld die van nature als verklaring van verschijnselen kunnen functioneren (DiSessa, 1987). Bij een balans is het, bijvoorbeeld, vanzelfsprekend dat je alleen maar evenwicht kunt bewaren door links en rechts hetzelfde toe te voegen. De situatie van de balans bevat 'het in evenwicht zijn' als een p-prim. Vanuit het handelen in deze situaties kunnen zich voorkeuren en gebruiksregels voor bepaalde p-prims ontwikkelen, die model kunnen staan voor het wiskundige handelen. (DiSessa, 1987). Een context is dus in zekere zin een metaforische situatie waarin een verticale ontwikkeling naar de wiskunde kan plaatsvinden. Vanaf dit ogenblik komt de analogie aan de orde. De vraag is op welke wijze de betekenis-overdracht via de analogie, van de realistische situatie naar de

wiskunde plaats gaat vinden. Dufour-Janvier (1987) hebben fundamentele twijfels over de effectiviteit van deze 'concrete samengestelde representaties' als bijdrage aan de begripsvorming. Ze constateren dat leerlingen blijven steken in het ontwikkelen van regels die alleen op specifieke situatie betrekking hebben. Dat de verticale ontwikkeling naar de wiskunde toe niet echt wordt gelegd.

§4.3: NEGATIEVE GETALLEN, DE HEKS EN HET TREINTJE NADER GEANALYSEERD.

In het prachtige boek "Tegengesteld", Goffree, Buys, e.a. (1989), wordt een uitgebreid overzicht gegeven van het verschijnsel negatieve getallen in het wiskundeonderwijs. Het boek bevat een mathematisch didactische analyse van negatieve getallen, de wiskundige en historische achtergronden, een overzicht van de invoering van negatieve getallen in de verschillende schoolmethodes, reacties van docenten en leerlingen, resultaten van een onderzoek(je) en tenslotte een voorstel tot een didaktiek. Hoewel in het onderzoek (door NLO-studenten) drie verschillende contexten met elkaar zijn vergeleken, geven de resultaten daarvan geen antwoord op de gestelde vraag waarom de heks wel en het treintjesmodel niet werkt.

Door een analogie wordt een verbinding gelegd tussen een bekende en een nieuwe onbekende wereld. Bij het leren in een context functioneert de door de context aangeboden situatie als bekende wereld. Voor een goede begripsontwikkeling vanuit deze context is het nodig dat die voldoende vanzelfsprekende elementen (p-prims) bevat voor de leerlingen, van waaruit regels en verklaringen zich van nature ontwikkelen. De heksensituatie voldoet aan deze vanzelfsprekendheid. Je kunt een pan met water warm of koud maken door er warme of koude blokjes aan toe te voegen. De overstap naar het eruit halen is een overstap naar een denkbeeldige heksenwereld waarbij de vanzelfsprekendheid, door analogie(!), blijft gehandhaafd. Ook de treintjesituatie bevat dergelijke vanzelfsprekende elementen. Locomotiefjes kunnen op twee manieren op het spoor gezet worden en ze kunnen dan nog voor en achteruit rijden. In feite is juist deze structuur de basis voor de analogie. Voor een verklaring van het verschil in effectiviteit van beide contexten als uitlegmiddel, zullen we dus andere aspecten moeten bekijken dan alleen maar de vanzelfsprekendheid van de analoge situatie.

In §1.6. is een voorbeeld uitgewerkt van betekenisanalyse op basis van de referenties van de gebruikte terminologie. Met behulp van die analyse waren we in staat een verklaring te geven voor de uitleg-problemen in een les over het oplossen van vergelijkingen. In het volgende wordt een dergelijke analyse gegeven voor negatieve getallen als wiskundig verschijnsel. Daarbij wordt geprobeerd aan te geven wat de verwijzingen zijn van negatieve getallen zoals leerlingen dat ervaren.

De eerste kennismaking met negatieve getallen doet een sterke aanslag op het voorstellingsvermogen van leerlingen. In de dagelijkse omgeving hebben natuurlijke getallen een hoeveelheids- en een ordenings-betekenis (cardinaal- en ordinaal-getallen). Bij optellen en aftrekken van natuurlijke getallen kunnen deze betekenissen afzonderlijk van belang zijn. Zo kan optellen korresponderen met toevoegen en samenvoegen, respectievelijk doortellen. In de eerste twee gevallen is vooral de hoeveelheidsbetekenis van belang, in het laatste geval is de ordeningsbetekenis essentieel. Bij het aftrekken treedt iets soortgelijks op. Aftrekken

kan zijn: wegnemen (verwijzend naar hoeveelheden) respectievelijk terugtellen (verwijzend naar posities op de getallenlijn). Ook bij vermenigvuldigen kunnen verwijzingen naar hoeveelheid en ordening optreden. 3×2 kan betekenen: het getal 2 en dat 3 keer. Het eerste getal 3 is een aantal en heeft dus een hoeveelheid-betekenis. Zelfs als de vermenigvuldiging op de getallenlijn wordt aangegeven: 3 keer (een aantal) 2 plaatsen naar rechts. In het honderdvel is 3×2 een verwijzing naar posities: 3 vertikaal en 2 horizontaal geeft 6 op het kruispunt.

Belangrijk is dat bij gebruik van natuurlijke getallen in de waarnemingswereld, beide betekenissen (hoeveelheid en ordening) kunnen optreden, door elkaar, in afwisseling en ondersteuning van elkaar. Beide betekenissen kunnen functioneren als verklarmiddel: $3 \times 2 = 6$ vanwege het herhaalde optellen, $3 \times 2 = 2 \times 3$ vanwege de symmetrie in het honderdvel. Deze begripsmatige verankering in de waarnemingswereld is een belangrijk onderdeel van het voorstellingsvermogen van getallen.

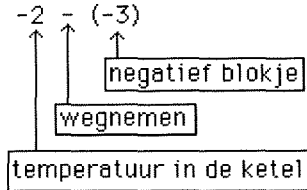
Om voor negatieve getallen voldoende verankering in de waarnemingswereld te realiseren ligt het voor de hand om ook negatieve getallen in te voeren aan de hand van diverse contexten uit de waarnemingswereld: beneden de zeespiegel, temperatuur, de zakrekenmachine, de bankrekening, de voetbaltabel, de getallenlijn en figuren in een coördinatenstelsel. Hierin zijn de ordenings- betekenis en de positieve en negatieve hoeveelheden-betekenis terug te vinden. Een verschil met de natuurlijke getallen is echter dat negatieve hoeveelheden in wezen getransformeerde positieve hoeveelheden zijn. Schuld is een positieve hoeveelheid, het negatieve aspect van schuld komt alleen maar aan de orde als schuld geplaatst wordt als een tekort van bezit. Negatief heeft in die transformatie altijd de betekenis van 'minder' te zijn dan positief. In deze zin zijn hoeveelheid- en ordenings-betekenis bij negatieve getallen onafscheidelijk met elkaar verweven. 'Negatieve hoeveelheid' is een begrip dat afgeleid is van 'positieve hoeveelheid' en komt alleen maar voor in een ordenings-relatie met positieve hoeveelheden.

In de verschillende contexten is dit in meerdere en mindere mate terug te vinden. Bij zeespiegel en temperatuur is vooral het ordeningsaspect van belang, bij bankrekening en voetbaltabel vooral het negatieve hoeveelhedenaspect.

Het vervelende is echter dat de transformatie van positieve naar negatieve hoeveelheden niet in alle situaties te maken is. Heel duidelijk is dit bij 'aantal' als kenmerk van een herhaalde handeling. Je kunt 3 keer hetzelfde doen (bv. 2 erbij tellen), je kunt aan "-3 keer hetzelfde doen" geen betekenis geven. Hierdoor verliest het herhaald optellen haar verklarende waarde bij het vermenigvuldigen. In dezelfde zin heeft 7×0 wel betekenis en 0×7 niet.

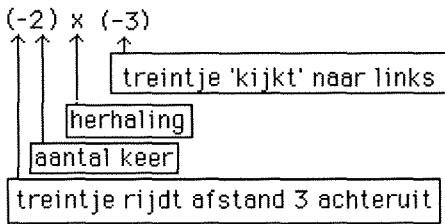
Gedetailleerde analyse van de analogie geeft voor beide situaties een heel verschillend beeld.

De opgave $-2 - (-3)$ laat zich in de heksensituatie als volgt interpreteren:



Deze interpretatie blijft dicht bij de gebruikelijke 'wegneem'-interpretatie van aftrekken en bij de interpretatie van thermometersommen. Het enige verschil is de introductie van negatieve blokjes. Helemaal onbekend hoeft dit niet voor leerlingen te zijn. Kampeer-koelboxen worden gebruikelijk gekoeld door het toevoegen van koude koelblokjes.

De interpretatie van $(-2) \times (-3)$ in de treintjescontext ligt veel verder weg.



Het aantal vertaalregels verschilt dus niet zoveel van de heksensituatie. Veel belangrijker is de ingewikkeldheid van deze vertaling. Deze is onvermijdelijk en hangt ten nauwste samen met de interpretatie van het $\times$ -teken. In de betekenis van het $\times$ -teken als herhaling, staat voor het $\times$ -teken het aantal keer dat iets herhaald moet worden. Doordat er nu een negatief getal staat wordt de verwachting gewekt dat er een negatief aantal zou moeten staan. Het aantal-begrip laat zich echter niet transformeren tot negatieve aantallen. In de context wordt dat opgelost als een combinatie van een aantal en treintje dat de andere kant uitrijdt. Dit is niet in overeenstemming met wat je zou verwachten.

Extra moeilijkheid is nog dat niet duidelijk is waarom een treintje dat naar rechts wijst positief genoemd wordt en een treintje dat naar links wijst negatief. Bij het vertalen van positief en negatief naar rechts en links gaat de essentiële eigenschap verloren dat positief meer is dan negatief.

Vergelijken we beide contexten met betrekking tot analogie dan zien we een belangrijk verschil. In de heksencontext wordt geprobeerd de betekenis van het aftrekken van positieve getallen als temperatuursverandering door het wegnemen van blokjes, door analogie over te dragen op het aftrekken van negatieve getallen.

Doordat positieve temperatuur naar negatieve temperatuur kan worden getransformeerd en positieve warmte naar negatieve warmte, slaagt de analogie. In de treintjescontext wordt geprobeerd de betekenis van het vermenigvuldigen van positieve getallen als het herhaald verplaatsen van een treintje, door analogie over te dragen op het vermenigvuldigen van negatieve getallen. Doordat echter 'aantal herhalingen' zich niet laat transformeren tot 'negatief aantal herhalingen', moet een toevlucht worden genomen tot een andere interpretatie en gaat de analogie verloren. Bij deze vorm van analogie is er geen sprake van een verband tussen een bekende en een volstrekt nieuwe situatie. In " -2×3 " hebben de symbolen op zich al een betekenis en ook de uitdrukking als geheel heeft al een betekenis van vermenigvuldigen. De 'vertrouwde' treinensituatie laat zich daar niet zo gemakkelijk op overdragen door analogie. Voorwaarde voor het slagen van een analogie is kennelijk het intact laten van de begripsstructuur.

Kort samengevat zien we dat niet alleen de analoge situatie vanzelfsprekend moet zijn, met eigen autonome regels, maar dat ook de vertaling van de uit te leggen situatie naar de analoge situatie, voor zich zelf moet spreken.

§4.4: CONCLUSIES.

De bestudeerde contexten vertonen sterke overeenkomsten met elkaar. Ze hebben beide betrekking op een gefantaseerde wereld. Het zijn beide contexten ter introductie van formele begrippen en notaties. Het doel is van het begin af aan om de context los te laten. Het visuele aspect speelt een belangrijke rol in de presentatie. Desondanks zien we grote verschillen in effect.

Als mogelijke verklaring voor de verschillen tussen de heks enerzijds en het treintje anderzijds hebben we geconstateerd dat de vertalingen van de formele notatie naar de context in beide situaties nogal verschillen. Bij de heksencontext zijn de gebruikelijke interpretaties van de symbolen in de context terug te vinden. Bij de treintjescontext is dat niet het geval. De context leidt niet op een vanzelfsprekende manier tot de andere gewenste interpretatie van de symbolen. Zo ontstaat de situatie dat de interpretatie van de symbolen zelf aangepast dient te worden vóórdat een vertaling naar de context betekenis kan hebben. Op een betekenis-niveau laat analyse van de gebruikte analogieën bij de treintjescontext zien we dat er te weinig structurele overeenstemming is en dat de 'vertaal'-problemen dus onvermijdelijk zijn bij deze keuze van context.

Blijft over de door Broekman gestelde vraag of de 'sluiproute': "min keer min is plus" door de keuze van een andere geschikte context is te vermijden.

De wiskundige structuur van het vermenigvuldigen van negatieve getallen bevat een essentieel verschil met het optellen en aftrekken van negatieve getallen. Deze structuur is een combinatie van twee bewerkingen: vermenigvuldigen en aftrekken. De essentie van deze combinatie komt tot uitdrukking in de distributieve eigenschap. Hoewel deze regel zeker in een introductiefase niet expliciet zichtbaar zal zijn, is ze toch structureel op de achtergrond aanwezig. In een context die een waarom-uitleg door analogie probeert te bewerkstelligen, zal deze distributieve structuur als vanzelfsprekend element aanwezig moeten zijn. Bij de treintjescontext is dat zeker niet het geval.

Het idee van Freudenthal (1989)⁽¹⁾ om de negatieve getallen te ontwikkelen vanuit een meetkundige context (zie §4.2) heeft vanuit de voorgaande analyses veel aantrekkelijke kanten. De meetkundige situatie bevat voldoende vanzelfsprekende regels voor de leerlingen om als ontwikkelings- en verklaringsmodel te kunnen functioneren. Het is een totaal-situatie van toepassing op alle regels voor het rekenen met negatieve getallen. Het probleem van de sluip-route doet zich niet meer voor. "Min maal min is plus" is een direct visueel weer te geven regel. Ook de distributieve structuur is door het lineaire karakter van de meetkundige operaties, op de achtergrond aanwezig.

Een probleem blijft echter de overdracht van de in deze context ontwikkelde regels naar de 'kale' getalsopgaven zoals -2×-3 . De door Freudenthal geschetste voorbeelden hebben alle betrekking op de meetkundige context. De kans is groot dat

ook hier de regel "min keer min is plus" als autonoom verbalisme gaat functioneren.

De vraag is echter hoe erg dit is. Als een leerling wordt gevraagd 'kale' opgaven te maken, dan ligt het uit oogpunt van efficiëntie voor de hand dat daarbij 'kale' regels worden gebruikt. Het is een onvermijdelijk gevolg van de keuze van dit type opgaven waarin de leerling wordt gevraagd iets te doen in plaats van iets te begrijpen. Er moet een antwoord worden geproduceerd. De regel levert dat antwoord in één keer. De karakterisering 'sluiproute' is misplaatst, de leerling gaat gewoon recht op zijn doel af. De regel wordt door het type opgaven opgelegd en dat is onvermijdelijk. ^[2]

HOOFDSTUK 5: LETTERS EN FORMULES.

" 't Is eigenlijk heel makkelijk, een volmaakt wiskundeboek te schrijven. Hier heb je er een:

$$a = a = a = a.$$

Daar mankeert niets aan, en 't kunstje leert gauw genoeg. De onvolmaakte zijn lastiger, voor schrijver en lezer beide, en Hamilton's "Quaternions" b.v. is 'n hele kluiif.

Tòch 'n mooi boek. Hoe meer ik het lees, hoe eentoniger het wordt, en dat is juist het mooie ervan, naar mathematische smaak."

G. Mannoury: Mathesis en Mystiek.

Geen wiskunde zonder formules? Geen formules zonder wiskunde? Feit is dat letters en formules een niet weg te denken plaats innemen in de wiskunde. Moet je dan ook iedereen die kennismaakt met de wiskunde meteen met formules confronteren? Het hangt er natuurlijk vanaf wat die persoon met die kennis wil doen. De meeste mensen kunnen heel gelukkig worden zonder formules, alleen... soms heb je ze nodig.

§5.1: VARIABELEN.

Letters in formules worden doorgaans met het woord 'variabelen' omschreven. Achter dit ene woord schuilt echter een grote verscheidenheid van opvattingen en verschillende betekenissen. Willen we uitleggen wat een 'variabele' nu eigenlijk is, dan zullen er keuzen moeten worden gemaakt. In deze paragraaf wordt een overzicht gegeven van deze verscheidenheid in de literatuur.

De wiskundige betekenis van het woord 'variabele' laat zich niet zomaar in één verbale definitie vastleggen. Broekman e.a.(1982) hebben een aantal definities (omschrijvingen) uit encyclopedieën, boeken over de geschiedenis van de wiskunde en boeken over de achtergronden van wiskunde, naast elkaar gezet. Dit levert een breed scala van uiteenlopende omschrijvingen op, variërend van een strikt formele binnen de logica tot een taalkundige omschrijving van het ontstaan van het woord. Vervolgens hebben ze zich de volgende vragen gesteld:

- waarnaar verwijst het woord variabele?
- wat is de aard van een variabele?
- wat is de kern van een variabele?
- wat is de functie van een variabele?

Deze vragen hebben als leidraad gediend voor verdere analyses binnen de logica, geschiedenis van de wiskunde en de introductie van variabelen in de verschillende schoolmethodes. Tenslotte komen ze tot de volgende aanbevelingen die het invoeren van variabelen in de schoolwiskunde dienen te verbeteren:

- * begrip variabele langzamer invoeren,
- * instaproblemen verbeteren,
- * een veelzijdiger technische aanpak (hokken of haakjes om de te substitueren uitdrukkingen, andere letters gebruiken).

Het is jammer dat de auteurs geen expliciet antwoord hebben gegeven op de vier

vragen die ze zich hebben gesteld. De vragen dienden alleen maar als leidraad, als blikrichting, bij hun verdere onderzoek.

Deze vier vragen zijn juist de kernvragen in het onderzoek naar de betekenis van variabelen binnen uitlegsituaties.

In wiskunde op wetenschappelijk niveau wordt, in tegenstelling tot andere begrippen (zoals bv 'functie'), 'variabele' niet als een zodanig fundamenteel begrip ervaren dat een expliciete formele omschrijving nodig is. Alleen in de formele logika wordt nadrukkelijk aandacht besteed aan 'het begrip variabele' bij het definiëren van een formele taal. 'Variabelen' vormen daarbij een afzonderlijke categorie symbolen die samen met functie-, predicaat-, en logische-symbolen, in combinatie met grammaticale regels voor het samenstellen van deze symbolen, de hoofdbestanddelen uitmaken van 'termen' en 'formules' in de formele logika. Binnen deze formele omschrijving wordt vervolgens onderscheid gemaakt tussen gebonden en vrije variabelen en worden regels gegeven voor het substitueren van variabelen (zie bv: Shoenfield, 1967).

Opvallend bij deze definiëringen van formele talen is het informele gebruik van 'variabelen' om de formele taal te kunnen beschrijven. In de informele beschrijving worden bijvoorbeeld speciale letters gereserveerd voor formules, expressies, stellingen,... Shoenfield maakt onderscheid tussen variabelen en syntactische variabelen. Variabelen kunnen 'variëren over de reële getallen', syntactische variabelen 'variëren over de expressies van een (formele) taal'. Variabelen functioneren hierin als verwijzingen naar getallen of (formele) expressies.

Er is een duidelijke discrepantie tussen de formele omschrijving in de formele logika en het informele gebruik van 'variabelen'. Binnen de formele logika zijn variabelen niets meer dan speciaal gekozen basissymbolen, in het informele gebruik zijn het taalmiddelen, doorgaans aangegeven met letters, waarmee elementen uit een bepaalde categorie objecten (getallen of expressies) worden aangeduid. In aansluiting op deze formeel logische benadering, geeft Nederpelt (1987) een beschrijving van het wiskundig taalgebruik rondom de woorden 'variabele', 'constante' en 'parameter'.

In tegenstelling tot de geringe aandacht voor een expliciete definiëring van 'variabelen' binnen de wetenschappelijke wiskunde, worden er in de schoolwiskunde wel diverse pogingen gedaan tot een ondubbelzinnige omschrijving van 'variabelen'. We zullen een aantal van deze omschrijvingen analyseren om na te gaan of er een gemeenschappelijke kern in valt te ontdekken.

De opvattingen van Vredenduin liggen het dichtst bij de formeel logische opvatting van 'variabele' (Vredenduin, 1967). Deze keuze hangt samen met het idee dat een goede didaktiek van de wiskunde dient te steunen op korrekt en ondubbelzinnig wiskundig taalgebruik en dat een dergelijk taalgebruik het best aan bod komt bij de formeel-logische benadering van wiskunde. Vredenduin ontwikkelt een vereenvoudigd deductief formeel systeem dat direkt ontleend is aan de formele logika. Dit systeem is niet bedoeld voor leerlingen, maar voor docenten. Het geeft de

wiskundige achtergrond die het gebruik van 'variabele' als **open plaats in een open bewering** rechtvaardigt. Fundamenteel is hierin het onderscheid tussen open- en gesloten-beweringen. Gesloten beweringen zijn waar of niet waar. Open beweringen zijn onvolledige beweringen. Er moet nog iets aan de bewering worden toegevoegd voordat men een uitspraak over de waarheid daarvan kan doen. De formeel-logische opvatting van wiskunde functioneert hier als legitimatie van onderdelen uit de schoolwiskunde. De opvatting van een variabele als open plaats in een bewering dient daarbij als een rode draad door de verdere wiskunde te lopen. Het dient een soort basisidee te zijn waartoe het verdere gebruik van variabelen zich kan laten herleiden. (Zie ook: Van Dormolen, 1974 en Broekman, 1982)

Dit idee is nadrukkelijk aanwezig in schoolmethodes die gebaseerd zijn op het leerplan van 1968 en ontwikkeld zijn in de periode tussen 1960 en 1980. In de brugklasdelen wordt aangegeven wat een 'open bewering' is en dat voor de open plaats in een dergelijke bewering een letter mag worden geschreven, die dan 'variabele' genoemd wordt. Meestal wordt dit onmiddellijk gevolgd door een introductie van open beweringen over getallen.

In de delen voor de hogere klassen komt dit 'grond'-idee van variabelen niet meer terug. Nergens wordt meer verwezen naar variabele als plaatsbepaler in een vergelijking. Evenmin wordt expliciet aandacht besteed aan andere opvattingen over het gebruik van variabelen hoewel er wel degelijk sprake is van een andersoortig formeel symbolisch gebruik: het letterrekenen. De overgang naar deze symbolische rekenwijze is echter altijd impliciet en moet zich wijzen uit het gebruik zelf.

Freudenthal (1982) omschrijft variabelen als "een krachtig middel om de fysische, sociale en mentale wereld te kunnen begrijpen, interpreteren en controleren". Hij benadrukt daarbij het belang van het gebruik van variabelen in het gangbare wiskundige taalgebruik als namen voor variabele objecten. Daarmee hebben variabelen een sterk kinematisch aspect. Die objecten kunnen zowel onderdeel zijn van de fysische ervaringwereld als van de mentale wereld van de wiskunde die de fysische wereld weet te beschrijven. De steeds veranderende wereld om ons heen leidt vanzelfsprekend tot het gebruik van variabele wiskundige objecten, zoals: variabele getallen, grootheden, punten, verzamelingen. Variabelen zijn hiermee taalmiddelen geworden om veranderingen te kunnen beschrijven.

Hij verzet zich tegen het gebruik van variabelen als plaatsbepalers, dat wil zeggen: als gemarkeerde plaats waarin eigennamen ingevuld kunnen worden. "x loopt door de verzameling S" wordt zo gereduceerd tot " $x \in S$ ". Dit gebruik van variabelen als plaatsbepaler is volgens hem het gevolg van het onderzoek naar de grondslagen van de wiskunde waarin betekenis geïdentificeerd wordt met het formele gebruik van symbolen. Voor Freudenthal wordt de betekenis van wiskundige objecten en begrippen veel meer fenomenologisch bepaald: de betekenis laat zich afleiden uit het gebruik en het voorkomen.

Een dergelijke opvatting is direct terug te vinden in meer recent ontwikkelde leerstof, zoals in het materiaal van SLO en OW&OC. Hierin worden de leerlingen geconfronteerd met situaties die op een vanzelfsprekende wijze om een aanpak met

behulp van variabelen vragen. De betekenis van variabelen wordt daarbij niet geëxpliciteerd maar wordt vastgelegd door het gebruik daarvan in die specifieke situaties. Dat gebruik wijst zich vanzelf, nadere regels ontbreken en zijn overbodig. Variabelen treden op als afkortingen van woorden in formules. De gehanteerde formules zijn direkt terug te interpreteren tot samengevatte overzichtelijke weergaven van de gegevens. De formele manipulaties met de formules beperken zich in het algemeen tot het invullen van getalswaarden of het oplossen van eenvoudige lineaire vergelijkingen.

Goddijn (1979) heeft zich bezig gehouden met het probleem van de introductie van variabelen in de onderbouw. Hij vraagt zich af op welke wijze leerlingen een betekenisvolle introductie in het letterrekenen kunnen krijgen. Hij neemt daarbij een duidelijk standpunt in. Veel oplossingen van wiskundige problemen beperken zich bij leerlingen tot ad hoc oplossingen die volledig gebaseerd zijn op de gegevens van de specifieke situatie. De oplossingstechnieken zijn dan ook alleen maar in die situatie van toepassing. Het gebruik van variabelen ontstaat juist in het streven naar meer algemeen geldende oplossingstechnieken. Door het hanteren van letters in meetkundige figuren wil de wiskundige aangeven dat de figuur een willekeurige figuur is en dat de letters te variëren getallen voorstellen. De figuur is op te vatten als een representatie van een veelheid van situaties. De letters geven daarin aan wat er allemaal precies kan variëren. Het voorstel van Goddijn komt erop neer om vanuit de ad hoc situaties de stap naar algemenere situaties te maken. Kernvraag bij een dergelijke overstap is de vraag: "is dat altijd zo?" Beantwoording van deze vraag vraagt een overgang van een lokaal- naar een globaal- niveau. In een dergelijke overgang kunnen variabelen een hoofdrol spelen. Het zijn de taalmiddelen die het wiskundige proces van generaliseren mogelijk maken.

In de voorgestelde oplossing van Goddijn is echter niet duidelijk op welke wijze het formeel/symbolische letterrekenen met formules een betekenisvolle invulling kan krijgen. Goddijn schetst wiskundige situaties waarbinnen de introductie van variabelen op een natuurlijke wijze gestalte krijgt. Hij geeft hiermee een verdere specifieke uitwerking aan de ideeën van Freudenthal waarin variabelen een nuttig instrument zijn in het wiskundig taalgebruik om variabele situaties te beschrijven.

In een NLO-IOWO samenwerkingsgroep (Van Etten, 1980) is onderzocht op welke wijze variabelen in de schoolboeken voorkomen. De werkgroep constateert daarbij dat het begrip variabele weliswaar centraal staat in de algebra maar dat het op zoveel manieren gebruikt wordt dat een leerling niet duidelijk zal zijn wat er precies bedoeld wordt. Bovendien wordt meestal met weinig woorden de stap gemaakt waarin letters door getallen worden voorgesteld. Ze stelt dat juist het begin van het algebraonderwijs rijk zou moeten zijn aan problemen waaraan de leerlingen zelf, via een proces van mathematisering, tot de ontwikkeling van een formele, symbolische taal komen. Die taal moet dan functioneren als een handig hulpmiddel bij het oplossen van die problemen. Uit de verschillende mogelijkheden kiest de werkgroep heel bewust één: twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden. Men begint met woordraadsels waarin twee onbekende gegevens voorkomen. Deze eerste problemen laten zich nog

zonder meer oplossen door een redenering. Daarna volgen problemen die opgelost kunnen worden door de gegevens handig te combineren. Tenslotte worden woordproblemen aangeboden waarbij dat handig combineren niet meer zo duidelijk is te kiezen. Als hulpmiddel wordt dan een zogenaamde pijlentabel aangeboden waarin de gegevens zich overzichtelijk laten ordenen. In die pijlentabellen verschijnen de letters als afkortingen van woorden die aantallen aangeven, maar ook als namen voor onbekende getallen. Deze pijlentabel leidt uiteindelijk tot een weergave van de situatie door middel van twee vergelijkingen met twee onbekenden. De bewerkingen die moeten worden uitgevoerd om de vergelijkingen op te lossen laten zich terug-interpreteren als bewerkingen in de pijlentabel. De notatie in vergelijkingen met letters functioneert hier als een verkorte, symbolische weergave van een concrete situatie. De variabelen hierin zijn letters die verwijzen naar onbepaalde of onbekende aantallen of getallen. Een dergelijke notatie maakt snelle en overzichtelijke berekeningen mogelijk.

De voorstellen van de werkgroep zijn wat schetsmatig. Ze bevatten incidentele voorbeelden en beschrijven een grote lijn. Opmerkelijk aan de voorstellen van de werkgroep is echter dat een serieuze poging wordt gedaan om te komen tot een lijn in het leerplan waarin de formele symbolische manipulatie met variabelen een einddoel is.

Een andere 'betekenisvolle' omgeving voor het gebruik van variabelen treedt op bij het schrijven van computerprogramma's. In een computer wordt informatie opgeslagen in geheugenplaatsen. De geheugenplaatsen worden genummerd. Maar in programmeertalen kan men, vanwege een grotere herkenbaarheid, de geheugenplaatsen een naam geven. Zo'n naam kan een woord zijn, bestaande uit één of meer letters. Een dergelijke naam in een programma verwijst dus naar een geheugenplaats in de computer. Het geheugen van een computer wordt daarbij voorgesteld als een grote kast met veel laatjes. Sommige laatjes krijgen tijdens de uitvoering van een programma een etiket opgeplakt waarop de naam van dat laatje staat vermeld. De inhoud van het laatje is veranderbaar. Een geheugenplaats wordt dan ook wel variabele genoemd. Zo'n variabele bestaat dus uit een naam (het etiket) en een waarde (de tijdelijke inhoud van het laatje). Over het algemeen worden variabelen in een programma geïdentificeerd met hun naam. Men heeft het bijvoorbeeld over: "de waarde van de variabele a" als men naar de inhoud van de geheugenplaats verwijst. Die waarde hoeft niet per sé een getalswaarde te zijn. Het is ook mogelijk om stukken tekst op een geheugenplaats op te bergen. De waarde van de variabele is dan de tekst die in de betreffende geheugenplaats aanwezig is. (Van der Sluis, 1970)

Het grote voordeel van dit 'ladekasten'-model is dat het een tastbaar duidelijke voorstelling geeft aan het rekenen met variabelen. Formules geven aan op welke wijze inhouden van geheugenplaatsen kunnen worden gekombineerd tot een nieuwe inhoud. Er zijn echter een drietal essentiële verschillenpunten met de algebra.

In de eerste plaats hebben variabelen in een programmeertaal in principe altijd een waarde. In sommige talen is die waarde automatisch 0, tenzij de gebruiker zelf een expliciete andere waarde heeft gekozen. In ieder geval is altijd duidelijk welke soort waarden gebruikt mogen worden bij een gekozen variabele. Het waardengebied van een variabele is altijd op één of andere manier bekend of gespecificeerd binnen een programma. Dit is een gevolg van het feit dat het begrip waarde onverbrekelijk met variabele is verbonden. In de formeel/symbolische manipulatie in de algebra speelt de waarde geen rol.

In de tweede plaats is het $=$ -teken in een programmeertaal richtingsgevoelig. In " $A=3$ " betekent het $=$ -teken dat de variabele met naam A de waarde 3 krijgt. Het $=$ -teken is geen gelijk-teken maar een toekennings-teken (assignment). Dit laat het gebruik van formules van de gedaante $A = A+1$ toe (dit betekent: variabele A krijgt de waarde van variabele A plus 1). In de algebra is een dergelijke formule een strijdige vergelijking. In de derde plaats levert deze conceptuele voorstelling onvoldoende houvast om formeel/symbolische manipulatie met formules te kunnen ondersteunen. Herleidingen van formules komen in programmeertalen nauwelijks voor. Herleidingen hebben meestal het doel formules te vereenvoudigen. Soms is dat zelfs ongewenst, vanuit de techniek van het programmeren bekeken. Het oplossen van vergelijkingen, met name, wordt door dit model totaal niet ondersteund.

Samengevat: het idee van een variabele als een geheugenplaats levert een concrete conceptuele voorstelling voor de introductie van het begrip variabele. De gebruiksregels zijn helaas niet consistent met die van de algebra. Bovendien biedt dit model geen conceptuele ondersteuning voor de formeel/symbolische manipulaties in de algebra.

Proberen we de bevindingen van deze paragraaf samen te vatten, dan zien we grote verschillen in betekenis van het woord 'variabele'.

Variabelen zijn:

- een afzonderlijke categorie symbolen (in de formele logika),
- verwijzingen naar getallen of (formele) expressies (in de informele logika),
- open plaats in een open bewering,
- taalmiddelen om veranderingen te kunnen beschrijven,
- taalmiddelen die het wiskundige proces van generaliseren mogelijk maken,
- letters die verwijzen naar onbepaalde of onbekende aantallen of getallen,
- geheugenplaatsen met een naam (het etiket) en een waarde (de tijdelijke inhoud van het laatste).

Daarnaast komen we tot de volgende merkwaardige tegenstelling tussen wiskunde op professioneel/wetenschappelijk niveau en school-wiskunde:

- In de wiskunde op professioneel/wetenschappelijk niveau vindt er alleen een expliciete legitimering plaats van het formeel/symbolisch manipuleren met variabelen in formules. Voor het gebruik en de betekenis van variabelen in allerlei wiskundige situaties is geen expliciete aandacht.

- In de schoolwiskunde is de situatie precies omgekeerd. Alleen voor de begripsmatige introductie van 'variabelen' is expliciete aandacht en wel op verschillende manieren. Formeel/symbolische manipulaties (het letterrekenen) worden nauwelijks didactisch ondersteund.

§5.2: HET GEBRUIK VAN LETTERS IN DE WISKUNDE, EEN BETEKENIS-ANALYSE.

Na het literatuuroverzicht van de vorige paragraaf, zullen we ons in deze paragraaf vooral bezighouden met de fenomenologie van het gebruik van letters in de wiskunde. We zullen ons daarbij concentreren op de functie van letters als taalelement. Met name zullen we ons richten op de volgende twee vragen: wat stellen letters voor (waar verwijzen ze naar) en aan welke regels is het gebruik onderhevig?

Een eerste aanzet tot het antwoord op die vragen is al gegeven door Streefkerk (in: Freudenthal, 1962). Hij geeft de volgende klassifikatie:

- letters als onbekenden (in een vergelijking),
 - letters als onbepaalden (in algemene eigenschappen, formules, functies).
- Ook Küchemann (in: Hart, 1981) maakt een dergelijk, meer gedetailleerd, onderscheid van het gebruik van letters door leerlingen:
- een letter vertegenwoordigt een specifieke waarde,
 - een letter is een afkorting van een object of is zelf een object,
 - een letter is een specifieke onbekende,
 - een letter is een gegeneraliseerd getal,
 - een letter is een variabele.

Deze indeling is echter nog niet scherp genoeg. Ze geeft bijvoorbeeld geen verklaring voor het substitutie-principe, waarin voor iedere letter een waarde of een andere formule mag worden ingevuld. Dit principe berust op de rol van een letter als plaatsbepaler in een formule. Wanneer we specifiek gaan letten op de mogelijke verwijzingen van letters in formules, dan komen we tot de volgende indeling.

1. Een letter is een naam:

- voor een vast gekozen getal (een specifieke waarde),
- voor een onbekend getal,
- voor een veranderbaar getal (variabele).

2. Een letter is een plaatsbepaler.

3. Een letter is een gegeneraliseerd getal.

4. Een letter is een afkorting.

1. Een letter is een naam.

Namen verwijzen naar personen en objecten. Letterlijk ("Kan ik Piet even spreken?") en in gedachten ("Ik zie nog voor me hoe de Hoofdstraat er toen uitzag"). Een naam heeft de functie van een **aanroepmiddel**. Dat geeft meteen een essentie van het naamgeven aan: het gaat om het leggen van een verbinding tussen naam en object die voldoende duidelijk is binnen een bepaalde situatie.

Maar er is meer aan de hand. Een naam is verbonden met het object **als een eigenschap van het object**. Het staat niet zonder meer buiten het object, maar het is een onderdeel ervan. Sinterklaas kan alleen maar Sinterklaas heten. We kunnen

voor het object 'Sinterklaas' niet zomaar een andere naam nemen.

Dit verschijnsel komt ook voor in het werken met letters in de wiskunde. Bijvoorbeeld: in een rechthoekig assenstelsel is de horizontale as de x-as, de verticale as de y-as. 'x-as' en 'y-as' zijn als namen en dus ook als eigenschap verbonden met de horizontale respectievelijk verticale as. Het kost moeite om dat te veranderen en de assen andere namen te geven, bv. t-as en x-as. Door een dergelijke stap wordt een eigenschap van een object losgelaten.

'4' is niet zomaar een symbool voor het getal 'vier', 4 is het getal. Hier treedt een identifikatie op tussen symbool en object. Het symbool **is** het object. Binnen de formele wiskunde kan een dergelijke identifikatie tussen symbool en object expliciet voorkomen. Als $A = \{1,2,3,4,5\}$, dan is A die verzameling. Het vervangt het object volledig. Je kunt er dus met A rekenen alsof het $\{1,2,3,4,5\}$ is: $1 \in A$, $A \cap B$, ... zoals $1 \in \{1,2,3,4,5\}$ en $\{1,2,3,4,5\} \cap \{4,5,6\}$, ... Overal waar $\{1,2,3,4,5\}$ voorkomt mag je A schrijven.

Deze identifikatie tussen naam en object is een essentiële voorwaarde voor het kunnen toepassen van het **substitutie-principe** waarin objecten vervangen worden door hun naam en omgekeerd namen kunnen worden vervangen door de referenties.

Het substitutie-principe maakt de taal korter. Maar het schept ook andere mogelijkheden bij het wiskundig redeneren. Soms ontdek je bij een redenering dat je 'het $\{1,2,3,4,5\}$ -zijn' van A helemaal niet nodig hebt, maar wel 'het verzameling-zijn' van A. Op dat ogenblik stapt A in grotere schoenen: A staat niet meer voor de speciale verzameling $\{1,2,3,4,5\}$, maar voor een willekeurige. Bijvoorbeeld bij: " $A \cap B = B \cap A$

want $\{1,2,3,4,5\} \cap \{4,5,6\} = \{4,5\}$ en $\{4,5,6\} \cap \{1,2,3,4,5\} = \{4,5\}$ "

Het gebruik van de letters A en B is dubbelzinnig geworden. Het kan zowel staan voor de speciale gekozen verzamelingen als voor verzamelingen in het algemeen.

Daarmee wordt een naam **gelijkgesteld** aan een verzameling objecten. Zoals 'vierkant' kan staan voor een verzameling figuren van een speciale vorm.

Ervaren wiskundigen hebben haast geen erg meer in die objectsverandering. Zoiets komt vaak voor als onderdeel van een generalisatie-proces. In het dagelijks taalgebruik treden dergelijke verschuivingen ook op. Bijvoorbeeld in het volgende : "De kinderen waren wel erg bang voor Sinterklaas. Nou ja, eigenlijk hoort dat ook zo bij een Sinterklaas". In de tweede zin is 'Sinterklaas' verschoven van naam voor die ene Sinterklaas, naar een naam voor Sinterklaas in het algemeen. Heel belangrijk is hier echter het gebruik van het onbepaalde lidwoord 'een'. Het markeert de verschuiving. Weglating van dit lidwoord maakt de tweede zin onmiddellijk dubbelzinnig. Het is dan niet langer meer duidelijk dat het om Sinterklaas in het algemeen gaat in plaats van om die ene Sinterklaas. Ook het gebruik van het meervoud kan een dergelijke overgang signaleren.

Het gebruik van het substitutie-principe van namen, waarin de verschuiving van één object naar een klasse van objecten plaatsvindt, maakt dus generalisatie naar algemenere situaties mogelijk.

De regels voor het gebruik van het substitutieprincipe in de wiskunde zijn nogal veelzijdig en uitgesproken. In de omgangstaal wordt dit principe in een zwakke vorm gebruikt. Het is vaak fysiek onmogelijk om een naam in een zin letterlijk door het verwijzende object te vervangen. Een vorm van taalgebruik, waarin namen letterlijk worden vervangen door bijbehorende objecten, zoals bij letters en getallen, is dus voor leerlingen hoogst ongebruikelijk.

In: "A is het punt (1,1)" is de relatie naam-object veel losser. Het is niet zo belangrijk welke naam er nu precies wordt gegeven. In de ene situatie is dat de letter A, in een andere situatie kan dat de letter P zijn.

Is $x + 2 = 9$ dezelfde vergelijking als $y + 2 = 9$? Voor wiskundigen een flauwe vraag. Maar herkenning van de gelijkwaardigheid van die twee vergelijkingen berust op de vooronderstelling dat x een naam is voor een onbekend getal en dat die naamgeving geen herkenbare band met het object heeft (dus willekeurig mag worden gekozen). De namen functioneren als **hulpnamen**, zoals hulplijnen bij de constructie van een meetkundige figuur.. Je hebt ze even nodig en dan verdwijnen ze weer, samen met het object. In de omgangstaal komen dit soort namen ook voor. Bijvoorbeeld in: "Laatst kwam er een vent naar me toe, ik weet niet hoe die heet, ik noem hem maar even Kees,....." Hier geldt eveneens dat de naam zelf geen rol speelt omdat het niet belangrijk is wie precies de persoon is. Wel kan het feit dat de persoon een man is een rol spelen. Daarom werd de naam Kees gekozen. In de keuze van de hulpnaam zijn dus hooguit globale eigenschappen van het object terug te vinden. Bij letters in de wiskunde is dit ook zo: P stelt een punt voor (want punten geef je aan met hoofdletters), l is een lijn, A is een verzameling, a is een element van een verzameling. Het systeem van hulpnamen geven gebeurt volgens bepaalde traditioneel gegroeide regels en kan van plaats tot plaats verschillen.

Tot zover de relatie tussen naam en object waarnaar de naam verwijst. Die relatie kan sterk variëren: van hulpnaam tot volledige identifikatie.

1.1. Letters als naam voor een vastgekozen getal.

Omdat sommige objecten veel gebruikt worden in de wiskunde, heeft men er vaste namen voor gereserveerd: IN voor de verzameling natuurlijke getallen, π voor de vaste verhouding tussen omtrek en diameter van een cirkel, π is het getal (en niet zomaar een symbool voor het denkobject 3.141.....), enz... Hier is het verband tussen naam en object onverbrekelijk, zoals met eigennamen voor personen. Hier geldt het substitutie-principe. Overal waar π staat mag ik ook 3.14.... neerzetten. Leerlingen hebben in het algemeen weinig problemen met het interpreteren van dit soort letters. Deze verwijzing van letters wordt aangegeven met de uitdrukking: "de letter is een constante."

1.2. Letters als naam voor een onbekend getal.

In: $x + 2 = 9$ is x niet zomaar een naam voor een onbekend getal. x is dat onbekende getal. Nog ingewikkelder wordt de situatie als we schrijven:

$x = 7$. Nu is x een bekend getal geworden. " x " is de naam van een onbekend, nog nader te identificeren object.

Functioneert in ' $x+2=9$ ' de letter x als een naam voor een **in te vullen getal**, in:

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

stelt x een **uit te rekenen getal** voor. Hier werkt de vergelijking als een signaal voor het opstarten van een rekenalgoritme die in een oplossing resulteert. x is hierbij de naam voor de oplossing. De overgang van letters als in-te-vullen-getallen naar letters als uit-te-rekenen-getallen wordt bijna nergens expliciet vermeld. Het is niet altijd duidelijk welke referentie van toepassing is. Ook in $x + 2 = 9$ kan x worden opgevat als een uit-te-rekenen getal: $x = 9 - 2$, hoewel x als in-te-vullen getal hier meer voor de hand ligt. In het protocol van fragment 2 (§1.6) komt die dubbelzinnigheid aan de orde bij de vergelijking $2x + 10 = 42$. Sommige leerlingen bepalen x door in te vullen, andere door uitrekenen. Beide associaties zijn hier actueel. In feite is dat bij iedere vergelijking zo. Een letter als naam voor een onbekend getal kan zowel aan een in-te-vullen als aan een uit-te-rekenen getal refereren.

1.3. Letters als naam voor een veranderbaar getal.

In: " ... de omtrek van een cirkel met diameter d is ongeveer gelijk aan $3.14 d$ " (Moderne Wiskunde 2, H5, blz 89) is d een naam voor een veranderbaar getal. Hier geeft het woord 'variabele' goed aan wat wordt bedoeld: een te variëren getal.

Duidelijk is dat ook in het volgende voorbeeld:

"Bereken $(-2)^n$ als n variabele is over $\{1,2,3,4,...,10\}$ "

Nu is n geen letter die staat voor een open plaats in een bewering maar voor een veranderbaar getal in een formule.

De ene variabele kan door de andere bepaald worden. In dat geval heet de eerste de afhankelijke en de tweede de onafhankelijke variabele. Dit is geen strikt wiskundig onderscheid: het hangt van de situatie af of van de manier waarop een formule gelezen wordt. In:

$$y = x+2$$

wordt y doorgaans opgevat als de variabele die afhangt van x . In:

$$y-x=2$$

kan zowel y als afhankelijke van x of, andersom, x als afhankelijke van y worden opgevat. Dit verschil is terug te vinden in een verschil in terminologie:

* $y = x + 2$ is een **formule** die aangeeft op welke wijze y van x afhangt,

* $y - x = 2$ is een **vergelijking** die de relatie tussen y en x aangeeft.

Het gebruik van variabelen in de wiskunde komt in het volgende hoofdstuk uitvoerig aan de orde.

Afhankelijke variabelen kunnen veranderen als gevolg van veranderingen in de onafhankelijke variabele, maar dat hoeft niet. Een afhankelijke variabele kan ook konstant zijn:

$$y = x - x.$$

1.4. Letters als naam voor (de lengte van) een lijnstuk.

Van een vierkant met zijde p wordt de omtrek aangegeven met $4p$. Dit laat zich lezen als "vier keer de zijde p ". Hierin is p niet een getal, maar een naam voor een lijnstuk.

Een dergelijke verwijzing kan nog aanzienlijk worden versterkt door een bijbehorende figuur waarin het lijnstuk van de letter p is voorzien. 4p wordt bij een dergelijke interpretatie niet als vermenigvuldiging gezien, maar als een meetkundige configuratie van zijden. De formule is een afkorting van een bewering over een plaatje.

2. Een letter is een plaatsbepaler.

Letters kunnen een **dummy-karakter** hebben als ze variabelen voorstellen. Door $f(x) = x^2$ en $f(y) = y^2$ worden dezelfde functies gedefinieerd. De letters geven plaatsen aan waarin een getal ingevuld moet worden opdat er een concrete betekenis ontstaat: $f(2) = 2^2 = 4$. Deze referentie is voorwaarde voor het kunnen toepassen van het substitutie-principe waarin letters vervangen kunnen worden door meerdere getallen.

Wat te denken van het gebruik van letters in:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Zijn a en b hier namen van getallen? Bekend, onbekend, variabel, veranderbaar?

Natuurlijk stellen a en b hier getallen voor, alleen zal geen enkele wiskundige zich dat (willen) realiseren als hij/zij dit soort formules aan het afleiden is.

De letters staan niet alleen voor getallen, ze mogen ook nog vervangen worden door andere vormen met letters. $(2x-3y)^2$ reken je met behulp van bovenstaande formule uit door a te vervangen door 2x en b door -3y. Moderne Wiskunde introduceert deze formule met:

$$(\square + \triangle)^2 = \square^2 + 2\square \triangle + \triangle^2$$

en noemt dit een **bouwschema** van de formule.

Letters zijn hier **vormsymbolen**: niet de getalbetekenis is belangrijk maar de vorm van de hele formule. Het gelijkteken in de uitdrukking geeft aan dat de linker- formule vervangen mag worden door de rechter en omgekeerd. Dat er bij het invullen van getallen een getalsgelijkheid ontstaat, is in feite van ondergeschikt belang.

Bij: $a + b = b + a$ gebeurt iets anders. Deze regel betekent: de volgorde van getallen in een optelling mag worden omgedraaid. Hier is de getalbetekenis van de letters wèl essentieel. Deze betekenis van $a+b=b+a$ is een beknopte weergave van het feit dat bij het optellen van twee getallen de volgorde er niet toe doet. $a+b$ stelt hier de som van twee getallen voor. De letters a en b stellen plaatsen voor in een formule waar getallen kunnen worden ingevuld uit een niet nader gespecificeerde verzameling. $a+b = b+a$ kan echter ook als bouwschema worden geïnterpreteerd. Dan stellen a en b plaatsen in de formule voor waar andere lettervormen kunnen worden ingevuld. $a+b=b+a$ is een regel waarmee je andere formules kunt herschrijven. Bij $a+b=b+a$ is er dus sprake van een dubbele betekenis: het verwijst naar een algemene eigenschap van getallen (de commutatieve) en het verwijst naar een bouwschema, een herleidingsregel voor het herschrijven van formules.

De bouwschema-betekenis laat zich het duidelijkst herkennen aan de asymmetrie van het $=$ -teken. Het $=$ -teken heeft een herleidingsbetekenis. Het laat zich lezen als: wat links staat laat zich herschrijven tot wat rechts staat. Het $=$ -teken geeft dus een richting aan die correspondeert met een bepaalde herschrijfhandeling. Bij $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

is er sprake van "haakjes wegwerken", bij $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ heet dat: "ontbinden in factoren". Het zijn twee verschillende bewerkingen met formules die apart worden aangeleerd.

3. Een letter is een gegeneraliseerd getal.

In de beweringen:

" $2n$ is even, $2n+1$ is oneven"

spelen de uitdrukkingen $2n$ en $2n+1$ de rol van een beknopte weergave van alle getallen van de vorm:

$2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4, \dots$ respectievelijk: $2 \cdot 1+1, 2 \cdot 2+1, 2 \cdot 3+1, 2 \cdot 4+1, \dots$

$2n$ en $2n+1$ worden eenvoudigweg gebruikt als symbolen voor getallen van deze vorm. De uitdrukking $2n$ is een gegeneraliseerd getal. n is hierin niet een veranderlijke die bewust kan worden ingevuld over de verzameling natuurlijke getallen. De letter refereert hier aan alle natuurlijke getallen, het is een **gegeneraliseerd getal**. De klasse van objecten wordt gehanteerd als totaliteit. Er vindt een identificatie plaats tussen de letter en die klasse van objecten. Een dergelijke verwijzing treedt ook op in uitdrukkingen van de volgende soort:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Hierin verwijzen a^2 , b^2 en c^2 naar 'kwadraten', zonder dat expliciet bekend is uit welke verzameling die komen. De bekende, veel gemaakte foutieve uitspraak "-a is altijd negatief", is met deze verwijzing naar gegeneraliseerde getallen te verklaren: -a verwijst naar: 'negatief getal'. De generalisatie ontstaat door een visuele analogie. -a ziet er net zo uit als andere negatieve getallen. Herkenning van deze visuele analogie levert dus de generalisatie.

4. Letters als afkortingen.

Letters kunnen worden gebruikt als afkorting van een naam, zoals gebruikelijk is bij voornamen van personen. Zie bv:

"De verzameling van alle oplossingen heet de oplossingsverzameling van de vergelijking. We noemen een oplossingsverzameling voortaan S (Oplossingsverzameling is in het Engels: Solution set)." (Getal en Ruimte)

Ook in het volgende fragment treedt een dergelijke verwijzing op:

"Op de rechterschaal (van een weegschaal) staan een piramide en een kubus. Op de linkschaal ligt een bol. (.....). De bol weegt b gram, de piramide p gram en de kubus k gram. Ellen schrijft als vergelijking op: $b=p+k$. Herman schrijft de vergelijking $b=k+k+k$ op. Nina kiest de vergelijking $b=3 \cdot k$." (Moderne Wiskunde, vierde editie).

De vergelijkingen zijn hier een beknopte weergave van de situatie. Ze laten zich lezen als afkortingen van de zinnen: "een bol is een piramide en een kubus", "een bol is een kubus en een kubus en een kubus", "een bol is drie kubussen". Ieder teken in de vergelijking is op te vatten als afkorting. Als je de afkortingen kent, kun je de zin lezen. Ook de overgang van 'getal', via 'get' naar de letter g , maakt gebruik van de afkortingsverwijzing. g^2 laat zich dan lezen als 'een getal in het kwadraat'. Afkortingen demonstreren per definitie het substitutie-principe. Als je S. Kemme schrijft, mag je die S door Sieb vervangen.

Conclusie.

Zo te zien heeft het gebruik van letters binnen de wiskunde een veelzijdige en complexe betekenis die sterk afhankelijk is van de situatie. Centraal punt is het gebruik van het substitutieprincipe in de wiskunde. Dat berust op een aantal vooronderstellingen in de referenties van letters als naam, als plaats, als vormsymbool, als afkorting. Juist de wisseling en combinaties van deze referenties maakt dit principe zo moeilijk te begrijpen voor leerlingen.

Welke verwijzingen van letters in een bepaalde situatie actueel zijn, wordt sterk bepaald door de rol van de formules waarin de letters optreden.

Formules kunnen zijn: vergelijkingen, rekenschema's, gegeneraliseerde getallen, bouwschema's. In het volgende schema is geprobeerd een overzicht te geven van de samenhang tussen soorten formules en verwijzingen van letters daarin.

FORMULES.

	LETTERS	reken schema	vergelijking	bouw schema	gegen. getal
uit te rekenen getal		X	X		
onbekende			X		
veranderb. getal		X			X
konstante		X	X		
gegen. getal					X
afkorting		X	X		
uitdrukking				X	

Enkele voorbeelden uit schoolboeken.

In Moderne Wiskunde staat: "Letters voor open plaatsen heten '**variabelen**'"

In Getal en Ruimte: Vormen zoals $x+4=9$, $x-5=-3$ heten vergelijkingen. Een vergelijking oplossen betekent: alle getallen opsporen die je voor x moet invullen om een ware bewering te krijgen. Die getallen heten de **oplossingen** van de vergelijking.

In Sigma: We noemen $x+2=10$ een vergelijking. Het linkerlid daarvan is $x+2$, het rechterlid 10. In deze vergelijking heet x de **veranderlijke**.

Drie verschillende termen voor eenzelfde wiskundige begrip!

Letters in deze wiskundige situatie verwijzen naar open plaatsen in beweringen en naar vervangbare objecten.

Passen en Meten komt aan deze dubbele betekenis tegemoet door de leerlingen een strook met getallen te laten maken die ze door een open plaats in een formule kunnen trekken. Hoewel dit op een concreet niveau tastbaar maakt wat bedoeld wordt met een door getallen vervangbare open plaats in een bewering, is de afstand tot de formule met een letter waarschijnlijk te groot om de associatie van open plaats naar letter effectief te laten zijn.

Nog duidelijker wordt dit gebruik duidelijk gemaakt door volle namen te hanteren in formules, zoals in:

oppervlakte = basis $\times \frac{1}{2} \times$ hoogte.

Het gebruik van soortnamen suggereert dat hier getallen moeten worden ingevuld die corresponderen met de respectievelijke objecten in de beschreven situaties (in dit geval driehoeken). Dit gebruik maakt onmiddellijk duidelijk om welk vervangings-principe het hier gaat. Het woord 'getal' in: "getal² is groter dan 0 " geeft aan dat ook willekeurige getallen, los van iedere context, ingevuld kunnen worden. Later kunnen die namen door afkortingen worden vervangen. Eerst gedeeltelijke afkortingen: 'get', daarna alleen nog maar de beginletter: g (Wiskunde Exakt, deel 1). Op deze wijze wordt de dubbele betekenis van de letter als naam en plaatsbepaler, zorgvuldig gescheiden en treedt de letter pas op als naam nàdat een volledig beeld is ontstaan van het te verwijzen object.

Hoe maken onze leerlingen in Nederland kennis met deze merkwaardige gebruiken in de wiskunde? In de volgende drie paragrafen worden daartoe drie klassesituaties van drie verschillende brugklassen en docenten geanalyseerd.

§ 5.3: PROTOKOL 860219.

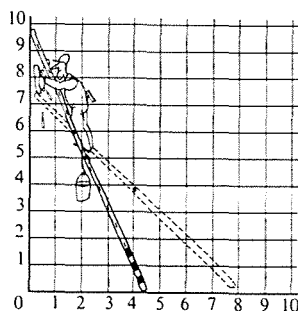
In een gymnasiumbrugklas bespreekt de docent Ja huiswerkopgave 32 met de klas, maakt een voorbereiding op de opgaven 33 tot en met 38 over vergelijkingen en weegschalen en beantwoordt vragen over het komende proefwerk over meetkunde. Alleen de eerste twee gedeeltes van de les zijn interessant voor het letterrekenen.

Opgave 32 in het boek.

In opgave 32 wordt een intuïtieve onderbouwing gegeven van het begrip variabele grootheid. De afstand van de voet van de ladder tot de muur is vrij te kiezen. Iedere keuze bepaalt een plaats van de knop in het midden van de ladder. Door de ladder naar onder te laten glijden ontstaat een dynamisch beeld van de veranderingen van de knop, waarbij de knop een bepaalde weg gaat afleggen. In deze situatie stelt de letter x de vrij te kiezen afstand van de voet van de ladder tot de muur voor. Het gebruik van de letter is niet functioneel. Het kan ook wel zonder x . De opgave kan zonder formules worden opgelost.

- 32** Een glazenwasser heeft een ladder van 10 m. Aan de zijkant van die ladder zit een knop, precies in het midden. Hij hangt er zijn emmer aan. De afstand van de onderkant van de ladder tot de muur is x m.

- Teken op roosterpapier de stand van de ladder, als $x = 4$. Teken de knop erbij.
- Teken in dezelfde tekening de knop als $x = 7\frac{1}{2}$.
- Langzaam laten we de ladder uit de verticale stand naar de horizontale stand gaan. Let op alle mogelijke standen die de ladder dan kan hebben. Teken met kleur de baan van de knop.



De opgave bevat een mogelijkheid tot verdieping. Na het tekenen van de baan van de knop kan men zich afvragen wat de vorm is van de baan. Op grond van meetkundige overwegingen kan men inzien dat dat een gedeelte is van een cirkel met straal 5 en de oorsprong als middelpunt.

Opgave 32 in de klas.

Ja concentreert zich meteen op de vorm van de baan. In de voorgaande les is geconstateerd dat de tekening niet helemaal realistisch is. Ja tekent een aantal standen van de ladder en vraagt dan naar de vorm van de baan. Hij zit daarbij te vissen naar een argumentatie voor de vorm van de cirkel. Daarna tekent hij de knop op $\frac{1}{3}$ van het eind van de ladder en vraagt wat nu de vorm van de baan is. De leerlingen komen daar niet uit. Ja geeft ook geen ondubbelzinnig antwoord. Op één plaats stelt Ja het begrip 'variabel' aan de orde.

Ja: Ja, nou dit zijn voorbeelden van eh, punten die dan variabelen, veranderlijk zijn. En elke keer als je die ladder op een andere plaats tekent, ligt dat punt op een andere plaats,

want daar zit toch een regelmaat in. En de regelmaat is dat ze op zo'n eh, kromme lijn liggen. Ja.

De opmerking wordt volledig ondergesneeuwd door het probleem van de vorm van de baan. In zijn afsluiting probeert Ja een soort samenvatting te geven:

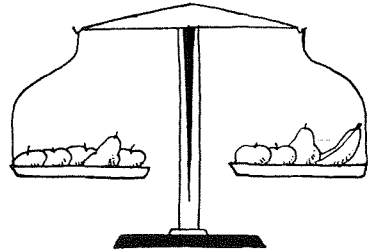
Ja: Ellips. Iets eh, van het volgende, we weten nu een klein beetje wat eh, ..., nou, dat laat je maar de volgende keer zien. Je weet nu een beetje wat variabelen zijn. Ik wil iets eh, van de rest van het hoofdstuk vertellen. 't Gaat over een weegschalen [tekent op het bord]. Nou,

Wegen en vergelijkingen in het boek.

Door middel van de weegschaal wordt een mentale visuele representatie van vergelijkingen opgebouwd. Hierin vormen 'evenwicht' 'gelijk afnemen' en 'inruilen' de kernbestanddelen voor latere formele representaties en manipulaties met vergelijkingen.

In opgave 34 kan het gewicht van de banaan uitgedrukt worden in dat van de appels door het links en rechts wegnemen van een peer en twee appels. De situatie is realistisch. Het gelijk wegnemen is bepaald door de eis van het handhaven van de vergelijking.

- 34** We hebben zes even zware appels, twee even zware peren en een banaan.
Een weegschaal houdt ze in evenwicht.
Wat kun je zeggen over het gewicht van de banaan?

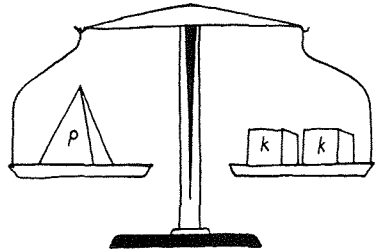


De letters in opgave 35 zijn sterk gebonden aan de voorwerpen op de weegschaal. Ze zijn op te vatten als afkortingen van deze voorwerpen. De bijbehorende formule is een beknopte symbolische weergave van het evenwicht. Deze verwijzing wordt expliciet door het boek gegeven in de laatste twee zinnen.

- 35** Op de linkerschaal van de weegschaal staat een piramide.
Op de rechterschaal staan twee kubussen.
De piramide weegt p gram en een kubus weegt k gram.

'De twee kubussen zijn samen even zwaar als de piramide.'

De uitspraak hierboven kun je kort opschrijven met een formule: $p = \dots$



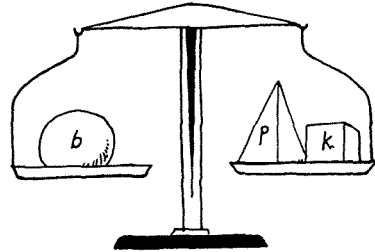
Opgave 36 bevat een aantal basisbegrippen en vaardigheden over vergelijkingen:

- introductie van het woord 'vergelijking' waarin het =-teken als karakteriserend symbool wordt aangewezen,
- het inruilen van een voorwerp door twee andere met gelijk gewicht,
- het weergeven van verschillende kenmerken van de situatie door verschillende vergelijkingen.

Met name dit laatste is een belangrijke stap naar een abstractie van de realistische situatie. De vergelijking $b = k+k+k$ stelt niet langer een plaatje voor maar is een ware bewering over een combinatie van twee plaatjes. Het is een voorspelling over een situatie die ontstaat als de piramide wordt ingeruild tegen twee kubussen. Daarmee wordt tegelijkertijd het substitutiesprincipe van letters geïntroduceerd.

Een vergelijking is in deze situatie een **identiteit**, een gelijkheid tussen twee termen. Dit is afwijkend van de andere gebruikelijke verwijzing van vergelijking als open bewering.

- 36** Op de rechterschaal staan een piramide en een kubus (dezelfde als in opdracht 35).
Op de linkerschaal ligt een bol.



- a** Wat kun je zeggen over het gewicht van de bol?
- b** De bol weegt b gram, de piramide p gram en de kubus k gram.
Ellen schrijft als vergelijking op: $b = p + k$
Herman schrijft de vergelijking $b = k + k + k$ op.
Nina kiest de vergelijking $b = 3 \cdot k$
Je ziet dat in een vergelijking het teken = voorkomt.
Kloppen die vergelijkingen van Ellen, Herman en Nina?

In opgave 37 nu eens geen plaatje. Met de gegevens van 35 en 36 kan de leerling zelf vergelijkingen maken. Hierbij worden voorwerpen vervangen door een combinatie evenzware voorwerpen. De verschillende mogelijke oplossingen kunnen een eerste oriëntatie leveren op de verschillende soorten vergelijkingen, waarbij $b+p = 5 \cdot k$ als een betere vergelijking kan worden opgevat dan $b+p = b+p$.

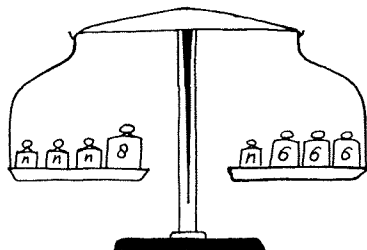
De formulering van vraag b in aansluiting op a geeft de vergelijking de expliciete verwijzing van symbolische weergave van evenwichtssituaties.

- 37** We gebruiken dezelfde voorwerpen als in opdracht 36.
Op de linkerschaal van de weegschaal staan de bol van b gram en de piramide van p gram.
Je zet op de rechterschaal zoveel gewicht, dat de weegschaal weer precies in evenwicht is. Je mag kubussen van k gram, piramiden van p gram en bollen van b gram gebruiken.
- a** Bedenk enkele manieren waarop je dit kunt doen.
- b** Schrijf bij elke manier de vergelijking op die erbij hoort.

Door de keuze van de letter n in opgave 38 wordt het rechtstreekse verband tussen letter en voorwerp verbroken. De letter staat voor: 'onbekend nader te bepalen gewicht'. Het plaatje doet vermoeden dat n kleiner is dan 6. Het is niet mogelijk de gewichten zodanig gelijk te verwijderen dat n op één schaal overblijft. Hierdoor worden de leerlingen gedwongen tot een 'compensatie'-principe: "de 8 aan de linkerkant wordt gecompenseerd door 8 van de 18 aan de rechterkant, voor $n+n$ blijft er dus 10 over".

Het is niet nodig de opdracht met behulp van vergelijkingen aan te pakken. Er vindt een verschuiving in betekenis plaats: van een identiteit naar een vraag.

- 38** Op de linkerschaal van een weegschaal staan drie gewichten van elk n gram en één gewicht van 8 gram. Op de rechterschaal staan één gewicht van n gram en drie gewichten van elk 6 gram. De weegschaal is in evenwicht.



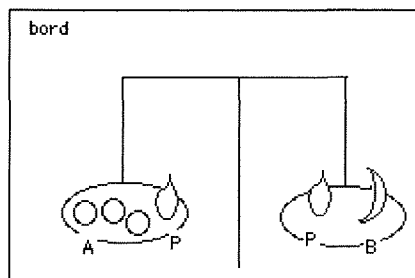
- a Probeer te vinden hoe groot n is.
- b Schrijf eens op hoe je dat hebt gedaan.

Wegen en vergelijkingen in de klas.

Ja introduceert dit onderwerp met een zelf gekozen voorbeeld. De leerlingen wordt gevraagd een uitspraak te doen over het gewicht van bananen en appels en daarna van appels en peren door twee plaatjes met elkaar te combineren.

Fragment 9.

- 1 Ja: Ik wil iets eh, van de rest van het hoofdstuk vertellen. 't Gaat over weegschalen [tekent op het bord]. Nou, sommigen hebben er al naar gekeken Eh, nou moet je eh, kijk even mee. Ik zal even het idee aangeven, dan weet je wat je moet doen. Ja, kijken jullie ook even? Je moet maar even niet te veel op de tekening letten, in het boek staat een veel mooiere. Dit zijn appels.
- 5 W: Dat moet je d'r wel bij zetten.
- Ja: Dat moet d'r ontzettend groot bij, de A van appels. Dit is een peer, dat is een P. Dit is dezelfde peer, weer 'n P en dit is eh [onverstaanbaar, zet de beginletters in de tekening].



- 10 Ik wil eh, nou een peer is even zwaar als die peer. Die balans die hangt in evenwicht, dat vertel ik erbij. Precies, hè, wat eh kun je nou over die banaan en die appels vertellen?

hoofdstuk 5

X: 2 appels zijn net zo zwaar als één banaan.

Y: 3 appels.

Ja: Zeg dat nog eens.

X: 2 appels zijn net zo zwaar als één banaan.

15 Y: 3

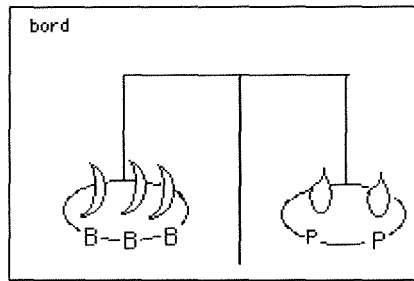
Z: 3 [gelach]

Ja: 3 appels zijn net zo zwaar als één banaan. [schrijft: $3A=1B$]

Z: 6 appels zijn 2 bananen.

Il: Hè, hè [gelach]

20 Ja: Eh, nu heb ik een eh... Nee, toch even meekijken. 'tWordt wat moeilijker, ik heb een andere balans. Eens kijken hoor... [tekent] ...2 peren en eh ...dit zijn bananen [gelach]. Hij is weer in evenwicht. Ja, let even op, moeilijk. En nou wil ik weten...Ik wil peren en appels met elkaar vergelijken. Dus ik wil weten, eh, hoeveel peren en hoeveel appels nou precies even zwaar wegen, en je hebt deze twee plaatjes. Dus ik wil weten, eh, het aantal peren ...



25 A: Vier en een halve appel.

Ja: St, even nadenken. [antwoorden uit de klas, schrijft: "...P=...A"]

Aa: Nadenken?

Ja: Even, laat iedereen eens even nadenken. Dus ik wil weten hoeveel peren evenzwaar zijn als hoeveel appels. [een leraar komt binnen] Goedemorgen.

30 Le: Mag ik even storen?

Ja: Jazeker wel.

[intermezzo waarin mededelingen van de leraar]

Ja: Eh, luister eventjes [tikt tegen 't bord] Kijk weer even mee, dan zullen we dit probleem nog even aanpakken. Is iedereen duidelijk wat ik bedoel?

A: Ja.

35 Ja: Hè, je weet een bepaalde overeenkomst tussen appels en bananen, 3 appels zijn even zwaar als 1 banaan. Je weet eh, je kunt hier iets uit concluderen. Peren en bananen zijn niet even zwaar, maar je kunt wel iets zeggen. Ik wil iets weten over peren en appels. Even nadenken. Ik wil bijvoorbeeld weten, 6 peren is even zwaar, zijn even zwaar als, als 3 appels, ik noem maar wat [geroezemoes].

40 B: Ik kan helemaal niet lezen wat er staat.

Ja: Je kan niet lezen. Hier staan 2 peren, 3 bananen.

B: Oh.

Ja: Je moet het even weten [onverstaanbaar] tegengestelde voor iets nemen [loopt door de klas]

45 Enig idee? [geroezemoes]..... Nou, [tikt met ring tegen het bord] ik heb eh, wat antwoorden gehoord. Ik heb gehoord eh, jij zei?

- C : 2 peren en 9 appels.
 Ja: 2 peren is hetzelfde als 9 appels. [schrijft $2P=9A$] En eh, jij had weer wat anders. Jij zei.
 D : Nee, ik zei 1 peer is vier en een halve appel.
- 50 Ja: Oh, jij zei 1 peer is vier en een halve appel.[schrijft: $1P = 4\frac{1}{2}A$]
 E : Dat is hetzelfde.
 Ja: Eh, ziet iedereen, dat dit eh dezelfde beweringen zijn?
 IIn: Ja.
 Ja: Iemand eh, iemand met nog een heel ander antwoord? Ja?
- 55 E : Een halve peer is twee-één vierde appel.
 IIn: Haha.
 Ja: Eh, je bent, je hoort zelf wel het [gelach], dus leg maar uit. Waarom lachen ze nou?
 E : Dat is gewoon.
 Ja: Nee, ik vroeg om een ander antwoord.[geroezemoes] Nee, je hebt het zelfde gezegd op een andere manier. Is er iemand die eh, denkt dat dit fout is, dat er echt een andere mogelijkheid is?
- 60 F : Nee.
 Ja: Nou, leg eens uit, hoe je d'r aan komt.
 F : Nou, ik heb eh, 1 banaan, dat is 3 appels.
- 65 Ja: Ja.
 F : En hier heb je drie bananen, en 3 keer 3 is 9 en 't zijn appels.
 Ja: Ja, 't is eh, als je maar handig met elkaar vergelijkt. Je kunt eh, elke banaan vervangen door drie appels. Dus 3 bananen kun je vervangen door 9 appels. Jij hebt wat anders, stil even, hij heeft wat anders.
- 70 G : 1 Peer kun je opwegen tegen anderhalve banaan, en anderhalve banaan is viereneenhalf appel.
 Ja: Ja, maar eh, je, je hebt op een andere manier beredeneerd, krijg je hetzelfde antwoord. En dat zullen we héél vaak zien bij dit soort sommen, hebben we ik ook al gezien bij die omtrekken ook eh, misschien herinner je je dat nog wel, je kon op een heleboel manieren een formule geven bij die tekening. En die eh, leken wel anders, maar die waren toch hetzelfde. Nou, dit eh, dit soort sommen ga je voor eh maandag maken. Ik wou 't hier even bij laten.
- 75

Samenvatting.

- 1 Uitleg hoe je de gewichten van verschillende voorwerpen op verschillende weegschalen kunt vergelijken.
- 3 Tekening van eerste weegschaal.
- 10 Uitleg wat het verband is tussen het gewicht van bananen en appels.
 17 3 appels is net zo zwaar als één banaan. $3A = 1B$.
 18 6 appels zijn twee bananen.
- 21 Tekening van tweede weegschaal.
- 23 Uitleg wat het verband is tussen de gewichten van appels en peren.
 35 3 appels zijn even zwaar als 1 banaan.
 37 Het gaat over peren en appels.
 38 Bijvoorbeeld: 6 peren zijn even zwaar als 3 appels.
 47 2 peren en 9 appels. $2P = 9A$
 49 1 peer is $4\frac{1}{2}$ appel. $1P = 4\frac{1}{2}A$
- 52 Dit zijn dezelfde beweringen.
 55 $\frac{1}{2}$ peer is $2\frac{1}{4}$ appel.
- 63 Uitleg hoe je dat uitrekent.

- 64 1 banaan is 3 appels.
 66 3 bananen is 9 appels.
 70 1 peer is $1\frac{1}{2}$ banaan.
 71 $1\frac{1}{2}$ banaan is $4\frac{1}{2}$ appel.

75 Verschillende formules kunnen eenzelfde situatie representeren.

Opvallend is dat er drie uitleggen tegelijk te herkennen zijn in dit fragment:

- Uitleg hoe je de gewichten van verschillende voorwerpen op verschillende weegschalen kunt vergelijken.
- Uitleg dat beweringen gelijkwaardig kunnen zijn.
- Uitleg dat verschillende formules eenzelfde situatie kunnen representeren.

De laatste twee uitleggen worden zichtbaar als terloopse opmerkingen, achteraf. Maar Ja vat daarin wel een aantal elementen samen die daarvoor met nadruk aan de orde zijn geweest. Het spel dat door leerlingen wordt gespeeld door het bedenken van andere verbanden, leidt tot de gelijkwaardigheid van beweringen. Het consequent schrijven van formules achter beweringen, leidt tot de uitspraak over de representatie van eenzelfde situatie. Het is niet zichtbaar wat er van deze laatste twee uitleggen is overgekomen in de klas.

Uitlegsoorten en uitlegstrategieën.

Uit de actieve inbreng van de leerlingen en de goede, verschillende antwoorden valt af te leiden dat er sprake is van een geslaagde uitleg. In de hoofduitleg vraagt Ja allereerst naar het verband tussen de gewichten, pas in tweede instantie komt de manier waarop dat verband is bepaald aan de orde. Een wat-is-het-geval-uitleg wordt gevolgd door een hoe-je-iets-moet-doen-uitleg. Bij de wat-is-het-geval-uitleg is er sprake van synthese: de situatie met één weegschaal wordt uit gebreid tot twee. Door een voorbeeld geeft Ja aan welk verband er wordt bedoeld (38).

Bij de twee neven-uitleggen is er sprake van generaliserende analogie. Ja leidt algemene beweringen af uit deze ene specifieke situatie.

Betekenis.

Ja legt veel nadruk op de manier van oplossen. Het gebruik van vergelijkingen speelt daarbij geen wezenlijke rol. Het zijn verkorte weergaven van uitspraken van leerlingen. De letters zijn nog duidelijk gekoppeld aan de voorwerpen. Bij de oplossingsmethode wordt voorbereid op het substitutieprincipe. Door de context wordt het substitutieprincipe als vanzelfsprekende regel ingevoerd. Er is echter geen sprake van een uitleg-hoe-het-substitutie-principe-werkt. Het substitutie-principe heeft een sterk formeel-symbolische betekenis waarin letters tegen elkaar of tegen andere uitdrukkingen kunnen worden uitgewisseld. In deze uitleg wordt de stap naar het formeel-symbolische nog niet gemaakt. De letters blijven gekoppeld aan de voorwerpen en het uitwisselen vindt nog heel nadrukkelijk met de voorwerpen plaats. De context heeft wel een sterke symbolische waarde. een weegschaal wordt weergegeven door een schematisch figuurtje, appels peren en bananen zijn nog

meer te herkennen aan de bijbehorende letters dan aan hun vorm. Daarmee vindt er een overdracht plaats van vanzelfsprekende regels van een concrete wereld van voorwerpen naar een gesymboliseerde wereld van tekeningen en formules.

Interaktie.

Uit de spontaniteit en de humor valt af te leiden dat er sprake is van een normale interactie. De leerlingen reageren positief op de vragen van Ja en Ja geeft duidelijke aanwijzingen en terugkoppeling over hun gedrag.

Na de introductie van de twee weegschalen, geeft Ja enige tijd gelegenheid aan de leerlingen om even over het probleem na te denken. Hij loopt daarbij door de klas en vangt enkele antwoorden op die hij later weer gebruikt. Hiermee wordt de interactie op een functionele manier benut.

Moeilijkheid.

Door de context van de weegschalen worden de leerlingen geconfronteerd met een situatie die voor hen voldoende vanzelfsprekendheden bevat. Het inruilen en gelijkstellen van voorwerpen met gelijke gewichten, is een bekend en vertrouwd terrein. De moeilijkheidsgraad is daarmee laag te schatten.

Voor de twee nevenuitleggen is dat maar de vraag. De opmerkingen van Ja zijn generaliserende opmerkingen die verwijzen naar de nieuwe gesymboliseerde betekenis van de context. De terloopsheid van de opmerkingen doet vermoeden dat het extra elementen zijn: leerlingen die het oppakken, komen er verder mee, voor leerlingen die het laten liggen is dat geen ramp, het komt te zijner tijd wel weer aan de orde.

Samenvatting.

Leerlingen worden door een eerste kennismaking met de weegschaal voorbereid op het substitutieprincipe. Er vindt een verschuiving plaats van vanzelfsprekende regels in een wereld van concrete voorwerpen naar een wereld van gesymboliseerde objecten. Ja hecht bijzonder veel waarde aan de eigen ideeën en oplossingen van leerlingen en aan hun wiskundige denkmethoden. Na de antwoorden wordt uitgebreid ingegaan op de oplossingsmethode.

§5.4: PROTOKOL 860227.

Dit protokol betreft een brugklas van het gymnasium.

De les gaat over de opgaven 15 en 16. Deze opgaven hoorden bij het huiswerk en worden op verzoek van de leerlingen besproken.

Opgave 15 in het boek.

In opgave 15 wordt een formule gegeven voor een rij getallen. Tot opgave 14 konden formules altijd worden geïnterpreteerd als symbolische weergaven van een algoritme of van een meetkundige situatie. In opgave 14 komt de formule $2 \cdot n + 5$ aan de orde.

15 Bij weer een andere rij getallen hoort de formule
 $p^2 + 4$

- a Noem het derde getal van deze rij.
- b Het hoeveelste getal is 40 in deze rij?
- c Iemand vraagt: 'Komt 50 in de rij voor?'
 Wim antwoordt direkt: 'Dat kan nooit.'
 Hoe kan Wim dat zo snel weten?

Tot nu toe werd voor een letter altijd de letter n (van nummer) gekozen. De keuze van de letter p zou die associatie kunnen doorbreken en kan de weg openen naar een meer algemene verwijzing van de letter in een formule als een in te vullen natuurlijk getal. Bij vraag a wordt het verband gelegd tussen p en het nummer van de rij. In b is p een op te sporen getal dat aan een voorwaarde moet voldoen. In c heeft p^2 de verwijzing van het gegeneraliseerde getal 'kwadraat'.

Opgave 15 in de les, fragment 10.

- 1 Br: St, stil even jongens, denk even na en kijk even na, als er nog dingen te vragen waren. Sonja, alvast?
 Jo: Ja, die 15c, die begrijp ik niet.
 Br: 15c, 15c, ja, daar kunnen we zometeen wel even naar kijken. Nog meer vragen
- 5 zo over bladzijde 56, 57.
 D: Nee.
 Br: He, nee, wat ik wel eh, wat me wel verbaast, dat jullie, sst, stil even eh,
 Norris, Anouk, nog een vraagje?
 An: Ja, onderdeel b.
- 10 Br: Van welke som?
 An: Nee, ik bedoel e, 't staat op m'n blaadje.
 Br: Van som 16.
 An: Van som 16, ja.
 Br: Ja. Nee, precies, dat bedacht ik zelf ook, dat dat wel een belachelijk moeilijke

- 15 vraag was.
 E: Van som 16?
 Br: Dus, dat snap ik wel [onverstaanbaar]. Zullen we even naar die twee kleine vraagjes kijken? Ja, gewoon even naar kijken hoor, niet zo ongeduldig zijn en meteen verder gaan. Met, voor de volgende keer, want 't zijn best moeilijke
 20 dingen. Even naar kijken. Nou, som 15, daar was het zo, daar moest je een rij maken en van die rij hadden ze de formule gegeven juist. Net andersom, als tot nu toe, hè, tot nu toe was het zo, dan moest je de formule bedenken. De formule is p kwadraat plus 4. Ja, dat was som 15 hoor [onverstaanbaar] 15 [wijst op bord aan]. En eh de eerste vraag waar het natuurlijk om gaat is, nou, maak dat
 25 rijtje eventjes. En, nou, laten we daar maar mee beginnen. Hier staat p , 1, 2, 3, 4.

bord					
p	1	2	3	4	

- Wie eh, wil er even een paar uitrekenen, Erik?
 Er: Eh, moet je p nou hetzelfde als n , of niet?
 Br: Ja, ja, dat is ook wat raar, hè. Je bent gewend eh, een beetje aan die formules
 30 dat er altijd een n staat. Nou, hier zie je dus, dat het best wel een andere letter mag zijn. Die p is dus een getal, maar je weet niet wat het kan zijn. Ja, Kiri.
 Ki: Nou, de eerste is 5.
 Br: Ja, dat klopt.
 Ki: En de tweede is eh 8.
 35 Br: Ja.
 Ki: En de derde is 13.
 Br: Ja.
 Ki: En de volgende is 20.
 Br: Ja, nou iedereen moet een beetje 't zelf proberen. [geroezemoes] Ja, ja, dat is
 40 goed hè. Jeroen heeft nog een opmerking?
 Je: Nee.
 Br: Je wou hetzelfde zeggen, ja, goed. Ja.
 F: Maar ik snap, [onverstaanbaar] waar moet je nou een n nemen. Ik bedoel waarom, waarom geen vraagteken of zo.
 45 Br: Kan ook.
 F: Waarom, persé een n .
 Br: Okee, heel goed, je zou ook heel goed kunnen zeggen [op bord: " $?^2 + 4$ "]. Dat kan ook heel goed. Dat betekent dus inderdaad, op de plaats van het vraagteken daar staat een of ander getal, je mag zelf weten welk en dan moet je denken aan alle
 50 getallen in N , en dan komt er een antwoord uit. Allemaal verschillende antwoorden. Bij elk getal een ander antwoord. Ja.
 G: Mag je daar niet gewoon getal neerzetten?
 Br: Ja, dat kan ook, mag ook hoor, zo [op bord: "getal² + 4"].
 H: Maar dat is zo lang.

- 55 Br: Dat is een beetje lang, dat is de enige reden waarom we't niet doen. Zo mag het ook hè. [op bord: "... $2+4$]. Zo zie je het ook wel eens. Allemaal hetzelfde.

bord
$?^2 + 4$
getal $^2 + 4$
$\dots^2 + 4$

- J: Bernd had hier een poppetje getekend.
 Br: Poppetje mag ook, ja.
 Be: Klikspaan.
 60 J: Klikspaan? [gelach]
 Br: Zo, nou ja [onverstaanbaar] De laatste vraag Sonja, misschien weet je het al wel hoor, kun je daar nu 50 krijgen?

bord						
P	1	2	3	4		
	5	8	13	20		50

- J: Ik denk het wel.
 So: Nee.
 65 Br: Hoe zou je dat uit moeten rekenen?
 So: Ik heb gedaan eerst eh, eerst eh 4 d'r van aftrekken.
 Br: Ja.
 So: En dan kijken of je dat ook door een getal kunt delen en dat getal moet er dan ook uitkomen.
 70 Br: Ja precies. Dus eh, je komt bij 46 terecht, hè? En eh, kon je toen al dat getal raden, wat je zocht?
 So: Nee, dat kan niet.
 Br: Nee, nou dat is dan ook het antwoord op de vraag. Dat kan niet. Ja, dat is goed.
 So: Ja, maar ik dacht dat er misschien nog een snellere manier was.
 75 Br: Nee, nee, wat je nou beschreven hebt, is denk ik de snelste manier hè. Je hebt al ontdekt, denk ik, hè. Als je van achter naar voren moet rekenen, dan moet je er eerst 4 aftrekken. Ja.
 K: Ik begrijp niet, dat, dat eh, dat Wim nu direct kan zeggen dat dat niet kan.
 Br: Hoe je dat direct...?
 80 K: Ja.
 Br: Oh.
 L: Wiskunde.
 Br: Ja, ik denk het ook hoor. Ja, als, als ik Wim was, dan kan ik je wel uitleggen hoe ik dat heel snel kan weten. Ja, vast wel. Ja, nee ik zou denk ik gewoon

- 85 doen wat Sonja ook zegt, d'r gewoon 4 aftrekken, 46 en ik weet wel uit mijn hoofd, al die getallen die je maal zichzelf doet, die kwadraten dus, die weet ik wel uit mijn hoofd. Ik, ik weet, dat 46, die hoort daar niet bij. Zo, zo iemand zal Wim, dus ook wel zijn.
- M: Als je met breuken gaat werken dan klopt ie wel.
- 90 Br: Ja, met breuken gaat ie wel. Daar heb je gelijk in. Goed, nou ik wil nog even naar die rare som 16 kijken hoor, want die is weer anders. Elke keer bedenken ze toch weer een ander idee.

De structuur.

- 1 - 16 Inventarisatie van de moeilijkheden in het huiswerk.
- 17 - 42 Inventarisatie van de antwoorden op 15a.
- 43 Uitleg hoe de formule eruit kan zien.
- 47 Er mag ook een vraagteken staan.
- 49 Uitleg waarom er ook een vraagteken mag staan.
- 49 Op de plaats van het vraagteken staat een of ander getal.
- 53 Er mag ook 'getal' staan.
- 56 Er mag ook '...' staan.
- 58 Er mag ook een poppetje staan.
- 62 Uitleg waarom 50 geen uitkomst kan zijn.
- 65 Uitleg hoe je dat zou moeten uitrekenen.
- 66 Eerst 4 eraf.
- 68 Kijken of dat een kwadraat is.
- 75 Uitleg dat dit de snelste manier is.
- 76 Je moet van achter naar voren rekenen.
- 85 Je moet uit je hoofd weten dat 46 geen kwadraat is.
- 88

Uitlegsoorten en uitlegstrategieën.

Br legt uit hoe de formule eruit kan zien door in te haken op de mogelijkheden die leerlingen hem aandragen. Het is een uitleg-wat-het-geval-kan-zijn door opsomming van mogelijkheden. Daartussenin maakt hij duidelijk waarom je ook een vraagteken kunt gebruiken door te verwijzen naar de invul-betekenis van de letter of het vraagteken. In het tweede deel van de uitleg is er sprake van een uitleg-waarom-iets-niet-het-geval-kan-zijn door te wijzen op een onmogelijk gevolg dat bekend is voor de leerlingen (46 is geen kwadraat). De tussenstap is een uitleg-hoe-je-dat-moet-uitrekenen.

Betekenis.

Door de tabelvorm te kiezen krijgt p de verwijzing van 'vrij te kiezen getal' p^2+4 verwijst daarmee naar: 'uit te rekenen getal'. De rol van de letter p in de formule p^2+4 is die van een niet bekend, zelf te kiezen getal. Br. maakt deze verschuiving heel expliciet in de regels 30 en 31.

Ook verwijst Br. naar p als een plaats waar iets ingevuld kan worden, de letter wordt daarbij letterlijk vervangen door een getal (49).

Tenslotte verwijst Br met letters naar het gebruik van letters als afkortingen van woorden (53-56).

We zien hoe de verschillende verwijzingen van letters door elkaar heen lopen in deze beginsituatie. Dat is niet in het minst storend in deze situatie. Het geeft de leerlingen de ruimte om de voor henzelf meest duidelijke representatie te kiezen.

Door het openlijke liberale beleid van Br ten aanzien van de keuze van het symbool voor het in te vullen getal, treedt een mogelijke generalisatie op waardoor de betekenis van de letter n verschuift van afkorting van nummer naar plaats voor een in te vullen getal. Als je toch alle soorten symbolen daar neer mag zetten, waarom dan ook niet de letter n?

De formule heeft in dit fragment de betekenis van een 'rekendoosje'. Je kunt er een vrij te kiezen getal instoppen, er komt een ander getal uit. Br verwijst hier expliciet naar (48-52).

Interaktie.

Br reageert consequent acceptierend op leerlingen. Ook als hun opmerking wiskundig niet helemaal korrekt is (90). Leerlingen aarzelen niet hun eigen ideeën en moeilijkheden naar voren te brengen. Br weet echter heel duidelijk accenten te leggen. Op sommige reacties gaat hij verder door. Hij geeft aan wat moeilijk is en vraagt daar ook klassikaal aandacht voor (19).

Moeilijk en duidelijk.

Het taalgebruik van Br wordt gekenmerkt door korte enkelvoudige zinnestelsels. Hij dwaalt niet af maar reageert heel direkt op het onderwerp dat aan de orde is. Dat maakt de uitleg zeer duidelijk, zowel op lokaal als op interlokaal niveau.

De vraag van Erik (28) geeft aan dat leerlingen nog moeite hebben met de willekeur waarmee je andere letters mag kiezen. Ze zijn gewend aan de letter n. Het onderwerp is moeilijk voor leerlingen. De uitleg niet. De uitleg is eenvoudig van structuur, sluit goed aan bij bekende zaken en verwijst niet naar nieuwe begrippen.

Opdracht 16 in het boek.

Deze opdracht bevat een bekend wiskundig probleem:

- 16a** In de figuur met drie stippen (figuur a) is elke stip met de beide andere verbonden. Daarvoor zijn 3 lijnstukjes nodig. Verbind nu in figuur b elke stip met de drie andere. Hoeveel lijnstukjes heb je daarvoor nodig?

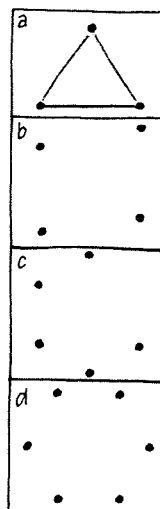
- b** Verbind in figuur c elke stip met de vier andere stippen. Hoeveel lijnstukjes heb je nu nodig?

- c** Bekijk nog eens figuur c. Uit elke stip vertrekken 4 lijnstukjes. Toch heb je niet 5×4 lijnstukjes getekend. Waarom niet?

- d** Vul de tabel in:

aantal stippen	3	4	5	6	7
aantal lijnstukjes	3				

- e** Hoeveel lijnstukjes moet je tekenen in een figuur met tien stippen? En hoeveel in een figuur met k stippen?



De opdrachten b en c sturen de leerlingen in de richting van een algoritme. Voor het geval van 5 stippen is dit algoritme nog visueel te controleren. Voor 10 stippen lukt dat al niet meer en zal de leerling de tekening in gedachten moeten afmaken. Dat geeft een autonome betekenis aan het algoritme die los is komen te staan van de visuele betekenis. De formulering "met k stippen" in de laatste vraag van opdracht e. vraagt naar een formule. Die formule functioneert dan als een symbolische weergave van het algoritme waarin de letter k verwijst naar een vrij te kiezen aantal stippen.

Opdracht 16 in de les.

Br. verwijst in zijn uitleg naar de formule als weergave van een regelmaat in getallen.

- Br. Precies, ja precies. Ja, dat hebben we gister ook al gezien, eergisteren, toen hadden we het er ook over, hè, je kan op twee manieren van zo'n rij de regelmaat zien. Je kunt eh, in die richting kijken. [wijst horizontaal langs de tabel] En dan zie je dat ie daar verspringt. D'r komt eerst 3 bij en dan 4 en dan 5 en dan 6. Ja, precies. Maar ja, als je een formule maakt dan zoek je juist naar de regelmaat die van boven naar beneden gaat [wijst van boven naar beneden in de tabel]. Hè, dat is wat een formule is.

De horizontale regelmaat laat zich niet zo gemakkelijk door een formule beschrijven. Met de verticale regelmaat bedoelt Br. waarschijnlijk de manier waarop het onderste getal uit het bovenste gemaakt kan worden. Dat is daarmee een indirecte verwijzing

naar het algoritme. Een letterlijke verwijzing naar het algoritme vinden we in het volgende fragment:

Br: 10 keer 9, dus wat moet ik nou bij n doen? n keer?

W: n min 1.

X: n min 1.

Br: Ja, maal n min 1, hè.

Y: Oh ja, n maal n min 1.

Z: Ja, maar waarom?

Y: En dat gedeeld door 2.

Br: [schrijft op bord: $n \times n - 1 : 2$] Dat lijkt mij een prima formule.

Hij schrijft letterlijk in symbolen hoe de handeling uitgevoerd wordt zonder dat hij zich daarbij bekommert over de afgesproken volgorde van bewerkingen. Pas in tweede instantie, na een opmerking van een leerling daarover, voegt hij haakjes toe. Daarmee wordt de letterlijke relatie tussen formule en algoritme verbroken.

Opvallend is dat de leerlingen door de keuze van de letter n afwijken van de keuze van het boek bij deze opgave. Br. maakt ze hier zelf attent op, hij noemt nog de mogelijkheid van het vraagteken en geeft daarmee de ruimte aan de leerlingen om een eigen keuze te maken.

Br: Ja, oh ja, dan moet dus hier k staan, hè [wijst naar n in de formule $n \times (n-1) : 2$]. En dan krijg je 10, 10 keer 10 min 1, gedeeld door 2, bij n is het n keer n min 1 gedeeld door 2 en bij k is het?

Ma: k keer k min 1....

Br: En bij vraagteken is het....

Ma: Vraagteken keer vraagteken min 1.

Br: Ja, precies, dat klopt ja.

Samengevat zien we ook hier een grote verscheidenheid aan verwijzingen van letters en formules. Deze worden door Br. expliciet zichtbaar gemaakt. Daarmee zijn ze ook bespreekbaar geworden binnen de klas. Br. geeft hiermee een aanvulling op het boek. Hij behandelt niet alle opgegeven sommen, in één opgave volgt hij niet letterlijk de tekst. Daarmee geeft hij zijn eigen invulling aan de tekst van het boek.

§5.5: PROTOKOL 860409.

In deze les worden de opgaven 20 tot en met 25 besproken. De klas is een heterogene brugklas MAVO,HAVO,VWO.

De opgaven 20,21,22 en 23 hoorden bij het huiswerk. Opgaven 24 en 25 zijn nieuw en worden in de les gemaakt en behandeld.

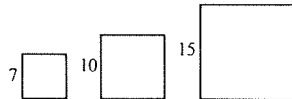
Opgave 20 in het boek.

In opgave 20a wordt gevraagd de omtrek van een vierkant uit te rekenen bij drie verschillende zijden. Daarna wordt een formule gevraagd voor de omtrek als de lengte van de zijde wordt weergegeven door de letter p . Dit suggereert een opbouw van concreet naar abstract waarbij een formule opgevat kan worden als de weergave van de rekenhandeling.

20a Schrijf van elk van deze vierkanten op hoe groot de omtrek is.

b De zijden van een vierkant zijn p lang. Geef een formule voor de omtrek van dit vierkant.

c Het vierkant met zijde p heeft een omtrek van 384. Hoe groot is p ?



Bij opgave b zijn meer goede antwoorden mogelijk, zoals: $4 \times p$, $4 \cdot p$, $4p$, of: $p+p+p+p$, $(p+p) \times 2$, $p \times 4$. Wat kunnen deze formules voorstellen in deze situatie?

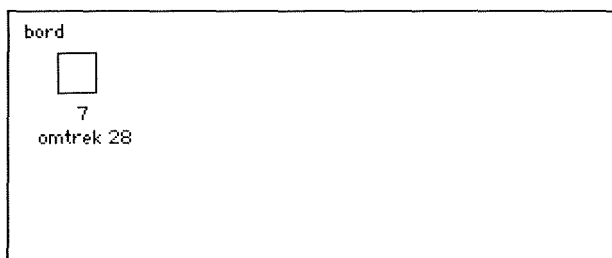
- * " $4 \times p$ " kan zijn: een symbolische weergave van het algoritme: "vier keer de zijde p ". Hetzelfde geldt voor: $4 \cdot p$.
- * " $4p$ " kan zijn:
 - een symbolische weergave van de meetkundige situatie als afkorting van: "vier zijden p ",
 - een afkorting van $4 \times p$, of $4 \cdot p$, en daarmee indirect van het algoritme "vier keer de zijde p ",
 - een gegeneraliseerd getal, dat wil zeggen: viervouden, getallen van de tafel van 4.
- * " $p+p+p+p$ ", " $(p+p) \times 2$ " en " $p \times 4$ " kan zijn: een symbolische weergave van de meetkundige situatie: de zijden vier keer bij elkaar opgeteld, twee zijden opgeteld en dat 2 keer, de zijde p en dat 4 keer.

In opdracht c is p een onbekend, nader te berekenen getal.

De situatie vraagt niet echt om een formule. Een formulering in woorden als: "vier keer de zijde" zou in alle opzichten voldoen. We zien dat de opgave geen eensluidende referentie geeft aan het gebruik van letters en formules. Dat hoeft geen bezwaar te zijn. De verschillende referenties bijten elkaar niet en het is niet nodig een expliciete keuze te maken.

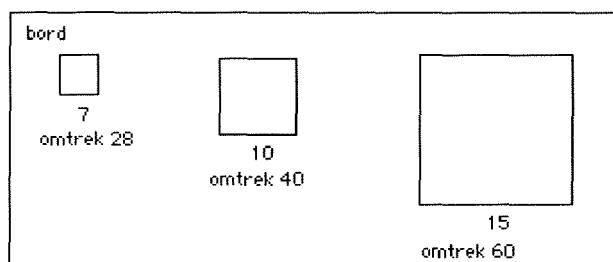
Opgave 20 in de klas, fragment 11.

- 1 Rij: Donderdag, hè. Goed, dan nu eh, je huiswerk voor je pakken som 20
bladzijde 53. [wacht] Daar moest je omtrekken uitrekenen van vierkanten. Het
eerste vierkant had een zijde van 7. Bert, wat is de omtrek dan?
Be: Eh, 28.
5 Rij: Keurig.

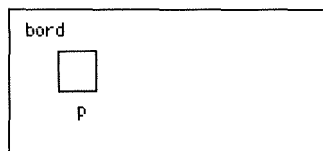


We maken hem iets groter, die had een zijde van 10. Judith, wat is daar de omtrek van?

- Ju: 40.
Rij: 40. En een derde met een zijde van 15. Henk, wat wordt daar de omtrek van?
10 He: 60.
Rij: 60.



Dat was nog niet zo moeilijk denk ik, maar dan komen ze met het probleem. Als je nou een vierkant hebt met een zijde p . Dus je hebt een vierkant, je weet niet hoe groot ie is. Wat is dan de omtrek, Gijs?



- 15 Gij: Ik had eh, p had ik.

- Rij: Jij had p. Dus als de zijde p centimeter is.
 Gij: Keer 4.
 Rij: Vier keer p, ja, p plus p plus p plus p. Wie had dat, eh, niet? Jij had dat niet. Laat eens zien dan.
 20 B: Nou, ik heb daar p plus p keer 2.
 Rij: Prima, p plus p, je moet ze wel tussen haakjes zetten, hè [zet op het bord (p+2)]. Of nee, wat zei je nou?
 B: p plus p keer 2.
 Rij: Plus p keer 2 [schrijft op het bord (p+p)x2]. Zo. je moet 't wel tussen haakjes zetten,
 25 want je moet eerst die p en die p bij elkaar optellen, hè. Dit getal plus dat getal, p plus p en dat keer 2, goed. Nog meer verschillende?
 C: Ja.
 Rij: Ja.
 C: p plus p plus p plus p.
 30 Rij: Uitstekend [op bord p+p+p+p]. Prima. Ja?
 D: P tot de vierde?
 Rij: Nee, p tot de vierde is wat anders. Kijk, we hebben afgesproken ooit eens, dat p keer p, dat dat p tot de tweede is. Dus p tot de vierde, wat zal dat dan zijn?
 D: p keer p keer p keer p.
 35 Rij: p keer p keer p ... en daar staan plusjes, hè. Dus dat is niet goed. C, d'r is een eh vierkant, dat heeft omtrek 384. Hoe groot is de zijde? Emo, hoe had jij dat?
 E: 96.
 Rij: 96 had jij..... Hoe heb je dat gedaan?
 E: Eh, gedeeld door 4.
 40 Rij: Gedeeld door 4. Is iedereen dat duidelijk? Jou ook? [schrijft op het bord]

bord	
c) omtrek 384	
zijde 96	384 : 4

- F: Ja, goed.
 Rij: Zijn hier nog vragen over? Janet ook niet? Nee? ...21.

De structuur.

- 1 Uitleg wat de formule is van de omtrek van een vierkant.
- 4 Een vierkant met zijde 7 heeft omtrek 28 [tekening].
- 6 Een vierkant met zijde 10 heeft omtrek 40 [tekening].
- 9 Een vierkant met zijde 15 heeft omtrek 60 [tekening].
- 13 Uitleg wat de formule kan zijn van een vierkant met zijde p. [tekening]
 - 17 p keer 4.
 - 18 $4 \times p = p + p + p + p$
 - 20 $(p+p) \times 2$
 - 24 Uitleg waarom p+p tussen haakjes moet staan.
 - 25 p+p moet je eerst uitrekenen.
 - 30 $p + p + p + p$
 - 31 Uitleg waarom p^4 fout is.
 - 32 $p \times p = p^2$ volgens afspraak.
 - 33 $p^4 = p \times p \times p \times p$

35 Er staan plusjes tussen in het goede antwoord.

36 Uitleg hoe je uit de omtrek van 384 van een vierkant, de zijde kunt berekenen.

39 Je deelt door 4.

42

Uitlegsoorten en strategieën.

In uitleg 1 worden voorbeelden opgesomd waarna door generaliserende analogie de formules kan worden gevonden. Alleen het antwoord $p \times 4$ wijst echter in de richting van generalisatie. Het is niet goed denkbaar dat leerlingen hun eerste antwoord hebben berekend door middel van het algoritme $(p+p) \times 2$.

Uitleg 13 is een uitleg-wat-het-geval-kan-zijn door opsomming.

Uitleg 31 is een uitleg waarom-iets-niet-het-geval-kan-zijn. Allereerst wordt de betekenis van p^4 uitgelegd door exemplarische analogie (gereduceerd voorbeeld). Daarna wordt erop gewezen dat dit in strijd is met het gevonden goede antwoord.

Moeilijkheid en duidelijkheid.

Hoewel er sprake is van een flinke gelaagdheid in de uitleg, levert dit vanwege de korthed van ieder fragmentje, geen extra moeilijkheden op.

Doordat de beginopdrachten betrekking hebben op concrete vierkanten met gegeven lengtes, ontstaat er een goede aansluiting tussen de gegeneraliseerde situatie en een bekende. Het is echter de vraag of deze verbinding ook door de leerlingen tot stand is gebracht. Hun antwoorden wijzen meer in de richting van voorgaande opgaven waarin de formules een symbolische weergave is van een meetkundige situatie. De uitleg over de formules speelt zich af op een formeel/symbolisch niveau. De relatie met de meetkundige situatie wordt niet expliciet gelegd.

Betekenis.

De enige expliciete verwijzing van een formule wordt hier door Rij gegeven bij de uitleg waarom p^4 niet een goed antwoord is. p^4 is op te vatten als een afkorting van $p \times p \times p \times p$ en niet van $p+p+p+p$. Het feit dat deze vraag gesteld wordt is een extra aanwijzing in de richting dat de formules voor de leerlingen op het formeel/symbolische betekenis hebben.

Het is jammer dat Rij niet doorvraagt op het antwoord $(p+p) \times 2$. Hoe komt de leerling aan dit antwoord? Verwijst de formule inderdaad naar de figuur waarin je lengte en breedte optelt en dat $2x$ doet? De verwijzing van de formule wordt nu niet zichtbaar gemaakt voor de leerlingen.

Interactie.

Het gaat in dit fragment om het bespreken van het gemaakte huiswerk. Dat betekent dat Rij zich afwachtend opstelt en reageert op initiatieven van de leerlingen. De inhoudelijke inbreng komt voornamelijk van leerlingen. Zij dragen mogelijkheden aan en stellen vragen aan Rij. Rij legt alleen maar uit als hij daartoe aanleiding ziet in directe reactie op een gegeven antwoord. Daarnaast bewaakt Rij het tempo en geeft hij aan wanneer welk onderwerp aan de orde is. In de gegeven situatie is er sprake van een normale en functionele interactie.

Opdracht 21 in het boek.

Ook in deze opdracht zit de opbouw van 'rekenen met getallen naar rekenen met formules'. Voor de mogelijke referenties van de formule bij opdracht c geldt hetzelfde als bij opdracht 20. De tekening bij deze opdracht met de letter m bij de zijde van de driehoek kan een interpretatie van de formule als symbolische weergave van de meetkundige situatie versterken. In vraag d is de letter m weer een onbekend, nader te bepalen getal.

21a Fred wil uit een dun latje een gelijkzijdige driehoek met een zijde van 12 cm maken. Hoeveel cm lat heeft hij nodig?

b In een DHZ-winkel zijn alleen nog een latje van 115 cm lang te koop. Fred besluit zijn driehoek groter te maken.

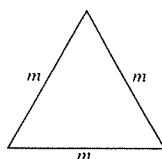
Hoe lang kan hij de zijde van de driehoek maximaal (op z'n grootst) maken?

c De lengte van de zijde van een gelijkzijdige driehoek is m .

Noem de formule voor de omtrek van deze driehoek.

d De omtrek van een gelijkzijdige driehoek is kleiner dan 30 cm.

Wat kun je zeggen over de lengte m van de zijde?

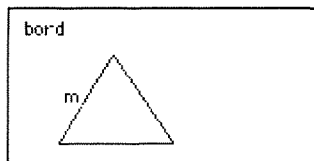


Opdracht 21 in de klas.

De breuken in het antwoord van opdracht b leveren nogal wat problemen op. Ook bij opdracht c gaat Rijk recht naar het antwoord toe, zonder verdere aandacht voor de verwijzing van de formule.

Rijk: Je hield wat over, 10 centimeter, ongeveer dus. Ja? Ik denk, dat dat het goeie antwoord is. Nou, je moet het in ieder geval delen door 3, die 115, je moet het over 3 zijden verdelen, 38, 1 over, $1/3$. c. Noem 'ns een formule voor zo'n driehoek als de zijde m is, wat is dan de omtrek, Dick?

Dick: m keer 3.



Rijk: m keer 3. Nog meer andere formules? Emo

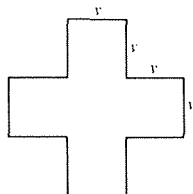
Emo: m plus m plus m .

Rijk: m plus m plus m , prima. Nog meer? Nee, goed. d.

Opdracht 22 in het boek.

De letter v staat zonder verdere aanwijzing als zijde bij de figuur. Verwijzing van een formule voor de omtrek als symbolische weergave van de figuur ligt voor de hand.

- 22 Schrijf een formule op voor de omtrek van het kruis hiernaast.



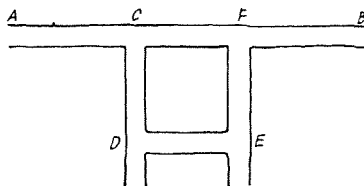
Opdracht 22 in de klas.

- Rij: Dan naar 22. Schrijf de formule op van de omtrek van het kruis daarnaast..... Hoe kan je zo'n formule opschrijven? Eh, Marjan.
 Ma: Eh, n keer 12.
 Rij: n, nou dat is een v -tje hè. Nou, dat geeft niet. v keer 12. Iemand wat anders? Ja?
 G: v plus v plus v .
 Rij: En dat moet je dan 12 keer doen, hè?
 G: Ja.
 Rij: Ja. Dat ga ik niet opschrijven, als je het niet erg vindt. Ik vind dat, ietsjes korter wel....

Opvallend is het gebruik van de letter n door Ma. Dat is de eerste letter die in het boek gebruikt wordt in een formule (zie §4.2.). Ook de volgorde: $v \times 12$ is opvallend. Het geeft een andere interpretatie aan de vermenigvuldiging: een aantal keer een getal. Deze notatie ligt dicht bij de exponentiële notatie: $v \times v \times \dots \times v = v^{12}$.

Opdracht 23 in het boek.

- 23 Fred fietst elke dag van huis (A) naar school (B). Deze afstand is 8 km.
 Op vrijdag 13 april is de weg tussen C en F opgebroken. Hij moet nu omrijden over D en E . Vierhoek $CDEF$ is een vierkant. De afstand van C naar D is s km.



- a Hoeveel kilometer rijdt Fred als hij via D en E van huis naar school gaat?
 b Op zijn kilometerteller staat, dat hij 11 km heeft gereden. Hoeveel is s ?

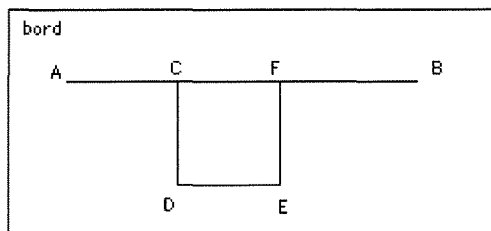
In 23a wordt gevraagd om een formule over het aantal verreden kilometers op te stellen. De letter s staat niet in de figuur aangegeven. Dat betekent dat er een grotere afstand tussen formule en context wordt gecreëerd. De letter s verwijst naar een bepaalde afstand.

Vraag 23b suggereert een overgang naar een vergelijking om daarmee de onbekende afstand uit te rekenen. Deze afstand laat zich ook rechtstreeks uitrekenen zonder vergelijking. De situatie is nogal gekunsteld. Als Fred op zijn kilometerteller kan kijken om de totale afstand te bepalen, dan kan hij ook zo de afstand CD bepalen. Mede

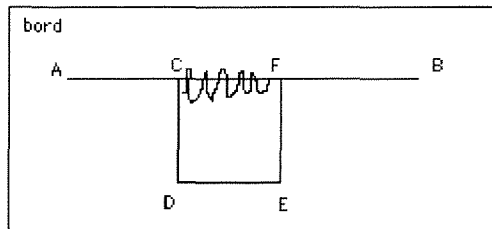
echter door de keuze van wiskundige elementen (een vierkant wegenplan, verwaarlozing van de straatbreedte) krijgt de context een meetkundig karakter waarbinnen het gekunstelde aspect verdwijnt.

Opdracht 23 in de klas,fragment 12.

- 1 Rij: Nou, dan komen we bij 23. Dat is wel een lastig sommetje. Sommigen vinden hem misschien makkelijk. [tekent op het bord]



- 5 D'r is gegeven dat een eh, ene jongen, Fred, als ie van school naar huis fietst en omgekeerd dat dat 8 kilometer duurt. Dus van ...A naar B... 8 kilometer. Op een dag, uiteraard op vrijdag de dertiende, want, eh, zoveel pech kan ie natuurlijk nooit op een gewone dag krijgen, is die weg opgebroken tussen C en F. Hier kan ie niet meer langs.



- 10 Hij moet omrijden via D en E. Nou weet je, dat van C naar D, dat dat s kilometer is, Hij weet niet precies hoeveel het is. Hij zegt dat is s kilometer. En je weet dat CDEF een vierkant is. Wat kun je nou van die andere stukjes zeggen, van DE bijvoorbeeld? Hans. Als CDEF als dat een vierkant is en CD, dat is s kilometer.

Ha: Die is gelijk.

Rij: Die is gelijk, dus ook ...

Ha: Eh

- 15 Rij: Dus die is ook s kilometer, hè.

Ha: Oh ja, s kilometer dan.

Rij: En wat dacht je van EF dan?

Ha: Die is ook s.

Rij: Die is ook s [schrijft in de tekening] Goed, nou rijdt ie van A via D en E naar B.

- 20 Gevraagd wordt, wat rijdt ie dan extra? Bijvoorbeeld, hij rijdt zo [wijst ACDEFB aan] en hij weet dat het van A rechtstreeks naar B, 8 kilometer is. Wat rijdt ie

eigenlijk extra, welke stukjes? Hans.

Ha: Die s.

25 Rij: Die s, en hoeveel rijdt ie s zo [wijst CD aan] en dan ook nog een keer zo [DE], zo [EF].

Ja: Nee.

Rij: Nee, ?

Ja: Alleen eh, naar beneden, twee van die stukjes.

Rij: Deze twee lijnen?

30 Ja: Ja.

Rij: Waarom?

Ja: Want eh, dat stuk CF, die ging eh, die deed hij anders ook en ...

Rij: Hij reed dat stuk anders ook, dat zit hier, hè, ook. Ja. Dus wat rijdt ie extra?

35 Twee stukjes s, hè? [schrijft dit op bord]. Dus hoeveel rijdt ie in totaal?Toe maar Dick.

Di: 8 plus 2 maal s

Rij: Totaal [schrijft op bord]... 8 kilometer, die hij altijd al reed, plus 2 keer s. Ja? Of plus s plus s, mag ook hè 8 plus s plus s, ja? Twee keer het stukje s. Nee Gijs? Dat snap je niet?

40 Gij: Mag je eerst ook ...

Rij: Kan je ook ...?

He: s tot de tweede

Rij: Nee, s tot de tweede, waar had ik dat ook, net weggeveegd, dat is s keer s. Maar om even op Gijs terug te komen. Hij rijdt van A naar B rechtstreeks, dat is 8

45 kilometer. Dan rijdt ie zo, hè. Als ie nou zo omrijdt, dat werd daarnet gezegd door Janet, dan rijdt ie dat stuk extra [wijst CD aan] en dat stuk extra [EF]. Ben je 't daarmee eens? Dus hij rijdt behalve die 8, rijdt ie ook nog een keer, s, naar beneden en s, omhoog. Ja? Iedereen dit duidelijk? Ja? Bij b zeggen ze. Nou, nou, zet ie toch een kilometerteltje maar weer een keer erop, en dan ziet ie, als ie

50 zo rijdt, via D en E, dat is 11 kilometer. Hoe groot is dan dat stuk dat opgebroken is? Bijvoorbeeld, hoe groot is die s? René.

Re: 1,5 kilometer.

Rij: Hoe doe je dat dan?

Re: Eh, gewoon van A naar B is 8 kilometer.

55 Rij: Ja.

Re: En, hij heeft eh, 11 kilometer gereden, gereden van A naar D en van E naar B.

Rij: Ja.

Re: En eh, die 3

Rij: Dus hij rijdt 3 extra.

60 Re: En dan gedeeld door 2.

Rij: Dat moet je verdelen over die twee stukjes, en dat is 1 1/2. Ja? Had iedereen dat? Janet

Ja: Bij som 1, daar had ik gewoon 11 min die 8 kilometer staan.

Rij: Ja, maar dan wist je b waarschijnlijk.

65 Ja: Omdat, dat eh bij b stond. Ja.

Rij: Ja, maar, ja

Ja: Maar moet je dat persé zo opschrijven?

Rij: Ja, eigenlijk had die vraag misschien wat duidelijker moeten zijn, en zeg je van eh, geef een formule voor het aantal kilometers dat ie rijdt.

- 70 Ja: Ja, want d'r stond gewoon hoeveel kilometers rijdt ie van D naar E?
 Rij: Ja, maar ze houden er bij het schrijven van het boekje natuurlijk rekening mee, dat je niet aan het spieken gaat bij de volgende vraag voor het antwoord.
 Ja: Oh, dat is gewoon
 He: Maar u zegt zelf altijd, je moet het eerst doorlezen.
- 75 Rij: Wat zeg je?
 He: U zegt altijd, eerst doorlezen.
 Rij: Ja, dat is waar. Goed, wie begrijpt dit niet. Theodora
 Th: b nog niet helemaal.
 Rij: b.Hij meet op zijn kilometerteller, als ie van A via D E rijdt, dat dat 11 kilometer
- 80 is. Hij weet, dat als ie rechtstreeks gaat, dat het 8 is. Dus hij rijdt 3 kilometer extra. Ja?Dat zijn nu net die twee stukjes s. Dus elke s is de helft daarvan. Goed, nou hebben we altijd met omtrekken gewerkt. We gaan nu eens verder met oppervlaktes. Hoe reken je ook weer oppervlakte uit, Gijs [onverstaanbaar]?

Struktuur van de uitleg.

- 1 Uitleg wat de formule is voor het aantal gereden kilometers (69).
 - 1 Oplezen van de gegevens, tekening.
 - 10 Uitleg dat DE s kilometer is.
 - 12 DE is gelijk aan CD
 - 17 Uitleg dat EF s kilometer is
 - 20 Uitleg wat hij extra rijdt.
 - 24 Uitleg hoeveel s hij rijdt.
 - 24 Wijst aan in tekening.
 - 26 Uitleg waarom hij 2s extra rijdt.
 - 32 CD reed hij anders ook.
 - 34 Uitleg hoeveel hij totaal rijdt.
 - 37 8 reed hij al.
 - 39 Plus 2s.
 - 43 Uitleg dat s^2 fout is.
 - 44 Uitleg waarom $8 + 2s$ de formule is.
 - 44 Hij reed al 8.
 - 48 Hij rijdt 2s extra.
- 50 Uitleg hoe groot s is.
 - 52 1,5 kilometer.
 - 53 Uitleg hoe je aan het antwoord komt.
 - 54 Hij reed 8 km.
 - 56 Hij rijdt nu 11 km.
 - 59 Hij rijdt 3 extra.
 - 61 Dat wordt verdeeld over 2 stukjes.
- 62 Uitleg waarom bij vraag a het antwoord 11 min 8 fout is.
 - 68 De vraag is in het boek onduidelijk gesteld.
- 77 Uitleg waarom het antwoord op vraag b 1,5 is.
 - 79 Langs de omweg is het 11 km.
 - 80 Rechtstreeks is het 8 km dus 3 km extra.
 - 81 Twee stukjes s is 3.

Uitlegsoorten en uitlegstrategieën.

Uitleg 1-48 is een uitleg-wat-het-geval-is. Door combinatie van de gegevens wordt de formule 'geconstrueerd'. Er wordt niet een handeling uitgelegd. In die zin is het geen uitleg-hoe-je-iets-moet-doen, al kan de hele situatie wel als een voorbeeld werken waaruit de leerlingen impliciet duidelijk wordt hoe ze een formule kunnen maken. Hetzelfde geldt voor uitleg 48-62.

In de regels 62-77 geeft Rij een reden waarom het antwoord fout is. Deze reden heeft niet direct met het antwoord zelf te maken en wordt door de leerlingen dan ook niet als een dwingende reden opgevat.

Uitleg 77-82 is een snelle herhaling, op verzoek. Door combinatie van feiten ontstaat een verklaring. Het is een waarom-uitleg door synthese.

Duidelijkheid en moeilijkheid.

Rij schat zelf in dat het een lastige opgave is (1). Dat verklaart misschien waarom hij daar zo uitgebreid aandacht aan besteedt. Het verschil met voorgaande opgaven is dat de letters er nu niet bij staan vermeld. Dat betekent dat de leerlingen zelf uit de tekst een vertaling naar een voor hen meer bekende situatie moeten maken. Daarnaast kan de formule alleen maar worden afgeleid door een combinatie van gegevens die niet in de figuur is terug te vinden. Het feit dat 2s extra wordt gereden komt tot stand door het gelijkstellen van wegdeel DE aan CF.

Door de open vraagstelling die niet strookt met de interpretatie van Rij ontstaat er globale onduidelijkheid. Pas in regel 69 geeft Rij aan dat het gaat om het vinden van een goede formule.

Door de uitgebreidheid van de uitleg, gaat de lijn van de argumenten wat verloren. Dat duidt op een interlokale onduidelijkheid.

Door een begrijpelijke vraagstelling en helder taalgebruik is er voldoende lokale duidelijkheid.

Betekenis.

Opvallend is dat leerling Ha zegt dat DE 'gelijk' is aan CD en niet 'evenver'. Het geeft aan dat de hele redenering zich afspeelt in de meetkundige situatie. Het feit dat het om een fietser en een opgebroken straat gaat, speelt geen enkele rol in de redenering.

Rij interpreteert 23a als een vraag naar een formule. De formule $8 + 2s$ verwijst niet rechtstreeks naar de meetkundige situatie. Er zit een redeneerstap tussen. Een rechtstreekse verwijzing zou zijn: $8 - s + 3s$.

De vraag naar s^2 geeft weer aan dat de formule voor deze leerling slechts een formeel/symbolische betekenis heeft.

In vraag b is s een onbekend, uit te rekenen getal. Dat kan met behulp van de vergelijking $8 + 2s = 11$. De leerlingen doen dat niet. Ze berekenen rechtstreeks uit de gegevens dat s de waarde $1\frac{1}{2}$ heeft. Vanuit deze context is niet duidelijk wat de meerwaarde van de formule is. De leerlingen vinden het maar ingewikkeld. Nergens maakt Rij expliciet wat er met die letters bedoeld wordt.

Interactie.

Rij heeft duidelijk het initiatief bij de uitleg. Hij introduceert de gegevens vrij uitvoerig

en geeft beurten aan leerlingen waarvan de vragen tamelijk gesloten zijn. Soms krijgt de uitleg daardoor het karakter van een invuloefening. (11). De vraag over s^2 wordt duidelijk afgekapt. Ook de opmerking over het verder lezen in het boek (74) wordt in feite genegeerd. Hierdoor krijgt de interactie een heel duidelijke wiskundig didactische functie. Rij wil de leerlingen actief bij de uitleg betrekken maar wil ze tegelijkertijd, gezien de ingeschatte moeilijkheden, zoveel mogelijk voor uitglijden behoeden. Toch is er wel sprake van een normale interactie. De leerlingen aarzelen niet te melden als ze het niet hebben begrepen. Rij reageert daar ook op.

Opdracht 24 in het boek.

Opdracht 24 suggereert een stapsgewijze opbouw naar een formule voor de oppervlakte van rechthoeken waarvan één zijde bekend is.

- 24a** Teken drie verschillende rechthoeken, die 4 cm lang zijn.
- b** Bereken de oppervlakte van elke rechthoek.
- c** Hoe groot is de oppervlakte van een rechthoek van 4 bij x ?
- d** Nu nemen we rechthoeken, die 5 cm breed zijn.
Schrijf een formule op voor de oppervlakte van die rechthoeken.

Via concrete zelf gekozen situaties berekenen de leerlingen de oppervlakten van rechthoeken met lengte 4. De formule $4x$ kan hierbij worden opgevat als een weergave van de berekening 'vier keer de lengte'. De uitdrukking $4x$ is niet rechtstreeks in de figuur terug te vinden.

Opdracht 24 in de klas.

Rij besteedt nauwelijks aandacht aan de formules. De meeste tijd gaat naar het omgekeerde probleem: bereken bij een gegeven oppervlakte de lengte van een zijde. Hiermee wordt een opstap gemaakt voor opgave 25.

In de bespreking van 24d komt een mogelijke andere referentie van $5x$ aan de orde:

- Rij: Ik zal eerst 24 even afmaken. 24c. Hoe groot is nou de oppervlakte van een rechthoek, waarvan de ene zijde 4 is en de andere x ? Wat is daarvan de oppervlakte, Harm?
- Ha: Eh, 4 keer x .
- Rij: 4 keer x , zei je dat? Ja. Of 4 punt x , dat mag ook, hè? d. Nu nemen we rechthoeken, die 5 centimeter breed zijn. Schrijf een formule op voor die rechthoeken. Dus nou zijn ze hier niet 4 breed, maar nou zijn ze 5 breed. Wat wordt dan de oppervlakte?Harm.
- Ha: Eh, $5x$
- Rij: $5x$, zeker. Als je nou, van zo'n rechthoek, van 5 bij x hè, weet, dat de oppervlakte 87 is, kan je dan ook die x uitrekenen? Ja hoeft 't van mij niet uit te rekenen, als je maar vertelt hoe je 't moet doen.
- P: Ja.

Rij: Hoe dan?

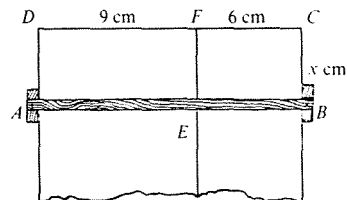
P: Gedeeld door 5.

5x kan rechtstreeks verwijzen naar de afkorting van de voor rechthoeken gebruikelijke uitdrukking: '5 bij x'. x refereert daarbij aan een gegeneraliseerde lengte: zijde van een rechthoek. Rij gaat hier niet verder op door. In feite is ook deze uitdrukking een weergave van de visuele situatie.

Opdracht 25 in het boek.

In deze opdracht worden de leerlingen uitgenodigd zich de veranderlijkheid van de variabele x eigen te maken door middel van de concrete situatie van een verschuivende lat. Die verschuivende lat speelt geen functie bij het oplossen van de gestelde problemen. Wel is het mogelijk dat de leerlingen een duidelijker beeld hebben van de situatie en daardoor een betere grip kunnen krijgen op het oplossingsproces.

- 25 Van een plaat karton wordt een (rechthoekig) stuk afgescheurd. De lat AB kan evenwijdig aan DC langs het karton heen en weer worden geschoven. AD en BC zijn dus veranderlijk. We noemen hun lengte x cm.



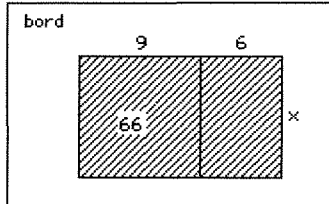
- De lat ligt zo, dat de oppervlakte van $EBCF$ gelijk is aan 17 cm^2 . Hoe groot is de oppervlakte van $AEFD$ en die van $ABCD$?
- De lat wordt verschoven. De oppervlakte van $ABCD$ is dan 66 cm^2 . Hoe groot is de oppervlakte van $AEFD$ en die van $EBCF$?
- De oppervlakte van $AEFD$ is 40 cm^2 meer dan die van $EBCF$. Hoe groot is x ?

Vragen a en b zijn verhoudingssommen. Alleen in vraag c komt de letter x voor. x is hier een onbekend, uit te rekenen getal. Dat kan door het oplossen van de vergelijking $9x - 6x = 40$, of door een meetkundige tussenstap te maken waarbij de zijde van 9 verdeeld wordt in $6+3$. x is dan $\frac{40}{3}$.

Opgave 25 in de klas.

Het grootste gedeelte van de tijd wordt besteed aan opdracht a. Leerlingen hebben moeite met de verhoudingssommen.

Rij: Als je even wilt kijken. Op [onverstaanbaar] is dat, die lat wordt verder geschoven en dan gaan ze weer een keer meten en dan meten ze de oppervlakte, kijk je ook even Gijs, van dat hele ding van die grote rechthoek en die is 66, hè, dus dan heb je, zoiets gekregen en de oppervlakte van dit hele ding is 66.



[bel gaat] Mag ik even afmaken en dit is weer x . Nou kan je x weer uitrekenen op de manier van Dick, want je weet dat de lengte 9 plus 6, 15 isJa? Nou, probeer daar voor de volgende keer eens uit te komen. Dat wordt voor morgen, het 4e uur dacht ik, maken 25.

Jammer dat Rij niet meer aan de volledige bespreking van 25b toekomt.

Samenvatting.

In deze les zien we een verscheidenheid aan mogelijke referenties van letters en formules:

- formules als symbolische weergave van algoritmen of meetkundige situaties,
- letters als vrij te kiezen, veranderlijke getallen of lengtes,
- letters als onbekende, uit te rekenen getallen of lengtes,
- letters als gegeneraliseerde getallen of lengtes.

Het is meestal uit de tekst van het boek niet duidelijk welke referenties precies aan de orde zijn. Veel opgaven kunnen ook zonder formules worden opgelost.

Nergens maakt Rij expliciet wat de letters in de ontwikkelde formules nu precies voorstellen.

Uit de twee uitgebreide lesfragmenten zien we dat Rij zijn stijl van uitleggen aanpast bij de door hem ingeschatte moeilijkheidsgraad van de opgave. Bij een wat hogere moeilijkheidsgraad houdt hij het initiatief meer aan zichzelf. Daardoor ontstaat in dezelfde les ineens een ander beeld van de interactie.

§ 5.6: DE VOOR- EN NA-TOETS.

In het kader van het onderzoek is aan het begin van hoofdstuk 3 uit Moderne Wiskunde een voortoets in de betreffende brugklassen afgenomen. Met deze toets werd geprobeerd te achterhalen wat de leerlingen al over veranderlijken en formules wisten vóór ze aan het hoofdstuk begonnen. Deze toets was voor alle drie klassen dezelfde. De toets had géén gevolgen voor het cijfer van de leerlingen. Dit werd vooraf aan de leerlingen meegedeeld. Bovendien stond dit boven de opgaven vermeld.

De lessen over hoofdstuk 3 zijn afgesloten met een proefwerk. Dit proefwerk was in essentie gelijkwaardig aan de voortoets. Ze zijn beide opgesteld op basis van een didaktische analyse van de inhoud van hoofdstuk 3, waarbij gestreefd is essentiële aspecten in beide toetsen in dezelfde verhoudingen aan bod te laten komen. Om voldoende representativiteit van de toetsen te garanderen zijn ze in overleg met de docenten opgesteld. Hierdoor zijn de formuleringen wat meer toegesneden op het gegeven onderwijs. Dit heeft tot gevolg gehad dat de natoets van de klas van Rij enigszins afwijkt van die van Ja en Br. Er zijn twee opgaven toegevoegd en de volgorde van de opgaven 1 en 2 is omgedraaid.

In eerste instantie zullen we de resultaten proberen te analyseren van de opgaven waar leerlingen een formule moeten proberen te vinden bij een gegeven regelmaat in getallen. Dat zijn: van de voortoets opgave 2 en van de natoets opgave 1 bij Ja en Br en opgave 2 bij Rij.

De voortoets, opgave 2.

Met getallen kun je allerlei getallendriehoeken maken. Eén zo'n driehoek ziet er zó uit:

1e regel	1
2e regel	1 2 1
3e regel	1 2 3 2 1
4e regel	1 2 3 4 3 2 1
5e regel	
6e regel	

- Schrijf van de getallendriehoek hierboven de regels 5 en 6 op.
- Wat is het middelste getal in regel 12?
- En in de een of andere regel met nummer n ?
- Hoeveel getallen staan er in regel 2, in regel 3 en in regel 4?
- En hoeveel in regel 10 en in regel 25?
- Hoeveel getallen staan er in regel n ?
- Tel de getallen in de tweede regel bij elkaar op. Doe dat ook bij elke volgende regel. Wat is de som van de getallen in regel 6? En in regel 9?
- En hoe groot is de som van de getallen in regel n ?
- In welke regel is de som van de getallen 12?

De natoets, opgave 1 (of 2) :

De volgende figuren bestaan uit witte en zwarte rondjes.

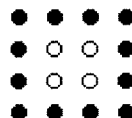
figuur 1



figuur 2



figuur 3



figuur 4



- Teken het **vierde** figuur van deze rij.
Hoeveel zwarte rondjes zitten hierin? En hoeveel witte rondjes?
- Hoeveel zwarte rondjes zitten er in het **tiende** figuur uit deze rij?
- Hoeveel witte rondjes zitten er in dit **tiende** figuur?
- Geef een formule voor het aantal zwarte rondjes in het vierkant van n bij n rondjes.
- Geef ook een formule voor het aantal witte rondjes van dit vierkant van n bij n rondjes.
- Iemand beweert dat hij zo'n vierkant met 38 zwarte rondjes kan leggen. Kan dat? Verklaar je antwoord.

Beide opgaven worden gekenmerkt door een opbouw van concrete situaties die zijn uit te tellen of te tekenen, via een concrete situatie waarbij dat tellen of tekenen niet goed meer mogelijk, naar de beschrijving van de algemene situatie met behulp van een formule. De opgave in de natoets bevat een extra moeilijkheid doordat het nummer van de figuur niet correspondeert met het aantal zwarte rondjes op de eerste rij in de figuur.

Bij de analyse van de antwoorden van beide opgaven zijn we vooral geïnteresseerd in het leereffect van hoofdstuk 3 ten aanzien van het kunnen opstellen van formules bij gegeven wiskundige situaties.

Daartoe zijn de leerlingantwoorden ingedeeld in de volgende 5 rubrieken:

- geen antwoord,
- weet geen betekenis te geven aan de uitdrukkingen "nummer n " en " n bij n rondjes" en vermeldt dit expliciet, bv: "Stomme vraag, die ik niet snap. Ik weet niet wat ' n ' is",
- geeft een eigen, van de wiskunde afwijkende, betekenis aan de uitdrukkingen "nummer n " en " n bij n rondjes", bv: "Het middelste getal is nummer 14, want n is de 14^e letter van het alfabet",
- geeft een omschrijving in woorden, bv: "Eén meer als wat n betekent",
- geeft een formule.

Bij de toekenning van een antwoord in de vijfde categorie doet het er in eerste instantie niet toe of de gegeven formule korrekt is. Het gaat erom te onderzoeken of leerlingen betekenis weten te geven aan formules. Op deze wijze heeft de extra moeilijkheid van de opgave in de natoets geen rol gespeeld.

De resultaten voor de drie klassen zijn weergegeven met behulp van onderstaande

matrices. In de meest linkse kolom staan de vijf categorieën van de voortoets, in de bovenste rij van de natoets aangegeven. In cel (i,j) van de matrix staat het aantal leerlingen dat van categorie i van de voortoets in categorie j van de natoets is terechtgekomen. De meest rechtse kolom bevat de procentuele verdeling van de leerlingen over de vijf categorieën van de voortoets, de onderste rij bevat deze procentuele verdeling over de vijf categorieën van de natoets.

Groep Ja								
van	naar	1	2	3	4	5	totaal	%
		1	2	3	4	5		
1		0	0	0	3	6	9	31
2		0	0	0	0	2	2	7
3		0	0	0	1	8	9	31
4		0	0	0	0	3	3	10
5		0	0	0	0	6	6	21
totaal		0	0	0	4	25	29	
%		0	0	0	14	86		

Groep Br								
van	naar	1	2	3	4	5	totaal	%
		1	2	3	4	5		
1		0	0	0	5	3	8	27
2		0	0	0	2	4	6	20
3		1	0	0	3	6	10	33
4		0	0	0	0	2	2	7
5		0	1	0	0	3	4	13
totaal		1	1	0	10	18	30	
%		3	3	0	33	60		

Groep Rij								
van	naar	1	2	3	4	5	totaal	%
		1	2	3	4	5		
1	2	0	0	2	11	15	63	
2	0	0	0	0	2	2	8	
3	0	0	0	0	3	3	13	
4	0	0	0	0	2	2	8	
5	0	0	0	0	2	2	8	
totaal		2	0	0	2	20	24	
%		8	0	0	8	84		

In deze overzichten zijn duidelijke verschillen tussen de groepen af te lezen. Bij de klas van Rij (brugklas MAVO, HAVO, VWO) geeft 63% van de leerlingen geen antwoord op de vraag in de voortoets naar de formules. Bij Ja en Br (brugklas gymnasium) is dit percentage aanzienlijk lager (31% en 27%). Niet alleen weten meer leerlingen wat een formule is bij Ja en Br (21% en 13% tegenover 8%), opvallend meer leerlingen durven een eigen betekenis te geven aan de letter n (31% en 33% tegenover 13%). We zien hieruit dat deze gymnasiumklassen niet alleen feitelijk beter zijn toegerust om met formules om te gaan, maar dat ze ook meer durf hebben een voor hen nieuwe situatie op eigen wijze te interpreteren.

Uit de resultaten van de natoets valt een aanzienlijke verschuiving bij alle groepen naar categorie 5 te constateren. Br blijft hier met 60% wat achter ten opzichte van de 84% van Rij en de 86 % van Ja. Dit wordt evenwel gecompenseerd door hoger percentage in categorie 4 (33% tegenover 8% en 14%). Wellicht heeft dit te maken met het geconstateerde feit dat Br een tolerant beleid tenaanzien van het interpreteren van formules heeft gehanteerd waarbij bijvoorbeeld ook woorden in formules mogen voorkomen. Nemen we de verschillen tussen de percentages van categorie 5 in voor- en natoets als maat voor het leereffect van dit hoofdstuk voor het 'leren opstellen van een formule', dan is dit leereffect aanzienlijk.

In het voorgaande is alleen bekeken of leerlingen formules weten op te schrijven bij de gegeven probleemstelling. Vanzelfsprekend is het ook belangrijk na te gaan in hoeverre de gepresenteerde formules juist zijn.

Bij het nakijken van de toetsen kon per opgave maximaal 1 punt worden behaald. De meeste antwoorden werden zo met 0 of 1 punt gewaardeerd, een enkele keer werd een halve punt toegekend. In het volgende overzicht staan de percentages van het aantal behaalde punten per opdracht. Bijvoorbeeld, bij Ja opgave 2c, is 38,9% van het totale aantal te behalen punten behaald. Dit percentage is aldus op te vatten als een maat voor het aantal goede antwoorden.

	Patronen (voor)									
	2a	2b	2c	2d	2e	2f	2g	2h	2i	Tot.
Ja	94,4	92,6	38,9	92,6	77,8	29,6	79,6	22,2	44,4	63,6
Bra	88,9	92,6	33,3	85,2	64,8	20,4	72,2	14,8	55,6	58,6
Rij	96,2	96,2	19,2	92,3	57,7	11,5	82,7	11,5	34,6	55,8

	Patronen (na)								
	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	Tot.
Ja	100	82,8	82,8	65,5	60,3	41,4	86,2	62,1	72,6
Bra	100	100	69	58,6	37,9	25,9	72,4	51,7	64,4
	2a	2b	2c	2d	2e	2f			
Rij	84,6		69,2	46,2	26,9	15,4	53,8		49,4

Vooraf de resultaten van de opgaven 2c,2f en 2h van de voortoets dienen vergeleken te worden met de resultaten van 1d (2d) en 1e (2e) van de natoets. De gemiddelde resultaten over deze opgaven zien er als volgt uit:

Ja: $\text{gem}(2c,2f,2h) = 30.2$, $\text{gem}(1d,1e) = 50.8$ [76]
 Br: $\text{gem}(2c,2f,2h) = 22.8$, $\text{gem}(1d,1e) = 31.9$ [60]
 Rij: $\text{gem}(2c,2f,2h) = 14.1$, $\text{gem}(2d,2e) = 21.2$ [52]

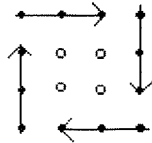
Ook hier valt een duidelijke leerwinst te constateren. Opvallend is dat het gemiddelde eindresultaat afhankelijk lijkt te zijn van de gemiddelde beginsituatie. Hoe beter de beginsituatie, des te hoger het eindniveau. Het is denkbaar dat juist bij dit fundamentele onderwerp een docent zal streven naar een beheersing door zoveel mogelijk leerlingen in een klas zodat het gemiddelde beheersingsniveau van alle groepen aan het eind ongeveer gelijk zal zijn. Opvallend is bovendien dat het gemiddelde eindniveau van de heterogene brugklas van Rij nog onder het gemiddelde beginniveau zit van de brugklas van het gymnasium.

De getallen tussen de vierkante haken zijn de gecorrigeerde getallen voor de extra moeilijkheid die deze opgave bevatte ten opzichte van de voortoets. Bij deze correctie zijn de antwoorden "4n" op vraag 1d en "(n-1).(n-1)" op vraag 1e alsnog goedgekeurd. De overweging is hierbij dat een leerling die beide antwoorden geeft, in staat wordt geacht de juiste formules bij de gegeven situaties weet te produceren maar in de war is gebracht door het verschil tussen het nummer van de figuur en het aantal stippen. In alle groepen heeft dit tot een verhoging van ongeveer 30% geleid. Het leereffect is nu aanzienlijk hoger. De prestaties liggen 46%,38%,38% boven de voortoets. Ook nu blijft een afhankelijkheid tussen het gemiddeld beginniveau en het gemiddeld eindresultaat zichtbaar.

Het grote verschil tussen de oorspronkelijke en de gecorrigeerde gemiddelden is te verklaren vanuit het verschil in oplossingsstrategie. De antwoorden "4·n" en "(n-1)·(n-1)" kunnen direct zijn afgeleid uit de concrete situaties die aan de vragen d en e voorafgaan. Daarbij kunnen de uitkomsten 4·10 en 9·9 letterlijk vervangen zijn door

uitkomsten met letters. De zo ontstane formules verwijzen daarin naar gegeneraliseerde getallen.

De korrekte oplossing van de opgaven vraagt een heel andere aanpak. Het gegeven: "nummer van de figuur" moet worden losgelaten en de leerlingen moeten een mentaal beeld zien op te bouwen van de algemene situatie met een willekeurig aantal stippen. De bij behorende formule verwijst daarbij naar dit meetkundige beeld en is op te vatten als een symbolische samenvatting daarvan. Dit kan rechtstreeks leiden tot de formule $4 \cdot (n-1)$ via het schema:



of tot $4 \cdot n - 4$ waarbij eerst de zijden zijn opgeteld en vervolgens de dubbelgetelde hoekpunten zijn afgetrokken. Ook is het mogelijk dat eerst het totale aantal stippen wordt bepaald ($n \times n$), vervolgens het aantal witte stippen $((n-2) \times (n-2))$ en dat deze van elkaar worden afgetrokken om het aantal zwarte stippen te bepalen. Al deze variaties komen voor onder de korrekte antwoorden. Ze komen niet voor onder de antwoorden waarbij de verwarring tussen nummer en aantal stippen is opgetreden. Uit deze vergelijking van antwoorden is af te leiden:

- dat de referentie van formules als gegeneraliseerd getal door ongeveer 30% van de leerlingen wordt gekozen,
- dat dit percentage niet essentieel verschilt per groep,
- dat de meetkundige referentie van formules door aanzienlijk meer leerlingen in de gymnasiumbrugklas is gekozen dan in de heterogene brugklas.

De andere opgaven.

De volledige tekst van de voor- en na-toets is opgenomen in bijlage 2.

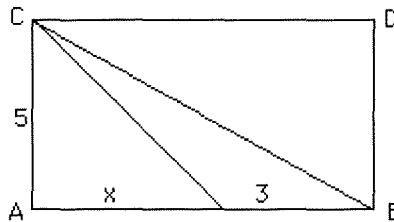
De volgende tabellen bevatten overzichten van de resultaten van de andere onderdelen van de toetsen. Ook hier representeren de getallen de percentages goede antwoorden. Hierbij is een goed antwoord met een 1 gescoord, een fout antwoord met een 0. Een enkele keer is een halve punt toegekend.

		Oppervlakte									
		voor					na				
		4a	4b	4c	4d	4e	Tot.	3a	3b	3c	Tot.
Ja		18,5	11,1	37	16,7	0	16,7	63,8	48,3	51,7	54,6
Br		18,5	18,5	33,3	20,4	3,7	18,9	75,9	69	29,3	58
Rij		7,69	7,69	15,4	7,69	0	7,69	4a	4b	4c	4d
								50	42,3	26,9	30,8
											37,5

De opgave over oppervlakte in de voortoets is door alle groepen slecht gemaakt. In de figuur komen twee letters voor. Ook de formule bevat twee letters. Uit de antwoorden blijkt duidelijk dat deze opgave volstrekt nieuw is voor de leerlingen en dat die daarom zo slecht is gemaakt.

De opgave van de natoets is slecht vergelijkbaar met de opgave van de voortoets. De getekende situatie bevat één letter x en de sub-opgaven zijn meer gesloten. Bij deze opgaven speelt de letter x aanvankelijk de rol van een vrij te kiezen lengte, daarna de rol van een onbekende lengte. Gezien de verschillen in resultaten tussen Ja en Br enerzijds en Rij anderzijds is het de moeite waard ook hier nader te onderzoeken wat precies de verschillen in capaciteiten zijn van de leerlingen ten aanzien van deze opgaven.

Opgave 4 was:



- (a) Als x is 5, hoe groot is dan de **oppervlakte** van rechthoek ABCD?
- (b) x is 9. Hoe groot is dan de **oppervlakte** van driehoek ABC?
- (c) De **oppervlakte** van driehoek ABC is 50. Hoe groot is x dan?
- (d) De **omtrek** van rechthoek ABCD is groter dan 40. Hoe groot is x dan ?

De toets van Ja en Br bevatte alleen de onderdelen b,c en d.

Opvallend is dat bijna de helft van de leerlingen bij Rij vraag a beantwoorden met: 25, b met: 22,5 en c met: 20. Dat betekent dat ze x hebben opgevat als de hele zijde AB van de rechthoek. Deze fout komt bij Ja en Br nauwelijks voor. Het is mogelijk dat de leerlingen van Rij door vraag a op het verkeerde been zijn gezet, al is niet goed duidelijk waarom dat zo kan zijn geweest.

Extra opvallend is dat juist de leerlingen die de hele toets onvoldoende ($<5,5$) scoorden deze fout hebben gemaakt. Een duidelijke verklaring van dit verschijnsel is niet te geven. Misschien heeft Rij in zijn lessen weinig aandacht geschonken aan dit type opgaven en was deze betrekkelijk nieuw voor de leerlingen. Daardoor zouden wiskundig zwakkere leerlingen extra gehandicapt kunnen zijn.

		Vergelijken									
		voor				na					
		3a	3b	3c	Tot.	4a	4b	4bb	4c	4d	Tot.
Ja		63	63	42,6	56,2	82,8	51,7	48,3	43,1	46,6	54,5
Br		70,4	63	40,7	58	93,1	62,1	62,1	62,1	53,4	66,6
						6a	6b		6c		
Rij		48,1	65,4	26,9	46,8	65,4	88,5		42,3		65,4

De opgaven over vergelijken bevatten een aantal basisvaardigheden ten aanzien van het oplossen van vergelijkingen. Dit gebeurt met behulp van plaatjes waarvan de

betekenis duidelijk herkenbaar is af te lezen. De leerlingen kunnen de problemen door handig combineren van de gegevens oplossen. Formeel rekenen met vergelijkingen is niet nodig.

		Getalspel				
voor		na				
1a 1b		2a	2b	2c	Tot.	
Ja	29,6 14,8	87,9	20,7	58,6	55,7	
Br	51,9 18,5	96,6	31	62,1	63,2	
		1a	1b			
Rij	11,5 0	61,5	53,8	57,7		

De opgaven in voor en na-toets zijn goed vergelijkbaar. De leerlingen worden geconfronteerd met een situatie waarin een willekeurig gekozen begingetal allerlei bewerkingen ondergaat, waarna de uiteindelijke uitkomst te voorspellen is. In vraag b wordt gevraagd om met een formule duidelijk te maken hoe het raadsel werkt. Vraag 2c bij Ja en Br vraagt de leerlingen om zelf een dergelijk spel te bedenken. Vraag 1b in de voortoets is door alle klassen slecht gemaakt.

De resultaten van Rij op vraag 1b in de natoets is opvallend beter dan van Ja en Br. Deze vraag discrimineert bij Rij fors tussen de voldoende en onvoldoende op de hele toets (89% t.o.v. 13%). Bij Ja en Br is dat veel minder het geval (29%-8% resp. 30%-31%). Dit type opgave komt expliciet in het boek voor. Een verklaring voor dit verschil kan zijn dat Ja en Br hier minder aandacht aan hebben besteed dan Rij.

Globale overzichten van de resultaten.

Bijlage 2b bevat de overzichten van de procentuele resultaten van de opgaven van de voortoets en de natoets. Daarbij is onderscheid gemaakt tussen de groepen leerlingen die de gehele toets voldoende ($\geq 5,5$) dan wel onvoldoende hebben gemaakt. Per opgave is uitgerekend hoeveel procent van de te behalen punten door iedere groep is gehaald. Op deze wijze is van iedere opgave het vermogen vast te stellen om onderscheid te maken tussen de groep voldoende en de groep onvoldoende. Opvallend is dat het discriminierend vermogen van een opgave aanzienlijk toeneemt als het gebruik van formules aan de orde komt. Dit is in het bijzonder het geval bij opgave 2 van de voortoets en de opgaven 1 van Br en Ja en opgave 2 van Rij van de natoets. Hierin komt een geleidelijke overgang aan de orde van concrete eenvoudige getalsituaties, via meer ingewikkelde veralgemeniserende getalsituaties tot de weergave met behulp van formules. Dat betekent dat het gebruik van formules een selectieve lading heeft gekregen in deze toets.

Tot slot staan in bijlage 2c de globale overzichten van de scoreverdelingen op voor- en natoets voor de drie groepen. Daartoe zijn de percentage-scores in volgorde van grootte in staafdiagrammen uitgezet. Horizontaal staan de leerlingen genummerd, verticaal is de percentage score weergegeven.

Nemen we de 55% als grens tussen voldoende-onvoldoende, dan scoort de helft van de gymnasium-leerlingen op de voortoets voldoende. Bij de heterogene brugklas van Rij ligt dat aantal aanzienlijk lager.

Bij de natoets zijn de aantallen voldoende aanzienlijk hoger dan bij de voortoets.

Opvallen is het verschil tussen Br enerzijds en Ja en Rij anderzijds. Van de laatste twee komen de resultaten goed met elkaar overeen. Bij Br zijn aanzienlijk meer voldoende.

Samengevat.

Er is een aanzienlijk verschil in de beginsituatie van de gymnasiumklassen enerzijds en de heterogene klas anderzijds. Veel leerlingen van het gymnasium weten bij de voortoets al wat formules zijn en ze kunnen er op bescheiden wijze al mee om gaan. Dat verschil is bij de natoets aanzienlijk gelijkgetrokken. Tussen de klas van Ja en die van Rij is geen opvallend verschil in globale resultaten meer te bespeuren.

Ten aanzien van het aspect "het leren opstellen van formules" blijkt er een lichte afhankelijkheid te zijn van de beginsituatie. Hoe beter de klas in de voortoets scoort op dit aspect, hoe beter de scores op de natoets zijn. Gymnasiumleerlingen blijken in de voortoets niet alleen over meer feitenkennis te beschikken, ze durven ook gemakkelijker een eigen interpretatie te geven aan een voor hen nieuwe situatie.

Ten aanzien van het "korrekt leren opstellen van formules" blijft de heterogene klas duidelijk achter bij de gymnasiumklassen. De resultaten in deze klas zijn gevoeliger voor de extra moeilijkheid in de natoets. Bij de meetkundeopgave lijken de leerlingen de opgave slordig geïnterpreteerd te hebben.

De opgaven waarin formules echt nodig zijn, hebben een groot discriminerend vermogen ten aanzien van de leerlingen die onvoldoende dan wel voldoende scoren op de hele natoets. Dat geldt niet voor andere opgaven.

§ 5.7: TOT SLOT.

Er blijkt een grote mate van verscheidenheid in opvattingen te bestaan over het gebruik van variabelen in de wiskunde, in het bijzonder de schoolwiskunde. Variabelen worden opgevat als essentieel onderdeel van de formeel-symbolische wiskundige notatie. Aan de andere kant zijn variabelen cognitieve sleutelbegrippen waarmee veranderlijke samenhangen in de omgevingswereld kunnen worden beschreven.

Letten we op de verwijzingen van letters en formules in het wiskundige gebruik, dan valt ook hier een grote mate van verscheidenheid op die sterk samenhangt met de verscheidenheid waarmee formules in de wiskunde functioneren. Letters kunnen zijn: namen van: constanten, onbekende getallen, in te vullen getallen, uit te rekenen getallen, lijnstukken; plaatsen in een formule; afkortingen. Een belangrijke regel in het gebruik van letters is de substitutieregel. De geldigheidsbasis van deze regel berust sterk op het specifieke gebruik van de letters. Soms is een letter alleen maar te vervangen door een getal, soms door een getal of een algebraïsche uitdrukking.

In het hoofdstuk van Moderne Wiskunde waarin het gebruik van letters voor het eerst aan de orde komt, komen veel van deze verschillende betekenissen van letters voor. Meestal is dat impliciet. De betekenis moet blijken uit het gebruik. De lijn in het hoofdstuk wordt bepaald door de keuze van situaties die te 'verletteren' zijn, waarbij een formule een symbolische weergave is van een concrete situatie.

In de drie geobserveerde lessen kunnen we opvallende verschillen constateren tussen de drie docenten. Natuurlijk kunnen we deze verschillen niet los zien van de verschillen in situaties. Iedere les betreft een ander fragment uit het boek. Er kunnen grote verschillen tussen de klassen bestaan. Het is dus beslist niet zo dat we de geconstateerde verschillen zonder meer zouden kunnen toewijzen als verschillen in onderwijsstijl tussen docenten.

Ja legt sterke nadruk op de eigen wiskundige constructies van leerlingen. Het gaat er bij hem meer om hoe de leerlingen tot een oplossing zijn gekomen, hoe ze een bepaalde bewering wiskundig kunnen verantwoorden, welke eigen betekenis ze hechten aan fundamentele wiskundige uitdrukkingen. Er bestaat een sterke inhoudelijke wisselwerking tussen docent en klas. Ja treedt daarbij op als een soort katalysator: uitdagend en prikkelend, doorvragend naar argumenten, benadrukken van belangrijke leerling-ervaringen.

Br besteedt expliciet aandacht aan de referenties van letters en formules. Hij benadrukt de verschillende betekenissen die een letter kan hebben en de verschillende notaties die er zijn en laat daarbij de ruimte voor de leerlingen voor hun eigen gekozen notaties. Er is een sterke begripsmatige sturing bij het afleiden van een formule uit een regelmaat. Br maakt een keuze uit zaken die essentieel zijn en wil die essentiële zaken zorgvuldig duidelijk maken. Hij reageert accepterend op de

leerlingen, met een kort en zakelijk taalgebruik. Hij weet duidelijk accenten te zetten.

Rij blijft dicht bij het boek. Hij loopt het huiswerk helemaal langs, reageert op verkeerde antwoorden en probeert misverstanden uit de weg te ruimen. Hij accepteert verschillende goede antwoorden zonder verdere toevoeging. Hij probeert een moeilijke opgave voor te bereiden. Zijn inhoudelijke inbreng wordt gestuurd door het boek. De betekenis van de letters wordt nergens expliciet vermeld.

Uit de voor- en natoets blijkt het grote verschil in voorkennis tussen de leerlingen van het gymnasium en de leerlingen van de heterogene brugklas. De gymnasium leerlingen houden die voorsprong ook met betrekking tot het kunnen opstellen van een formule bij een gegeven situatie. Wat betreft de niet formele wiskundige vaardigheden, blijkt er in de natoets niet zoveel verschil meer te zijn tussen beide groepen. Het formele element in de toets blijkt sterk te discrimineren tussen leerlingen die voldoende of onvoldoende scores op de natoets.

We zien duidelijke verschillen in prestaties ten aanzien van formele aspecten tussen beide groepen. Dit verschil is niet direkt toe te wijzen aan een verschil in uitleggedrag van de docenten. Doordat er een betere startpositie is van de gymnasiumleerlingen, is het voor de betreffende docenten ook gemakkelijker expliciet aandacht te geven aan de verschillende betekenissen van lettergebruik. Daarnaast zal in een heterogene groep de organisatie van de klas grotere aandacht van de docent vragen. Het boek kan daarbij een belangrijke rol vervullen. Het geeft duidelijk aan waar de klas op een bepaald moment mee bezig is, het bepaalt het tempo, het geeft een gemeenschappelijk onderwerp en doel. De vraag blijft of bij de introductie van letters niet meer expliciete aandacht moet worden gegeven aan de grote verschillen in het gebruik. Met name in de heterogene groep is het gevaar groot dat leerlingen niet verder komen dan een kale formele interpretatie van letters en daarmee op den duur zullen vastlopen in strikt mechanistische betekenisloze vaardigheden.

HOOFDSTUK 6: VAARDIGHEDEN IN 2 MAVO EN 2 ATHENEUM.

"Wanneer de toekomstige Pascal of Gauss voor het eerst het heuglik nieuws verneemt, dat "in de algebra" $a + a$ gelijk is aan $2a$, en $b + b + b$ gelijk is aan $3b$, heeft hij een schrede voorwaarts gedaan in de richting der formalistiek, waarvan de belangrijkheid hem zeer zeker niet in het minst bewust is. En toch, wanneer wij ons een ogenblik rekenschap geven van het verschil tussen abstrakte en concrete woorden, en opmerken, dat in de taal van het dagelijks leven de laatste soort hoofdzakelijk in de vorm van voorwerpsbenamingen voorkomen, die gevormd zijn door toevoeging van een lidwoord of voornaamwoord aan een soortnaam, dan is het duidelijk, dat *grammaties* beschouwd, die "a" en die "b" zich toch wel heel zonderling gedragen. Met de telwoorden hebben zij gemeen, dat zij attributief gebruikt kunnen worden, maar dat komt in de algebrales toch maar zelden voor; meestal nemen zij een zelfstandige plaats in het algebraïes zinsverband in. Maar soort- of voorwerpsnamen zijn het toch ook weer niet, al was het maar alleen omdat zij vandaag dit en morgen weer wat anders kunnen betekenen. Zoekt men het criterium voor het min of meer *konkreet* karakter ener uitdrukking in het lossere of vastere verband met een bepaald en welbegrensd voorstellingscomplex, dan zouden die a en die b eigenlijk tot de meest abstrakte taalverschijnselen gerekend moeten worden, maar het eigenaardige is juist, dat voor de ware algebraïen geen konkreter uitdrukkingen bestaan dan diezelfde letters: een "a" is een "a" en verder niemendal. Van enige *betekenis*, die aan dat symbool te hechten zou zijn, is voor hem geen sprake en hij beoefent zijn kunst zonder zich door de bijgedachte aan een of ander maatschappelijk of persoonlijk doel te laten afleiden. Hij speelt als het ware met zijn letters en tekens op dezelfde wijze als de schaker of dammer met zijn stukken, maar dan met dit verschil, dat hij zijn "stukken" uitspreekt of neerschrijft alsof het woorden waren, en er reeksen van formeert, die bedrieglijk veel op volzinnen gelijken, zonder dat zij aan werkelijke taaldaden, dat is aan bepaalde doelcomplexen gebonden zijn. Of het moet het doelcomplex van "l'art pour l'art" zijn: het complex van de algebraïese spelregels zelf, zoals zij onze algebraïformalist min of meer duidelijk voor de geest staan. En het zijn nu juist deze gedachtegang en deze werkwijze, die aan de beginnende leerling ten enenmale vreemd zijn."

G.Mannouri: Een inleiding tot de signifika, inzonderheid met het oog op het onderwijs in de wiskunde.

§6.1: DE WEEGSCHAAL IN MODERNE WISKUNDE.

In Moderne Wiskunde (hoofdstuk 4, deel 2, 5de editie) wordt de weegschaalcontext gebruikt om vergelijkingen te leren vereenvoudigen.

Doel van de uitleg is het leren herleiden van lineaire vergelijkingen tot een gedaante waarin je de oplossing zo ziet zitten.

Het gaat uiteindelijk om vergelijkingen van het type:

$$3x - 12 = 4 - 5x.$$

De getallen en de coëfficiënten voor x kunnen ook breuken zijn.

In het voorbeeld wordt links en rechts $5x$ bij de vergelijking opgeteld:

$$8x - 12 = 4$$

De vergelijking kan nu worden opgelost door op de plaats van $8x$ een bordje te denken en je af te vragen wat voor getal op het bordje zou moeten staan om de zaak

kloppend te krijgen. Dat levert direct dat $8x = 16$ en dus $x = 2$.

Het is ook mogelijk om nog één stap verder te gaan door links en rechts 12 bij de vergelijking op te tellen. Ook dat levert $8x = 16$.

Als er breuken in de vergelijking voorkomen, wordt eerst een getal opgespoord waarmee linker- en rechterkant kunnen worden vermenigvuldigd om de breuken kwijt te raken.

Vaardigheden en contexten.

Volgens de kenmerken van het realistisch wiskundeonderwijs moet vanuit een context-rijke aanpak de ontwikkeling van horizontale en verticale mathematisering in samenhang kunnen plaatsvinden (zie §2.3). Concreet betekent dit dat het werken met lineaire vergelijkingen vanuit een context, zowel een bijdrage moet kunnen leveren aan de ontwikkeling van formele vaardigheden als wel aan de vaardigheid om een vergelijking te kunnen interpreteren als een formeel-symbolische weergave van een praktische situatie. In relatie met de karakterisering van vaardigheden (zie §2.5) kan men zich afvragen of vanuit een contextrijke situatie een ontwikkeling mogelijk is waarin de leerling tot een betekenisvolle representatie van de handelingen kan opbouwen die leidt tot handelen met inzicht.

Wat is een betekenisvolle representatie van een lineaire vergelijking?

De representatie moet **wendbaar** zijn. Dat betekent dat het zoekproces naar een oplossing meer methodes toelaat. Belangrijke voorwaarde hiervoor is dat het zoekproces deel uitmaakt van een grotere gemeenschappelijke achtergrond.

'Vergelijkingen oplossen' is één van de basisvaardigheden van de wiskunde die in de meest uiteenlopende typen vergelijkingen te pas komt. Uitleg in alleen formeel symbolische betekenis zal leiden tot een groot aantal verschillende algoritmen, voor elk type vergelijking een ander. Een omvattend concept zal ontbreken. Dit zal leiden tot gefragmenteerde receptmatige handelingen, waarbij het zicht op de basisvaardigheid zal ontbreken. In de eigen constructies van een wendbare representatie zal de ontwikkeling van omvattende basisconcepten van 'vergelijking' en 'vergelijking oplossen' dus een belangrijke rol moeten spelen.

De basisvaardigheid 'vergelijking oplossen' zal zich kunnen ontwikkelen naar aanleiding van de volgende vragen:

- wat is een vergelijking?
- wat is een oplossing van een vergelijking?
- hoe los je een vergelijking op?

Deze vragen staan niet los van elkaar. De betekenis van een vergelijking wordt mede bepaald door wat je ermee kunt doen, dus door de oplossing en het oplossingsproces. De vragen hebben een sterke onderlinge samenhang. Door de keuze van een geschikte context moet het mogelijk zijn deze vragen gelijktijdig en in samenhang actueel te maken.

De representatie moet **toepasbaar** zijn. Dat betekent dat het oplossingsproces ook nog op gang kan komen in nieuwe situaties. Om een grotere geldigheid te garanderen moet er generalisatie kunnen plaatsvinden van de oplossingsmethoden. Dat vraagt

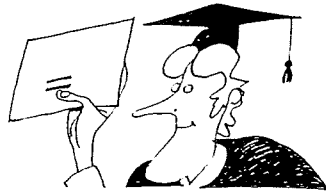
om voldoende variatie in de aangeboden problemen maar ook om expliciete aandacht voor de ontwikkeling van algemenere heuristieken. (Zie van Streun, 1989.)

De representatie moet ruimte bieden voor **eigen constructies** (met name verkortingen). Dat betekent dat er een zekere openheid in de uitleg dient te zitten waarin leerlingen worden uitgedaagd actief aan de uitleg deel te nemen. Maar ook dient de verkorting een duidelijke meerwinst op te leveren doordat het oplossingsproces voor de leerling zichtbaar sneller en overzichtelijker kan verlopen.

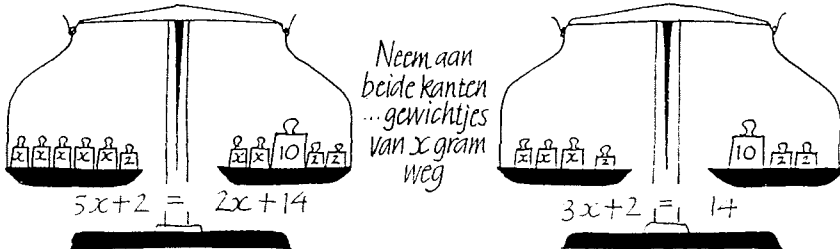
Terug naar de weegschaal.

Door vergelijkingen op te vatten als een symbolische weergave van de weegschaalsituatie met onbekende gewichten, wordt onmiddellijk duidelijk wat de oplossing is en hoe je die kunt vinden. Wat bij de plaatjes gebeurt, is onmiddellijk terug te vinden in de vergelijkingen.

- 7 In de vergelijking $5x + 2 = 2x + 14$ komt de veranderlijke (in dit geval x) links én rechts van het gelijkteken voor.
De bordjes manier van Marian helpt nu niet meteen. In zo'n geval kunnen we de waarmaker van de vergelijking vinden met behulp van een weegschaal. Op de linkerschaal staan 5 gewichtjes van x gram en een gewicht van 2 gram. Op de rechterschaal staan 2 gewichtjes van x gram, één van 10 gram en twee gewichtjes van 2 gram. De weegschaal is in evenwicht. De weegschaal blijft in evenwicht als je aan beide kanten evenveel weghaalt of erbij doet.



Het gelijkteken



Door de analogie met de weegschaal wordt verwezen naar een bestaande situatie waarin die bewerkingen vanzelfsprekend zijn. Het evenwicht moet gehandhaafd blijven en dat kan alleen maar gebeuren door de linker en de rechterschalen op dezelfde wijze te veranderen. Ook het zoeken van een oplossing is heel vanzelfsprekend: het gaat om het bepalen van het gewicht van een onbekend voorwerp. Hoewel de leerlingen waarschijnlijk nog nooit met een balans hebben gewerkt, is deze situatie volkomen duidelijk voor hen en heeft geen verdere uitleg nodig. Ze bevat voldoende fenomenologische primitieven (p-prims) en kan dus functioneren als een verklarmiddel voor het betrekkelijk nieuwe verschijnsel van vergelijkingen.

De context van de weegschaal bevat méér regels dan nodig zijn voor een adequate ontwikkeling van het algoritme. Zo kun je bij een weegschaal ook zoveel elementen toevoegen tot links en rechts precies hetzelfde op de schalen staat. Het links en rechts toegevoegde moet dan ook gelijk aan elkaar zijn. Dat levert een nieuw probleem op dat soms ook direkt is op te lossen.

- 55** Leonie moet de vergelijking $5 \cdot (x + 1) = 3 \cdot x + 13$ oplossen. Eerst gaat ze herleiden:
 $5 \cdot x + 5 = 3 \cdot x + 13$
 Ze vindt dat een vergelijking wel wat op een weegschaal lijkt: de 5 gewichtjes van x gram plus nog 5 gram zijn net zo zwaar als de 3 gewichtjes van x gram plus nog 13 gram.
 Ze denkt: als aan beide kanten dezelfde gewichtjes liggen, is de weegschaal ook in evenwicht.
 Daarom legt ze links 8 gram bij en rechts 2 gewichtjes van x gram.
 Toen ze dat deed zei ze: 'Ik zie het al, de waarmaker van de vergelijking is 4.'
 Klopt haar antwoord? Hoe heeft ze het gevonden?



Een dergelijke aanpak heeft echter geen weerspiegeling in de gebruikelijke formele aanpak om een vergelijking op te lossen. Het is dus geen wonder dat de auteurs hier niet op doorgaan. Alleen die regels uit de context worden gepresenteerd die relevant zijn voor de ontwikkeling van het formele analogon.

In een volgende fase zal de analogie moeten worden losgelaten. Het gaat immers om vergelijkingen, niet om weegschalen. De methode kiest voor een geleidelijke overgang. Er komt steeds meer nadruk op de vergelijkingen te liggen en de bijbehorende plaatjes verdwijnen uiteindelijk. Er is één ogenblik waarin de grenzen van de analogie expliciet aan de orde worden gesteld. Niet iedere vergelijking laat zich consistent interpreteren als een situatie op een weegschaal. De vergelijking $5x + 8 = 3x + 2$ laat zich interpreteren als een weegschaal met links 5 zakken met x knikkers en 8 losse en rechts 3 zakken met x knikkers en 2 losse knikkers. De oplossing $x = -3$ is echter rechtstreeks in strijd met een interpretatie van een weegschaal. De methode neemt daarmee afstand van de weegschaalcontext en legt het accent op het oplossen van vergelijkingen:

"We hoeven niet altijd aan echte zakken met knikkers te denken. De weegschaalmethode betekent alleen: doe steeds links en rechts van het gelijkteken hetzelfde."

Bij vergelijkingen met negatieve coëfficiënten is zelfs de rechtstreekse interpretatie door een weegschaal al niet meer mogelijk. Plaatjes met weegschalen komen dan niet meer voor. Wel blijft de notatie gehandhaafd waarbij de links en rechts toe te voegen hoeveelheden worden aangegeven.

- 23 In de vergelijking $3x + 2 = -2x + 12$ komt de veranderlijke x zowel links als rechts voor. Marijke wil het minteken uit de vergelijking wegwerken. Zij telt links en rechts hetzelfde op. In dit geval $2x$. Kijk maar naar het blaadje hiernaast.

- a Los de vergelijking $5x + 2 = 12$ op.
b Controleer de gevonden waarmaker in de vergelijking $3x + 2 = -2x + 12$

$$\begin{array}{l} 3x + 2 = -2x + 12 \\ +2x \qquad +2x \\ \hline 5x + 2 = 12 \end{array}$$

Bij vergelijkingen met breuken als coëfficiënten gaat ook deze methode niet meer op. De breuken worden gelijknamig gemaakt en worden vervolgens weggewerkt door links en rechts met eenzelfde getal te vermenigvuldigen. De leerlingen worden daarmee gedwongen te verkorten tot een rechtstreekse aanpak waarbij in gedachten de bewerkingen dienen te worden uitgevoerd en alleen het resultaat wordt opgeschreven.

Samengevat zien we dat de context van de weegschaal voldoende mogelijkheden moet bieden tot het opbouwen van een wendbare representatie van het oplossingsproces van lineaire vergelijkingen. Deze representatie bestaat uit een progressieve opbouw van een analogie tussen weegschaal en het formele oplossingsproces. Er is een bijna visuele overeenkomst tussen plaatjes van weegschalen en vergelijkingen. Het $=$ -teken functioneert hierin als een symbool voor evenwicht. Dit gegeven geeft een directe sturing van en een verklaring voor de handeling van het vereenvoudigen door links en rechts hetzelfde te doen. Het is echter de vraag of de context voldoende mogelijkheden biedt voor toepasbaarheid en eigen constructies. Er is weliswaar voldoende openheid en plaats voor eigen activiteiten maar er is weinig aandacht voor vaardigheden op metaniveau. De leerlingen zullen de generalisatie van de oplossingsmethode zelf moeten maken. Volgens Krutetskii (1976) is dat juist één van de kenmerken van wiskundige begaafdheid.

§6.2: VERGELIJKINGEN IN KLAS 2 MAVO EN ATHENEUM.

De Chr.Scholengemeenschap de Waezenburg in Leek is een school voor MAVO,HAVO en VWO. De brugklas is gemeenschappelijk voor alle leerlingen. Pas aan het eind van de brugklas vindt een selectie plaats naar de drie schooltypen. Dat betekent dat alle leerlingen hetzelfde wiskundeprogramma volgen in de brugklas. Daarbij wordt gebruik gemaakt van de methode Moderne Wiskunde, 4^{de} editie. Ook in de tweede klas volgen de leerlingen hetzelfde wiskundeprogramma, hoewel ze dan in verschillende schooltypen zitten. Daarbij wordt gebruik gemaakt van Moderne Wiskunde, 5^{de} editie. Om na te gaan wat het effect is van een dergelijke aanpak op de verschillende schooltypen, zijn de situaties vergeleken tussen een MAVO en een Atheneum klas, bij één leraar en bij hetzelfde onderwerp. In beide klassen is een les op de video opgenomen. Dit materiaal is verwerkt in protocollen.

Wat allereerst opvalt is **het verschil in tempo** tussen MAVO en Atheneum. De geobserveerde Atheneum-les vond plaats op 11 december, de MAVO-les op 9 januari. Rekening houdend met de kerstvakantie, is dit een verschil van ruim twee weken (≈6 lessen). Ook in het protocol is dit verschil in tempo terug te vinden. De uitleg van opgave 25 a tm f duurt bij de Atheneum klas 8 minuten, bij de MAVO-klas duurt de behandeling van 25 c tm f circa 10 minuten. Opgave 28 a tm f neemt bij Atheneum 5 minuten, bij MAVO 13 minuten. In beide klassen laat de docent de gemaakte huiswerkopgaven door leerlingen op het bord schrijven. In de Atheneum-klas volgt een korte controle en, indien nodig, korte toelichting door de docent. In de MAVO-klas wordt iedere uitwerking nog eens volledig nabesproken. Opvallend is ook dat veel MAVO-leerlingen de opgave verkeerd uit het boek hebben overgeschreven. Dit komt in totaal 4 keer voor. Hoewel deze verkeerd opgeschreven opgaven toch goed worden opgelost, kost het uiteraard extra tijd om ook nog de oorspronkelijke opgave te behandelen.

Tussen beide klassen is **geen opvallend verschil in het aantal gemaakte fouten** in de door leerlingen op het bord geschreven opgaven (≈25%).

Wel opvallend is het **verschil in de gehanteerde oplossingsmethode**. In de MAVO-klas worden 80% van de gepresenteerde opgaven opgelost met behulp van de 'weegschaal'- en de 'bordjes'-methode. Bij de Atheneum-klas is dat 30%. Karakteristiek voor dit verschil zijn de volgende uitwerkingen op het bord (overgenomen uit de beide protocollen):

MAYO

$$\begin{array}{r} -7z + 2 = -9z + 10 \\ +9z \quad \quad +9z \\ \hline 2z + 2 = 10 \\ \boxed{8} \\ 2z = 8 \\ z = 4 \end{array}$$

Atheneum

$$\begin{array}{r} -7z + 2 = -9z - 10 \\ 2z + 2 = -10 \\ 2z = -12 \\ z = -6 \end{array}$$

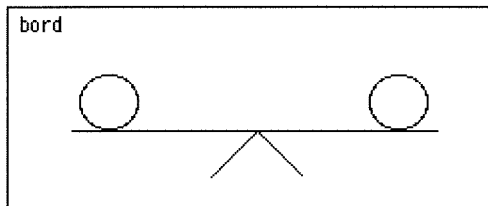
Bij de linker-methode komt de weegschaal zelf niet meer ter sprake. De oplossingsmethode ziet er formeel uit, waarbij de toe te voegen of af te halen elementen consequent onder het linker- en rechterlid van de vergelijking worden geschreven. Uit het protocol valt af te leiden dat de rechter-uitwerking een verkorting is van de linker. Regelmatig treedt verwijzing op naar het in gedachten links en rechts erbij tellen van elementen, in gedachten proberen te bepalen welk getal op een bepaalde plaats hoort te staan. De volgende waargenomen fouten in de Atheneum-klas zijn mogelijk een gevolg van te snelle verkorting:

$$\begin{array}{l} 7 + 21x = 6 \rightarrow 21x = 6 \\ 3 = 3x - 6 \rightarrow 3x = -9 \\ 2x + 7 = 13 \rightarrow 2x = 13:2 = 7\frac{1}{2} \end{array}$$

Slechts één keer komt de weegschaal expliciet aan de orde. Dat gebeurt in de Atheneum-klas als de docent uitlegt waarom je een vergelijking met breuken mag vereenvoudigen door die links en rechts met 18 te vermenigvuldigen.

Fragment 15.

- Rij: Maar goed, waarom ga je nu alles keer 18 doen? Dan ben je al die breuken kwijt.
 N: Ja.
 Rij: Mag dat zomaar?
 O: Waarom niet?
 P: Ja.
 Q: Je hebt wel een hele andere vergelijking.
 Rij: Je hebt wel een hele andere vergelijking, dat wel ja. Mag dat zo maar?
 O: Ja.
 P: Ja wel beide.
 Rij: Wat zeg je?
 P: Als je beide met 18 vermenigvuldigt wel.
 Rij: Ja hoe beide, hoe beide? Waar vergelijken we dat ook weer mee zo'n vergelijking?
 Met een weegschaal hè. [Tekent op het bord.]
 P: Ja je hebt beide evenveel bijgebracht.



- Rij: Als hier iets opstaat en daar staat iets op en ik maak die 18 keer zo groot en ik maak die 18 keer zo groot, blijft er dan evenwicht?
- Q: Ja.
- U: Ja.
- Rij: Ja hè. Dus dat mag?
- V: Nee.
- Rij: Nee?
- V: Op één voorwaarde.
- Rij: Op één voorwaarde.
- V: Als je [onverstaanbaar] {evenwicht hebt?}
- Rij: Uiteraard [onverstaanbaar] maar dat is zo, kijk maar daar staat een =-teken, hè.
- W: Ha!Ha!Ha!

De inhoud van de uitleg.

Er is sprake van de geldigheid van een nieuwe regel. Door generalisatie van het 'links en rechts wegnemen of toevoegen' tot 'links en rechts hetzelfde doen' zijn de leerlingen eigenlijk al bij voorbaat overtuigd van die geldigheid. Rij hanteert de weegschaal als verklaringsmiddel.

De structuur van de uitleg .

Uitleg waarom je een vergelijking links en rechts met 18 vermenigvuldigt.

Dan ben je de breuken kwijt.

Uitleg waarom je een vergelijking links en rechts met 18 mag vermenigvuldigen.

Mag dat zomaar?

Je krijgt een andere vergelijking.

Beide vermenigvuldigen mag wel.

Bij een weegschaal in evenwicht mag je de gewichten links en rechts 18 x zo groot maken (tekening)

De interactie.

Er is sprake van een klasgesprek waarin Rij een verklaring wil geven van de geldigheid van een nieuwe herleidingsregel. De leerlingen geven onbevungen hun mening. O vindt dat het zomaar mag. Q twijfelt. P is eerst wel overtuigd dat het zomaar mag, maar vindt dan zelf de verklaring met de weegschaal. V maakt een grap waarop spontaan wordt gereageerd. Er is dus sprake van een normale interactie.

Gezien de reacties van de leerlingen is er in eerste instantie niet zoveel behoefte aan deze uitleg. Ze zijn al zo vertrouwd met het idee dat je vergelijkingen mag veranderen door links en rechts hetzelfde te doen, dat het vanzelfsprekend is dat dat ook geldt voor vermenigvuldigen. Ze hebben dat waarschijnlijk ook al gewoon gedaan, hoewel

dat nog niet expliciet in de methode aan de orde is gesteld. De vragen van Rij en zijn reactie op Q geven een inhoudelijke sturing aan de uitleg. Dat betekent dat er ook een functionele interactie is.

Samengevat zien we dat de weegschaal-analogie functioneert als een verklaringsmiddel **ter introductie** van een algoritme voor het oplossen van lineaire vergelijkingen. Het functioneert niet als verklaringsmiddel achteraf, maar als middel waarbij de vanzelfsprekende regels over worden gedragen op een nieuw gecreëerde formeel-symbolische wereld. Is dit eenmaal bereikt, dan wordt het middel losgelaten en ontwikkelen nieuwe regels zich vanzelf, naar analogie van reeds ontwikkelde regels, binnen deze nieuwe omgeving.

Er is geen verschil tussen Atheneum- en MAVO-leerlingen in de mate waarop ze het verklaringsmodel loslaten. Wel zijn er aanzienlijke verschillen geconstateerd in de snelheid waarop verkortingen in de ontwikkelde procedures optreden, waarbij MAVO-leerlingen langer een symbolische vorm blijven hanteren die rechtstreeks verwijst naar de weegschaal.

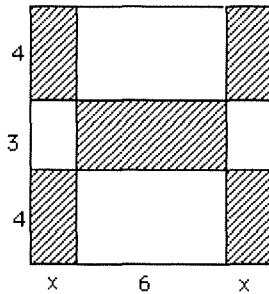
§6.3: HET PROEFWERK OVER VERGELIJKINGEN.

Aan het eind van hoofdstuk 4 is in beide klas een afsluitend proefwerk afgenomen. Gezien het verschil in tempo en niveau tussen beide klassen, zijn voor iedere klas aparte proefwerken gemaakt en zijn deze proefwerken op verschillende tijdstippen afgenomen. Beide proefwerken zijn volledig door de docent zelf opgesteld en afgenomen.

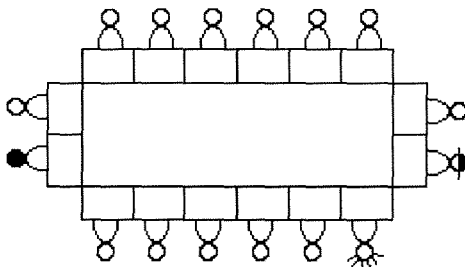
Het proefwerk in 2 Atheneum. (18 december).

1. Los de volgende vergelijkingen op:

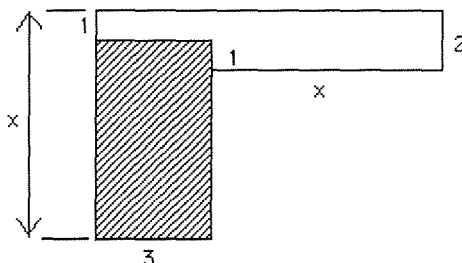
a. $4x + 10 = 12$	f. $21 - (3p - 4) = 13$
b. $3(p-8) = -15$	g. $6 - 3r = 8$
c. $7z + 5 = 2z$	h. $4(2x-3) - 15 = 33$
d. $2y - 1 = 5y - 2$	i. $\frac{1}{2}x + 3 = \frac{1}{3}$
e. $-7x + 2 = -2x - 6$	j. $\frac{1}{3}x - \frac{1}{4} = 4$
- 2a. Neem $x = 2$.
Bereken de verhouding van de oppervlakte van het gestreepte en de oppervlakte van het witte gedeelte van de rechthoek.
- b. Neem $x = 7$, en bereken opnieuw deze verhouding.
- c. Je weet nu niet hoe groot x is. Iemand vertelt je dat de oppervlakte van het gestreepte deel gelijk is aan de oppervlakte van het witte gedeelte. Stel een vergelijking op en bereken x daarmee.



3. Tafeltjes zijn in een rechthoek gezet. Aan de korte einden staan twee tafeltjes en aan de lange einden staan er driemaal zoveel. Aan elk tafeltje ziet iemand.
 - a. Hoeveel mensen zitten er rondom?
 - b. Er moet voor meer mensen plaats gemaakt worden. Aan elk van de korte einden van de rechthoek worden x tafeltjes bijgezet. Aan de lange einden worden er zoveel tafeltjes bijgezet dat er weer driemaal zoveel staan als aan de korte einden. Hoeveel mensen kunnen er nu aan de tafeltjes zitten?
 - c. Men wil dat er $3\frac{1}{2}$ maal zoveel mensen rondom kunnen zitten als aan het begin het geval was. Stel een vergelijking op en bereken x daarmee.



4. De gestreepte rechthoek heeft dezelfde oppervlakte als de witte zeshoek. Stel een vergelijking op en bereken hoe groot x is.



De bijbehorende puntenverdeling was als volgt:

- opgave 1: 20 punten (ieder onderdeel 2);
opgave 2: 8 punten (2a: 2, 2b: 2, 2c: 2+2);
opgave 3: 9 punten (3a: 1, 3b: 3, 3c: 2+3);
opgave 4: 8 punten.

Het proefwerk in 2 MAVO .

1. Los de volgende vergelijkingen op:

a) $42 - 4 \cdot a = 22$

b) $10 \cdot b - 36 = 55$

c) $7 \cdot c + 5 = 2 \cdot c$

d) $12 \cdot d + 4 = 3 \cdot d + 58$

2. Los de volgende vergelijkingen op:

a) $\frac{2 \cdot a - 5}{8} = 1$

c) $\frac{c}{3} = 10$

b) $2 \cdot (3 \cdot b - 4) = -2$

d) $\frac{5}{d} = 10$

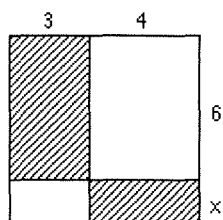
e) $\frac{1}{2} \cdot e - 1 = \frac{1}{5} \cdot e - \frac{1}{10}$

3. Hieronder is een rechthoek getekend, die in vieren is verdeeld.

- a) Neem $x = 2$.

Bereken de oppervlakte van het witte deel en bereken ook de oppervlakte van het gestreepte deel.

- b) Je weet nu niet hoe groot x is. Iemand zegt dat de oppervlakte van het witte deel even groot is als de oppervlakte van het gestreepte deel. Stel een vergelijking op en bereken x daarmee.



4. Los de volgende vergelijkingen op:

a) $-7a + 2 = -2a - 6$

b) $15 - 5b = 3b$

c) $7c - 1 = 5 - c$

d) $8 - 2d = -5d - 3$

e) $28 + 2e = -5e$

f) $6 - 3f = 8$

g) $21 - (3g - 4) = 8$

h) $13h - 20 = 8 - h$

i) $-3 + 5i = 7 - 2i$

j) $8j - 15 = 7 - 6j$

De bijbehorende puntenverdeling was als volgt:

opgave 1: 8 punten (ieder onderdeel 2);

opgave 2: 10 punten (ieder onderdeel 2);

opgave 3: 7 punten (3a: 2, 3b: 7);

opgave 4: 20 punten (ieder onderdeel 2).

Het verschil tussen beide proefwerken.

Wat onmiddellijk opvalt is het verschil in de verhouding tussen 'kale' vergelijkingsopgaven en opgaven waarin de leerlingen eerst een vergelijking moeten opstellen aan de hand van een concreet gegeven situatie en deze vervolgens moeten oplossen. Omgerekend naar het beschikbare aantal punten ziet die verhouding er als volgt uit:

	<u>vgl oplossen</u>	<u>vgl opstellen & oplossen</u>
MAVO:	84%	16%
Atheneum:	44%	56%

Bovendien is de situatie waarvan de MAVO een vergelijking moet opstellen en oplossen, een vereenvoudiging van de Atheneum-situatie.

Een ander opvallend verschil is dat bij het Atheneum-proefwerk opgave 1 het karakter heeft van een gemengde opgave, terwijl bij het MAVO-proefwerk een dergelijke opgave niet aanwezig is. De drie kale opgaven zijn ieder van een duidelijk herkenbaar type.

Hoe zijn deze verschillen te verklaren? Het proefwerk heeft immers in beide klassen betrekking op dezelfde leerstof: hoofdstuk 4 van *Moderne Wiskunde*?

In de eerste plaats is er het duidelijk zichtbare **verschil in situatie** tussen beide klassen (zie §6.2). De Atheneum klas is aanzienlijk sneller met het oplossen van vergelijkingen dan de MAVO-klas. In die zin is het grote aantal losop-opgaven van de MAVO niet meer relevant voor de situatie in het Atheneum. Het omgekeerde is van toepassing op de MAVO. Daar ligt het accent toch nog duidelijk op het leren

beheersen van de formele vaardigheden. Opstellen & oplossen komt bij hen op het tweede plan.

In de tweede plaats impliceert het bovenstaande een **verschil in doelstellingen** van het onderwijs in beide klassen. De docent kan in de MAVO meer gericht zijn op het leren beheersen van de formele vaardigheden, in het Atheneum kan bovendien het leren opstellen van een vergelijking een belangrijke rol spelen. Opvallend is dat het boek niet die nadruk legt op het leren opstellen van een vergelijking als bij het proefwerk het geval is. In het boek komt dit type opgaven af en toe aan het eind van een bladzijde voor, daarmee suggererend dat het als extra stof kan worden geïnterpreteerd.

In de derde plaats is een proefwerk niet slechts een toets om leereffekten te meten.

Van een proefwerk leer je ook. Dat betekent dat een docent in een proefwerk opgaven zal kunnen verwerken die niet altijd volledig relevant zijn voor de behandelde leerstof, maar die op het randje daarvan liggen. Dat kunnen opgaven zijn die net wat moeilijker zijn dan is behandeld, die een nieuw onderwerp betreffen, of die tijdens de les problemen veroorzaakten. Het eerste is waarschijnlijk het geval bij de Atheneum klas (Opgave 3), het laatste bij de MAVO-klas (met name opgave 4).

In de vierde plaats, en in relatie met het vorige punt, zal een docent er naar streven dat een proefwerk **voldoende discrimineert**. Dat wil zeggen: dat er een evenwichtige verdeling over het aantal onvoldoendes en voldoende zal ontstaan. Dat houdt in dat er in het proefwerk een evenwichtige opbouw van gemakkelijke naar moeilijke opgaven moet zitten en dat de puntenwaardering daarmee in overeenstemming is. Het MAVO-proefwerk zou in de Atheneumklas waarschijnlijk alleen maar voldoende opleveren, het Atheneum-proefwerk in de MAVO alleen maar onvoldoendes.

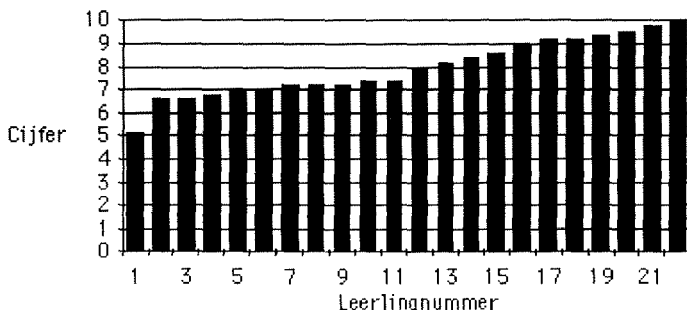
De globale resultaten.

Voor het Atheneum zijn de resultaten (er waren totaal 45 punten beschikbaar):

opgave:	1	2	3	4	totaal	cijfer
max.punten:	20	8	9	8		
gemiddelde:	18,6	6,3	4,6	5,3	34,8	8.0
p-waarde	.93	.79	.51	.66	.77	

In de volgende grafiek staat de verdeling van de cijfers over de hele Atheneum klas.

Resultaten Ath 2

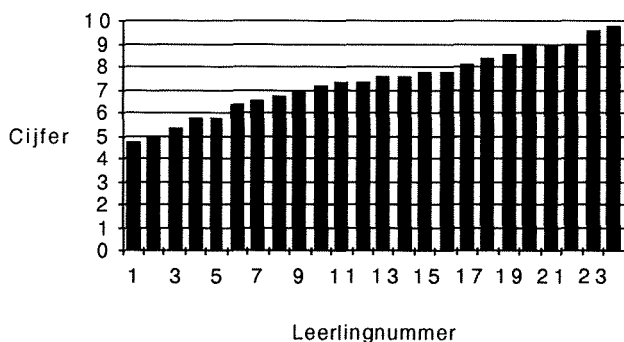


De resultaten voor 2 MAVO zijn:

opgave:	1	2	3	4	totaal	cijfer
max.punten	8	10	7	20	45	
gemiddeld:	7,4	7,8	6,3	10,5	32,1	7,4
p-waarde:	.93	.78	.90	.53	.71	

En de verdeling van de cijfers over de klas:

Resultaten 2 MAVO



We zien in beide klassen eenzelfde patroon van resultaten. Er zijn geen zware onvoldoendes. Het gemiddelde ligt rond de 7,5. De cijfers zijn gelijkmatig verdeeld tussen het laagste en hoogste cijfer. In die zin is er in beide klassen sprake van een geslaagd proefwerk: het sloot goed aan bij het niveau van de betreffende klas, het discrimineerde voldoende tussen de leerlingen terwijl er toch geen echte zware onvoldoendes hoefden te worden uitgedeeld.

Bij het Atheneum is opgave 3 duidelijk minder gemaakt, bij de MAVO is dat opgave 4. Opgave 1 is in beide klassen bijzonder goed gemaakt.

2 MAVO, de opgaven 2c en 2d, opgave 4.

Er is een frappant verschil in de antwoorden van de opgaven 2c en 2d. Opgave 2c is direct op te lossen met de bordjes-methode. Bij 2d lukt dat niet meer direct, vanwege de keuze van de getallen. Dat zou betekenen dat de leerlingen het visuele beeld paraat moeten hebben dat 5 gedeeld door $\frac{1}{2}$ gelijk is aan 10. Het type opgave 2c komt wél, 2d komt niet voor in het boek.

Bij opgave 2c geven 23 leerlingen onmiddellijk 30 als antwoord. Bij opgave 2d is er een veel grotere spreiding in de antwoorden:

- d = 0,5 (11 leerlingen),
- d = $\frac{1}{2}$ (4 leerlingen),
- d = 50 (5 leerlingen),
- d = 2 (2 leerlingen),
- geen antwoord (2 leerlingen).

De keuze van het antwoord $d = 0,5$ wordt op heel verschillende manieren gemotiveerd:

$$\frac{5}{d} = \frac{10}{1}, \quad 5 \times 1 = 5, \quad 10 \times 0,5 = 5, \quad d = 0,5$$

of: $5 : d = 10, \quad d = 0,5.$

of:

$$\frac{5}{d} = \frac{5}{0,5}, \quad d = 0,5$$

of: $5 : 10 = 0,5, \quad d = 0,5$

of:

$$5 : d = 10$$

$$\boxed{0,5}$$

$$d = 0,5$$

Het antwoord $d=50$ wordt gemotiveerd door de methode:

$$\frac{5}{d} = 10, \quad \frac{5}{50} = 10, \quad d = 50$$

Sommige leerlingen hebben dus toch de bordjesmethode gehanteerd, andere hebben wellicht met verhoudingen gewerkt (de eerste methode). Belangrijk resultaat hierin is dat zoveel leerlingen in deze nieuwe situatie tot een goed antwoord komen. Het geeft aan dat ze beschikken over een inzicht in dit type vergelijkingen.

Opgave 4 is opvallend slechter gemaakt dan de opgaven 1 en 2. De sommen van deze opgave zijn allemaal van het type waarbij links en rechts negatieve elementen moeten worden afgetrokken, of positieve elementen moeten worden opgeteld. De meeste fouten worden gemaakt bij het aftrekken van negatieve elementen. Opvallend is ook dat de vermenigvuldigingsstip in de opgave is weggelaten. Het is niet in de antwoorden terug te vinden of dit van invloed is geweest.

2 Atheneum, opgave 1 en opgave 3.

Uit de antwoorden van de Atheneum-leerlingen op opgave 1, die een mengsel is van de opgaven 1,2 en 4 van 2 MAVO, blijkt dat ze zekerder op hun doel afgaan. Ze kiezen een elegante strategie (de bordjesmethode , het vermijden van het aftrekken van negatieve elementen), ze maken (daardoor) minder rekenfouten en komen sneller tot een goede oplossing.

Opgave 3 is opvallend slechter gemaakt dan de andere twee opgaven waarin gevraagd werd een vergelijking op te stellen. Het bijzondere van deze opgave in vergelijking met de opgaven 2 en 4, is dat de vergelijking niet een directe weergave is van een meetkundige situatie. In de vergelijkingen 2 en 4 zijn de onbekende lengtes x gewoon ingetekend en is er een rechtstreekse interpretatie van de bijhorende vergelijking naar de figuur. Bij opgave 3b is dat niet meer het geval. Van de nieuwe situatie, waarin x tafeltjes zijn bijgezet, is niet meer zo gemakkelijk een schets te maken waarin x voorkomt. Hierdoor worden de leerlingen meer gedwongen zich in de

context te verdiepen dan bij de opgaven 2 en 4. Beide typen opgaven komen in het boek voor.

7 leerlingen geven een korrekte vergelijking bij opgave 3b. Met behulp van die vergelijking geven 4 leerlingen het korrekte antwoord bij 3c.

4 leerlingen geven het korrekte antwoord op 3c zonder de vergelijking van 3b te gebruiken, bijvoorbeeld door te stellen dat: $x + x + 3x + 3x = 56$ ze hebben daarbij een andere x gekozen dan in de opgave was gegeven).

Uit de antwoorden van 13 leerlingen blijkt dat ze de context wel hebben begrepen. Als criterium is hierbij genomen of de leerlingen bij hun antwoorden betekenisvol hebben gereageerd. Uit de volgende onzinnige antwoorden van 5 leerlingen blijkt dat ze de context niet hebben doorgehad.

$$\begin{aligned}x &= \frac{2}{3}, \\x &= 1\frac{1}{2}, \\x &= 3,428571429 - 4 = 1,428571429, \\x &= -1,1 \text{ (afgerond).} \\3.2x &= x - 3\frac{1}{2}, \quad 3.x = 3\frac{1}{2}, x = 1\frac{1}{2}. \\4x + 4x.3 &= 16. \quad 3\frac{1}{2}, \quad 8x.3 = 56, \quad 8x = 18\frac{1}{5}, \quad x = 18\frac{1}{5} / 8\end{aligned}$$

Van 4 leerlingen is onduidelijk welke betekenis de context voor hen heeft gehad. Ze geven een formele afleiding zonder commentaar. Bij de beoordeling van dit resultaat dient te worden opgemerkt dat de opgave buiten de context is gesteld. Er wordt gevraagd naar een x en niet naar het aantal tafeltjes.

Samengevat.

*Uit de resultaten van de proefwerken blijkt een aanzienlijk verschil te bestaan in niveau tussen de 2 MAVO en 2 Atheneum-leerlingen. Zowel ten aanzien van de formele oplossingstechnieken, als ten aanzien van het opstellen van vergelijkingen.

*Uit het goede aantal antwoorden op opgave 2b van 2 MAVO en vooral uit de eigen gevonden oplossingsmethoden, blijkt dat een groot aantal leerlingen van 2 MAVO een goed besef heeft van het basisbegrip 'vergelijking' en de basisvaardigheid 'vergelijking oplossen'.

*Het opstellen van een vergelijking en het interpreteren van de resultaten is sterk afhankelijk van het type context waar de vergelijking betrekking op heeft. Een visueel meetkundige context, waarin het verband tussen de variabele en de andere grootheden direct is af te lezen en direct in de vergelijking is terug te vinden, levert minder moeilijkheden op in de 2 Atheneumklas, dan een type context waarin dat niet het geval is.

*Opvallend is verder het volledig ontbreken van weegschaal-opgaven op het proefwerk. Hoewel dit type opgaven centraal staat in de leerstof, zijn deze door de docent kennelijk opgevat als didactisch middel om een bepaald doel te bereiken. Dit laatste wordt trouwens ook sterk door de tekst suggereerd.

In de volgende paragraaf zal nader worden ingegaan op de verschillen in uitleg en de verschillen tussen beide situaties.

§6.4: CONCLUSIES.

In deze paragraaf proberen we een aantal feiten uit dit hoofdstuk te combineren om een aantal conclusies te kunnen trekken over het aanvankelijk letterrekenen in de tweede klas. De opzet maakt het mogelijk een zinvolle en realistische vergelijking tussen beide groepen te maken.

Verschillen tussen leerlingen.

Vanuit het gezichtspunt van gewenst expertgedrag met betrekking tot formele vaardigheden in de wiskunde, zien we aanzienlijke verschillen tussen beide groepen. De Atheneumgroep vertoont min of meer het beeld van wiskundig begaafde leerlingen zoals dat door Krutetskii is geschetst. De leerlingen maken snel verkortingen, werken doelgericht en trefzeker naar een oplossing toe, hebben een goed ontwikkeld arsenaal van basisvaardigheden.

Het beeld van de MAVO-groep is bijna het omgekeerde. Deze leerlingen blijven veel langer gebruik maken van de visuele hulpmiddelen, ze zijn minder zeker van hun oplossingsmethoden, maken veel lees- en reken-fouten. Een belangrijk positief punt is echter dat de leerlingen, gezien de resultaten op opgave 2d, wel beschikken over een goede basisvaardigheid ten aanzien van het vergelijken oplossen. Ze hebben een betekenisvol beeld van vergelijking en weten wat het betekent om een vergelijking op te lossen.

Verschillen in uitleg.

De uitleg van de docent lijkt bij de MAVO-groep te zijn gericht op het volledig in het schrift krijgen van de goede uitwerkingen van de opgaven. Er is veel aandacht voor de uitwerkingen, met name als er een fout is gemaakt. Bij de Atheneum-groep is die nadruk er veel minder. De docent past zich aan bij de verschillen tussen de MAVO-leerlingen enerzijds en de Atheneum-leerlingen anderzijds. Bij de Atheneum-leerlingen is er geen aanleiding om de opgaven zoveel nadruk te geven. De tijdwinst die hierdoor ontstaat is, gezien het karakter van het proefwerk, wellicht besteed aan extra aandacht voor opgaven waarin een vergelijking opgesteld moet worden bij een gegeven situatie.

Horizontale mathematisering.

De resultaten van de MAVO-leerlingen op de ene opgave waarbij een vergelijking opgesteld moet worden, zijn bemoedigend. Dit is voor hen een bereikbaar niveau. Het is echter niet duidelijk in hoeverre dit type opgave nieuw voor hen was. In het boek is dit type wel vertegenwoordigd. Het is dus niet goed in te schatten wat precies de eigen inbreng is van de leerlingen bij deze opgave en in hoeverre er sprake is van reproductie.

Hetzelfde geldt voor de resultaten van de Atheneum-leerlingen voor dit type opgaven. Gezien de slechtere resultaten op opgave 3, zijn de aanwijzingen hier echter wat sterker dat er toch wel sprake is van een belangrijke mate van reproductie. Het feit dat de gegevens niet langer zichtbaar zijn in een figuur, blijkt de moeilijkheidsgraad flink te verhogen.

De bordjesmethode en de weegschaal.

De bordjesmethode blijkt zeer effectief te zijn voor het opbouwen van een betekenisvolle representatie van het oplossingsproces. Omdat niet precies vaststaat wanneer de methode succes heeft, heeft de representatie een open karakter. De methode introduceert allerlei verkortingen. Door het open karakter echter, zijn daarbij verschillende mogelijkheden die door de leerlingen zelf kunnen worden bedacht. Daarmee is tevens een actieve inbreng gegarandeerd. De methode is efficiënt. De methode staat dicht bij de wiskundige betekenis van 'oplossing' en kan zelfs als een rechtstreekse metafoor worden opgevat.

Hetzelfde geldt in feite voor het weegschaalmodel. Door het model wordt een handeling geïntroduceerd waarbij leerlingen consequent links en rechts hetzelfde doen bij een vergelijking. Daardoor blijft er een ondubbelzinnig beeld over van 'gelijkwaardigheid' van twee vergelijkingen. Opvallend is dat het model zo snel naar de achtergrond verdwijnt. Het is een introductie-model en verklaringsmodel waarmee de representatie wordt opgebouwd. De representatie zelf bestaat uit autonome handelingen die aan het model zijn ontleend en daar ook weer in zijn terug te vinden.

Kan de uitleg beter?

De voorgaande discussie wijst in de richting dat deze Atheneum-leerlingen gemakkelijker en sneller in staat zijn om zelfstandig tot meta-activiteiten te komen en daardoor effectiever te werk kunnen gaan. We zien dat de gegeven onderwijs situatie voor deze leerlingen leidde tot een ontwikkeling naar expertgedrag. Voor de MAVO-leerlingen was dat niet het geval. Dat zou kunnen betekenen dat bij het onderwijs aan leerlingen op MAVO-niveau misschien wat meer expliciete aandacht voor deze meta-vaardigheid moet worden ingeruimd. Dat wijst in de richting van heuristische methoden (zie van Streun, 1989). Bijvoorbeeld door systematisch aan de orde te stellen wat nu precies de moeilijkheid is bij een bepaald type opgave of door het systematisch verstrekken van aanwijzingen.

Ondanks het feit dat beide klassen eenzelfde voorgeschiedenis hebben en ze van dezelfde docent les hebben, met hetzelfde lesmateriaal, zijn er grote verschillen geconstateerd. Die verschillen zijn ontstaan doordat de docent zich bij zijn uitleg aanpast bij de het gemiddelde niveau van de leerlingen. We mogen hier niet bij voorbaat uit concluderen dat deze verschillen een gevolg zijn van verschillen in schooltypes. Het is denkbaar dat bij een andere organisatie van het onderwijs en bij een andere keuze van de leerstof deze verschillen minder groot zouden zijn of misschien zelfs helemaal niet zouden zijn ontstaan.

HOOFDSTUK 7: HOEKEN

"De naam Zunni maakte indruk op me; diens kantoor in de Calle Caseros y Tacuarí is van een spreekwoordelijke degelijkheid. Ik vroeg of deze zich reeds met de zaak belast had. Daneri zei dat hij diezelfde middag met hem zou spreken. Hij aarzelde even maar zei toen met die vlakke, onpersoonlijke stem die ons een toevlucht is als we iemand iets erg intiem toevertrouwen, dat het huis hem onontbeerlijk was voor de voltooiing van z'n gedicht, want in een hoek van de kelder was Aleph. Hij verduidelijkte dat een Aleph een van de punten van de ruimte is waarin alle punten samenkomen.

.....

- De Aleph? - herhaalde ik.

Ja, de plaats waar, zonder in elkaar over te lopen, alle plaatsen van de wereld samenkomen, vanuit alle hoeken gezien."

Jorge Luis Borges: De Aleph.

Hoe leg je uit wat een hoek is als het woord al zo'n duidelijke betekenis heeft? Zet je gewoon een andere betekenis naast al die bestaande betekenissen? Of probeer je toch een brug te slaan tussen het bekende en het nieuwe?

§7.1: HOEKEN OM ONS HEEN.

In deze paragraaf zullen we ons concentreren op het wiskundige begrip hoek (zoals dat in § 2.6 door van Dale is omschreven).

Hoeken als verschijnsel.

In de direkt waarneembare omgevingswereld komen hoeken als **waarneembaar verschijnsel** voor. De wijzers van een klok maken een steeds veranderende hoek met elkaar. Condensstrepen van vliegtuigen lijken elkaar onder een hoek te snijden. De muren in de hoek van een kamer maken een (bij voorkeur rechte) hoek. Een timmerman brengt hoeken over met behulp van een zweil.

Deze hoeken kunnen we aanwijzen. We kunnen er, al kijkend, over praten zonder dat we een beroep hoeven te doen op theoretische kennis. We zien dat twee muren niet haaks op elkaar staan, zonder dat we weten wat precies de hoek tussen twee vlakken is.

Hoeken komen ook voor in de omgevingswereld als **indirekt waarneembaar verschijnsel**. Als we willen begrijpen hoe groot de koersverandering is van een schip, dan denken we in gedachten de oude en de nieuwe koers als rechte lijnen die in het schip samen komen en een hoek met elkaar maken. De grootte van die hoek is de grootte van de koersverandering.

We rijden op de snelweg onder een verkeersbord door. We zien het bord wordt steeds groter totdat we er dichtbij zijn en er bijna onderdoor rijden, dan wordt het weer kleiner. Om dit te kunnen begrijpen denken we twee rechte lijnen die vanuit ons oog vertrekken en langs de onderrand respectievelijk de bovenrand van het bord gaan. De

hoek tussen die lijnen verandert met de afstand tot het bord.

Bij een zonsverduistering wordt de zon precies bedekt door de maan, hoewel de zon veel groter is dan de maan. We zeggen dat we de zon en de maan onder een even grote hoek zien. Die hoek zien we niet. We zien twee ronde schijven aan de hemel. Uit deze drie voorbeelden blijkt dat we over een theoretische kennis van hoeken dienen te beschikken om bepaalde verschijnselen te kunnen beschrijven en begrijpen. We kunnen er slechts met elkaar over praten als er een voldoende gemeenschappelijke theoretische basis is.

We kunnen deze hoeken waarneembaar maken door touwtjes te spannen, langs latten te kijken, lijnen te tekenen. Vanuit onze theoretische kennis voegen we iets toe. Daardoor worden nieuwe zaken zichtbaar gemaakt.

Ook de kunstmatig geschapen wereld van meetkundige vormen hoort bij de wereld om ons heen. Het is een wereld die wordt uitgevonden en steeds verder wordt uitgebouwd. Nieuwe objecten worden geschapen en van een naam voorzien. Vervolgens worden wetmatigheden van deze wereld ontdekt. Dit leidt tot verfijning en aanpassing van de begrippen. Er treedt een klassifikatie op. Je hebt niet alleen hoeken, je hebt rechte, gestrekte, stompe en scherpe hoeken. Je hebt overstaande en nevenhoeken. In een driehoek heb je altijd drie hoeken. Deze vormen samen een gestrekte hoek.

Deze kunstmatige wereld bestaat uit **mentale-objecten** die van de werkelijkheid zijn geïdealiseerd. Punten en lijnen zijn gedachte-objecten, ze hebben geen dikte en zijn niet te tekenen. Hetzelfde geldt voor alle andere meetkundige objecten. In het bijzonder voor hoeken. De benen van een hoek worden gevormd door twee halfrechten. Die lopen oneindig lang door. Deze hoeken zijn dus niet te tekenen.

Hoeken als instrument.

Bij hoeken als verschijnsel hebben we ons geconcentreerd op het vóórkomen van hoeken zoals we dat fysiek of mentaal kunnen waarnemen. Hoeken worden echter ook gebruikt als instrument om de ervaringswereld te kunnen veranderen, beschrijven en verklaren.

Met hoeken kunnen we dingen **maken**. Hoeken kun je tekenen, uitknippen en vouwen. Je kunt een hoek uitzetten om een weg aan te leggen. Hoeken kun je meten. Hoeken kun je veranderen. Je kunt ze met passer en liniaal door midden delen. Je kunt ze bij elkaar optellen. Dat biedt de mogelijkheid om allerlei nieuwe objecten te maken. De wereld van de hoeken is op die manier een hele tastbare wereld geworden waarin we zelf constructief kunnen zijn. Met behulp van hoeken kunnen we de scherpte van een bocht in een getal weergeven, we kunnen aangeven wat de 'afstand' is tussen twee sterren aan de hemelbol, kunnen we evenwijdigheid tussen twee lijnen **beschrijven** die gesneden worden door een derde lijn. Het instrumentarium rondom hoeken is een middel waarmee we zaken als feiten uit de ervaringswereld (fysiek of mentaal) in taal kunnen vastleggen.

Met behulp van hoeken kunnen we verschijnselen **verklaren**. We kunnen begrijpen wanneer de grote en de kleine wijzer van de klok precies samenvallen. We kunnen

begrijpen waarom het richtingsbord op de snelweg groter lijkt naarmate we dichterbij komen. We kunnen begrijpen wat het verband is tussen de afgeleide van een functie en de helling van de grafiek van die functie.

Uit deze analyse blijkt het fundamentele en veelzijdige karakter van het begrip hoek. De verschillende aspecten staan uiteraard niet los van elkaar. Ze vullen elkaar zelfs aan. Het één kan een opstap zijn voor de ontwikkeling van het ander. De betekenisverwerving van het begrip hoek zal sterk afhangen van de gekozen volgorde en accenten.

§ 7.2: HOEKEN IN DE WISKUNDE.

Euclides & Co.

In de Elementen, boek 1, definieert Euclides met de definities 8 en 9 het wiskundige begrip hoek:

Definitie VIII: Een vlakke hoek is de helling tot elkaar van twee lijnen in een plat vlak, die elkaar ontmoeten en die niet op een rechte liggen.

Definitie IX: Wanneer de lijnen die den hoek omvatten, rechten zijn, heet de hoek rechthoekig. (Dijksterhuis, 1929)

Zowel Dijksterhuis (1929) als Heath (1956) besteden in hun kommentaar aandacht aan het ongebruikelijke woord 'helling'. Dijksterhuis signaleert een cirkelredenering als verderop in de wiskunde het begrip helling wordt gedefinieerd met behulp van een hoek. Volgens Heath is het gebruik van dit woord een nieuw gezichtspunt in de toen gebruikelijke definities van 'hoek'.

Het begrip hoek heeft, volgens Heath (1956), veel stof tot discussie gegeven tussen filosofen over de (Aristotelische) categorie waarin het geplaatst dient te worden. Is het een **kwantiteit**, een **kwaliteit** of een **relatie**? Bij een kwantiteit gaat het om objecten die met elkaar in grootte zijn te vergelijken of in een getal zijn uit te drukken. Een kwaliteit kan bestaan uit figuren en vormen of eigenschappen daarvan, zoals: recht, krom, cirkelvormig, vierkant. Een relatie is een combinatie van andere objecten. Proclus verklaart dat bij het begrip alle drie categorieën van toepassing zijn. Hoeken, zeker rechthoekige hoeken, zijn in grootte met elkaar te vergelijken (en dus een kwantiteit), hebben een specifieke vorm (en zijn dus een kwaliteit) en zijn een combinatie van twee snijdende lijnen die in een vlak liggen (en dus een relatie).

Hoewel dit een academische discussie lijkt uit een ver verleden, geeft het toch informatie over de betekenis van het begrip hoek. Het zijn drie verschillende aspecten die elkaar aanvullen maar die tot verschillende leerlingactiviteiten aanleiding kunnen geven. Bij een eerste kennismaking met het begrip zal een keuze worden gemaakt. Je kunt vormen laten zien van hoeken of laten uitknippen (het kwaliteitsaspect). Of je kunt met behulp van een geodriehoek hoeken van een bepaalde grootte laten tekenen (een kwantiteit). Of je kunt twee halfrechten rond hun snijpunt laten roteren (een relatie tussen lijnen). Daarna kan uiteraard een combinatie van deze mogelijkheden aan de orde komen.

Heath (1956) citeert nog een aantal meer recente definities van hoek:

1. De hoek is het verschil van richting tussen twee rechte lijnen,
2. De hoek is de mate van rotatie die nodig is om het ene been in het andere over te voeren zonder het vlak te verlaten,
3. De hoek is het gedeelte van het vlak dat bevat is tussen de twee rechte lijnen in het vlak die in een punt samenkomen.

De eerste definitie is in feite een weergave in andere woorden van de definitie van Euclides en bevat dezelfde bezwaren. In de tweede definitie treedt het element van

rotatie op. Dat is een nieuw aspect en opent de mogelijkheid om het begrip hoek op een dynamische wijze te introduceren. Bijvoorbeeld door de verandering van de wind als die van ZuidWest naar NoordWest draait. De kwantitatieve aspecten worden hierin direkt zichtbaar. De laatste definitie is een aanschouwelijke definitie van een hoek als deel van het vlak, waarbij onduidelijk is welk vlakdeel wordt bedoeld. Het definieert hoek als kwaliteit en relatie. Voor de kwantitatieve aspecten zijn aanvullende definities nodig.

Hilbert & Co.

In de loop van de geschiedenis zijn er verschillende pogingen gedaan om de definitie van Euclides beter te funderen.

Hilbert heeft in 'Grundlagen der Geometrie' (1930) een axiomatische formalistische opbouw gegeven van de meetkunde. Een hoek wordt door hem gedefinieerd als: "een systeem van twee halfrechten h en k die in een punt O samenkomen." Een hoek is dus een ongeordend paar (h,k) of (k,h) van halfrechten. In een dergelijke definitie past uiteraard geen verwijzing naar helling, richting of rotatie.

Molenbroek (1939) definieert: "Een (uitspringende) hoek is de figuur, gevormd door een punt en twee halve rechten, die dit punt tot eindpunt hebben, maar niet op één rechte liggen". Het woord figuur doet een beroep op de mentale aanschouwing. Een halfrechte kun je immers niet tekenen.

Coxeter (1961) neemt een tussenpositie in tussen bovenstaande definities: "Een hoek bestaat uit een punt O en twee niet samenvallende halfrechten door O ." Halfrechten zijn formeel gedefinieerd vanuit lijnsegmenten en laten daardoor een duidelijke visuele interpretatie toe.

In deze definities herkennen we het zoeken naar evenwicht tussen het zuiver formele en het aanschouwelijke. Het hangt van de bedoelingen van de schrijver af voor welke richting wordt gekozen. Hilbert's fundering van de meetkunde is een onderdeel van het fundamenteel wiskundig onderzoek naar de mogelijkheden van formalistische funderingen. Daarin passen geen visuele elementen anders dan formules. Bovendien heeft hij daarbij geen didaktische bedoelingen. De boeken van Molenbroek en Coxeter zijn leerboeken. Ze hebben wel degelijk didaktische bedoelingen. De figuren en tekeningen spelen een belangrijke rol daarbij. Opvallend bij deze drie interpretatie is de eenzijdige keuze voor het relatie-aspekt en de nadruk op de twee halfrechten. Wellicht is dit een twintig eeuwen oude invloed van Euclides.

Freudenthal.

Freudenthal (1973) geeft een uitvoerig overzicht van het gebruik van hoeken in de wiskunde. Hij ontdekt grote essentiële verschillen in dit gebruik.

In de eerste plaats is er het door Euclides gedefinieerde hoekbegrip in de **elementaire vlakke meetkunde** door middel van halflijnen. De grootte varieert van 0 tot 180° .

Daarnaast is er het hoekbegrip zoals dat gehanteerd wordt in de **goniometrie**. Een hoek wordt daar opgevat als een centrale hoek in de eenheidscirkel. De grootte van

de hoek wordt geïdentificeerd met de boog waarop die staat. Deze hoek kent een oriëntatie door middel van de oriëntatie van het vlak volgens de richting van de wijzers van de klok. Ook negatieve hoeken komen voor. Identificatie van hoeken vindt plaats op basis van modulo 2π .

In de **analytische meetkunde** is weer een ander hoekbegrip dominant. Daar wordt de hoek aangegeven door een geordend tweetal lijnen, waarbij ook een oriëntatie wordt aangegeven. Identificatie van de hoeken vindt plaats op basis van modulo π . In de ruimte wordt de hoek bepaald als de kleinste hoek tussen twee snijdende lijnen. Er wordt geen rekening gehouden met oriëntatie en de hoeken liggen tussen 0 en 90° . Tenslotte is er nog het hoekbegrip in de **analyse**. De goniometrische functies zijn gedefinieerd op de getallenrechte. Hoeken worden in deze context geïdentificeerd met reële getallen en hebben dus waarden tussen $-\infty$ en ∞ . Dit hoekbegrip kan worden opgevat als een uitbreiding van het goniometrische hoekbegrip waarbij de getallenrechte overdekt wordt met segmenten $[0, 2\pi]$.

Freudenthal bepleit een tijdige introductie van de elementaire meetkunde-hoek, de goniometrie-hoek en de analyse-hoek. Vooraf dient dan wel aandacht te worden besteed aan de oriëntatie van het vlak door middel van de beweging van de klok en andere instrumenten.

"Bovendien dienen de verschillende begrippen fundamenteel met elkaar vergeleken te worden met betrekking tot de operaties die ermee kunnen worden uitgevoerd: hoe ze bij elkaar kunnen worden opgeteld, van elkaar kunnen worden afgetrokken; dat het geen zin heeft hoeken met elkaar te vermenigvuldigen; dat hoeken verdubbeld kunnen worden, verdrievoudigd, met n kunnen worden vermenigvuldigd; dat hoekdeling bij de goniometrische hoek meerwaardig is, maar dat dit bij de analyse-hoek niet het geval is."

Freudenthal kent een fundamentele waarde toe aan deze verschillen tussen de begrippen. Volgens hem heeft het geen zin te om te streven naar een gemeenschappelijk grondbegrip om van daaruit de andere begrippen te ontwikkelen. Didactieken die dit nastreven geven een eenzijdig, gekunsteld beeld. Ook aan leerlingen dienen deze verschillen in een vroeg stadium duidelijk te worden gemaakt.

Het Platonisme, het formele en het ambachtelijke.

In de drie geschetste beschrijvingen zien we een duidelijk verschil van kijkrichting. Euclides en zijn commentatoren gaan uit van het platonische idee dat hoeken bestaan in de wiskundige wereld en dat het aan ons is te ontdekken welke eigenschappen ze hebben. Dat rechtvaardigt de vraag naar het kwaliteit, kwantiteit of relatie zijn van een hoek. In de formalistische benadering van Hilbert en navolgers is het geen toeval dat zij juist het relatie-aspect van hoeken als uitgangspunt nemen. Het stelt hen immers in staat hoeken te beschrijven als een formele relatie tussen primitieve grondbegrippen. Freudenthal benadert de wiskunde vanuit een ambachtelijke optiek. Hij bekijkt hoe wiskundigen het vak beoefenen en op welke manieren ze daarbij hoeken gebruiken.

Elk van deze drie verschillende kijkrichtingen heeft een eigen didactische component. In de Euclidisch/platonische visie krijgt het leren het karakter van een

ontdekkingstocht. Er is een bestaande grotendeels onbekende wiskundige wereld waaraan van alles valt te ontdekken. In het leren vanuit de formalistische visie wordt een kunstmatige wereld van symbolen opgebouwd volgens afspraken waarvan de ondubbelzinnigheid over de logische en relationele samenhang tussen de objecten voorop staat. Leren vanuit de ambachtelijke optiek is in de eerste plaats een kennismaking met een vak. Het laat zien wat het gereedschap is, wat de methoden zijn en wat je ermee kunt doen.

Door deze verschillen in kijkrichting ontstaan verschillen in uitleg. Bijvoorbeeld bij een uitleg-wat-een-hoek-is. Dat is geen wonder. De drie kijkrichtingen kennen ieder een eigen betekenis toe aan het begrip hoek. Bij iedere uitleg wordt er iets anders uitgelegd. De platonische uitleg zal proberen een verbinding te leggen met bekende feiten en begrippen uit de 'intuïtieve' wiskundige wereld. In de formalistische uitleg zal de nadruk liggen op het ondubbelzinnig vastleggen van 'hoek' in relatie met reeds formeel gedefinieerde begrippen. Bij het ambachtelijke wordt de betekenis in eerste instantie aangegeven door 'hoeken' als gereedschap om problemen op te lossen of nieuwe begrippen op te bouwen. In een uitleg zal daar de nadruk op het gebruik liggen. Zo'n uitleg zal het karakter hebben van een uitleg-wat-je-met-een-hoek-kunt-doen.

§ 7.3: HOEKEN EN DE NIVEAUTHEORIE.

Het vóórkomen van het woord hoek in de dagelijkse taal suggereert de mogelijkheid om het wiskundige begrip hoek vanuit het empirische begrip hoek op te bouwen. Ongeveer op dezelfde manier waarop leerlingen zich het wiskundige begrip 'lijn', 'vierkant' of 'driehoek' eigen maken vanuit het reeds aanwezige empirische begrip. Leerlingen kennen en gebruiken de woorden 'lijn', 'vierkant' en 'driehoek' lang vóóordat ze op school met wiskunde in aanraking komen. Ze kunnen de figuren op de juiste manier benoemen. Van Hiele-Geldof(1957) beschrijft een dergelijke aanpak voor het begrip hoek:

"De laatste weken voor de kerstvakantie hebben we ons bezig gehouden met hoeken. De inleidende les verliep ongeveer als volgt: Ik demonstreerde de gestrekte hoek door mijn armen zijwaarts te strekken en daarna de arm horizontaal naar de andere toe te bewegen. Wat deze arm beschreef, noemden we een gestrekte hoek. (Een definitie werd niet gegeven). Daarna moesten enkele kinderen met hun armen een rechte hoek maken en door armbewegingen demonstreren, waar de bedoelde hoek zat.

Ik vroeg: "Hoe groot is de hoek, die de wijzers van de klok om zes uur maken?" Daarna mocht één van de jongens met zijn benen een rechte hoek maken. Een ander tekende een rechte hoek met een tekendriehoek op het bord. Ook werd er op het bord een halve rechte hoek met de passer gekonstrueerd. De namen: benen van een hoek, hoekpunt kwamen ter sprake. Ik vertelde in verband daarmee, dat we onderscheid maken tussen lijnstuk, halve lijn en lijn, al naargelang er twee, één of geen eindpunten zijn. We zagen, dat een gradenboog een halve cirkel is, die in 180 gelijke delen verdeeld is. Ieder deel noemt men een graad. Zouden we nu de stralen doortrekken, dan zou een gestrekte hoek ook in 180 gelijke delen verdeeld worden. De stukjes van de boog heten booggraden, de kleine hoekjes hoekgraden. Daarna volgden de gebruikelijke opgaven: Met de gradenboog hoeken meten en met de gradenboog hoeken van gegeven grootte tekenen.

Eén van de leerlingen kreeg de opdracht drie kwart slag te draaien met uitgestrekte arm. Dit was nodig om te laten zien, dat er hoeken zijn, groter dan een gestrekte hoek.

De leerlingen rekenden de hoeken uit, die de wijzers van de klok op verschillende tijden met elkaar maken. Ik leerde hun, hoe men een hoek met behulp van drie letters aanduidt, hoe men een hoek met de passer overbrengt, welke namen men aan hoeken van verschillende sort geeft.

De namen: overstaande hoeken, nevenhoeken, supplement en komplement lichtte ik toe. De leerlingen maakten een aantal opgaven om dit te toetsen. Door individueel contact overtuigde ik mij ervan, of de leerlingen en hoek konden overbrengen, een hoek wisten aan te duiden in de nieuwe notatie en of de namen: inspringend, uitspringend, scherp, recht en stomp goed functioneerden."

Wat een boeiende afwisselende lessen moeten dat geweest zijn! Er is een veelzijdigheid aan aanschouwelijke ervaringen rondom het wiskundige begrip hoek. Er wordt een kunstmatige wereld geschapen van hoeken en alles wat daarmee te maken heeft. Bijzondere hoeken krijgen speciale namen. Leerlingen kunnen zelf actief zijn in die wereld: ze kunnen meten en tekenen.

Kenmerkend hierin is:

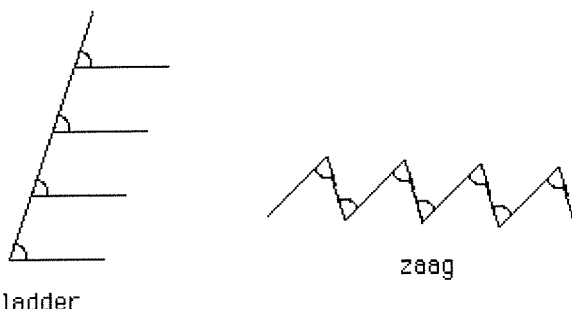
- de betrekkelijk geringe verwijzing naar hoeken om ons heen (wijzers van een klok, hoek tussen je armen of benen) en, daarmee samenhangend, het nieuwe en kunstmatige karakter van het geschapen wereldje,
- de doelgerichte gerichtheid op de wiskundige betekenis van het begrip hoek; andere betekenissen van dat woord uit de omgangstaal komen niet aan de orde,

- de veelzijdigheid van het materiaal, van de gebruikte hulp- en neven-begrippen (graad, lijn, lijnstuk, halve lijn) en van de leerling- activiteiten,
- de harmonische ontwikkeling van nieuwe taalelementen in relatie met de ontwikkeling van de wereld rond hoeken, waarbij dankbaar gebruik wordt gemaakt van fysieke associaties (gestrekte hoek, benen van een hoek).

Van Hiele(1957) geeft een argumentatie voor deze manier van introductie. Volgens hem is het begrip hoek "één van de vele voorbeelden, waaruit blijkt ,dat een definitie niet toereikend is om een begrip te vormen." Hij licht dit toe aan de hand van de twee definities: een hoek is dat deel van het vlak dat door twee halflijnen begrensd wordt, en: een hoek is de figuur die door twee halflijnen gevormd wordt. De eerste definitie suggereert dat een hoek een soort driehoek is waarvan de derde zijde is zoekgeraakt. De tweede maakt niet duidelijk welke hoek wordt bedoeld, de inwendige of de uitwendige. De eerste zet leerlingen op een verkeerd been, de tweede is onduidelijk. Door een aanpak, zoals beschreven door van Hiele-Geldof wordt een veel duidelijker en vollediger beeld geschapen. Een defintie kan dan, volgens hem, achterwege blijven.

Deze keuze voor een actieve, intuïtieve introductie van hoeken is één van de duidelijke voorbeelden van de toepassingen van de 'niveautheorie'. In de niveautheorie van de van Hiele's verloopt het leren van wiskundige begrippen in fasen waarbij een geleidelijke uitbreiding plaatsvindt van het empirische redeneren naar het theoretische op basis van algemene eigenschappen van de figuur. Op het eerste argumentatie-niveau kennen en herkennen leerlingen meetkundige figuren op basis van visuele eigenschappen. Ze kunnen deze eigenschappen ook aan de figuren toewijzen. Ze kunnen echter nog geen beslissing nemen over het benoemen van een figuur alléén op basis van deze eigenschappen. Ze kunnen figuren sorteren op basis van deze visuele eigenschappen, dat wil zeggen ze kunnen uit een verzameling figuren de voorbeelden en non-voorbeelden herkennen van een gevraagde figuur (Van Dormolen, 1974). Het visuele aspect is dominant, de eigenschappen zijn daarvan afgeleid. Het tweede argumentatie-niveau is een uitbreiding van het eerste waarbij de eigenschappen zelf een autonome rol gaan spelen in het beredeneren. Een vierkant is een ruit omdat de zijden gelijk zijn (hoewel het er niet als ruit uitziet). Ze kunnen van een gesorteerde figuur ook verklaren waarom die van de gevraagde soort is.

Van Hiele-Geldof geeft een duidelijk voorbeeld op welke wijze het redeneren over gelijkheid van hoeken op een hoger niveau zich kan ontwikkelen. Op basis waarvan kan men besluiten dat twee hoeken gelijk zijn? Van Hiele- Geldof introduceert gelijkheid van hoeken door middel van tegelpatronen. Het vlak wordt bedekt met congruente tegels. In het zo ontstane patroon zijn vele gelijke hoeken aan te wijzen. Hieruit destileert ze ladder- en zaag-figuren:



De gelijke hoeken in deze figuren krijgen een sterke aandacht. Deze figuren worden gehanteerd als hulpfiguren waarmee direkt de gelijkheid van hoeken kan worden aangetoond. Als proef op de som vraagt ze aan leerlingen om te laten zien dat twee hoeken, waarvan de benen evenwijdig lopen, gelijk zijn. Uit het resultaat concludeert ze:

"dat het beschikken over visueel meetkundige structuren de overgang naar de logische denkstructuren vergemakkelijkt en dat het vinden van hulplijnen daarbij geen bezwaar behoeft op te leveren."

De gekozen visuele hulpmiddelen ondersteunen kennelijk de gewenste logische denkstructuur. Hoewel de hulpmiddelen zelf gehanteerd worden op een puur visueel niveau, wordt daarmee bereikt dat leerlingen argumenteren op een hoger niveau. De visueel meetkundige structuur van het hulpmiddel zet aan tot redeneringen op een hoger niveau. Het gaat om het vinden van geschikte patronen waaraan geredeneerd gaat worden.

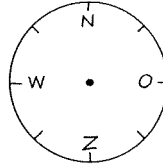
Algemeen gesteld: het gaat kennelijk om het vinden van een wiskundige context waarin de logisch/wiskundige hulpmiddelen als het ware voor het oprapen liggen. Alleen dan kan men verwachten dat leerlingen zelfstandig tot een hoger niveau van redeneren komt waarin niet alleen de visuele, maar ook de algemene eigenschappen van de gehanteerde begrippen een rol kunnen gaan spelen. Het is de grote verdienste van de van Hiele's geweest dat ze systematisch op zoek zijn gegaan naar situaties die wiskundig voldoende rijk zijn om daarmee op een hoger niveau te komen.

De wiskunde die de van Hiele's op het oog hadden is echter sterk gedateerd door het programma van de jaren voor 1968. Wiskunde is daarin een wereld op zichzelf. Het gaat bij hoeken uiteindelijk om de wiskundige hoek en de meetkunde die daarmee bedreven kan worden. Vanuit het zintuiglijk waarneembare hoekbegrip worden alleen die voorbeelden gekozen die zo dicht mogelijk bij het wiskundige denkobject liggen. Het verwerven van dit denkobject is het uiteindelijke doel. In het huidige wiskundeonderwijs speelt het toepassen van wiskunde in praktische situaties een autonome rol. Daarin gaat het om beheersing van het waarneembare, het indirect waarneembare en het denkobject in onderlinge samenhang. De kunst van de didaktiek daarin is het zoeken naar onderwijsleersituaties die de overgangen voldoende zichtbaar en vloeiend maken.

§ 7.4: HOEKEN IN DE KLAS.

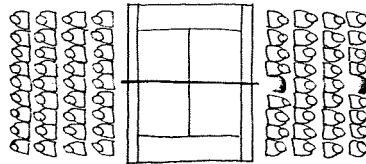
In het volgende fragment probeert de docent uit te leggen wat een hoek is. In de voorgaande les hebben de leerlingen gewerkt aan opgaven over hoeken uit Moderne Wiskunde.

- 3 Een wijzer die de windrichting aangeeft, wijst 's morgens naar het noorden en 's avonds naar het zuidoosten.



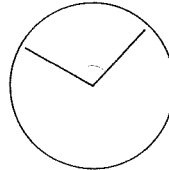
- a Teken die beide standen in één windroos.
b Geef met een boogje de draai aan, die de wijzer maakte.

- 4 In een tennisstadion zijn bij een belangrijke wedstrijd twee plaatsen niet bezet. Welke plaats kies jij? Waarom?



..... De wijzers van een klok maken een hoek met elkaar.

Soms zetten we een boogje in een hoek.

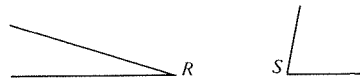


- 5 Zet de wijzers van jouw klok op twee uur. Zet daarna de wijzers op kwart voor drie. In welk geval was de hoek het grootst?

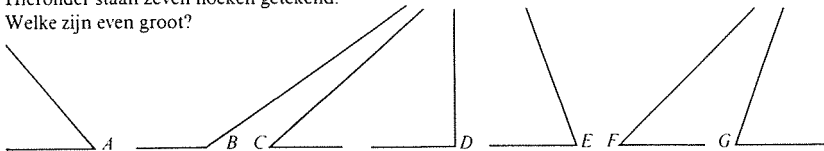
- 6 De twee hoeken hiernaast zijn even groot. Hoe kun je dat laten zien?



- 7 Welke hoek is het grootst: hoek R of hoek S ? Waarom?



- 8 Hieronder staan zeven hoeken getekend. Welke zijn even groot?



Fragment 16.

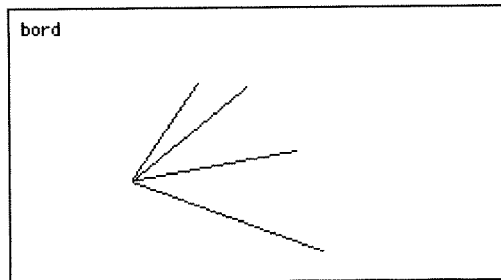
Klas: brugklas gymnasium.

Methode: Moderne wiskunde, 4 de editie.

Bron: Video-opname.

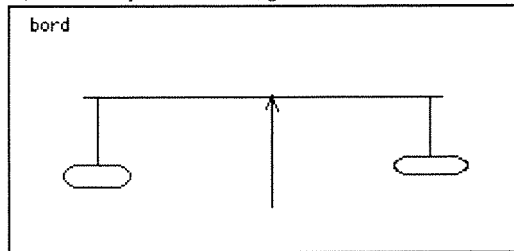
[rumoer]

- 1 Ja: Wil iedereen even gaan zitten? [wacht] Ik heb gisteren al verteld dat eh, vandaag de les wordt opgenomen op video. Trek je daar niet teveel van aan, eh, we doen het net zo als anders. Vandaag eh ...Ja, het is misschien prettig als je niet al teveel door elkaar praat, op een gegeven ogenblik wordt het onverstaanbaar. Vandaag zouden we het over hoeken hebben.
- 5 Jullie hebben daar gisteren al wat eh opdrachten mee gemaakt. D'r waren een heleboel problemen, eh, tenminste dat heb ik gezien, namelijk eh, 't eerste probleem was, eh, wat ik nog hoorde, dat is , wat is nou eigenlijk precies een hoek? Wie kan mij nou eens vertellen wat een hoek voor iets is?
- A: Een hoek dat is een punt, allemaal,allemaal,allemaal, ja, hoe zeg je't nou.. Je moet 't
- 10 voorstellen, een streep erbij of zo.
- Ja: Een hoek, wacht even, nou even één voor één , een hoek is een punt waar allemaal strepen, nou ja, lijnen bij elkaar komen, strepen hè. Je zegt, je moet een punt hebben en je moet dan allemaal lijnen hebben die daar bij elkaar komen. Zoiets? [tekent op het bord]

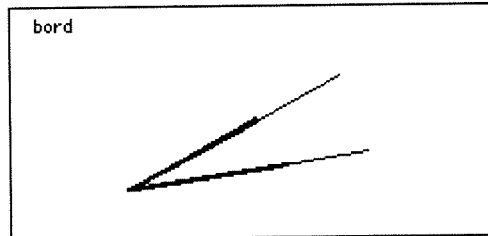


- 15 A: Nou ja, je moet [onverstaanbaar] nou zo als daarbij, bij, [wijst naar hoek van het lokaal], ik zie dat maar zo, wel een hoek, omdat dat ding dat is zo [maakt met de handen een hoek].
- Ja: Jij bedoelt dat ook, de hoek van het lokaal?
- A: Ja.
- 20 Ja: Is dat één hoek?
- A: Nee, 't kan ook daar, als ik hier zo kijk, dan zie ik dat dus zo [weer met handen een hoek vormend], dan is dat een hoek.
- Ja: Ja. Wie, eh, zou 't eens heel anders kunnen zeggen? Het klopt wel, d'r zit wel wat in. Margriet.
- 25 Ma: Hier. [heeft geodriehoek in de hand en wijst op de rechte hoek].
- Ja: Ja, dat is een voorbeeld van een hoek. Misschien is het makkelijker om voorbeelden te geven dan het precies te omschrijven.
- B: [Komt van buiten, roept in de deuropening] Is hier ook een jas gevonden?
- Ja: Waar zou die dan moeten ...
- 30 B: Daar [wijst naar hoek van het lokaal]
- Ja: Heeft iemand van jullie een jas gevonden? [wacht] Nee. [B verlaat het lokaal weer]
- Eh,nou voorbeelden van hoeken zijn d'r ...
- C: Ja, ho!! ho.[heeft jas gevonden]

- Ja: Hij komt zo wel terug, en anders lever je 'm bij de conciërge in straks. [C gooit jas naar Ja]
- 35 Eh, voorbeelden van hoeken lukte wel. En, jij wees eh, wijs het nog eens aan, wat is nou de hoek? [Ma wijst weer aan in de geodriehoek]. Dus je wijst, eh, een omtrek aan, van die geodriehoek. Als je die eerste sommen gedaan hebt, dat is hoeken met elkaar vergelijken en kijken wat kleiner en wat groter is, dat is ook wel een probleem. 't Is
- 40 sowieso al moeilijk om dingen te vergelijken. Hoe eh, hoe vergelijk je gewichten, als je twee dingen, eh twee voorwerpen, wil je met elkaar vergelijken, je wilt weten welke zwaarder is.
- D: Wegen.
- Ja: Ja, dat kan. Maar ik wil niet eens weten hoe zwaar ze precies zijn, ik wil alleen maar
- 45 weten welke zwaarder is.
- E: Nou, kijk, dat kun je zo voelen, als je op elke hand één zet [maakt "balans"-gebaren].
- Ja: Voelen is wat onbetrouwbaar, hè, als ze bijna even zwaar zijn, maar welk apparaat is het meest handig om te vergelijken?
- F: Een weegschaal.
- 50 Ja: Een weegschaal, wat voor weegschaal?
- G: Een micro weegschaal.
- Ja: Een micro weegschaal, maar dan moet je ze daar wel om de beurt opleggen, hè. Ik wil niet weten hoe zwaar ze zijn, ik wil weten wat de zwaarste is. Daar is een heel makkelijk apparaatje voor.
- 55 G: Weegschaal.
- H: Dat is zo met twee van die bakken.
- Ja: Een balans heet dat, hè, [tekent op het bord] Dat ziet er ongeveer zó uit, hier zo'n puntje, twee schaaltes hangen er onderaan. Nou ja, daar kun je 't inleggen en het voorwerp dat het zwaarste is, dat schaalte aan die kant, gaat ie naar beneden.



- 60 Dus zo kun je gewichten vergelijken. Nou ik vroeg dus gisteren aan een paar, hoe vergelijk je lengtes, als ik wil weten wie van jullie tweeën het grootste is..
- I: Je zet ze tegen elkaar.
- J: Je zet ze tegen elkaar.
- Ja: Zet ze tegen elkaar aan en wie er dan boven uit steekt, die eh, is 't langste als ie maar
- 65 geen hoge hakken heeft. Nou, datzelfde heb je met hoeken, alleen daar is het wat moeilijk. Laat ik maar een voorbeeld geven. Ik heb hier een hoek en, eh, ik neem meteen maar een beetje een rare, ik heb hier een andere hoek [tekent twee hoeken over elkaar heen op het bord].



Welke van die twee is nu groter?

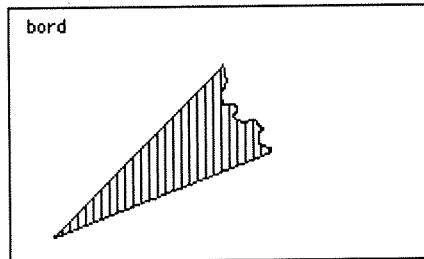
70 K: Evengroot.

Ja: Ze zijn evengroot, waarom? Die steekt er toch een heel eind buiten?

K: [onverstaanbaar] puntjes, 't gaat om de puntjes, ze passen precies op elkaar.

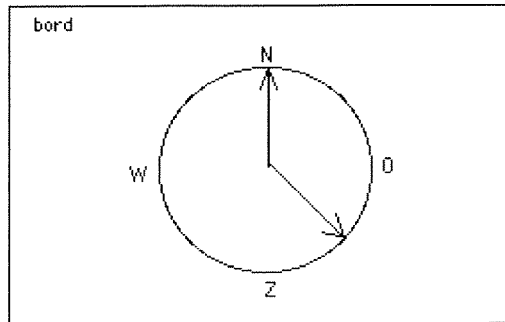
L: Ja, het gaat om eh ..

75 Ja: Nou, gaan we het nog eens proberen. Wat is nou eigenlijk een hoek? Heeft een hoek te maken.. Kijk, misschien begrijp je de vraag niet goed, maar bijvoorbeeld deze oppervlakte [tekent], is die belangrijk om eh, de grootte van de hoek te berekenen?

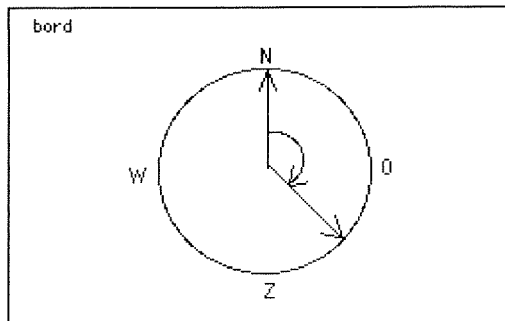


K: Nee, het gaat alleen om die punt.

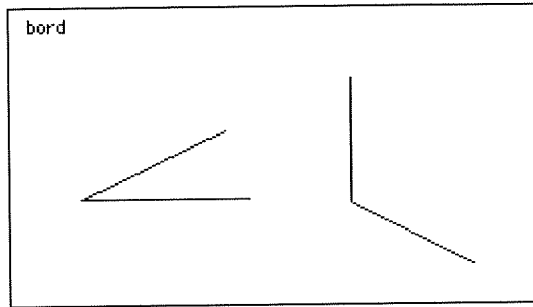
80 Ja: 't Gaat alleen om die punt, 't gaat erom, eh, wat doe je als je dit doet [gaat met de hand van de ene been van de hoek naar de andere draaien] met je hand? Die draait, hè, 't gaat om eh, hoever je draait. Nu was er wel eh één hele rare som, die wil ik toch nog even apart bekijken. Dat was die windroos hè, d'r stond eh, noord, zuid, oost, west. Eerst was de wind noord, dan staat de pijl waarschijnlijk naar het noorden. Toen was de wind zuidoost, hoeveel stond erbij. [tekent]



- 85 Gisteren zei ik nog: dat klopt niet, of: 't klopt niet, het is niet het enige antwoord. Hoe is de wind gedraaid, over welke hoek? Jij [wijst leerling aan].
 M: Hij is eh ongeveer over een derde van die windroos gedraaid.
 Ja: Een derde, ja, als je het aan wilt geven, zeg je de wind is die kant opgedraaid? [tekent]

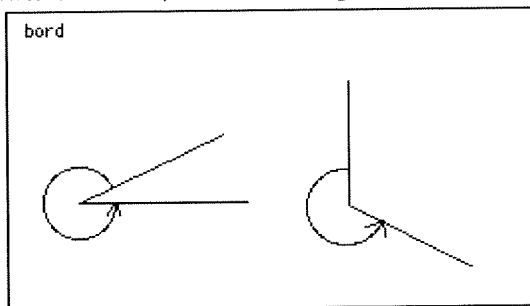


- Maar ik hoorde gister van iemand een ander antwoord, die zei daar weet ik niks van.
 90 N: Hij kan ook de andere kant op gedraaid zijn.
 Ja: Precies hè, de wind kan ook natuurlijk wel eh zó gedraaid hebben [wijst draai over W aan] Dus 't is nog wel moeilijk als je twee hoeken hebt, ik heb deze hoek en ik heb die hoek en ik vraag: welke is nu de grootste? [tekent]



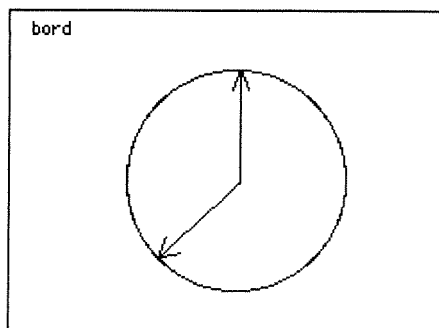
Wie durft daar een antwoord te geven?

- 95 O: Die rechtse.
 Ja: Deze? [wijst de linker aan]
 O: Nee, die andere.
 Ja: Die is groter.
 O: Ja, dat kan je in elkaar passen.
- 100 P: Meneer.
 Ja: Ja, deze past helemaal in die hè, als je ze uit zou knippen. Maar wie, eh, 't is een beetje gemeen misschien, maar wie zou dat anders kunnen beredeneren?
 Q: Eh, die twee, eh die kleine, die eh, die doe ik zo.
 Ja: Ja, als je zo rondgedraaid was en hier was je ook buiten om gedraaid, dat zullen we misschien niet zo vaak doen, maar welke is dan groter?
- 105



- R: Ja, die kleine.
 Ja: Dan is die groter hè. Je, je raakt een beetje op een dwaalspoor, denk ik, omdat je altijd kijkt naar dat, nou naar dat scherpe stukje, dat vind je de hoek.
 E: Ja maar [onverstaanbaar] dat, eh aan de kant waar ze beide naar toe gaan, dat je daar dan..
 Ja: Dat je daar ...
 E: En als ze nu recht staan, dan kun je van beide kanten de hoek nemen.
 Ja: Ja, je zegt dat nou wel, maar stel je voor dat , 't is twaalf uur, eh, en 35 minuten later, waar staat dan de grote wijzer?
- 115 S: Op vijf over eh, vijf over half.
 Ja: Ja, hoeveel heeft ie dan gedraaid? Je begon bij twaalf uur staat ie boven, 35 minuten

later staat ie, eh, daar [tekent], moet je dan altijd deze hoek bekijken?



- E: Dat ligt er dan aan, wat, eh, waar geteld wordt. Kijk, als ik zo'n hoek krijg, dan kan je niet zeggen: hij is zo gedraaid of hij is zo gedraaid, dat weet je dan niet, maar er moet
 120 eigenlijk informatie bij.
- Ja: Je moet eigenlijk weten welke kant je opdraait hè. Dus een hoek, dat zien we, daar zitten twee dingen aan. Je draait, dat's belangrijk, je moet weten hoever je doordraait en eigenlijk wil je ook wel graag weten welke kant je opdraait. Als je allebei die dingen
 125 weet, dan weet je eigenlijk alles van die hoek. Nou daar gaan we, heb ik wat sommen bij gemaakt, dat we nou doen. Het begint heel simpel. Wil jij dit even uitdelen? Iedereen krijgt één zo'n blaadje. Kleuterblaadjes, vouwblaadjes. De bedoeling is, dat je dit met z'n tweeën doet. Dus je hebt even je boek niet nodig. [blaadjes worden uitgedeeld]
- T: Meneer, wij mogen [onverstaanbaar]
- Ja: Ja hoor, ja doe maar samen. We gaan nu dus een soort hoekmeter maken.
- 130 U: Ik heb al een hoekmeter.
- Ja: Eh, je begint op die eerste bladzij, daar staat boven .. Nou daar staat een opdracht waar je iets moet doen met dat vouwpapier. Doe dat eerst even, goed de tekeningen bekijken.

§7.5: ANALYSE VAN DE UITLEG.

Bij de analyse letten we op de volgende karakteriserende kenmerken van een uitleg: de structuur, de strategie, de interactie, de betekenis, de relatie met het boek.

De structuur van de uitleg.

- 1 Inleiding op de video in de klas
- 4 Wie kan vertellen wat een hoek is?
 - 9 Een hoek is een punt waar lijnen bij elkaar komen.
 - 15 Een hoek van het lokaal.
 - 25 Een hoek van de geodriehoek.
 - [28 Intermezzo met jas 35]
- 38 Hoe vergelijk je hoeken met elkaar?
 - 40 Hoe vergelijk je gewichten met elkaar?
 - 43 Wegen.
 - 46 Voelen
 - 49 Weegschaal
 - 51 Microweegschaal
 - 56 Balans
 - 60 Hoe vergelijk je lengtes?
 - 65 Hoeken leg je op elkaar.
 - 69 De lengtes van de benen doen er niet toe bij de grootte van een hoek.
- 74 Wat is een hoek?
 - 79 Een hoek is een draai van het ene naar het andere been.
- 81 De wind kan op twee manieren van N naar ZO draaien.
- 92 Welke is de grootste van twee hoeken?
- 101 Vergelijking van de grootte van twee hoeken door de buitenhoeken te nemen.
- 113 Van een hoek moet je weten hoe die gedraaid is.
- 121 Een hoek wordt bepaald door de grootte en de richting van de draaiing.
- 132

De uitleg heeft een diepte van niveau 3. Dat komt slechts één keer voor. Daarnaast zijn er veel overgangen zonder diepte. Er is dus sprake van een lineaire structuur in de uitleg.

De uitlegstrategie.

In dit fragment probeert Ja uit te leggen wat een hoek is. Dit is een voorbeeld van een uitleg-wat-iets-is. De uitleg resulteert uiteindelijk in een omschrijving van hoek als een draaiing met een grootte en richting. Daarmee wordt een verwijzing gelegd naar het bekende begrip draaiing. Draaiingen kom je tegen bij de wijzers van een klok, de mate waarin je je hoofd moet draaien om een tenniswedstrijd te kunnen volgen en de verandering van windrichting.

In de uitleg-hoe-je-hoeken-met-elkaar-vergelijkt legt Ja de analogie met het

vergelijken van gewichten en lengtes. De analogie mislukt in eerste instantie. Door de verwijzing naar gewichten worden de leerlingen op het spoor van de weegschaal gezet. Het gaat er Ja om dat je het gewicht van een voorwerp kunt bepalen door dat te vergelijken met het (reeds bekende) gewicht van een ander voorwerp. Maar de procedure waarmee dat gebeurt leidt tot een verkeerde analogie. De metafoor ligt te dicht bij de werkelijkheid. Leerlingen kunnen gaan denken dat je hoeken echt gaat wegen, bijvoorbeeld door ze uit te knippen.

De analogie met het op elkaar leggen van lengtes, leidt tot het op elkaar leggen van hoeken. Ja refereert daarbij aan de meetkundige figuur van hoek. Hij sluit daarbij aan op de opdrachten 6,7 en 8 van het boek. De conclusie wordt dan snel getrokken dat de lengte van de benen er niet toe doet. Het gaat immers om de grootte van de draai (80,81).

De uitleg-wat-de-richting-van-een draai-is gebeurt door de verwijzing naar de verandering van de windrichting. Opgave 3b van het boek heeft twee goede antwoorden. Het maakt verschil of de wind rechtsom dan wel linksom van Noord naar Zuidoost is gedraaid. Ja maakt in dit stadium van de uitleg gebruik van de verschillen tussen de antwoorden van de leerlingen. Hij generaliseert naar willekeurige hoeken en laat in een voorbeeld zien dat de grootte afhangt van de richting waarin je draait. Leerling E probeert met het tegenvoorbeeld van de gestrekte hoek deze regel onderuit te halen. Ja negeert het voorbeeld en geeft het voorbeeld van de klok 35 minuten na 12 uur. E formuleert dan zelf dat "er eigenlijk informatie bij moet". Ja maakt hier dankbaar gebruik van door te verwoorden dat het bij hoeken dus om twee dingen gaat: hoever je bent gedraaid en welke kant op.

De vraag "Wat is eigenlijk een hoek" leidt in eerste instantie niet tot een bevredigend antwoord. Toch gaat Ja door met een vraag waar een begrip van hoeken noodzakelijk is: "Hoe vergelijk je hoeken met elkaar". De leerlingen hebben dus wel een idee wat hoeken zijn in de wiskunde, maar ze kunnen dat nog niet onder woorden brengen. Door de overgang naar een procedure om hoeken te vergelijken, lukt dat onder woorden brengen ineens wel. Onder woorden brengen "wat je moet doen" is gemakkelijker dan om te vertellen "wat iets is".

Als geheel kan de uitleg opgevat worden als een uitleg door synthese. De betekenis van een begrip wordt opgebouwd door verwijzing naar bekende begrippen en procedures.

Interactie.

Leerlingen reageren gemakkelijk. Ja lokt reacties van leerlingen uit en haakt daarop in, maar volgt daarbij een eigen agenda. Einddoel lijkt de omschrijving dat een hoek een draaiing is met grootte en richting. Ja lijkt voortdurend gespitst op deze uitkomst. In 38 breekt hij de discussie af over wat een hoek eigenlijk is, met een vraag hoe je twee hoeken met elkaar vergelijkt. Ook in deze nieuwe discussie blijft het doel op de achtergrond aanwezig. De (micro)-weegschaal past niet in dat doel en wordt daarom

afgewezen. Het hele fragment over het vergelijken van gewichten en lengtes (40- 66) lijkt overbodig. Het levert geen inhoudelijke bijdrage aan de uitleg. Er is geen inhoudelijk verband tussen de gestelde vraag en het vervolg. Wel past het in het patroon van het klasgesprek. Het roept vragen op en lokt reacties uit. Het geeft de indruk alsof de hele klas, inclusief de docent, op zoek is naar een formulering om verschijnselen te kunnen beschrijven en verklaren. In deze zin is er duidelijk sprake van een normale en functionele interactie.

De betekenissen.

In het fragment komen vele verschillende betekenissen van hoek aan de orde:

- een punt met strepen erbij (9),
- de hoek van het lokaal (15),
- een hoek tussen je handen (16, 21),
- de rechte hoek van een geodriehoek (25),
- de meetkundige figuur (69, 92-105),
- het vlakdeel (76),
- het resultaat van een draaiing van de benen (80),
- het resultaat van een draaiing (80-90) in een windroos (85-90),
- de meetkundige figuur voorzien van boogjes met een pijl (105),
- het resultaat van een draaiing van de wijzers van een klok (113-117),
- een resultaat van een draaiing met grootte en richting in het algemeen (121-123).

Voor een lesfragment van 8 minuten lijkt dit een grote diversiteit aan betekenissen. Er is echter een sterke samenhang. Er zijn drie grondbetekenen aan te wijzen:

1. Direct waarneembare hoeken in de omgeving: hoek van het lokaal, van de geodriehoek, hoek tussen je handen,
2. Indirect waarneembare hoeken in de omgeving: de draaiing van de wind, van de wijzers van de klok,
3. Direct waarneembare hoeken op papier: de meetkundige figuur met en zonder boogjes, het vlakdeel.

De derde betekenis is een visualisering van de tweede. Het maakt de tweede betekenis waarneembaar en bespreekbaar. De boogjes geven aan hoe de wind of de wijzers van de klok zijn gedraaid. De eerste betekenis speelt in de uitleg geen inhoudelijke maar een procedurele rol.

In dit rijtje ontbreken hoeken als mentaal-object. In dit opzicht sluit de docent volledig aan bij het boek.

De relatie met het boek.

In de voorafgaande les hebben de leerlingen een aantal opgaven uit het boek gemaakt. Ja heeft geconstateerd dat een aantal opgaven problemen opleverden (38,81), met name bij opgave 3. Ja gebruikt deze problemen als opstap voor zijn uitleg zonder deze problemen expliciet te noemen. De les is geen 'behandeling' van het huiswerk, het is een vervolg daarop en tevens een voorbereiding op de komende opdrachten. Hij trekt zich daarbij niets aan van de volgorde van het boek. Het vergelijken van hoeken (opdrachten 6,7 en 8) komt vóór opdracht 3. Dat komt hem

beter van pas bij de gekozen uitlegstrategie. De andere opdrachten blijven onbesproken.

Begripsmatig is er een volledige aansluiting bij het boek. De uitleg resulteert uiteindelijk in een verwoording van essentiële kenmerken van een hoek. Dit is een aanvulling op het boek.

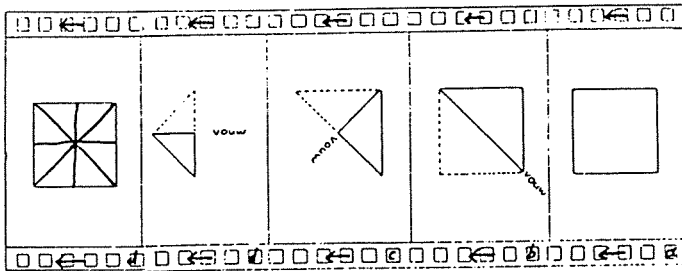
§7.6: HOEKEN IN DE KLAS (VERVOLG).

Het volgende fragment is het vervolg van de les van Ja. De leerlingen hebben gewerkt aan de opdrachten die door Ja zijn uitgedeeld. Deze opdrachten zijn ontleend aan Broekman en Pouw: Instapproblemen (1985).

Saartje

FIETSRUTE

1. We maken een vouwpapiertje waarmee we hoeken kunnen meten.

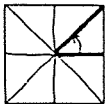


Hoe denk je dat het blaadje eruit ziet als je het uitvouwt?

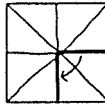
Eerst tekenen in de laatste foto van het filmpje, dan uitvouwen en controleren. Zet een dikke zwarte stip in het midden van je vouwblaadje. Zet een dikke zwarte lijn langs een vouw van de stip naar de rand. Je hebt dan het volgende vouwblaadje.



Als je nu de dikke lijn draait naar de eerste vouw (stippellijn) dan maak je een $\frac{1}{8}$ draai linksom.

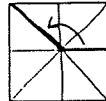
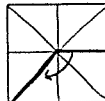
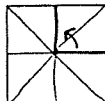
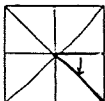


$\frac{1}{8}$ draai linksom



$\frac{1}{4}$ draai rechtsom

Teken nu zelf $\frac{1}{8}$ draai rechtsom, $\frac{1}{4}$ draai linksom, $\frac{3}{8}$ draai rechtsom en $\frac{3}{8}$ draai linksom in de getekende vouwblaadjes.



2. Je gaat nu de Linschoten route fietsen.

Bij iedere bocht noteer je de draai die je maakt.

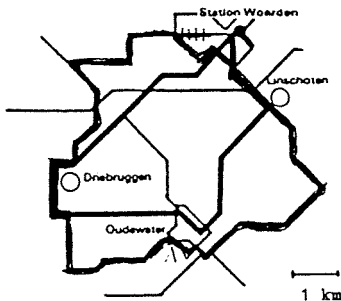
Hierbij kun je gebruik maken van het vouwpapiertje uit opdracht 1.

Linschoten route

Vertrekpunt Woerden

Lengte van de route ca. 30 km.

Deze route laat u volop genieten van het Hollandse polderland. U maakt een onvergetelijke tocht langs de Lange Linschoten, een idyllisch riviertje dat al kronkelend zijn weg naar Oudewater zoekt. Oudewater is met zijn heksenwaag, zijn 16e eeuws raadhuis en zijn vele goed bewaarde en gerestaureerde gevels een bezoek dubbel en dwars waard. Via Tappersheul, Hogebrug en Driebruggen bereikt u Woerden weer.



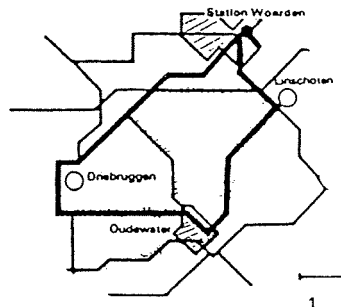
- eerste bocht: .. $\frac{1}{8}$
- tweede bocht: .. $\frac{1}{4}$
- derde bocht : .. $\frac{1}{2}$
- vierde bocht: .. $\frac{3}{4}$
- vijfde bocht: .. $\frac{1}{4}$
- zesde bocht : .. $\frac{1}{2}$
- zevende bocht: .. $\frac{1}{4}$
- achtste bocht: .. $\frac{1}{8}$
- negende bocht: .. $\frac{1}{4}$
- tiende bocht : .. $\frac{1}{2}$
- elfde bocht : .. $\frac{1}{8}$

3. Teken nu zelf, met kleur in de tekening hierboven, een route waarin minstens twee bochten zitten van $\frac{3}{8}$ draai.

Schrijf een routebeschrijving op een los blaadje en wissel deze uit met je buurman of buurvrouw.

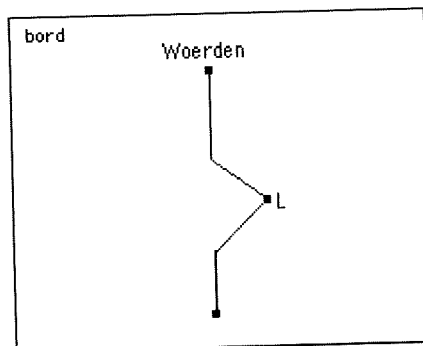
Teken hiernaast met behulp van de c-schrijving de bedoelde route op het kaartje.

Controleer achteraf of je de juiste route hebt getekend en ga samen na waar er onduidelijkheden in de beschrijving zaten.

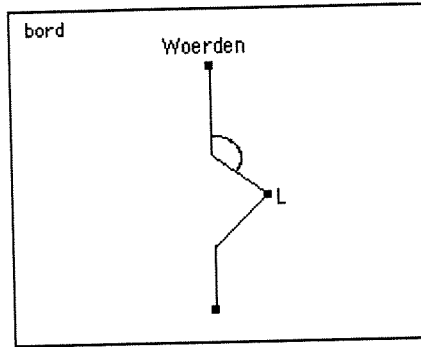


Fragment 17.

- 1 Ja: Je moet eigenlijk weten welke kant je opdraait hè. Dus een hoek, dat zien we, daar zitten twee dingen aan. Je draait, da's belangrijk, je moet weten hoever je doordraait en eigenlijk wil je ook wel graag weten welke kant je opdraait. Als je allebei die dingen weet, dan weet je eigenlijk alles van die hoek. Nou daar gaan we, heb ik wat sommen bij
- 5 gemaakt, dat we nou doen. Het begint heel simpel. Wil jij dit even uitdelen? Iedereen krijgt één zo'n blaadje. Kleuterblaadjes, vouwblaadjes. De bedoeling is, dat je dit met z'n tweeën doet. Dus je hebt even je boek niet nodig. [blaadjes worden uitgedeeld]
- T: Meneer, wij mogen [onverstaanbaar].
- Ja: Ja hoor, ja doe maar samen. We gaan nu dus een soort hoekmeter maken.
- 10 U: Ik heb al een hoekmeter.
- Ja: Eh, je begint op die eerste bladzij, daar staat boven .. Nou daar staat een opdracht waar je iets mee moet doen met dat vouwpapier. Doe dat eerst even, goed de tekeningen bekijken.
- U: Ik heb al, ik heb al zo één gemaakt.
- Ja: Je hebt al één gemaakt, nou dat is wat klein, maar als je die goed genoeg vindt, dan mag je die houden [loopt door de klas en bekijkt de resultaten, gaat zelf vouwen].
- 15 Netjes vouwen, hè, dan gaat het echt goed. [leerlingen werken].
- Als je het gevouwen hebt, maak dan die opdrachten, dan kun je dat dingetje gebruiken. Je hebt zo'n, eh, nou kijk maar heel even mee. Ik weet niet precies hoever iedereen met het vouwen is. Je hebt nu een heel eh primitief soort hoekmetertje gemaakt. Je kunt eh, door dit hoekje in te passen om te kijken of een bestaande hoek evengroot is of groter of kleiner. Als je dit hoekpunt, eh, nou kijk ik zal 't op het bord doen. Hier. Als je deze hier in legt dan zie je nou, die draaiende hoek hier op dat bord, is heel toevallig, is eh bijna even groot als één achtste draai, hè, een hele draai is één keer rond, zo. Veel
- 20 meer kun je niet zeggen. Deze hoek, oh, ik teken allemaal hoeken van één achtste draai, nou deze is in ieder geval groter. Maar je kunt ook hoeken van eh, twee achtste draaien of drie achtste draaien hier mee vouwen. Ja? Probeer maar eens. Twee achtste is één vierde, ja.
- 25 [leerlingen werken, Ja loopt rond en geeft aanwijzingen]
- 30 [Ja veegt bord schoon, neemt de figuur van het stencil over op het bord]



- 31 Eh, luister, jullie zijn nog lang niet klaar. Dat was ook niet de bedoeling. Maar ik heb een paar keer dezelfde vraag gekregen, dus kijk heel even mee, want het is natuurlijk prettig als iedereen eh, Marjolein, als iedereen aan het begin zo'n beetje hetzelfde doet, dan kunnen er niet zoveel misverstanden zijn. Bij die tekening, daar zijn jullie
- 35 allemaal mee bezig, zijn twee problemen. Van Woerden, via Linschoten, Oudewater, Driebruggen kun je naar Woerden. Je kunt twee kanten op. Je zou zó [wijst linksom aan op de tekening van het bord] en je kunt zó lopen [wijst rechtsom aan].
- In: Nee, nee [praten door elkaar][onverstaanbaar]
- A: De beschrijving is dat hij eerst naar Linschoten ..
- 40 Ja: Hoe heb je dat uit de beschrijving gevonden?
- A: Nou, [leest voor]: Deze route laat u volop genieten van het Hollandse polderland. U maakt een onvergetelijke tocht langs de Lange Linschoten, een idyllisch riviertje dat al kronkelend zijn weg naar Oudewater zoekt.
- Ja: Ja, ja, precies, als je de eerste zin leest, iedereen daarover eens, dat je eerst langs
- 45 Linschoten moet, want het riviertje de Lange Linschoten ligt waarschijnlijk wel bij het plaatsje Linschoten. En als je verderop leest, dan weet je het helemaal zeker dat je aan het eind pas bij Oudewater komt. Nou aan het begin zijn er nog twee problemen, je kunt zeggen, het was niet helemaal duidelijk op het kaartje, ga je naar beneden weg [wijst vertikaal naar beneden op de tekening van het bord] of ga je zó [wijst naar rechts beneden], dat kon je niet goed zien, die fotokopie is ook niet helemaal perfect. Laten we maar even aannemen dat het dit is [wijst vertikaal naar beneden] dan kom je hier de eerste bocht tegen [wijst aan]. Alleen nu is het even lastig, hoeveel draai je nu?
- B: Drie achtste naar rechts.
- Ja: Drie achtste naar rechts. [wacht, kijkt rond]
- 55 C: Drie achtste links hoor.
- Ja: Drie achtste links.
- C: Ja, want je moet het bekijken dat ie zó aankomt.
- D: Je moet het bekijken vanaf Woerden.
- E: Je moet het vanaf Woerden bekijken.
- 60 [leerlingen praten door elkaar, gelach]
- Ja: Zullen we één antwoord tegelijk nemen. Ik eh heb steeds drie achtste gehoord. Is er iemand anders die nog een ander antwoord heeft?
- F: Vijfachtste, linksom, eh ..
- C: Hoe je het bekijkt, hoe je het bekijkt.
- 65 Ja: Eh, is iedereen het daarmee eens met die antwoorden? Eh, wie had die niet?
- In: Ja hoor, nee hoor.
- C: Het is hoe je het bekijkt.
- Ja: Het is hoe je het bekijkt. Leg eens uit.
- C: Nou, want eh je kan eh ..
- 70 G: Buitenbocht.
- C: ... direkt naar links rekenen, maar je kan ook eerst, als je daar aankomt, via de rechterkant gaan en dan ga je vijf-achtste.
- Ja: Ja, eh ...
- C: Het kan allebei, maar de kortste moet je rekenen.
- 75 Ja: ...er gaat iets mis, en ik begrijp heel goed wat, jullie zien in de tekening deze hoek staan hè [tekent boogje in de hoek]...

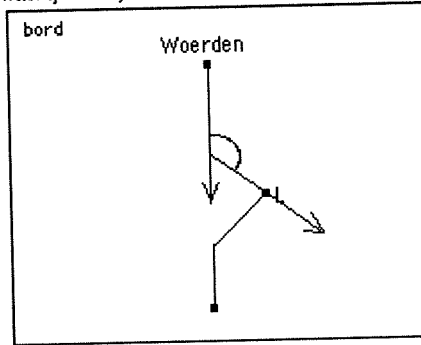


...en die hoek, nou dat antwoord vijf-achtste, vond ik nog zo raar niet.

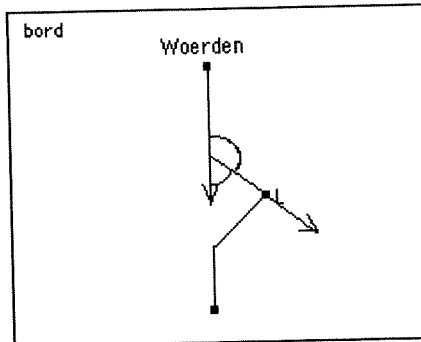
H: Ik ook niet.

Ja: Maar is dat de hoek die je draait? Stel je eens goed voor, die fietser. Welke kant rijdt die op? Hij kijkt die kant op hè [zet pijl in de figuur], en als die gedraaid is welke kant kijkt ie dan op? [wacht] Dan kijkt ie die kant op. [zet pijl in de figuur]

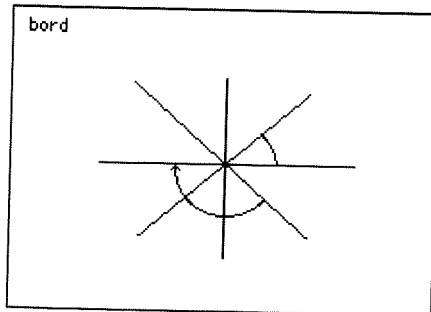
80



Dus over welke hoek is ie gedraaid in de tekening? Dat stond er helemaal niet in, dit hoekje [zet boogje in de figuur].

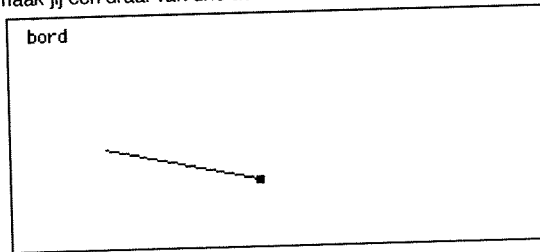


- 85 Kijk als ik zo loop [kijkt naar achteren in de klas], die kant op, en ik moet diè kant op [wijst schuin naar rechts, vanuit de klas gezien], dan draai ik niet over een hoek van vijf achtste. Eerst kijk ik naar beneden [wijst in de figuur], misschien moet ik er een liniaal langsleggen, eerst eh, kijk eens goed ...
- I: Eén achtste hè.
- Ja: ...eerst kijk je naar beneden, zo [legt geodriehoek langs verticale stuk], dan draai je op je fiets tot je bij [onverstaanbaar] bent. Over wat voor hoek heb je nu gedraaid?
- 90 IIn: Drie achtste, drie achtste.
- Ja: Drie achtste of ...
- IIn: Eén achtste, één achtste.
- Ja: ... een kwart. Eén achtste ? [kijkt in de tekst]
- 95 IIn: [door elkaar] Eén achtste, twee achtste, drie achtste, zes zestiende.
- Ja: Ja, eh, dat eh, één achtste is echt te klein, dat kan niet.
- IIn: [door elkaar, onverstaanbaar]
- J: Eén achtste, je moet toch over dat kleine [onverstaanbaar] draaien.
- Ja: Je moet dit stukje draaien [wijst onderste boogje aan]
- 100 IIn: Ja, dat is één achtste.
- Ja: En dat is één achtste, ja je hebt gelijk. Eh.
- K: Meneer het is wel één achtste hè?
- Ja: Ja, je hebt gelijk.
- L: Eén achtste [onverstaanbaar]
- 105 Ja: Iedereen overtuigd dat het niet drie achtste is? [kijkt rond, wacht] Martijn?
- Ma: Wat is [onverstaanbaar]?
- Ja: Dat die eerste bocht, die eerste draai, één achtste is?
- Ma: Nee, drie achtste.
- Ja: Na, nou nog een keer. Eerst kijk je die kant op hè, ja? Dan ben je hier. Dan draai je.
- 110 Over hoeveel, wat voor draai heb je gemaakt?
- M: Eén achtste.
- N: Wij zijn daar niet langsgereisd.
- Ma: Drie achtste draai.
- O: Je kon ook ergens anders langs hoor.
- 115 Ja: [tekent op het bord] Eh, dit stukje was één achtste draai en eh, dit stukje zo was drie achtste draai.



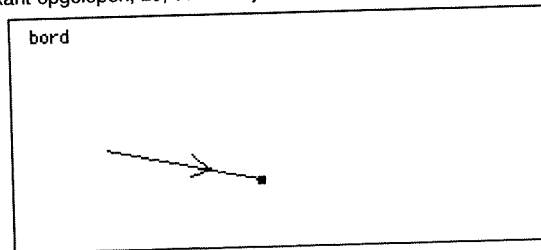
- 117 Martijn, over welke van die hoeken heb je gedraaid?
- Ma: Ik snap het niet.
- Ja: Welk van die twee eh draaiingen heb je gehad, als je eerst zo gaat en daarna ga je zo?
- 120 Ma: Wie gaat er nou zo?
- Ja: Je loopt eerst die kant op en daarna loop je die kant op. Wat voor draai heb je dan gemaakt?
- Ma: Drie achtste!

- 125 Ja: Nou laten we dat eens doen, je loopt zo, je stopt hier [tekent op het bord], kom eens hier, en nu maak jij een draai van drie achtste. Teken eens welke kant je dan op loopt.

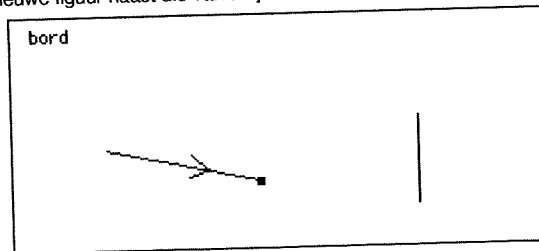


[Ma gaat naast Ja vóór het bord staan, pakt een krijtje.]

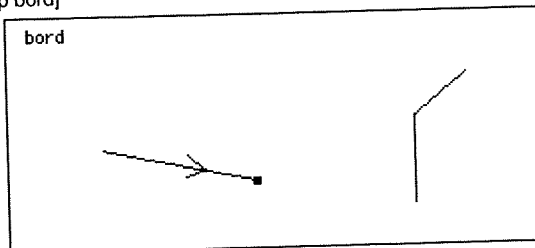
- Ja: Je bent die kant opgelopen, zó, dan ben je hier aangekomen ... [zet pijl in tekening]



[Ma maakt nieuwe figuur naast die van Ja.]

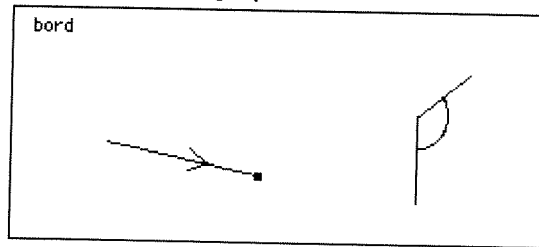


- Ja: Eh, nou, nu ga je een draai van drie achtste maken. Welke kan ga je dan op ?
 130 Ma: Naar rechts.
 Ja: Ja teken dat maar eens.
 [Ma tekent op bord]

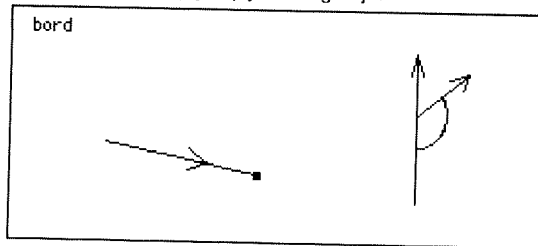


- Ja: Hoeveel heb je nu gedraaid? Wijs eens dat hoekje aan. [wacht]
 Ma: Ik snap het niet, ik snap die vraag niet. [geïrriteerd]

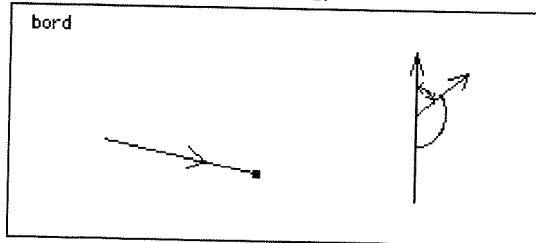
- 135 Ja: Je snapt de vraag niet. Eh, wie kan hem vertellen hoeveel ie gedraaid heeft nu?
 In: Eén achtste, drie achtste.
 Ja: Ook drie achtste? Eh, moeilijk is dat. [Vraagt met gebaar krijtje terug aan Ma, Ma blijft staan.]
 In: [door elkaar] Ik snap het niet. Ik snap het al. Simpel. [Er worden vingers opgestoken]
 140 Ja: Simpel. Leg het hem eens uit.
 P: [onverstaanbaar] Hij loopt eerst zó...
 Ja: Ja.
 P: ... en dan vouw je vanuit deze lijn, dat is één achtste.
 Ja: Ja. Kijk weet je waar jouw drie achtste vandaan komt? [gaat naar het bord] Hoe groot is deze draai? [tekent boog in de figuur]



- Ma: Dat is drie achtste.
 Ja: Die is drie achtste. En heb je zoveel gedraaid? Eerst keek je die kant op [zet pijl in de figuur], toen keek je die kant op [zet pijl in de figuur]...



- ...hoeveel is je neus gedraaid?
 150 [Ma beweegt zijn gezicht van links naar rechts]
 Ja: Drie achtste?
 In: Eén achtste, één achtste.
 Ja: Dan is ie over dit stukje gedraaid [tekent boog].



- Nou hoe groot is dat stukje?
 155 Ma: Eén achtste.

- Ja: Eén achtste.
 Q: Of hij rekent vanaf de andere kant.
 Ja: Ja, hij loopt, je loopt achteruit misschien.
 Q: Ja.
 160 R: Dan draai je nog één achtste.
 IIn: Dan draai je nog één achtste.
 S: Maar als je van de bovenkant komt?
 Ja: Nou laten we het maar niet te ingewikkeld maken. Christien, zie jij ook dat we over één achtste gedraaid hebben?
- 165 Chr:Nee.
 [gelach]
 Ja: Nee.
 Chr:Ik zie eh ...
 Ja: Wat zie je nou? Moeilijk hè?
- 170 Ma: Maar ik vind het niet logisch.
 Ja: Zal ik nou eens lopen. Kijk eens wat ik doe. Ja. Christien kijk eens even. Ik loop zó.
 [loopt recht voor zich uit het lokaal in] Kom ik hier. [stopt] Ga ik daarheen. [wijst met zijn arm naar rechts en draait in die richting] Hoeveel heb ik nu gedraaid?
- Ma: Drie achtste.
 175 Ja: Drie achtste!
 T: [onverstaanbaar]
 [gelach]
 Ja: Nee, als ik drie achtste draai, moet ik drie stukjes van één achtste draaien, dat één stuk, twee stuk, drie stuk [draait drie keer], dan zou ik die kant [wijst] oplopen, met
- 180 drie achtste draai.
 U: [onverstaanbaar]
 Ja: Misschien is dat toch wel handig.
 We hebben nog één vraag niet beantwoord: is het nou links-of rechts-om? Hè, één achtste.
- 185 V: Moet je bekijken.
 Ja: Moet je bekijken. Ja natuurlijk, maar wat?
 W: Als je zó loopt is het rechts [wijst naar rechts] als je ...
 X: Als je zó aan komt lopen ...
 Y: Zo bij Woerden naar beneden, dan moet je eigenlijk omgekeerd gaan zitten [wijst achter zich], dan is het linksom.
- 190 Ja: Linksom. Wie eh ... Het is niet duidelijk. Wie kan mij het verschil tussen linksom en rechtsom eens uitleggen? Jij enig idee [wijst leerlinge aan]? Wat noemen we nou linksom op dat papier, wat rechtsom?
- Z: Nou linksom, die kant op [wijst naar links] ...
 Ja: Links is gewoon links. Eh, links is links, ja maar ...
- 195 A: Meneer [steekt vinger op].
 Ja: ...nu is dit links en als ik me nu omdraai is dat links [staat met het gezicht naar het bord en draait zich om], wat is nu linksom draaien? Ik wil het graag duidelijk hebben. (Wilco).
- Wi: Nou je komt vanaf het vertrekpunten je moet vanaf daar naar eh L en dus dan moet je
 200 naar links, want je loopt dan met je linkerkant naar die bocht en die bocht die gaat dan naar links voor jou, als je de andere kant op was gelopen was ie naar rechts.
 Ja: Je moet altijd kijken naar de kant waar je loopt hè. Precies.
 IIn: Ja,ja.
 Ja: Hè, dus je loopt die, wijst naar beneden, je loopt naar beneden op het bord [wijst naar figuur], je draait die kant om, dat is linksom. Ja? [loopt naar een leerling toe]
- 205 B: Ik weet ook een [onverstaanbaar] want L is links.
 Ja: De L van links. Nou da's ook een mooie. De O van Oudewater is onder, alleen wat rechts

210 is dat staat hier niet in. Maar je moet dus steeds goed kijken, Martijn, welke kant je oploopt, vóór dat je draait en welke kant je daarna oploopt. Probeer het maar eens en kijk vooral eens naar de laatste opgave.

[Leerlingen gaan tot het einde van de les aan het werk met de opdrachten. Vlak voor de bel vraagt Ja aan ze om de routebeschrijving op een apart velletje in te leveren bij de volgende les.]

§7.7: ANALYSE VAN HET TWEEDE UITLEGFRAGMENT.

De structuur van de uitleg.

- 11 Inleiding op de opdracht.
- 17 Leerlingen werken aan de opdrachten.
- 18 Tussentijdse uitleg hoe je het hoekmetertje kunt gebruiken om de grootte van hoeken te vergelijken.
- 19 Leerlingen werken aan de opdrachten.
- 31 Uitnodiging om op te letten.
- 35 Uitleg welke route is gekozen.
- 52 Uitleg over hoeveel graden en in welke richting je bij de eerste bocht moet draaien.
- 52 Vraagstelling.
- 53 Inventarisatie van de antwoorden.
 - 53 $\frac{3}{8}$ rechts
 - 55 $\frac{3}{8}$ links
 - 57 C legt uit waarom het $\frac{3}{8}$ links is.
 - 62 Zijn er nog andere antwoorden?
 - 63 $\frac{5}{8}$ linksom.
 - 64 Het antwoord hangt af hoe je het bekijkt
 - 68 Waarom ?
 - 71 Je kunt de hoek linksom en rechtsom rekenen.
 - 74 Maar je moet de kortste rekenen.
- 75 Ja constateert dat de verkeerde hoek als draaihoek is genomen.
- 79 Uitleg welke de goeie draaihoek is.
 - 80 Ja zet met pijlen de kijkrichting van de fietser vóór en na de draaiing in de figuur.
 - 83 Ja zet boogje in de figuur.
 - 85 Wijst de verschillende kijkrichtingen aan in het lokaal.
 - 89 Draait met lineaal op het bord langs de kijkrichtingen.
 - 90 Over welke hoek is gedraaid?
 - 91 $\frac{3}{8}$.
 - 92 Ja. Of?
 - 93 $\frac{1}{8}$
 - 96 Ja verwerpt $\frac{1}{8}$.
 - 98 Leerling: Boogje komt overeen met $\frac{1}{8}$.
 - 101 Ja accepteert $\frac{1}{8}$.
- 105 Ja controleert of de uitleg begrepen is.
- 109 Uitleg waarom de draai $\frac{1}{8}$ is (tot Ma gericht).
 - 115 Ja tekent hoeken van $\frac{1}{8}$ en $\frac{3}{8}$.
 - 123 Ma tekent draai van drie achtste op het bord.

- 135 Uitleg waarom de draai één achtste is (door leerlingen).
 141 P legt uit wat een hoek van één achtste is.
 144 Ja legt uit waarom $\frac{3}{8}$ fout en $\frac{1}{8}$ goed is (tot Ma gericht).
 157 Leerlingen proberen het antwoord van Ma te verklaren.
 163 Ja legt uit waarom over $\frac{1}{8}$ gedraaid is (tot Chr gericht).
 163 Ja vraagt aan Chr of ze het begrepen heeft.
 171 Uitleg waarom over $\frac{1}{8}$ gedraaid is door door het lokaal te lopen.
 178 Uitleg waarom $\frac{3}{8}$ fout is door door het lokaal te lopen.
 183 Uitleg of linksom of rechtsom gedraaid is.
 183 Ja stelt vraag of het links- dan wel rechtsom is.
 185 Leerlingen proberen vraag te beantwoorden.
 190 Ja wijst uitleg af, herhaalt de vraag.
 199 Wi legtuit wat linksom is.
 202 Ja vat uitleg samen.
 209 Probeer uitgelegde toe te passen.
 210 Leerlingen gaan aan het werk.

De structuur is zeer complex en laat zich moeilijk in afgebakende kaders weergeven. Dit is terug te vinden in de grote lengte van de samenvatting en de grote mate van gedetailleerdheid.

Begrijpen over welke hoek gedraaid is: de weg en het water.

De leerlingen worden in de opdrachten geconfronteerd met een ander begrip hoek dan in het voorgaande aan de orde is geweest. Ging het daar om de draaiing tussen de twee benen van een hoek, nu gaat het om de draaiing van het verlengde van het ene been naar het andere:



De linkerfiguur is onmiddellijk zichtbaar in de route, de rechterfiguur is een uitbreiding. Dat vraagt een heel andere interpretatie van hoeken dan leerlingen in het voorgaande gewend zijn. Ze zullen de draaihoek in de rechterfiguur moeten **herkennen**. De leerlingen zullen de plattegrond dus op de juiste wijze moeten interpreteren. Er is sprake van een indirect waarneembaar hoekbegrip dat in scherp contrast staat met het direct waarneembare hoekbegrip in het voorgaande in de les. Deze verschillende

interpretaties geven ook verschillende antwoorden. Het ene werkt daarmee storend op het andere. In feite is dit een gevolg van de gekozen context. Voor een schip op zee dat van koers wil veranderen, is het heel vanzelfsprekend om het over de draaihoek te hebben. Niet alleen wordt de draaihoek zichtbaar in de mate van roeruitslag en de verandering van kompasstand, de koers van het schip voor en na de verandering is de enige indirecte waarneembare referentie. Bij een fiets op een weg is de weg de direct waarneembare referentie. Het is dus geen wonder dat de hoek tussen die wegen dominant is boven de draaiing van de fietser.

In deze situatie is het herkennen de essentie van het begrijpende gedrag. De controle op dit begrijpende gedrag vindt plaats door leerlingen te confronteren met andere draaisituaties.

Uitlegsoorten en uitlegstrategieën.

In 18- 28 is er sprake van een uitleg-hoe-je-een-hoekmetertje-moet-gebruiken. Ja demonstreert de handeling op het bord. De gekozen strategie is een vorm van generaliserende analogie.

Van 35 to 52 wordt uitgelegd-welke-route-is-gekozen. Dit is een uitleg van het type 'wat-het-geval-is'. Er zijn twee mogelijkheden. Leerling A geeft een dwingende reden voor een mogelijkheid, Ja accepteert deze, herhaalt de reden en geeft nog een tweede aanvullende reden. De strategie is een uitleg door analyse.

De hoofdmoot van het fragment wordt gevormd door de uitleg-over-hoeveel-graden-gedraaid-moet-worden. Ja laat het goede antwoord geven. Hij vergist zichzelf eerst maar geeft dan duidelijk aan over welke hoek gedraaid is. Naar aanleiding van de reacties van de leerlingen volgt een uitleg-waarom- $\frac{1}{8}$ -goed-en- $\frac{3}{8}$ -fout is. Ja probeert daarbij een identificatie tot stand te brengen tussen de beide hoeken en de plattegrond. De uitlegstrategie is een uitleg door analyse. Als uitgangspunt van de uitleg wordt een stukje plattegrond genomen, aangevuld met de richtingspijlen. De koppeling tussen deze figuur en de gegeven 'realistische' situatie is een interpretatie achteraf van die figuur. De leerlingen hebben echter al een eigen interpretatie gemaakt van de figuur en de daaruit volgende draaihoek. Waarschijnlijk ligt die interpretatie dicht bij de gebruikelijke hoekfiguur die al zichtbaar is in de plattegrond.

Dat verklaart het antwoord $\frac{3}{8}$. De leerlingen hebben op dit ogenblik meer behoefte aan een uitleg-waarom-hun-interpretatie-fout-is. Voor leerlingen die in de analyse van Ja geen verklaring van hun eigen fout herkennen, zal de uitleg mislukken. Dat niet alle leerlingen de analyse van Ja als een verklaring vinden voor hun eigen fout herkennen, wordt waarschijnlijk veroorzaakt door de dominantie van de hoekfiguur in de plattegrond.

Tenslotte volgt in de regels 183 tot 209 nog een uitleg-in-welke-richting-gedraaid-is. In eerste instantie is dit weer een uitleg-wat-het-geval-is gevolgd door een uitleg-waarom-het-gegeven-antwoord-juist-is. Leerling Wi geeft een verklaring, die door Ja wordt geaccepteerd en versterkt. Die verklaring berust op een interpretatie van de plattegrond als een weg waarop je kunt lopen (204). Het is een uitleg door analyse.

De interactie.

Ja heeft bij het rondlopen geconstateerd dat veel leerlingen de opgave verkeerd hebben aangepakt. Dat is voor hem aanleiding de werkzaamheden van de leerlingen te onderbreken en te proberen de leerlingen weer op het goede spoor te zetten. Hij kiest de verschillende antwoorden van de leerlingen als aanknopingspunt van zijn uitleg.

Ja reageert heel direkt op de antwoorden van leerlingen. Hij probeert foutieve antwoorden te begrijpen en te corrigeren, hij laat zich van zijn eigen fout overtuigen. Hoewel de uitleg zich vaak op één persoon richt (P, Ma, Chr) blijft de hele klas meedenken en meereageren. De leerlingen reageren daarbij sterk op elkaar. Ze voelen zich erg betrokken bij de discussie.

Leerlingen durven spontaan aan te geven of ze de gevolgde uitleg wel of niet hebben begrepen. Al met al is er duidelijk sprake van een normale interactie.

Ja heeft een sterk inhoudelijke inbreng. Er zijn een aantal duidelijke elementen van functionele interactie aanwezig. Bijvoorbeeld: de konsekwente herhaling van goede antwoorden, het inventariseren van de antwoorden vóórdat de uitleg-waarom aan de orde komt en het voor het bord halen van Ma waardoor de hele klas bij het probleem wordt betrokken.

Achteraf.

Door de grote mate van interactie wordt zichtbaar dat een aantal leerlingen de uitleg wel en een aantal leerlingen de uitleg niet hebben begrepen. De moeilijkheden in de uitleg worden, naar ons idee, in eerste instantie veroorzaakt door het feit dat de leerlingen gekonfronteerd worden met indirekt waarneembare draai-hoeken terwijl ze in het voorgaande alleen maar gewerkt hebben met direkt waarneembare (draai)hoeken. Deze hoeken vragen een heel andere interpretatie van de hoeken in de plattegrond. Doordat Ja de leerlingen aan het werkblad heeft laten werken, wordt hij gedwongen tot een uitleg achteraf door analyse. Dat heeft het nadeel dat een door de leerlingen reeds gekozen interpretatie moet worden afgebroken, zodat de dwingende reden in de uitleg waarom iets het geval is en iets anders niet het geval is, tegelijkertijd een uitleg moet zijn waarom de leerling iets fout hebben gedaan. Dit maakt de uitlegsituatie aanzienlijk gecompliceerder.

Een constructieve uitlegsituatie, die zeer goed aansluit bij het lesmateriaal van het geanalyseerde fragment, wordt geboden door de computertaal LOGO. Daarin kunnen leerlingen tekenen met behulp van een 'turtle' die voor en achteruit kan bewegen en draaien naar links en naar rechts kan maken. Uit diverse ervaringen is gebleken dat de geboden context voldoende natuurlijk voor leerlingen is om daarmee onmiddellijk aan de slag te kunnen gaan. Meestal ontbreekt in dergelijke experimenten echter een duidelijk vervolg. Een les met LOGO, voorafgaande aan een les over de introductie van hoeken, zou een goede oriëntering kunnen bieden op een synthetische uitlegstrategie van het begrip hoek.

§ 7.8: DE OPDRACHTEN.

Aan het einde van de les heeft Ja de leerlingen gevraagd om de routebeschrijving op een apart velletje op te schrijven. 22 leerlingen hebben de uitgewerkte opdrachten 2 en 3 ingeleverd. Bij het analyseren van dit werk zijn twee vragen van belang:

1. In hoeverre hebben de leerlingen inzicht in het door Ja in de les aangegeven hoekbegrip (opdracht 2, eerste deel opdracht 3)?
2. In hoeverre gebruiken ze dit hoekbegrip bij de beschrijving van de route (opdracht 3)?

Inzicht.

16 leerlingen hebben hun antwoorden op opdracht 2 ingeleverd. Daarvan hebben:

-5 leerlingen alle draaihoeken meteen goed ingevuld.

-7 leerlingen hun antwoorden verbeterd, waarbij $\frac{3}{8}$ vervangen is door $\frac{1}{8}$.

-4 leerlingen foutieve antwoorden gegeven.

Deze getallen zijn een aanduiding voor het effect van de uitleg. Grofweg betekent het dat 70% op het verkeerde spoor zat en dat als gevolg van de uitleg 40% van mening is veranderd.

8 leerlingen vergeten bij de hoeken de draairichting te vermelden. Dat betekent dat voor grofweg 50% van de leerlingen het laatste gedeelte van de uitleg niet is doorgedrongen.

Deze cijfers zijn uiteraard niet meer dan zeer grove indicaties. Ze tonen aan dat de uitleg voor sommige leerlingen effect heeft gehad en voor andere niet. Bij het ontbreken van voldoende vergelijkingsmateriaal is er geen uitspraak te doen of dit een groot of klein effect is.

De antwoorden op het eerste gedeelte van vraag 3 zijn niet duidelijk te interpreteren.

Veel leerlingen tekenen een eigen route met één 'scherpe' hoek van $\frac{3}{8}$ draai erin.

Nergens blijkt echter dat die hoek de bedoelde hoek met de draai van $\frac{3}{8}$ is. Het lijkt eerder toeval. Ze hebben een nieuwe route bedacht en daar zit dan toevallig zo'n scherpe hoek in. Het feit dat de meeste routes maar één dergelijke hoek bevatten, ondersteunt dit. Opvallend is echter dat bij de leerlingen die bij opdracht 2 het goede (of verbeterde) antwoord hebben gegeven, wel twee van de gevraagde draaien in de route zitten. Dit wijst erop dat voor het zelf zoeken van een hoek van $\frac{3}{8}$ draai een goed inzicht in de draaihoek noodzakelijk is en dat het zoeken een moeilijker opdracht is dan het aangeven van een draai in een gegeven hoek. Belangrijk hierbij is echter het feit dat in de route van opdracht 2 geen draaien van $\frac{3}{8}$ voorkomen.

Toepassen.

18 leerlingen (van de 22) hebben een beschrijving ingeleverd. Er zit een groot verschil in de mate van uitgebreidheid van de beschrijvingen. Sommige leerlingen hebben anderhalf kantje A4 nodig. Ze leveren zeer gedetailleerde beschrijvingen, compleet met zelf bedachte plaatsnamen en natuurbeschrijvingen. Het andere uiterste wordt

gevormd door beschrijvingen van vijf regels die zeer summier en onvolledig zijn. In het algemeen hebben de leerlingen de opdracht eerder opgevat als een creatieve uitdaging dan als een opdracht om op ondubbelzinnige wijze, gebruik makend van het geleerde, een beschrijving te geven. Slechts één leerling geeft een beschrijving met behulp van linker- en rechter-draaien. Een leerling vermeldt als bezienswaardigheid dat de route verscheidene $\frac{3}{8}$ draaien kent! De meeste leerlingen verwijzen in hun beschrijvingen rechtstreeks naar het bijgeleverde kaartje. Een aanduiding als "de tweede weg rechts" of: "schuin links aanhouden" is dan natuurlijk voldoende. In aanwezigheid van de plattegrond is het aangereikte taalmiddel, de beschrijving door de grootte en richting van draaiing, in feite overbodig. Enkele leerlingen tekenen een kompasroos bij de plattegrond en verwijzen in hun beschrijving naar de windrichtingen.

Van de gevraagde controle van de beschrijvingen door de medeburen, blijkt niet veel uit het ingeleverde werk. Er wordt ook niet gevraagd om dit schriftelijk weer te geven. Misschien hebben de leerlingen wel onderling overleg gehad, maar dit is op de blaadjes niet terug te vinden.

§ 7.9: CONCLUSIES.

In dit hoofdstuk is een kaleidoscopisch beeld gegeven van de introductie van het begrip hoek in de schoolwiskunde.

In het eerste gedeelte is een wiskundig-didaktische analyse geschetst. Daarin is een betekenisanalyse gemaakt van de relatie tussen hoeken en realiteit, en is een overzicht gegeven van verschillende opvattingen over hoeken in de literatuur. Daarbij is bijzondere nadruk gelegd op de niveautheorie van de van Hiele's.

In het tweede gedeelte is een les geanalyseerd waarin hoeken worden geïntroduceerd. In de les komt een grote verscheidenheid aan betekenissen van hoeken aan de orde. Uiteindelijk resulteert dit in een verwijzing van de meetkundige figuur hoek naar een draaiing met richting en grootte. Daarmee wordt de veelzijdigheid gereduceerd tot visueel waarneembare figuren waaraan gemeten en waarmee getekend kan worden. In het vervolg van de les werken leerlingen aan opdrachten waarin het voorgaande kan worden toegepast in een realistische situatie. Het blijkt moeilijk te zijn de juiste hoek aan te geven waarover gedraaid wordt. Veel leerlingen zijn in het voorgaande op het spoor gezet de hoek in de figuur rechtstreeks te gaan meten. De door Ja aangevulde figuur blijkt voor de leerlingen moeilijk terug te interpreteren naar de gegevens van de probleemsituatie. Uit een analyse van het ingeleverde werk blijkt dat de uitleg voor een aantal leerlingen effect heeft gehad en voor anderen niet. In de door hen bedachte routebeschrijving maken ze echter totaal geen gebruik van het zojuist verworven taalmiddel.

Over hoeken valt veel uit te leggen. Zoveel - dat altijd een keuze gemaakt moet worden.

Binnen de wereld van de klassieke euclidische vlakke meetkunde kan men zich beperken tot de meetkundige hoek waarvan de hoekfiguur een direkt waarneembare visualisatie is. Meetkunde op een hoger niveau, waarin het logisch kunnen redeneren met de eigenschappen van figuren een belangrijke rol speelt, vereist ook voor het hoekbegrip een overgang, die kan worden bewerkstelligd door een voldoende rijke meetkundige structuur aan te bieden (van Hiele, van Hiele-Geldof).

In de wereld van de realistische wiskunde is de relatie tussen waarneembare hoeken, indirect waarneembare hoeken, hoeken als mentaal object aanzienlijk gecompliceerder. De gegevens van realistische probleemsituaties moeten worden weergegeven in vlakke figuren. Soms zijn de hoeken daarin al direkt waarneembaar aanwezig, soms zullen die figuren met lijnen moeten worden aangevuld tot hoeken die corresponderen met een of andere beweging. Dat laatste vraagt een duidelijke mentale voorstelling van de situatie waarin de hoek al in gedachten aanwezig is. De leerling ziet als het ware al vooraf dat daar een hoek inzit zonder dat die getekend is. In het lesfragment is geconstateerd dat het terug- interpreteren naar de realistische gegevens van een meetkundige figuur, waarin de draaiing om een hoek is weergegeven, grote problemen bij leerlingen kan opleveren. Hier kan men

waarschijnlijk beter 'opbouwen' door het aanbieden van een voldoende rijke voorgestruktuurde situatie.

In dit hoofdstuk ligt de nadruk op de allerste introductie van hoeken. Het zo geschetste beeld is een momentopname. De vraag welke introductie voldoende doorkijk biedt op het vervolg komt niet aan de orde. Het is bijvoorbeeld heel goed denkbaar om hoeken niet bij voorbaat te beperken tot hoeken tussen lijnen maar ook hoeken tussen snijdende gebogen krommen te bekijken. Dat zou misschien allerlei nieuwe mogelijkheden bieden bij de introductie van hoeken tussen grafieken. Ook kan men zich zo afvragen welke uitleg zo goed mogelijk voorbereidt op hoeken die groter zijn dan 180° . Of op het brede scala van mogelijkheden zoals dat door Freudenthal is geschetst.

In het algemeen kan men zich afvragen hoe lang een bepaalde uitleg blijft 'hangen' en hoe een uitleg voorbereidt op toekomstige ontwikkelingen. Met andere woorden: wat is de reikwijdte van een gegeven uitleg?

HOOFDSTUK 8: UITLEGGEN IS EEN VAK.

"Toen het woord 'projectie' verklaard moest worden, tekende de leraar een kwartier lang allerlei lijnen op het bord, het krijtje vasthoudend alsof hij er vies van was, zijn linkerhand in zijn zak, studentikoos en onverschillig. Telkens veegde hij een lijn uit, om er weer een nieuwe overheen te tekenen, die er zo mogelijk nog wrakker uitzag dan de vorige. Het had iets met goniometrie te maken, maar hij wist er niets meer van, verklaarde hij, en onderwijl lag Jelle Mol met een stompzinig gezicht voorover op zijn bank, en zei hardop het vieze rijmpje over 'jongen', maar meneer Greves bewegingen bleven even langourens en berustend, verdiept als hij was in die duistere wiskundeproblemen, die hem daar zo plotseling uit zijn eigen h.b.s.-jaren verschenen waren. Hij keek maar, lachte eens, wierp er wéér een lijn doorheen, schreef nog een lange formule op,- en toen hij zich eindelijk tot de klas terugwendde, stond zijn gezicht afgetrokken, verglaasd, wat spijtig, maar zijn mond drukte de gewone spot uit. Ditmaal liet ook Anton zijn enthousiasme de vrije loop: "Hoe vond je dát? Die trekt zich ook van de hele zooi niets aan!!" "

Simon Vestdijk: Terug naar Ina Damman.

In dit hoofdstuk worden een aantal lijnen, die in de voorgaande hoofdstukken zijn uitgezet, doorgetrokken en bij elkaar genomen zodat een beeld kan ontstaan van een aantal vakmatige aspecten van het uitleggen.

§ 8.1: MOEILIKHEID EN DUIDELIJKHEID.

In §1.8 is een omschrijving van deze beide begrippen gegeven. Het streven was daarbij om inhoudelijke criteria aan te geven op basis waarvan, op een tamelijk ondubbelzinnige manier, kon worden vastgesteld of een gegeven uitleg moeilijk dan wel duidelijk was. Uit deze analyse was duidelijk dat er een sterke overlapping tussen beide karakteristieken te verwachten was. Beide soorten criteria waren immers geënt op het idee dat van een gegeven uitleg de structuur kan worden vastgesteld. De mate van complexiteit in die structuur zou medeverantwoordelijk zijn voor de moeilijkheid. Ook de omschrijving van duidelijkheid berust op de structuur van de uitleg. Daarbij is gelet op de lokale duidelijkheid binnen in één uitlegelement van de structuur, de interlokale duidelijkheid tussen de elementen en de globale duidelijkheid over het geheel van de uitleg.

In de cursus 'Presentatie van een wiskundig onderwerp' zijn de uitspraken van studenten over moeilijkheid van een onderwerp en duidelijkheid van een uitleg met elkaar vergeleken. In het algemeen bleken die uitspraken echter tamelijk onafhankelijk van elkaar te zijn. Slechts één combinatie van uitspraken leek een duidelijke voorkeur te hebben: als het onderwerp niet moeilijk gevonden wordt, wordt de uitleg duidelijk gevonden.

Met deze uitslag in het achterhoofd zijn vier presentaties bij twee studenten op moeilijkheid en duidelijkheid onderzocht. In drie gevallen kwamen moeilijk en

duidelijk overeen met de theoretische analyses op basis van de gestelde criteria. In het vierde geval was er sprake van een onduidelijke uitleg bij een niet zo moeilijk onderwerp, terwijl de criteria wezen in de richting van een onduidelijke uitleg bij een moeilijk onderwerp. Uit het verslag van de voorbereiding en het protocol blijkt dat de student de moeilijkheid van het onderwerp waarschijnlijk heeft onderschat. De beoordelende studenten geven waarschijnlijk in hun beoordeling aan dat de presentatie over niet zo moeilijke objecten ging.

Bij de geanalyseerde lesfragmenten is gelet op de moeilijkheid van het onderwerp en de duidelijkheid van de uitleg.

De treintjescontext is een moeilijk onderwerp. Het is waarschijnlijk zelfs onmogelijk om vanuit dit model te begrijpen waarom negatieve getallen zo met elkaar moeten worden vermenigvuldigd. Th heeft deze moeilijkheden niet herkend. Hij volgt letterlijk de opdracht van het boek, hetgeen resulteert in een onduidelijke uitleg. De onduidelijkheid wordt mede veroorzaakt door de onduidelijkheid in verwachtingen ten aanzien van begrijpend gedrag. De uitleg betreft een waarom-uitleg, de opgaven zijn doe-opgaven en vragen een uitleg-hoe-je-iets-moet-doen.

Bij de introductie van letters en formules worden leerlingen geconfronteerd met objecten uit een nieuwe wereld. Het betekenis-geven krijgt hier een essentiële waarde. In de drie geanalyseerde fragmenten is te zien op welke wijze ervaren docenten de moeilijkheden voorzien en welke wijze ze de leerlingen daarop voorbereiden. Br geeft een duidelijk signaal dat er iets moeilijk komt en koppelt dit aan verwachtingen over het gedrag van leerlingen tijdens de uitleg. Ja confronteert de klas met een situatie die niet in het boek staat en die een voorbereiding vormt op wat ze in het boek tegen zullen komen. Rij neemt het initiatief over van de leerlingen bij het bespreken van een moeilijke opgave. We zien in deze drie situaties dat het inhoudelijke initiatief bij moeilijke onderwerpen meer bij de docent komt te liggen. Daarmee wordt niet automatisch een grotere duidelijkheid geschapen. Door efficiënt taalgedrag lukt het Br om duidelijkheid te creëren. De zelfbedachte situatie van Ja brengt al gauw een element van onduidelijkheid mee: waar zijn we mee bezig, moeten we dit ook kennen? Bij Rij zagen we een onduidelijkheid ontstaan doordat hij een andere interpretatie had van een opgave dan de leerlingen en dit niet aan het begin van de uitleg expliciet maakte.

Dat moeilijkheid en duidelijkheid aan elkaar zijn gekoppeld en dat de mate van koppeling afhankelijk is van de leerlingen, is duidelijk te zien in hoofdstuk 6 waarin een 2 Atheneum-klas wordt vergeleken met een 2 MAVO-klas bij de introductie van lineaire vergelijkingen. Als je precies weet wat je moet doen, is iets niet moeilijk. Het gaat er nu maar om wanneer je precies weet wat je moet doen. In de Atheneum-klas lijkt dat tijdstip vroeger te liggen dan in de MAVO-klas. Atheneum-leerlingen komen sneller en gemakkelijker tot eigen constructies en daardoor treden sneller verkortingen op. MAVO-leerlingen houden langer vast aan het 'weegschaal-algoritme'. Hoewel de moeilijkheidsgraad van het onderwerp voor beide groepen, gezien dezelfde

beginsituatie, min of meer gelijk is in te schatten, treedt in de MAVO-klas aanzienlijk later duidelijkheid op over de betekenis dan in de Atheneum-klas. Het gevolg is een aanzienlijk tempo-verschil tussen beide groepen. Het is maar de vraag of deze verschillen alleen toe te wijzen zijn aan verschillen tussen leerlingen. Natuurlijk zijn er verschillen en reageert de docent daarop. Vanuit het idee van het in wisselwerking gestalte geven aan de betekenis binnen een uitlegsituatie, is het echter zeer goed denkbaar dat door het gedrag van de docent deze verschillen worden versterkt. Die wisselwerking heeft immers het karakter van een 'onderhandeling' waarin vanuit verwachtingen over elkaars gedrag, uiteindelijk een overeenstemming over de betekenis en de vorm van begripend gedrag wordt bereikt. De verwachtingen ten aanzien van het begripend gedrag van Atheneum-leerlingen kunnen voor een docent heel anders liggen dan voor MAVO-leerlingen, waardoor er vanaf het begin voor de Atheneum-leerlingen meer ruimte is voor het scheppen van hun eigen duidelijkheid, waar ze dankbaar gebruik van zullen maken.

De moeilijkheid bij de introductie van hoeken is juist dat, enerzijds, het begrip zo verweven is met de concrete ervaringswereld terwijl het, anderzijds, een nieuwe wiskundige manier van kijken vraagt. Een snelle concentratie op het wiskundige begrip schept een duidelijk situatie, maar plaatst het wiskundige begrip hoek in een isolement dat los staat van de concrete leefwereld. Aan de andere kant is het begrip hoek een dergelijk fundamenteel complex van concrete ervaringen, dat een introductie, die een begripsmatige verankering nastreeft, ten onder dreigt te gaan in de grote mate van complexiteit van de concrete ervaringswereld. Bekendheid met het onderwerp betekent tegelijkertijd confrontatie met een ingewikkeld geheel aan ervaringen. Ja is in staat een uitlegsituatie te scheppen die recht wil doen aan een begripsmatige verankering van het begrip hoek in de concrete ervaringswereld en die daardoor balanceert tussen bekendheid en ingewikkeldheid.

Docenten voorzien waar moeilijkheden zitten. In hun uitleg gaan ze die moeilijkheden niet uit de weg. Ze nemen meer inhoudelijk initiatief, bereiden leerlingen op de moeilijkheden voor en ze passen zich aan bij de mogelijkheden van de situatie en het boek.

§8.2: INTERAKTIE.

Bij de omschrijving van uitleggen in hoofdstuk 1, ligt de nadruk op uitleggen als een vorm van taalgedrag waarmee de ene persoon (de spreker) een begripend gedrag bij de andere persoon (de toehoorder) wil realiseren. Daarmee is uitleggen een vorm van actie tussen personen, een vorm van inter-actie. Dat betekent dat we ook het lezen van een handleiding voor het gebruik van een blikopener als interactie zullen opvatten, alhoewel hierbij sprake is van éézijdig op de lezer gerichte actie. Hetzelfde geldt voor veel universitaire docer- colleges voor een zaal van 200 studenten. In een dergelijke situatie zal er toch vaak sprake zijn van enig tweerichtingsverkeer doordat de toehoorders op één of andere manier in hun gedrag zullen demonstreren hoe ze de uitleg ervaren en de docent hierop kan reageren. In zo'n geval is er sprake van een zwakke tweezijdigheid in de interactie. Daarmee is uitleggen dus gedefinieerd als een vorm van éézijdig- of tweezijdig-gericht interactief gedrag waarbij er grote verschillen kunnen bestaan in de intensiteit van de interactie.

In de onderzochte klasse-situaties is er altijd sprake van een sterke tweezijdig gerichte interactie. Dat betekent dat leerlingen zichtbaar en op de docent gericht reageren, dat de docent daar weer op reageert, enzovoorts... Een dergelijke vorm van interactie wordt door de docent benut als een instrument in de uitleg. Door deze vorm van interactie kan er door beide partijen sturing plaatsvinden in het uitlegproces. Dat kan bijvoorbeeld leiden tot herhaling van bepaalde fragmenten of tot tempowisselingen of wisselingen van werkvorm. De interactie heeft een procesmatige functie.

Daarnaast heeft de interactie een betekenis-inhoudelijke functie. Een woord of zin krijgt pas volledig betekenis door de reactie en interpretatie van de toehoorder. Zo kan er bij een sterke tweezijdig gerichte interactie een situatie ontstaan waarin docent en leerlingen als het ware in gezamenlijk 'overleg' betekenis geven aan nieuwe uitdrukkingen.

Normaal en functioneel.

In de onderzochte fragmenten is nagegaan of de interactie 'normaal' en 'functioneel' was binnen de gegeven situatie. Het blijkt voor student-leraren niet in alle gevallen mogelijk om een normale en functionele interactie tot stand te brengen. Ervaren docenten waren daar wel altijd toe in staat. Bij een niet-normale interactie lijken er grote risico's te ontstaan met betrekking tot het slagen van een uitleg. De toehoorder wordt dan in een vorm van gedrag gedwongen waarvan hij niet los kan komen doordat normale reactiepatronen zijn geblokkeerd.

Accenten leggen.

In de fragmenten 4 en 5 gaat Hennie bewust van een sterke tweezijdige vorm van interactie over naar een zwakke éézijdig gerichte docervorm. Eerst wordt in gezamenlijk 'overleg' betekenis gegeven aan het idee 'regelmatig veelvlak', daarna

volgt een afleiding van een formule. Die afleiding is op zich niet erg interessant en mag snel worden vergeten. Het gaat om het uiteindelijke resultaat. De definitie van regelmatig veelvlak is echter essentieel en komt voortdurend weer terug. Op deze wijze weet Hennie verschillende accenten te leggen in de onderdelen van de uitleg die afhankelijk zijn van de rol van dat onderdeel in de gehele uitleg.

Docenten leggen deze accenten op hun eigen manier. Ze geven een persoonlijke tint aan de uitleg.

Ja is uitdagend. Hij prikkelt leerlingen tot reacties door een opmerking op een bepaalde manier te interpreteren of door een 'kritische' wedervraag te stellen. Daardoor is hij in staat het gesprek in een bepaalde richting te sturen. Ten slotte maakt hij een inventariserende samenvatting van het voorgaande zodat het lijkt alsof leerlingen het allemaal zelf hebben bedacht.

Br is acceptierend. Hij neemt een neutrale accepterende houding aan, zelfs als de reacties van leerlingen niet wiskundig korrekt zijn maar passen in een bepaald stadium van betekenisontwikkeling. Zijn doceerfragmenten bouwen voort op suggesties van leerlingen.

Rij is voorbereidend. Bij opgaven die door hem als moeilijk worden getaxeerd, neemt hij het inhoudelijke initiatief over van de leerlingen en stelt hij meer gesloten vragen. Soms krijgt de uitleg daardoor haast het karakter van een invuloefening.

Interactie en het onderwerp.

Niet alle onderwerpen laten zich 'docerend' uitleggen. Niet alle onderwerpen laten zich interactief uitleggen. Bij de uitleg over hoeken werd zichtbaar dat de tweezijdige interactie essentieel en onmisbaar is om de concrete gevarieerde ervaringen van leerlingen te kunnen actualiseren. Bij de afleiding van een formule of een onverwacht bewijs, of bij het uitleggen van een handeling, kan het zinloos en inefficiënt zijn om te streven naar tweezijdige interactie. Een dergelijk onderwerp leent zich meer voor een docerende aanpak. Het is een kenmerk van vakmanschap dat een docent de mate van interactie weet aan te passen bij de aard van het uit te leggen onderwerp.

§8.3. UITLEGSOORTEN EN UITLEGSTRATEGIEËN.

Parate voorkennis.

Is er een relatie tussen uitlegsoorten en uitlegstrategieën? Hoort bij de ene soort een bepaalde strategie? Zijn sommige combinaties van soorten en strategieën ongeschikt? Een dergelijke relatie wordt niet uit de analyses van de fragmenten zichtbaar. Het lijkt wel of er een zekere vrijheid is.

Je kunt uitleggen wat een regelmatig veelvlak is door er voorbeelden van de laten zien en naar aanleiding van de voorbeelden (en non-voorbeelden) tot een omschrijving te komen van kenmerkende eigenschappen. In een dergelijke situatie is er sprake van een generaliserende strategie.

Je kunt ook uitleggen wat een regelmatig veelvlak is door een algemene definitie te geven en deze toe te passen aan de hand van een aantal voorbeelden. Er is dan sprake van een specialiserende strategie.

Over het verschil in effectiviteit tussen beide strategieën is op voorhand niets te zeggen. Veel hangt af van de mate van bekendheid met de gepresenteerde begrippen en terminologie. Voor een toehoorder die vertrouwd is met het idee veelvlak, die daar een directe betekenis aan weet te geven, kan een algemene definitie zeer effectief zijn. Voor toehoorders die niet een dergelijke directe betekenis paraat hebben, zal eerst een voorbereidende fase van betekenisverwerving noodzakelijk zijn.

Om een keuze te kunnen maken voor een effectieve uitlegstrategie zal de docent dus dienen te weten welke de parate betekenis is van de gehanteerde terminologie voor de toehoorders.

De betekenisstructuur.

Dat ook de betekenisstructuur van de uit te leggen begrippen van invloed is op de keuze van de uitlegstrategie, blijkt uit het fragment waarin uitgelegd wordt wat-een-hoek-is. Daarin vindt een wisseling van soorten en strategieën plaats.

Allereerst concentreert de uitleg zich op een omschrijving van het begrip hoek, daarna worden voorbeelden gegeven, vervolgens richt de uitleg zich op het idee hoe je hoeken met elkaar kunt vergelijken. Dit resulteert uiteindelijk in een omschrijving van twee karakteristieke eigenschappen van hoeken.

De docent heeft in deze uitleg gekozen voor een betekenisverwerving vanuit de complexe leefwereld van leerlingen. Het is hem er niet om te doen te komen tot een omschrijving van het meetkundige begrip hoek. In de allerste plaats tast hij af wat de leerlingen paraat hebben en probeert hij deze kennis te activeren. Dat maakt een vaste keuze voor één strategie al bij voorbaat onmogelijk. Daarnaast is er sprake van een complexe betekenis van hoek. Weten wat een hoek is, kan betekenen dat je er een omschrijving van kunt geven, maar ook dat je er één kunt tekenen. Daarbij past een uitleg-wat-iets-is maar ook een uitleg-hoe-je-iets-moet-doen. Een docent die recht wil doen aan deze complexe betekenisstructuur, zal daarbij ook van uitlegstrategie moeten kunnen veranderen.

Iets soortgelijks treedt op bij het uitleggen van algebraïsche vaardigheden. Hierin

heeft de betekenisstructuur een bepaalde gelaagdheid. Het kunnen uitvoeren van concrete handelingen wordt vergezeld door kennis over voorwaarden waaronder de handelingen toepasbaar zijn ("Wanneer bepaal je de wortels van een kwadratische vergelijking door kwadraatafsplitsen, door ontbinden of met de a,b,c-formule?") en door het tot beschikking hebben van algemene kennis en vaardigheden ("Wat is een vergelijking, een oplossing? Hoe controleer je je antwoord? "). In een uitleg hoe-je-lineaire-vergelijkingen-oplost komen dus ook fragmenten voor van een uitleg-wat-een-lineaire-vergelijking-is. Ook hier vraagt de complexe betekenisstructuur om verschillende uitlegsoorten binnen één uitleg.

Door de voorgaande discussie wordt de keuze van de uitlegsoort en uitlegstrategie afhankelijk gesteld van de betekenisstructuur van de uitleg en van de parate voorkennis van de toehoorders. Het kunnen maken van een geschikte keuze is een vakmatig aspect van het uitleggen. Op basis van ervaring kiezen docenten bijna gedachteloos voor de juiste uitlegsoort in combinatie met een effectieve strategie.

§ 8.4: KUN JE LEREN UITLEGGEN?

In hoofdstuk 3 is de situatie geschetst rondom het onderdeel "Presenteren van een wiskundig onderwerp". Hoewel deze situatie in vele opzichten verschilt van de reguliere klassesituatie in het voortgezet onderwijs, zijn er toch signalen die aangeven dat er mogelijkheden zijn voor transfer tussen beide situaties.

In hoofdstuk 3 is een vergelijking gemaakt tussen twee studenten. Tussen beide studenten bestaat een duidelijk verschil in leereffect ten aanzien van een aantal aspecten. Deze aspecten zijn ook terug te vinden in het uitleggedrag van de drie docenten die in de daarop volgende hoofdstukken aan het woord komen. We zullen deze aspecten achtereenvolgens aan de orde stellen.

Leren organiseren.

Een uitleg vraagt om een organisatie van activiteiten. Het onderwerp moet worden ingedeeld. Aanvullend materiaal moet worden bedacht. Er moet een zichtbare opbouw worden aangebracht. Er moet een tijdsindeling worden gemaakt. Kernvragen en tekeningen op bord of transparant moeten worden voorbereid.

Dit zijn allemaal vrij technische voorbereidingen die noodzakelijke voorwaarden scheppen voor het slagen van een uitleg. Zonder een degelijke organisatie mislukt een uitleg bij voorbaat.

Bij de drie docenten zijn deze elementen van organisatie terug te vinden.

In protokol 860219 (§5.3) stelt Ja de context van de weegschaal aan de orde. Hij heeft zelf een voorbeeld bedacht als aanvulling op de voorbeelden in het boek. Er moeten twee weegschaalsituaties met elkaar vergeleken worden. Eerst mogen de leerlingen spontaan reageren, daarna moeten ze eerst even nadenken en stil zijn vóór het antwoord gegeven mag worden. In dit kleine fragmentje zien we dat Ja niet alleen materiaal heeft bedacht, hij heeft ook een keuze gemaakt voor de aard van de leerlingactiviteiten.

Br heeft bedacht dat een visgraattabel een handige manier kan zijn om een formule te vinden bij een gegeven rij getallen (protokol 860227, §5.4). Hij wijst daarin op de horizontale regelmaat in de getallen en de vertikale regelmaat die in een formule weergegeven wordt. Daarmee heeft hij een representatie ontwikkeld van waaruit het idee ontstaat om formules te kunnen maken. Ook hij organiseert een gesprek in de klas waarin hij, reagerend op de leerlingen, zijn uitleg gestalte geeft.

Rij maakt consequent tekeningen bij de gemaakte opgaven over de omtrek van rechthoeken (protokol 860409, §5.5). Hij controleert en herstelt fouten door de organisatie van een werkvorm waarin leerlingen hun eigen oplossingen kunnen aandragen.

In 2 MAVO en 2 Atheneum laat Rij de leerlingen het gemaakte huiswerk op het bord schrijven. Er staan vier leerlingen tegelijk voor het bord. Het werkt snel en het is effectief. Gemaakte fouten worden voor alle leerlingen zichtbaar en kunnen zo voldoende aandacht krijgen. Opvallend is het verschil in volledigheid van behandeling

in beide klassen. Bij de MAVO-klas krijgt iedere som uitvoerige aandacht, bij de Atheneum -klas volgt alleen een behandeling als er sprake is van een opvallende fout; een organisatie die toegespitst is op de verschillen tussen beide klassen. In zijn les over hoeken organiseert Ja een klassegesprek met een open begin over 'wat een hoek is'. Hij heeft een keuze gemaakt voor een operationele karakterisering van het hoekbegrip en weet die geleidelijk in de discussie te vervlechten. Hij voegt eigen lesmateriaal toe aan het bestaande materiaal van het boek. Daarmee kunnen leerlingen in de les actief bezig zijn met hoeken. In reactie op het werk van de leerlingen organiseert hij een klassegesprek over het begrip 'draai'.

Voor een docent zijn bovenstaande organiserende elementen heel vanzelfsprekend. Bijna zonder nadenken worden ze op basis van ervaring gerealiseerd. Een student-leraar beschikt niet over die ervaring. Daarvoor zal het organiserende element een essentieel onderdeel dienen te vormen van de voorbereiding. Bij Hennie hebben we gezien hoe zorgvuldig ze zich heeft voorbereid in de eerste voordracht en hoe zorgvuldig ze haar interactie met de groep bij de tweede voordracht weet te organiseren door het voorbedenken van vragen en het tonen van concreet materiaal. Bij Ron is die organisatie veel minder zorgvuldig geweest. Hij heeft bijvoorbeeld niet van te voren proefgedraaid. Door een proefvoordracht komen alle slecht georganiseerde elementen genadeloos aan het licht. In principe kan een voordracht daar niet op mislukken. In de tweede presentatie weet hij door het proefdraaien wel de elementaire organisatorische fouten, zoals tijdgebrek, te voorkomen. Het organiseren van een goede interactie die hem uit de moeilijkheden had kunnen halen, is echter niet gelukt.

Het zijn maar twee voorbeelden, maar ze spreken voor zich. Elementaire organiserende vaardigheden zoals tijdsplanning, bordindeling, etc zijn goed te leren. Ook 'hogere' organiserende vaardigheden, zoals het organiseren van een functionele interactie en het maken van een goedlopend verhaal, zijn te leren, maar dat is sterker afhankelijk van de bereidheid, de inzet en de capaciteiten van de student.

Het effect van interactie leren waarderen.

Bij de uitleg-fragmenten in de klas blijkt dat tweezijdige interactie een essentieel element is van de uitleg. Zelfs in de ogenblikken waarin sprake is van doceren, is er direct contact zichtbaar tussen docent en leerlingen. Dit is in groot contrast met het patroon van interactie tijdens de presentaties. Daar is direct contact tussen docent en leerling eerder uitzondering dan regel. Dat heeft te maken met het beeld van het universitaire onderwijs van de studenten, het karakter van de gepresenteerde stof, de verwachtingen die door de situatie en de opdracht zijn gewekt en het (on)vermogen van de student om een normale functionele interactie op te bouwen. Het is ook niet de bedoeling van de cursus dat studenten leren om interactief uit te leggen. Waarschijnlijk is de cursus daarvoor te kort. Het betekent dat een student niet alleen de interactie dient te organiseren door middel van geschikte vragen en opdrachten, maar ook nog adequaat op de reacties moet kunnen reageren. Vooral dat

laatste stelt hoge eisen aan de sociale vaardigheden van een student die waarschijnlijk niet op een dergelijk korte termijn zijn te realiseren. Belangrijker is evenwel dat studenten interactie leren waarderen als een effectief middel tot uitleggen. Bij Hennie is dat besef vanaf het begin aanwezig. Ze tilt erg zwaar aan het negatieve oordeel hierover naar aanleiding van haar eerste presentatie. Ze neemt zich voor daar verandering in te brengen en dat lukt haar ook. Tijdens de tweede presentatie lukt het haar om interactieve en docerende werkvormen op een functionele wijze te hanteren. Bij Ron is dat besef niet zichtbaar naar aanleiding van de eerste presentatie. Dat geldt ook voor de tweede presentatie. Ondanks de negatieve waardering voor de interactie, plaatst hij daarover slechts één defensieve opmerking. Uit de protocollen blijkt dat Ron op een heel éézijdige manier communiceert met de groep.

Gevoel krijgen voor moeilijkheden in de leerstof.

Ervaren docenten plaatsen vaak duidelijke accenten in hun uitleg van moeilijke onderwerpen. Br zegt: "Niet zo ongeduldig zijn en meteen verder gaan. Met, [het huiswerk] voor de volgende keer, want 't zijn best moeilijke dingen. Even naar kijken." Ja onderbreekt de fase van individueel werken omdat hij van allerlei mis ziet gaan. Rijn past een veel nadrukkelijker aanpak toe bij de behandeling van de opgaven over het oplossen van vergelijkingen. Docenten geven meestal duidelijke signalen aan de leerlingen die aangeven dat er iets moeilijks gaat komen. Ook dit is weer een kwestie van ervaring en vermogen om te kunnen reageren op de leeractiviteiten van leerlingen. Een ervaren docent weet vaak van tevoren waar de moeilijkheden zitten of hij weet op een adequate manier te reageren als er zich onverwachte moeilijkheden voordoen.

De uitgebreide aandacht voor de voorbereiding van een presentatie en de keuze van de onderwerpen, is er mede op gericht om bij studenten dit gevoel voor moeilijkheden te ontwikkelen. In de onderwerpen is gestreefd naar voldoende variatie in moeilijkheid. Een onderwerp is niet alleen maar moeilijk of alleen maar gemakkelijk. Door het voorbereiden wordt een student gedwongen vooruit te kijken. Het bewust maken van deze ervaringen kan de ontwikkeling van dit gevoel versterken. Over het algemeen geven studenten echter weinig signalen af tijdens de presentatie waaruit voor de toehoorder valt af te leiden dat er iets moeilijks komt. Ze plaatsen ook veel minder accenten, bijvoorbeeld door tempowisselingen, of door uitgebreidere pauzes. Ook in de protocollen en verslagen van Hennie en Ron is hiervan niet veel terug te vinden hoewel het laatste fragment van de voordracht van Ron als moeilijk kan worden gekenmerkt.

Belangstelling krijgen voor het leren van leerlingen.

Uit de geanalyseerde protocollen van de classesituaties, blijkt een duidelijke belangstelling van de docenten voor de leerlingen en hun problemen. Iedere vraag van leerlingen wordt serieus geïnterpreteerd, docenten doen moeite om duidelijkheid te scheppen.

De protokollen van het seminarium laten wat dit betreft een ander beeld zien. Aan de ene kant is er bij Hennie wel die belangstelling zichtbaar voor het leren van de studenten. Ze ergert zich aan zichzelf dat ze bij de eerste voordracht zo'n minimaal contact had. Bij de tweede voordracht neemt ze heel nadrukkelijk het initiatief om te controleren of haar uitleg goed overkomt.

Bij Ron lijkt het tegengestelde het geval. Bij beide presentaties ligt het initiatief om aan te geven of de uitleg is overgekomen in eerste instantie bij de studenten zelf.

Ook bij de andere protokollen is er dit beeld. Studenten zijn bij de eerste voordracht al geïnteresseerd in het leren van hun toehoorderstudenten en dat blijft zo bij de tweede voordracht, of ze zijn het niet en het verandert ook niet bij de tweede voordracht.

Leereffekten.

Sommige dingen zijn wel geleerd in de cursus "Presentatie van een wiskundig onderwerp", andere niet.

Het 'leren organiseren van een uitleg' is een duidelijk leereffekt van de cursus. Het is door iedere student met de nodige inzet te leren. Het betreft hier vooral een aantal praktische aspecten rondom het uitleggen.

Interactief leren uitleggen blijft voor veel studenten een onhaalbare kaart tijdens de cursus. Dit doet een beroep op hoge communicatieve vaardigheden die door middel van systematische training kunnen worden geleerd. Daarvoor is de cursus, met twee presentaties per persoon, te kort.

Wel leren ze de waarde van een interactieve uitleg te taxeren. Hoewel het hier mede gaat om houdingsaspecten die vaak moeilijk zijn te veranderen, spelen hun eigen negatieve leerervaringen bij hoorcolleges waarschijnlijk een rol en levert iedere presentatie in contrast met alle andere een nieuwe ervaring op. Ook als toehoorder kan een student leren wat het nut is van een interactieve uitleg.

Het gevoel krijgen voor de moeilijkheden in de stof en het publiek daarop voorbereiden, is niet als leereffekt terug te vinden. Hiermee komt een essentieel gebrek van de cursus aan het licht. Het betreft vaardigheden die zowel als toehoorder en als spreker zijn te leren. Dat betekent dat de cursuslengte geen beperkende faktor kan zijn. Het zijn ook vaardigheden die direkt zichtbaar zijn te maken, zowel in de voorbereiding van het onderwerp als bij de uitvoering. Misschien kan een verplichte schriftelijke voorbereiding die vóór een presentatie wordt besproken met de docent en zonodig bij gesteld, hieraan iets veranderen.

Ook het belangstelling krijgen voor het leren van leerlingen. Dit punt heeft alles te maken met de sociale interesse van de student. Het is niet te verwachten dat die in negen weken, in een veilige omgeving, zal veranderen.

Bijlage 1: De onderwerpen van het Seminarium "Presentatie van een wiskundig onderwerp, cursus 88/89.

1. De Euler lijn en de 9-punts cirkel. (Coxeter: 1.6, 1.7)

De Eulerlijn wordt gedefinieerd als de lijn door het zwaartepunt G en het middelpunt van de omgeschreven cirkel O. Op deze lijn wordt een punt H gekozen zodat $GH = 2OG$. Er wordt bewezen dat H het hoogtepunt is van de driehoek, zodat ook het hoogtepunt op de Eulerlijn ligt. In een driehoek worden negen punten gedefinieerd: de drie voetpunten van de hoogtelijnen, de middens van de zijden en de middens van lijnstukken tussen de drie hoekpunten en het hoogtepunt. Er wordt bewezen met behulp van gelijkvormigheden dat deze negen punten op één cirkel liggen.

2. De ingeschreven en omgeschreven cirkel. (Coxeter: 1.5)

In een driehoek worden de ingeschreven cirkel, de omgeschreven cirkel en de drie aangeschreven cirkels getekend. De formule van Heron: $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ wordt afgeleid (Δ is de oppervlakte van de driehoek, s de halve omtrek, a, b en c de lengten van de zijden). Met behulp van deze formule en de sinusregel wordt de betrekking:

$$4R = r_a + r_b + r_c - r$$

tussen de stralen van de om-, aan- en in-geschreven cirkels afgeleid.

3. Twee extremum-problemen. (Coxeter: 1.8)

Het probleem van Fagnano luidt: bepaal in een scherphoekige driehoek de driehoek UVW met de hoekpunten op de zijden, zodat de omtrek van UVW minimaal is. Dit probleem wordt opgelost met behulp van spiegelingen in de zijden.

Het probleem van Fermat luidt: bepaal in een scherphoekige driehoek het punt P waarvan de som van de afstanden tot de zijden minimaal is. Het gevraagde punt wordt bepaald door de zijden van de oorspronkelijke driehoek te roteren om de hoekpunten over hoeken van 60° .

4. De stelling van Morley. (Coxeter: 1.9).

Als in een driehoek de hoeken ieder door twee lijnen in drie gelijke delen worden verdeeld, ontstaat door de snijpunten van deze trisectrices twee aan twee een driehoek in de oorspronkelijke driehoek. Deze driehoek is gelijkzijdig. Bij het bewijs wordt uitgegaan van een gelijkzijdige driehoek. Daar omheen wordt, door een geschikte keuze van de hoeken, een driehoek geconstrueerd die gelijkvormig is met de oorspronkelijke driehoek en waarvan de gelijkzijdige driehoek aan de voorwaarden voldoet.

5. Inversie in een cirkel. (4 voordrachten) (Coxeter: 6.1 tot en met 6.6)

De afbeelding inversie in een cirkel wordt gedefinieerd. Enkele elementaire eigenschappen worden afgeleid: een inversie heeft periode 2, een inversie is te construeren met passer en lineaal, twee inversie na elkaar toegepast in twee concentrische cirkels is een puntvermenigvuldiging.

Vervolgens wordt afgeleid dat het beeldpunt van een punt P het snijpunt is van twee cirkels door P die loodrecht staan op de inversie cirkel.

De beeldfiguren van lijnen en cirkels worden bepaald.

Met behulp van die kennis over de beeldfiguren wordt de porisme van Steiner bewezen. Als twee niet concentrische cirkels worden getekend, de ene bevat in de andere, in de rand wordt gevuld met rakende cirkels, dan kan het gebeuren dat de cirkels precies aan elkaar gaan sluiten. Het porisme van Steiner is nu: als dat eenmaal gebeurt in een gegeven situatie, dan gebeurt dat altijd in die situatie.

Tenslotte wordt de cirkel van Apollonius bepaald: de meetkundige plaats van alle punten P waarvan de afstanden tot twee gegeven punten in een vaste verhouding staan.

6. Het 6- en 5-kleurenprobleem. (Cadwell: 8.1, 8.2, 8.3)

In een inleiding wordt het vier-kleurenprobleem aan de orde gesteld: zijn 4 kleuren voldoende om iedere kaart in te kunnen kleuren. De stelling van Euler die het verband tussen het aantal ribben, hoekpunten en vlakken van een convex veelvlak geeft wordt getransformeerd naar een stelling over het verband tussen zijden, hoekpunten en vlakken in een vlakke kaart. Daarmee wordt afgeleid dat een vlakke reguliere kaart

minstens een driehoek, vierhoek of vijfhoek moet bevatten. Daarmee wordt eerst bewezen dat 6 kleuren voldoende zijn voor het kleuren van reguliere vlakke kaarten en vervolgens dat het ook altijd met 5 kleuren lukt.

7. Het 2- en 3-kleurenprobleem. (Cadwell: 8.5, 8.6)

Voor welke soort kaarten zijn 2 kleuren voldoende en voor welke soort 3 kleuren? De oplossing van het eerste probleem ligt tamelijk voor de hand: in ieder hoekpunt mogen slechts een even aantal zijden samen komen. Het laatste probleem is min of meer het duale van het eerste door een tweekleurig van de duale kaart te realiseren ontstaat een driekleurig van de oorspronkelijke kaart.

8. Regelmatige veelvlakken. (Coxeter: 10.1, 10.2, 10.3).

Coxeter geeft een aantal voorbeelden van piramides, prisma's en antiprisma's en geeft een omschrijving van regelmatig veelvlak. Aan de hand van uitslagen en tekeningen geeft hij de vijf bekende voorbeelden. Met behulp van de formule van Euler en de Schläfli symbolen wordt bewezen dat er niet meer dan vijf kunnen zijn. Een tweede bewijs wordt gegeven door te kijken naar de som van de hoeken die in een hoekpunt samen komen en de voorwaarde te stellen dat die som kleiner moet zijn dan 2π .

9. Stuurproblemen. (2 voordrachten) (Craggs, 1976).

Wat is de kortste weg tussen de punten $(-2,0)$ en $(2,0)$ waarbij de eenheidscirkel vermeden moet worden? Wat is sneller voor een zeilboot: iets ruimer zeilen (en dus met een grotere snelheid) en een keer overstag, of hoog aan de wind blijven zeilen? Hoe kun je een auto met gegeven kleinste draaicirkel van de ene plaats naar de andere sturen? Bij iedere situatie wordt een wiskundig model gemaakt waarmee het probleem wordt opgelost. De modellen hebben een analytisch meetkundig karakter.

10. Stellingen uit de combinatorische meetkunde. (2 voordrachten) (Cadwell: 13.1 t/m 13.4).

Met behulp van volledige inductie wordt de stelling van Helly bewezen: als van een eindige verzameling convexe gebieden in $\mathbb{R}^2$ ieder drietal een punt gemeenschappelijk heeft, dan hebben al die gebieden een punt gemeenschappelijk. De stelling is ook geldig voor een oneindige verzameling begrensde convexe gebieden. Vervolgens wordt bewezen dat ieder begrensde convex gebied een punt O bevat

zodat PO en OQ groter zijn dan $\frac{1}{3} PQ$ voor iedere koorde PQ . Het punt O is een soort 'centrum' van het gebied.

Een stelling van Blaschke wordt bewezen: elk convex gebied met een breedte groter of gelijk aan 1 bevat een cirkel met straal $\frac{1}{3}$.

Ten slotte wordt de stelling van Krasnoselskii bewezen: als ieder drietal zijden van een stervormig gebied te zien is vanuit één punt, dan zijn alle zijden te zien vanuit één punt.

De bewijzen van deze stellingen berusten op de stelling van Helly of de variant daarvan.

11. Krommen van konstante breedte. (2 voordrachten) (Cadwell: hoofdstuk 15)

Allereerst wordt gedefinieerd wat krommen van konstante breedte zijn. Vervolgens wordt een schets gegeven van het bewijs van de stelling dat de omtrek van een kromme van konstante breedte gelijk is aan de breedte maal π . Een aantal mechanische toepassingen wordt gegeven. Door middel van het optellen van krommen worden constructies afgeleid voor krommen van konstante breedte en voor rotors in gelijkzijdige driehoeken.

12. Affiene meetkunde. (2 voordrachten) (Burn, 1975)

Na een inleiding over incidentie van punten en lijnen wordt een definitie van 'affien vlak' gegeven door middel van 3 axioma's. Vervolgens worden een aantal voorbeelden gegeven van eindige affiene vlakken en volgt een stelling met een vijftal opvallende eigenschappen over aantallen punten en lijnen. Met behulp van een coördinatensysteem en een begrip voor evenwijdigheid worden een aantal latijnse vierkanten geconstrueerd.

Bijlage 2a: Voortoets hoofdstuk 3.

Met deze toets proberen we te weten te komen hoeveel je al over 'veranderlijken weet vóór je aan hoofdstuk 3 bent begonnen.

Je krijgt hier geen cijfer voor.

Het geeft dus niet als je een vraag niet weet. Vul dan niets in en ga gewoon verder naar de volgende vraag.

1. Anja zegt tegen Nico: "Schrijf eens een getal op. Tel er 3 bij op.

Vermenigvuldig dan met 4. Trek er 2 vanaf.

Deel door 2 en trek dan het begingetal er vanaf.

Welk getal heb je nu?

Nico: "18".

Anja: "Nu weet ik met welk getal je bent begonnen."

a) Kun jij dat ook te weten komen? Laat zien hoe je eraan komt.

b) Maak een formule waaraan je kunt zien hoe dit raadsel werkt.

2. Met getallen kun je allerlei getallendriehoeken maken. Eén zo'n driehoek ziet er zó uit:

1e regel							1					
2e regel						1	2	1				
3e regel					1	2	3	2	1			
4e regel			1	2	3	4	3	2	1			
5e regel												
6e regel												

a) Schrijf van de getallendriehoek hierboven de regels 5 en 6 op.

b) Wat is het middelste getal in regel 12?

c) En in de een of andere regel met nummer n ?

d) Hoeveel getallen staan er in regel 2, in regel 3 en in regel 4?

e) En hoeveel in regel 10 en in regel 25?

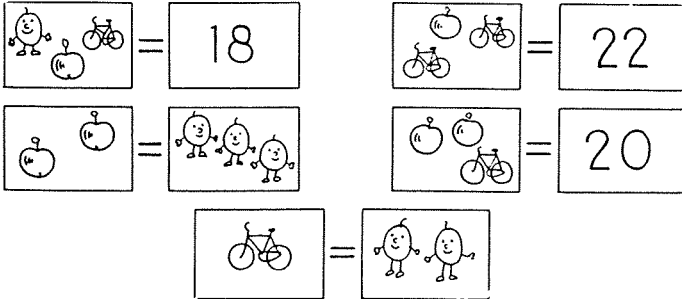
f) Hoeveel getallen staan er in regel n ?

g) Tel de getallen in de tweede regel bij elkaar op. Doe dat ook bij elke volgende regel. Wat is de som van de getallen in regel 6? En in regel 9?

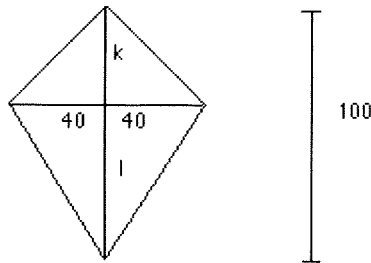
h) En hoe groot is de som van de getallen in regel n ?

i) In welke regel is de som van de getallen 12?

- 3) In de volgende plaatjes zie je hoeveel een aantal dingen samen waard zijn.



- a) Zoek uit hoeveel dat poppetje, die appel en die fiets afzonderlijk waard zijn.
 b) Had je alle plaatjes nodig voor het oplossen van het probleem?
 c) Hoeveel kun je missen?
4. Jan wil een ruitvormige vlieger maken. Hij heeft twee latjes: één van 100 en één van 80 cm. Hij wil de oppervlakte zo groot mogelijk maken door het kruispunt op een geschikte plaats te kiezen. Hij gaat dat gewoon uitproberen.



- a) Eerst kiest hij het kruispunt in het midden. Hoe groot is de oppervlakte in dat geval?
 b) Daarna kiest hij het bovenste kleine stuk 30 cm. Hoe groot is dan de oppervlakte?
 c) Weet hij nu wat hij het beste kan kiezen?
 d) De moeder van Jan denkt dat ze het met formules veel gemakkelijker kan uitrekenen. Voor de lengte van het bovenste verticale stuk kiest ze de letter k , voor het onderste stukje de letter l . De formule is dan volgens haar:

$$k \times 40 + l \times 30$$

 Hoe komt ze aan die formule?
 e) Maar ze weet niet hoe het verder moet. Maak jij het af?

Bijlage 2b: Eindproefwerk Gymnasium.

1. De volgende figuren bestaan uit witte en zwarte rondjes.

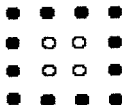
figuur 1



figuur 2



figuur 3



figuur 4



- Teken het **vierde** figuur van deze rij.
Hoeveel zwarte rondjes zitten hierin? En hoeveel witte rondjes?
- Hoeveel zwarte rondjes zitten er in het **tiende** figuur uit deze rij?
- Hoeveel witte rondjes zitten er in dit **tiende** figuur?
- Geef een formule voor het aantal zwarte rondjes in het vierkant van n bij n rondjes.
- Geef ook een formule voor het aantal witte rondjes in dit vierkant.
- Iemand beweert dat hij zo'n vierkant met 38 zwarte rondjes kan leggen. Kan dat? Verklaar je antwoord.

2. - Kies een willekeurig getal.

- Vermenigvuldig dit getal met 4.

- Tel bij het antwoord 8 op.

- Deel dit antwoord door 2.

- Trek er het oorspronkelijke getal vanaf.

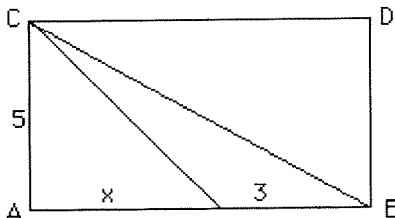
Het antwoord is dan het oorspronkelijke getal met 4 erbij.

a) Reken dit met twee voorbeelden voor.

b) Leg uit waarom dit met elk begingetal zo is.

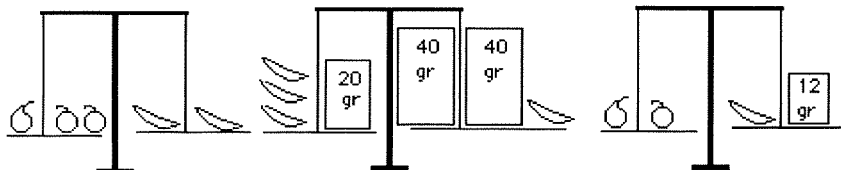
c) Maak zelf een spel waarbij het eindantwoord steeds 3 is waar je ook mee begint.

3.

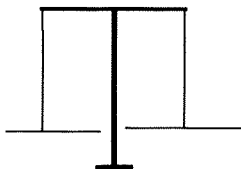


- x is 9. Hoe groot is dan de **oppervlakte** van driehoek ABC?
- De **oppervlakte** van driehoek ABC is 50. Hoe groot is x dan?
- De **omtrek** van rechthoek ABCD is groter dan 40. Hoe groot is x dan?

4. De weegschalen die je hieronder ziet zijn allemaal in balans.



- Hoeveel gram weegt 1 banaan?
- Hoeveel gram weegt 1 appel? En hoeveel 1 peer?
- Leg uit hoe je de antwoorden bij a) en b) gekregen hebt.
- De onderstaande balans is in evenwicht.
Op de linkschaal liggen enkel appels en peren en op de rechterschaal enkel bananen.
Teken een mogelijke situatie.



Bijlage 2c: Eindproefwerk MAVO-HAVO-VWO.

1. - Kies een willekeurig getal.
- Vermenigvuldig dit getal met 4.
- Tel bij het antwoord 8 op.
- Deel dit antwoord door 2.
- Trek er het oorspronkelijke getal vanaf.

Het antwoord is dan het oorspronkelijke getal met 4 erbij.

- a) Reken dit met twee voorbeelden voor.
- b) Leg uit waarom dit met elk begingetal zo is.

2. De volgende figuren bestaan uit witte en zwarte rondjes.

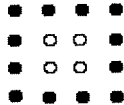
figuur 1



figuur 2



figuur 3



figuur 4

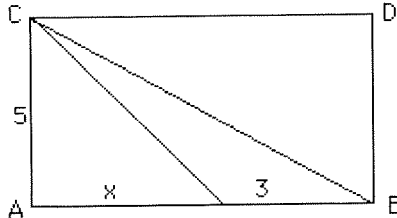


- a) Teken het **vierde** figuur van deze rij.
Hoeveel zwarte rondjes zitten hierin? En hoeveel witte rondjes?
- b) Hoeveel zwarte rondjes zitten er in het **tiende** figuur uit deze rij?
- c) Hoeveel witte rondjes zitten er in dit **tiende** figuur?
- d) Geef een formule voor het aantal zwarte rondjes in het vierkant van n bij n rondjes.
- e) Geef ook een formule voor het aantal witte rondjes in dit vierkant van n bij n rondjes.
- f) Iemand beweert dat hij zo'n vierkant met 38 zwarte rondjes kan leggen. Kan dat? Verklaar je antwoord.

3. Bij een rij getallen hoort de formule: $13 - 2 \cdot n$

- a) Maak een tabel bij deze rij voor $n=0,1,2,3,4$.
- b) Hoe groot is n als $13 - 2 \cdot n = 2$?

- 4.



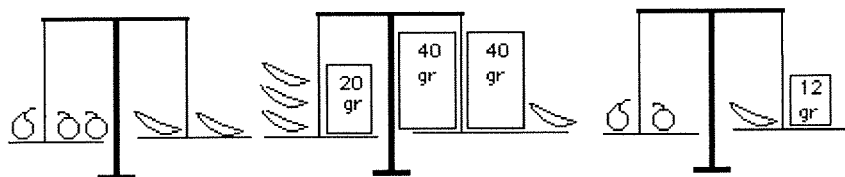
- a) als x is 5, hoe groot is dan de **oppervlakte** van rechthoek ABCD?
- b) x is 9. Hoe groot is dan de **oppervlakte** van driehoek ABC?
- c) De **oppervlakte** van driehoek ABC is 50. Hoe groot is x dan?
- d) De **omtrek** van rechthoek ABCD is groter dan 40. Hoe groot is x dan?

5. Reken uit:

a) $12 \times 4 + 3 =$

b) $3 + 4 \times 12 =$

6. De weegschalen die je hieronder ziet zijn allemaal in balans.



a) Hoeveel gram weegt 1 banaan?

b) Hoeveel gram weegt 1 appel? En hoeveel 1 peer?

c) Leg uit hoe je de antwoorden bij a) en b) gekregen hebt.

Bijlage 2d: De procentuele resultaten.

Opgave	1a	1b	2a	2b	2c	2d	2e	2f
Ja voortoets								
% totaal	29,6	14,8	94,4	92,6	38,9	92,6	77,8	29,6
% voldoende	66,7	33,3	100	100	83,3	100	94,4	61,1
% onvoldoenden	11,1	5,56	91,7	88,9	16,7	88,9	69,4	13,9
Bra voortoets								
% totaal	51,9	18,5	88,9	92,6	33,3	85,2	64,8	20,4
% voldoende	83,3	33,3	100	100	33,3	100	83,3	33,3
% onvoldoenden	42,9	14,3	85,7	90,5	33,3	81	59,5	16,7
Rij voortoets								
% totaal	11,5	0	96,2	96,2	19,2	92,3	57,7	11,5
% voldoende	20	0	100	100	80	100	90	60
% onvoldoenden	9,52	0	95,2	95,2	4,76	90,5	50	0

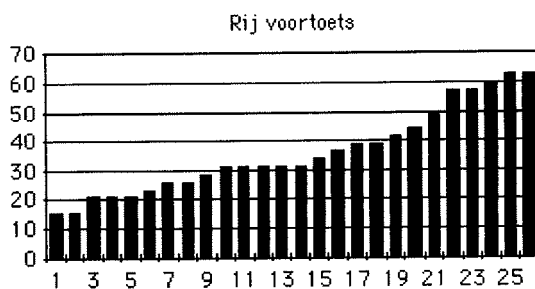
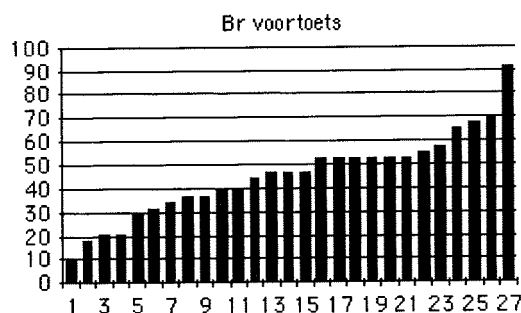
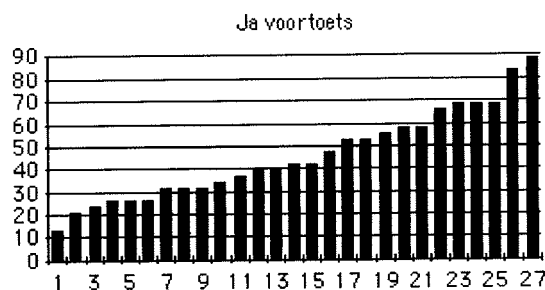
Opgave	2g	2h	2i	3a	3b	3c
Ja voortoets						
% totaal	79,6	22,2	44,4	63	63	42,6
% voldoende	88,9	55,6	77,8	8,9	100	66,7
% onvoldoenden	75	5,56	27,8	50	44,4	30,6
Bra voortoets						
% totaal	72,2	14,8	55,6	0,4	63	40,7
% voldoende	83,3	33,3	83,3	100	66,7	66,7
% onvoldoenden	69	9,52	47,6	1,9	61,9	33,3
Rij voortoets						
% totaal	82,7	11,5	34,6	8,1	65,4	26,9
% voldoende	100	60	60	80	80	60
% onvoldoenden	78,6	0	28,6	0,5	61,9	19

Opgave	4a	4b	4c	4d	4e
Ja voortoets					
% totaal	18,5	11,1	37	16,7	0
% voldoende	44,4	33,3	77,8	27,8	0
% onvoldoenden	5,56	0	16,7	11,1	0
Bra voortoets					
% totaal	18,5	18,5	33,3	20,4	3,7
% voldoende	50	83,3	83,3	66,7	16,7
% onvoldoenden	9,52	0	19	7,14	0
Rij voortoets					
% totaal	7,69	7,69	15,4	7,69	0
% voldoende	40	40	60	20	0
% onvoldoenden	0	0	4,76	4,76	0

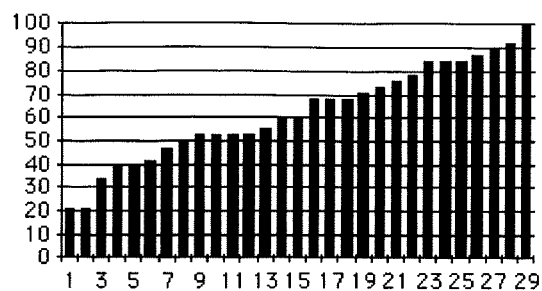
Ja natoets	1a	1ab	1b	1c	1d	1e	1fa	1fb
% totaal	100	82,8	82,8	65,5	60,3	41,4	86,2	62,1
% voldoende	100	82,4	82,4	76,5	76,5	61,8	88,2	64,7
% onvoldoenden	100	83,3	83,3	50	37,5	12,5	83,3	58,3
Bra natoets								
% totaal	100	100	69	58,6	37,9	25,9	72,4	51,7
% voldoende	100	100	75	70,8	37,5	27,1	79,2	54,2
% onvoldoenden	100	100	40	0	40	20	40	40
Rij natoets								
	2a		2b	2c	2d	2e	2f	
% totaal	84,6		69,2	46,2	26,9	15,4	53,8	
% voldoende	82		100	64	43	21	68	
% onvoldoenden	88		33	25	8	8	38	

Ja natoets	3a	3b	3c	4a	4ba	4bb	4c	4d
% totaal	63,8	48,3	51,7	82,8	51,7	48,3	43,1	46,6
% voldoende	79,4	70,6	70,6	100	82,4	82,4	64,7	70,6
% onvoldoenden	41,7	16,7	25	58,3	8,33	0	12,5	12,5
Bra natoets								
% totaal	75,9	69	29,3	93,1	62,1	62,1	62,1	53,4
% voldoende	87,5	70,8	33,3	100	75	75	70,8	64,6
% onvoldoenden	20	60	10	60	0	0	20	0
Rij natoets								
	4a	4b	4c	4d	6a	6b	6c	
% totaal	50	42,3	26,9	30,8	65,4	88,5	42,3	
% voldoende	86	57	50	46	86	68	57	
% onvoldoenden	8	25	0	13	42	17	25	

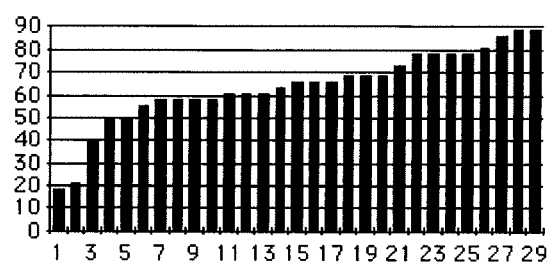
Bijlage 2e: Globale overzichten van voor- en na-toets.



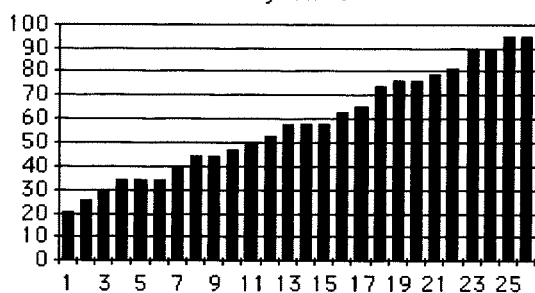
Ja natoets



Br natoets



Rij natoets



Inleiding.

Overal waar in dit proefschrift waarin wordt verwezen naar het mannelijk enkelvoud, is dit gebeurd uit onmacht, omdat de taal niet beschikt over een goed alternatief, of uit gewoonte. In al die gevallen kan het substitutie-principe, met het vrouwelijk enkelvoud worden toegepast.

Hoofdstuk 1.

[1] De letterlijke tekst is: "Explaining is a particular kind of exposition, in that one is exposing the relationships and connections between a new idea and others which are already known, understood and assumed to have been accepted. Explaining is connecting the unknown with the known, the unfamiliar with the familiar, the "to be explained" phenomenon with the "already explained". (blz 157)

Hoofdstuk 4.

[1] Dit idee is overigens al terug te vinden in de methode "Van A tot Z" die mede door van Hiele is ontwikkeld.

[2] Het treintje komt niet meer voor in de nieuwste 5de editie van Moderne Wiskunde. In plaats daarvan beschikt de heks nu over een schepnet waarmee ze een aantal warme of koude blokjes tegelijk uit de ketel kan halen. 3×-4 betekent dat ze in één keer 3 koude blokjes van -4 in kan gooien. De temperatuur wordt dan 12 graden kouder. -3×-4 betekent dat ze er in één haal 3 koude blokjes van -4 uit kan halen. Daarmee wordt de ketel 12 graden warmer.

Hoofdstuk 7.

[1] In de tekst wordt onderscheid gemaakt tussen 'draaien' en 'hoeken'. Dit sluit aan bij de omgangstaal: "Als je een bocht omgaat maak je een draai". Het onderscheid doet echter kunstmatig aan. Hoe moet een leerling in een later stadium de wiskundig korrekte zin: "Hij draaide over een hoek van 30° " opvatten? Strikt genomen is dit een ontoelaatbare zin in de ontwikkelde terminologie. Er zou moeten staan: "Hij draaide over een draai van 30° ". Verwarring lijkt op dit punt niet uitgesloten.

SUMMARY.

This study is a report of experiences of teachers and student-teachers as explainers of mathematics. 'Explaining mathematics' is considered as a special kind of speech-act in the classroom-situation. In other words: explaining mathematics is a kind of rule-governed conduct of language-handling through which the teacher aims to bring about a kind of understanding by the pupils. This point of view forms the basis for observations and analyses of class-room discourse and it can provide a framework for studying the complexity and interconnectedness of the various educational components as a whole.

The aim of this study is to obtain a deeper understanding of the human processes through which the explaining of mathematics takes place.

Chapter 1 concerns the terminology of explaining as a speech-act. This results in an operational definition of 'explaining' and 'understanding'. Furthermore a distinction is made between different kinds of and different strategies for explaining. Difficulty, clarity and the structure of an explanation are identified as fundamental elements of the phenomenon.

The design of the research is set forth in chapter 2. Because the domain of study was so extensive a choice had to be made between the objects and questions of this research project. In this way this chapter functions as a preview to the succeeding chapters.

At the Department of Mathematics of the University of Groningen students participate in the course "Presenting a mathematical topic" during which they explain mathematics to fellow-students. The situation is a real one, that is to say: it is not an imitation of a classroom-situation in a secondary school. However the situation is much simpler than a classroom one, in that more is known about their mathematical background. It is this aspect which makes it an eminently suitable research topic. In chapter 3 a description is given of the methodology and of the results of this part of the research. In particular attention is given to the possibilities and the effects of interaction and to the relationship between the difficulty of a subject and the clarity of the explanation. It turns out that there is a preference in the students' opinion for the assertion: "if the subject is not difficult, then the explanation is clear". Four parts of their presentations are analysed in order to give an explanation of this finding.

Explanations can be based on real contexts. Some of them are suitable but others are not. In chapter 4 two of these contexts are analysed with respect to their expected effects. They both concern the introduction of negative numbers and they both have the same structural characteristics, but only one of them has the desired explaining force. A difference between the rules of translation from the two contexts to the mathematical contents is identified which may explain the observed differences.

In chapter 5 a heterogeneous classroom-situation is compared with two homogeneous

situations. The three classrooms are of grade 7 (age 13-14) but the first one comprises pupils from three school types, whereas the other two only have pupils from one school type. In all the classes the mathematical topic is the introduction of symbols and formulas. There are significant differences between the strategies behind the explanations, between the prior knowledge of the pupils and between the effects of the explanations.

Linear equations can be introduced by means of a (verbal) model of balancing of objects. Explanation takes place in a real context. It is interesting to investigate whether there are differences between two groups of pupils of grade 8 (age 14-15) but from different school types with the same teacher and the same mathematical topic from the same textbook. In chapter 6 relevant differences are found with respect to the mathematical abilities of the pupils.

The concept of 'angle' is fundamentally rooted in physical reality. Pupils already know the word 'angle' before they are confronted with the mathematical concept. Moreover the word 'angle' refers to several different meanings which are strongly interrelated at an intuitive level. Chapter 7 concerns the introduction of this complex many-sided concept in a classroom situation. Through the complexity of the subject, this lesson has the character of a scientific discourse wherein teacher and pupils create the meaning of the new mathematical concepts in an interactive manner.

Finally, in chapter 8, conclusions are made about explaining mathematics as a professional qualification for teachers of mathematics. The consequences of this opinion are considered with respect to the chosen fundamentals of explaining mathematics, such as: interaction, structure, meaning, difficulty and clarity. In particular an answer is given to the question: Which aspects of explaining mathematics can be learned by student-teachers in the course 'Presenting a mathematical subject'?

LITERATUUR.

Advies over de voorlopige eindtermen basisvorming wiskunde in het Voortgezet Onderwijs (herziene versie).

COW, Utrecht, 1989.

Andrews, J.G; McLone, R.R: Mathematical Modelling.

Butterworths, London, 1976.

Barneveld, G.van; Krabbendam, H (ed.): Conference on Functions, report 1.

SLO, Enschede 1982.

Bishop, A.J : Mathematical Enculturation.

Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.

Broekman, H.G.B.: Variabelen.

Rijksuniversiteit Utrecht, Utrecht 1982.

Broekman, H (1989). Sluiproutes of alternatieve wegen? Tijdschrift voor Didaktiek der β -wetenschappen, 7,1,67-72.

Burn, R.P: Deductive Transformation Geometry.

Cambridge University Press, Cambridge 1975.

Cadwell, J.H: Topics in Recreational Mathematics.

Cambridge, 1966.

Chrystal, G: Algebra.

Edinburgh, 1886.

Coxeter, H.S.M: Introduction to geometry.

Wiley, New York, 1961.

Craggs, J.W: Steering Problems.

In: Andrews, McLone (1976).

Davis, R.B.: Learning Mathematics.

Routledge, New York, 1984.

Dekker, R; Herfs, P; Terwel, J; Ploeg, D van der: Interne Differentiatie in heterogene brugklassen bij wiskunde.

SVO/VOU, Utrecht, 1985.

Dijksterhuis, E.J: De elementen van Euclides.

Noordhoff, Groningen, 1929.

diSessa, A.A: Phenomenology and the Evolution of Intuition.

In: Janvier (1987).

Dormolen, J. van: Didaktiek van de wiskunde.

Oosthoek, Utrecht, 1974.

Dormolen, J. van, e.a: Vaardigheden.
Ned. Vereniging van Wiskundeleraren, Utrecht, 1975.

Dormolen, J. van: Aandachtspunten.
Oosthoek, Utrecht, 1982.

Dormolen, J. van. (1987) Metaforen als taalkundig hulpmiddel bij het leren van wiskunde. Tijdschrift voor Didaktiek der β -wetenschappen, 5, 1, 1-15.

Dudley, U: Why Math?
Bulletin American Mathematical Society, May 1987.

Dufour-Janvier, B; Bednarz, N; Belanger, M: Pedagogical Considerations Concerning the problem of Representation.
In: Janvier (1987).

Edwards, A.D., Westgate, D.P.G.: Investigating Classroom Talk.
The Falmer Press, East Sussex, 1987.

Etten, B. van: Variabelen in de schoolwiskunde.
Wiskrant 6, nr 23, 1980.

Freudenthal, H (ed.): Report on the relations between arithmetic and algebra.
Wolters, Groningen 1962.

Freudenthal, H: Variables and Functions.
In: Barneveld, 1982.

Freudenthal, H: Einführung in der negativen Zahlen nach dem geometrisch algebraischen Permanenzprinzip.
Mathematik Lehren, Heft 35, 1989.

Goddijn, A: Begint WISKIVON nog aan algebra?
Wiskrant 4, nr 17, 1979.

Goffree, F: Leren onderwijzen met Wiskobas.
IOWO, Utrecht, 1979

Goffree, F, e.a: Wiskunde-onderwijs.
Samsom, Alphen ad Rijn, 1981.

Goffree, F. (1986). Annemarie, de eredivisie, een heks en de NS.
Euclides 62, 4, 97-103.

Goffree, F; Vedder, J; Buys, K (1988). Sluiproutes door realistische leergangen-ongewenste verkortingen. Tijdschrift voor Didaktiek der β -wetenschappen, 6, 1, 5-23.

Goffree, F; Buys, K: Tegengesteld.
Bekadidakt, Baarn, 1989.

Hart, K.M (ed.): Children's Understanding of Mathematics: 11-16.
Murray, London, 1981.

Heath, Th.L: Euclid's Elements.
Dover, New York, 1956.

Heuvel-Panhuizen, M. van den, Goffree, F.: Zo rekent Nederland.
SLO, Enschede, 1986.

Hiele, P.M. van: De problematiek van het inzicht.
Meulenhoff, Amsterdam, 1957.

Hiele, P.M. van: Begrip en Inzicht.
Muusses, Purmerend, 1973.

Hiele-Geldof, D. van: De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.
Meulenhoff, Amsterdam, 1957.

Hilbert, D. : Grundlagen der Geometrie.
Göttingen, 1930

Hulshof, H, e.a.: Moedertaaldidactiek.
Coutinho, Muiderberg, 1980.

Janvier, C (ed.): Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.
Lawrence Erlbaum Associates, London, 1987.

Kemme, S.L: Taalaspecten van het wiskundeonderwijs.
OW&OC, Utrecht, 1984.

Krutetskii, V.A: The psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.
The University of Chicago Press, Chicago, 1976.

Küchemann, D: Algebra.
In: Hart, 1981.

Lagerwerf, B: Wiskundeonderwijs nu.
Wolters-Noordhoff, Groningen, 1982.

Lange, J.de: Mathematics, Insight and Meaning.
Utrecht: OW&OC, 1987.

Lesh, R; Post, T; Behr, M: Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving.
In: Janvier (1987).

Mannoury, G: Een inleiding tot de signifiante, inzonderheid met het oog op het onderwijs in de wiskunde.
Euclides 7 (1930/31), nr 1.

Mannoury, G: Mathesis en Mystiek.
Bohn, Scheltema & Holkema, Utrecht 1978².

Molenbroek, P. Leerboek der vlakke meetkunde.
Groningen: Noordhoff, 1939 .

Nederpelt, R: De taal van de wiskunde.
Versluys, Almere 1987.

Pimm, David . Speaking Mathematically.
London: Toutledge & Kegan Paul, 1988.

Polya, G. How to solve it.
Princeton: Princeton University Press, 1945.

Searle, J.R.: Taalhandelingen.
Spectrum, Utrecht/Antwerpen, 1977.

Shoenfield, J.R.: Mathematical Logic.
Addison-Wesley, Reading, Mass. 1967.

Skemp, R.R: The Psychology of Learning Mathematics.
Penguin Books, Harmondsworth, 1971.

Skemp, R.R: Intelligence, Learning and Action.
Wiley, Chichester, 1979 (a).

Skemp, R.R: Goals of Learning and Qualities of Understanding.
Mathematics Teaching, 88, sept. 1979 (b).

SLO: Verbanden, grafieken en functies.
SLO, Enschede, 1987.

Sluis, A. van der: Onderwijs in computerkunde.
In: Wansink, 1970.

Streefkerk, H: The introduction and the use of letters and brackets in algebra.
In: Freudenthal, 1962.

Streun, A. van: Heuristisch Wiskunde-onderwijs.
Dissertatie RuG, Groningen, 1989.

Treffers, A; Goffree, F. : Rational Analysis of Realistic Mathematics Education. In: Streefland, L (ed).
Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.
OW&OC, Utrecht, 1985.

Treffers, A: Three Dimensions.
Reidel, Dordrecht. 1987.

Vredenduin, P.G.J.: Formele eigenschappen.
Euclides 43, 1967-1968, pg 313-319.

Wagenschein, M: Naturphänomene sehen und verstehen.
Klett Verlag, Stuttgart, 1980.

Literatuur

Wansink, J.H: Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren. Deel1,2 en 3.
Wolters-Noordhoff, Groningen 1966,1967,1970.

Zwaneveld, B; Dormolen, J.van: Handelen om te begrijpen.
OW&OC, Utrecht, 1977.

REGISTER VAN TREFWOORDEN.

Abstractie	33
Afkorting	115,120
Analogie	30,99
Analogie, exemplarisch	30
Analogie, metaforisch	30
Analogie, omkering van	96
Analogie, specialiserend	30
Analogie, zonder meer	30
Begaafdheid	48
Begrijpen	7
Begrijpen, receptief	17
Begrijpen, reproductief	17
Begrijpend gedrag	18,216
Beschrijven	184
Betekenis	21,130,135,142,148,210,228
Constructie (van leerlingen)	163,166
Context	98,165
Duidelijkheid	34,76-78,89,90,136,142,147,223
Expertgedrag	48
Getal, gegeneraliseerd	115,120
Interactie	55,73-76,142,148,171,201,218,226
Interactie-dilemma	55
Interactie, functionele	64,226
Interactie, normale	64,136,142,226
Interpretatie	64,130
Inzicht	15,219
Letterrekenen	44
Mathematiseren	181
Mentaal object	184
Metafoor	99
Moeilijkheid	32,76-78,89,90,131,136,147,223
Naam	115,117-119
Niveautheorie	190
OOV	16
OSAEV	29
Plaatsbepaler	115,119
Representatie	48,100,165
Samenhang	33

register

Schema	16
Sluiproute	97,106
Struktuur van een uitleg	32,135,141,147,171,200,215
Substitutieprincipe	116
Taalhandeling	11
Taalspel	10
Tempo	169
Toepassen	219
Transmissie	63
Uitleg, analogisch	9
Uitleg, actief	5
Uitleg,door analogie	29
Uitleg,door analyse	29,31
Uitleg,door synthese	29,30
Uitleg, genetisch	29,31
Uitleg, logisch	9
Uitleg,passief	5
Uitleg-dat	27
Uitleg-hoe	26
Uitleg-waarom	26
Uitleg-wat	26
Uitleggen	7
Uitlegsoort	26,130,135,142,147,217,228
Uitlegstrategie	29,130,135,147,200,217
Vaardigheden	47,165
Variabelen	108,162
Verklaren	184
Verklaringsmiddel	100
Verwijzen	21
Voorwaarde, essentieel	12
Voorwaarde van inhoud	11
Voorwaarde van in tentie	13
Voorwaarde van oprechtheid	12
Voorwaarde van verstaanbaarheid	13
Voorwaarde, voorbereidend	12