

aanzet tot een nieuwe breukendidactiek volgens wiskobas

L. Streefland



Freudenthal instituut
Archief



**vakgroep onderzoek wiskunde onderwijs en onderwijscomputercentrum
rijksuniversiteit utrecht**

**aanzet tot
een nieuwe
breukendidactiek
volgens wiskobas**

aanzet tot een nieuwe breukendidactiek volgens wiskobas

(Theoretisch deel I)

Verslag van een exploratief onderzoek

L. Streefland



**vakgroep onderzoek wiskunde onderwijs en onderwijscomputercentrum
rijksuniversiteit utrecht**

Onderzoek wiskunde onderwijs

Publicatie nr 3

Reeds verschenen:

- Nr 1 *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas*
(A. Dekker, H. ter Heege, A. Treffers).
Nr 2 *Oppervlakte bij Wiskobas en inzichtverwervend handelen*
(A. Dogger)

Colofon

bureauredactie: Betty Dekker

eindredactie: Adri Treffers

vormgeving & realisatie: Ton Voortman

druk:

© 1983 vakgroep onderzoek wiskunde onderwijs & onderwijs computercentrum rijksuniversiteit utrecht

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, microfilm of op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de houder van het copyright.

INHOUD

Voorwoord	9
Inleiding en overzicht	13
I Trekken van het breukenonderwijs	13
1 Inleiding en overzicht	13
2 Natuurlijke getallen en breuken: vergelijking van aanpak in gangbare methoden	14
2.1 Natuurlijke getallen	14
2.2 Breuken	15
2.3 Voorschot op de bedoelingen die we met deze studie hebben	17
3 De breuken in de praktische literatuur	17
3.1 Breukbegrip, vergelijken en ordenen	18
3.2 De vier hoofdbewerkingen met breuken	18
3.3 (Praktisch) onderzoek, resultaten en aanwijzingen	19
3.4 Gewone breuken of decimale breuken	20
4 Ontwikkelingspsychologische inbreng	21
5 Wiskundige fundering	21
II Breuken en opvattingen omtrent wiskunde-onderwijs; uiteenzetting van de bedoelingen	23
1 Inleiding en overzicht	23
2 Opvattingen omtrent wiskunde en wiskunde-onderwijs	24
2.1 Inleiding	24
2.2 Het structuralisme	24
2.3 Het realisme	25
3 Rekening houden met kinderen	26
4 De breuken tijdens de integratiefase in het Wiskobas-project	27
5 Aard en bedoeling van de studie	29
III Theorie voor het breukenonderwijs; een eerste uitwerking	31
1 Inleiding en overzicht	31
2 Mathematiseren	32
2.1 Enkele trekken van het mathematiseren	32
2.2 Het vergelijken van verdeelsituaties	33
3 Veelsporige benadering	35
3.1 Uitgaan van contexten	35
3.2 Veelsporige benadering	36

4	Macro-structurele samenhang	41
4.1	Overzicht	41
4.2	De breuken in wijder verband	41
5	Modelvorming en -toepassing	45
5.1	Functies	45
5.2	Begripsvorming, realistische verschijnselen	45
5.3	Modellen, algoritmen en eigenschappen	47
5.4	Model en toepassingssituaties	48
6	Eénsporigheid bij het algoritmiseren	49
7	Differentiatie	49
8	Tussenstand en zicht op het vervolg	50
IV	Aanloop tot het algoritmiseren	52
1	Inleiding en overzicht	52
2	Eerlijk verdelen	52
3	Verdeelsituaties en gelijkwaardigheid	55
3.1	De gangbare benadering	55
3.2	Verdeelsituaties en gelijkwaardigheid	56
3.3	Bewerkingen	59
4	Over de ervaringen met breuken van de leerlingen bij de aanvang van het ontwikkelingsonderzoek	59
4.1	Inleiding en overzicht	59
4.2	Ervaringen met breuken van de leerlingen in het onderzoek	60
4.3	Eerlijk verdelen en gelijkwaardigheid: directe aanloop tot de deelleergang	69
5	Samenvatting	73
V	Op weg naar een algoritme voor het aftrekken (en optellen) van ongelijknamige breuken; beschrijving van het onderzoek	75
1	Inleiding en overzicht	76
2	De context van het onderzoek; notities over onderzoeksgroep en design; enige methodologische kanttekeningen	76
2.1	De onderzoeksgroep	76
2.2	Het onderzoeksdesign	77
2.3	Enige methodologische kanttekeningen	79
3	Over algoritmen en algoritmiseren	80
3.1	Inleiding	80
3.2	Eigenschappen van verhoudingsgetrouwe afbeeldingen	83
3.3	Aftrekken (en optellen) van ongelijknamige breuken volgens de systematiek van de progressieve schematisering: een analyse	86
4	Beschrijving van onderzoeksresultaten	90
4.1	Inleiding	90
4.2	Het onderzoek	90
5	Samenvatting	110

VI	Respons uit kleine kring	117
1	Inleiding en overzicht	117
2	Kenschets van de gevolgde benadering	117
3	Over algoritmiseren	118
4	Eensporigheid en veelsporigheid	120
5	Breukbegrip en gelijkwaardigheid	121
6	De realiteit van en voor kinderen	122
7	Resumé	123
VII	Voortgezet onderzoek	125
1	Inleiding	125
2	De kale vraagstukken	127
2.1	De opgaven	127
2.2	Het vraagstuk concreet maken	127
2.3	Beschikbaarheid van de tabelmethode. Stadia van verkorting	129
3	Breuken op de getallenlijn	132
3.1	Inleiding	132
3.2	Breuken plaatsen op de getallenlijn	135
4	Opereren op de getallenlijn	138
4.1	Inleiding	138
4.2	Opereren op de getallenlijn	139
5	De kwaliteit van het breukbegrip van de kinderen in het onderzoek	146
5.1	Inleiding	146
5.2	Schatten en de kwaliteit van het breukbegrip	148
6	Besluit	152
VIII	Breuken in recent onderzoek	155
1	Inleiding	155
2	Analyses en onderzoeksmethoden	155
3	De breukentaal en de begripsvorming	157
3.1	De breukentaal	157
3.2	Ordenen en gelijkwaardigheid	159
4	Inzichtelijkheid en het uitstellen van algoritmische regels	163
5	Verbinding met verhoudingen	164
6	Tussenstand	165
7	Constaterend onderzoek	166
IX	Onderwijsprincipes	169
1	Inleiding	169
2	Algemene principes voor het breukenonderwijs volgens wiskobas	171
2.1	Inleiding	171
2.2	Algemene principes voor een nieuwe didactiek	171

2.3 Inhoudelijke principes	172
2.4 Principes aan enkele voorbeelden toegelicht	176
2.5 Samenvatting	187
Noten	187
Noten hoofdstuk I	187
Noten hoofdstuk II	193
Noten hoofdstuk III	197
Noten hoofdstuk IV	202
Noten hoofdstuk V	205
Noten hoofdstuk VI	208
Noten hoofdstuk VII	209
Noten hoofdstuk VIII	210
Noten hoofdstuk IX	211
Literatuur	213

VOORWOORD

In de oude Egyptische cultuur noteerde men uitsluitend stambreuken (dit zijn breuken met teller 1). Daarmee konden andere breuken op verschillende manieren worden samengesteld, bijvoorbeeld $\frac{5}{6}$ werd geschreven als:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \text{ of } \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

Het oudste systeem, dat men toepaste in de landbouw, was gebaseerd op herhaald halveren;

$1/2$		$1/4$		$1/8$	
$1/16$		$1/32$		$1/64$	

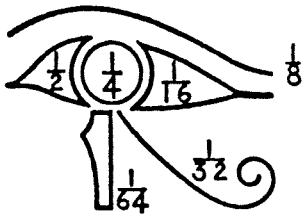
Er is een treffende overeenkomst tussen deze oude Egyptische benadering van de breuken en de manier, waarop opgroeiende kinderen met (hun) breuken 'omspringen'; kinderen hebben ook hun stambreuken. Het zijn er maar twee, namelijk 'een half' (en de 'helft') en 'een kwart'.

Door samenstellingen breiden zij de mogelijkheden van dit beperkte systeem uit.

Het eerste wat daarvoor in aanmerking komt is *het herhaald halveren*:

'de helft van een half' ($\frac{1}{4}$); 'een halve kwart' of

'de helft van een kwart' ($\frac{1}{8}$); 'een kwart van een kwart' ($\frac{1}{16}$) etc.



Het oog van de zonnegod Horus kon uit de symbolen, die bij het herhaald halveren behoorden, worden samengesteld.

Volgens een oude mythe had de god der duisternis het oog in stukken gescheurd, waarna de god van het leren, Thoth, het weer herstelde.

Sinds de Egyptenaren is er in de benadering van de breuken door kinderen (wellicht) weinig veranderd. In het onderwijs blijkt hiervan echter weinig. Het breukenonderwijs werkt niet. Talloze inspanningen om tot verbetering van de didac-

tiek voor de breuken te komen, boekten niet – of in onvoldoende mate – het gewenste resultaat.

Wat kan iemand dan bezielen om toch (nog) aan de breuken te beginnen? Het is vooral de uitdaging dit probleem uit te bannen, die hardnekkig pogen de moeite waard maakt.

Blijkens dit korte ‘vooraf’ kunnen zowel de historie als kinderen in hun wiskundige activiteit een inspiratiebron zijn. En... het zijn niet de enige. Het ‘oog van Horus’ behoeft een nieuwe interpretatie. Het symboliseert onder meer de noodzaak tot scherp zien van wat kinderen doen en begrijpen, wat de draagwijdte van hun activiteiten is.

In dit boek zal blijken, dat we veel gezien (en begrepen) hebben op het gebied van de beuken; maar niet alles, stellig niet.

Dit zien geschiedde dikwijls door de ogen van anderen en het begrijpen door te leren van anderen.

Het is om die reden dat we dank willen brengen aan:

De Josephschool te Bussum, de Dreesschool te Arnhem en het Wiskobas-team van het IOWO, die voor de goede voedingsbodem zorgden, waarin onze ideeën optimaal konden gedijen. Men moet daarbij vooral ook aan de vele, vele kinderen denken die meededen.

Michel Zwarts en Adri Treffers, die een deel van het beschreven onderzoek, verricht in het kader van mijn doctoraalstudie, constructief kritisch begeleidde, en samen met hen ook Fred Goffree en Henk Meijer voor hun constructieve respons op het onderzoek (hoofdstuk VI).

Jos Baay, schoolleider van de Josephschool en Abbes Dekker droegen in onmisbare mate bij aan de praktische realisering van het onderzoek. Tenslotte noem ik nog de groep, bestaande uit Hans Freudenthal, Fred Goffree, Ed de Moor, Adri Treffers en Edu Wijdeveld, die in twee bijeenkomsten meedachten over inhoud en vormgeving van hoofdstuk IX ‘Onderwijsprincipes’. Hun inbreng daarbij was van beslissende betekenis.

Utrecht, voorjaar 1983

Leen Streefland

INLEIDING EN OVERZICHT

In dit boek worden het verloop en de uitkomst van een ontwikkelingsonderzoek beschreven. Op grond van de bevindingen worden in het laatste hoofdstuk een serie onderwijsprincipes geformuleerd.

Omdat de voorstellen stellig niet op alle onderdelen door het verrichte onderzoek gewettigd worden, hebben deze het karakter van een hypothetisch voorontwerp dat zeker niet als af moet worden beschouwd.

We bevelen de lezers aan bedoeld voorstel in hoofdstuk IX 'Onderwijsprincipes' voorafgaande aan lezing van dit boek te raadplegen, omdat hierdoor de lijn in het vrij complexe betoog wellicht wat gemakkelijker in het oog kan worden gehouden.

De aanloop tot hoofdstuk V waarin het eerste onderzoek beschreven staat, is nogal wijdlopijg.

In het eerste hoofdstuk worden trekken van het gangbare breukenonderwijs geschetst. Dit gebeurt vanuit verschillende gezichtspunten. Eerst is een vergelijking getrokken tussen de benadering van de natuurlijke getallen en van de breuken in gangbare Nederlandse reken/wiskundemethoden. Er springen duidelijke verschillen in het oog. Enkele typerende trekken van het breukenonderwijs worden op grond van deze verschillen gekenschetst. Ook enkele tekortkomingen ervan komen aan het licht.

Met het oogmerk het verkregen beeld van de gangbare breukendidactiek nog wat te verscherpen, zijn ook nog andersoortige bronnen geraadpleegd. Het betreft achtereenvolgens onderwijspraktische literatuur over breuken en breukrekenen, ontwikkelingspsychologische en wiskundig theoretische literatuur.

De vraagstelling die in dit boek centraal staat wordt in het tweede hoofdstuk verwoord. Tevens wordt in dit hoofdstuk de aangehangen visie op wiskundeonderwijs uiteengezet. Op de ervaringen opgedaan in de loop van de integratiefase van het Wiskobasproject wordt eveneens in kort bestek ingegaan, omdat deze in belangrijke mate aan de probleemidentificatie en -formulering bijdroegen.

Het niet of onvoldoende rekenen houden met kinderen bij het maken van inhoudelijke keuzen voor het onderwijs, ook al op het globale niveau van de macro-uitlijning van het leerplan, werd als een belangrijke tekortkoming in de gangbare benadering van de breuken ervaren. Op grond van beschikbare observaties konden suggesties gedaan worden tot aanzuivering van dit tekort. Allengs begonnen zich enkele bouwstenen voor een theorie voor het breukenonderwijs af te tekenen. In het derde hoofdstuk wordt een eerste uitwerking en concretisering van deze theorie ontvouwd.

In het volgende hoofdstuk voltrekt zich een voortschrijdende specificatie van bedoelde theorie. De bedoeling hiervan is, een beeld van toereikende uitvoerigheid te schetsen van het geheel aan ervaringen dat de leerlingen met breukenactiviteiten hadden vergaard, voordat zij in het ontwikkelingsonderzoek terecht kwamen.

Na beschrijving van het verloop en de uitkomsten van het eerste onderzoek (hoofdstuk V) volgt in het hoofdstuk daarna een overzicht van kritische respons uit kleine kring op de ontvouwde ideeën tot zover. Behalve enkele vragen om opheldering aangaande het algoritmiseren, breukbegrip en gelijkwaardigheid, de realiteit van en voor kinderen, was er de kwestie van de eensporigheid versus de veelsporigheid bij het algoritmiseren. Kernvraag in deze kwestie was of in de voorgestelde deelleergang geen essentiële rol voor de getallenlijn moest worden ingeruimd.

Nu, enkele jaren na opheffing van het IOWO, werd in verband met die kernvraag het onderzoek letterlijk heropend en stelden we ons niet meer tevreden met het antwoord dat in eerste instantie op genoemde kernvraag gegeven werd. In het zevende hoofdstuk worden de ervaringen in voortgezet onderzoek beschreven, waarbij voor de getallenlijn een centrale plaats is ingeruimd. Hiermee krijgt de eerder ontvouwde theorie nieuwe impulsen.

In het achtste hoofdstuk vindt een beschouwing plaats van de meest recente onderzoekliteratuur aangaande het breukbegrip en het breukrekenen. De hoofdtrekken in uitkomsten en theorievorming van het (inter)nationale onderzoek – veelal verkregen op basis van wezenlijk andere uitgangspunten – worden beschouwd binnen de context van de in dit boek ontvouwde ideeën.

In hoofdstuk IX tenslotte worden enkele kanttekeningen gemaakt bij het innovatieve belang van een verbeterd breukenonderwijs voor de vernieuwing van het reken/wiskunde-onderwijs als geheel.

Tevens worden op grond van het verrichte onderzoek enkele onderwijsprincipes ontvouwd.

I TREKKEN VAN HET BREUKENONDERWIJS

1 INLEIDING EN OVERZICHT

De resultaten van het onderwijs in het breukrekenen zijn, gemeten naar de eraan bestede tijd, bedroevend te noemen.¹⁾ Wie de in vele publikaties opgesomde oorzaken van het falen van het breukenonderwijs inventariseert, komt tot een respectabele lijst.²⁾

Dit werpt vragen op als:

- Blijft het bij het vaststellen van de oorzaken?
- Geven de benedenmaatse onderwijsresultaten aanleiding tot veranderingen c.q. verbeteringen?
- Is er de laatste decennia iets in het breukenonderwijs veranderd?

De eerste vraag dient ontkennend, de beide overige dienen bevestigend beantwoord te worden. Het is niet gebleven bij het vaststellen van de oorzaken van het falen van het breukenonderwijs alleen. Men heeft zich niet bij de onbevredigende resultaten neergelegd en er is zeker ook iets in het breukenonderwijs veranderd, en in verandering. Maar desondanks...

Ter verschaffing van toegang tot ons complexe gebied van studie worden genoemde kwesties globaal beschouwd. Uitgangspunt vormt een vergelijking van de wijze van introductie van het begrip natuurlijk getal en de basisoperaties met natuurlijke getallen in gangbare Nederlandse reken/wiskundemethoden met de manier, waarop het breukbegrip en het breukrekenen 'aangepakt' worden. Deze vergelijking levert enkele opmerkelijke verschillen op. Er is sprake van een aanzienlijke discrepantie tussen de benaderingen van beide getalbegrippen en de respectievelijke bewerkingen ermee.

Deze eerste werkzaamheden roepen een aantal vragen op, die niet alleen verwijzen naar de later te formuleren bedoelingen van deze studie, maar tevens naar wat ons inziens de oorzaken voor het falen van het breukenonderwijs zouden kunnen zijn. Bij de beoogde vergelijking van methoden op de genoemde gebieden moeten we echter oppassen niet al te ongenueanceerd te werk te gaan. Juist in de recentere methoden dienen zich bepaalde inhoudelijke vernieuwingen aan. Om daarop wat meer zicht te krijgen, wordt na de methodenvergelijking een schets gegeven van hoofdlijnen in de meer praktische literatuur voor het breukenonderwijs van de laatste decennia. De hoofdmoot daarvan zal gevormd worden door artikelen, die in de bestaansperiode van het gerenommeerde tijdschrift 'The Arithmetic Teacher' sinds 1954 verschenen zijn.³⁾

Vanuit ontwikkelingspsychologische invalshoek is aan de ontwikkeling van het breukbegrip eveneens aandacht besteed. We denken met name aan het werk van Davydov en Piaget. Tevens is door enkele auteurs de fasering van Piaget

voor de cognitieve ontwikkeling van kinderen met de gangbare aanpak van het breukrekenen in verband gebracht. De opbrengst van deze ontwikkelingspsychologische bemoeienis met het gebied van studie zal mede in onze beschouwing betrokken worden.

Tot besluit van dit eerste, verkennende hoofdstuk, beschouwen we de opbrengst aan studies, die bij het zoeken naar oorzaken voor het falen van de breukendidactiek de wiskunde te hulp riepen. Grondige wiskundige fundering van het breukrekenen was daarvan het gevolg.

Met een samenvatting wordt dit hoofdstuk afgerond. Daarin zal een aanzet voor het vervolg vervat blijken te zijn.

2 NATUURLIJKE GETALLEN EN BREUKEN: VERGELIJKING VAN AANPAK IN GANGBARE METHODEN

2.1 Natuurlijke getallen

Wie zo maar een reken- of wiskundemethode voor de basisschool ter hand neemt en deze doorbladert, wordt wellicht getroffen door een rijk begin. Bij het vorderen in de deeltjes voor de achtereenvolgende leerjaren neemt de verschraling dikwijls zichtbaar en snel toe, zeker bij de meer traditionele rekenmethoden.

In de eerste deeltjes van bijvoorbeeld 'Nieuw Rekenen'⁴⁾ treft men een veelheid van algemene contexten⁵⁾ aan. Enkele voorbeelden zijn: 'huis en straat', 'strand', 'boerderij', 'park', 'bouwen', 'bos', 'speeltuin', etc. Hierin worden de activiteiten in verband met het getalbegrip en de ontwikkeling van begrip voor de basisoperaties ingebed. Zo is er aandacht voor ordenen, groeperen, splitsen, samenvoegen, tellen, hoeveelheden, meten. Men zou kunnen stellen, dat er een brede begripsinbedding plaatsvindt. De kinderen krijgen de gelegenheid hun eerste wiskundige verworvenheden binnen genoemde contexten toe te passen. Ook de weg naar een algoritmische aanpak van de bewerkingen is met zorg uitgestippeld. Allerlei hulpmiddelen, zoals balans, dominostenen, trapjes, rechthoeken, lijnstukken, getallenlijn, groepjes maken, tabellen, het honderdveld etc. staan in dienst van de begripsvorming en het algoritmiseren.

Dit laatste geschiedt heel geleidelijk, waarbij men het principe van de progressieve complicering toepast. Dat wil zeggen: het aanleren van de basisoperaties geschiedt stapsgewijs. Geleidelijk voert men het beroep dat op vaardigheden gedaan wordt op door het uitbreiden van het aantal elementaire operaties (basisoptellingen, tafelprodukten, inwisselen) per uit te voeren hoofdbewerking.

Men zou kunnen stellen, dat de invoering van het getalbegrip en de hoofdbewerkingen gekenschetst kan worden door:

- een brede begripsinbedding;
- ruime toepassing van contexten;
- ruim gebruik van modellen en schema's (in de begripsvormingsfase);

- geleidelijk algoritmiseren van de bewerkingen (volgens de methode van de toenemende complicering).⁶⁾

In de aanloopparagraaf werd reeds opgemerkt, dat voorzichtigheid met het generaliseren van bevindingen geboden is bij het vergelijken van reken/wiskundemethoden. Zo zijn er methoden, waarin de opgesomde grondtrekken minder sterk en andere waarvoor ze sterker of anders gelden.⁷⁾ Waar het echter op aankomt is, dat bij de introductie van natuurlijke getallen getallen en de bewerkingen ermee, in het algemeen is uitgegaan van kinderen; althans met kinderen en hun ontwikkeling is in sterke mate rekening gehouden.⁸⁾

2.2 Breuken

Bij de benadering van de natuurlijke getallen en van hun bewerkingen blijkt de uniformiteit in het beschikbare methodenbestand groter dan de verschillen. Dit komt vooral, omdat de vernieuwing bij het rekenen voor wat betreft het aanvangsonderwijs zich al enkele decennia geleden heeft ingezet. Met de breuken echter zit het anders. Juist daar zijn het de meest recente methoden die allerlei nieuwe aanzetten laten zien en in dat opzicht een bevestiging te zien geven van wat we in onze inleiding stelden.⁹⁾

Voor de breuken in de traditionele methoden gaan we eerst te rade bij een CITO-publikatie.¹⁰⁾ Daar is een toetsserie voor breuken als volgt geordend voor de leerjaren 2, 3 en 4:

- de helft van een aantal (tweede leerjaar);
- de helft van een figuur (derde leerjaar);
- het vierde deel van een figuur, het derde deel ... etc. (derde, vierde leerjaar);
- het zoveelste deel van een cirkel (derde, vierde leerjaar);
- optellen en vereenvoudigen van gelijknamige breuken, bijvoorbeeld: $\frac{2}{5} + \frac{4}{5} =$ (vierde leerjaar);
- aftrekken, zoals bijvoorbeeld: $2 - \frac{4}{5} =$ (vierde leerjaar);
- uitkomst van zuivere breukvorm omzetten: $\frac{39}{4} =$ (vierde leerjaar);
- breuk in verband met een grootte: $\frac{1}{4}$ km = . . m (vierde leerjaar);
- het grootste deel bepalen van bijvoorbeeld $\frac{1}{2}$ deel, $\frac{2}{3}$ deel, $\frac{3}{4}$ deel, $\frac{4}{5}$ deel.¹¹⁾

Betrekken we de methode ‘Nieuw Rekenen’, waarop dit overzicht mede gebaseerd is erbij, dan blijkt:

- deel-geheel-relaties zijn uitsluitend *intern*, dat wil zeggen het deel gaat steeds in het geheel op;
- vrijwel alle voorbeelden zijn *statisch*; dat wil zeggen de deel-geheel-relaties die in beschouwing genomen worden, brengen de leerlingen meestal niet zelf voort, doch zijn vooraf gegeven;
- aan breuk als relatiebeschrijver wordt weinig recht gedaan;
- het meer formele breukbegrip wordt voornamelijk in verband gebracht met het delen van natuurlijke getallen;
- breuknotaties worden toegepast om cijfersommen in een andere (notatie-)vorm te kunnen gieten;
- in verband met het gelijknamig maken is er aandacht voor gelijkwaardigheid

van breuken; het betreft geïsoleerde gevallen¹²⁾, waarbij van de illustraties de suggestie uitgaat dat het om gelijkheid (van breuken) zou gaan;

- als er al sprake is van toepassingen, betreft het gekunstelde vanuit de breuken bedachte situaties (bijvoorbeeld: ‘Gerrit heeft $3\frac{5}{6}$ reep’...);
- het (summiere en late) gebruik van de getallenlijn is tweeledig, namelijk breuken fungeren als maatgetallen voor intervallen en ook als namen van punten;
- het vereenvoudigen van breuken wordt voornamelijk algoritmisch behandeld.

‘Breuk’ wordt dus in eerste instantie opgevat als ‘deel-van’ en later sterk verbonden met de operatie delen van natuurlijke getallen. Snel wordt tot formalisering overgegaan, waarbij de concrete fase en de fase van het rekenen weinig met elkaar van doen lijken te hebben. Van een geleidelijke, maar vooral gemotiveerde overgang is geen sprake. De getallenlijn komt nauwelijks voor. Tevens is er pas laat aandacht voor het ordenen van breuken en soms in het geheel niet. De statische breukopvatting is – ondanks de verbinding met het (ver-)delen – overheersend. Aandacht voor de breuk als beschrijvingsmiddel voor ‘breukwekkende’ situaties is er niet. De instap is eenzijdig. Men laat allerlei bronnen als meten, eerlijk verdelen, breken, vergroten en verkleinen, etc. ongemoeid of men benut ze nauwelijks.

Nu dient voor de jongste reken/wiskundemethoden – zoals al werd opgemerkt – een wat genuanceerder beeld geschetst te worden. Daarin worden duidelijk enkele nieuwe aanzetten gegeven. We zien er aandacht in voor de breuk als beschrijver, het benutten van het meten als concrete bron voor de breuken, het meer recht doen aan gelijkwaardigheid, het ordenen van breuken voorafgaand aan het opereren ermee, uitstel van een formele benadering en eveneens van het automatiseren van de bewerkingen. Bovendien heeft men soms enige plaats ingeruimd voor toepassingsgebieden van betekenis, zoals de kansrekening.¹³⁾ Hoezeer men genoemde aanzetten op zichzelf en als neerslag van de bezorgdheid over de geringe effectiviteit van het onderwijs in dit deelgebied van het reken/wiskunde-onderwijs ook dient te waarderen, daardoor kan het algemene beeld dat het breukrekenen in het Nederlandse methodenbestand biedt zeker niet aangetast worden.

Het kenmerkt zich door:

- betrekkelijke eenzijdigheid in benadering van het breukbegrip;
- het niet of onvoldoende benutten van contexten als bron en toepassingsgebied voor de breuken;
- het incidenteel toepassen van modellen en schema’s, doch vrijwel nimmer dienstbaar gemaakt aan algoritmiserings- of mathematiseringsprocessen;¹⁴⁾
- het (vrijwel steeds) rechtstreeks afstevenen op de algoritmen.¹⁵⁾

Men zou kunnen stellen, dat waar uit de benadering van het gebied van de natuurlijke getallen en hun bewerkingen duidelijk blijkt hoe men met de ontwikkeling van kinderen rekening houdt, dit bij de breuken juist in het tegendeel verkeert. Vooral het ontbreken van enige zorg voor de ontwikkeling van een breukentaal¹⁶⁾ en aandacht voor breukverwekkende processen bevestigen dit.

Algemener gezegd: een fundamentele doorschouwing van het gebied van de breuken in relatie tot het reken/wiskunde-onderwijs in zijn geheel ontbreekt. Wat onder andere nog gemist wordt, is de inbreng vanuit kinderlijke denkbeelden, opvattingen, noties e.d. ten aanzien van breuken en het opereren ermee op grond van observatie van leerprocessen. De veronderstelde analogie met de natuurlijke getallen¹⁷⁾ en traditie hebben lange tijd dit gebied beheerst en doen dit in veel methoden nog steeds.

2.3 Voorschot op de bedoelingen die we met deze studie hebben

De opbrengst van deze oriëntatie tot dusver bevat enkele belangrijke elementen, die rechtstreeks verwijzen naar de bedoelingen die we met deze studie hebben.

Methodenvergelijking op de benadering van de natuurlijke getallen en de breuken bracht aanzienlijke verschillen aan het licht.

In de behandeling van de breuken was het rekening houden met de ontwikkeling (cognitief, affectief) van kinderen nauwelijks terug te vinden.

We hebben het vermoeden, dat daarin belangrijke oorzaken voor het falende breukenonderwijs gelegen kunnen zijn.

Het gaat dan om:

- het zorgvuldig ontwikkelen van een ‘breukentaal’; daarbij kan wellicht rekening gehouden worden¹⁸⁾ met de betekenissen, die de voor de breuknotatie toegepaste cijfersymbolen en de ‘rangtelwoordbenamingen’ als ‘derde’, ‘vierde’ etc. reeds verworven hebben in het systeem der natuurlijke getallen; betekenissen, die bij de breuken storend kunnen werken waardoor dubbelzinnigheid in de hand gewerkt wordt;
- het breukbegrip zou veelzijdig, dat wil zeggen uit verschillende invalshoeken benaderd moeten worden, opdat het volledig recht gedaan wordt;¹⁹⁾
- in de veelzijdige benadering wordt een belangrijke plaats ingeruimd voor breukverwerkende activiteiten en de beschrijving daarvan naar proces en uitkomst;^{20, 21)}

In verband met de bedoelingen van deze studie is de vraag van belang, of het mogelijk is het algoritmiseren geleidelijk te doen plaatsvinden.²²⁾

3 DE BREUKEN IN DE PRAKTISCHE LITERATUUR

In de vorige paragraaf werden onze bedoelingen mede op grond van de verrichte methodenvergelijking reeds – zij het zeer voorlopig – geformuleerd. Bepaalde lijnen tekenden zich af.

In de nieuwe reken/wiskundemethoden werden ‘nieuwe’ aanzetten voor het breukenonderwijs aangetroffen. Deze nieuwe aanzetten kunnen niet los gezien worden van de inspanningen, die men (inter-)nationaal op het gebied van de breuken geleverd heeft. Een oriëntatie in praktische literatuur lijkt daarom op zijn plaats. De uitkomst van de verrichte methodenvergelijking zou nog wat

verhelderd, respectievelijk aangevuld kunnen worden.

We gaan uit van een globale beschouwing van de artikelen, zoals die in de loop van de laatste decennia in 'The Arithmetic Teacher' verschenen zijn en leggen daarbij²³⁾ verbanden met overige geraadpleegde literatuur.

Daarbij wordt uitgegaan van een viertal 'gebieden', namelijk:

- het breukbegrip en het vergelijken en ordenen van breuken;
- de vier hoofdbewerkingen met breuken;
- (praktisch) onderzoek, resultaten en aanwijzingen;
- de discussie 'gewone breuken of decimale breuken'.

3.1 Breukbegrip, vergelijken en ordenen

Vanaf de eerste jaargang van 'The Arithmetic Teacher' (1954) verscheen een veertigtal artikelen, waarin steeds min of meer direct de vorming van het breukbegrip beschouwd werd.

Enkele trends die we signaleerden, waren:

- enige aandacht voor de relatie met verwante onderwerpen als kommagebreken en procenten. Het betrof dan vooral onderwijsuggesties, die los staan van de hele discussie 'gewone breuken of decimale breuken', waarop we nog zullen ingaan;
- vanaf het eind van de zestiger jaren is er aandacht voor spelletjes. Deze zijn niet zozeer bedoeld om de begripsvorming zelf te bewerken, doch hebben meer een terugblikfunctie voor de leerlingen. Het zijn oefenspelletjes;²⁴⁾
- hetzelfde kan gezegd worden voor het vergelijken en ordenen van breuken, zij het dat de aandacht hiervoor niet groot genoemd kan worden;
- een opvallende trek is, dat in de loop der jaren steeds gevarieerdere concretisering worden toegepast, zoals rechthoeken, twee- en driedimensionale (meetkundige) figuren, getallenlijn, honderdveld, spijkerbord, 'stadsplan'²⁵⁾, papier vouwen, papieren stroken;
- vanaf het begin van de zeventiger jaren ligt het accent sterk op de gelijkwaardigheid van breuken.²⁶⁾ De breuk wordt daarbij als (equivalentie-)klasse opgevat, bijvoorbeeld $\frac{1}{2}$ wordt geacht de klasse $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \dots\}$ te vertegenwoordigen. Papier vouwen en stroken zijn de concretiseringsmiddelen daarbij.

Als belangrijkste ontwikkelingen dienen zich ons inziens aan: de toenemende zorg voor het ontdoen van de breuk van zijn abstracte status en de meer wiskundige opvatting omtrent de gelijkwaardigheid, die zijn intrede doet. Hierdoor wordt gelijkwaardigheid wat meer recht gedaan. In de traditionele benadering beschouwde men uitsluitend geïsoleerde gevallen van gelijkwaardigheid.

3.2 De vier hoofdbewerkingen met breuken

Het zal geen verbazing wekken, dat bijna de helft van alle in 'The Arithmetic Teacher' verschenen artikelen in verband met breuken handelt over de vier

hoofdbewerkingen. Daarvan weer de helft gaat uitsluitend over de bewerking delen.

Ook hier signaleren we trends als bij het breukbegrip. De suggesties die men doet om tot verbetering van de resultaten bij het rekenen met breuken te komen, houden echter geen verband met de wijze waarop men het breukbegrip zelf in het onderwijs behandelt. Vandaar dat na het eerste *NAEP*-onderzoek onder andere aanbevolen wordt:

*'One must focus on more than the algorithms and consider the total sequence of ideas, including the initial conceptual work with fractions.'*²⁷⁾

Vanaf het midden van de zestiger jaren poogt men het vermenigvuldigen, maar ook wel andere bewerkingen visueel te ondersteunen. Toegepaste middelen daarbij zijn het rechthoeksmodel, stroken en de getallenlijn. Ook hier worden verlevendigingsspelletjes gesuggereerd.

1966 is in dit kader een belangwekkend jaar, omdat een nieuwe benadering, speciaal bedoeld voor afhakers gepubliceerd wordt.²⁸⁾

Het betreft de zogenaamde machientjes-aanpak voor breuken, gebaseerd op de operator-interpretatie van breuk.²⁹⁾ Bij deze benadering vat men natuurlijke getallen op als afbeeldingen, bijvoorbeeld uittrekken en verkleinen. Door dergelijke afbeeldingen samen te stellen, ontstaan breuken. Het duurt nog enkele jaren, voordat genoemde operatorbenadering wat meer aandacht krijgt.

De operatie delen bezorgt, getuige de artikelenstroom door alle jaargangen van 'The Arithmetic Teacher' heen, de leerlingen en hun leerkrachten de meeste hoofdbreken. Van meet af aan wordt gepleit voor inzicht, maar desondanks blijft het in de gedane suggesties veelal bij puur technische benaderingen, gegrond op het toepassen van voornamelijk algoritmische regels. Een maal baseert men zich op min of meer realistische verdeelsituaties als aanloop tot de algoritmisering. Ook andere concretisering treft men soms aan, zoals getallenwielen, stroken e.d.

Als belangrijkste trekken van de ontwikkeling kunnen hier vastgesteld worden de steeds krachtiger pleidooien voor het geven van betekenis aan breuken en het opereren ermee (neem alleen breuken met een zeker realiteitsgehalte). Lukt dat slecht of niet, bijvoorbeeld bij het delen van breuken, ga dan over tot eliminatie uit het curriculum. 'Er zijn maar weinig onderwerpen in het basisschoolrekenen', zo verzucht een auteur, 'die groter tijdverspilling betekenen dan het delen van breuken.'³⁰⁾

3.3 (Praktisch) onderzoek, resultaten en aanwijzingen

Er zijn diverse voorbeelden van voornamelijk vergelijkende onderzoeken gepubliceerd in 'The Arithmetic Teacher'. Vergeleken werden bijvoorbeeld de effecten van verschillende algoritmische benaderingen voor de bewerking delen op begrip van en vaardigheid in het delen, het effect van een bepaalde benadering van het delen op deelvaardigheden bij het vermenigvuldigen.

Men zocht het eveneens in vergelijking van een traditionele benadering met

G.I., in het vaststellen van hiaten in de kennis en de vaardigheid van leerlingen, in het vaststellen van frequent terugkerende fouten, etc.

In zijn algemeenheid dragen dergelijke onderzoeken weinig bij aan een werkelijke probleemidentificatie met betrekking tot de breuken en het breukrekenen. De oorzaak hiervan moet gezocht worden in het feit, dat het steeds constaterend onderzoek betreft, dat zeer nauw aansluit bij, respectievelijk uitgaat van de inhoud van het aangetroffen onderwijs.

Behalve de wat breder opgezette en wat diepergravende *NAEP*-onderzoeken, die reeds genoemd werden, springen die bijdragen eruit, waarin de resultaten, die kinderen voor bepaalde rekentoetsen behalen, in twijfel getrokken worden.³¹⁾

Zo blijkt bijvoorbeeld telkens weer, dat toetsuitslagen voor het vermenigvuldigen van breuken vergeleken met het optellen, gunstiger uitvallen. De verklaring hiervoor moet ons inziens gezocht worden in het 'doorwerken' van de natuurlijke getallen en hun basisoperaties bij het breukrekenen.

Immers, wie in $\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$ de optellingen $2 + 3 = 5$ en $3 + 5 = 8$ 'herkent' en als uitkomst $\frac{5}{8}$ krijgt, zit ernaast.

Dezelfde handelwijze bij $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$ – namelijk $2 \times 3 = 6$ en $3 \times 5 = 15$, dus is de uitkomst $\frac{6}{15}$ –, wordt dit keer wel beloond.

De opmerkingen in verband met het storend 'doorwerken' van de betekenis van natuurlijke getallen en hun bewerkingen bij het breukrekenen zijn van enige betekenis voor onze theorie voor de breuken.

3.4 Gewone breuken of decimale breuken?

In verband met de moeilijkheden, die het breukrekenen in het onderwijs oproept, is de discussie 'gewone-breuken-versus-decimale-breuken' diverse malen gevoerd en wordt telkens opnieuw weer opgerakeld. Het decimaliseren van munt- en maatsystemen werd vooral in de Angelsaksische landen gezien als een maatschappelijke omstandigheid, die pleitte voor nadruk op de kommagetallen. De pleitbezorgers voor het breukrekenen verwezen bij dit argument naar westeuropese landen, waar het breukrekenen nauwelijks aan betekenis inboet, ondanks een lange traditie met decimaal verfijnde maatsystemen.

Er zijn ook argumenten pro kommagetallen en contra gewone breuken van meer didactische en pedagogische aard gehanteerd. Bijvoorbeeld met decimale getallen sluit je aan bij de notatie van geldbedragen en meetresultaten, ze vormen een uitbreiding van de natuurlijke getallen met als gevolg een verdere bevestiging en verankering van het plaatswaarde-systeem. De operaties bij breuken zijn helemaal 'nieuw'. Ze sluiten niet aan bij het plaatswaarde-idee, terwijl juist 'daar' fouten gemakkelijker te diagnostiseren zijn, zowel door de onderwijsgevende als door de leerling zelf.

Bij de pleidooien voor het weglaten van het breukrekenen of onderdelen daarvan, hanteert men argumenten die verband houden met de toepasbaarheid in de realiteit en binnen de wiskunde of in een ander schoolvak. Bovendien, zo wordt gesteld, vinden kinderen breuken niet leuk en zijn ze van geen betekenis voor

de geschiedenis van 's mensen intellectuele ontwikkeling. Sommige auteurs noemen met name ook de ruimte aan tijd, die men kan scheppen voor belangrijker zaken door het breukrekenen te beknotten.

Dergelijke pleidooien brengen dan weer tegenstemmen in het geweer voor het behoud van breuken met min of meer tegengestelde argumenten.³²⁾ Opvallend daarbij zijn de stemmen uit de hoek van het technisch onderwijs, waar men kennelijk wel een aantal toepassingsmogelijkheden ziet. Binnen de hele discussie 'pro en contra' klinken ook nog genuanceerder stemmen door, die de kwestie alleen maar als een sequenteringsprobleem opvatten.³³⁾

De hele discussie omtrent de voorkeur voor één van de beide breuktypen is in zoverre van belang voor onze werkzaamheden, dat de inhoudelijke relatie van de breuken met overige delen van het curriculum in de gaten gehouden dient te worden. Het invoeren van rekenmachientjes in het onderwijs doet de discussie wellicht opnieuw opblaaien (ten gunste van kommabreuken).

4 ONTWIKKELINGSPSYCHOLOGISCHE INBRENG

In ander verband zijn we reeds uitvoerig op het werk van Davydov, Piaget en enkele adepten van de laatste ingegaan.³⁴⁾ We vatten samen, wat voor deze studie van belang is.

Davydov c.s. beschouwen het meten als belangrijkste bron voor de breuken en tevens het verband tussen een begrip en zijn ontstaansproces. Zij schenken aandacht aan breuken > 1 , noemen gelijkwaardigheid dé basiseigenschap van het breukrekenen en wijzen op het verband met verhoudingen. Aan de bezwaren, die we bij Davydovs benadering zien, gaan we voorbij, evenals aan die bij Piagets benadering.

Wat bij de laatste in het oog springt, is aandacht voor het uitvoeren van verdeeltaken, accent op het relatieve van de breuk en – in verband daarmee – het kiezen van variërende eenheden.

Met voorgaande samenvattende opmerkingen is tevens het verband met onze bedoelingen voor deze studie aangegeven.

Tenslotte vermelden we nog, dat Piagets fasering voor de cognitieve ontwikkeling soms benut is om bestaande leergangen op haalbaarheid 'door te lichten'.³⁵⁾

5 WISKUNDIGE FUNDERING

In verband met het falende breukenonderwijs is men eveneens te rade gegaan bij de wiskunde zelf om aanwijzingen voor de oorzaken te vinden. Omstreeks 1968 lijkt er een 'breekpunt' te zijn. Vanaf dat moment namelijk verschijnen theoretische beschouwingen, die het breukbegrip met grootheden in verband brengen.

Freudenthal stelt in dit verband:

*... 'dat de didactiek van de grootheden, niet op die van de breuken kan voortbouwen, dat veeleer voor een didactisch fenomenologische benadering van de breuken juist grootheden vereist zijn.'*³⁶⁾

De verrichte mathematische analyses die we geraadpleegd hebben, richtten zich voornamelijk op het traditionele breukrekenen met zijn pannekoeken en reppen, maar ook op vernieuwingsvoorstellen in verband met operatoren.³⁷⁾ Deze studies bedoelden didactische implicaties te geven en richtten zich onder andere op:

- theoretische inbeddingen van de breuken c.q. rationale getallen, anders dan dit bij de getallenpaar-opvatting van rationaal getal gebeurt;³⁸⁾
- het verschaffen van een instrument om hiaten in bestaande didactieken te signaleren;
- het beschrijven van de abstractieprocessen die tot het breukbegrip voeren;
- het signaleren van toepassingsmomenten voor breuken;
- het wiskundig funderen van 'nieuwe' benaderingen via operatoren.

In de meeste benaderingen was het zoeken naar toepassingsmomenten te veel ondergeschikt aan de wiskundige fundering. In feite neemt men bij de wiskundige beschouwing steeds grotere afstand tot de realiteit, waardoor de toepassingen uit het zicht verdwijnen.

Alleen het artikel van Kirsch over koopmansrekenen, waarnaar verwezen werd, geeft wat aanwijzingen voor het toepassen van breuken binnen het verhoudingsrekenen.³⁹⁾

Door de intrede van de operator-opvatting voor breuk is er een duidelijk onderscheid ontstaan tussen dynamische en statische breuk.⁴⁰⁾ De nadruk op grootheden zou, verbonden met de operator-opvatting, het meten als bron en toepassingsgebied voor breuken veel meer in het blikveld moeten brengen. Dit is niet of onvoldoende gebeurd. In plaats van naar breukverwekkende activiteiten te gaan kijken, definieert men de operator vanuit de wiskunde en verzeilt met de breuken in een ander wiskundig gebied. Door het geheel in de vorm van 'breuken als machientjes' te gieten, wordt het gebied toegankelijk gemaakt voor de leerlingen. Freudenthal wijst deze benadering af, vanwege het feit, dat het gebruik van dergelijke machientjes tot het verbale beperkt blijft en de machientjes voor het onderliggende functiebegrip slechts schijnconcretisering zijn⁴¹⁾, dus vals.

Resumerend stellen we vast dat – zonder dat dit nu direkt concreet gemaakt is – enkele toepassingsgebieden globaal werden aangeduid, namelijk het gebied van de grootheden en de verhoudingen. Overigens stond – op grond van de opvattingen die we omtrent wiskunde en wiskunde-onderwijs hebben – op voorhand vast, dat de opbrengst van deze oriëntatie in meer theoretische wiskundige literatuur niet groot kon zijn.

II BREUKEN EN OPVATTINGEN OMTRENT WISKUNDE- ONDERWIJS; UITEENZETTING VAN DE BEDOELINGEN

1 INLEIDING EN OVERZICHT

In het voorgaande hoofdstuk werden de trekken van het breukenonderwijs globaal geschetst. De verschillen tussen de benadering van natuurlijke getallen en hun bewerkingen vergeleken met de aanpak van de breuken, waren daarbij opmerkelijk. In algemene termen samengevat, kwamen die verschillen neer op het de ene keer wel en de andere keer niet recht doen aan kinderen, hun realiteit, opvattingen en ervaringen in verband met het betrokken wiskundig gebied.

Bij de methodenvergelijking stuitte we op belangrijke kwesties als:

- de zorgvuldige ontwikkeling van een breukentaal;
 - de veelsporige benadering van het breukbegrip;
 - aandacht voor breukverwekkende activiteiten; het uitgaan van contexten daarbij;
 - geleidelijke algoritmisering en het uitstellen van het automatiseren daarbij.
- Op grond van een vrij brede literatuuroriëntatie konden daaraan nog worden toegevoegd:
- het rekenen houden met kinderen en hun denkbeelden omtrent breuken;
 - het gebruik maken van modellen en schema's bij het algoritmiseren;
 - het belang van de gelijkwaardigheid van breuken bij het algoritmiseren van enkele bewerkingen.

De opgesomde aspecten hielden verband met onze bedoelingen met deze studie en het geringe succes van het breukenonderwijs tot dusver. In dit hoofdstuk wordt aan wat deze studie beoogt nader inhoud gegeven. In het kort komt het erop neer *te laten zien, hoe vanuit een bepaalde visie op wiskunde en wiskunde-onderwijs, een deelleergang voor het aftrekken en optellen van ongelijknamige breuken ontwikkeld kan worden.*

Allereerst worden enkele opvattingen over wiskunde en wiskunde-onderwijs in beschouwing genomen. Omdat het uitgaan van kinderen en hun realiteit niet tot de trekken van het breukenonderwijs behoorde – zoals we hebben laten zien – gaan we hierop eveneens in kort bestek in. Daarmee wordt in feite een voor-schot op het volgende hoofdstuk genomen. Vanwege het belang echter van deze kwestie voor onze probleemstelling, menen we hieraan reeds in dit stadium van beschrijving enige aandacht te moeten besteden.

Omdat onze probleemstelling mede voortgekomen is uit de ervaringen, opgedaan tijdens de integratiefase¹⁾ in het Wiskobas-project, staan we hierbij eveneens stil. De opbrengst van deze overwegingen op genoemde terreinen vormt het bouw materiaal van onze probleemstelling, uitgangspunt voor het vervolg van deze studie.

2 OPVATTINGEN OMTRENT WISKUNDE EN WISKUNDE-ONDERWIJS

2.1 Inleiding

Het rekening houden met kinderen, het uitgaan van hun realiteit, van informele toegangen daarin voor het breukenonderwijs, is in het huidige onderwijs niet of nauwelijks terug te vinden. Door de aandacht te vestigen op (onder andere) het belang van een zorgvuldige breukentaal-ontwikkeling aan te verrichten breukverwekkende activiteiten, werd aangegeven hoe het vastgestelde tekort in het vigerende breukenonderwijs opgeheven zou kunnen worden. Dergelijke trekken van een vernieuwd breukenonderwijs verwijzen dan tevens naar een bepaalde kijk op wiskunde en wiskunde-onderwijs. Enkele opvattingen daaromtrent worden nu eerst in beschouwing genomen.

2.2 Het structuralisme

Er bestaan grofweg gesproken twee opvattingen omtrent de wiskunde. Bij de ene opvatting – het structuralisme – gaat men uit van de wiskunde als cognitieve verworvenheid, a posteriori geordend tot een ‘sluitend’ deductief systeem.

Voor het wiskunde-onderwijs kiest men dit systeem dikwijls als één van de belangrijkste uitgangspunten. Men tracht zogezegd vanuit de wiskunde als wetenschappelijk systeem, zogenaamde wetenschapsstructuur-leerplannen af te leiden.²⁾ De wiskundigen, die de wiskunde veel meer als toepassingsgebied beschouwen, hebben dikwijls uitgesproken opvattingen over wiskunde-onderwijs: het dient realistisch te zijn, dat wil zeggen aan te sluiten bij de realiteit van en voor de leerlingen. Wanneer in onderwijskundige of onderwijspsychologische literatuur op wiskunde-onderwijs wordt ingegaan, gaat men er vrijwel steeds stilzwijgend van uit dat er omtrent de opvattingen over wiskunde en wiskunde-onderwijs overeenstemming zou bestaan. Deze overeenstemming zou dan de macro-uitlijning voor het wiskunde-onderwijs betreffen, berustend op vakstructurele verbanden³⁾ en het feit, dat men de micro-uitwerkingen en uitlijning daarvan afleidt door concretisering, zeg verkinderlijking in onderwijsleerprocessen.⁴⁾ Wanneer wij spreken over het veronachtzamen van kinderen bij het breukenonderwijs, dan hebben we vooral ook het niveau van de macro-uitlijning op het oog. Op dat niveau kan men immers reeds de realiteit, kinderlijke denkbeelden omtrent breuken e.d. benutten, zoals we eerder hebben laten zien en betoogd.⁵⁾ Wie zulks bepleit, gaat dan wel uit van de wiskunde als *toepasbaar gebied*.

Voorbeeldig voor de structurele richting kan het werk van een groep Franse wiskundigen genoemd worden, die onder de naam ‘Bourbaki’ bekendheid verwierf met haar pogingen de wiskunde als groot samenhangend deductief bouwwerk in kaart te brengen. De invloed van het werk van Bourbaki op de inhoud van onderwijskundige literatuur en op de inrichting van het wiskunde-onderwijs is onmiskenbaar.⁶⁾ Dat er ook andere opvattingen omtrent wiskunde en wiskunde-onderwijs bestaan, laten we in de volgende paragraaf zien.

Als bezwaren tegen een te eenzijdig op vakstructurele overwegingen gegronde vormgeving van het wiskunde-onderwijs kunnen genoemd worden:

- het achteraf ordenen van de wiskunde in een deductief systeem vergroot de afstand tot de verschijnselen uit de realiteit, waaraan ze (mede) ontsproot of waaruit ze kan worden voortgebracht;
- het voorbij gaan aan de wiskundige activiteit in zijn essenties; de wiskunde als cognitieve verworvenheid dient te veel als uitgangspunt voor het inrichten, op gang helpen en doen voortgaan van leerprocessen;
- het gevaar van valse of schijnconcretisering, omdat men in het verkinderlijken van de wiskunde met het oog op leerprocessen in het wiskunde-onderwijs zowel de wiskundige activiteit als het in de concretisering belichaamde begrip (of operatie, idee, structuur) gemakkelijk geweld kan aandoen en ook aandoet;⁷⁾
- de eenzijdigheid in benadering van begrippen, operaties etc., waarvan geringe toepasbaarheid veelal het gevolg is.

2.3 Het realisme

Tegenover het recht doen aan de structuur van de wiskunde in het wiskunde-onderwijs staat de opvatting, dat het wiskundig produkt (begrip, operatie, structuur) niet los gezien mag worden van de wiskundige activiteit, die haar voortbrengt. Dit houdt in, dat men in het onderwijs bij de verwerving van wiskunde in het daarop gerichte leerproces zou moeten pogen recht te doen aan de essenties van de wiskundige activiteit, aan het mathematiseren. Dit betekent niet alleen, dat van een gegeven probleemveld het specifiek wiskundige eraan vastgesteld moet kunnen worden. Mathematiseren houdt tevens in successieve voortschrijding binnen de wiskunde en het ontwikkelen daartoe van zowel geschikte gereedschappen (notatievormen en modellen) als een passende attitude.⁹⁾

Eén en ander houdt in, dat men bij het ordenen van de realiteit, van de verschijnselen daarin, wiskunde voortbrengt. De realiteit wordt bron voor de wiskunde. Zijn eenmaal – door een proces van mathematiseren aan de realiteit onttrekt – wiskundige begrippen, operaties e.d. beschikbaar, dan dient dezelfde realiteit zich aan als toepassingsgebied voor de ontwikkelde wiskunde. De realisten richten zich dus niet zozeer op de globale structuur van de wiskunde als geheel, doch zijn meer uit op lokale ordening van realiteiten, gericht op de daarin vervatte wiskunde.

Met deze korte karakteristiek van de realistische richting binnen het wiskunde-onderwijs sluiten we, onder verwijzing naar het volgende hoofdstuk, deze paragraaf af.¹⁰⁾ Het betreft dus wiskunde-onderwijs, waarvan de macro-uitlijning niet in de eerste plaats dé vakstructuur – zo die er al is – weerspiegelt. Het wiskunde-onderwijs op dat niveau is vooral naar realiteiten geordend.

Men zou kunnen stellen:

... 'de realisten leggen in hun analyse het accent op verschillende informele toe-

*gangen tot het gebied..., die vanuit vakinhoudelijk standpunt als pre-matema-
tisch gekwalificeerd worden, terwijl de structurelen veeleer één ingang kie-
zen.*'¹¹⁾

Het zal inmiddels duidelijk zijn vanuit welke opvatting wij de breuken benade-
ren.

3 REKENING HOUDEN MET KINDEREN

De aanhef van deze paragraaf kan aanleiding geven tot misverstand. Er kan immers de suggestie van uitgaan als zou, bij alle moeite die men zich getroost (heeft) om het breukenonderwijs te verbeteren, geen rekening gehouden worden met kinderen. Dat is zeker *niet* het geval. De aanhef doelt op de noodzaak kin-
derlijke noties, opvattingen, ideeën, misverstanden in verband met breuken en
de realiteit (van en voor kinderen) mede in de beschouwingen voor het breu-
kenonderwijs te betrekken op het *niveau van de macro-uitlijning*. Op dat niveau
immers kan men informele toegangen kiezen tot het onderhavige gebied; toe-
gangen die vanuit wiskundig-structureel standpunt bezien premathematisch van
aard zijn en derhalve gemakkelijk over het hoofd gezien worden en ook wel
over het hoofd gezien zijn.¹²⁾

We beperken ons hier tot het opsommen van enkele fundamentele kwesties:

- de betekenis, die cijfersymbolen en breukennamen (als 'een derde', 'een vierde', etc.) bij het rekenen met natuurlijke getallen verwerven, werken storend bij de vorming van het breukbegrip en het opereren met breuken; dit geldt althans voor een deel van de kinderen;¹³⁾
- het eerlijk verdelen als toegang tot het gebied van de breuken is reeds een modelmatig proces, dat niet strookt met veel realistische ervaringen, die kin-
deren (kunnen) opdoen; het betreft onder meer de interpretatie van 'deel';
de discrepantie tussen de technische uitvoering van verdeeltaken en de aan-
wezige notie van 'eerlijk verdelen' die kinderen hebben; de kwestie van de
gelijkwaardigheid van delen en eenheden; het rechtstreeks en gefaseerd
rechtvaardig verdelen; het al dan niet uitputtend zijn van het verdelen,
etc.;¹⁴⁾
- het vormen van begrippen voor grootheden als lengte, oppervlakte en in-
houd, het voltrekken van verdeeltaken berustend op verschillende bedoelin-
gen en de vorming van het breukbegrip gaan hand in hand; anders gezegd:
het breukbegrip 'trekt' veelsporig op bij de 'spontane vorming ervan aan de
realiteit';¹⁵⁾
- kinderen kunnen bij de ontwikkeling van 'hùn' breukbegrip spontaan tot
modeltoepassing overgaan; in verband met het breukrekenen blijkt de klok
een rijk fenomeen te zijn;¹⁶⁾
- in hun realiteit heeft het werken met breuken voor kinderen een benaderend
karakter, waarbij het operatorische steeds nadrukkelijk voorop staat.
Ter toelichting geven we hier een voorbeeld:

‘Een naburig flatgebouw blijkt drie maal zo hoog te zijn als Coens huis. De vraag om de hoogte van het huis in die van de flat uit te drukken, blijkt erg lastig voor hem. (Hij (7; 1) beschikt bijvoorbeeld nog niet over de breuknaam ‘eenderde deel’). Na enige misvattingen komt hij tot: ‘Een kwart en een halve kwart.’¹⁷⁾

Het geschetste benaderen middels de bekende, niet belaste breukwoorden en het door middel van operaties samenstellen daarvan, werd inmiddels zo frequent geobserveerd bij kinderen met dit beperkte breukentaal-apparaat¹⁸⁾, dat voor het breukenonderwijs als consequentie verondersteld mag worden, dat de begripsvormingsfase en de vorming van noties voor bewerkingen met breuken hand in hand gaan.

In de voltrekking van processen, die breuken veroorzaken, manifesteert zich het voorop staan van het operatorische nadrukkelijk; tevens komt het in de beschrijving van dergelijke processen in breukentaal tot uitdrukking: het uitvoeren van breukverwekkende activiteiten spreekt kinderen aan, vooral het eerlijk verdelen; wellicht vormt dit de bron voor een meer eensporige ontwikkeling van procedures bij het vergelijken en verschil bepalen en samennemen, die uiteindelijk tot algoritmen voor het aftrekken en optellen kunnen stollen.

4 DE BREUKEN TIJDENS DE INTEGRATIEFASE IN HET WISKOBAS-PROJECT

Tijdens de exploratiefase¹⁹⁾ in het Wiskobas-project stond de verkenning van ‘nieuwe’ gebieden, die eventueel een plaats zouden kunnen verwerven in het wiskunde-onderwijs voor de basisschool, centraal. Het betrof meten, meetkunde, waarschijnlijkheid en statistiek, het rekensysteem, relaties en functies en taal en redeneren (logica). In heroriënteringsblokken als ‘Het spijkerbord’, ‘Tel-op-tal’, ‘In orde’, ‘Waarschijnlijkheid en statistiek’, ‘Open beweringen’, etc. werden de eerste vruchten van genoemde exploratie prijs gegeven.²⁰⁾

Voorzover er in deze fase van het Wiskobas-project al sprake was van een confrontatie met de breuken, betrof het slechts incidentele ‘ontmoetingen’ zonder al te grote problemen. Het ging immers om exploratie van voor het onderwijs nieuwe gebieden. Op voorhand stond bij de aanvang van de ontwikkelingswerkzaamheden in de Dr. W. Dreesschool te Arnhem vast, dat in verband met de breuken terughoudendheid ten aanzien van de bewerkingen betracht zou worden.²¹⁾

De gedachten gingen uit naar:

- een brede bedding van het breukbegrip in nauwe relatie met het meten en toepassen van breuken daarbij;
- terugdringen van de bewerkingen met breuken;
- het leggen van relaties met wiskundig verwante onderwerpen, zoals komma-breuken, procenten e.d.²²⁾

Zoals gezegd, tijdens de exploratiefase werden breuken ‘gewoon toegepast’ wanneer ze zich aandienen bij een bepaald onderwerp.²³⁾ In die fase van het

project werd gepoogd in het 'Wiskobas-Bulletin' een discussie over dit onderwerp op gang te brengen, om later, gelet op de opinie, die er in het onderwijsveld heerste, bepaalde beslissingen met betrekking tot de aard van de ontwikkeling te kunnen nemen.²⁴⁾

Het eerder ingenomen standpunt ten opzichte van de breuken was in de raamplannen, die als uitgangspunt dienden voor de integratiefase, weer terug te vinden en op enkele aspecten uitgebreid.²⁵⁾ Het betrof kwesties als modelvorming en de aandacht voor de equivalentie van breuken.

Tijdens de integratiefase zijn we er niet in geslaagd vanuit een totaalvisie en in samenhang met het overige wiskunde-onderwijs, een afdoende antwoord te vinden op de complexe problematiek van de breuken.²⁶⁾

Wel werd door de opgedane ervaringen het probleemgebied nader genuanceerd. Enkele belangrijke 'nieuwe' gezichtspunten waren:

- het accent op de breuk als beschrijvingsmiddel (taalaspect en toepasbaarheid);²⁷⁾
- bewerkingen met breuken dienen hun betekenis te ontleen aan het materiaal, waaraan het begrip breuk gevormd wordt;²⁸⁾
- nauwkeuriger analyse van de inhoudelijke structuur van bepaalde problemen en de toe te passen modellen bij het oplossen ervan; aandacht voor de kwestie van de modelvorming in het algemeen.²⁹⁾

In verband met het laatste punt werd bijvoorbeeld de vraag gesteld: 'Zijn er verschijnselen, die na grondige verkenning model kunnen staan voor andere – dat wil zeggen die paradigmatisch zijn?'³⁰⁾

In de tweede (ontwerp-)ronde werden de inzichten omtrent de breuken opnieuw verscherpt of althans bepaalde aspecten als van wezenlijk belang onderkend. Met betrekking tot de kwestie van het taalaspect, de breuk als beschrijvingsmiddel, groeide het inzicht, dat de taalontwikkeling ten nauwste gekoppeld diende te zijn aan breukverwekkende activiteiten en reflectie daarop.³¹⁾

Ook het opvatten van de breuk als equivalentieklasse was sterk in de aandacht met het oog op de latere algoritmisering.

Op de problematiek van de breuken in volle omvang kon echter geen afdoende antwoord gegeven worden. Er was sterke behoefte ontstaan aan grondige door-schouwing van het gebied in relatie tot de ontwikkelde visie op wiskunde-onderwijs en het geheel van het reeds ontwikkelde wiskunde-onderwijs, zowel op basisschoolniveau als in het voortgezet onderwijs. Van essentieel belang daarbij werd geacht de beschikbaarheid van een didactische fenomenologie³²⁾ van het gebied, met daarin onder meer een ruime hoeveelheid observatiegegevens van individuele (spontane) leerprocessen.

5 AARD EN BEDOELING VAN DE STUDIE

Deze studie heeft de volgende bedoelingen:

Er zal verslag gedaan worden van een klein stukje ontwikkelingsonderzoek, zoals dat binnen het kader van het ontwikkelingswerk voor het wiskunde-onderwijs op IOWO en OW & OC verricht is. In dat stukje ontwikkelingsonderzoek wordt een deelleergang opgezet, waarin een proces van algoritmisering in gang gezet wordt. De leerlingen die dit proces volgen, gaan langzaam op weg naar een algoritme voor het aftrekken (en eventueel optellen) van ongelijknamige breuken. Een centrale vraag daarbij is of de beoogde deelleergang zodanig kan worden opgezet, dat ze past binnen de opvattingen over progressieve schematisering bij het algoritmiseren van bewerkingen. Dit zal tot uitdrukking moeten komen in het oplossingsgedrag van de kinderen die aan het ontwikkelingsonderzoek deelnemen. Daarin zal moeten blijken of de stappen op de weg van de progressieve schematisering, die zich – de naam zegt het al – kenmerken door voortschrijding in schematisering en door het aanbrengen van verkortingen, door kinderen van een bepaalde leeftijd gezet kunnen worden.

De deelleergang is opgezet vanuit een expliciete visie op wiskunde-onderwijs. Dat geldt evenzeer voor het veelsporige breukenonderwijs dat eraan voorafgaat.³³⁾ Bovendien is gepoogd dit breukenonderwijs zo in te richten, dat recht gedaan wordt aan een (speculatieve) theorie ervoor. De beschrijving van dit voorbereidend breukenonderwijs kan niet geheel volledig zijn, omdat dan een compleet overzicht van een vertikaal programma ervoor, met aangegeven verbindingen met het geheel van het wiskunde-onderwijs voor zeven- tot twaalf- à veertienjarigen gegeven zou moeten worden.³⁴⁾ Alle aspecten zullen overigens zeker ter sprake komen en dwarsverbindingen met het overige wiskunde-onderwijs eveneens aangegeven. Over de aard van deze studie mag het volgende niet onvermeld blijven. De inhoud van deze studie schetst voor een aanzienlijk deel de ‘context of discovery’ waarin de reeds genoemde theorie voor het breukenonderwijs ontwikkeld werd. Vandaar het gebruik van het adjectief ‘speculatief’ bij theorie. De beschrijvingswijze heeft een sterk analyserend, betogend – zeg discursief – karakter. Dit gebeurt om de ontvouwde denkbeelden kracht bij te zetten, om een eerste (kleine) kring van deskundigen te overtuigen van de consistentie van de ontvouwde denkbeelden omtrent het breukenonderwijs.

In het zesde hoofdstuk zal op enkele fundamentele kwesties in verband met de reacties van deze kleine kring van deskundigen worden ingegaan. Behalve in de ‘context of discovery’ zijn we dus ook in de ‘context of persuasion’ bezig. De deskundigen worden op hun volle deskundigheid aangesproken en niet gericht door een vooraf opgestelde vragenlijst.

Door niet om de kritiek van deze eerste kleine kring van deskundigen heen te gaan, krijgt deze studie een eerste (voorlopig) empirisch sluitstuk. Ten aanzien van onderzoek in de gebruikelijke betekenis vanuit objectivistische kenhouding en met empirisch-analytische methoden, kan men deze studie funderend noemen. Door het uiteenrafelen van alle mogelijke kwesties, het breukenonderwijs

betreffend, en het verrichten van ontwikkelingsonderzoek op dit terrein, zijn de fundamenteen gelegd voor voortgezet onderzoek, eventueel ook in de empirisch-analytische betekenis, bijvoorbeeld in de vorm van vergelijkend onderzoek. Wie dus vanuit de 'context of justification' kennis neemt van deze studie en 'harde' onderzoeksuitkomsten verwacht, komt dus niet geheel aan z'n trekken.

Tenslotte willen we het innovatief belang van een verbeterd breukenonderwijs niet onvermeld laten. Dit belang is aanzienlijk. Immers, de breuken vormen een sleutelonderwerp in het huidige rekenonderwijs, gemeten naar de geïnvesteerde tijd en het feit dat zoveel leerlingen erdoor afhaken.³⁵⁾ Internationaal blijkt genoemde sleutelpositie van de breuken nog op een andere manier. In de Verenigde Staten bijvoorbeeld hebben de pogingen om tot vernieuwd wiskunde-onderwijs op de basisschool te komen, tot nu toe weinig effect gehad. Het uitblijven van afdoende oplossingen voor de probleemgebieden binnen het traditionele rekenen, zoals de breuken, is hier mede debet aan.³⁶⁾

III THEORIE VOOR HET BREUKENONDERWIJS; EEN EERSTE UITWERKING

1 INLEIDING EN OVERZICHT

In het tweede hoofdstuk werd een aantal bouwstenen voor een theorie van het breukenonderwijs opgesomd. Het geheel bleek – althans op enkele aspecten – niet los gezien te kunnen worden van de realistische visie op wiskunde-onderwijs, die eraan ten grondslag lag; een visie, die zich in *wiskunde als menselijke activiteit* het beste samenvattend laat verwoorden.

In dit hoofdstuk zullen de meest essentiële bouwstenen voor zo'n theorie in relatie tot de achterliggende opvattingen omtrent wiskunde-onderwijs nader uitgewerkt en aan voorbeelden toegelicht worden. In feite betreft het elementen van meer algemene strekking voor een theorie van het wiskunde-onderwijs in zijn geheel, dus niet uitsluitend voor het gebied van breuken.¹⁾ Om ons echter zoveel mogelijk te bepalen tot het gebied van studie en te voorkomen, dat betreden zijpaden ontaarden in dwaalsporen, vormt het inhoudelijk uitgangspunt steeds het gebied van de breuken.

Trekken van het mathematiseren en voortschrijding in het mathematiseringsproces komen het eerst aan bod en worden toegelicht aan een voorbeeld. Vervolgens wordt aandacht besteed aan de veelsporige benadering van het breukbegrip en de bewerkingen met breuken, tot uitdrukking komend in een veelheid van eraan te onderscheiden aspecten. Als tussenstadium worden enkele toegangen vanuit de veelsporige benadering van het breukbegrip tot 'breuken als machientjes' geschetst. In de beschouwing van de veelsporige benadering, aan breuken toegelicht, komen macro-structurele samenhangen met andere delen van het curriculum nadrukkelijk in de aandacht. Ze vormen de aanleiding tot het in beschouwing nemen van verbanden en verbindingen met wiskundig verwante onderwerpen, zoals kommabreuken en verhoudingen, en toepassingsgebieden zoals meten, waarschijnlijkheid en statistiek.

Een mathematiseringsproces wordt gekenschetst door de wiskundige middelen die erin worden ontwikkeld respectievelijk toegepast en de wijze, waarop dit geschiedt. Een belangrijk kenmerk van het wiskunde-onderwijs dient dus te zijn het gereed komen en beschikbaar hebben van adequate gereedschappen om daadwerkelijk mathematiseringsprocessen te kunnen voltrekken.

Notatievormen en modellen worden daartoe ontwikkeld om het mathematiseringsproces mede vorm en inhoud te geven, zowel tijdens de fase, waarin het accent ligt op de vorming van begrippen als in verband met de toepassingen.²⁾ Vandaar dat ook aan de ontwikkeling van notatievormen en modellen enige notities gewijd zullen worden.

Breukverwekkende activiteiten kunnen op verschillende wijze voltrokken wor-

den en dus divers beschreven naar proces en uitkomst. Dit opent mogelijkheden tot verwerkingsdifferentiatie, een kenmerk van realistisch wiskunde-onderwijs.³⁾ Ook dit aspect wordt in verband met het breukenonderwijs kort beschouwd. Vooral in beide vervolghoofdstukken komt het differentiatie-aspect bij herhaling nog in het blikveld en vindt nadere uitwerking ervan plaats. Omdat het nauwe verband tussen begrips- en modelvorming en het vooropstaan van het operatorische in diverse voorbeelden duidelijk zal blijken, besteden we hieraan geen afzonderlijke aandacht. Dit geldt tevens voor de aansluiting bij de breukwoorden 'een half', 'de helft' en 'kwart' uit de dagelijkse taal. Voor de eensporige benadering bij het algoritmiseren beroepen we ons in belangrijke mate op wat in het vijfde hoofdstuk hieromtrent aan de orde komt. We ontkomen er niet aan daarop reeds in dit stadium een klein voorschot te nemen. Een samenvattend overzicht van deze eerste, voorlopige theoretische uitwerking voor het breukenonderwijs sluit dit hoofdstuk af.

2 MATHEMATISEREN

2.1 Enkele trekken van het mathematiseren

Bij het wiskundig bewerken van een probleemveld dient eerst de wiskundige probleemstelling als zodanig herkend of geformuleerd en vastgelegd te worden. Dit kan bijvoorbeeld geschieden door af te zien van die elementen in de probleemstelling, die niet tot de zuiver mathematische context behoren. De grensoverschrijving van het (reële) probleemveld naar de wiskunde wordt wel horizontaal mathematiseren genoemd.⁴⁾ Men zou kunnen stellen, dat het daarbij gaat om een zodanige verschraling van het probleemveld, dat het tot zijn wiskundige proporties is teruggebracht.⁵⁾ Het probleem is dan gereed om met wiskundige middelen aangepakt te worden. Daarbij kunnen notatievormen en modellen in het wiskundig vervolg een belangrijke rol spelen, zoals we nog zullen zien. Dit natuurlijk vervolg van het oplossingsproces binnen de wiskunde zelf noemde Treffers verticaal mathematiseren.⁶⁾ Het gaat daarbij om de mathematische verwerking van het probleem, de oplossing, de (eventuele) generalisatie van de oplossing en de verdergaande formalisering.⁷⁾ Terugvertaling naar het oorspronkelijke probleemveld behoort ook bij het mathematiseren. Over langere termijn beschouwd, zou men de aaneenschakeling van mathematiseringsprocessen, het gedurig voortschrijden in de wiskunde, kunnen omschrijven als progressieve mathematisering.⁸⁾

In het nu volgende voorbeeld – het betreft het vergelijken van verdeelsituaties en wat daaruit voortvloeit – zullen genoemde aspecten van mathematiseren nader toegelicht worden. Tevens zal blijken, hoe in een mathematiseringsproces, naarmate dit vordert, hetzelfde probleem herhaald en wiskundig steeds gespecificeerder beantwoord kan worden. Deze mogelijkheid tot wiskundige nuancering berust op de toenemende beschikbaarheid van daartoe geëigende wiskundige middelen.

2.2 Het vergelijken van verdeelsituaties

Verdeelsituaties

Stel er doet zich de situatie voor, waarbij vier kinderen drie objecten, zeg pannenkoeken, mogen verdelen.⁹⁾ Op het moment dat de verdeling voltrokken zal gaan worden, komt er van elk der kinderen nog een vriendje of vriendinnetje bij, terwijl voor hen nog maar twee pannenkoeken voorhanden zijn. Probleem: wanneer krijgen de kinderen meer, eerst dus 'vier kinderen – drie pannenkoeken', of nadat de vriendjes erbij gekomen zijn (acht kinderen – vijf pannenkoeken)?

Mathematiseren en de voortschrijding daarin

De wiskundige probleemidentificatie, het horizontaal mathematiseren, is in het gegeven voorbeeld niet zo lastig. Het gaat om het vergelijken van twee verdeelsituaties. Wel zijn er allerlei mogelijkheden voor een wiskundig vervolg, namelijk:

- 1 De oorspronkelijke verdeelsituatie omzetten in een daarmee in de uitkomst gelijkwaardige verdeelsituatie; 'vier kinderen verdelen drie pannenkoeken' omzetten in 'acht kinderen verdelen zes pannenkoeken', en vervolgens vergelijken met de nieuwe situatie: acht kinderen verdelen vijf pannenkoeken;¹⁰⁾ en vaststellen, dat de oorspronkelijke verdeelsituatie 'iets' voordeliger is.
- 2 De 'aanvullingen' twee pannenkoeken – vier kinderen vergelijken met de beginsituatie en concluderen, dat dit ongunstiger is, dus ook de totale nieuwe situatie.
- 3 Voor beide verdeelsituaties de verdelingen al tekenend voltrekken en de uitkomsten ervan daarna op het oog vergelijken en vaststellen dat de oorspronkelijke situatie het voordeligst is.

De opgeworpen vraagstelling stelt geen hoge eisen aan de precisie van de uitkomst. Er kan met een kwalitatieve ordening, op grond van min of meer globaal vergelijken van beide situaties, volstaan worden. Het verticaal mathematiseren behoeft (nog) nauwelijks op gang te komen, voordat reeds met zekerheid ten gunste van de voordeligste verdeelsituatie gekozen kan worden. Dit neemt overigens niet weg, dat de keuze die gedaan moet worden om een beslissing in verband met de vraagstelling te kunnen nemen, enig inzicht vergt.

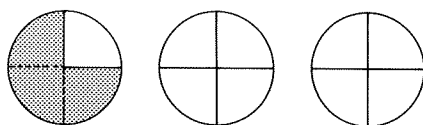
Bedoelde keuze laat zich kenschetsen als een verhoudingsoplossing: wanneer 'drie pannenkoeken – vier kinderen' wordt ingeruild voor 'zes pannenkoeken – acht kinderen' om het vergelijken met 'vijf pannenkoeken – acht kinderen' te vereenvoudigen en vast te stellen, dat 'vijf pannenkoeken – acht kinderen' ontoereikend is om de kinderen in gelijke mate te bedelen, als dit bij 'drie pannenkoeken – vier kinderen' het geval was.

Van een verhoudingsredenering was ook in het tweede geval sprake: 'twee pannenkoeken – vier kinderen' betekent: 'één pannenkoek – vier kinderen' minder dan bij 'drie pannenkoeken – vier kinderen', ergo ...

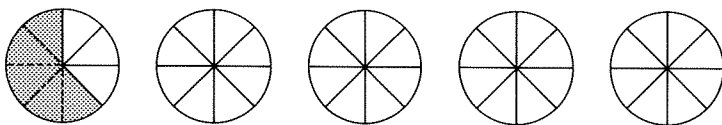
Het voltrekken van de verdelingen is een echte breukenoplossing, die de mogelijkheid opent – bij redelijk nauwkeurig tekenen – op het oog te gaan vergelijken wat elk kind per verdeelsituatie krijgt.

Zou de vraagstelling uitgebreid worden met: 'hoeveel meer?', dan zou de bewerking van het probleem met wiskundige middelen nog wat voortgezet moeten worden. Het ligt dan – vanzelfsprekend – voor de hand de eenmaal ingeslagen weg te vervolgen:

- 1 'Drie pannenkoeken – vier kinderen' omzetten in 'zes pannenkoeken – acht kinderen', vergelijken met 'vijf pannenkoeken – acht kinderen' en vaststellen, dat in het laatste geval 'één pannenkoek – acht kinderen' ontbreekt, dat wil zeggen, de acht kinderen tezamen krijgen in de nieuwe situatie één pannenkoek minder, ofwel ieder krijgt $\frac{1}{8}$ pannenkoek minder.
- 2 Was de tweede oplossing toereikend voor een kwalitatief antwoord op de oorspronkelijke vraag, nu zal deze wat nader gespecificeerd moeten worden. Dit kan door een ombuiging naar de eerste benadering, bijvoorbeeld 'drie pannenkoeken – vier kinderen' en daarna twee pannenkoeken voor nóg vier kinderen, betekent één pannenkoek te kort om een gelijkwaardige verdeelsituatie te behouden, enz. De ombuiging zou in tweede instantie kunnen plaatsvinden, nadat eerst is vastgesteld dat, zou het tweede viertal de twee pannenkoeken verdelen, elk $\frac{1}{4}$ pannenkoek minder kreeg dan het eerste viertal. Om het evenwicht te herstellen, zou elk van de acht kinderen 'de helft van $\frac{1}{4}$ ' van dit nadeel voor zijn rekening moeten nemen, dus ieder $\frac{1}{8}$ pannenkoek minder.
- 3 Worden – met de nodige nauwkeurigheid – verdelingen al tekenend voltrokken, dan laten zich de uitkomsten op het oog vergelijken en het gevraagde verschil vaststellen:



3 pannenkoeken – 4 kinderen
ieder krijgt $\frac{3}{4}$ pannenkoek¹¹⁾



5 pannenkoeken – 8 kinderen
ieder krijgt $\frac{5}{8}$ pannenkoek

Vergelijking van de uitkomsten van beide situaties leert, dat de kinderen in het tweede geval $\frac{1}{8}$ minder krijgen.

In een later stadium van het mathematiseringsproces is het denkbaar, dat bij de vergelijkingsvraag rechtstreeks naar bepaalde wiskundige middelen gegrepen

wordt, bijvoorbeeld de eerste verdeelsituatie wordt beschreven met (ieder krijgt) $\frac{3}{4}$ pannekoek, de tweede met (ieder krijgt) $\frac{5}{8}$ pannekoek, waarna via toepassing van gelijkwaardigheid het gevraagde verschil bepaald wordt: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ en $\frac{6}{8} - \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$.

In een nog later stadium komt ook de kruisproduktmethode binnen bereik: $\frac{5}{8} \times \frac{4}{4} = \frac{20}{32}$; $20 < 24$, dus $\frac{5}{8} < \frac{3}{4}$.

De geldigheid van deze methode is bewijsbaar vanuit de voorgaande. Immers, ze komt neer op het vervangen van de gegeven breuken door gelijkwaardige, waarbij als gemeenschappelijke noemer het produkt van de oorspronkelijke noemers gekozen wordt: $\frac{5}{8} = \frac{20}{32}$ en $\frac{3}{4} = \frac{24}{32}$ enz.

Het doel van voorgaande analyse was vooral te laten zien, dat bij het voortschrijden in het mathematiseringsproces, het vergelijken van 'kale' breuken met zuiver rekenkundige, zeg algoritmische middelen, pas binnen bereik komt wanneer daaraan voorafgegaan zijn:

- het vergelijken van verdeelsituaties en het kwalitatief ordenen;
- het vergelijken van verdeelsituaties en het ordenen ervan, op basis van gespecificeerde kwantitatieve overwegingen, doch niet met algoritmische middelen;
- het vergelijken van uitkomsten van verdeelsituaties en het ordenen ervan, op basis van gespecificeerde kwantitatieve overwegingen, doch niet op grond van algoritmische procedures;
- het ordenen van breuken, eventueel met algoritmische middelen.¹²⁾

Wat zich vooral in de geschetste sequentie aftekent, is de voortschrijdende mathematisering. Het vergelijken en ordenen van verdeelsituaties gaat vooraf aan het uitvoeren van verdeeltaken en geschiedt eerst kwalitatief en pas dan volgt kwantitatieve precisering. Na het voltrekken van verdeeltaken volgt het vergelijken en ordenen (en eventueel verschil bepalen) van de uitkomsten daarvan. Het vergelijken en ordenen en verschil bepalen van breuken, eventueel los van enige verdeelsituatie komt pas daarna, waarbij de leerlingen overigens de gelegenheid hebben op grond van de betekenis, die breuken verworven hebben, zelf verbanden – eventueel via modellen – met bepaalde contexten te leggen.

Zoals blijkt, vloeit de verschilbepaling, het aftrekken, op natuurlijke wijze voort uit de ordeningsvraag, wanneer meer precisie bij het vergelijken en ordenen gevraagd wordt. Een (didactisch-fenomeno-)logisch gevolg is, dat men bij *het systematisch ontwikkelen* van methoden voor het optellen en aftrekken van breuken, het aftrekken aan het optellen laat voorafgegaan.¹³⁾

3 VEELSPORIGE BENADERING

3.1 Uitgaan van contexten

Bij realistisch wiskunde-onderwijs wordt dikwijls uitgegaan van in algemene en specifieke contexten ingebedde problemen.¹⁴⁾ De context vormt een wezenlijk

bestanddeel van de (wiskundige) probleemstelling, ze maakt er deel van uit, althans dat is de bedoeling.¹⁵⁾

In het vervolg van deze beschrijving speelt de algemene context van een pannenkoekenrestaurant (*De Smickel*) een belangrijke rol. Ze verleent als het ware (chrono-)logische samenhang¹⁶⁾ aan de problemen, die er zich kunnen afspelen. Het betreft:

- de binnenkomst en plaatsing van gasten aan tafeltjes; verdeelproblemen in verband met de verkenning van op de uitkomst gelijkwaardige verdeelsituaties;
- het serveren van de pannenkoeken per individu, per tafeltje, per gezelschap, in verband met het oplossen van verdeelproblemen en onderzoek naar de gelijkwaardigheid van verdeelsituaties op de uitkomst;
- het verdelen van de pannenkoeken per pannenkoek, per tafeltje, per gezelschap, in verband met het vergelijken van verdeelsituaties, het voltrekken van verdelingen, het vergelijken van uitkomsten van breukverwekkende activiteiten, het vergelijken van 'breuken'.¹⁷⁾

Contexten kunnen benut worden als bron en als toepassingsgebied van de wiskunde.¹⁸⁾ De contexten, die als bron benut worden, dienen met zorg geselecteerd. Er wordt immers het bijbrengen van begrip mee beoogd! Bijgevolg zouden ze voor (vrijwel) alle leerlingen geschikt moeten zijn.¹⁹⁾ Hetzelfde kan in zekere zin gesteld worden voor contexten als toepassingsgebieden. In beide gevallen verlenen contexten persoonlijke betekenis voor de leerlingen aan de wiskundige bedrijvigheid en haar opbrengst.²⁰⁾

3.2 Veelsporige benadering

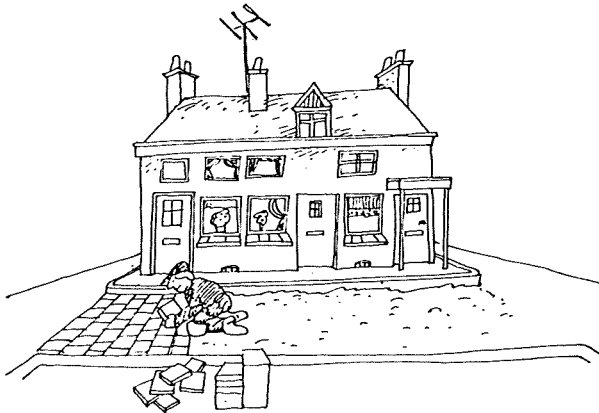
Veelsporigheid en context

Er is een nauwe relatie tussen veelsporigheid en het gevarieerd benutten van contexten. Men zou kunnen stellen, dat veelsporigheid het gebruik van contexten nader specificceert met het oog op de vorming van wiskundige begrippen e.d. Om bijvoorbeeld aan het begrip breuk volledig recht te doen in al zijn aspecten, wordt het aangezet vanuit een veelheid van invalshoeken. De context functioneert daarbij dus als begripsdrager (dit betekent overigens niet, dat door gevarieerde toepassing van contexten aan de eis van veelsporigheid voldaan hoeft te zijn).

De veelzijdige instap in het gebied van de breuken dient zijn dito-vervolg te vinden in een rijke geschakeerdheid aan toepassingssituaties. Tezamen kenmerken de veelsporige begripsinbedding en de brede toepassing de veelsporige benadering. Ter voorkoming van al te brede beschouwingen omtrent premathematische toegangen tot het breukbegrip, wordt de beschrijving beperkt tot te onderscheiden aspecten.

Aspecten van het breukbegrip²¹⁾

Breekoperator en breekrelatie²²⁾



Hoeveel heeft de stratenmaker al gedaan?

Oplossingsmogelijkheden: het straatje wordt opgevat als eenheid. Via herhaald halveren wordt vastgesteld, dat 'de helft van de helft' of 'een kwart' van de straat al gedaan is. De breuk in de breekoperator is het signaal tot eerlijk verdelen. Na voltrekking van de verdeling beschrijft de breuk in de breekrelatie het resultaat.

Breuk in verhoudingsrelatie

Het straatgedeelte dat al gedaan is, opvatten als maateenheid en daarmee de hele straat meten. Vaststellen dat de maateenheid vier keer past en vervolgens de breuk $\frac{1}{4}$ in de verhoudingsrelatie (bestraat gedeelte – straat) vaststellen. Stelt men zich op een enigszins gewijzigd standpunt, dan krijgt men de volgende karakteristiek.

Breuk als inverse van vermenigvuldigoperator

Net als bij voorgaande benadering is al metend vastgesteld: het straatje is vier keer zo groot als het bestrate gedeelte, dus omgekeerd is het straatgedeelte $\frac{1}{4}$ keer ...²³⁾

Breuk in verhoudingsoperator respectievelijk transformator

Bij 'vergroten en verkleinen' als breukverwekkende procedures kan zich de breuk voordoen in de verhoudingsoperator, of als nuance daarvan als breuk in de transformator. Bijvoorbeeld bij het leggen van een puzzel naar verkleind voorbeeld wordt de laatste bijvoorbeeld $2\frac{1}{2}$ keer zo groot afgebeeld. Dat wil zeggen, grootheidswaarden (lengten e.d.) worden omgezet in andere (deze lengte wordt $2\frac{1}{2}$ keer die). Zo kan men evenzeer een origineel (een plaat bijvoorbeeld) op $\frac{1}{4}$ van de grootte afbeelden.

Breuken in maatgetallen

Op meten en breuken komen we nog terug. Breuken in maatgetallen doen zich voor, wanneer het uitputten van een grootte met een maateenheid niet volledig voltrokken kan worden, waardoor (een) verfijning noodzakelijk wordt. In maatgetallen als $1\frac{1}{2}$ minuut, $1\frac{1}{2}$ seconde, $1\frac{1}{2}$ kg vindt men dergelijk meten terug.

Fenomenologisch gezien ligt aan verfijnd meten, beschreven door breuken in maatgetallen, eveneens het (eerlijk) verdelen ten grondslag, zij het dat de verdelingen (van de maateenheden) bij het meten op grond van wezenlijk andere bedoelingen voltrokken worden.²⁴⁾

Volledigheidshalve volgen nog twee aspecten.

Breuken op de getallenlijn



Weliswaar is hier nog enig verband met 'breuken in maatgetallen', maar ook begint de breuk zich als een getal, als algebraïsch object voor te doen, bijvoorbeeld een half als getaletiket bij een punt tussen 0 en 1.

Breuken als rationale getallen²⁵⁾

Met dit laatste, formele aspect, waarop we verder niet ingaan, sluiten we dit overzicht aan aspecten van het breukbegrip af.

De operatoropvatting; breuken en 'machientjes'

In dit tussenkopje is de aanduiding 'breuken als machientjes' bewust vermeden, omdat vanuit verschillende toegangen breuken in verband gebracht kunnen worden met machientjes. De ene keer echter betreft het een toepassingsgebied, namelijk het algoritmiseren van verhoudingen²⁶⁾, de andere keer gaat het om echte 'breuken als machientjes'. De machientjesbenadering van breuken, gebaseerd op de interpretatie van het natuurlijk getal als afbeelding, als functie, kan tot verbalisme leiden. Op dit bezwaar tegen deze benadering werd reeds gewezen.²⁷⁾

De twee benaderingen van 'breuken en machientjes', die we hier onder het hoofd veelsporige benadering kort willen beschrijven, vloeien rechtstreeks voort uit breukverwekkende activiteiten. De contexten waarom het gaat, zijn 'het samenstellen van mengsels' (limonade maken) en 'vergroten en verkleinen'.

Limonade maken als voorbeeld²⁸⁾

Breuken, verhoudingen kunnen teweeg gebracht worden bij het samenstellen van mengsels (bijvoorbeeld limonade maken) en de (numerieke) beschrijving ervan. In het samenstellingsvoorschrift van het mengsel kunnen breuken, verhoudingen informatie verschaffen over het relatieve 'gewicht' van elk bestand-

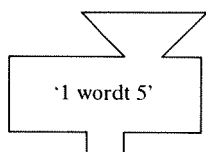
deel binnen het te maken mengsel. Is een mengsel eenmaal samengesteld, dan kunnen breuken, verhoudingen zich opnieuw voordoen, nu als beschrijvers van de grootterelaties tussen de verschillende bestanddelen onderling of van de verschillende bestanddelen in relatie tot de totale hoeveelheid van het mengsel. Het mengvoorschrift kan geïnterpreteerd worden als het etiket voor de objectieve 'smaak' van het mengsel, dat op grond ervan wordt samengesteld.

Bij een dergelijk onderwerp kan men aansluiten op de ervaringen van de leerlingen of ze eerst ervaringen in het ranja-maken laten opdoen.

Te denken valt aan activiteiten als:

- zelf ranja maken;
- aangeven hoe deze zoeter respectievelijk minder zoet gemaakt had kunnen worden;
- het zelf maken van even zoete ranja als de eerste keer, maar nu de dubbele, halve, ... hoeveelheid;
- het vullen (tekenen) van glazen limonade, die gelijk zoet, zoeter, minder zoet zijn dan een gegeven glas, waarvan de verhouding tussen de bestanddelen van het gegeven mengsel zichtbaar is en waarbij in elk nieuw geval informatie over één van de bestanddelen of de totale hoeveelheid beschikbaar is.

Aansluitend op de eigen ervaringen, eerst kwalitatief, later steeds meer kwantificerend, kunnen de activiteiten een vervolg krijgen, bijvoorbeeld binnen de algemene context van een limonadefabriek, met daarbinnen als specifieke context de produktie van een 'mengmachine':



Wanneer men één fles siroop in de machine zou doen, kwam er voor vijf flessen limonade uit.

Bij twee van de gegevens 'input', 'output' en 'machinevoorschrift' kan men naar het ontbrekende vragen. Bijvoorbeeld bij de gegeven machine:

in	1		$1\frac{1}{2}$		$3\frac{1}{4}$					
uit		$2\frac{1}{2}$		$12\frac{1}{2}$						

waarbij met eenheden van 1000 liter, een vat e.d. gerekend kan worden.

De breuken worden hier als het ware bij het algoritmiseren van verhoudingen toegepast. Aan het werken op dit reeds min of meer algoritmische niveau zouden heel wat concrete ervaringen in de kwalitatieve sfeer vooraf kunnen gaan. Daarbij kreeg door de kwalitatieve instap in het gebied het mathematiseren

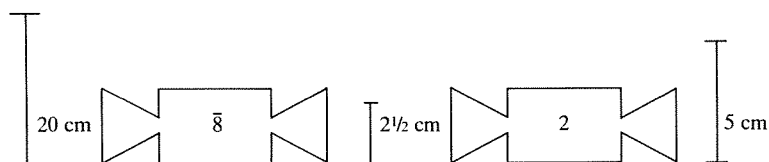
onder meer gestalte in de numerieke precisering van de verhoudingen, met de breuken daarbij in een toepassingsrol. Machientjes doen zich hierbij niet voor als schijnconcretisering van het begrip functie, doch komen op vrij natuurlijke wijze voort uit de (wiskundige) bedrijvigheid binnen de algemene context 'limonade maken'.

Vergroten en verkleinen

Bij het nemen van een foto legt men een stukje van de waarneembare werkelijkheid (verkleind) op een stukje film vast. In later stadium wordt het negatief omgezet in een (groter) positief beeld.

Bij de beschrijving van het beeld, vergeleken met de reële bron, kan de breuk in de transformator (eventueel) worden toegepast. Een dergelijke transformator is dan, gelet op het geschetste procédé, samengesteld uit (twee) verhoudingsoperatoren, in het algemeen respectievelijk een verkleining en vergroting.²⁹⁾ De afbeeldingsprocedure kan door middel van geschakelde machientjes beschreven worden. Evenals bij de mengsels wordt een dergelijk stadium pas bereikt, nadat veel ervaringen door de leerlingen zijn opgedaan, zoals bij voorbeeld het experimenteren met een diaprojector op variabele afstand van het projectiescherm. Een koppeling van een vergrotings- en verkleiningsmachine (of omgekeerd) zal uiteindelijk, want daar gaat het om – op grond van vergelijking van in- en output met elkaar – geïdentificeerd moeten worden met een breuk (in een operator) respectievelijk transformator, en dat is nu juist het probleem met de machientjes.

Voorbeeld:



Het 'fototoestel' verkleint acht keer, waarna het 'vergrotingsapparaat' twee keer vergroot; samengesteld: '... $\frac{1}{4}$ keer ...' ³⁰⁾ Het geschetste verband met breuken inzien, vereist echter inzicht in breuken vanuit een hoog standpunt.³¹⁾

Bewerkingen

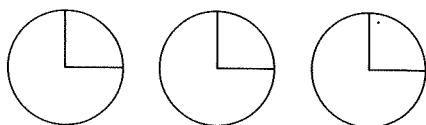
In par. 2.2 werden aspecten van het mathematiseren beschouwd bij het vergelijken van verdeelsituaties. In de geschetste didactische sequentie ging het achtereenvolgens om 'vergelijken', 'ordenen' en 'verschil bepalen'. Het aftrekken van breuken dient zich dus aan als het (voorlopig) eindpunt van een mathematiseringsproces, dat start met het vergelijken van verdeelsituaties en uitkomsten daarvan bij voltrekking van de geïnduceerde verdelingen: 'wat is meer?', 'hoeveel meer?', zijn de vragen, die mede richting geven aan bedoeld proces. De

fenomenologische grondslag voor het aftrekken is in dit geval dus het vergelijken.

Het aftrekken kan echter evenzeer berusten op het 'wegnemen'. Reeds in de begripsvormingsfase van 'breuk' kan dit zich voordoen bij het (op speciale wijze, overigens kinderen eigen) uitvoeren van verdeeltaken. Dat geldt eveneens voor andere bewerkingen, zoals uit het gegeven voorbeeld zal blijken. Het voorbeeld laat tevens zien, hoe het operatieve voorop staat bij de mentale constitutie van het begrip breuk.

Voorbeeld:

Bij het verdelen van drie pannekoeken onder vier kinderen werd onder meer door diverse kinderen als oplossing aangedragen:



Drie kinderen krijgen 'een hele min een kwart' en één kind krijgt 'een kwart en een kwart en een kwart' of 'drie keer een kwart'.³²⁾

Vergelijken en wegnemen blijken zich dus voor te doen als premathematische toegangen tot het aftrekken van breuken. Ook de andere bewerkingen laten zich op meer informele toegangen grondvesten. Het aftrekken werd slechts als exemplum beschouwd. Het benutten van dergelijke, gevarieerde, informele toegangen tot de bewerkingen met breuken is eveneens kenmerk van een veelsporige benadering. Een dergelijke benadering wordt bovendien geruggesteund door argumenten van onderwijspsychologische aard.³³⁾

4 MACRO-STRUCTURELE SAMENHANG

4.1 Overzicht

Enkele verbanden van breuken met andere onderdelen van het curriculum voor wiskunde-onderwijs op de basisschool zullen in deze paragraaf worden aangegeven. Het betreft achtereenvolgens 'grootheden' en in verband daarmee 'meten en kommabreuken'. Vervolgens wordt ingegaan op 'verhoudingen' en 'waarschijnlijkheidsrekening en statistiek'.

4.2 De breuken in wijder verband

Grootheden

In de literatuur, waarin het breukenonderwijs wiskundig onderbouwd wordt deed het jaar 1968 zich als 'breekpunt' voor, omdat sinds toen breuken en grootheden³⁴⁾ heel duidelijk met elkaar in verband gebracht worden.

In zijn didactische fenomenologie stelde Freudenthal een sequentie voor, waarbij de vorming van begrip voor diverse grootheden ten grondslag zou moeten liggen aan de vorming van het breukbegrip. Men zou kunnen stellen, dat de ontwikkeling van noties voor diverse grootheden en het leggen van de fundamenteen voor het breukbegrip hand in hand gaan, omdat evenzeer 'geldt':

*'In the concept of magnitude which I analyzed, they ('multipliers and divisors') (toevoeging LS) occur as operators to which correspond rational numbers and as such they play a constituting role.'*³⁵⁾

Het 'gelijk optrekken' van het breukbegrip en de ontwikkeling van begrip voor verschillende grootheden als lengte, oppervlakte en inhoud lichten we toe aan 'lengte'.

Een belangrijke ontdekking voor een kind bij vorming van begrip voor de grootheid lengte is, dat lengte niet aangetast wordt bij de uitvoering van allerlei transformaties. Freudenthal onderscheidt als lengte-invariant-latende transformaties, congruenties, flexies (vervormingen) en breek-maak-transformaties.³⁶⁾ Het breukverwekkende 'eerlijk verdelen' is een voorbeeld van zo'n breek-maak-transformatie.

Zoals gezegd, voor de constitutie van het mentaal object 'lengte' is de ontdekking, dat lengte door een breek-maak-transformatie niet wordt aangetast, een moment om even bij stil te staan, zoals uit de volgende observatie blijkt:

*'Terwijl Coen (6; 10) samen met zijn moeder op doktersvoorschrift mentholidampen opsnuift, zegt hij: 'Mamma, als je een hele lange dropveter hebt en je breekt die in allemaal kleine stukjes, heb je toch nog evenveel'.'*³⁷⁾

Bij het ontwikkelen van noties voor maateenheden en een maatsysteem bij het meten van grootheden, speelt het verdelen (het toepassen van breek-maak-transformaties) een belangrijke rol. In ontwikkelingspsychologische literatuur is het verband tussen de vorming van het breukbegrip en (het meten en verdelen in verband met) grootheden eveneens gelegd.³⁸⁾

Meten en kommabreuken

Meten bemiddelt tussen grootheden en eenheden van maat daarvoor. Door te meten wordt aan een in een object belichaamde grootheid een getal toegekend, een maatgetal. Dit geschiedt op basis van een voorafgestelde norm, de maateenheid, waarmee de grootheid door uitscheppen wordt uitgeput. Het maatgetal drukt de relatie tussen maateenheid en object (grootheid) uit waarvoor het meten bemiddelde. Er is dan wel sprake van een vorm van meten, waaraan meer primitieve vormen vooraf kunnen gaan, zoals bijvoorbeeld het ordenen op kwalitatieve overwegingen. Dat Jan langer is dan Piet, wordt in één oogopslag gezien, wanneer Jan en Piet ruggelings tegen elkaar gaan staan.

Om het kwantificeren bij het meten, het vaststellen van maatgetallen, aanvaardbaar nauwkeurig te doen zijn, kan men de maateenheid (telkens) verfijnen. Zo'n verfijning kan men voltrekken op basis van willekeur, afhankelijk

van de situatie waarvoor men zich geplaatst ziet. Bij de beschrijving van het resultaat kunnen breuken (in maatgetallen) toegepast worden. Daarin komt de breukverwekkende activiteit (het verfijnen van de maateenheid) dan tot uitdrukking. Voor de aanduiding van hoeveelheden (levensmiddelen) komen de meest gangbare breuken, zoals $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, in maatgetallen voor: $\frac{1}{4}$ liter melk, $\frac{1}{2}$ liter yoghurt, $\frac{1}{2}$ kilo appels etc.

Men kan het herhaald verdelen van de maateenheid ook steeds voltrekken volgens een vaste ‘verdeelsleutel’, zeg decimaal. In de beschrijving middels kommabreuken herkent men dan de regelmaat in procedure: 7,24... m geeft de stand van zaken in een meetproces weer. Voor het meten van een lengte (afstand) werd ‘1 meter’ als bruikbare maateenheid gekozen. Uitputting met uitsluitend gehele getallen ‘liep vast’. Tot twee maal toe werd de maateenheid verfijnd, eerst in tienden en vervolgens in tienden van tienden, honderdsten.

De stippen in het maatgetal verwijzen naar een mogelijk vervolg van de procedure. De aanvaardbaarheid van 7,24... m hangt af van de eisen van nauwkeurigheid, die de situatie aan het resultaat stelt. De komma geeft aan in welk stadium tot verfijnd meten werd overgegaan, het aantal bezette plaatsen achter de komma duidt op het aantal verfijningen.³⁹⁾

Door nu beide mogelijkheden van beschrijving, dat wil zeggen met breuken en kommabreuken bij het meten ‘onderweg’ toe te passen, ontstaat er aldus een nauwe inhoudelijke relatie tussen beide wiskundige beschrijvingsmiddelen, berustend op dezelfde wiskundige activiteit, het meten. Vanwege de eenduidigheid van het resultaat daarbij, zullen breuken en kommabreuken, die in maatgetallen voor gelijkkluidende situaties opgaan, met elkaar geïdentificeerd moeten kunnen worden.

Het meten blijkt dus zowel bron als toepassingsgebied voor de breuken. Zowel bij het maatverfijnen als bij het uitscheppen met een eenmaal gekozen maateenheid, als bij het meten met verfijnde maten, blijkt een belangrijke rol voor breukbegrip en bewerkingen ermee te zijn weggelegd.⁴⁰⁾

Verhoudingen

Het onderscheiden van de aspecten ‘breuk in de verhoudingsoperator en -relatie’ verwijst reeds naar een sterke samenhang tussen betrokken gebieden. Met een breuk kan men een verhoudingswaarde compact beschrijven. Een breuk kan staan voor een hele klasse van gelijkwaardige verhoudingen.

In een rij onderscheiden verdeelsituaties, die naar hun uitkomst gemeten gelijkwaardig genoemd moeten worden, doet zich verhouding als een equivalentie-relatie voor:

aantal pannenkoeken	3	6	9				
aantal kinderen	4	8	12				

De waarde van dergelijke verhoudingen, uitgedrukt in de breuk $\frac{3}{4}$ scheert al deze verdeelsituaties in zeker opzicht over één kam. De precieze rol van de breuken daarbij zal in de twee volgende hoofdstukken nadrukkelijk aan de orde komen. Het betreft de rol van de breuken, hun toepassingsmogelijkheden bij het algoritmiseren van verhoudingen. We volstaan daarom hier met een beknopte duiding van deze mogelijkheden. Het gaat om inzicht in:

- verhoudingen bij het rekenen met breuken en het beschrijven van deze relatie;
- eigenschappen van verhoudingen als eigenschappen van breuken en het beschrijven van deze relatie.

Vanzelfsprekend dient men omgekeerd, wanneer het accent op de breuken valt, eveneens op dergelijke relaties met beschrijving ervan in te gaan.⁴¹⁾ In het algemeen kan men stellen, dat juist in het gebied waar twee (of meer) grootheden op de een of andere wijze aan elkaar gekoppeld worden voor breuken een belangrijk toepassingsgebied ontsloten wordt.⁴²⁾

Kirsch stelt in dit verband:

... 'why should we teach fractions, if we would not use them in this context?'⁴³⁾

Waarschijnlijkheid en statistiek

Er zijn situaties in de realiteit, waarin zich verdelingen voltrekken, die de wetten van kans en toeval volgen. Soms ligt aan zo'n stochastische verdeelsituatie een theoretisch bepaalbare kans ten grondslag, zoals bijvoorbeeld bij het werpen met een eerlijke dobbelsteen. De kans op één van de uitkomsten van 1 t/m 6 is à priori bepaalbaar. Symmetrie-overwegingen liggen er onder meer aan ten grondslag. Het toeval bepaalt bij elke worp de uitkomst, waarbij een gebeurtenis, die eenmaal plaatsgevonden heeft, geen invloed uitoefent op de volgende. Wordt een reeks achtereenvolgende worpen gegenereerd, dan zal het totaalbeeld van de uitkomsten zich steeds meer gaan voegen naar de theoretische kansen, die eraan ten grondslag liggen (wet van de grote aantallen).⁴⁴⁾ Een voldoende lange proef bant de invloed van het toeval uit. In termen van breuken zou men in dit geval kunnen zeggen, dat de theoretische kansen, beschreven met breuken, als operatoren werken op de uitkomsten verzameling om een passende verdeling tot stand te brengen. Dikwijls echter laat de realiteit ook door kansen teweeg gebrachte verdelingen zien, die niet vooraf theoretisch achterhaalbaar zijn. Slechts de empirie kan hier uitsluitsel geven over bepaalde verdelingen en de achterliggende kansen op grond waarvan eventueel nieuwe gebeurtenissen ingedeeld gaan worden. Ook in dit soort gevallen zijn breuken toepasbaar om uitkomsten te beschrijven. Men pleegt van fracties te spreken. Men ontdoet dergelijke uitkomsten bij het rekenen ermee van hun op kans en toeval berustende oorsprong. De uitkomst '6 van de 25' of $\frac{6}{25}$ wordt dan genormeerd op '24 van de 100' of $\frac{24}{100}$ om inpassing in ons decimale getallensysteem en beschrijving in een percentage, zoals te doen gebruikelijk is, mogelijk te maken. Voor de bovenbouw van de basisschool dient 'waarschijnlijkheid en statistiek'

zich onder meer aan als een belangrijk toepassingsgebied van breuken, fracties, kommagetallen en procenten.⁴⁵⁾ Door de complexiteit van begrippen als kans, toeval en de wet van de grote aantallen, komt dit gebied ons minder geschikt voor als bron voor het breukbegrip en bewerkingen met breuken.

5 MODELVORMING EN TOEPASSING

5.1 Functies

Aan modellen in (realistisch) wiskunde-onderwijs kan een viertal functies toegekend worden, namelijk:

- ondersteunende begripsvorming tijdens de verkenning van de verschijnselen, waarin ze zich als structuur op natuurlijke wijze voordoen;
- worden dienstbaar gemaakt aan de ontwikkeling van algoritmen;
- doen eveneens dienst bij de verkenning van de eigenschappen van de bewerkingen;
- verlenen steun bij de verwerking van toepassingssituaties (denkmodellen)⁴⁶⁾

De opgesomde functies zullen we illustreren met voorbeelden.

5.2 Begripsvorming, realistische verschijnselen

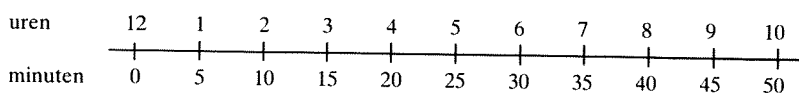
Reeds eerder werd melding gemaakt van het feit, dat kinderen bij de vorming van hun breukbegrip spontaan tot modelvorming respectievelijk modeltoepassing kunnen komen:

- in een pannenkoekenrestaurant vraagt een vader aan zijn twee kinderen hoeveel elk krijgt bij verdeling van één pannenkoek met z'n drieën. Hun antwoord luidt: 'twintig minuten';⁴⁷⁾
- een meisje (9; 2) dat bij het samennemen van een half en een kwart glas appelsap tot de conclusie komt, dat ze $\frac{3}{4}$ glas gehad heeft, redeneerde: 'Het is net als bij de klok. In een kwartier zit al kwart, in een half uur twee kwartieren, dus twee kwarten, bij elkaar drie kwart.'⁴⁸⁾

Het lijkt zinvol de klok als fenomeen in de realiteit grondig te verkennen. In verband met tijd, tijdmeting, klokkijken, ... kan de aandacht zich richten op:

- de wijzerplaat met rondgaande wijzers (later te gebruiken als dynamisch model voor pannenkoeken);
- het verband tussen de wijzerplaat als circulair model en de tijdlijn als lineair model, door de wijzerplaat als het ware als tijdlijn 'af te rollen'.⁴⁹⁾

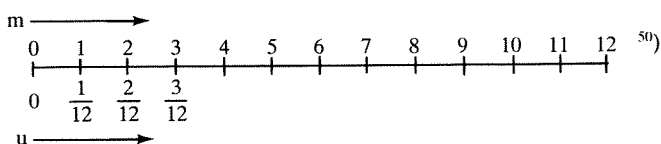
Door op de tijdlijn als 'afgerolde' wijzerplaat de werking van de klok mee te nemen, dient deze zich meteen als paradigma voor de twee- of meerschallige getallenlijnen aan:



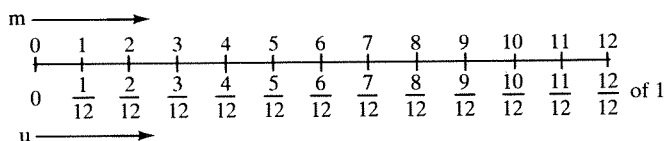
De schalen geven respectievelijk aan hoe de stand van uur- en minutenwijzer geïnterpreteerd moet worden. De verbinding met verhoudingen dringt zich opnieuw op. Waar twee (of meer) grootheden verhoudingsgetrouw gekoppeld zijn, is de (verhoudings-)tabel toepasbaar als ruimte voor numerieke opslag. Beschrijven we het verband tussen het rondgaan van de wijzers van de klok dan komt zo'n tabel er zó uit te zien:

ronden van de min. wijzer	0	1	2	3	4	5	6						12
ronden van de uurwijzer	0	$\frac{1}{12}$											1

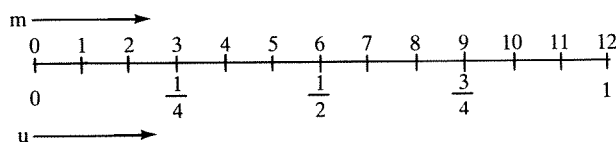
Of, omgezet in een ('nieuwe') tweeschalige getallenlijn:



In deze vorm wordt dit model dienstbaar aan de begripsvorming en wel ten aanzien van de equivalentie van breuken. Immers, wanneer het rondgaan van de wijzers successievelijk geregistreerd wordt in rondgangen en delen van rondgangen, komt de tweeschalige getallenlijn er als volgt uit te zien:

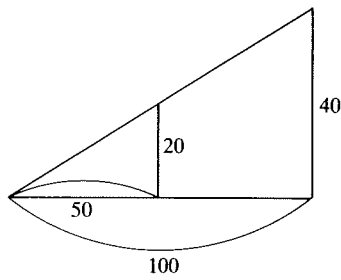


Wordt (achteraf) een half etmaal als eenheid beschouwd, dan komt er (bijvoorbeeld):



Hieruit blijkt, dat hetzelfde verschijnsel door middel van breuken op verschillende manieren beschreven kan worden. Op grond van onder meer dergelijke ervaringen zullen de eerste noties omtrent gelijkwaardigheid van breuken gevormd moeten worden. Pas daarna is er in het mathematiseringsproces aanleiding om via $\frac{1}{2} = \frac{6}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{12}$ e.d. de ervaren gelijkwaardigheid met behulp van algoritmische middelen te bevestigen.⁵¹⁾ Wanneer het verschijnsel van de ver-

houdingsconstantie tussen verticaal objekt en (zonne-)schaduw op zeker moment is vastgesteld, kan het modellenarsenaal met het stok-schaduw-model uitgebreid worden⁵²⁾, bijvoorbeeld: wanneer van de vijftig bioscoopbezoekers er twintig ouder zijn dan 25 jaar, is dit 40 op 100 (of 40%):

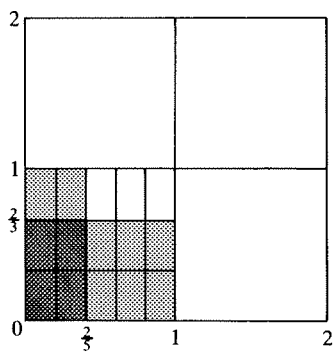


Door hier de verhoudingstabel eveneens voor getalopslag te benutten, wordt een verbinding met voorgaande modellen gelegd.

5.3 Modellen, algoritmen en eigenschappen

De in deze aanhef genoemde kwesties komen later in de beschrijving van het ontwikkelingsonderzoek uitvoerig aan de orde. Dit rechtvaardigt een beperkte beschouwing op dit moment.

De bewerking vermenigvuldigen met breuken kan gegrondvest worden op het zogenaamde oppervlaktemodel, eventueel in de vorm van een rooster. Het in kaart brengen van een stukje werkelijkheid op schaal kan daarbij (eventueel) als ingang gekozen worden. De beschouwing blijft hier tot een ‘echt breuken-voorbeeld’ beperkt:



De uitkomst van de vermenigvuldiging $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ wordt als het ware verkregen door van de eenheid in het rooster de zijden in de asrichtingen respectievelijk met $\frac{2}{3}$ en $\frac{2}{3}$ te vermenigvuldigen. Het dubbel gearceerde gedeelte van de eenheid in relatie met die eenheid, representeert $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$.

Het rooster biedt voordelen boven de rechthoek, omdat daarbij de gelegenheid

zich aandient rijen van ‘analoge’ gevallen te onderzoeken, zoals bijvoorbeeld:

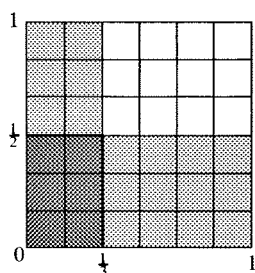
$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \times 1, 1 \times \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \times 2, \text{ etc.}^{53})$$

Het verband met eigenschappen van bewerkingen wordt in het gegeven voorbeeld eveneens duidelijk. Bij verwisseling van de assen komt de commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging in beeld. Uit de gegeven figuur laat zich bovendien vrij eenvoudig aflezen, dat $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times (\frac{2}{5} + \frac{2}{5})$ (de distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging over de optelling).

5.4 Model en toepassingssituaties

Voor een toepassingssituatie van het vermenigvuldigen van breuken kan het roostermodel benut worden. Zolang de bewerking vermenigvuldigen nog niet gealgoritmiseerd is, zal dit zeker het geval moeten zijn.

Voorbeeld: van een reisgezelschap van 96 personen in een restaurant bestelt de helft ‘het menu van de dag’, maar een-derde van hen geeft de voorkeur aan ijs toe in plaats van pudding, zoals het menu vermeldt. Hoeveel ‘ijsjes toe’ moet de ober voor deze groep opdienen.



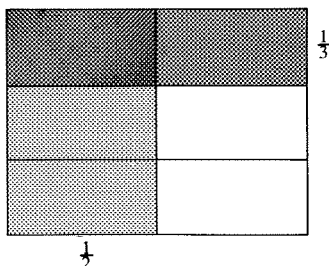
Een-derde van de helft ($\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$), dus $\frac{1}{6}$ deel.

$\frac{1}{6} \times 96 = 16$ personen (van deze groep) ontvangen een ijsje toe.

Meer overtuigingskracht nog heeft het volgende voorbeeld.

Bij het algorithiseren van breuken is het uitstellen van het opzettelijk automatiseren bepleit. Dit betekent, dat ‘kale’ breukensommen voor leerlingen van de basisschool nog tot de toepassingssituaties gerekend zouden kunnen worden, omdat de algebraïsering van het breukrekenen nog niet is ingetreden. Het delen van een breuk door een breuk zal veelal buiten beschouwing blijven.

Gevraagd naar: $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$, kwamen zesdeklassers van de Dr. W. Dreesschool te Arnhem⁵⁴⁾ spontaan tot onder andere de volgende oplossing:



Een rechthoek werd gehalveerd en in drieën gedeeld. Vervolgens werd gesteld, dat het $\frac{1}{3}$ deel van de rechthoek $1\frac{1}{2}$ keer in de helft bevat was, dus $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 1\frac{1}{2}$.⁵⁵⁾

6 EENSPORIGHEID BIJ HET ALGORITMISEREN

Het eerlijk verdelen, het voltrekken van verdeeltaken spreekt kinderen aan, cognitief en emotioneel. Zij zijn er vooral op belust verdelingen zo efficiënt mogelijk te voltrekken. Het verdelen blijkt zich, zij het op grond van wezenlijk andere bedoelingen of berustend op heel andere wetten, eveneens in toepassingsgebieden van de breuken voor te doen. Meten en waarschijnlijkheidsrekening dienden zich als zodanig aan.

Bij de ontwikkeling van een deelleergang voor aftrekken en optellen van breuken kan het eerlijk verdelen mede daarom nadrukkelijk uitgangspunt zijn. Het is echter de vraag, of de door ons voorgestelde benaderingswijze breed genoeg is.⁵⁶⁾ Bij het inslaan van een algoritmiseringsweg wordt nadrukkelijk één spoor gevolgd. Het orde scheppen in verdeelsituaties, die in de uitkomst gelijkwaardig zijn, staat voorop en werkt door tot in het algoritmisch werken toe. Ook hier blijft het principe van de samenhang tussen begrip, modelvorming en algoritmisering gehandhaafd. Het ene spoor mag, terwijl het gevolgd wordt, niet uitgewist worden. De bronnen van inzichtelijkheid mogen niet voortijdig verstopt worden. In het vijfde hoofdstuk wordt besproken, hoe dit spoor er uit ziet, en later of het uitgangspunt van de eensporigheid wel goed houdbaar is.

7 DIFFERENTIATIE

Reeds enkele malen werd gesteld, hoe bij de vorming van het breukbegrip, uitgaande van breukverwekkende activiteiten, het operatorische nadrukkelijk voorop staat. Deze omstandigheid wordt nog bevorderd, doordat verdeeltaken gevarieerd kunnen worden uitgevoerd en beschreven. Het in verband brengen daarna met elkaar van de verschillende beschrijvingen laat zien, hoe er met breuken geopereerd is.

Voorgaande aspecten van het verwerken van verdeeltaken doen zich als vanzelf voor, wanneer men zich richt op het gedifferentieerde karakter ervan. Open, realistisch wiskunde-onderwijs heeft mogelijkheden tot verwerkingsdifferentiatie, die wellicht niet overdraagbaar zijn naar andere vormingsgebieden.⁵⁷⁾ Omdat het gedifferentieerde karakter van het wiskunde-onderwijs in de vervolghoofdstukken, maar ook in de tot nu toe gegeven voorbeelden steeds doorklinkt, beperken we ons hier tot een enkel voorbeeld. Het gaat vooral om de samenhang tussen uitvoering van een verdeeltaak en de beschrijving in breukentaal.

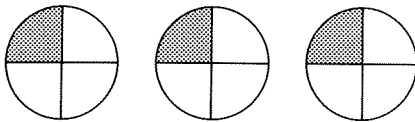
In par. 2.2 (pag. 34) werd het voorbeeld gegeven in verband met de bewerking aftrekken van de vier kinderen, die drie pannekoeken verdeelden. De mogelijke verwerkingen van dit probleem zijn echter veel gevarieerder, zoals de ervaring leerde:

- één kwart en een kwart en een kwart,
drie keer een kwart, drie kwart,

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$3 \times \frac{1}{4}$$

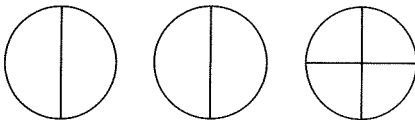
$$\frac{3}{4}$$



- een half en een kwart,
een half en de helft van een half

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

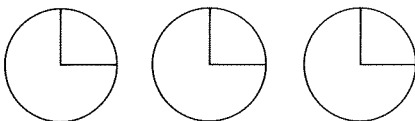
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$



- driekwart of een hele min een kwart,
een kwart en een kwart en een kwart,
drie keer een kwart,

$$\frac{3}{4} \text{ of } 1 - \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}, 3 \times \frac{1}{4}$$



Dergelijke verdelingen blijken voor kinderen wel degelijk verschillend te zijn. In het tweede geval bijvoorbeeld krijg je maar twee stukken en bij de eerste verdeling drie. Wel is het zo, vinden de leerlingen, dat ieder evenveel pannekoek krijgt, dus de gegeven beschrijvingen moeten wel op hetzelfde neer komen.

8 TUSSENSTAND EN ZICHT OP HET VERVOLG

De probleemstelling voor deze studie werd mede bepaald door trekken van het huidige breukenonderwijs, verwijzend naar de geringe effectiviteit ervan. Op grond daarvan trokken ‘maatregelen’ de aandacht, die tot verbetering van het breukenonderwijs zouden moeten leiden. Deze ‘maatregelen’ werden gekenschetst als theoretisch kader voor het breukenonderwijs, althans er was sprake van bouwstenen daarvoor.

In het achterliggende hoofdstuk vond een eerste uitwerking van en toelichting

op bedoelde bouwstenen plaats. Het geheel aan elementen voor een theorie kwam voort uit diverse overwegingen. Het betrof een vergelijking van de aanpakken van breuken en natuurlijke getallen in het huidige Nederlandse reken/wiskunde-onderwijs; oriëntatie in internationale literatuur, zowel praktisch als theoretisch; de aangehangen visie op wiskunde-onderwijs en op grond daarvan als dwingend ervaren noodzaak reeds op het niveau van de macro-uitlijning, rekening te houden met de realiteit van en voor kinderen.

In dit hoofdstuk werden eerst enkele trekken geschetst van het mathematiseren. De voortgang in het mathematiseringsproces werd geïllustreerd aan het vergelijken van verdeelsituaties en de mogelijke (wiskundige) vervolgen daarop.

Realistisch wiskunde-onderwijs brengt het uitgaan van contexten met zich mee. In verband met de bepleite veelsporige benadering van begrippen en bewerkingen, werd op de functie van contexten ingegaan. Aan het breukbegrip werden diverse aspecten toegelicht, zoals de breuk in de breekoperator, breekrelatie, verhoudingsoperator en -relatie.

Met de bewerking aftrekken in een exemplarische rol, werd toegelicht hoe dezelfde wiskundige bewerking vanuit verschillende premathematische toegangen geabstraheerd kan worden. Tevens werd in verband met begrip en bewerking ingegaan op breuken en machientjes.

Bij de beschouwing van het wijdere verband van de breuken met het overige wiskunde-onderwijs (voor de basisschool) werd achtereenvolgens ingegaan op grootheden, meten en kommabreuken, verhoudingen en waarschijnlijkheid en statistiek. Modelvorming en -toepassing kenmerken (onder andere) het mathematiseren, ook bij de breuken. Een viertal aspecten in verband met de functie van modellen werd besproken.

Een korte beschouwing over 'eensporigheid bij het algoritmiseren' en het gedifferentieerde karakter van het beoogde wiskunde-onderwijs, besloten deze 'eerste uitwerking'. Daarbij kwam opnieuw, evenals in andere voorbeelden, de geïntegreerde samenhang van de vorming van het breukbegrip, de taalvorming daarbij en het vooropstaan van operaties tot uitdrukking.

IV AANLOOP TOT HET ALGORITMISEREN

1 INLEIDING EN OVERZICHT

Eerste uitwerking van bouwstenen voor een theorie van het breukenonderwijs heeft inmiddels plaatsgevonden. Daarbij sprong vooral de nauwe onderlinge samenhang van diverse bouwstenen in het oog. De beschrijving werd steeds aan voorbeelden uit het gebied van de breuken verhelderd. De voorbeelden geven suggesties voor direct realiseerbaar onderwijs. Ze slaan een brug tussen theorie en micro-uitwerking.

In voorliggend hoofdstuk zal een dergelijke concretisering in toenemende mate dienen plaats te vinden, teneinde de beginsituatie van de leerlingen, die aan het ontwikkelingsonderzoek deelnamen te kunnen kenschetsen. Het spoor van het 'eerlijk verdelen' wordt daarbij gevolgd. Een grondige analyse daarvan is daarom op zijn plaats.

Het zijn vooral *verdeelsituaties* en *gelijkwaardigheid*, waarnaar de aspecten, naar voren gekomen in de analyse van 'eerlijk verdelen', onder meer zeer nadrukkelijk verwijzen.

Gelijkwaardigheid, in samenhang met de overige aspecten, wordt (derhalve) na het eerlijk verdelen in beschouwing genomen. Pas daarna wordt het algemene niveau van beschrijving ingeruild voor beschrijvingen 'dichtbij', op het niveau van de micro-uitwerking. Het betreft de wijze waarop aan eerlijk verdelen in alle onderscheiden aspecten in het concrete onderwijs, dat aan de feitelijke ontwikkeling van 'de deelleergang optellen en aftrekken' vooraf ging, aandacht besteed is. De samenhang met andere toegangen tot het gebied van de breuken, eveneens in bedoeld voorwaarde-scheppend onderwijs gerealiseerd, wordt daarbij globaal geduid. Inspelen op het wijder verband van het gehele wiskunde-onderwijs voor de basisschool is, in samenhang daarmee, eveneens onontkoombaar. De beginsituatie van de leerlingen bij aanvang van het ontwikkelingsonderzoek wordt ter afsluiting nog eens globaal samengevat.

2 EERLIJK VERDELEN

Het breukverwekkende 'eerlijk verdelen' is uitputtend. Het 'geheel' dient volledig op te gaan in delen die gelijk zijn. De delen worden daarna in hun (grootte-)relatie tot het geheel beschouwd. Met andere woorden, breukverwekkend 'eerlijk verdelen' is modelmatig verdelen dat in het dagelijks leven allerlei verschijningsvormen kent met meer 'vrijheidgraden'. Als gronden hiervoor kunnen aangevoerd worden:

- het ontoereikend zijn van technische middelen en mogelijkheden om eerlijk te verdelen;
- het vervallen van de eis tot uitputting van het te verdelen geheel;
- het vervallen van de eis van gelijkheid van de delen.

Kenmerkend voor het eerlijk verdelen in het huidige breukenonderwijs is de willekeur op grond waarvan verdelingen voltrokken worden.¹⁾ Verdelingen zijn er op afroep, zonder dat ze gemotiveerd en teweeg gebracht worden vanuit beschouwde verdeelsituaties. Personen, die iets verdelen, komen in het ‘breukenspel’ niet of nauwelijks voor. De aanwezigheid van degenen, onder wie iets verdeeld wordt is – psychologisch gezien – van meer belang dan op het eerste gezicht lijkt. De aanwezigheid van ‘verdelers’ vraagt namelijk om aandacht voor de rechtvaardigheid van de verdeling en in relatie tot het te verdelen geheel, de uitkomst te beschouwen als deel-geheel-relatie. Immers, het vooruitlopen op de uitkomst van een verdeelsituatie; vraagt er om verband te leggen tussen het aantal ‘verdelers’ en het te verdelen geheel. Deze relatie bepaalt namelijk de daaruit voortvloeiende uitkomst van elke individuele belanghebbende in de verdeelsituatie. Anders gezegd nog: aan de breuk, die voortkomt uit een verdeelsituatie, ligt de verhouding ‘aantal personen – te verdelen geheel’ ten grondslag. Dit aspect vormt een essentieel moment bij de overgang van het eerlijk verdelen naar de breuken toe.

De eerste twee van de genoemde aspecten hebben mede hun stempel gedrukt op de onderzoeksuitkomsten van onder andere Piaget.²⁾ Elders hebben we betoogd, dat gebrekkige of foutieve uitvoering van een verdeeltaak nog geenszins hoeft te betekenen, dat hieraan zonder uitzondering defect begrip van het eerlijk verdelen ten grondslag zou liggen.³⁾ Het aan kinderen voorleggen van situaties, waarin niet eerlijk verdeeld wordt, kan voor hen zeer verhelderend werken.⁴⁾

Het derde aspect, dat genoemd werd, namelijk het vervallen van de eis van gelijkheid van de delen, werd reeds beschouwd in verband met breek-maak-transformaties bij de constitutie van mentale objecten voor diverse grootheden.⁵⁾

Het breukverwekkende eerlijk verdelen is dus ideaal en uitputtend. Het geheel gaat volledig op in gelijke delen. Het uitgaan van verdeelsituaties motiveert het relatie-aspect. Het beschouwen van de deel-geheel-relatie maakt het mogelijk breuken als beschrijvingsmiddel in verdeelsituaties te gaan toepassen.

In de gangbare didactiek(en) voor breuken beperkt men zich vrijwel uitsluitend tot beschouwing van delen *binnen* een geheel. Op deze kwestie gaan we nu wat uitvoeriger in.

Een passend wiskundig model voor verdeeltaken is de grootheid.⁶⁾

Een voorbeeld is ‘gewicht’.

Stel, dat binnen een systeem G (objecten, hoeveelheden) de relatie ‘... is even zwaar als ...’ wordt ingevoerd. Bedoelde relatie deelt G op in gewichtsklassen. Elke klasse krijgt een passend ‘etiket’: ‘gewicht p ’, ‘gewicht q ’, etc. De term ‘gewicht’ (sec) blijft voor G gereserveerd. We veronderstellen eveneens, dat twee elementen van G kunnen worden samengevoegd. Dit samenvoegen ‘werkt’ – vanzelfsprekend – in de beschrijving met de betrokken grootheid

door. Het leidt tot optellen van gewichten. Om de bewerking optellen nu onbeperkt bij herhaling te kunnen uitvoeren, is het noodzakelijk dat elke gewichtsklasse onuitputtelijk is. Dat wil zeggen, dat in elke gewichtsklasse objecten, respectievelijk hoeveelheden onbeperkt voorradig zijn (vermenigvuldigen als herhaalde optelling). Het verdelen van een object (of hoeveelheid) in willekeurig veel gelijkwaardige deelobjecten (respectievelijk hoeveelheden) voert tot de operatie in (n -) gelijke delen delen. Het vermenigvuldigen met rationale getallen komt uit de samenstelling van vermenigvuldiging en deling voort.

Nu kan men bij een object het n -de deel van ... bepalen. Men blijft binnen het gegeven object en nadat de operator n -de-deel van ... 'gewerkt' heeft, kiest men een deel willekeurig. Wil men nu de operatie vermenigvuldigen eveneens aan de objecten kunnen voltrekken, dan is willekeurige beschikbaarheid ervan in elke equivalentieklasse vereist.

Freudenthal stelt in dit verband:

'De breuk als deel van iets is van zulk een overtuigende en meeslepende concreetheid, dat men met deze fenomenologische instap genoeg neemt en al het andere vergeet. In alle voorbeelden, gevisualiseerd of niet, beperkt men zich tot het breken. Het n -de deel wordt uitsluitend binnen het geheel gezien of verbeeld, iets, dat met 'n-keer' principieel onmogelijk zou zijn. Fenomenologisch leidt deze instap tot de echte breuken (< 1).'⁷⁾

De beperkingen van een dergelijke, eenzijdige instap treden aan het licht, wanneer men aan breuken groter dan 1 toe is. Dan is men met het algoritmiseren van de breuken echter al zo ver gevorderd, dat men deze kwestie eveneens algoritmisch afdoet. Gemengde breuken hebben in de gangbare didactiek geen enkele realistische binding meer.

'De breuk in de breekoperator' kan met een zeer beperkt equivalentiebegrip genoeg nemen; het is daar voldoende iets 'in n -gelijke delen' te kunnen delen. Maar in de didactische werkelijkheid heeft men aan een wijder werkzaam equivalentiebegrip behoefte en aan de onbeperkte beschikbaarheid van objecten in elke equivalentieklasse.'⁸⁾

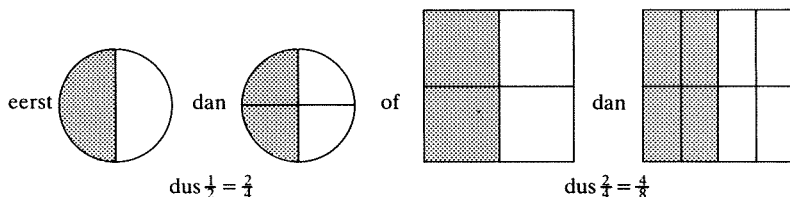
In de volgende paragraaf wordt getracht de didactische werkelijkheid van een 'wijder werkzaam equivalentiebegrip' te scheppen.

Aan de vier onderscheiden kenmerken van het breuken veroorzakende eerlijk verdelen, namelijk ideaal, uitputtend, gelijk(waardig-)heid der delen, breuk als relatief begrip, kan dus nog een vijfde aspect worden toegevoegd. Het betreft de onbeperkte beschikbaarheid van equivalente eenheden. Het verkennen van verdeelsituaties lijkt voorwaarde om het relatie-aspect onder het breukbegrip te stoppen. Binnen die context zal het noodzakelijk wijder werkzame equivalentiebegrip nader beschouwd worden.

3.1 De gangbare benadering

Gelijkwaardigheid van breuken wordt in de gangbare didactiek(en), voorzover gebaseerd op een concrete instap, dikwijls afgedaan als gelijkheid.⁹⁾

Bijvoorbeeld:



Op grond van de analyse in de vorige paragraaf kan gesteld worden, dat dit een gevolg is van het feit, dat men bij het verdelen steeds binnen het object blijft. Nog in een ander opzicht werkt deze keuze beperkend. Behalve het terugbrengen van gelijkwaardigheid tot gelijkheid, dus het ontdoen van de breuk van zijn relatieve aspect, wordt gelijkwaardigheid tot geïsoleerde gevallen beperkt.

Op deze wijze wordt geen inhoud gegeven aan de betekenis van de breuk als equivalentieklasse, waarbij een breuk, bijvoorbeeld $\frac{1}{2}$, de klasse $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \dots\}$ vertegenwoordigt.

Om de beperkende instap, zoals geschetst, in latere instantie weer 'wat goed te maken', geven sommige rekenmethoden na enige voorbeelden een overzicht in de geest van:¹⁰⁾

1					
$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

etc.

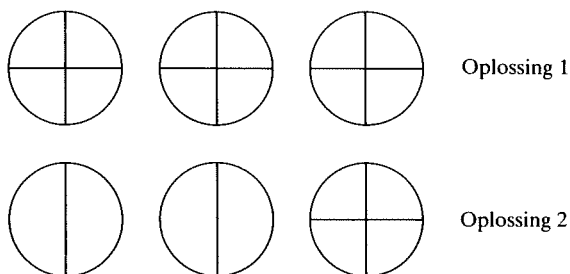
Dikwijls staat een dergelijk overzicht in dienst van de overgang op een algoritmische behandeling van gelijkwaardigheid.

Eerder hebben we laten zien, hoe gelijkwaardigheid van breuken zich op natuurlijke wijze kan voordoen, wanneer eenzelfde verschijnsel vanuit verschillende invalshoeken beschouwd wordt¹¹⁾, hetgeen tot gevolg heeft, dat verschillende (gelijkwaardige) beschrijvingen door middel van breuken mogelijk worden. Het met rekenkundige middelen omzetten van breuken in daarmee gelijkwaardige, wordt dan het algoritmische sluitstuk in een mathematiseringsproces,

waarin zich eerst ruimschoots de gelegenheid voordoet tot vorming van noties omtrent gelijkwaardigheid.

3.2 Verdeelsituaties en gelijkwaardigheid

Ook bij het uitsluitend voltrekken van verdelingen binnen één object, zoals in de gangbare breukendidactiek, geeft gelijkwaardigheid nog voldoende aanleiding tot misverstanden.¹²⁾ Deze misverstanden ontstaan door de verschillende betekenissen, die aan termen als 'gelijk', 'hetzelfde' e.d. kunnen worden toegekend. Eerder was sprake van het voorbeeld 'drie pannenkoeken verdelen met vier kinderen.

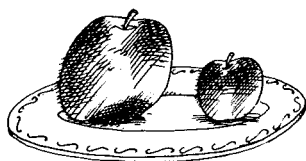


De ervaring met dit probleempje leerde, dat leerlingen soms redeneren: 'Een half en een kwart is niet *hetzelfde* als drie kwarten. Je krijgt evenveel, maar de ene keer zijn het twee stukjes en de andere keer drie.'¹³⁾

Bij verwerking van verdeelproblemen, ingebed in verdeelsituaties, wordt gedifferentieerd oplossingsgedrag uitgelokt. Dit geeft dan meteen aanleiding – getuige het gegeven voorbeeld – om helderheid te verschaffen over wat onder gelijk-(waardig-)heid van delen verstaan dient te worden.

Een andere kwestie is de onbeperkte beschikbaarheid van eenheden. Bij verdeelsituaties in het dagelijks leven zijn pannenkoeken, appels e.a. zelden identiek. Een dergelijke gelijk(waardig-)heid van meer 'eenheden' wordt bij het breukverwekkende eerlijk verdelen wél verondersteld.

Om de leerling daarvan bewust te maken, kan hun een conflictsituatie voorgesteld worden.¹⁴⁾



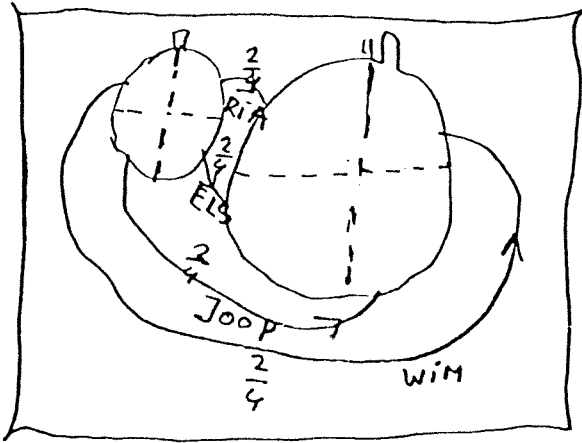
Twee kinderen verdelen twee appels. Wat te doen?

Aantal appels en hoeveelheid appel strijden om de voorrang. Kinderen blijken

gevoelig voor het begrip eerlijk, of het nu om verdeelsituaties gaat of om de afstanden bij schaatswedstrijden.

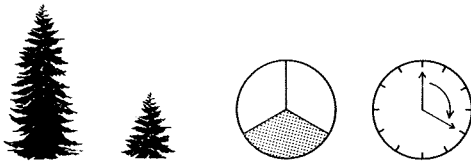
Het probleem wordt nog gecompliceerder, wanneer er nog twee vriendjes bij komen en er vier gegadigden voor de twee appels zijn.

Als je dan als leerling met de verdeling al 'goed zit', kan het met de beschrijving van het resultaat in breuktaal weer misgaan, zoals uit het volgende voorbeeld van leerlingenwerk blijkt:



Waarom het gaat is, dat de geschetste voorwaarden voor en kenmerken van het breukverwekkende eerlijk verdelen bij de leerlingen bewust gemaakt worden. Wat het laatste voorbeeld betreft, hierdoor wordt het onbeperkt voorhanden hebben van uitwisselbare eenheden gemotiveerd.

Bij de beschouwing van het principe van de veelsporige benadering kwamen diverse te onderscheiden aspecten van 'breuk' ter sprake. 'Breuk' deed zich voor als middel om orde te scheppen in de verschijnselen, waarin zich 'breuk' in die verschillende aspecten voordeed. Dergelijke verschijnselen worden door het breukbegrip onder dezelfde wiskundige noemer gebracht.



Zo legt de breuk $\frac{1}{3}$ wiskundig verband tussen de hoogtevergelijking van de bomen, het deel van de taart en de verstreken tijd.

Dit orde scheppend kenmerk van breuk krijgt nog een extra dimensie bij verdeelsituaties. Zo brengt de breuk $\frac{3}{4}$ bijvoorbeeld de volgende verdeelsituaties met elkaar in verband:

pannekoeken	3	6	9	12	15	
kinderen	4	8	12	16	20	

In eerste instantie komt in $\frac{3}{4}$ de verhoudingsconstante tussen (aantal) pannekoeken en (aantal) kinderen tot uitdrukking. Als de beschreven verdeelsituaties echter omgezet worden in (voltrokken) verdelingen, blijken de verschillende uitkomsten onder andere door middel van $\frac{3}{4}$ beschreven te kunnen worden. Wanneer de geschetste verdeelsituaties en te voltrekken verdelingen zich afspe-len binnen de context van een pannekoekenrestaurant dan blijken de daarin te onderscheiden specifieke contexten mede aanleiding te kunnen geven tot gedif-ferentierde beschrijvingen, verband houdende met gelijkwaardigheid.

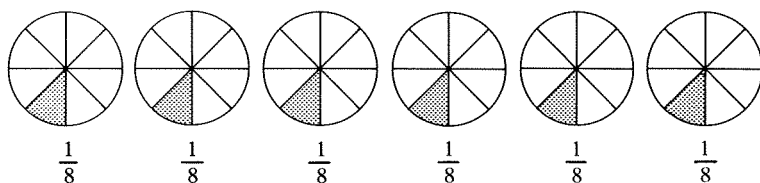
Bijvoorbeeld:

- vier kinderen aan één tafeltje,
drie pannekoeken,
elk krijgt $\frac{3}{4}$ pannekoek.
- acht kinderen aan twee tafeltjes van vier,
drie pannekoeken aan beide tafeltjes,
elk krijgt $\frac{3}{4}$ pannekoek,

maar ook:

- acht kinderen krijgen zes pannekoeken.

Stel, het bakken vlot niet erg en het is druk. De pannekoeken worden achter-eenvolgens opgediend en gedeeld.¹⁵⁾ Ieder krijgt dus $\frac{6}{8}$ pannekoek.



Vervolgens worden $\frac{3}{4}$ (pannekoek) en $\frac{6}{8}$ (pannekoek) met elkaar in verband gebracht.

Kenmerkend voor de geschetste benadering is, dat de breuk als verhoudings-waarde voor een klasse van gelijkwaardige verhoudingen en breuken vanaf het prilste begin, wanneer met de verkenning van verdeelsituaties begonnen wordt, in dit materiaal besloten ligt. Daarmee wordt aan gelijkwaardigheid volledig recht gedaan. Algoritmische behandeling vormt het sluitstuk en staat terecht niet aan het begin.

Is het aantal pannekoeken groter dan het aantal kinderen, dan doen zich breu-ken in gemengde getallen eveneens van meet af aan voor.

Bijvoorbeeld: $\frac{3}{2}$ of $1\frac{1}{2}$ 'scheert' de volgende verdeelsituaties over één kam.

pannekoeken	3	6	9	12	15	
kinderen	2	4	6	8	10	

Het klassieke ‘helen uithalen’ bijvoorbeeld is dan van meet af aan in de probleemsituaties ingebed en kan daaraan, op grond van het voortschrijden in het mathematiseren, ontlokt worden.

Op de kwestie van het vergelijken en ordenen gingen we reeds in.¹⁶⁾

3.3 Bewerkingen

Davydov en Tsvetkovic noemden gelijkwaardigheid van breuken dé basiseigenschap van het breukrekenen.¹⁷⁾ Zowel bij het optellen, aftrekken als delen speelt gelijkwaardigheid een essentiële rol, of kan dit het geval zijn.¹⁸⁾ Alleen de bewerking vermenigvuldigen vormt hierop een uitzondering. De wijze waarop door toepassing van gelijkwaardigheid van breuken, voortkomend uit gelijkwaardige verdeelsituaties, de weg geëffend kan worden naar het algoritmische aftrekken en optellen van breuken, wordt in het volgende hoofdstuk in alle uitvoerigheid uiteengezet. Het uitvoeren van een deling met breuken kan geschieden door de betrokken breuken eerst in daarmee gelijkwaardige breuken met dezelfde noemer om te zetten, bijvoorbeeld: $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} \rightarrow \frac{3}{6} : \frac{2}{6}$, waarna eventueel met visuele steun wordt vastgesteld ‘hoeveel maal’ het ‘deeltal’ in de ‘deler’ bevat is.¹⁹⁾

4 OVER DE ERVARINGEN MET BREUKEN VAN DE LEERLINGEN BIJ DE AANVANG VAN HET ONTWIKKELINGSONDERZOEK

4.1 Inleiding en overzicht

Het voltrekken van breukverwekkende activiteiten, zoals het eerlijk verdelen in verdeelsituaties, kan nogal wat teweeg brengen, namelijk:

- de vorming van het breukbegrip;
- de ontwikkeling en toepassing van een breukentaal, voor de beschrijving van dergelijke activiteiten naar proces en uitkomst;
- het doen ontstaan van noties voor de bewerkingen met breuken, mede op grond van verschillende (premathematische) toegangen²⁰⁾;
- modelvorming.

Eén en ander kan zich voltrekken in betekenisvolle samenhang. In de tot nu toe gegeven voorbeelden werd bedoelde samenhang van de genoemde aspecten geïllustreerd.

De beschrijving van de ‘beginsituatie’ van de leerlingen, die aan het onderzoek deelnamen, geeft opnieuw aanleiding tot het schetsen van voorbeelden. De ver-

schillende aspecten voor het breukenonderwijs, die inmiddels onderscheiden werden, zullen opnieuw geïllustreerd worden. Een uitvoeriger beschrijving van de ervaringen met breuken van de leerlingen, die aan het onderzoek deelnamen, volgt nu.

Eerst geven we een globaal overzicht van het gehele (breuken-)programma, dat de leerlingen voorafgaande aan het onderzoek, volgden. De gedeelten daarvan, die uitgangspunten vormden voor de te ontwikkelen deelleergang, worden vervolgens gedetailleerder beschreven.²¹⁾ In het globaal totaaloverzicht vooraf worden bovendien de dwarsverbindingen met verwante wiskundige gebieden in het curriculum aangegeven.

Bij wijze van afsluiting vatten we de ervaringen en bekwaamheden van de leerlingen op het gebied van de breuken nog eens in globale termen samen.

Bij de beschrijving van het verloop van het ontwikkelingsonderzoek zal blijken, hoe de 'beginsituatie'²²⁾ van de leerlingen geen invariant kenmerk is. In plaats van op de beginsituatie te letten, hebben wij gepoogd ons te richten op de retentie van het inzicht bij de leerlingen²³⁾, althans in de opbouw van de deelleergang, waarop het te beschrijven ontwikkelingsonderzoek zich richtte, is getracht dit te realiseren. In het 'open houden' van de bron van het breukbegrip, namelijk het eerlijk verdelen, waarop de algoritme-deelleergang gegrond is, komt dit tot uitdrukking. Bovendien worden de middelen, die bij het mathematiseren van verdeelsituaties ontwikkeld zijn, opnieuw toegepast.

4.2 Ervaringen met breuken van de leerlingen in het onderzoek

Globaal overzicht

Teneinde aan de nodige voorwaarden te voldoen om tot het algoritmiseren van de bewerkingen met breuken te kunnen overgaan, werd een aantal onderwijsleerpakketten ontwikkeld. Sommige onderdelen van het te geven globaal overzicht worden met de titels van dergelijke pakketten aangeduid.

Verdelen en gelijkwaardigheid

De voorgestelde activiteiten zijn bedoeld om de leerlingen ervan te overtuigen, dat breukverwekkend eerlijk verdelen modelmatig verdelen is. De activiteiten richten zich tevens op de 'definiëring' van gelijkwaardigheid. Mogelijke misverstanden ten aanzien daarvan worden uit de weg geruimd. Er is tevens ruim aandacht voor de verscheidenheid aan beschrijvingsmogelijkheden, waarbij de omgangstaal het uitgangspunt vormt.²⁵⁾ Op dit onderdeel van het programma komen we nog uitvoeriger terug.

Stroken verdelen

Opnieuw aandacht voor het voltrekken van verdelingen en het beschrijven van proces en uitkomst met beschikbare breukwoorden als 'de helft', 'half' en 'kwart'. De activiteiten waren vooral ook bedoeld om de technische vaardigheid in het uitvoeren van verdeeltaken te verhogen. Stroken (papier) vormden daarbij het 'verdeelmateriaal'. De strook stond onder meer model voor 'passende'

zaken uit het leven van alledag, zoals tandpasta-tubes. Bewerkingen met breuken speelden (impliciet) hun rol door de verscheidenheid aan verdeel- en beschrijvingsmogelijkheden bij de meeste van de te verrichten werkzaamheden.

In termen van breuken samengevat, ging het om:

- vouwen in vieren:
 - de helft van de helft;
 - de helft van een halve strook;
 - halveren en nog eens halveren;
 - een kwart strook, het vierde deel; $\frac{1}{4}$ strook;
- het gevarieerd beschrijven van het resterende-deel van de strook (complementbepaling); bij $\frac{1}{4}$ strook rest $\frac{3}{4}$ strook, door de leerlingen onder meer beschreven als:
 - de helft en een kwart ($\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$);
 - drie keer een kwart ($3 \times \frac{1}{4}$);
 - een hele min een kwart ($1 - \frac{1}{4}$);
 - een hele en een kwart min de helft ($1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$);
 - een half en een half min een kwart ($\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$);
- idem met vouwen in drieën, vijven, achten, etc.:
 - beschrijvingen;
 - complementbepaling;
- het bepalen van de hele strook als een deel gegeven is:
 - voorspellen, uitvoeren en beschrijven;
- idem met getekende stroken, ook met ‘delen’ > 1 , bijvoorbeeld de opdracht:



Hier ligt $1\frac{1}{4}$ strook; teken waar de stukken aan elkaar liggen;

- het toepassen van de strook als model.

De leerlingen werkten met stroken van variabele lengte, in verband met het relatieve van ‘breuk’. Bij ‘lastige’ verdelingen, zoals verdelen in vijven, maakten nogal wat leerlingen gebruik van hun liniaal. Daardoor werden breuken en kommabreuken met elkaar in verband gebracht, waarbij dus lengtemeting bemiddelde.²⁶⁾

Bijvoorbeeld: een strook van 32 cm verdelen in vijven: eerst ieder deel 6 cm, dan nog 2 cm verdelen in vijven, $2 \text{ cm} = 20 \text{ mm}$, dus elk stukje nog 4 mm erbij. Elk deel wordt dus 6 cm en 4 mm of 6,4 cm.

Voortgezette ervaringen met (eerlijk) verdelen

Bij de beschrijving van de breuk in het bredere perspectief van het gehele wiskunde-onderwijs (voor de basisschool) werden onder andere maatverfijningen bij het meten en kansverdelingen met eerlijk verdelen in verband gebracht. Zonder dat naar volledigheid gestreefd is, worden nu vervolg-ervaringen geschetst. Hoewel dit door het globale beschrijvingsniveau niet steeds vermeld zal en kan worden, ligt bij de gesuggereerde activiteiten het accent steeds op een

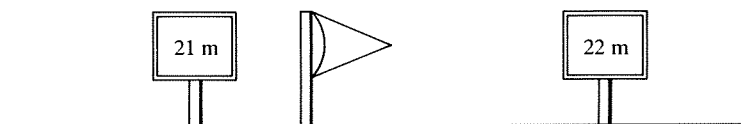
veelsporige benadering van het breukbegrip in alle onderscheiden aspecten, op de ontwikkeling van een breukentaalapparaat, op modelvorming, etc.²⁷⁾

In verband met het maatverfijnen bij het meten, onder andere resulterend in beschrijvingen middels breuken in maatgetallen, kwamen nogal wat onderwerpen aan de orde. Bijvoorbeeld het *klokkijken* onderging binnen dit kader een nauwgezette analyse²⁸⁾, onder andere gericht op het aflezen van tijdmeetschalen en het daarbij vaststellen van breuken in maatgetallen. De manier waarop de uurwijzer²⁹⁾ op zeker moment een eenheid op de wijzerplaat verdeelt, vormt al een vrij nauwkeurige aanwijzing voor het juiste tijdstip. Bovendien hangt de stand van de minutenwijzer ermee samen, respectievelijk is eruit afleidbaar. Als de uurwijzer een kwart van de eenheid, zeg tussen zes en zeven is 'opgeschoven', heeft de minutenwijzer juist het $\frac{1}{4}$ deel van een nieuwe, volle rondgang 'afgelegd': het is kwart over zes.

In de geschetste functionele samenhang van verschijnselen is een voorbeeld van tweeschaligheid vervat, dat wellicht paradigmatisch genoemd kan worden.³⁰⁾ De gestage rondgang van de wijzers vraagt als het ware om het 'afrollen' van de wijzerplaat in de tijdlijn. Het niet aflatende voortschrijden van de tijd wordt erin zichtbaar gemaakt. Het verband tussen het circulaire van de wijzerplaat en het lineaire van de tijdlijn (respectievelijk getallenlijn), van belang voor de modelvorming, wordt erdoor gelegd.

Tevens is er ruime gelegenheid om iets aan 'taal en redeneren' of 'taal en logica' te doen³¹⁾ door de leerlingen allerlei uitspraken, verband houdende met tijd, op de tijdlijn te laten visualiseren en omgekeerd passende uitspraken te laten bedenken bij gegeven visualisering op de tijdlijn. De activiteiten richten zich dan vooral op het verscherpen van noties bij leerlingen omtrent begrippen als 'klokslag', 'precies', 'nauwelijks', 'ruim', 'steeds', 'soms', 'zo nu en dan', etc. hetgeen eveneens als een aspect van de veelsporige benadering beschouwd kan worden ('onnauwkeurigheid' en 'benaderen').

Breuken in meetgetallen doen zich ook voor in de sport, bijvoorbeeld de atletiek. Met het *lengtemeten* in een bemiddelende rol kunnen gewone breuken en kommabreuken met elkaar in verband gebracht worden. Illustratief voor de activiteiten, welke binnen dit kader verricht worden, is het volgende voorbeeld. Een kogelstoter stootte de kogel zo ver hij kon.³²⁾ Er werd een vlaggetje gezet op de plek waar de kogel terecht kwam:



Dit resultaat werd op verschillende manieren beschreven:

- ruim 21 meter, meer dan 21 meter, maar minder dan 22 meter;
- ongeveer 21 meter en een kwart meter, $21\frac{1}{4}$ meter;
- 21 meter en 25 centimeter, 21,25 meter.

Breuken in maatgetallen waren er ook voor andere grootheden dan lengte, bijvoorbeeld voor *inhoud*.³³⁾ Verdeelexperimenten van hoeveelheden water over een aantal glazen (respectievelijk personen) werden daadwerkelijk uitgevoerd. Verdeeltaken werden zowel mentaal als in feitelijk experiment verricht, resultaten voorspeld en vastgelegd en vervolgens beschreven.

Het vergelijken en ordenen van verdeelsituaties en hun uitkomsten deed zich in verschillende stadia van het mathematiseringsproces voor.³⁴⁾ Eerst gebeurde dit op grond van kwalitatieve overwegingen, waarna voortschrijdende numerieke precisering werd nagestreefd. De leerlingen werd eveneens gevraagd bepaalde situaties door middel van een 'tekening' (naar keuze) te visualiseren. Vervolgens werden 'tekeningen' op hun geschiktheid beschouwd en voorkeuren voor bepaalde oplossingen uitgesproken met het oog op modelvorming. Vooral het oppervlaktemodel bleek een vrij algemeen toegepast visualiseringsmiddel.

Samengevat in termen van breuken, kenmerkten de activiteiten zich door:

- het bedenken van een verdeelsituatie bij de uitkomst van een verdeling;
- het vaststellen van breuken in verhoudings- en breekrelaties;
- complementbepaling en beschrijving;
- gevarieerde beschrijvingen van situaties in breukentaal;
- het visualiseren en beschrijven van herhaald halveren;
- het ordenen van verdeelsituaties door te voorspellen, dat ze resulteren in 'meer dan...' 'minder dan...';
- de 'tafel van $\frac{1}{2}$ ' op de getallenlijn, uitgeschreven;
- aandacht voor modelontwikkeling door het visualiseren van betrokken verdeelsituaties op hun uitkomsten in 'tekeningen' naar keuze;
- het vergelijken van verdeelsituaties naar hun uitkomst: twee keer zoveel; (een) half (keer) zoveel;

Voorgaande werkzaamheden bedoelden vooral ook dienstbaar te zijn aan:

- de nadere vorming van het begrip inhoud;
- het schatten van inhouden;
- het verrichten van inhoudsmetingen.

Overige ervaringen van de leerlingen

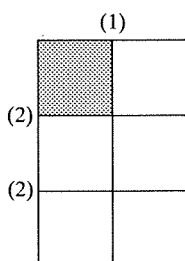
Het eerlijk verdelen deed zich voor in een veelheid van situaties. Volledigheid in de beschrijving van de aanloop tot het algoritmiseren zou zeker niet verhelderend werken. We volstaan daarom met nog enkele zaken kort te noemen, zoals het verdelen van A4-blaadjes, dropveters, vlakdelen, pannekoeken, afstanden. Steeds opnieuw werden accenten geplaatst bij de vorming van het breukbegrip, verscherping van de noties die de leerlingen ontwikkelden voor de bewerkingen met breuken, de taal, de modelvorming etc. in zinvolle samenhang, onder respectering van de uitgangspunten, zoals eerder uiteengezet. De activiteiten waren dus onder andere steeds zoveel mogelijk ingebed in zinvolle en betekenisverlenende contexten.³⁵⁾

Bij de verdeling van velletjes A4-papier waren de activiteiten mede gericht op de vorming van het oppervlaktebegrip. Dat verdeelproces en verdeeluitkomst, beschrijving in breukentaal, het reeds 'meespelen' van de bewerkingen bij de

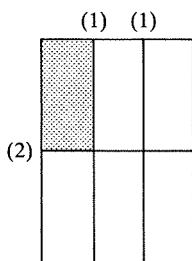
begripsvorming, de eigenschappen van bewerkingen en de modelvorming ten nauwste samenhangen bij onze benadering, wordt in het volgende voorbeeld nog eens tot uitdrukking gebracht.

Het tweemaal verdelen van een vel A4-papier kan ook bij hetzelfde resultaat tot verschillende beschrijvingen in breukentaal leiden, afhankelijk van de volgorde van de handelingen, namelijk:

- hier is 'het derde deel van de helft' bepaald ($\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$)



- hier is 'de helft van het derde deel' bepaald ($\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$).



Bij dergelijke activiteiten doen zich ook vragen voor als: Is twee $\frac{1}{3}$ -vellen, $\frac{2}{3}$ -vel en $\frac{1}{3}$ van twee vellen hetzelfde?

Doordat in twee dimensies verdeeld wordt, bieden dergelijke werkzaamheden een goede gelegenheid het vermenigvuldigen van breuken en oppervlakte met elkaar in verband te brengen.

In het naast elkaar vergelijken van deel en eenheid, kan de breuk in de verhoudingsrelatie of als inverse van de vermenigvuldigoperator als beschrijver worden toegepast, afhankelijk van het ingenomen standpunt.

In beide gevallen berusten de beschrijvingen op oppervlakte meten met natuurlijke maat.

Met het oog op de retentie van het inzicht en het voortschrijden in het mathematiseren, werden soortgelijke activiteiten herhaald. In latere instantie vond wel verwerking op een meer gevorderd niveau van mathematisering plaats, bijvoorbeeld door toepassing van 'nieuwe', inmiddels beschikbaar gekomen mathematiseringsmiddelen, zoals lineaire grafiek met tabel in plaats van tweeschalige getallenlijn en/of tabel.³⁶⁾

Nog andere invalshoeken voor breuken

In par. 3.2 (pag. 39 en 40) werden het samenstellen van mengsels (limonade maken) en het vergroten en verkleinen reeds beschreven als bronnen voor het breukbegrip en breuken en machientjes.

Het reflecteren op de aard van de beweging bij het beklimmen van spiltrappen was eveneens zo'n bron voor het breukbegrip, breukentaal en modelvorming. Tussentijds werden wat afzonderlijke probleempjes beschouwd, waarin het geleerde kon worden toegepast.

Verhoudingen en breuken bij bewegingen

Om de ervaringen, die de leerlingen (bij herhaling) opdeden, voorafgaande aan de ontwikkeling van de deelleergang voor het algoritmisch aftrekken en optellen van breuken nogmaals te duiden, gaan we op één pakket nog wat uitvoeriger in.

Het betreft '*Van klokken, bussen en kaarsen*'.

In dit pakket zijn de activiteiten er vooral ook op gericht de zaken, die in verband met breuken en verhoudingen aan de orde zijn geweest, nog eens te herhalen. Bovendien worden de modellen en beschrijvingsmiddelen, die inmiddels beschikbaar gekomen zijn, nogmaals bevestigd met het oog op verhoging van de vaardigheid in het toepassen ervan.

De tijd kan een bemiddelende rol spelen bij het verkennen van bepaalde verschijnselen in de realiteit. De 'snelheid' van opbrandende kaarsen kan bijvoorbeeld vergeleken worden, wanneer men de brandtijden in de beschouwingen betreft.

In het voorgaande onderwijs hebben de leerlingen reeds allerlei situaties en verschijnselen met breuken en verhoudingen verkend.

Daarbij werden onder meer accenten geplaatst bij *modelvorming en modelgebruik*, bijvoorbeeld:

- de verhoudingstabel;
- de (tweeschalige) getallenlijn;
- het oppervlaktemodel;
- de isomorfie tussen het cirkulaire model van de klok en het lineaire model van de tijdlijn.

Nu worden deze modellen als het ware nogmaals als zodanig bevestigd.

Opnieuw wordt de wijzerplaat afgerold in de tijdlijn om de zojuist genoemde isomorfie (nogmaals) bewust te maken bij de leerlingen.

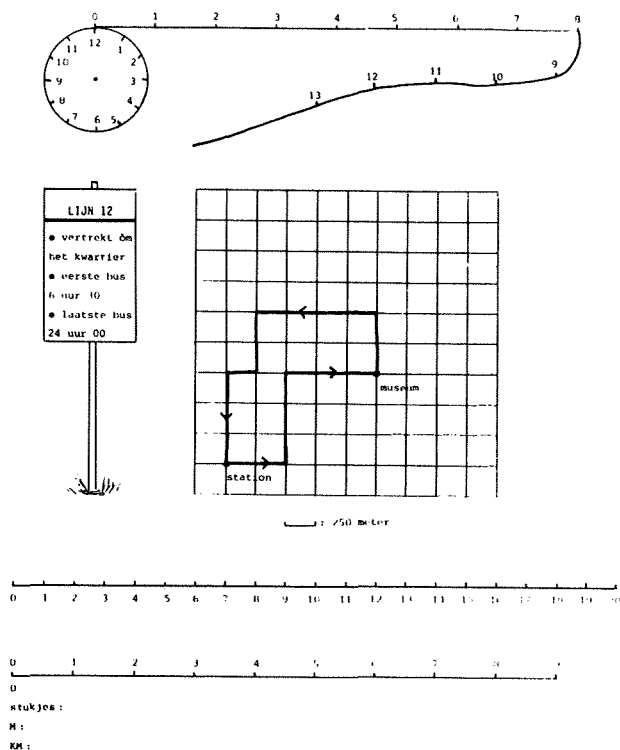
Een ander belangrijk model was de *tweeschalige getallenlijn*.

Een voorbeeld: de lengte van een busroute (of delen daarvan) wordt bepaald in roosterafstand en op basis van een gegeven visuele schaal bovendien in meters en kilometers.

Voorbeeld:

MET DE BUS (1)

Werkblad 3



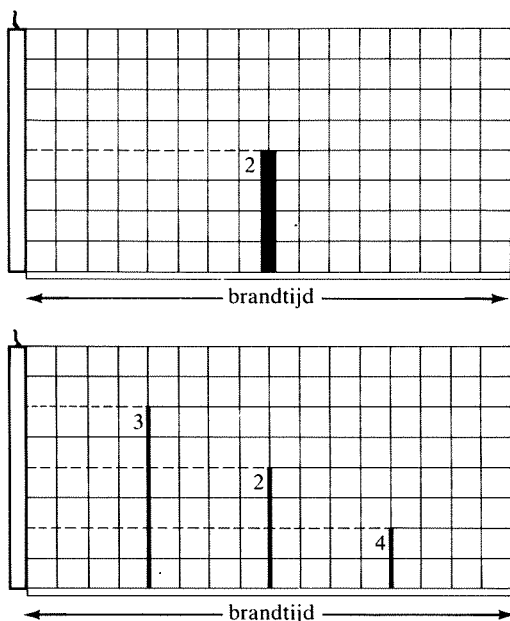
In *verhoudingstabellen* wordt (eventueel) de bijbehorende getalleninformatie opgeslagen, bijvoorbeeld:

stukjes	1	2	3	4	5
M	250	500	750	1000	1250
KM	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4} = 1$	$\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$
	0,25	0,5	0,75	1	1,25

De *strook* komt eveneens voor in het pakket in de gedaante van kaars en brand-tijd.

En tenslotte de (*lineaire*) grafiek om bijvoorbeeld het verband tussen het opbranden van (delen van) de kaars en het verstrijken van (delen) van de brandtijd naar rato zichtbaar te maken.

Voorbeeld:



2 als de helft van de brandtijd om is, is ...

3 als een kwart van de brandtijd om is, is ...

4 als driekwart van de kaars opgebrand is, dan ...

Vooral het gebruik van de verhoudingstabel is uiterst belangrijk. Hij vormt de verbindende schakel tussen verschillende modellen, zoals bijvoorbeeld tweeschalige getallenlijn en lineaire grafiek.³⁷⁾

Behalve aan het werken met modellen, werd in het pakket aandacht besteed aan het werken in contexten, de taalontwikkeling, enkele aspecten van 'breuk', zoals complement, gelijkwaardigheid, het opereren met breuken en de relatie tussen breuken en verhoudingen.

Ook in verband met deze punten maken we enkele korte notities.

Globaal gesproken werden aan *contexten* de volgende functies toegekend:

- ze verschaffen betekenis aan nieuw te vormen begrippen; dergelijke contexten worden gekozen om verschijnselen te verkennen, die door het betrokken wiskundige begrip geordend worden. Het 'eerlijk verdelen' is zo'n context voor de vorming van het breukbegrip;
- in contexten kunnen ook toepassingssituaties worden ingebed. Leerlingen, die met betrekking tot een bepaald onderwerp over de vereiste begrippen en vaardigheden beschikken, leren die toe te passen.

Men zou kunnen stellen, dat het beschouwde pakket met betrekking tot contexten een soort ‘tussenfunctie’ vervult. Modellen, die in eerdere instantie als verschijnsel verkend zijn en als zodanig hun intrede hebben gedaan, worden als het ware nogmaals bevestigd. Dit geldt voor alle zojuist opgesomde modellen.

De *breukentaal* draagt, zoals we al eerder gezien hebben, de ruis van betekenis binnen het tellen en rekenen met natuurlijke getallen. Dat geldt voor de gebruikte cijfersymbolen (1, 2, 3, ...), voor de breuknamen als ‘derde’, ‘vierde’, enz. (rangtelwoorden) en de bewerkingen (optellen, +, etc.).

Het is daarom, dat een taal voor breuken met zorg ontwikkeld dient te worden. Ook deze keer is er weer ruimte tot terugval op formuleringen als:

- ‘de helft van de helft’;
- ‘een half keer een kwart’.

Vanuit dergelijke kinderlijke formuleringen met niet belaste breukwoorden (als half, helft en kwart), die juist bij tijd, tijdsaanduidingen en klokkijsen zo’n belangrijke rol vervullen, krijgen aanduidingen als ‘een vierde’ ($\frac{1}{4}$) en ‘een achtste’ ($\frac{1}{8}$) hun geëigende betekenis.

Breuken en verhoudingen:

- *complement*: ‘deel van’ aangevuld tot het geheel, bijvoorbeeld tot uitdrukking komend in delen van kaarsen die zijn opgebrand en de delen die nog resten of de delen, die (stads-)bussen op hun roete hebben aangelegd en de resterende delen van die roetes.
- *gelijkwaardigheid*: als het $\frac{1}{8}$ deel van een kaars opbrandt in $\frac{3}{4}$ uur, dan brandt $\frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8} \dots$ respectievelijk op in $2 \times \frac{3}{4}$ uur, $3 \times \frac{3}{4}$ uur, $4 \times \frac{3}{4}$ uur, ...
Uitgaande van de totale brandtijd (zes uren) blijkt de helft van de kaars na drie uren te zijn opgebrand, maar ook $\frac{4}{8}$ deel van de kaars, zoals eerder werd vastgesteld. De gelijkwaardigheid van delen van bijvoorbeeld een kaars wordt dus niet *algoritmisch* vastgesteld ($\frac{1}{2} = \frac{4 \times \frac{1}{2}}{4 \times \frac{1}{2}} = \frac{4}{8}$), maar op grond van de betekenis die uitkomsten krijgen door eenzelfde proces vanuit verschillende invalshoeken te bekijken;³⁸⁾
- *het opereren met breuken*: bijvoorbeeld het vermenigvuldigen van een breuk met een natuurlijk getal (zie vorig punt). In het algemeen betreft het opereren met breuken in dit stadium van het programma het betekenisvol opereren, dat inherent is aan het voltrekken van breukenveroorzakende processen (bijvoorbeeld: in herhaald halveren ligt het herhaald vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$ besloten).

Vanuit deze optiek worden ook verbindingen met de kommabreuken gelegd (bijvoorbeeld bij geld en lengtemeting).

Bij de analyse van het eerlijk delen werd beschreven, hoe het relatieve van ‘breuk’ berust op de *verhouding* ‘aantal personen–te verdelen geheel’ in een verdeelsituatie. Vanaf het prilste begin is er bij de begripsvorming dus reeds een nauwe samenhang tussen beide begrippen. Bij het vergelijken van brandsnelhe-

den van kaarsen werd homogeniteit verondersteld, dat wil zeggen gelijke delen van éénzelfde kaars hebben gelijke brandtijden en evenzo gelijke delen van op het oog identieke kaarsen. Er is bij het opbranden van een kaars in relatie tot de benodigde brandtijd verhoudingsconstantie in het spel. De verhoudingstabel leent zich ervoor om de betreffende getalgegevens overzichtelijk op te slaan. In het proces, dat die getalgegevens voortbrengt, is een belangrijke functie voor de breuken weggelegd; is de kaars op de helft, dan is ook de helft van de brandtijd verstreken, etc.:

deel van de kaars op	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$ of $\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$ of $\frac{1}{2}$
deel van de brandtijd op	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$ of $\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$ of $\frac{1}{2}$
brandtijd	$\frac{3}{4}$ uur	$1\frac{1}{2}$ uur	$2\frac{1}{4}$ uur	3 uur

In de relatie tussen breuken en verhoudingen gaat het dus vooral om de functionele rol van de breuken bij het getalsmatig beschrijven van processen of verschijnselen, waarbij twee of meer in relatie tot elkaar veranderende grootheden in beschouwing worden genomen. Met andere woorden: het algoritmiseren van verhoudingen vormt – ook op het niveau van de leerlingen – een belangrijk toepassingsgebied voor de breuken.³⁹⁾

4.3 Eerlijk verdelen en gelijkwaardigheid; aanloop tot de deelleergang

Voorgaande beschrijving van de ervaringen met breuken van leerlingen in het onderzoek geeft een vrij volledig beeld van die ervaringen. Om te voorkomen, dat we al te zeer in herhalingen treden, maken we bij het overzicht van de activiteiten, waarop de te ontwikkelen deelleergang zal gaan voortborduren, zoveel mogelijk gebruik van verwijzingen.

Verdelen en gelijkwaardigheid

In par. 3.2 (pag. 56) werden de essenties van ‘verdelen en gelijkwaardigheid’ reeds (pag. 58) grondig geschetst. We vatten de bedoelingen daarom puntsgewijs samen:

- het ontwikkelen van criteria voor breukverwekkend eerlijk verdelen;
- beklemtoning van gelijkwaardigheid van delen en eenheden;
- het gevarieerd beschrijven van verdelingen in breukentaal;
- het verdelen van continue en discrete hoeveelheden;
- verdeelsituaties ordenen door de uitkomsten te vergelijken;
- aandacht voor gemengde getallen, die het resultaat van een (ver-)deling beschrijven;
- allerlei verdelingen voltrekken, die breuken veroorzaken;

- verdeelsituaties bedenken bij een gegeven uitkomst;
- het schematiseren van dergelijke verdeelsituaties in een tabel;
- aandacht voor klassen van (op de uitkomst) gelijkwaardige verdeelsituaties; verhoudingsconstantie.

Ter toelichting op enkele van de opgesomde bedoelingen, nemen we een werkblad met bijbehorende vragen over⁴⁰⁾:

PANNEKOEKEN VERDELEN(2) werkblad 4

1 ▶ 

2 ▶ 

3 ▶ 

4 ▶ 

5 ▶

aantal pannenkoeken							
aantal kinderen							

Elk kind krijgt:

eerste opdracht

- ▶ Vier kinderen delen deze pannenkoek. Laat zien wat elk krijgt. Teken!

▶ Hoe heet zo'n stuk?

tweede opdracht

- ▶ Deze kinderen krijgen ook allemaal een kwart pannenkoek.
Hoeveel moeten zij er verdelen?
Teken!

derde opdracht

- ▶ Hoeveel kinderen? (ieder een kwart)

vierde opdracht

- ▶ Hoeveel kinderen? (ieder een kwart)

vijfde opdracht

- ▶ Tabel (denk aan 'tussenwaarden'):

aantal pannenkoeken	1	2	3	4
aantal kinderen	4	8	12	16

- ▶ Elk kind krijgt een kwart pannenkoek.

En als er nu eens ... *kinderen* waren, hoeveel pannenkoeken?
En als er nu eens ... *pannekoeken* waren, hoeveel kinderen?
En als ...?

Uit de gegeven voorbeelden⁴¹⁾ blijkt, dat telkens een nieuwe verdeelsituatie bedacht moet worden, die in de uitkomst gelijkwaardig is met de voorafgaande. Daarmee wordt tegemoet gekomen aan de eerder geuite wenselijkheid van een wijder werkzaam equivalentiebegrip, vergeleken met equivalentie in de gangbare benadering van de breuken op grond van eerlijk verdelen.⁴²⁾

Een volgende stap in de didactische sequentie na voorgaande ervaringen, is de leerlingen de volledige verdeelsituaties te laten bedenken, uitgaande van de gegeven uitkomst(en) ervan.

Breuken in de breekrelatie, gematerialiseerd in passende pannekoekdelen, krijgen zo het karakter van ordescheppers in verdeelsituaties: klassen van in de uitkomst gelijkwaardige verdeelsituaties worden erdoor op dezelfde noemer gezet.

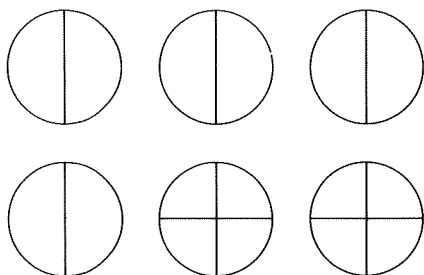
Een voorbeeld:



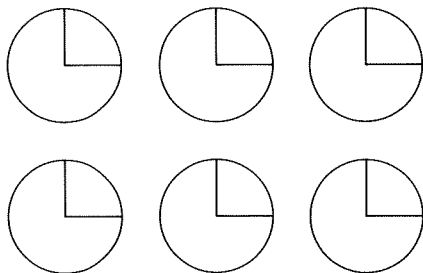
Stel, dat dit meisje nog niets opgegeten heeft. Ze kreeg dus geen hele pannekoek. Hoeveel kreeg zij?

Stel, er zijn meer kinderen. Zij verdelen pannekoeken. Elk krijgt zoveel als het meisje op het plaatje. Hoeveel kinderen kunnen er geweest zijn en hoeveel pannekoeken verdeelden zij?

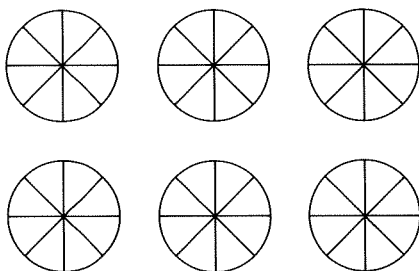
De leerlingen zullen gemakkelijk verdeelsituaties bedenken.⁴³⁾ Drie pannekoeken – vier kinderen. De verdeling wordt vrijwel zeker gevarieerd voltrokken en beschreven.⁴⁴⁾ Ieder kind krijgt $\frac{3}{4}$ pannekoek. Met drie pannekoeken erbij kunnen weer vier nieuwe kinderen van eenzelfde deel voorzien worden. Opnieuw zal naar alle waarschijnlijkheid de verdeeltaak gevarieerd uitgevoerd en overeenkomstig beschreven worden, bijvoorbeeld:



Elk krijgt een half en een kwart ($\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$) of $\frac{3}{4}$ pannekoek.



Zes kinderen krijgen 'een hele min een kwart' ($1 - \frac{1}{4}$) en twee kinderen 'een kwart en een kwart en een kwart' ($\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$) of 'drie keer een kwart' ($3 \times \frac{1}{4}$).



Elk kind krijgt 'een achtste en een achtste en een achtste en een achtste en een achtste en een achtste' ($\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$) of 'zes keer een achtste' ($6 \times \frac{1}{8}$) of 'zes achtste' ($\frac{6}{8}$) pannenkoek.

Wanneer eenmaal voldoende verdeelsituaties bedacht zijn, worden ze 'samengebracht' in een tabel:

pannekoeken	3	6	9	
kinderen	4	8	12	

Al deze situaties staan voor 'elk krijgt $\frac{3}{4}$ pannenkoek' want dat was immers het uitgangspunt?

Het telkens opnieuw exploreren van elke volgende situatie – hetgeen inhoudt het uitvoeren van de verdeeltaak en het vaststellen van een passende beschrijving – is noodzakelijk in verband met:

- begrip voor gelijkwaardigheid van breuken;⁴⁵⁾
- het in verband brengen van de achtereenvolgende verdeelsituaties met hun respectievelijke uitkomsten; ingeval van ons voorbeeld:

P	6	→ ieder krijgt $\frac{6}{8}$ pannenkoek (of $\frac{3}{4}$)
K	8	
P	9	→ ieder krijgt $\frac{9}{12}$ pannenkoek (of $\frac{3}{4}$)
K	12	

Het laatste is onder meer nodig, omdat het numeriek beschrijven van verdeelsituaties in een verhoudingstabel het algoritmiseren van de verhoudingen in de hand werkt en ongewenst algoritmisch gedrag bij de leerlingen kan uitlokken. De leerlingen herkennen bijvoorbeeld al gauw de tafels van vermenigvuldiging bij het invullen van een verhoudingstabel. Hierdoor wordt de aandacht van de verdeelsituaties en hun uitkomsten afgeleid. Dit is ongewenst, omdat het niet gaat om afzonderlijke rijen tafelprodukten, doch om de verhoudingsconstantie van aantallen pannenkoeken en kinderen. Die relatie mag niet uit het oog verloren worden, omdat het relatieve van de breuk er mede door gemotiveerd wordt.⁴⁶⁾ Het geheel is 'doorspekt' met ordeningsvragen in de geest, zoals eerder beschreven werd.⁴⁷⁾

Wanneer – om nog even bij ons laatste voorbeeld te blijven – een tabel met enkele verdeelsituaties voor 'ieder krijgt $\frac{3}{4}$ pannenkoek' gemaakt is, kan de vraag opgeworpen worden of dat nu ook geldt voor 20 kinderen, die 15 pannenkoeken verdelen, of als 20 pannenkoeken onder 24 kinderen verdeeld worden.

5 SAMENVATTING

In de loop van de voorbereiding op de te ontwikkelen deelleergang, verwierf 'breuk' voor de leerlingen een dubbele betekenis, verwijzend naar zowel verdeelsituatie als uitkomst ervan, bij voltrekking van de verdeeltaak.

Om volledig recht te doen aan het breukbegrip werd dit bovendien vanuit een veelheid van invalshoeken op de onderscheiden aspecten verkend. De benadering van het breukbegrip was veelsporig. Eerlijk verdelen, meten, vergroten en verkleinen, mengen, werden onder meer als breukverwekkende processen beschouwd, als zodanig gedifferentieerd voltrokken en beschreven. Op grond hiervan werden de nodige dwarsverbindingen (reeds op het niveau van de macro-uitlijning) met andere onderdelen van het curriculum gelegd. Genoemde gedifferentieerde beschrijving stond in dienst van het met zorg ontwikkelen van een breukentaal. Deze zorg was mede ingegeven doordat de gebruikelijke (cijfer-)symbolen en breuknamen bij het rekenen met natuurlijke getallen reeds met een bepaalde betekenis 'belast' werden.

Vanuit de realiteit van en voor kinderen werd steeds gepoogd een weg te banen naar de wiskunde. Het identificeren van de wiskundige context in een probleemveld en het voortgaan in de wiskundige bewerking ervan, werd mathematiseren genoemd. Daartoe werden juist ook voor het zo specifieke (en voor kinderen lastige) gebied van de breuken, de nodige wiskundige werktuigen, modellen, ontwikkeld.

In dit geval hadden de modellen tot nu toe een driedelige functie, namelijk het ondersteunen van de begripsvorming, het dienst doen bij het verkennen van eigenschappen van bewerkingen, en het steun verlenen bij de verwerking van toepassingssituaties (denkmodellen). Zo deden de leerlingen ervaringen op met verwante modellen als (tweeschalige) getallenlijn en lineaire grafiek, met de verhoudingstabel daarbij in een bemiddelende rol. Klok en tijdlijn werden met elkaar in verband gebracht door de wijzerplaat als tijdlijn af te rollen. Bij het afrollen werd de tweeschaligheid van de klok op de tijdlijn overgedragen, een voorbeeld van tweeschaligheid met de kracht van een paradigma. Tevens fungeerde de wijzerplaat als dynamisch model voor de pannekoek. Continue en discrete hoeveelheden van allerlei aard werden door de leerlingen bovendien 'verschraald' weergegeven door middel van strook en rechthoek (oppervlakte-model). Op de vierde onderscheiden functie van modellen⁴⁸, namelijk het ondersteunen van het algoritmiseren van de bewerkingen, gaan we in het volgende hoofdstuk nog uitvoerig in.

In het voltrekken van breukverwekkende processen en het passend beschrijven daarvan, bleken informele toegangen tot de bewerkingen met breuken vervat. Ook ten aanzien van de bewerkingen met breuken werden dus begripsvormingsprocessen in gang gezet en voltrokken.

Het eerlijk verdelen als meest overtuigende bron voor de breuken kreeg extra accent, omdat verondersteld werd dat de te ontwikkelen deelleergang daarop gegrond zou kunnen worden. De leerlingen deden een schat aan ervaringen op in het exploreren van verdeelsituaties, het voltrekken van verdelingen, het

reflecteren daarop, teneinde een en ander adequaat te kunnen beschrijven. Bij gegeven uitkomsten werden passende verdeelsituaties bedacht. Verdeelsituaties werden op zichzelf vergeleken en naar hun uitkomst. De verhoudingstabel werd veelvuldig toegepast voor de numerieke opslag. In termen van breuken gesteld, speelden in bedoelde verkenning aspecten als breuken > 1 , gelijkwaardigheid en complement steeds mee.

Ziedaar een globale schets van de ervaringen van de leerlingen met breuken aan de 'vooravond' van het onderzoek. Er leken voldoende ingrediënten aangedragen om het vergelijken en ordenen van breuken nog ingrijpender te gaan mathematiseren. Het bepalen van het exacte verschil tussen de uitkomsten van (twee) gegeven verdeelsituaties zou daarbij niet meer uitsluitend op begripsniveau dienen te geschieden, doch meer systematisch, volgens een procedure, die in de loop van de (leer-)tijd tot een algoritme zou kunnen stollen.

V OP WEG NAAR EEN ALGORITME VOOR HET AFTREKKEN (EN OPTELLEN) VAN ONGELIJKNAMIGE BREUKEN; BESCHRIJVING VAN HET ONDERZOEK

1 INLEIDING EN OVERZICHT

In het voorgaande hoofdstuk werd de 'beginsituatie' van de leerlingen uitvoerig geschetst. (Dat we desondanks onvolledig geweest zijn, moge uit het vervolg nog blijken).

We zijn nu toegekomen aan wat *de kern* van deze studie genoemd kan worden, namelijk beschrijving van het ontwikkelingsonderzoek, waarin de beoogde deelleergang ontstond. Het gaat (voorlopig) om onderzoek, dat sterk aan zijn context gebonden is, respectievelijk waardoor de uitkomsten bepaald worden.¹⁾

Het beginnen met een voldoende uitvoerige beschrijving van de context van het onderzoek lijkt daarom op zijn plaats. De aard van de onderzoeksgroep en de kwestie van het onderzoeksdesign worden allereerst geschetst.

Daaraan volgend worden enkele kanttekeningen gemaakt ter zake van de toegepaste methode en de methodologie daarmee verband houdend.

Vervolgens wordt ingegaan op het algoritmiseren van bewerkingen in het reken-wiskunde-onderwijs op de basisschool. We beogen immers een deelleergang te ontwikkelen voor het algoritmiseren van de bewerkingen aftrekken en optellen van ongelijknamige breuken, althans de leerlingen in een langerlopend leerproces daartoe aanzetten aan te reiken, die uiteindelijk tot vaste algoritmische procedures voor de betrokken bewerkingen teruggebracht kunnen worden. Het algoritmiseren zal in verband gebracht worden met de reeds uiteengezette opvattingen omtrent realistisch wiskunde-onderwijs en de rol van het mathematiseren bij de wiskundige bewerking van een (mathematisch) probleemveld.

Dit betekent, dat algoritmiseren vooral beschouwd en geïnterpreteerd zal worden als verticaal mathematiseren, dat wil zeggen, als voortschrijding in het wiskundig verwerkingsproces, waarbij zich onder andere niveauverhogingen kunnen voordoen.²⁾ Bedoelde voortschrijding in het proces kenmerkt zich door steeds efficiënter gebruik van de toegepaste mathematiseringsmiddelen (progressieve schematisering) en het (spontaan) aanbrengen van verkortingen in het geheel van de procedure.

Bij het beschouwen van het algoritmiseren van de bewerkingen met breuken ontkomen we niet aan een verbinding met het algoritmiseren van bewerkingen met natuurlijke getallen met enige historische en leertheoretische kanttekeningen.

Het hoofdbestanddeel van dit hoofdstuk vormt echter de beschrijving van het ontwikkelingsonderzoek. Daarbij zal het accent — in overeenstemming met

onze probleemstelling – liggen op de implicaties, die bepaalde praktische ervaringen in de onderwijsleersituatie, zoals bijvoorbeeld geobserveerde (individuele) leerprocessen hebben voor de sequentering van leerlingenactiviteiten in de te ontwikkelen deelleergang.

In de onderzoeksbeschrijving zal het differentiatie-aspect – zoals al eerder werd aangekondigd – nadrukkelijk worden ‘meegenomen’.

Het besluit van dit hoofdstuk wordt gevormd door een samenvattend overzicht van de essentiële stappen in het leerproces, die uiteindelijk tot een algoritme zullen kunnen stollen.³⁾ Met het oog daarop werden enkele toepassingssituaties verwerkt. Ook hierop zullen we, zowel bij de beschrijving van het onderzoek als bij de aangekondigde samenvattende afronding, in kort bestek ingaan.

2 DE CONTEXT VAN HET ONDERZOEK; NOTITIES OVER ONDERZOEKSGROEP EN DESIGN; ENIGE METHODISCHE EN METHODOLOGISCHE KANTEKEKENINGEN

2.1 De onderzoeksgroep

De onderzoeksgroep werd gevormd door de leerlingen uit het vierde en vijfde leerjaar van de Josephschool te Bussum.⁴⁾ Voor deze omstandigheid zijn verschillende argumenten aan te voeren. De belangrijkste waren:

- de Josephschool was, voortvloeiende uit deelname aan een heroriënteringscursus, volgschool in het Wiskobas-project geworden. Er bestond reeds een als optimaal te omschrijven samenwerkingsrelatie;
- de realistische visie op wiskunde-onderwijs was door het betrokken schoolteam geaccepteerd; met name bij de schoolleider, met wie in dit onderzoek intensief samengewerkt zou gaan worden, had zich de attitude in de praktijk van het onderwijs ten aanzien van leren en onderwijzen, dienovereenkomstig gewijzigd;
- het vernieuwingsproces van het rekenonderwijs⁵⁾ was nog in volle gang. Bij de overgang naar wiskunde-onderwijs in de geest van Wiskobas waren de middenklassen echter om uiteenlopende redenen achtergebleven. Op grond van deze omstandigheid kon er in deze klassen ‘ruimte gemaakt’ worden om ongehinderd te werken aan de ‘beginsituatie’ van de leerlingen, zoals in voorgaand hoofdstuk geschetst;
- bovendien had de schoolleider de verantwoordelijkheid voor het vierde leerjaar, zodat op ieder gewenst moment met ontwikkeling en onderzoek kon worden voortgegaan, zonder dat dit met interne personeelsverschuivingen gepaard ging (in het vierde leerjaar vond de ontwikkeling plaats van het ‘materiaal’ dat in hoofdstuk IV beschreven werd). Bovendien zou bijsturing ‘onderweg’ door de samenwerking met slechts één leerkracht heel eenvoudig kunnen plaatsvinden;
- als laatste argument vermelden we het feit, dat de Josephschool de officiële status van stimuleringschool bezat.⁶⁾ Vanwege het feit, dat we voortdurend

werkzaam waren in één van de probleemgebieden bij uitstek in het reken-onderwijs, meenden we geen beter 'proefveld' te kunnen vinden dan juist op een stimuleringsschool.⁷⁾

Het vierde en vijfde leerjaar van deze school namen gelijktijdig deel aan het onderzoek. Op de argumenten daarvoor gaan we in de volgende paragraaf nog nader in.

2.2 Het onderzoeksdesign

Het te beschrijven onderzoek wordt met de term ontwikkelingsonderzoek aangeduid. In de literatuur spreekt men wel van construerend of formerend onderzoek, ook wel systematisch onderwijsexperiment genoemd.⁸⁾

*'In dergelijke studies wordt gepoogd zo optimaal mogelijke leercondities te creëren, daarbij steunend op verantwoorde hypothesen omtrent het optimale verloop van onderwijsleerprocessen; dergelijke hypothesen kunnen tot stand gekomen zijn op basis van systematische observatie in voorstudies en theoretische reflectie op de verzamelde observatiegegevens.'*⁹⁾

In dit citaat komt de overeenkomst met de plaats en functie van ons onderzoek in het geheel van verzorgende activiteiten voor het wiskunde-onderwijs enigszins tot uitdrukking. Immers, het onderzoek komt niet zo maar 'uit de lucht vallen'. Er ging nogal wat aan vooraf, zoals bijvoorbeeld de ontwikkeling van wiskunde-onderwijs-materiaal, waaruit de onderzoeksvragen mede voortkwamen. Ook de systematische observatie en theoretische reflectie op de opbrengst daarvan vormen zulke punten van overeenkomst.¹⁰⁾

Blijkens het voorgaande en het vervolg, was de heuristische fase in ons onderzoek echter breder van opzet.¹¹⁾

Daarin werden de volgende werkzaamheden verricht:

- een brede oriëntatie in praktische, wiskundige en onderwijskundig-theoretische literatuur, alsmede onderzoeksliteratuur;
- systematisch (en langlopend) observatie-onderzoek;
- kortlopend observatie-onderzoek, met telkens één of twee basisschoolleerlingen ('gesprekken met kinderen') op basis van de uitkomsten van het systematisch observatie-onderzoek, die in ideeën en materialen voor beoogde onderwijsactiviteiten werden omgezet;
- het organiseren van onderwijsleerprocessen, waarvoor de ideeën en materialen onder andere uit voorgaande onderzoeksactiviteiten voortkwamen en mede gericht waren op het scheppen van de nodige condities om met het geplande ontwikkelingsonderzoek te kunnen beginnen.¹²⁾

In de materialen, die tijdens de heuristische fase tot stand kwamen, waren de theoretische bouwstenen voor het breukenonderwijs zoveel mogelijk gerealiseerd. Een belangrijke stoot daartoe gaf vooral de opbrengst, die de theoretische reflectie op het beschikbare observatiemateriaal leverde, alsmede de beschikbare didactische fenomenologie van de breuken.

In het onderzoek werd gepoogd de beoogde decileergang in het vierde en vijfde

leerjaar tegelijkertijd te ontwikkelen. Dit systeem van vooroploop- en volgklas met het oog op tussentijdse bijstelling en revisie, was in het Wiskobasproject al eerder met succes beproefd.¹³⁾

Er waren echter nog andere overwegingen hiervoor. Beide leerjaren voldeden aan de geschetste 'beginsituatie'. De leerlingen van het vijfde leerjaar evenwel hadden na het vierde leerjaar geen systematisch onderwijs in verband met breuken meer gehad. Slechts incidenteel, wanneer breuken zich in toepassings-situaties in het gevolgde programma voordeden, waren deze leerlingen met breuken actief geweest. Deze activiteiten droegen de eerder geschetste kenmerken van de veelsporige benadering, modelvorming etc. Er werd echter niet geopereerd met breuken (zeker niet in algoritmische zin), anders dan bij het voltrekken van breukverwekkende processen.

Voor de leerlingen van het vierde leerjaar lag de verwerking van de activiteiten, zoals die in het vorige hoofdstuk werden beschreven, nog vers in het geheugen. De leerlingen van het vijfde leerjaar namen deel aan het onderzoek om eventueel te kunnen nagaan in hoeverre de sterk verminderde aandacht voor de breuken al dan niet van invloed zou zijn op de ontwikkeling van de beoogde deelleergang.

Dat geldt ook voor het algoritmiseren van verhoudingen, zij het dat de leerlingen van het vijfde leerjaar daarmee juist veel intensiever bezig geweest waren dan de 'vierdejaars'.

Juist omdat – ook internationaal gezien – het geleerde in verband met breuken in het algemeen zo'n geringe retentie heeft, was het interessant om na te gaan of de beoogde retentie van het inzicht reeds bij de aanloop tot het algoritmiseren bij de leerlingen van het vijfde leerjaar wellicht (enigszins) gerealiseerd was.

In een voorbereidend stadium werden gesprekken met individuele leerlingen gevoerd om te achterhalen welke 'bakens' in het te plannen leertraject het beste uitgezet zouden kunnen worden.¹⁴⁾ De daarbij toegepaste methode had veel weg van wat De Corte 'contrastieve analyses' noemde; een methode, waarbij men het oplossingsgedrag van goede en slechte oplossters bij bepaalde taken met elkaar vergelijkt.¹⁵⁾

Tussen de door De Corte gesuggereerde vergelijkingsmethode van oplossingsgedrag en de door ons toegepaste, bestond echter een ingrijpend verschil. Uitgaande namelijk van datgene, wat de leerlingen aan ervaringen met breuken hadden opgedaan, werd aan enkele goede leerlingen een probleem ter individuele verwerking voorgelegd. De bedoeling daarbij was om vanuit het vergelijken van twee verdeelsituaties tot het aftrekken van ongelijknamige breuken te komen. Gesteund door een analyse vooraf van de onderzoeker zelf zou worden nagegaan of *bij het zoveel mogelijk zelfstandig banen van een weg naar een oplossing*, de genomen stappen in de individuele oplossingsprocessen de basis zouden kunnen vormen voor een algoritme.¹⁶⁾ Naderhand werden de oplossingswegen van deze goede leerlingen gebruikt om zwak-geachte leerlingen, die dezelfde problemen voorgelegd kregen, bij hun oplossingspogingen te steunen. Op deze manier kon worden nagegaan, in hoeverre deze oplossingen ook voor minder begaafde leerlingen toegankelijk, plausibel en begrijpelijk waren.

Het verkregen materiaal vormde het uitgangspunt voor het plannen van het onderwijs aan de voltallige onderzoeksgroepen.¹⁷⁾

De groepen, die aan het onderzoek deelnamen, telden respectievelijk 20 en 24 leerlingen. Door het feit te vermelden, dat de Josephschool de officiële status van stimuleringschool had, menen we de groepen voldoende getypeerd te hebben. Voor het beoogde doel, namelijk de ontwikkeling van een deelleergang, is meer gedetailleerde informatie over de samenstelling van deze groepen nauwelijks relevant te noemen. Aanzienlijke verschillen tussen de groepen onderling zouden eventueel van belang kunnen zijn voor de latere inpassing van de deelleergang in het grotere geheel van het wiskunde-onderwijs.

2.3 Enige methodische en methodologische kanttekeningen

Bij het schetsen van de voorbereidingen op het ontwikkelingsonderzoek – het observeren en analyseren van het individuele oplossingsgedrag van enkele leerlingen – deed de methodekwestie zich reeds voor. Uitbreiding op dit punt met de volgende notities lijkt wenselijk.

Treffers beschreef het formuleringsprobleem van doelstellingen voor het wiskunde-onderwijs en een passende oplossing daarvoor in het kader van de innovatie.¹⁸⁾ Binnen het aangegeven kader schetste hij onder meer de ontwikkelingsgang van een onderwijsleerpakket.¹⁹⁾ Naar aanleiding hiervan stelden we in ander verband, dat bij de ontwikkelingsgang van een deelleergang voor het algoritmisch aftrekken en optellen van ongelijknamige breuken, sterke nadruk op de observatie van individuele leerprocessen zou moeten liggen.²⁰⁾ Dat geldt overigens evenzeer voor de ontwikkeling en het uitlijnen van bijvoorbeeld een deelleergang voor het cijferend vermenigvuldigen. Alleen vanuit een positie van betrokkenheid, van deelhebben aan het onderwijsleerproces, zouden ons inziens observatiegegevens met voldoende diepgang verzameld kunnen worden.²¹⁾

Om het beschikbaar komen van de nodige informatie te garanderen, werd gekozen voor de volgende gang van zaken.

De leerkracht van het vierde leerjaar, de schoolleider, zou alle lessen geven.²²⁾

Twee onderzoekers van het *IOWO* zouden daarbij steeds aanwezig zijn voor het zo letterlijk mogelijk protocolleren van de gang van zaken in de lessen en het observeren en tussentijds interviewen van individuele leerlingen.

De lessen hadden het karakter van meewerkpractica, dat wil zeggen dat door de leerkracht opgegeven problemen en vragen en de verwerking door de leerlingen elkaar voortdurend afwisselden. Het werkmateriaal van de leerlingen was *niet* voorbereid, onderlinge communicatie toegestaan. Direct na de verwerking van een vraag of opdracht, werden uitkomsten geïnventariseerd en besproken, waarbij de werkvorm trekken van een instructieles, leergesprek en klassediscussie vertoonde. Door de vrij snelle opeenvolging van werkvormen behielden de lessen tot het einde toe een levendig karakter. Van vermindering van motivatie of concentratie was nauwelijks sprake. Tijdens de momenten van

schriftelijke verwerking namen steeds minimaal drie mensen het observatiewerk voor hun rekening.²³⁾

Aansluitend aan iedere les vond steeds een korte bespreking en uitwisseling van bevindingen plaats.

Het vijfde leerjaar liep een week achter, om bij onbevredigende gang van zaken in het vierde leerjaar, op grond van tussentijdse analyse en theoretische reflectie, bij te kunnen sturen. Van deze mogelijkheid moest een enkele maal gebruik gemaakt worden.

Bij de beschrijving van de bevindingen in ons onderzoek en de uitkomsten ervan, zullen het vooral de zogenaamde 'interne argumenten' zijn, die het gevoerde betoog steunen.²⁴⁾

Van hetgeen onze 'context of discovery' opleverde wordt en is ook reeds van een deel, inclusief de empirisch gefundeerde component daarin, een vrij uitvoerig beeld geschetst.²⁵⁾ Dit gebeurt onder meer om enkele deskundigen te kunnen vragen om een eerste commentaar. We bevinden ons dus nu in de 'context of persuasion'.

3 OVER ALGORITMEN EN ALGORITMISEREN

3.1 Inleiding

In leertheoretische literatuur wordt onder een algoritme een systematisch oplossingsplan verstaan, dat stap voor stap en op de juiste wijze ten uitvoer gebracht, 'oplossingszekerheid' biedt. Het 'stap voor stap' verwijst naar de uit te voeren elementaire operaties, waaruit de algoritme is opgebouwd. Het op de juiste wijze uitvoeren van de algoritme betekent de elementaire operaties aan de 'juiste' objecten voltrekken.²⁶⁾

Volgens deze zienswijze is een algoritme dus een vaste, onveranderlijke procedure, waarmee een passende opgave met zekerheid kan worden opgelost, mits de algoritme op de juiste wijze wordt uitgevoerd.

Wenden we ons tot de ontwikkelingsgeschiedenis van de algoritmen voor het cijferend optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met natuurlijke getallen, dan wordt ons een beeld van algoritmen in verandering voorgeschoteld.²⁷⁾

De stap-voor-stap procedure van een algoritme blijkt de nodige vrijheden aan de toepasser ervan te bieden. Die vrijheden betreffen dan de wijze, waarop de rekenaar de uit te voeren algoritme organiseerde, zeg schematiseerde en de toenemende efficiency en dus verkorting, die daarin in de loop van de ontwikkelingsgeschiedenis werd ingebracht.

Ter verheldering geven we het volgende voorbeeld.

Voor het Wiskobasprogramma voor de basisschool werden op de historie geïnspireerde deelleergangen voor het cijferend optellen en aftrekken van natuurlijke getallen ontwikkeld. De lusabacus is daarbij het leermiddel waar alles om draait.²⁸⁾

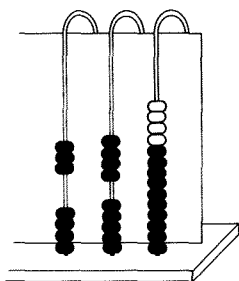
Kenmerkend voor het algoritmiseringsproces, dat de leerlingen voltrekken is,

evenals dat historisch gezien geschiedde, het voortschrijden in schematisering, in het vervolg progressief schematiseren genoemd.

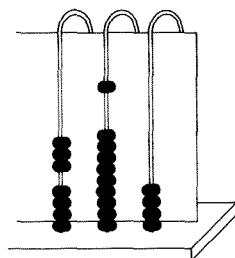
Bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{r} 458 \\ 346 \\ \hline \end{array} +$$

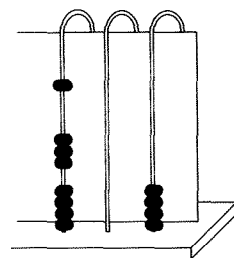
Stadium 1:



- de optelling wordt op de abacus 'gezet';
- de inwisseling in het materiaal voltrokken:
10 eenheden → 1 tiental;
10 tientallen → 1 honderdtal;



en



- de uitkomst kan op de abacus afgelezen worden.

Stadium 2

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 8 \\ \hline 3 & 4 & 6 \\ \hline 7 & 9 & 14 \\ \hline 7 & 10 & 4 \\ \hline 8 & 0 & 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 8 \\ \hline 3 & 4 & 6 \\ \hline 7 & 10 & 4 \\ \hline 8 & 0 & 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 8 \\ \hline 3 & 4 & 6 \\ \hline 8 & 0 & 4 \\ \hline \end{array} +$$

- er vindt geleidelijke overgang plaats naar een geschematiseerde abacus (positiekaart) op papier, de opgave wordt nu in cijfersymbolen genoteerd;
- er wordt per kolom opgeteld, het inwisselen wordt in eerste instantie uitgesteld, net als bij de abacus; bij meer inwisselingen is er gelegenheid tot ver-

korten ‘onderweg’; in plaats van het inwisselen uit te stellen, gebeurt dit (deels of volledig) onmiddellijk, geïntegreerd in de totale optelhandeling.

Stadium 3:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 4 \quad 5 \quad 8 \\ 3 \quad 4 \quad 6 \\ \hline 8 \quad 0 \quad 4 \end{array} + \begin{array}{r} 4 \quad 5 \quad 8 \\ 3 \quad 4 \quad 6 \\ \hline 8 \quad 0 \quad 4 \end{array} +$$

- de papieren abacus (of positiekaart) vervalt;
- het optellen geschiedt rechtstreeks, waarbij ingewisselde eenheden, tientallen etc. eventueel eerst nog op papier ‘onthouden’ worden.²⁹⁾

Ook voor het cijferend vermenigvuldigen en delen zijn deelleergangen, volgens de methode van progressieve schematisering, ontwikkeld.³⁰⁾

Deze benadering voor het uitvoeren van algoritmen kan gekenschetst worden met de volgende trefwoorden.

De leerlingen beschikken over de *globale methode ineens, volgens de systematiek van de progressieve schematisering, gericht op de zelfstandige verwerving van de algoritmen, met nadruk op het proces van algoritmiseren en accent op aan te brengen verkortingen en schematiseringen*.³¹⁾

De geschetste benadering van het cijferen wijkt nogal af van de gebruikelijke, die zich kenmerkt door:

- (de) stap-voor-stap methode;
- systematiek volgens voortschrijdende complicering;
- kant-en-klare aanbieding met een min of meer begripsmatige verklaring per geval;
- nadruk op het produkt van het algoritmiseren;
- accent op snelle en definitieve uitvoering per geval.³²⁾

In de praktijk van het onderwijs blijkt de cijfermethode volgens progressieve schematisering nogal wat voordelen te bieden boven de gangbare benadering. Treffers noemt (onder andere) het snel met grote aantallen kunnen werken, zwakke leerlingen kunnen de operaties ook direct uitvoeren, het doen van niet onbelangrijke wiskundige ontdekkingen, tijdsbesparing.³³⁾

Wij hebben ons afgevraagd, in hoeverre het algoritmiseren van het aftrekken en optellen van ongelijknamige breuken, eveneens volgens verwante methoden, zou kunnen verlopen.

De nu volgende analyses geven een bevestigend antwoord op deze vraag, zij het dat, vergeleken bijvoorbeeld met het optellen en aftrekken van natuurlijke getallen met name van zwakke leerlingen, meer initiatief gevraagd wordt. Dit komt, omdat de schematiseringsniveaus veel minder duidelijk onderscheiden zijn, waardoor ‘terugvallen’ op een primitiever niveau alleen kan plaatsvinden bij volledig inzicht in de structuur van gelijkwaardige verdeelsituaties en het feit, dat die door hun uitkomst over één kam geschoren worden.

Beide nu volgende analyses zijn mede geïnspireerd op en ingegeven door het oplossingsgedrag van kinderen, die actief waren op het betrokken terrein.

3.2 Eigenschappen van verhoudingsgetrouwe afbeeldingen

De breuk in de breekrelatie kan de uitkomst van een verdeelsituatie beschrijven, waarin de eerlijke verdeling is voltrokken. Aan de verhouding 'aantal gegadigden – aantal te verdelen objecten' ontleent de breuk dan zijn relatieve status. Meerdere verdeelsituaties kunnen alleen in dezelfde uitkomst resulteren bij voltrokken verdelingen, wanneer er verhoudingsconstantie in het spel is. Hierop werd reeds uitvoerig ingegaan.³⁴⁾

Wiskundig gezien, zit het zo, dat het 'toewijzingsvoorschrift' (de afbeelding), dat een bepaald aantal objecten aan een gegeven aantal gegadigden toekent, verhoudingen in tact laat. Het is een verhoudingsgetrouwe afbeelding, overigens met de nodige beperkingen.

Aan een voorbeeld wordt geïllustreerd, welke eigenschappen zo'n verhoudingen-in-tact-latend toewijzingsvoorschrift heeft.³⁵⁾ Zoals nog uitvoeriger zal blijken, scheppen deze eigenschappen de nodige ruimte tot het gedifferentieerd verwerken van taken in het betrokken gebied. Als zodanig vinden ze tevens ruime toepassing bij het progressief schematiseren.

Voorbeeld:

Bij 'ieder kind $\frac{3}{4}$ pannekoek' horen de volgende verdeelsituaties:

pannekoeken	3	6	9	12	15			
kinderen	4	8	12	16	20			

Voor het 'voorschrift', dat aan kinderen pannekoeken toekent, gelden de volgende eigenschappen:

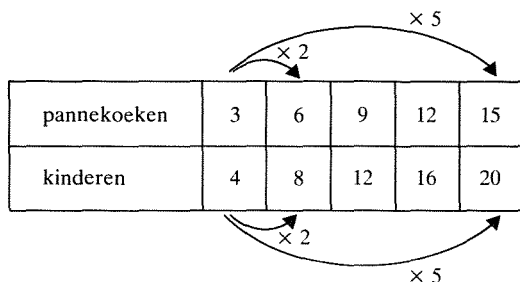
- 1 Hoe minder kinderen, des te minder pannekoeken, of wanneer we de afbeelding kinderen – pannekoeken ' ϕ ' noemen:
als $a < b$, dan $\phi(a) < \phi(b)$, bijvoorbeeld:

pannekoeken	3	6	9	12	15			
kinderen	4	8	12	16	20			

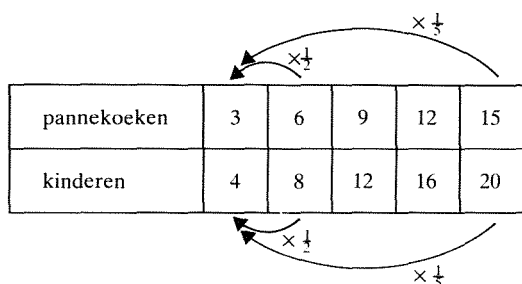
$\overset{3 < 12}{\curvearrowright}$
 $\underset{4 < 16}{\curvearrowright}$

Vier kinderen krijgen (vanzelfsprekend) minder pannekoeken dan zestien kinderen;

- 2 Bij het dubbele of een veelvoud van het aantal kinderen wordt het toe te wijzen aantal pannekoeken ook verdubbeld of verveelvoudigd:
 $\phi(na) = n\phi(a)$, bijvoorbeeld:

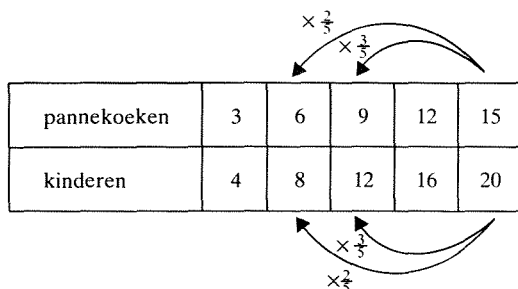


- 3 Natuurlijk geldt dan ook het omgekeerde: bij de helft of een (opgaand) deel van het aantal kinderen wordt het toe te wijzen aantal pannenkoeken op overeenkomstige wijze gereduceerd: $\phi(\frac{1}{m}a) = \frac{1}{m}\phi(a)$, bijvoorbeeld:



Het is duidelijk, uit de formulering blijkt het al, dat deze eigenschap voor ons voorbeeld, wat de keuze van m betreft, slechts beperkte geldigheid heeft. Wanneer er echter sprake geweest was van een overeenkomstig verband tussen twee continue grootheden – gewicht en prijs bijvoorbeeld – dan zou eigenschap 3 voor elke positieve m geldigheid hebben bezeten. Tevens zou dan de volgende eigenschap ruimere geldigheid gehad hebben. Ons voorbeeld perkt opnieuw de mogelijkheden in;

- 4 $\phi(ra) = r\phi(a)$, waarbij r een breuk is, bijvoorbeeld:

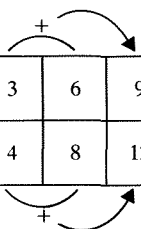


In deze eigenschap, die dus uit beide voorgaande voortspuit, komt de verhoudingsgetrouwheid van ϕ goed tot uitdrukking. In samenhang hiermee wor-

den interne en externe verhoudingen onderscheiden al naar gelang er sprake is van respectievelijk verhoudingen *in* of *tussen* de grootheden.³⁶⁾

Op deze kwestie hebben de eigenschappen 6 en 7 betrekking, maar eerst vermelden we nog:

- 5 $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$, een eigenschap, die in feite met 2, 3 en 4 gelijkwaardig is, bijvoorbeeld:



pannekoeken	3	6	9	12	15
kinderen	4	8	12	16	20

ofwel 'kinderen samen dan ook pannekoeken samen';

- 6 De aantallen kinderen verhouden zich als de aantallen pannekoeken:

$a : b = \phi(a) : \phi(b)$, bijvoorbeeld:

pannekoeken	3	6	9	12	15
kinderen	4	8	12	16	20

$$4 : 8 = 3 : 6 \quad \text{en} \quad 4 : 16 = 3 : 12.$$

Omdat het respectievelijk verhoudingen *in* de 'grootheid' kinderen en de 'grootheid' pannekoeken betreft, worden deze verhoudingen *intern* genoemd. Het gaat om verhoudingen binnen een grootheid (of bijbehorend systeem van groothedswaarden);

- 7 Er is eveneens verhoudingsconstantie *tussen* kinderen en pannekoeken:

$$a : \phi(a) = b : \phi(b).$$

Het betreft nu dus verhoudingen *tussen* de 'grootheden' kinderen en pannekoeken (of bijbehorende systemen van groothedswaarden). Door bij de voorbeelden in 6 de middentermen te verwisselen, krijgt men zulke *externe* verhoudingen:

$$4 : 3 = 8 : 6 \quad \text{en} \quad 4 : 3 = 16 : 12.$$

Op het belang van deze eigenschappen voor het gedifferentieerd verwerken van taken inzake het algoritmiseren van verhoudingen of het progressief schematiseren bij het algoritmiseren van de bewerkingen aftrekken en optellen van ongelijknamige breuken, wezen we reeds. Bij de opsomming van de eigenschappen van ϕ gingen we uit van een getallenvoorbeeld, waaraan achteraf de achtereenvolgende eigenschappen ontlokt en vastgesteld werden.

Bij het algoritmiseren echter van verhoudingen en de bewerkingen met breuken die we op het oog hebben, met nadruk op het algoritmiserings-proces, liggen de

ontdekking en toepassing van deze eigenschappen in het proces besloten, ze maken er werkelijk deel van uit. In dit opzicht is er een sterke overeenkomst met het algoritmiseren van de bewerkingen met natuurlijke getallen. In de algoritmen voor vermenigvuldigen en delen bijvoorbeeld vervulden bepaalde eigenschappen, zoals bijvoorbeeld de distributiviteit, een sleutelrol, zowel historisch als in de deelleergangen binnen het Wiskobasprogramma.³⁷⁾

3.3 Aftrekken (en optellen) van ongelijknamige breuken volgens de systematiek van de progressieve schematisering; een analyse

Het gaat in deze paragraaf, evenals in de vorige, om een analyse vooraf in dienst van de beschrijving van het ontwikkelingsonderzoek. Daarmee wordt de chronologie wat geweld aangedaan, omdat ervaringen met leerlingen mede de bouwstenen voor deze analyse leverden.³⁸⁾

In het algoritmiseringsproces kan de betekenis van de achtereenvolgens uit te voeren operaties aanzienlijk veranderen.

Stel, dat zich vanuit verdeelsituaties de volgende opgave aandient: $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$.

De leerlingen, die voldoen aan de eerder geschetste beginsituatie, zullen deze opgave in verband brengen met passende klassen van in de uitkomst gelijkwaardige verdeelsituaties en hun uitkomsten. Ze vallen als het ware terug op de dubbele betekenis, die 'breuk' op grond van het breukverwekkend eerlijk verdelen verwierf.³⁹⁾ Wanneer het breukbegrip voor de leerlingen in een veel later stadium van het leerproces door nieuwe ervaringen de meer formele betekenis van rationaal getal verwerft, dan kunnen de leerlingen bij de gevraagde verschilbepaling ogenschijnlijk dezelfde procedure toepassen, doch de betekenis kan dan wezenlijk veranderd zijn. Werden bijvoorbeeld eerst klassen van gelijkwaardige verdeelsituaties bedacht en in een tabel genoteerd, later kunnen dit klassen van equivalente breuken zijn, doch op dezelfde wijze genoteerd.

Om tot deze abstractie te komen, zijn ook andere dan verdeelsituaties als toepassingen op deze manier verwerkt. Voor de leerlingen in het onderzoek heeft het breukbegrip, behoudens wellicht voor een enkeling, nog geen formele betekenis verworven. Vandaar dat we 'dichtbij' het eerlijk verdelen blijven. De titel van dit hoofdstuk ('Op weg naar ...') verwees hiernaar. Wel is het zo, dat in de te beschrijven fasering ook de elementen voor een algoritme van meer formele aard vervat zijn.

- 1 $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{4}$ worden in verband gebracht met de dubbele betekenis, die ze in verdeelsituaties verwierven:

$\frac{1}{3}$: a) drie kinderen verdelen 1 pannekoek;

b) elk krijgt $\frac{1}{3}$ pannekoek;

$\frac{1}{4}$: a) vier kinderen verdelen 1 pannekoek;

b) elk krijgt $\frac{1}{4}$ pannekoek.

Eventueel kunnen de verdelingen nog feitelijk voltrokken worden;

- 2 Bij elke verdeelsituatie worden nu voldoende nieuwe, in de uitkomst gelijkwaardige verdeelsituaties bedacht en in tabellen opgeslagen:

$$\frac{1}{3} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{pannekoeken} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline \text{kinderen} & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 & 27 & 30 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{1}{3} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{pannekoeken} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline \text{kinderen} & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 & 40 \\ \hline \end{array}$$

- 3 De tabellen worden met elkaar vergeleken, waarbij gelet wordt op verdeel-situaties, respectievelijk uitkomsten, die niet alleen gemakkelijk vergelijkbaar zijn, doch waarvan tevens moeiteloos het verschil bepaald kan worden:

$$\frac{1}{3} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{pannekoeken} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline \text{kinderen} & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 & 27 & 30 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{1}{3} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{pannekoeken} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline \text{kinderen} & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 & 40 \\ \hline \end{array}$$

Twee situaties blijken er in beide tabellen 'uit te springen' respectievelijk:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{P} & & 4 \\ \hline \text{K} & & 12 \\ \hline \end{array} \quad \text{en} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{P} & & 3 \\ \hline \text{K} & & 12 \\ \hline \end{array} \quad \text{èn:}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{P} & & 8 \\ \hline \text{K} & & 24 \\ \hline \end{array} \quad \text{en} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{P} & & 6 \\ \hline \text{K} & & 24 \\ \hline \end{array}$$

- 4 Afhankelijk van de gemaakte keuze uit de gemakkelijk te vergelijken verdeelsituaties, wordt het verschil vastgesteld:

$$\frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12} \quad \text{of} \quad \frac{8}{24} - \frac{6}{24} = \frac{2}{24},$$

eventueel onder woorden gebracht als: één pannekoek op twaalf kinderen minder betekent ieder kind $\frac{1}{12}$ pannekoek minder.'

De tweede uitkomst wordt (eventueel in later stadium) tot de eenvoudigste, ermee gelijkwaardige vorm teruggebracht:

$$\frac{2}{24} = \frac{1}{12}, \text{ dus } \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

In de bij 2 en 3 geschetste stappen liggen duidelijke mogelijkheden tot voortschrijdende schematiseringen en verkortingen.

Enkele mogelijkheden zijn:

$$\text{a) } \frac{1}{3} : \frac{1}{3} \mid \frac{2}{6} \mid \frac{3}{9} \mid \frac{4}{12}$$

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{4} \mid \frac{2}{8} \mid \frac{3}{12}$$

In beide tabellen wordt min of meer gelijk opgewerkt, totdat op twee direkt vergelijkbare situaties gestuit wordt. Vervolgens wordt het gevraagde verschil bepaald. Dit vereist wel extra mentale inspanning van de leerlingen, vergeleken met de onder 2 beschreven stap. Tijdens de productie van verdeelsituaties voor beide breuken, moet immers voortdurend vergeleken worden.

Een variant hierop is:

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{4} \mid \frac{2}{8} \mid \frac{3}{12}$$

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{3} \mid \frac{4}{12}$$

In één tabel, die al werkend samengesteld wordt, worden verdeelsituaties genoteerd. Onmiddellijk wordt bij elke nieuwe situatie nagegaan of de andere verdeelsituatie door een daarmee gemakkelijk vergelijkbare vervangen kan worden. Zodra dit het geval is, wordt in de tweede tabel direkt de gewenste verdeelsituatie genoteerd.

In beide varianten wordt na de geschetste voorbereidingen het gevraagde verschil bepaald. Opvallend in beide benaderingen zijn de toegepaste *verkortingen*. Vergeleken met de eerder beschreven stap 2, is er echter ook sprake van progressiviteit in schematisering. Werden eerst – wellicht – de (lege) tabellen vooraf getekend, waardoor in zekere zin de mate van uitgebreidheid van de oplossing al vooraf bepaald werd, later werd de tabelomvang in en door het oplossingsproces aan de behoefte aangepast:

$$\bullet \frac{1}{4} : \frac{1}{4} \mid \mid \mid$$

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{3} \mid \mid \mid$$

$$\bullet \frac{1}{4} : \frac{1}{4} \mid \frac{2}{8} \mid \mid$$

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{3} \mid \mid \mid$$

$$\bullet \frac{1}{4} : \frac{1}{4} \left| \frac{2}{8} \right| \frac{3}{12} \left| \right|$$

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{3} \left| \right| \frac{4}{12} \left| \right|$$

- b) Tijdens het gelijk opwerken in beide tabellen naar de eerste moeiteloos vergelijkbare situaties toe, kunnen – en dat is een volgende mogelijkheid tot verkorting – ‘tussentapen’ overgeslagen worden, bijvoorbeeld:

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{3} \left| \frac{2}{6} \right| \frac{4}{12} \left| \right|$$

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{4} \left| \frac{2}{8} \right| \frac{3}{12} \left| \right|$$

In de eerste tabel is via herhaald verdubbelen toegewerkt naar een situatie, waarmee de tweede vergelijkbaar gemaakt kan worden. Tijdens het vergelijkbaar maken van de tweede situatie, kan de overbodige ‘tussentap’ eveneens nog worden overgeslagen:

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{3} \left| \frac{2}{6} \right| \frac{4}{12} \left| \right|$$

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{4} \left| \right| \frac{3}{12} \left| \right|$$

Juist in die gevallen, die nog wat meer tussentapen vereisen, ligt het voor de hand op de één of andere wijze van de in hoofdstuk V, par. 3.2 geschetste eigenschappen gebruik te maken en overbodige tussentapen over te slaan.

Uit a) en b) kan (voorlopig) als meest efficiënte oplossing resulteren:

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{3} \left| \right| \frac{4}{12} \left| \right|$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{4} \left| \right| \frac{3}{12} \left| \right|$$

Tenslotte kunnen de laatste rudimenten van het toegepaste model nog uit de oplossing verdwijnen. Aldus blijkt het zoeken naar en bepalen van ‘de kleinste gemeenschappelijke noemer’ niet aan het begin van de didactische sequentie te staan, doch aan het einde.⁴⁰⁾

De slotsom lijkt gerechtvaardigd, dat de voorgestelde procedure, die uiteindelijk zal moeten leiden tot een algoritme voor het aftrekken en optellen van ongelijknamige breuken, in globale trekken overeenstemt met het algoritmiseren van de bewerkingen met natuurlijke getallen. Het betreft de beschikbaarheid van de ‘globale methode-ineens’, ‘de systematiek volgens progressieve schematisering’, het accent op het proces, gericht op ‘zelfstandige verwerving van de algoritmen’ met ‘accent op aan te brengen verkortingen en schematiseringen’.

4 BESCHRIJVING VAN ONDERZOEKSRESULTATEN

4.1 Inleiding

In de voorgaande paragrafen werd het algoritmiserings-*proces* als belangrijk beklemtoond. De te ontwikkelen deelleergang zal ruimte moeten bieden tot voortschrijding in schematisering en het aanbrengen van (eventuele) verkortingen. Het betreft het algoritmiseren van (een nog te ontwikkelen) procedure, die onder meer tot de verschilbepaling van ongelijknamige breuken voert. Het verworven inzicht 'onderweg' geeft mede richting aan dergelijke processen.⁴¹⁾

Bij 'onze' benadering zal het groeiende inzicht in de globale methode ineens tijdens het leerproces aanleiding geven tot voortschrijding in schematiseren en verkorten. De overgang van het vergelijken en ordenen van verdeelsituaties, op basis van begrip naar een meer algoritmische benadering, vraagt om een veranderde instelling bij de leerlingen. Tot nu toe werd de aandacht van de leerlingen primair gericht op het vergelijken van verdeelsituaties en het beslissen over welke (eventueel) het voordeligst is.

Om het algoritmiseringsproces in gang te zetten, dient op de *methode* van het vergelijken van verdeelsituaties *gereflecteerd* te worden. De leerlingen dienen zich *bewust te worden* in welke gevallen over verschil (of som) moeiteloos beslist kan worden. De aandacht verplaatst zich dus van het vergelijken van verdeelsituaties naar het 'stroomlijnen' van de toegepaste methode. Zoals gezegd, vraagt dit een veranderde instelling van de leerlingen, teweeg gebracht door bewustmaking.⁴²⁾

Bij de beschrijving van de ervaringen tijdens het ontwikkelingsonderzoek richten we ons op conclusies, die verwijzen naar mogelijke verbeteringen in de deelleergang en op aspecten van differentiatie.⁴³⁾ Waar mogelijk, wordt terug verwezen naar de analyses vooraf.

4.2 Het onderzoek

*Instap: terugblik op 'De Smickel'*⁴⁴⁾

In onderwijs, dat 'mikt' op retentie van het inzicht, worden eenmaal doorlopen leerprocessen op gezette tijden bij wijze van herhaling en terugblik nog eens versneld doorlopen. Dit kan gebeuren tijdens het eerste gedeelte van een toetsles.⁴⁵⁾ Kwaliteit en snelheid van het herhaalde leerproces vormen aanwijzingen voor het aanwezige inzicht. Bovendien worden de leerlingen door het versnelde leerproces (opnieuw) op het gewenste aanvangsniveau gebracht. De instapactiviteiten waren hierop onder meer gericht, vandaar een gezamenlijke terugblik op 'De Smickel'. De onderscheiden aspecten bij verdelen en gelijkwaardigheid dienden opnieuw bij de leerlingen bewust gemaakt te worden. Het pannekoeckenrestaurant – wederom de locatie, waarin zich het nodige afspeelde – verwierf destijds al een zekere reputatie. Een hele pannenkoek werd zelden door één per-

soon genuttigd, zo omvangrijk en machtig waren ze. $\frac{3}{4}$ pannekoek werd 'haalbaar' bevonden.

Dubbele betekenis van $\frac{3}{4}$

Desgevraagd blijken vrijwel alle leerlingen minstens één van beide betekenissen te kunnen bedenken, namelijk $\frac{3}{4}$ betekent 'een *stuk* pannekoek', maar ook 'een *verhaaltje*' in de geest van 'vier kinderen verdelen drie pannekoeken' (een verdeelsituatie dus). Slechts een deel van deze leerlingen komt direkt met de gevraagde dubbele betekenis (respectievelijk één leerling uit groep 1 en zes leerlingen uit groep 2).^{45a)}

De leerlingen, die gedeeltelijk in gebreke gebleven zijn, komen gemakkelijk tot de vereiste aanvulling op grond van suggesties tot het feitelijk uitvoeren van de betrokken verdeeltaak of het bedenken van een passende verdeelsituatie.

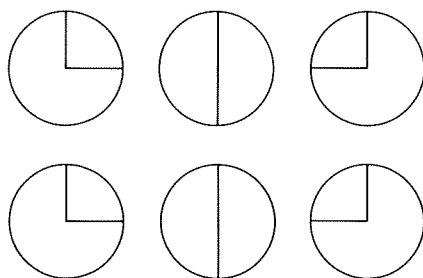
Er zijn geen in het oog springende verschillen tussen beide groepen. Voorlopig zijn we geneigd te concluderen, dat in het voorafgaande onderwijs het verband tussen *verdeelsituatie* en *uitkomst* bij de leerlingen (nog) nadrukkelijker bewust gemaakt dient te worden. *De vraag is, of dit in voldoende mate gebeurd is.* In de tekst voor de leerkracht zal dit bewustmakingsmoment 'eruit moeten springen' op het juiste moment.

Nieuwe verdeelsituaties bedenken bij 'ieder kind krijgt $\frac{3}{4}$ pannekoek'

De vraag naar in de uitkomst gelijkwaardige verdeelsituaties wordt open gesteld. Op tabelgebruik e.d. worden de leerlingen niet attent gemaakt. De bedoeling is met name ook om 'uitkomsten-in-het-wilde-weg' te krijgen, waarin naderhand orde moet worden gebracht. Het breukbegrip is voor de leerlingen wel zo sterk verbonden met het eerlijk verdelen, dat zeker getekende verdeelsituaties verwacht mogen worden. Vooral de verdeelsituatie 'acht kinderen verdelen zes pannekoeken' wordt door veel leerlingen grondig geëxploreerd. De verscheidenheid aan oplossingen is groot.

Enkele voorbeelden:

a)

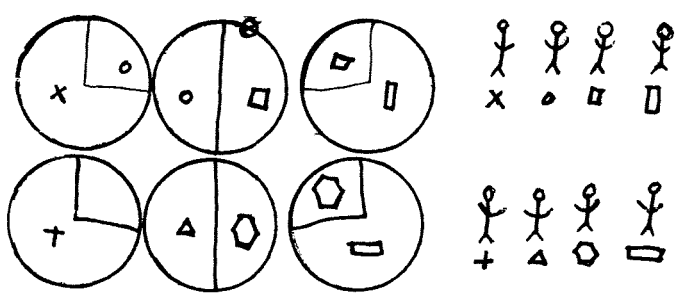


Bij deze oplossing werd gebruik gemaakt van de toegepaste verdeling bij vier kinderen verdelen drie pannekoeken. De symmetrie in de verdeling wijst op

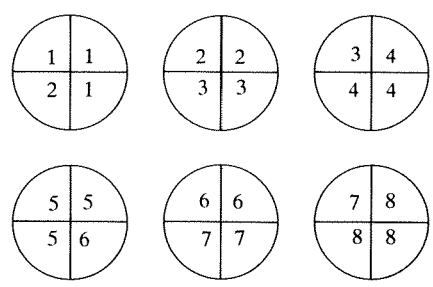
het achtereenvolgens toewijzen van $\frac{3}{4}$ pannenkoek aan elke volgende gegadigde in de verdeelsituatie. In veel gevallen werden eveneens de gegadigden in de vorm van poppetjes getekend, zodat de volledige verdeelsituatie in beeld was gebracht.

Om het verband tussen de gegadigden en de hun toegewezen stukken te symboliseren, werd gebruik gemaakt van cijfers, zelfbedachte tekens, verschillende arceringen of combinaties van dergelijke symboliseringen.

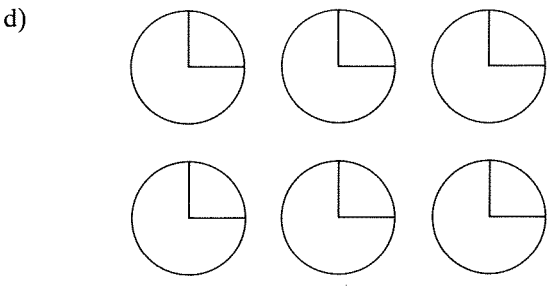
Illustratief hiervoor is het werk van Peter:



b) '1 tot en met 8' stellen de acht kinderen voor (zie ook a)):



c) Elk van de zes pannenkoeken in acht gelijke delen verdelen.



In groep 1 bleek een lichte voorkeur voor getekende oplossingen te bestaan,

getuige het grotere aantal uitsluitend verbale antwoorden in groep 2. Enkele leerlingen hadden geen oplossing, dit gold voor beide groepen. Wellicht zijn deze leerlingen – soms zelfs via het begin van een tekenoplossing – direkt overgeschakeld op het beschrijven van de gevraagde verdeelsituaties in een tabel. Dit is niet meer met zekerheid te achterhalen. Uit het ingeleverde materiaal van de meewerkpractica blijkt echter, dat bedoelde leerlingen zonder uitzondering onbelemmerd aan de nog volgende activiteiten konden deelnemen.

De conclusie lijkt gerechtvaardigd, dat de bevindingen bij deze activiteit geen direkte aanwijzingen opleverden die een ingreep in de voorgestane sequentering rechtvaardigen.

Wat de retentie van het inzicht bij de leerlingen van groep 2 betreft, zou men voorzichtig kunnen veronderstellen, dat een aantal van hen over een enigszins gerijpter en afstandelijker breukbegrip beschikken. De produktie van zuiver verbale oplossingen door circa éénderde van deze leerlingen, vormt enige steun voor deze veronderstelling.

Voor andere passende verdeelsituaties – voorzover de leerlingen daaraan toegekomen zijn – gelden overeenkomstige opmerkingen. Ook dient nu reeds vermeld te worden, dat leerlingen, die kennelijk weinig moeite meer hebben met de inventarisatie van verdeelsituaties, allerlei 'tussensituaties' bedacht worden, zoals bijvoorbeeld:

P		$1\frac{1}{2}$
K		2

Dit geeft dan weer aanleiding naar betekenis en mogelijkheid van zulke situaties binnen de gegeven context te vragen. Begrippen als 'bestellen' en 'opdienen' (uitsluitend hele pannenkoeken) en 'opeten' (men kan een deel laten staan), rechtvaardigen dan dergelijke oplossingen. Op deze kwestie komen we nog terug.

De opdracht beoogde vooral ook tabelgebruik te motiveren, op grond van wanordelijk weergegeven informatie omtrent oplossingen (bord) bij de inventarisatie en klassediscussie naar aanleiding daarvan.

In de uitkomst gelijkwaardige verdeelsituaties; overzichtelijkheid door tabelgebruik

Ieder kind krijgt $\frac{3}{4}$ pannenkoek:

pannekoeken	3	6	9
kinderen	4	8	12

Met de verhoudingstabel wordt een *algoritmisch element* in de activiteiten gebracht. De tabel lokt *algoritmisch gedrag* bij de leerlingen uit, waardoor de

aandacht van de context en de betekenis van de problemen daarbinnen kan worden afgeleid.^{45b}) Hinderlijke neveneffecten en maatregelen ter voorkoming of eliminatie daarvan krijgen bij de komende analyse daarom de nodige aandacht. Er geldt een stilzwijgende afspraak, dat een tabel 'af' is wanneer deze met een tiental situaties gevuld is. Dergelijke open opdrachten, divergente productie uitlokkend, werken het afwijken van zo'n afspraak echter in de hand. De algoritmische werkzaamheid noodt dikwijls tot doorgaan, zelfs buiten de grenzen van het gevraagde. Of de grotere ervaring in het algoritmiseren van verhoudingen bij de leerlingen van groep 2 effect gehad heeft op de resultaten, zal bij analyse ervan moeten blijken.

Groep 1

Meer dan de helft van de leerlingen maakte de tabel 'keurig volgens het boekje':

pannekoeken	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
kinderen	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

waarbij twee leerlingen nog wat extra verdeelsituaties toevoegden. Het onvoldoende bewust betrokken zijn bij het invullen van de tabel, kan leiden tot verstoring van de regelmaat. De volgende eigenaardigheden deden zich voor:

pannekoeken	3	6	9	12	15	18	21	24
kinderen	4	8	12	16	18	20	22	14

↑
↑
↑
↑

De gedachtengang van deze leerling is niet precies achterhaalbaar. Er is sprake van 'verstoring' van de (algoritmische) routine, doordat de ervaren regelmaat, met één andere, niet passende regelmaat in verband gebracht wordt. Op grond van de 'nieuwe' regelmaat wordt het invullen van de tabel voortgezet. Uit het vervolg blijkt, dat de herkenning van de nieuwe regelmaat slechts vluchtig geweest kan zijn, met als gevolg dat deze leerling(e) het spoor bijster raakt.

pannekoeken	3	6	9	12	16	20	26	32	38	44
kinderen	4	8	12	16	20	26	32	38	44	

↑
↑
↑

Hier geldt een soortgelijke verklaring als in het vorige geval, alleen vormt nu de herhaling van 12 in de tabel de aanleiding. Deze vergissing vormt tevens een aanwijzing, dat de tabel situatiegewijs is ingevuld (en dus niet de rijen afzonder-

lijk, herkend als uitkomsten van vermenigvuldigingstafels).

pannekoeken	3	6	9	18	36	72	144	288	576	1152
kinderen	4	8	12	24	48	96	192	384	768	1536

De tabel is ingevuld volgens het principe van het herhaald verdubbelen vanaf de derde situatie. Meestal vindt herhaalde verdubbeling vanaf het begin plaats, omdat de tabel met een verdubbeling begint. De leerlingen, die de herhaalde verdubbeling als invulstrategie toepassen, worden erop gewezen dat zij op deze manier net die verdeelsituatie kunnen missen, die de sleutel tot de oplossing van het gestelde probleem vormt. Dikwijls blijken de leerlingen dit ook zelf te ontdekken als ze bijvoorbeeld ‘mooie’ situaties als

P		30
K		40

dreigen over te slaan.

pannekoeken	3	6	9	12	15	16	17			
kinderen	4	8	12	16	20	24	28			

Ook hier werd overgegaan op een ‘nieuwe’ regelmaat, namelijk het voortzetten van de telrij bij de aantallen pannekoeken vanaf 15. Tenslotte vermelden we nog:

pannekoeken	3	6	12	16	32	64	128			
kinderen	4	8	9	12	24	48	96			

Hier worden, waarschijnlijk omdat twaalf op grond van verdubbelen verkregen is, de getallen van de betreffende verdeelsituatie verwisseld, waarna herhaald verdubbelen wordt toegepast bij verdere invulling van de tabel. De gemaakte omwisseling wordt daarbij consequent gehandhaafd. Opmerkelijk bij de analyse van deze ‘ontsporingen’ is de zekere mate van waarschijnlijkheid, waarmee het waarom ervan steeds achterhaald kan worden.

Deze mogelijkheid tot diagnostiseren is kenmerkend voor leerprocessen bij het algoritmiseren volgens de systematiek van de progressieve schematisering.

Groep 2

In groep 2 voldeed meer dan tachtig procent van de leerlingen aan de opdracht, zij het dat de meesten van hen volstonden met een tabel, die slechts zes verdeel-situaties bevatte, tot en met:

P		18	
K		24	

Eén leerling paste de methode van het herhaald verdubbelen toe, één leerling ging door met nog vier situaties na:

P		30	
K		40	

Slechts twee leerlingen weerstonden de verleiding van een ‘nieuwe’ regelmaat niet, namelijk:

pannekoeken	3	6	9	12	15	18	21	24	27	31
kinderen	4	8	12	16	20	24	27	32	36	40
							↑	↑	↑	↑

en:

pannekoeken	3	4	5	6	12	15	18	30	60	
kinderen	4	5	6	8	16	20	24	40	80	
		↑	↑	↑						

Wanneer beide groepen met elkaar vergeleken worden, springt eruit, dat het produceren van de gevraagde tabel aan groep 2 heel wat gemakkelijker afging. De opgedane extra ervaring op dit punt was duidelijk merkbaar.

Het ‘inpassen’ van een ‘nieuwe’ situatie

In beide groepen werd gevraagd bij enkele nieuwe verdeelsituaties, of ze al dan niet in de tabel pasten.

Bijvoorbeeld: voor 24 kinderen worden 16 pannenkoeken besteld.
 Dergelijke inpassingsvragen werden gesteld in verband met de voorbereiding op het meer gerichte vergelijken van verdeelsituaties, dat nog zou gaan plaatsvinden.
 Wellicht door het steeds opnieuw op dezelfde wijze invullen van dergelijke tabellen, richtte de aandacht van de leerlingen zich op ‘inpassing’ vanuit de eerder samengestelde tabel.

pannekoeken	3	6	9	12	15	18				
kinderen	4	8	12	16	20	24				

P		16	
K		24	

De in te passen situatie wordt direkt vergeleken met de meest geschikte situatie, dus:

P		18	
K		24	

of vanuit een bepaalde situatie in de tabel, wordt een nieuwe, geschiktere bedacht:

P	9		18
K	12		24

$\times 2$

$\times 2$

vervolgens vergeleken met

P		16	
K		24	

Slechts één leerlinge kwam op het idee, vanuit de gegeven, in te passen situatie

terug te redeneren met daarbij de opmerking, dat ze gestopt was, ‘want $1\frac{1}{2}$ kind kan niet’:

pannekoeken	1	2	4	8	16					
kinderen	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24					

Door te vragen wat één kind in dit geval kreeg, bracht de leerkracht deze leerlinge tot:

P	$\frac{2}{3}$		
K	1		

en de conclusie dat dit minder dan $\frac{3}{4}$ pannekoek is. Dit betekent een welkome aanvulling op de tot dusver gevolgde benadering, die te veel gefixeerd dreigde te gaan worden. Vervolgens werd de aandacht van de leerlingen gericht op het bedenken van passende verdeelsituaties bij ‘ieder kind krijgt $\frac{3}{4}$ pannekoek’, zonder dat in de verdeelsituatie van een geheel aantal pannekoeken sprake behoeft te zijn.

Het bedenken van ‘tussenwaarden’

Bij ‘ieder kind krijgt $\frac{3}{4}$ pannekoek’ wordt nu de volgende tabel gemaakt:

pannekoeken	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	3				6				9
kinderen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Groep 1 blijft nu zeer duidelijk achter bij groep 2. De meeste leerlingen van groep 1 weten op zichzelf best raad met de opgave, doch er sluipen nu allerlei tekortkomingen in het geleverde werk. Bovendien ‘vallen’ nu veertien (van de twintig) leerlingen ‘terug’ op het tekenen van verdeelsituaties ter ondersteuning van het invullen van de tabel. Meer dan de helft van de leerlingen van groep 1 bedenkt wel enkele verdeelsituaties, doch daarbij blijft het dan:

pannekoeken	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	3		$4\frac{1}{2}$		6		
kinderen	1	2	3	4	5	6		8		

Slechts enkele fouten worden gemaakt, die zowel door slordigheid als door (tijdelijke) onachtzaamheid kunnen zijn veroorzaakt:

↓

pannekoeken	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$				
kinderen	1	2	3	4		6				

↓ ↓

pannekoeken	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	3	$3\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$				
kinderen	1	2	3	4	5	6				

Vrijwel de voltallige groep 2 had de volgende tabel als oplossing:

pannekoeken	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	3	$3\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	6	$6\frac{3}{4}$	$7\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{4}$	9	$9\frac{3}{4}$	$10\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$	12
kinderen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Enkele leerlingen hadden een nog langere tabel.
 Slechts een drietal leerlingen bleef hiermee vergeleken enigszins achter, zonder dat er overigens echte fouten gemaakt werden.
 Om te achterhalen welke eigenschappen van het toewijzingsvoorschrift ϕ door de leerlingen werden toegepast, betrekken we de lesprotocollen eveneens bij de analyse:

- het herhaald verdubbelen noemden we reeds. Verder signaleerden we:
- halveren, bijvoorbeeld:

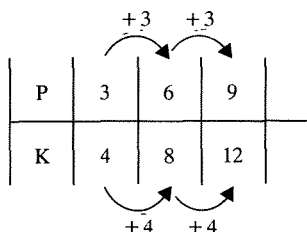
P		$1\frac{1}{2}$		3
K		2		4

- ‘middelen’, bijvoorbeeld:

P		3		$4\frac{1}{2}$		6
K		4		6		8

met als redenering: precies tussen 4 en 8 zit 6, en precies tussen 3 en 6 zit $4\frac{1}{2}$;

- ‘optellen’:



- de tafels herkennen: in het aantal pannenkoeken de tafel van drie, in het aantal kinderen de tafel van vier en in de verschillen de tafel van één.

Voorlopige conclusies

De ervaringen tot nu toe geven aanleiding tot de volgende (voorlopige) gevolgtrekkingen:

- er zou gerichtere aandacht besteed moeten worden aan de bewustmaking bij de leerlingen van de dubbele betekenis van de breuk;
- bij het genereren van klassen van in de uitkomst gelijkwaardige verdeelsituaties, dient ook de omgekeerde benadering, dus van situaties met grote naar steeds kleiner wordende aantallen plaats te vinden;
- het toepassen van de verhoudingstabel, zoals geschetst, appelleert aan algoritmisch gedrag, lokt dit gedrag uit, waarbij de overgang op toevallige, niet relevante regelmatigheden in de getallenrijen fouten veroorzaakt. Ook kan tabelgebruik de methode van het herhaald verdubbelen uitlokken;
- de eigenschappen van de afbeelding ϕ , die de ‘grootheden’ kinderen en pannenkoeken ‘koppelt’, dienen bij het algoritmiseren van verhoudingen in het algemeen op geschikte momenten in het leerproces bewust gemaakt en ‘op een rijtje gezet’ te worden. Reflecteren op het algoritmiseren van verhoudingen als proces is hiertoe het geëigende middel;
- het opdoen van de nodige ervaringen bij het algoritmiseren van verhoudingen vervult een belangrijke voorwaarde voor het algoritmiseren van de bewerking(en) aftrekken (en optellen) van breuken, uitgaande van het vergelijken van verdeelsituaties.

Vergelijken, ordenen, op weg naar verschilbepaling

Aan het vergelijken en ordenen van verdeelsituaties is tijdens de voorbereiding op het algoritmiseren de nodige aandacht besteed. Wel werd daarbij dikwijls genoeg genomen met overwegingen van meer kwalitatieve aard. Uitgaande van een gegeven verdeelsituatie, bijvoorbeeld ‘vijf kinderen verdelen vier pannenkoeken, ieder krijgt $\frac{4}{5}$ pannenkoek’, werd dan ingegaan op vragen als:

- ‘als er nu eens meer pannenkoeken verdeeld waren, dan ...’, en
 - ‘als er nu eens meer kinderen geweest waren, dan ...’,
- en soortgelijke vragen met ‘minder kinderen’, ‘minder pannenkoeken’, ‘minder kinderen en pannenkoeken’, ‘twee keer zoveel pannenkoeken’, ‘twee keer zoveel kinderen’, ‘twee keer zoveel kinderen en pannenkoeken’, etc.

De activiteiten zouden zich nu meer op kwantitatieve vergelijkingsmethoden gaan toespitsen en (dus) op precieze verschilbepaling. Bijvoorbeeld: $\frac{4}{3}$ is meer dan $\frac{3}{4}$, op grond van de overweging dat, uitgaande van één hele pannenkoek, in het ene geval maar $\frac{1}{3}$ overblijft en in het andere $\frac{1}{4}$. Deze complementen in verband gebracht met de verdeelsituaties ‘vijf kinderen verdelen één pannenkoek’ en ‘vier kinderen verdelen één pannenkoek’, dus ... vormt dan het sluitstuk van de redenering.

Daarmee is echter het exacte verschil tussen $\frac{4}{3}$ en $\frac{3}{4}$ nog niet bepaald. Met $\frac{3}{5}$ in plaats van $\frac{3}{4}$ had dat verschil wel ‘moeiteloos’ bepaald kunnen worden. Zo eenvoudig ligt het echter meestal niet. De vraag luidt dan: ‘In welke gevallen kunnen verdeelsituaties gemakkelijk vergeleken worden en het verschil in uitkomsten zonder verdere ingrepen bepaald?’ En als afgeleide vraag voor de overige gevallen ligt dan voor de hand: ‘Is er een methode, en zo ja welke, waarmee niet rechtstreeks vergelijkbare situaties in direkt vergelijkbare omgezet kunnen worden?’

Als rechtstreeks vergelijkbare situaties springen in het oog:

- 1 Verdeelsituaties met gelijke aantallen pannenkoeken, bijvoorbeeld ‘vijf kinderen verdelen drie pannenkoeken, ieder krijgt $\frac{3}{5}$ pannenkoek’ en ‘zeven kinderen verdelen drie pannenkoeken, ieder krijgt $\frac{3}{7}$ pannenkoek. De tweede situatie wordt moeiteeloos als de onvoordeligste aangewezen. De omvang van het verschil laat zich echter minder gemakkelijk vaststellen.
- 2 Verdeelsituaties met gelijke aantallen kinderen, doch verschillen in aantallen pannenkoeken, bijvoorbeeld: ‘8 kinderen verdelen vijf pannenkoeken, ieder krijgt $\frac{5}{8}$ pannenkoek’ en ‘acht kinderen verdelen zeven pannenkoeken, ieder krijgt $\frac{7}{8}$ pannenkoek’. Voor de voordeligste situatie kan nu ook nog rechtstreeks het verschil met de andere situatie bepaald worden.

Uit een oogpunt van vergelijken, ordenen en verschil bepalen, zijn situaties van het tweede type ideaal te noemen. Daarop zal zich de aandacht dienen te concentreren en op een methode, om lastig vergelijkbare verdeelsituaties om te zetten in dergelijke ideale situaties, waardoor vergelijking en verschilbepaling tot uiterst eenvoudige operaties teruggebracht zijn.

Globaal geschetst waren dit de bedoelingen, die ons voor ogen stonden in dit stadium van het onderzoek. Bewustwording bij de leerlingen als gevolg van reflectie op de gevolgde werkwijze, respectievelijk te volgen werkwijze, zou in verband met de koersbepaling van het leerproces uiterst belangrijk zijn. Dat deze bedoelingen tijdens het onderzoek zelf minder helder en expliciet waren, moge uit het vervolg van deze beschrijving nog blijken.

Ervaringen

Groep 1

De verwerking van een instapprobleempje leverde aan 'opbrengst' een voldoende groot aantal echte breuken op. Dit was het 'werkmateriaal' voor de vervolgactiviteiten. De vooraf gegeven schriftelijke informatie aan de leerkracht en de mondelinge toelichting daarop, bleken ontoereikend. Er was onvoldoende zicht geboden op de bedoelingen.⁴⁶⁾ Ons inziens was dit er de oorzaak van, dat leerkracht en groep verstrikt raakten in allerlei ordeningsvragen en activiteiten, los van de bedoelingen. Pas na verloop van tijd kwam er enig systeem in het lesverloop, zonder dat overigens de voltallige groep toen wel voldoende zicht op de bedoelingen had. Aan eigen werk in verband daarmee werd dan ook in eerste instantie niet toegekomen.

Groep 2

De geschetste ervaringen met groep 1 vormden aanleiding tot tussentijdse bijsturing.⁴⁷⁾ Met nadruk werden vooraf de bedoelingen nogmaals met de leerkracht – en nu uitvoeriger en met meer voorbeelden toegelicht – besproken. Het effect hiervan was spoedig merkbaar.

De groep ontdekte, dat vergelijking (en verschilbepaling) ingeval van gelijke aantallen kinderen, eenvoudig was. Dit werd ook onder woorden gebracht. Vervolgens richtte de aandacht zich op lastiger gevallen. Bij vergelijking van $\frac{4}{6}$ en $\frac{3}{4\frac{1}{2}}$ suggereerde de leerkracht gelijkheid. Bij hun pogingen om de onjuistheid van deze suggestie te bewijzen, werd door enkele leerlingen van de groep de ene situatie in daarmee gelijkwaardige omgezet:

4	3	2	
6	$4\frac{1}{2}$	3	
$\longrightarrow$			

De leerlingen beseften dat:

P	3	
K	$4\frac{1}{2}$	

als verdeelsituatie absurd was (misschien werden de 'P' en de 'K' daarom wel weggelaten). De gevraagde vergelijkingstaak was nu echter tot eenvoudige proporties teruggebracht (gelijke aantallen pannekoeken). Alleen het verschil kon nog niet worden bepaald.

Overigens bleken veel leerlingen dit idee van situatieomzetting, teneinde het vergelijken te vereenvoudigen, gemakkelijk 'op te pikken'. Enkele van zulke

vergelijkingsopdrachten werden schriftelijk verwerkt. Het ‘observatieteam’ stelde vast, dat enkele leerlingen al vrij systematisch naar gemakkelijk vergelijkbare situaties toewerkten. Eén van hen mocht zijn methode met het oog op het vervolg toelichten: ‘Ik tel gewoon door tot het aantal kinderen gelijk is’, luidde het laconieke commentaar.

$$\frac{2}{3}:$$

2	4	6	8	10
3	6	9	12	15

Deze tabel werd niet verder voortgezet. De betrokken leerling(e) argumenteerde desgevraagd: ‘Vijftien kom je bij die andere ook tegen’:

$$\frac{4}{5}:$$

4	8	12
5	10	15

Achteraf bleek uit het leerlingenmateriaal, dat deze verkorting door nogal wat leerlingen was toegepast.⁴⁸⁾

Ongeveer zestig procent van de leerlingen van groep 2 bleek op min of meer overeenkomstige wijze gewerkt te hebben. Voorzover er afwijkingen waren, betroffen deze:

- het niet bepalen van het verschil (twee leerlingen);
- het zich beperken tot kwalitatieve uitspraken over de ordening (drie leerlingen);
- het niet toepassen van de gesignaleerde verkorting (drie leerlingen);
- het hebben van een onjuist verschil (twee leerlingen).

Al deze leerlingen pakten het probleem dus via de ‘tabelmethode’ aan. Van de overige leerlingen kwam ongeveer de helft tot een gedeeltelijke oplossing, middels dezelfde methode, doch ‘bleef’ onderweg steken; de andere helft van de leerlingen kwam tot vrijwel niets. Efficiëntere verkortingen dan de geschetste, deden zich niet voor.

Achteraf moeten we stellen, dat ook in deze groep de gerichtheid op de onderscheiden uitzonderingsgevallen, de bewustmaking daarvan en de vraag naar de transformatiemogelijkheid van lastige verdeelsituaties, niet voor alle leerlingen van de groep (voldoende) uit de verf gekomen is.

(Voorlopige) conclusie

De indruk bestaat, dat het vergelijken en ordenen in de aanloop tot het algoritmiseren teveel impliciet gebleven is. Veel eerder in het leerproces zouden de gunstige uitzonderingsgevallen bij het vergelijken van verdeelsituaties als zodanig

nig onderkend moeten zijn en bewust gemaakt bij de leerlingen. Tevens zouden de bedoelingen, zoals in deze paragraaf geschetst, in de tijd wat 'uitgesmeerd' kunnen worden. Het leek erop, alsof we teveel ineens wilden van de leerlingen. De te nemen barrière in het mathematiseringsproces bleek althans voor een deel van deze leerlingen te complex en de voorbereiding erop ontoereikend. Deze tekortkoming kon echter niet verhelen, dat althans bij een deel der leerlingen de kiem gelegd was voor een systematische aanpak van de verschilbepaling van breuken; een aanpak die bovendien algemene geldigheid heeft. Het vervolg zal – althans voor deze groep – gericht moeten zijn op de retentie van deze systematische aanpak.⁴⁹⁾ Dit kan gebeuren door telkens weer op de oorspronkelijke aanpak terug te komen. Behalve verdeelsituaties, zullen ook andere toepassingssituaties op de geschetste wijze wiskundig verwerkt worden. Door overgang op nieuwe toepassingssituaties kan de systematische aanpak van zijn binding met de realiteit ontdaan worden en op den duur tot algemeen geldig algoritme voor het aftrekken van breuken geabstraheerd worden.

Nogmaals vergelijken, etc.

Op grond van de zojuist beschreven ervaringen werd besloten nogmaals uitgebreid op de kwestie van het vergelijken etc. in te gaan. De benadering in groep 1 was nu veel gericht. Het onderwijsleerproces werd door de leerkracht sterk gestuurd. De gunstige vergelijkingsgevallen werden ontdekt en onder woorden gebracht. Het toewerken naar gemakkelijk vergelijkbare situaties volgens de tabelmethode werd klassikaal gedaan en verliep moeizaam. De indruk bestond, dat voor een aantal leerlingen het verband tussen verdeelsituaties met grote aantallen kinderen en pannekoeken en het deel, dat ieder bij voltrokken verdeling krijgt, enigszins zoek was.

Bijvoorbeeld:

P	24		
K	32		

Op de een of andere manier haperde er iets aan het inzicht in gelijkwaardigheid van verdeelsituaties (met grote aantallen) en uitkomsten.

Het leerproces werd versneld doorlopen, vanwege de reeds opgedane ervaringen, maar ook omdat de laatste ervaringen van drie weken terug dateerden. Voor groep 2 betrof het een periode van twee weken.

In deze groep waren de ervaringen veelbelovender. Niet alleen bleek bij minstens de helft van de leerlingen retentie van de systematische aanpak, getuige de grote mate van overeenkomst in resultaten. Bij enkele leerlingen kon zelfs enige voortgang in het progressief schematiseren vastgesteld worden. Wel is het

zo, dat toegepaste verkortingen pas achteraf werden aangebracht, nadat eerst een uitvoeriger oplossingsweg gevolgd was.

Ter toelichting worden enkele karakteristieke oplossingen van leerlingen opgenomen.

1 Het werk van Sylvia:

Handwritten tables by Sylvia:

Top table (partially crossed out):

5	10	15	20	25		
8	16	24	32	40		
1	3	6	9	12	1	1
5	10	15	20	25		

Below it: 40 meer

Middle table:

P 3	6	9	12	15	18	21	24
K 5	10	15	20	25	30	35	40

Arrows labeled "dubbel" point from 12 to 15 and from 20 to 25.

Bottom table:

P 5	10	15	20	25	1/40
K 8	16	24	32	40	verschil

An arrow labeled "dubbel" points from 20 to 25.

Sylvia ontdekte achteraf, dat zij in de tabel voor $\frac{3}{5}$ drie termen kon overslaan. Daarom maakte zij nieuwe tabellen, waarin zij met die voor $\frac{5}{8}$ begon (!) en voor $\frac{3}{5}$ de verkorte versie gebruikte.

2 Het werk van Maurice:

Handwritten tables by Maurice:

Tafel 1:

3	6	9	12	15	18	21	24
5	10	15	20	25	30	35	40

Cells from 15 to 35 are crossed out with an 'X'.

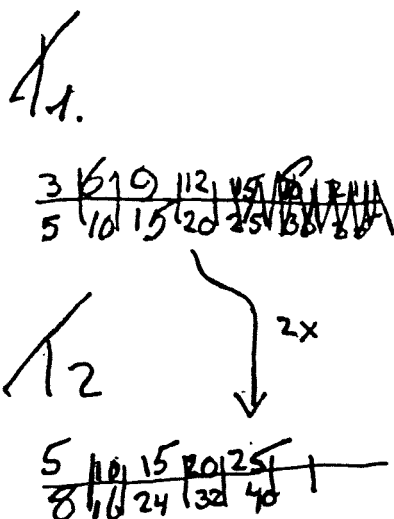
Tafel 2:

5	10	15	20	25	30
8	16	24	32	40	48

Cells 30 and 48 are crossed out with an 'X'.

Hetzelfde kan van deze oplossing gezegd worden, alleen worden nu overtoelinge verdeelsituaties doorgestreept.

3 Het werk van Jacqueline:



Dezelfde verkorting ook in het werk van Jacqueline, alleen streept zij nog een extra situatie door en maakt gebruik van dezelfde eigenschap van ϕ als Sylvia.

4 Het werk van Peter Jan:

tafel 1	tafel
3p- 5k	5p $\rightarrow$ 8
0 $\frac{3}{5}$	0 $\frac{5}{8}$
0 minder	0 meer
0 $\frac{1}{40}$	

Tafel 1

3	6	9	12	15	18	21	24
5	10	15	20	25	30	35	40

5	10	15	20	25			
8	16	24	32	40			

Het werk van Peter Jan is illustratief. De meeste leerlingen werken net zo met volledige oplossingen 'volgens het boekje'.

5 Het werk van Bert:

T1						T2					
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30		
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50		
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50		
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80		

Ook het meer dan voldoende ver uitschrijven van beide tabellen, gevolgd door onderlinge vergelijking, kwam voor.

Conclusie

Het ontbreken van voldoende ervaring met verhoudingen en het algoritmiseren daarbij, begint groep 1 parten te spelen.

Bij groep 2 beginnen zich steeds duidelijker niveauverschillen af te tekenen. Ruim de helft van de 24 leerlingen begint de systematiek van de aanpak min of meer in de vingers te krijgen. Enkele leerlingen zijn waarneembaar uit op het 'stroomlijnen' van de methode. De door hen aangebrachte verkortingen getuigen hiervan.

De toepassingen. Op weg naar een algoritme

Groep 1 bleef – zoals we hebben laten zien – tijdens de voortgang in het onderwijsexperiment steeds duidelijker achter op groep 2. Daarom werden de oorspronkelijke bedoelingen van de toepassingen bijgesteld. De nadruk in door de leerkracht vrij strak geleide lessen kwam te liggen op:

- de situaties, die er bij het vergelijken als eenvoudig uitsprongen (ook andere dan verdeelsituaties);
- het bedenken van nieuwe, in de uitkomst gelijkwaardige (verdeel-)situaties en het noteren in tabellen.

In hoofdstuk V par. 4.2 werd uitvoerig op deze kwesties ingegaan, vandaar dat de ervaringen met groep 1 – hoe interessant op zichzelf ook – nu verder buiten beschouwing gelaten worden. Het gaat er immers om een aanvaardbare didactische sequentie voor het algoritmiseren van het aftrekken (en optellen) van ongelijknamige breuken te ontwikkelen. Hieraan is door groep 1 belangrijk bijgedragen.

Voor het vervolg kunnen de leerlingen van groep 2 door hun oplossingsmethoden bij het progressief schematiseren wellicht nog wat duidelijkheid verschaffen met betrekking tot het stollen van de systematische aanpak tot een algoritme.

We beperken ons daarom tot een analyse van de manier, waarop de leerlingen van groep 2 de laatste van drie toepassingssituaties verwerkten. Het betrof:

*Iemand maakt koffie met een apparaat.
 De ene keer: drie schepjes koffie voor vier kopjes.
 Een andere keer: vier schepjes voor vijf kopjes.
 Welke koffie is sterker? (Verskil?)*

De leerkracht maakte er een persoonlijk verhaal van (met vrouw en dochter) en liet de leerlingen zelf bedenken – net zoals bij de eerder verwerkte toepassingen – welke vragen naar aanleiding van het twee keer koffiezetten kunnen worden opgeworpen. Dit leverde geen moeilijkheden op. ‘Welke koffie is het sterkst?’ en ‘Hoeveel sterker?’ (welk deel van een schepje per kop?).

Op deze inleiding volgde schriftelijke verwerking van het probleem. De helft van de leerlingen van groep 2 kon er nu volledig zelfstandig mee uit de voeten.

1 Tabellen samenstellen voor beide situaties en daarmee stoppen bij de eerste, gemakkelijk vergelijkbare:

schepjes	3	6	9	12	15
kopjes	4	8	12	16	20

en:

schepjes	4	8	12	16
kopjes	5	10	15	20

Zeven leerlingen gingen op deze manier te werk.

2 Als 1, waarbij de situaties:

S	12		S	12
K	16	en	K	15

met elkaar in verband gebracht werden (drie leerlingen).

3 Voor beide situaties tabellen met een voldoende geacht aantal getallenparen samenstellen en pas dan overgaan tot vergelijken en verschil bepalen. Van de zes leerlingen, die op deze manier te werk gingen, waren er twee die herhaald verdubbelden, waardoor juist de geschikte situatie buiten beschouwing bleef:

schepjes	3	6	12	24	48
kopjes	4	8	16	32	64

en:

schepjes	4	8	12	16
kopjes	5	10	15	20

Eén leerling vulde de tabellen in tot en met

S	32	respektievelijk	S	30
K	40		K	40

en kwam tot een 'sterkteverschil' per kop van $\frac{2}{40}$ schep.

4 Voor één situatie een tabel samenstellen en in de oplossing blijven steken.⁵¹⁾

5 Voor beide verhoudingen tabellen samenstellen tot aan de eerste gemakkelijk vergelijkbare situaties (dus aanpak als onder 1), doch met verkortingen 'onderweg'. Er waren zes leerlingen die deze aanpak gevolgd hadden. Vier van hen brachten een verkorting in maar één tabel aan, namelijk:

schepjes	4	8	16
kopjes	5	10	20

doch de beide overige leerlingen verkortten eveneens de andere tabel:

schepjes	3	6	12	15
kopjes	4	8	16	20

en:

schepjes	4	8	16
kopjes	5	10	20

(Voorlopige) conclusie

Op grond van het voorgaande lijkt de slotsom gerechtvaardigd, dat de leerlingen van groep 2 zich geleidelijk meester beginnen te maken van de systemati-

sche aanpak, die zal moeten voeren tot een algoritme voor het aftrekken (en optellen) van ongelijknamige breuken.

Doordat het algoritmiseren van verhoudingen als belangrijk toepassingsgebied voor de breuken is onderkend en deel uitmaakt van de geschetste systematische aanpak, heeft de nagestreefde algoritme dus een ruim toepassingsbereik.

In de slotparagraaf van dit hoofdstuk vatten we de belangrijkste stappen in het algoritmiseringsproces nog eens samen. Daarbij wordt recht gedaan aan de (voorlopige) conclusies, die tijdens de beschrijving van de onderzoeksresultaten tot dusver werden getrokken.

5 SAMENVATTING

De ontwikkelde deelleergang is nog niet af. Ook niet wanneer deze op grond van de (voorlopige) conclusies die getrokken werden, is aangepast.

Door de beperkte omvang van het ontwikkelingsonderzoek kan de deelleergang nog niet als 'uitgekristalliseerd' beschouwd worden.

Aan vergelijking van de effecten van de deelleergang met andere benaderingen dient minstens nóg 'een ronde' vooraf te gaan.

Het scheppen van de nodige voorwaarden om met het algoritmiseren van het aftrekken van breuken te kunnen beginnen, neemt al in een veel vroeger stadium van het breukenonderwijs een aanvang. Belangrijke kwesties als vergelijken en ordenen, de gelijkwaardigheid van verdeelsituaties en breuken maken er deel van uit. Vanwege deze kwestie zou herhaling van een beter gecontroleerd longitudinaal ontwikkelingsonderzoek meer op zijn plaats zijn dan een vergelijkend onderzoek. Voor de essentiële onderdelen zou ruimte voor diepte-onderzoek gereserveerd moeten worden om de gesignaleerde gebreken te kunnen elimineren.

Mede rekening houdend met de gevolgen voor de deelleergang van de tussentijds getrokken conclusies, zou deze er globaal geschetst als volgt kunnen uitzien. Niet met zekerheid is vast te stellen, waar de voorwaardenscheppende aanloop ophoudt en het algoritmiseringsproces een aanvang neemt.

De onderzoeksuitkomsten hebben uitgewezen, dat dit heel sterk afhankelijk is van de stand van zaken in het leerproces van individuele leerlingen.

Globale samenvatting van de 'deelleergang'

Voorwaarden

a) Breukbegrip en gelijkwaardigheid

Tijdens de veelsporige benadering van het breukbegrip met duidelijke verbanden naar verwante gebieden, zoals verhoudingen, wordt de uiteindelijke algoritme reeds in belangrijke mate voorbereid. Het breukbegrip verwerft dubbele betekenis bij de verkenning van verdeelsituaties, namelijk als verdeelsituatie en uitkomst daarvan, bijvoorbeeld:

$\frac{3}{4}$: 'vier kinderen verdelen drie pannenkoeken, elk krijgt $\frac{3}{4}$ pannenkoek'.

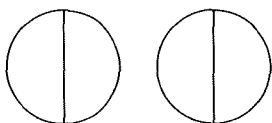
De breuk (in de breekrelatie) die de uitkomst beschrijft, blijkt een klasse van verdeelsituaties op dezelfde noemer te zetten. Zo'n breuk 'staat' als het ware 'voor' zo'n klasse van in de uitkomst gelijkwaardige verdeelsituaties:

$\frac{3}{4}$:	pannenkoeken	3	6	9	12	15					
	kinderen	4	8	12	16	20					

Verdeeltaken kunnen gedifferentieerd voltrokken worden; gedifferentieerde mogelijkheden tot beschrijven en het voorop staan van de bewerkingen zijn erin vervat. Gelijkwaardigheid van breuken doet zich dan (onder andere) voor als mogelijkheid tot gedifferentieerd beschrijven.

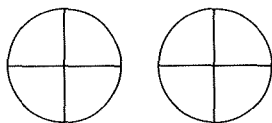
Bijvoorbeeld:

'vier kinderen verdelen twee pannenkoeken':



'ieder krijgt $\frac{1}{2}$ pannenkoek'

maar ook:



'ieder krijgt $\frac{2}{4}$ pannenkoek'

De leerlingen dienen zich van deze gelijkwaardigheid van breuken goed bewust te zijn, alvorens gelijkwaardigheid met algoritmische middelen wordt aangepakt.

b) Algoritmiseren van verhoudingen

Het algoritmiseren van verhoudingen is een belangrijk toepassingsgebied voor de breuken gebleken. De afbeelding, die aan een grootte een andere grootte verhoudingsgetrouw toewijst, blijkt te voldoen aan een aantal niet onbelangrijke eigenschappen. Bij het algoritmiseren van verhoudingen pasten vrijwel alle leerlingen in het onderzoek deze eigenschappen, althans voor een deel, toe, nadat ze eveneens zelfstandig door hen ontdekt waren. Het gedifferentieerde aanpakgedrag van de leerlingen werd er mede door getypeerd. Voordat tot het algoritmiseren van het aftrekken (en optellen) van ongelijknamige breuken wordt overgegaan, dienen deze eigenschappen 'gemeengoed' voor de leerlingen geworden te zijn, dat wil zeggen bewust gemaakt. Om hieraan te kunnen voldoen, zullen de nodige ervaringen met verhoudingen opgedaan moeten zijn, ook wat betreft het algoritmiseren van verhoudingen. De twee laatstgenoemde

eigenschappen van bedoelde afbeelding (zie hoofdstuk V par. 3.2) verwijzend naar *interne* en *externe* verhoudingen vormen hier onder andere een aanwijzing voor.

Van belang bij de bewustmaking van bedoelde eigenschappen is ook het ‘doorlopen van de weg terug’ bij het samenstellen van tabellen.

Bijvoorbeeld:

pannekoeken	3									30
kinderen	4									40

In het onderzoek kwam deze activiteit slechts incidenteel voor.

Als laatste aspect in verband met bedoelde eigenschappen, kan het bedenken van ‘tussensituaties’ of ‘tussenwaarden’ genoemd worden.

Bijvoorbeeld:

pannekoeken	3	6	9	12	15					
kinderen	4	8	12	16	20					

pannekoeken	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	③	$3\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	⑥		
kinderen	1	2	3	④	5	6	7	⑧		

c) Vergelijken, ordenen

Bij het veelsporig benaderen van het breukbegrip vanuit realiteiten, zijn vergelijken en ordenen in het geheel van activiteiten ingebed. Genoemde operaties bleven ons inziens tot dusver, althans in de aanloop tot het algoritmiseren, teveel *impliciet*. In het oog springende ‘gevallen’ zouden bewustgemaakt moeten worden bij de leerlingen. Voortdurende reflectie op de eigen activiteit van de leerlingen, ook op dit onderdeel, vermag dit teweeg te brengen. Langzaam maar zeker zal duidelijk moeten worden, dat twee gevallen er ‘echt’ uitspringen, namelijk wanneer twee vergeleken (verdeel-)situaties in één van beide grootheden gelijk zijn. Bij verdeelsituaties betreft dit respectievelijk aantallen pannekoeken of aantallen kinderen.

Van deze twee uitzonderingsgevallen blijft er dan tenslotte één over, waarbij niet alleen het vergelijken moeiteloos kan geschieden, doch tevens de bepaling van het verschil. Voor verdeelsituaties betreft het gelijkheid in aantallen kinderen. Voor andere situaties gaat het om de grootheid, die een andere grootheid verhoudingsgetrouw krijgt ‘toegewezen’. Bij dit alles hoort nog het nagaan of een gegeven (verdeel-)situatie al dan niet ‘strookt’ met een gegeven klasse van

Bijvoorbeeld:

P	36	en
K	40	

pannekoeken	4	8	12	16						
kinderen	5	10	15	20						

a)

pannekoeken	4	8	12	16						
kinderen	5	10	15	20						

wordt uitgebreid tot:

pannekoeken	4	8	12	16	20	24	28	32		
kinderen	5	10	15	20	25	30	35	40		

Diagram illustrating the multiplication of the number of pancakes (pannekoeken) and children (kinderen) by 2, showing the progression of values in a sequence.

dus

P	36	past niet;
K	40	

b)

P	36		
K	40		

uitbreiden tot:

pannekoeken								9	18	36
kinderen								10	20	40

en geschikte situaties vergelijken,

P	36	
K	40	

past niet.

Algoritmiseren van het aftrekken van breuken

De vraag naar het verschil bepaalt mede de koers bij voortgaand mathematiseren van het vergelijken en ordenen van (verhoudings-)situaties. Een andere koersbepaler is de vraag, of een willekeurige situatie zodanig kan worden omgezet, dat de verschilbepaling daarna zonder verdere ingrepen voltrokken kan worden. Deze vraag bepaalt bovendien voor een belangrijk deel de inhoud van het mathematiseringsproces. Het inpassen van een gegeven verdeelsituatie in een gegeven klasse van verdeelsituaties, wijst al sterk in die richting. Zijn we eenmaal zo ver, dat de leerlingen zich ervan bewust zijn, dat het gaat om het gelijk maken van (verdeel-)situaties in één 'grootheid' (de aantallen kinderen), dan wordt de beschikbare systematische procedure toegepast. Tijdens de veel-sporige benadering deden zich in breukverwekkende activiteiten reeds allerlei situaties voor, waarin het aftrekken (en ook optellen) van zowel gelijknamige als ongelijknamige breuken vervat was. Met gevallen als: $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$, $1 = \frac{4}{4}$, $2 - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, etc., zijn de leerlingen zo zeer vertrouwd, dat we dit verder bij het overzicht onvermeld laten, hoewel het als eerste stap een belangrijke voorwaarde is.

De essentiële stappen erin zijn:

Gevai: $\frac{2}{3} - \frac{3}{5} =$

Stap 1: het aanspreken van de bron van inzichtelijkheid, dat wil zeggen verband leggen met verdeelsituaties:

$\frac{2}{3}$: 'drie kinderen verdelen twee pannekoeken, ieder krijgt $\frac{2}{3}$ pannekoek';

$\frac{3}{5}$: 'vijf kinderen verdelen drie pannekoeken, ieder krijgt $\frac{3}{5}$ pannekoek'.

Stap 2: het samenstellen van tabellen met gelijkwaardige verdeelsituaties:

a)

 $\frac{2}{3}$:

pannekoeken	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
kinderen	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30

 $\frac{3}{5}$:

pannekoeken	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
kinderen	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Vergelijkbare (verdeel-)situaties selecteren als representanten voor beide klassen:

pannekoeken	2				10					20
kinderen	3				15					30

pannekoeken	3		9			18				
kinderen	5		15			30				

en verschil bepalen: $\frac{10}{15} - \frac{9}{15} = \frac{1}{15}$ of $\frac{20}{30} - \frac{18}{30} = \frac{2}{30}$.

$\frac{2}{30}$ (in verband brengen met verdeelsituatie en) terugbrengen tot $\frac{1}{15}$;

- als a) maar met de nodige verkortingen en voortschrijding in schematisering. Hiervoor zij verwezen naar het leerlingenwerk, waarin vrijwel alle mogelijke niveaus van schematiseren en verkorten geïllustreerd zijn.

Stap 3:

- a) vanuit 2b) toewerken naar het zonder tussenstappen omzetten van de breuken in de opgave in daarmee gelijkwaardige breuken, die gelijknamig zijn:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} \rightarrow \frac{10}{15} \\ \frac{3}{5} \rightarrow \frac{9}{15} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{10}{15} - \frac{9}{15} = \frac{1}{15}$$

- b) als 3a), doch zonder zichtbare rudimenten van de tabelmethode:

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{10}{15} - \frac{9}{15} = \frac{1}{15}$$

- c) als b), waarbij de gemeenschappelijke noemer via de zogenaamde kgv-methode bepaald wordt.

In het beschreven ontwikkelingsonderzoek bepaalde de voorgaande systematische procedure tot en met stap 2 de inhoud van het nauwgezet gevolgde onderwijsleerproces. Desondanks werd voor een grondiger ronde van hernieuwd ontwikkelingsonderzoek gepleit (overigens zou nu meer nadruk op de onderzoekscomponent moeten komen te liggen). Als argumentatie kan onder meer het leerproces van de onderzoeker genoemd worden. Door deel te hebben aan het gegeven onderwijs, aan de ontwikkeling en nauwgezette observatie ervan, werd het inzicht met betrekking tot de beschouwde problematiek, namelijk het algoritmiseren van bewerkingen met breuken, verscherpt. De inhoud van dit hoofdstuk getuigt hiervan. Verscherpte en eventueel nieuwe inzichten rechtvaardigen een herhaling. Maar ook het feit, dat de leerlingen in het onderzoek te snel weer uit het oog verloren werden. Hun algoritmiseringsproces was niet af, bij lange na nog niet.

VI RESPONS UIT KLEINE KRING

1 INLEIDING EN OVERZICHT

Bij de bedoelingen voor deze studie werd mede uiteengezet dat we – werkend in de ‘context of persuasion’ – de reacties van een klein aantal deskundigen niet onvermeld zouden laten.

Enkele fundamentele kwesties, die werden aangesneden, worden achtereenvolgens besproken en voorzien van een reactie onzerzijds. Het betreft onze interpretatie van algoritmiseren, het opschorten van het algoritmiseren en de algoritmische instelling van kinderen, het waarom van de eensporigheid bij het algoritmiseren en de (theoretische) relatie tussen eensporigheid en veelsporigheid. Tevens willen we ingaan op kwesties die verband houden met het breukbegrip, het accent op gelijkwaardigheid en de geringe betekenis daarvan voor het algoritmiseren van de bewerking vermenigvuldigen van breuken, kinderlijke situaties en de realiteit van en voor kinderen. We beginnen echter met een overzicht van ‘nieuwe’ elementen, die onze benadering van de breuken bevat, vergeleken met gangbare benaderingen. Bij het vervolgens ingaan op de vraagpunten, die de deskundigen inbrachten, vindt steeds terugkoppeling naar de theoretische uitgangspunten plaats.

2 KENSCHETS VAN DE GEVOLGDE BENADERING

In de aanloop tot het algoritmiseren werd het breukenonderwijs dat de leerlingen in het onderzoek volgden, globaal geschetst. Omdat we ons hier willen beperken tot een kenschets van ‘het nieuwe’ in de ontwikkelde deelleergang, beperken we ons wat ‘de aanloop’ betreft, tot die aspecten die direct ‘doorwerken’ in de deelleergang.

Het betreft:

- het optellen en aftrekken van gelijknamige breuken, ingebed in het voltrekken en beschrijven van breukverwekkende activiteiten;
- het vergelijken en ordenen van allerlei situaties, veelal kwalitatief, in eenvoudige gevallen eveneens kwantitatief;
- het werken met verhoudingstabellen.

De deelleergang zelf bevat de volgende nieuwe elementen:

- er wordt uitgegaan van klassen van in de uitkomst gelijkwaardige verdeelsituaties, waardoor een opening geboden wordt naar het gebied van de verhoudingen.
- door het uitgaan van gelijkwaardige verdeelsituaties en uitkomsten wordt de

- gelijkwaardigheid van breuken hecht verankerd in het verdelen zelf, krijgt daarin betekenis en wordt pas later algoritmisch geverifieerd;
- er is sterk gelet op kinderen, hun noties omtrent breuken, hun misvattingen, hun voorkeuren (ook de algoritmische);¹⁾
 - de ontwikkelde algoritme krijgt betekenis vanuit het breukbegrip bij het eerlijk verdelen, het vergelijken en ordenen van verdeelsituaties en uitkomsten. De algoritme berust op een brede oriënteringsbasis en kan grotendeels door de leerlingen zelf geconstrueerd worden.
 - het vergelijken en ordenen van verdeelsituaties en uitkomsten speelt een centrale rol. Daarom richt zich de aandacht bij de *systematische ontwikkeling* van een algoritme in eerste instantie op het *afrekken*, als meest natuurlijk vervolg in de sequentie;
 - kenmerkend voor het vergelijken en ordenen is de aanvankelijk kwalitatieve benadering.
- Het weglaten in eerste aanleg van de eis tot numerieke precisie vergemakkelijkt voor de kinderen het beargumenteren van door hen voorgestelde ordeningen. De precieze bepaling van het verschil tussen uitkomsten van willekeurige verdeelsituaties is zonder meer lastig te noemen. Uit de kwalitatieve benadering van het begin ligt bij de vraag naar de grootte van het verschil het zoeken naar gemakkelijk vergelijkbare situaties voor de hand, waarbij die met gelijke aantallen kinderen ‘eruit springen’;
- bij de aanvang van het algoritmiseringsproces is de ‘globale-methode-ineens’ beschikbaar. De algoritme wordt in het proces grotendeels door de leerlingen zelf ontwikkeld. Het proces kenmerkt zich, gemeten naar de toegepaste middelen, door voortschrijden in schematisering en het aanbrengen van verkortingen.

3 OVER ALGORITMISEREN

‘Algoritmiseren’ en ‘algoritmen’ zijn begrippen, die onder meer vanuit de traditie van het rekenen en de onderwijspsychologie speciale betekenis verwierven. Op deze betekenis werd in hoofdstuk V ingegaan.

De vraag rees, wat in deze studie precies met algoritmiseren bedoeld wordt. Op diverse plaatsen zijn we op deze kwestie ingegaan²⁾ en is de tekst naar aanleiding van deze vraag ook wat bijgesteld. In onze opvatting ligt het accent op het algoritmiseringsproces. Het is een proces van mathematiseren, dat zich in contexten afspeelt. De bedoeling is, dat de bronnen van inzichtelijkheid niet verstopt worden bij het algoritmiseren. Het gaat er niet om een bepaald recept – eventueel aangereikt als truc aan de leerlingen – te verschaffen, dat ‘oplossingszekerheid’ biedt. Veel meer is het er ons om te doen de leerlingen een proces te laten ervaren dat ‘instapszekerheid’ biedt, waar je mee op weg kunt als leerling naar een oplossing bij problemen, die als toepassingsgebied voor de (zelf) ontwikkelde algoritme herkend worden. Wanneer gesproken wordt over ‘uitstellen’ of ‘opschorten’ van het algoritmiseren, dan is bedoeld uitstel van het vast-

stellen van de definitieve stap-voor-stap-procedures. De vraag rees, in hoeverre dit te rijmen is met de neiging tot algoritmiseren die kinderen in het (reken-)onderwijs ‘van nature’ blijken te hebben.

Bij de beschrijving van de onderzoeksresultaten is eveneens gebleken dat kinderen graag – op algoritmische routine drijvend – reeksen van uitkomsten produceren.

Ons antwoord op de gestelde vraag luidt dat de beschikbaarheid van de globale methode-ineens bij het algoritmiseringsproces juist tegemoet komt aan bedoelde kinderlijke behoefte aan (of neiging tot) algoritmiseren. Bovendien is het mogelijk op vrijwel ieder niveau van wiskunde leren te algoritmiseren. Dit geldt zeker voor verschillende stadia in het door ons geschetste algoritmiseringsproces.

Voorbeelden

- Bij ‘ieder krijgt $\frac{3}{4}$ pannekoek’ bedachten enkele kinderen de verdeelsituatie:

P	3000	
K	4000	

Op de vraag hoe dit te rijmen viel met ‘De Smickel’ luidde het antwoord:

P	3000	
K	4000	

‘is niet voor één keer, maar voor een maand’.

Ook dit is een aspect van het (horizontaal) mathematiseren: het ‘terugvertalen’ van uitkomsten in de context. In termen van Skemp gaat het om relationeel begrijpen. Het algoritmische gedrag, dat kinderen vertoonden, berust op het doorhebben van regelmatigheden. Daar werken ze mee. Het begrijpen is dan meer instrumenteel.³⁾

- 2 Bij ‘ieder krijg $\frac{3}{4}$ pannekoek’ werd door Christel de volgende tabel geproduceerd:

pannekoeken	-15	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
kinderen	-20	-16	-12	-8	-4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

Verder commentaar lijkt ons overbodig.

4 EENSPORIGHEID EN VEELSPORIGHEID

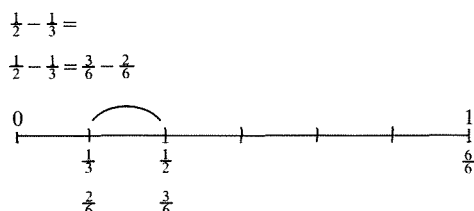
De kernvragen die door de deskundigen gesteld werden, betroffen de kwesties van de eensporigheid bij het algoritmiseren en de relatie eensporigheid–veelsporigheid. ‘Waarom’, zo luidde een eerste vraag, ‘zou men bij het algoritmiseren eensporigheid nastreven?’ In de begripsvormende fase worden begrippen, operaties e.d. veelsporig benaderd. In realistisch wiskunde-onderwijs benut men daartoe allerlei premathematische toegangen. Het begrip, de bewerking, schept orde in de verschijnselen, brengt ze onder dezelfde wiskundige noemer. Zo zal bij een veelsporige benadering de leerling in herhaald hetzelfde bijvoegen, springen, combineren, permuteren, eenheden veranderen, vergroten etc. de operatie vermenigvuldigen moeten leren herkennen, eruit abstraheren. Uiteindelijk blijken al deze verschijningsvormen van het vermenigvuldigen – hoewel in eerste aanleg ogenschijnlijk verschillend – tot de herhaalde optelling terug te voeren.

Herhaald optellen als operatie is dus in feite in alle geschetste situaties toepasbaar, heeft een breed toepassingsgebied. Deze operatie dient zich dus natuurlijk aan als het ene spoor voor het algoritmiseren bij vermenigvuldigen met een breed toepassingsgebied.

Voor de breuken werd het verdelen als zo’n spoor onderkend.⁴⁾ Het antwoord op de betrokken vraag luidt derhalve, dat de eensporigheid bij het algoritmiseren gemotiveerd wordt door een mathematisch-didactische analyse van de betrokken bewerking.

Een kernvraag, die hierop aansloot, luidde: Heeft de geschetste aanpak vanuit verdeelsituaties en verdelen psychologisch gezien inderdaad de gesuggereerde structuurovereenkomst met allerlei toepassingssituaties? Is de geschetste benadering van het algoritmiseren van de bewerking(en) aftrekken (en optellen) wel in alle gevallen toepasbaar? Kunnen alle toepassingen met verdelingen in verband gebracht worden? Hoe zit het bijvoorbeeld met het meten? Dient de hele benadering vanuit verdeelsituaties en tabellen niet visueel ondersteund te worden met de getallenlijn?

Bijvoorbeeld:



Het is achteraf bezien, inderdaad de vraag of de bepleite eensporigheid wel gerechtvaardigd is, of ze überhaupt mogelijk is, bij het breukrekenen. Het voorbeeld $101\frac{2}{5} - 100\frac{1}{8}$ heeft als verdeelprobleem alle natuurlijkheid verloren. De gestelde vraag is fundamenteel te noemen, omdat ze verwijst naar een

uiterst belangrijk theoretische kwestie, namelijk de relatie tussen eensporigheid bij het algoritmiseren en de veelsporige benadering van de bewerkingen zelf. Het lijkt alleszins de moeite waard in een hernieuwd ontwikkelingsonderzoek na te gaan, of de getallenlijn als visualiseringsmodel van het algoritmiseringsproces tot een verbeterde deelleergang leidt. Er moet vooral nagegaan of de toepasbaarheid van de algoritme erdoor vergroot zou kunnen worden. Overigens is het zo, dat juist het gebied van het meten goede ontsnappingsmogelijkheden biedt om aan de breuken te ontkomen. Door in geval van noodzakelijke maatverfijningen bij het meten steeds decimaal te werk te gaan, opent men de weg naar de kommabreuken.

Het mathematiseren binnen dit gebied sluit sterk aan bij de natuurlijke getallen, onder andere door de uitbreiding die het positionele stelsel voor notatie van getallen ondergaat. Het is daarom de vraag of het meten niet als 'apart' gebied beschouwd dient te worden, of het wel zo strict noodzakelijk is, dat de voorgestelde eensporige benadering ook bij problemen uit het gebied van het meten toepassing vindt. Los van deze kwestie blijft echter 'overeind' dat 'eensporigheid' en 'veelsporigheid' zich wellicht niet zonder meer als samenhangende bouwstenen voor een theorie van het wiskundeonderwijs laten generaliseren.

5 BREUKBEGRIIP EN GELIJKWAARDIGHEID

Een belangrijke vraag betrof ook het breukbegrip zelf en de gelijkwaardigheid van breuken. Wat het breukbegrip betreft, ging het vooral om de betekenis van de verschilbepaling.

Bijvoorbeeld:

pannekoeken	1	2	3	4
kinderen	3	6	9	12

pannekoeken	1	2	3
kinderen	4	8	12

de situaties:

P	4		en	P	3	
K	12			K	12	

De vraag betrof het verband tussen 'het verschil voor het collectief' en 'het ver-

schil voor elke individuele gegadigde' binnen de verdeelsituatie. De vraagstelling heeft dus duidelijk betrekking op de dubbele betekenis die het breukbegrip voor de leerlingen verwierf. Op deze kwestie zijn we vrij uitvoerig ingegaan. We volstaan met een verwijzing naar hoofdstuk IV par. 4.3. De vraag met betrekking tot de gelijkwaardigheid behelsde de betekenis van gelijkwaardigheid voor het vermenigvuldigen van breuken.

In par. 3.3 van hetzelfde hoofdstuk hebben we de eventuele betekenis van gelijkwaardigheid voor het delen van breuken laten zien. Het vermenigvuldigen van breuken lijkt als bewerking in dit opzicht een 'buitenbeentje'. Vooralsnog lijkt de betekenis van gelijkwaardigheid voor het algoritmiseringsproces bij het vermenigvuldigen van breuken niet erg groot.

Nadere mathematisch-didactische analyse zal aan het licht moeten brengen wat de mogelijkheden zijn. Uit de voorbeelden in hoofdstuk III par. 5 blijkt, hoe voor modelgebruik daarbij een belangrijke plaats is weggelegd. Wanneer eenmaal een algoritme voor het vermenigvuldigen van breuken beschikbaar is, zou toepassing van gelijkwaardigheid de individuele verwerking van opgaven kunnen kleuren.

Bijvoorbeeld:

$$1\frac{1}{4} \times 1\frac{2}{3} =$$

$$\frac{5}{4} \times \frac{5}{3} =$$

$$\frac{5}{4} \times \frac{20}{12} =$$

$$5 \times \frac{1}{4} \times \frac{20}{12} =$$

$$5 \times (\frac{1}{4} \times \frac{20}{12}) =$$

$$5 \times \frac{5}{12} = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$$

De laatste essentiële kwestie die in de fundamentele vragen over deze studie werd aangesneden, gaat over het volgende.

6 DE REALITEIT VAN EN VOOR KINDEREN

Bij herhaling werd er in deze studie gesproken over de realiteit van en voor kinderen, het uitgaan van contexten, uitgaan van datgene, wat kinderen in cognitief en affectief opzicht aanspreekt. De vraag is dan gerechtvaardigd of verdeelsituaties, het maken van limonade e.d. de kinderlijke situaties zijn die we op het oog hebben en beantwoorden aan de eisen, die we eraan stelden. We zijn van mening dat een dergelijke vraag niet alleen op grond van mathematisch-didactische analyses beantwoord kan worden doch beantwoord dient te worden door de kinderen zelf, door de wijze waarop zij op bepaalde activiteiten reageren in de onderwijsleersituatie.⁵⁾

In geval van het pannenkoekenhuis 'De Smickel' is het niet zozeer de realiteit van

het hele gebeuren in het pannekoekenhuis dat de kinderen zo aanspreekt, doch de activiteit van het eerlijk verdelen. Dit zo efficiënt en dikwijls ook zo origineel mogelijk te doen, dat is wat de leerlingen in het onderzoek vooral sterk motiveerde en inspireerde. We hebben de indruk, dat het eerlijk verdelen kinderen zowel cognitief als emotioneel aanspreekt. Op deze beide aspecten zal men onder andere moeten letten, wanneer men zich afvraagt of een in het onderwijs te brengen situatie kinderlijk is, tot de realiteit van en voor kinderen gerekend kan worden.

7 RESUMÉ

Een kleine kring van deskundigen wierp na lezing van de eerste versie van het manuscript van deze studie een aantal fundamentele vragen op. Gepoogd werd daarop (voorlopige) antwoorden te formuleren. Het betrof achtereenvolgens de interpretatie van algoritmiseren in deze studie, het tegemoet komen aan de kinderlijke neiging tot algoritmiseren, het waarom van de eensporigheid bij het algoritmiseren, de (theoretische) samenhang tussen eensporigheid bij het algoritmiseren en de veelsporige benadering van begrippen e.d.

Ook werd op enkele vragen in verband met aspecten van het breukbegrip de betekenis van gelijkwaardigheid voor het vermenigvuldigen van breuken en de realiteit van en voor kinderen ingegaan.

Voorzover de ingebrachte opmerkingen niet in dit hoofdstuk zijn terug te vinden, werd er dankbaar gebruik van gemaakt de tekst op diverse plaatsen aan te passen en te verbeteren.

ren van eenvoudige breuken (als uitkomsten van verdeelsituaties, als sprongen op de getallenlijn).

Zo werd het informeel opereren als een essentieel bestanddeel van het voltrekken van breukverwekkende processen onderkend. Beschrijvingen als 'een kwart en een halve kwart is drie-achtsten' getuigden ervan.

Het omgekeerde vond echter niet of nauwelijks plaats, nl. uitgaande van 'een kwart' vaststellen, dat daarin 'twee halve kwarten' of 'twee-achtsten' opgaan, dus $\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$. Dat is wat we bedoelden met het structureren van breuken.

Om een (voorlopig) antwoord op voorgaande vragen te vinden werden aan 10 leerlingen van het zesde leerjaar in eerste instantie enkele kale, contextloze vraagstukken voorgelegd.

In volgende ronden kregen deze leerlingen vraagstukken, waarbij de getallenlijn een rol speelde. Eerst het plaatsen van breuken op de getallenlijn en vervolgens het opereren (optellen en aftrekken) op de getallenlijn, in de laatste ronde voorafgegaan door het doen van schattingen.

Men zou hiertegen kunnen inbrengen, dat dit het volgen van de omgekeerde weg is. In feite is dat natuurlijk ook zo. Met het oog op de vragen, waarop we een antwoord trachten te vinden lijkt de gekozen weg echter uitermate geschikt. Naar het oordeel van hun leerkracht bestond de groep geïnterviewde en geobserveerde leerlingen uit 2 goede (g), 3 gemiddelde (m), 3 zwakke (z) en 2 zeer zwakke (zz) leerlingen. Zes weken voorafgaande aan het onderzoek hadden deze leerlingen het aftrekken van breuken geleerd, zoals in het vijfde hoofdstuk beschreven. Nadien was er incidenteel deze tabelmethode nog wel eens toegepast, doch de beide laatste weken voorafgaande aan dit voortgezette onderzoek hadden de kinderen geen breukenonderwijs meer gehad.

De uitkomsten van de observatie-interviews zullen globaal geschetst worden en toegelicht met voorbeelden en protocolgedeelten. Daarbij zullen speciaal in acht genomen worden de aspecten die verband houden met de vragen die zojuist werden opgeworpen, zoals

- de kwaliteit van het breukbegrip van de leerlingen;
- de beschikbaarheid van de aftrekalgoritme;
- het al dan niet noodzakelijk zijn van het eerst herhalen van delen van het voorafgaande leerproces;
- het denken van een context achter een kaal vraagstuk;
- verkortingen die verder reiken dan de niveaus van schematiseren en verkorten zoals die in de oorspronkelijke deelleergang bereikt werden.

VII VOORTGEZET ONDERZOEK¹⁾

1 INLEIDING

Bij herhaling werd beklemtoond, dat het onderzoek, zoals beschreven in het vijfde hoofdstuk niet af was. Bovendien werd bij de respons uit een kleine kring van deskundigen een mogelijke tekortkoming in de opzet van de deelleergang aangewezen, nl. het inzetten van de getallenlijn bij het ontwikkelen van procedures voor het aftrekken en optellen van ongelijknamige breuken (VI.4).

Een eensporig ontwikkeld algoritme dient veelzijdig toepasbaar te zijn, ook in situaties die meer op de getallenlijn zijn toegesneden.²⁾

Het is om genoemde redenen, dat in dit gedeelte enige aandacht besteed zal worden aan een vervolg(onderzoek). Zulk een vervolg is mede bedoeld om toe te lichten, dat de door de leerlingen toegepaste procedures op verschillende niveaus van abstractie voltrokken kunnen worden (V.3.3).

De volgende kwesties zullen, voorzover mogelijk worden nagegaan.

- In hoeverre heeft het onderwijs als geschetst (hoofdstukken IV en V) effect over langere termijn? Het betreft dan b.v. de mogelijkheid van de leerlingen de geleerde methode van breuken aftrekken te reproduceren; maar ook de hechtheid van hun breukbegrip. Is er b.v. nog steeds storende invloed merkbaar van de betekenis van cijfersymbolen en operatietekens uit het rekenen met natuurlijke getallen (I.2.3).

Kunnen er aanwijzingen verkregen worden, dat door het inzetten van de getallenlijn het hele leerproces wat beter ondersteund wordt?

- Heeft een contextloze opgave als $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$ voor de leerlingen betekenis verworven? M.a.w. zijn de leerlingen in staat iets achter een dergelijke opgave te (be)denken dat het oplossingsproces ondersteunt en in hoeverre bestaat daaraan nog behoefte.
- Het algoritmiseringsproces, zoals dat in het vijfde hoofdstuk werd beschreven reikte voor de leerlingen die aan het onderzoek meededen niet tot de uiterste verkorting. Interessant is het dus ook na te gaan in hoeverre leerlingen later (zelfstandig) nog verdere verkortingen aanbrengen en of ze in staat zijn de methode volledig van de reële voorbeelden te abstraheren en deze in algemene zin toe te passen voor het aftrekken (en optellen) van ongelijknamige breuken.

Voor het overige zijn er natuurlijk allerlei kwesties die bijvoorbeeld verband houden met de juiste dosering van bepaalde oefenmomenten of hiaten. Zo zijn we op voorhand van mening dat aan het bedenken van verdeelsituaties bij uitkomsten als $1\frac{1}{4}$ onvoldoende aandacht is besteed. Dat geldt ook voor het structure-

2 DE KALE VRAAGSTUKKEN

2.1 De opgaven

Afhankelijk van het verloop van een interview werden de vraagstukken gekozen uit:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{3} =$$

(evt. als extra: $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, afhankelijk van het gespreksverloop.)

Met dit vraagstuk werd elk interview begonnen, vanwege het ingebouwde conflict. Ontmaskering hiervan in een vroeg stadium zou een aanwijzing kunnen vormen voor de aanwezigheid van een hecht breukbegrip, dat bestand is tegen de afleiding door de natuurlijke getallen. Dit betekent niet, dat men omgekeerd tot een zwak breukbegrip mag besluiten, wanneer leerlingen geen conflict zien en argeloos aan de slag gaan met de gevraagde verschilbepaling. Bovendien – en dat is het mooie van zo'n vraagstuk – zijn er latere instanties, waarin de leerlingen alsnog voor het conflict gesteld kunnen worden.

$$\frac{3}{8} - \frac{3}{12} =$$

(als extra evt. $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}$, afhankelijk van het gespreksverloop).

Dit vraagstuk werd gegeven vanwege de gemeenschappelijke factor 4 in 8 en 12. De leerlingen die $\frac{3}{12}$ in verband zouden brengen met $\frac{1}{4}$ en $\frac{2}{8}$, konden snel tot een oplossing komen. Dit zou tevens (opnieuw) getuigen van een reflectieve instelling en het dus niet stante pede zwichten voor de neiging er de gekende algoritme maar op los te laten.

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{5} =$$

Een gewone opgave die zonder meer moest uitnodigen tot toepassing van wat geleerd was.

$$1\frac{5}{6} + 1\frac{1}{8} =$$

(vervangende opgaven: $1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{3} =$; $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{5} =$).

Enkele alternatieve optelopgaven met 'helen erbij'. Dit leverde opnieuw een gering conflict. In de 'gewone lessen' in de klas waren er bij zulke opgaven nog geen helen aan te pas gekomen. 'Hoe moet je daarmee nu als leerling omspringen bij het toepassen van de tabelmethode?'

2.2 Het vraagstuk concreet maken

Van de tien leerlingen was er één (zz), die helemaal geen raad wist met de eerste opdracht. Deze stelde $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$, '... want zó heb ik het geleerd'.

De tweede (zz) leerling kon deze opgave wel visualiseren door middel van tekeningetjes (op uitnodiging van de onderzoeker), doch wist er geen verhaal bij te bedenken. In de loop van het gesprek gaf deze leerling er blijk van weinig notie te hebben van op de uitkomst gelijkwaardige verdeelsituaties, waarop de deel-leergang was gebaseerd.

De overige acht leerlingen hadden er geen moeite mee een concretisering achter het vraagstuk te denken, waarbij er één (z) wat op gang geholpen moest worden.

Vijf van deze acht leerlingen refereerden aan verdeelsituaties met uitkomsten (resp. pannenkoeken en taarten).

Eén leerling (m) noemde ook 'tijd' en 'geld' als mogelijke toepassingsgebieden.

Ter illustratie nemen we twee voorbeelden van leerlingenwerk op:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{3} =$$

Als moeder één pannenkoek bakte dan er zaten 4 kinderen aan tafel dan krijgt ieder een $\frac{1}{4}$ stuk maar er is er 2n kind niet dus moet moeder die pannenkoek in drieën verdelen nu krijgen ze dus meer.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{4} \quad \frac{2}{8} \quad \frac{3}{12} \\ \hline \frac{1}{3} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{3}{9} \quad \frac{4}{12} \end{array}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{3}{8} - \frac{3}{12} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

Het werk van J (m)

$$2 \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{1}{15}$$



3 kinderen delen 3 pannenkoeken
ze krijgen ~~allebei~~ evenveel en

5 kinderen delen 3 pannenkoeken
zij krijgen ook allemaal evenveel.

$$\begin{array}{r} \frac{2}{3} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{6}{9} \quad \frac{8}{12} \\ \hline \frac{3}{5} \quad \frac{6}{10} \quad \frac{9}{15} \quad \frac{12}{20} \end{array}$$



ieder krijgt $\frac{3}{5}$ deel

Werk van P_H (z)

Uit het werk van J blijkt, dat zij het conflict al ontmaskerde bij het concreet maken van het vraagstuk: ‘t Is een gemeen sommetje’, merkte zij op.

Van de overige negen leerlingen ontmaskerden er nog drie het conflict onmiddellijk bij het concretiseren (g; m; m).

Vijf leerlingen stelden eerst vast dat de opgave onjuist was, nadat zij de breuken gelijknamig gemaakt hadden en zagen, dat de aftrekking niet kon worden uitgevoerd (g, z, z, z, zz). Van deze vijf waren er twee leerlingen die met stelligheid beweerden, dat $\frac{1}{4} > \frac{1}{3}$ is. De laatste leerling (zz) wist met de opgave helemaal geen raad, zoals reeds gemeld werd.

In dit stadium van de uitkomstenbeschrijving kan reeds gesteld worden, dat de ‘groep van tien’ grofweg uiteenvalt in twee typen leerlingen, nl. zij die het betekenisverlenende houvast van een context achter een breukenopgave (nog) niet kunnen missen en degenen voor wie het bedenken van een verhaal achter een opgave een geforceerde bezigheid is, omdat hieraan geen behoefte meer bestaat en zij zonder dat heel goed in staat zijn met ongelijknamige breuken op adequate wijze om te springen.

Door de overige resultaten – zoals nog zal blijken – wordt deze tweedeling niet alleen bevestigd, maar ook nog wat nader genuanceerd. Op de kwaliteit van het breukbegrip bij deze tien leerlingen wordt ingegaan in par. 5.

2.3 Beschikbaarheid van de tabelmethode

Stadia van verkorting

Er was slechts één leerling (zz) die zich de procedure niet te binnen wist te brengen en voor wie het destijds doorlopen leerproces nog eens versneld moest worden herhaald. Van de overige negen leerlingen wisten er acht duidelijk raad met de opgaven. Ze stapten er zonder hulp in.

Eén ll. (m) moest duidelijk op gang geholpen worden.

Dit neemt overigens niet weg, dat er geen ingrijpende verschillen zouden zijn tussen de leerlingen onderling, wat hun vaardigheid en stadium van verkorting aangaat. Ja zelfs binnen het oplossingsgedrag van éénzelfde leerling bij verschillende opgaven vielen dergelijke verschillen waar te nemen.

Drie leerlingen (g, m, z), die het meest doelmatig, het meest gesystematiseerd te werk gingen, waren duidelijk gericht op het vinden van gelijke noemers en gaven hieraan ook uiting.

De geobserveerde oplossingen kenmerkten zich door algoritmisch tabelgebruik met de volgende verkortingsstadia:

a₁ het samenstellen van tabellen voor beide situaties en daarmee stoppen bij de eerst gemakkelijk vergelijkbare:

$$\frac{1}{4} \left| \frac{2}{8} \right| \frac{3}{12} \quad \text{en} \quad \frac{1}{3} \left| \frac{2}{6} \right| \frac{3}{9} \left| \frac{4}{12} \right| \quad (\text{pag. 108, nr. 1}) (6 \text{ ll.})$$

a₂ het aanbrengen van extra verkortingen ‘onderweg’, b.v.:

$$\frac{3}{8} - \frac{3}{12} = \frac{3}{8} \left| \frac{9}{24} \right| \quad \text{en} \quad \frac{3}{12} \left| \frac{6}{24} \right| \quad (\text{pag. 109, nr. 5}) (1 \text{ ll.})$$

- b het toepassen van de uiterste verkorting, volgens wat genoemd werd de 'kgv-methode'.

Bijvoorbeeld:

$$\frac{3}{8} - \frac{3}{12} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} \quad (\text{p. 115, stap 3c) (2 ll.)}$$

$$\frac{9}{24} - \frac{6}{24}$$

Deze werkwijze werd in een enkel geval ondersteund, doordat enkele tafelprodukten werden uitgeschreven voor de tellers en noemers van de gegeven breuken.

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{31}{12}$$

$$\begin{array}{l} 4 \times 3 = 12 \\ 4 \times 1 = 4 \\ 3 \times 4 = 12 \\ 3 \times 1 = 3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 4 \times 3 = 12 \\ 4 \times 1 = 4 \\ 3 \times 4 = 12 \\ 3 \times 1 = 3 \end{array}} \right\} + \begin{array}{l} 2 \text{ (noemers)} \\ 1 \text{ (tellers)} \end{array}$$

B's (g) werk

Hiermee zijn de stadia van verkorting die geobserveerd werden wel aangegeven. Desondanks is een nadere nuancering ervan middels de volgende kanttekeningen op zijn plaats.

Opgemerkt werd al, dat binnen het oplossingsgedrag van éénzelfde leerling het stadium van verkorting kan variëren, afhankelijk van de gestelde opgave. Zo was er één leerlinge (m), die alle genoemde verkortingsstadia verwerkte, te weten a_1 bij opgave 1 en 4, a_2 bij opgave 2 en b bij opgave 3. Ook anderen gaven hiervan blijk.

Deze vaststelling is uiterst gewichtig omdat ermee aangetoond wordt, dat ook hier de methode van progressieve schematisering 'terugval' tot een vroeger stadium van verkorting mogelijk maakt. Bovendien kan deze methode kennelijk door een deel van de kinderen zo flexibel worden toegepast, dat het niveau van verkorting aangepast wordt aan de eisen, die een bepaalde opgave aan de leerlingen stelt.³⁾

Behalve tabellen werden eveneens rijtjes van in de uitkomst gelijkwaardige (ver)delingen toegepast. Deze methode was in het schoolprogramma eveneens aan de orde geweest.

$$\textcircled{2} \quad \frac{3}{8} - \frac{3}{12} =$$

$$\begin{array}{r} 3:8 \\ 6:16 \\ 9:24 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3:12 \\ 6:24 \\ 9:36 \end{array}$$

$$\frac{9}{24} - \frac{6}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

't Werk van S (z)

De leerlingen die dit deden pasten ook de tabelmethode toe bij andere opgaven. Een geheel eigen verkortingsmethode, die nog niet vermeld is tot dusver, werd door één leerlinge (m) toegepast. Kennelijk belust op efficiency volstond zij namelijk met het samenstellen van slechts één tabel, waarin uitsluitend de noemers van beide breuken voor verschillende verdeelsituaties werden opgenomen.

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3}{12} - \frac{4}{12}$$



$$\begin{array}{c|c|c|c|} 1 & 8 & 12 & 16 \\ \hline 3 & 6 & 9 & 12 \end{array}$$

$$\frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{2} - \frac{2}{5}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ \hline 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{array}$$

$$\frac{5}{10} - \frac{4}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{5}{10} - \frac{4}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\begin{array}{c|c|} 2 & 4 \\ \hline 5 & 10 \end{array}$$

't Werk van E (m)

Zolang het om verschilbepaling van stambreuken ging, werkte de methode feilloos: Bij de verschilbepaling van $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} =$ staan de gemeenschappelijke noemers in de tabel resp. op de derde en vierde plaats, dus kan de opgave omgezet worden in $\frac{3}{12} - \frac{4}{12}$, aldus luidt de redenering van deze leerlinge. Om die reden kreeg zij een afwijkende tweede opgave, nl. $\frac{1}{2} - \frac{2}{5} =$. Prompt verzuumde zij bij haar verkorte methode rekening te houden met de teller 2 in $\frac{2}{5}$. Desgevraagd wist zij toen deze opgave volgens de dubbele tabelmethode, op te lossen, waardoor zij haar eigen fout ontmaskerde en zich bewust werd van deze nadelige kant van haar aanpak. Bij de volgende opgaven, opgelost volgens haar eigen verkorte methode, trapte zij niet meer in deze valstrik.

Tenslotte zij nog vermeld, dat bij enkele zwakkere leerlingen eigenaardigheden – zeg fouten – werden opgemerkt in de toepassing van de tabelmethode, die in V.4 in alle uitvoerigheid besproken zijn.

Het betrof:

- afgeleid worden door een niet ter zake doende regelmaat:

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \frac{2}{3} \mid \frac{4}{6} \mid \frac{6}{9} \mid \frac{9}{12} \end{array} \quad (1 \text{ ll.}) \quad \text{of} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \frac{1}{4} \mid \frac{2}{8} \mid \frac{3}{16} \end{array} \quad (2 \text{ ll.});$$

- toepassing van herhaald verdubbelen, waardoor geschikte situaties juist werden overgeslagen (2 ll.).

Ter afronding van deze paragraaf geven we een totaaloverzicht van het oplossingsgedrag van de tien kinderen bij elk van de vraagstukken, die aan hun werden voorgelegd (zie schema op pag. 133/134).

3 BREUKEN OP DE GETALLENLIJN

3.1 Inleiding

Bij de verwerking van de contextloze sommen gaven tenminste drie van de tien leerlingen er blijk van, dat hun breukbegrip – voorzover aanwezig – zwichtte voor betekenisinvloeden vanuit de natuurlijke getallen, wanneer zij maar even met een opgave (of deelvraag) geen raad wisten. Zo verklaarde BJ $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{5}$ met grote stelligheid gelijk aan $2\frac{2}{7}$; J zag $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ opgaan in $\frac{3}{15}$ en E schatte $1\frac{5}{6} + 1\frac{1}{8}$ eerst op $2\frac{6}{14}$.

Aan de andere kant kan uit beschikbaarheid en feilloze toepassing van een uit het hoofde gekende regel niet zonder meer tot voldoende achterliggend begrip bij toepassen beslist worden (hfdst. VIII). Het was daarom dus alleszins gerechtvaardigd – en dit werd ook al eerder aangekondigd (par. 1) – een stapje terug te doen en de leerlingen nader aan de tand te voelen in verband met hun breukbegrip.

Als eerste activiteit werd gekozen voor het plaatsen van niet al te eenvoudige breuken op de getallenlijn. Deze activiteit en ook het opereren op de getallenlijn, dat nog zou volgen, zouden een goede gelegenheid bieden tevens nader in te gaan op een belangrijk onderdeel van de fundamentele kritiek, die vanuit kleine kring op de ontwikkelde deelleergang geuit was (VI.4), nl. de gemiste toepassing van de getallenlijn ter ondersteuning van het beoogde, geleidelijke algoritmiseringsproces.

Bij het plaatsen van niet al te eenvoudige breuken (b.v. $\frac{7}{12}$) op de getallenlijn kan het breukbegrip op een vrij abstract niveau functioneren. De getallenlijn kan daarbij als visualiserings- en ordeningsmiddel een verbinding leggen tussen de breuk als zelfstandig mathematisch object, als rationaal getal in wording en het meten als toepassingsgebied voor de breuken.

Bovendien kunnen bij keuze van dergelijke breuken tevens nog allerlei bijkomende kwesties als schatten, gelijkwaardigheid, afronden, variabele eenheid e.d. ‘meegenomen’ worden. Het variëren van de eenheid komt aan de verbinding

opg. II.	$\frac{1}{4} - \frac{1}{3} =$	$\frac{3}{8} - \frac{3}{12} =$	$\frac{2}{3} - \frac{3}{5} =$	$1\frac{5}{6} + 1\frac{1}{8} =$
BJ (zz)	1) kan deze opgave niet zelfstandig maken; beslist tot $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ herh. leerproces (verdeel-situaties) 2) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ met behulp van rijtjes gelijkwaardige verdelingen (herhaald verdubbelen)		maakt deze opgave m.b.v. rijtjes, als $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} :$ 2 : 3 3 : 5 4 : 6 6 : 10 6 : 9 8 : 12 10 : 15	vervangende opgave $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{5}$ BJ beslist zonder dralen tot $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{5} = 2\frac{2}{7}$
J (zz)	1) zwicht voor IN-betekenis ($\frac{1}{4} > \frac{1}{3}$) 2) maakt fout in tabel $\frac{1}{4} \frac{2}{8} \frac{3}{16}$ 3) kan het conflict niet aan en wil eerst $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ maken	vervangende opgave $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$, lukt met tabelmethode $\frac{1}{2} \frac{2}{4} \frac{3}{6}$ en $\frac{3}{6} - \frac{1}{6}$ N.B. Hangt evenals BJ sterk aan IN-betekenis; J wil bijv. $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ vervangen door $\frac{3}{15}$		
S (z)	1) ontmaskert het conflict pas na samenstelling van tabellen; 2) tabellen met teveel termen $\frac{1}{4} \frac{2}{8} \frac{3}{12} \frac{4}{16} \frac{5}{20}$ en $\frac{1}{3} \frac{2}{6} \frac{3}{9} \frac{4}{12}$	met 3 : 8 3 : 12 6 : 16 6 : 24 9 : 24 9 : 36	als $\frac{3}{8} - \frac{3}{12}$	
P _L (z)	1) conflict als S 2) tabellen $\frac{1}{3} \frac{2}{6} \frac{3}{9} \frac{4}{12}$ en $\frac{1}{4} \frac{2}{8} \frac{3}{12}$	1) als eerste opgave 2) voor 't vereenvoudigen van $\frac{3}{24}$ en $\frac{3}{12}$ heeft P _L verdeel-situaties nodig	als eerste opgave	

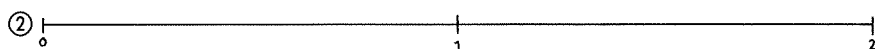
$P_H(z)$	1) conflict als S en P_L ; P_H verklaart $\frac{1}{3}$ in eerste instantie wel tot groter, maar verbindt daaraan niet de conclusie, dat de opgave onjuist is 2) tabellen als P_L	1) wil zonder tabellen naar 24sten toewerken 2) maakt dan toch tabellen $\frac{3}{8} \mid \frac{16}{24} \mid \frac{9}{12} \mid \frac{6}{24}$ en $\frac{3}{12} \mid \frac{6}{24}$	tabellen, waarvan één met teveel termen $\frac{2}{3} \mid \frac{4}{6} \mid \frac{1}{9} \mid \frac{8}{12} \mid \frac{10}{15}$ en $\frac{3}{5} \mid \frac{6}{10} \mid \frac{9}{15} \mid \frac{12}{20}$	
E (m)	1) onmaskert het conflict vooraf 2) één tabel voor alleen de noemers $\frac{4}{3} \mid \frac{18}{16} \mid \frac{12}{9} \mid \frac{16}{12}$	vervangende opgave: $\frac{3}{8} - \frac{2}{5} =$ E's één tabel-methode leidt tot onjuiste uitkomst, dan 2 tabellen: $\frac{1}{2} \mid \frac{12}{14} \mid \frac{3}{6} \mid \frac{4}{8} \mid \frac{5}{10}$ en $\frac{2}{4}$	met één tabel voor de noemers	als voorgaande opgave, doch schat eerst $1\frac{5}{6} + 1\frac{1}{8} = 2\frac{6}{14}$ (1)
R (m)	1) onmaskert het conflict vooraf 2) tabelmethode met herhaald verdubbelen en dus overslaan van geschikte situaties	1) vervangende opgave $\frac{3}{8} - \frac{1}{4} =$ 2) tabellen met teveel gegevens $\frac{3}{8} \mid \frac{6}{16}$ en $\frac{1}{4} \mid \frac{2}{8}$		1) vervangende opgave $1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{3} =$ 2) maakt gebruik van gegevens uit oplossing van eerste opgave
J (m)	1) onmaskert het conflict eerst na het samenstellen van tabellen 2) tabellen als S, P_L , P_H , J	tabelmethode met overbodige verkortingen (zie R(m)) $\frac{3}{8} \mid \frac{9}{24}$ en $\frac{1}{4} \mid \frac{2}{8} \mid \frac{3}{12} \mid \frac{6}{24}$	kgv-methode als B, doch volledig uit het hoofd, daarna controle met $\frac{2}{3} \mid \frac{4}{6} \mid \frac{8}{12} \mid \frac{10}{15}$ en $\frac{3}{5} \mid \frac{6}{10} \mid \frac{9}{15}$	tabelmethode als bij de eerste opgave
L (g)	1) onmaskert het conflict pas na het samenstellen van tabellen 2) tabellen als S, P_L , P_H en J (m)	tabellen als P_H	tabellen als J (m), doch zonder verkorting in de eerste tabel	
B (g)	1) onmaskert vooraf het conflict 2) kgv-methode ondersteund door afzonderlijk genoteerde tafelprodukten	N.B. L. past de tabelmethode echt op algoritmische wijze toe. 1) als eerste opgave, doch nu zonder notatie van tafelprodukten		1) als de tweede opgave

van breuken met verhoudingen ten goede; dat in een breuk een ratio opgaat komt dan nl. goed uit de verf.

De leerlingen kregen de volgende vraagstukken voorgelegd:



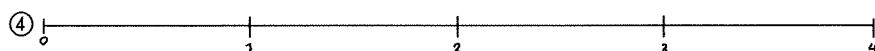
Het plaatsen van $\frac{7}{12}$ en $\frac{7}{24}$.



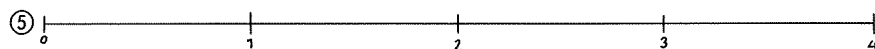
Het plaatsen van $1\frac{7}{12}$ en $1\frac{7}{24}$.



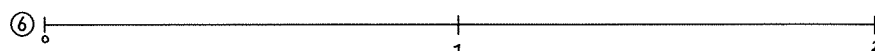
Het plaatsen van $\frac{6}{10}$ en $\frac{3}{10}$.



Het plaatsen van $2\frac{6}{10}$ en $3\frac{3}{10}$.



Het plaatsen van $\frac{3}{4}$, $1\frac{6}{8}$ en $2\frac{12}{16}$.



Het plaatsen van een passende breuk naar keuze.

Bij het plaatsen van $\frac{7}{12}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{3}{10}$, $1\frac{7}{12}$, $1\frac{7}{24}$, $2\frac{6}{10}$ en $3\frac{3}{10}$ was het mede de bedoeling na te gaan of de leerlingen onderkenden, dat het halveren van een gegeven breuk op twee wijzen kan worden voltrokken en of in de opgaven met gemengde getallen het resultaat van de direct voorafgaande opgave zou en kon worden toegepast.

Bij het plaatsen van $\frac{3}{4}$, $1\frac{6}{8}$ en $2\frac{12}{16}$ werd mede het onderkennen en toepassen van de gelijkwaardigheid van $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ en $\frac{12}{16}$ beoogd.

Bij de open opgave tenslotte zou kunnen blijken of en in hoeverre het voorafgaande functioneerde.

We gaan nu over tot het globaal weergeven van de onderzoeksuitkomsten voor de onderscheiden gevallen.

3.2 Het plaatsen van breuken op de getallenlijn

Het waargenomen oplossingsgedrag zal naar een aantal saillante kenmerken worden ingedeeld en weergegeven, toegelicht met protocolgedeelten.

Het aanbrengen van (onder)verdelingen (6 ll.)

Drie leerlingen werkten met een minimum aan verdelingen (uitsluitend eenheden, halven), die de functie van steun- of referentiepunten hadden. De drie overige leerlingen verdeelden de segmenten op de gegeven getallenlijnen in de vereiste aantallen stukjes (12, 24, ...). Eén leerling deed dit alleen bij de eerste opgave en later niet meer.

Het werken met halven als (mentale) steunpunten (7 ll.)

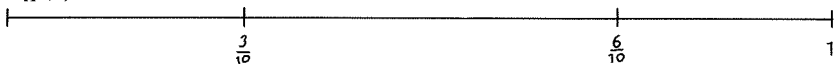
Drie van deze zeven leerlingen kwamen hierop door aanwijzingen van de interviewer bij de eerste opgave en hielden deze strategie dan consequent vol bij de andere opgaven. De overigen kwamen spontaan tot deze aanpak, die dus mede in de hiervoor gegeven karakteristiek besloten lag.

Het zelfstandig zien van het verband tussen $\frac{6}{10}$ en $\frac{3}{10}$ en $\frac{7}{12}$ en $\frac{7}{24}$.

Zeven leerlingen zagen dat $\frac{6}{10}$ het dubbele is van $\frac{3}{10}$. De overige drie moesten hiervan bewust gemaakt worden.

Protocolvoorbeeld

P_H (z) tekent:



I: Wat vind je hiervan?

P_H : ????

I: Wat zit er tussen $\frac{3}{10}$ en $\frac{6}{10}$?

P_H : $\frac{3}{10}$

I: En tussen 0 en $\frac{3}{10}$?

P_H : Ook $\frac{3}{10}$.

I: Dus?

P_H : Dit moet gelijk zijn.

Hij laat dan zien, dat zijn tekening niet helemaal klopt en hoe het wel had moeten zijn.

Bij $\frac{7}{12}$ en $\frac{7}{24}$ vielen de genoemde leerlingenaantallen juist omgekeerd uit. Zeven leerlingen kwamen hier pas tot de conclusie, dat $\frac{7}{24}$ de helft van $\frac{7}{12}$ is, nadat zij zich bezonnen hadden op bij de gegeven breuken passende verdeelsituaties.

Protocolvoorbeeld

BJ blijkt pannenkoeken heel erg lekker te vinden.

I: Als je met 12 kinderen 7 pannenkoeken zou mogen verdelen of met 24 kinderen ook 7 pannenkoeken, bij welke groep zou je dan willen horen?

BJ: Bij die 12 kinderen.

I: Waarom?

BJ: Nou daar krijg je meer. Hier (hij wijst op $24k \rightarrow 7p$) krijg je maar de helft.

Van bedoelde zeven kinderen was er echter één, die via het toepassen van verdelingen (in 12 en 24 stukjes) $\frac{7}{12}$ en $\frac{7}{24}$ wél juist situeerde. De overige drie stelden zelfstandig vast, dat $\frac{7}{24}$ de helft van $\frac{7}{12}$ is.

Eén was er, die zelf teruggreep naar verdeelsituaties, getuige:

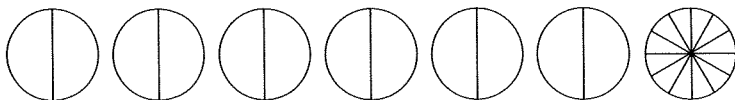
Protocolvoorbeeld

P_H Moet $\frac{7}{12}$ aanwijzen en hij zegt, heel onduidelijk aanwijzend:

P_H: Hier zo'n beetje.

I: Is $\frac{7}{12}$ meer of minder dan een half?

P_H begint op de achterkant van zijn werkblad te tekenen:



en concludeert:

P_H: 't Is een half en $\frac{1}{12}$. Dat is $\frac{7}{12}$. 't Is iets meer dan de helft.

Op soortgelijke wijze gaat hij met $\frac{7}{24}$ te werk en komt tot:

P_H: $\frac{7}{24}$ is iets meer dan 'n kwart.

Gebruik maken van de gelijkwaardigheid van $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ en $\frac{12}{16}$.

Met één leerlinge werd aan deze kwestie niet toegekomen. Vier van de resterende negen leerlingen zagen de gelijkwaardigheid direct en maakten hiervan bij het uitvoeren van de opdracht gebruik. De overige vijf moesten door attenderen op verdeelsituaties of middels bewustmakende vragen op weg geholpen worden om de gegeven gelijkwaardigheid in te zien en toe te passen bij deze opdracht.

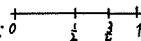
Ter toelichting geven we weer enkele protocolgedeelten.

J (z) plaatst $\frac{3}{4}$ en $1\frac{6}{8}$ goed. Bij $2\frac{12}{16}$ zegt hij:

J: Als het $2\frac{16}{16}$ is, dan is het 3 en schat op grond daarvan waar $2\frac{12}{16}$ moet liggen.

I probeert hem op het spoor van het herhaald halveren te brengen:

J pikt dit idee slecht op en raakt op een dwaalspoor, o.a. door $\frac{4}{8}$ tot de helft van $\frac{8}{16}$ te verklaren.



P_L plaatst $\frac{3}{4}$ en $1\frac{6}{8}$ goed.

I: Hoe wist je waar $1\frac{6}{8}$ moest liggen?

P_L: Nou, 1 hele is $\frac{8}{8}$, $\frac{4}{8}$ is de helft, dus $\frac{6}{8}$ moet ook weer op de helft liggen.

Op deze manier doorziet hij de gelijkwaardigheid van $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ en $\frac{12}{16}$ en voert de gegeven opdracht dan uit.

De open opgave

Van de acht leerlingen, die aan de slotopgave toekwamen waren er vijf die zich lieten leiden door hun oplossingen van voorgaande opgaven, getuige het herhaald halveren, dat zij toepasten om punten op de getallenlijn aan te wijzen en die van breuknamen te voorzien. De overige drie kozen hetzij een nieuwe verdeling (b.v. in twintigsten) of een nieuwe breuk (b.v. $1\frac{1}{10}$) als uitgangspunt.

Tot besluit van deze paragraaf worden nog enkele algemene, samenvattende opmerkingen i.v.m. het voorgaande gemaakt.

Geconstateerd moet worden, dat slechts vier kinderen ($2 \times g$ en $2 \times m$) volledig zelfstandig met de gegeven opgaven uit de voeten konden. Allerlei oorzaken kunnen ten grondslag liggen aan het feit, dat de overigen steun behoeften, zoals onwennigheid (getallenlijn), onvoldoende geabstraheerd breukbegrip, technische problemen bij het verdelen van lijnstukken e.d.

Vermeldenswaard is echter stellig – en dit is o.i. de essentie in de opbrengst van dit onderzoeksgedeelte – hoe goed de ontwikkelde deelleergang (hfdst. V) en deze eerste activiteit op de getallenlijn met elkaar harmonieerden. Verdeel situaties en getallenlijnactiviteiten scheppen mathematisch-didactische eenheid in het opereren met breuken.⁴⁾ Het is daarom, dat verdeelsituaties en getallenlijnactiviteiten elkaar bij het algoritmiseringsproces zouden kunnen aanvullen. Behalve de eenheid in benadering van de operaties, die in wezen gegrondvest worden op het breukverwekkende eerlijk verdelen, zowel op de getallenlijn als in verdeelsituaties, schept een gecombineerde benadering tevens een groter toepassingsbereik, omdat nu het gebied van het meten van de continue grootheden in de benadering van meet af aan betrokken is.⁵⁾ Dit geldt dan niet alleen voor de veelzijdige benadering van het breukbegrip zelf (hfdst. IV), maar tevens voor het opereren met en op breuken.

Activiteiten met de getallenlijn zouden de overgang van verdeelsituaties naar het contextloos opereren⁶⁾ met breuken mede kunnen ondersteunen. Op grond van de ervaringen bij dit onderzoeksgedeelte en voorgaande overwegingen zijn de taken in verband met de getallenlijn in dit onderzoek nog wat uitgebreid. Het accent werd gelegd bij het verdelen, het zoeken van een gemeenschappelijke maat i.v.m. het springen op de getallenlijn, kortom bij activiteiten die gelijkwaardigheid en het (informeel) opereren met breuken voortbrengen.

4 OPEREREN OP DE GETALLENLIJN

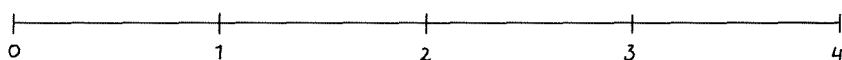
4.1 Inleiding

Met de uitlijning van taken, waarvoor in dit aanvullende onderzoek gekozen werd, nl. ‘een weg terug’, werd mede beoogd de kwaliteit van het breukbegrip van de tien leerlingen te achterhalen. Onder (kwaliteit van) het breukbegrip dient dan verstaan te worden de manier, waarop het bij de betrokken leerlingen op operationeel niveau, d.w.z. bij het uitvoeren van bewerkingen met en op

breuken, functioneert.⁷ Men zou kunnen stellen, dat de opeenvolging van stappen terug een instrument voortbrengt met diagnostiserende trekken.

Na het situeren van breuken op de getallenlijn – door zeven kinderen verricht op basis van feitelijke dan wel mentaal voltrokken verdelingen – wordt nu opzettelijk de aandacht op het verdelen (van lengten) gevestigd om na te gaan of kwesties als gelijkwaardigheid en het bepalen van gelijke noemers voor ongelijknamige breuken door te zoeken naar een ‘gemene maat’ op natuurlijke wijze uit verdeeltaken (kunnen) voortvloeien.

De overeenkomst met het opereren met natuurlijke getallen op de getallenlijn (het maken van sprongen) vormde het startpunt doordat met een getallenlijn begonnen werd, die voor het maken van hele sprongen was ingericht.



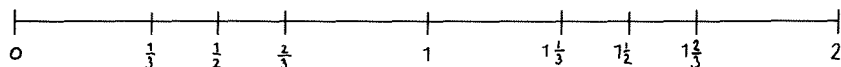
Al spoedig werd overigens overgegaan op vouwstroken voorzien van getallenlijngedeelten om de technische problemen van het verdelen beter het hoofd te kunnen bieden. Aan de tien leerlingen werd voorgehouden, dat we zouden gaan proberen ook met sprongen van $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, ... voort te gaan op de getallenlijn en dat daarvoor dus de nodige nieuwe ‘rustpunten’ dienden te worden aangebracht. Het gestelde doel was uiteindelijk om opgaven als $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$; $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$; $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} =$; $1\frac{2}{3} + 1\frac{1}{2} =$; $1\frac{1}{6} + \frac{1}{2} =$; $1\frac{1}{5} + 1\frac{1}{2} =$; $\frac{2}{3} + 1\frac{1}{2} =$; $\frac{1}{2} + \frac{7}{10} =$; $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} =$; door middel van de sprongmethode op de getallenlijn te kunnen maken.

4.2 Opereren op de getallenlijn

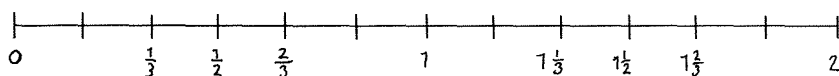
Door het betrekkelijk grote aantal opgaven in de opsomming van zojuist zal duidelijk zijn dat de kinderen in het onderzoek verschillende taken kregen voorgelegd, mede afhankelijk van het gespreksverloop en voorgaande verrichtingen. Om een zekere eenheid in beschrijving van de uitkomsten te krijgen zullen de volgende grondtrekken – die overigens a posteriori werden vastgesteld – als leidraad dienen.

De ‘gelijke maat’, nodig om b.v. ‘halven’ en ‘derden’ op de zelfde noemer te kunnen zetten wordt in eerste instantie visueel bepaald en pas achteraf volgt beschrijving met breuken.

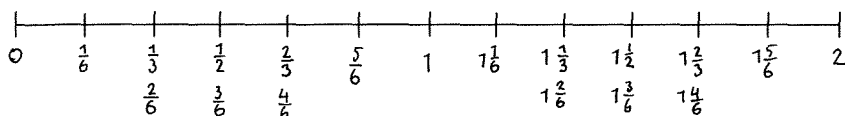
Bijvoorbeeld:



De afstand tussen $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{2}$ wordt als geschikte nieuwe maat gezien en nadat de verdeling op grond daarvan is aangebracht



volgt de vaststelling, dat de nieuwe 'gelijk' maat $\frac{1}{6}$ moet zijn, omdat zes ervan precies in een hele opgaan, waarna passende beschrijvingen aan de getallenlijn worden toegevoegd:

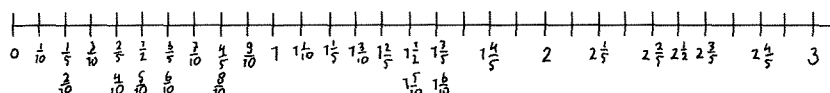


Daarmee zijn 'halven' en 'derden' dan op dezelfde noemer 'zes' gezet.

Het abstracte breukbegrip en de vaardigheid in het contextloze breukrekenen zijn op een zodanig peil, dat de gezochte, geschikte maat zuiver getalsmatig wordt bepaald. Eerst wordt die maat dus met een passend breukgetal benoemd en pas achteraf wordt de getallenlijn daarnaar gevoegd. Dus, b.v., zien (uit het hoofd berekenen) dat 'derden' en 'vierden' beide in twaalfden kunnen opgaan en dat dus een passende verdeling voor het opereren met derden en vierden op de getallenlijn, die in twaalfden is.

Is de getallenlijn eenmaal volgens geschikte maatvoering ingericht dan kan het opereren met breuken ook nog divers plaatsvinden.

B.v. De getallenlijn is ingericht om $1\frac{3}{5} + 1\frac{1}{2} =$ te kunnen maken.



a) $1\frac{3}{5}$ en $1\frac{1}{2}$ opzoeken op de getallenlijn en omzetten in $1\frac{6}{10}$ en $1\frac{5}{10}$ en daarna de gevraagde som bepalen;

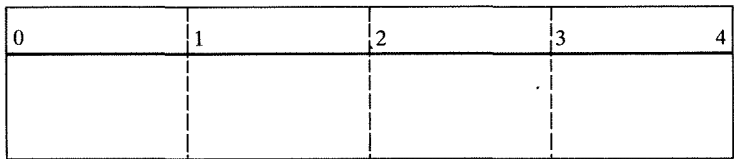
b) Eerst een sprong van $1\frac{3}{5}$ op de getallenlijn maken en aansluitend een sprong van $1\frac{1}{2}$ – al dan niet in gedeelten – en vervolgens aflezen waar je op uitkomt. Zonder beschikbaarheid van de 'gelijke' maat $\frac{1}{10}$ en inrichting van de getallenlijn op grond daarvan zou bij de oplossing onder b) het punt van uitkomst ($3\frac{1}{10}$) niet afgelezen kunnen worden. Dergelijke beperkingen vooraf motiveerden mede het zoeken van een geschikte maat om deze zodoende te kunnen opheffen.

Wat de uitkomsten van dit onderzoeksgedeelte aangaat kan het volgende worden geboekstaafd.

Het aanbrengen van de verdelingen en het vinden van de 'gemene' maat

Als er al belemmeringen waren bij het aanbrengen van gewenste verdelingen, dan ging het om problemen van meer technische aard of de nauwkeurigheid van aangebrachte verdelingen schoot tekort.

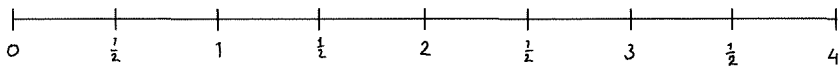
Vanaf het eerste interview met L (g) was dit het geval. Vandaar, dat in volgende interviews steeds uitgegaan werd van vouwstroken met getallenlijn(gedeelte).



strook met vouwlijnen

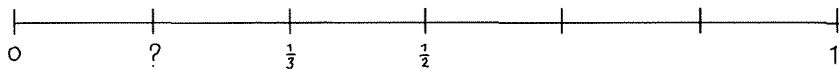
Liep er (ogenschijnlijk) begripsmatig iets mis, dan lag dit uitsluitend op het vlak van de beschrijving in breuken(taal).

De volgende (eigen)aardigheden kwamen voor: twee kinderen (zz, z) maakten hun getallenlijn als volgt geschikt voor sprongen van $\frac{1}{2}$.



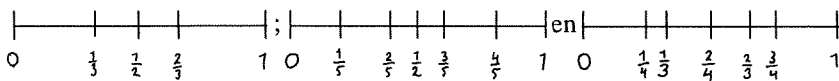
Geveinsde bevreemding door de interviewer over het bestaan van vier maal hetzelfde getal op evenzoveel verschillende plaatsen op hun getallenlijn was in beide gevallen toereikend voor correct herstel van deze vergissing. De oorzaak ervan moet vermoedelijk gezocht worden in de eenvoud en herhaling van de te voltrekken verdeeltaak, die deze onbereflecteerde routine uitlokte.

Twee leerlingen (zz, m) neigden ertoe bij



op de plaats van het vraagteken, vermoedelijk aangetrokken door de regelmaat in de noemers, $\frac{1}{4}$ in te vullen. De vraag naar het aantal stukjes waarin de eenheid nu was verdeeld, voldeed om dit ‘afglijden’ naar de natuurlijke getallen door de betrokken leerlingen zelf ongedaan te laten maken.

Wat het vinden van de ‘gelijke’ maat betreft, dient nog vermeld, dat in alle gevallen, die aan de ‘tien’ werden voorgelegd, door de reeds aangebrachte verdelingen de gezochte maat al in de getallenlijn besloten lag, nl.:



Gevalen als $\frac{1}{3} - \frac{1}{7}$ waarvoor gecompliceerdere onderverdelingen vereist zijn, kwamen dus (nog) niet voor. Men realiseer zich deze beperking.

Het bepalen van de geschikte maat op grond van de gegeven breukgetallen

Dit werd bij twee kinderen (g) geobserveerd, nadat zij in een inleidende opgave zich door het getallenlijnbeeld hadden laten leiden of in eerste instantie voor een ongeschikte verdeling kozen.

Protocolgedeelte

B (g) wordt gevraagd zich een getallenlijn voor te stellen, die zó is ingericht, dat er zowel sprongen van $\frac{1}{3}$ als van $\frac{1}{4}$ op gemaakt kunnen worden.

I: Met welke sprong(en) kun je nu alle punten bereiken?

B: Met sprongen van $\frac{1}{8}$.

B herstelt zich echter zonder dralen en corrigeert:

B: Nee, met sprongen van $\frac{1}{12}$, want je moet 3×4 nemen.

Het uitvoeren van de bewerkingen

Zeven leerlingen redeneerden vanuit het beeld dat de getallenlijn hun na de aangebrachte verdelingen voorschotelde. Gevraagde verschillen werden dus eerst gezien en dan pas berekend. Vijf leerlingen vertoonden een sterkere neiging in eerste instantie op de gegeven breukgetallen af te gaan en pas in tweede instantie – of in het geheel niet – van de aanwezige getallenlijnen gebruik te maken. Hiermee is overigens geenszins gezegd, dat er nu ineens *twaaalf* leerlingen aan het onderzoek deelnamen.

Evenals dit bij het toepassen van de tabelmethode het geval was (2.3) deed zich ook hier het verschijnsel voor, dat sommige kinderen tijdens het interview bij een nieuwe opgave hun (niveau van) aanpak wijzigden.

Zo ging P_L (z) – om een voorbeeld te geven – eerst sterk af op wat zich op de getallenlijn afspeelde en probeerde dit achteraf te beschrijven; d.w.z. hij bracht eerst een passende verdeling op de getallenlijn aan, beschreef dit d.m.v. breuken (zesden) en maakte bij het optellen van $1\frac{2}{3} + 1\frac{1}{2}$ gebruik van de informatie, die de aldus ingerichte getallenlijn in en bij zich droeg. Bij de opgave $1\frac{3}{5} + 1\frac{1}{2}$ richtte hij de getallenlijn in op het nemen van sprongen van $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{5}$. Daarna gebeurde het volgende.

Protocolgedeelte

I: Wat wordt de nieuwe sprong?

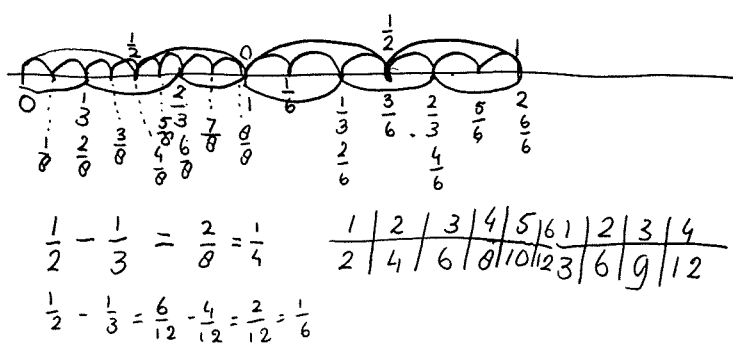
P_L: De uitkomst staat al vast.

I: Wat bedoel je?

P_L: Nou, $1\frac{3}{5} = 1\frac{6}{10}$ en $1\frac{1}{2} = 1\frac{5}{10}$ en $1\frac{6}{10} + 1\frac{5}{10} = 2\frac{11}{10} = 3\frac{1}{10}$

Voor P_L – en niet alleen voor hem – kwam de getallenlijnprocedure kennelijk te laat. We hebben het vermoeden, dat P_L en ook enkele andere leerlingen (in eerste instantie) meer door onwennigheid aan de getallenlijn gebonden waren dan

uit behoefte aan visuele ondersteuning bij het verwerken van de hun voorgelegde opgaven. Hierdoor kunnen de uitkomsten een enigszins vertekende indruk geven van de werkelijke mogelijkheden van de kinderen in het onderzoek op het terrein van de breuken. L (g) bijvoorbeeld – we zeiden het reeds – had nogal wat technische problemen met het verdelen. Zij was algoritmisch al zo ver, dat de getallenlijn wel achterwege kon blijven als visuele steun bij het uitvoeren van breukbewerkingen. De breuken hadden voor haar ook niet meer zo'n binding met de realiteit.

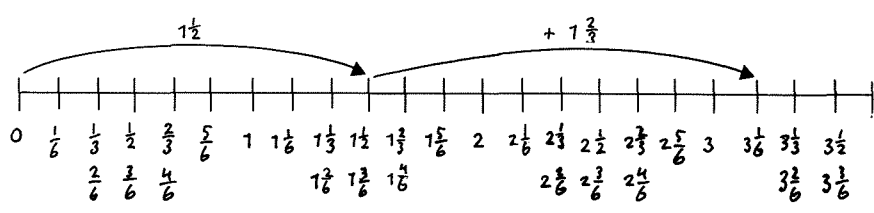


L's werk

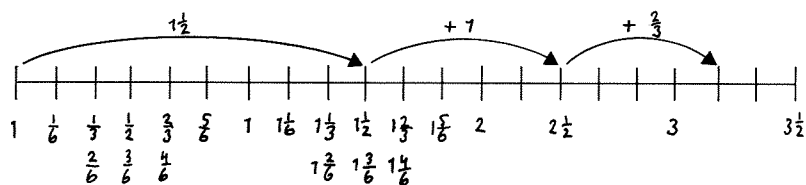
L koos – zo blijkt uit haar werk – als ‘gelijke’ maat voor ‘halven’ en ‘derden’ ‘achtsten’. Pas na het toepassen van de tabelmethode ontmaskerde zij haar fout en bepaalde $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ op $\frac{1}{6}$. Zij bleek duidelijk meer vertrouwen in de haar zo vertrouwd geworden methode te hebben. Na deze aanloop worden de wijzen van uitvoering van de bewerkingen meer samenvattend beschreven. In de gevoerde systematiek speelt het onderscheid wel of geen gebruikmaking van de getallenlijn vanzelfsprekend een beslissende rol.

Zoals al werd opgemerkt opereerden zeven leerlingen op de getallenlijn. Daarbij vielen de volgende varianten waar te nemen (bij het verwerken van optelopgaven). De breuken (gemengde getallen) opvatten als successieve sprongen op de getallenlijn (4 ll.)

Bijv. $1\frac{1}{2} + 1\frac{2}{3} =$



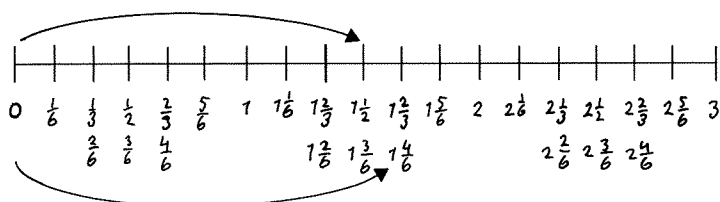
Twee kinderen (van de genoemde 4) pasten een variant toe op deze aanpak door het eerste getal als één sprong op te vatten en het tweede getal op te delen in een hele sprong en een sprong van $\frac{2}{3}$.



Daarbij kwam het vooral aan op de laatste sprong omdat juist daarbij de gelijke maat eventueel kon worden toegepast.

De breuken (gemengde getallen) opvatten als afzonderlijke sprongen vanaf 0, vervolgens aan de sprongeinden passende gelijkwaardige breuken aflezen en dan pas optellen (3 ll.).

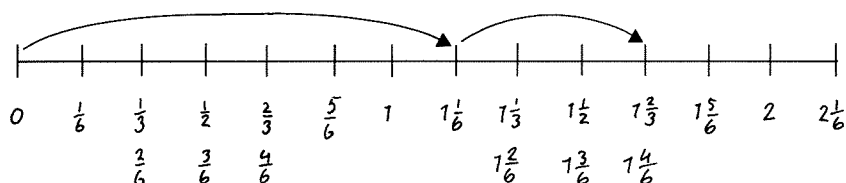
B.v. $1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3} =$



$1\frac{3}{6} + 1\frac{4}{6} = 2\frac{7}{6} = 3\frac{1}{6}.$

Een enkele leerling combineerde beide methoden.

B.v. $1\frac{1}{6} + \frac{1}{2} =$ S (z) ging op de volgende manier te werk.



$1\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{6} + 1\frac{4}{6} =$

Het einde van de tweede sprong – dus de gevraagde som – werd met het tweede getal gelijkgesteld, een misverstand dat o.i. eveneens aan gemis aan ervaring met dergelijke taken kan worden toegeschreven.

Aparte vermelding verdient nog de ervaring met $P_H(z)$. 't Ging om de opgave $1\frac{3}{5} + 1\frac{1}{2} =$

Protocolgedeelte

P_H wilde een verdeling in vijfden gaan aanbrengen nadat hij de getallenlijn op sprongen van $\frac{1}{2}$ had ingericht.



Hij aarzelde...

I: Kom je met $\frac{2}{5}$ vóór, òp of óver de helft?

P_H : Op de helft.

I: Dus na nog zo'n sprong zitten we op...?

P_H : Vier(vijfde).

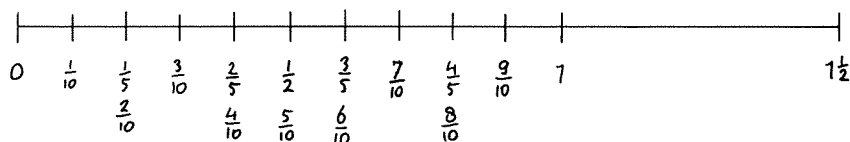
I: Klopt dat?

P_H : Nee.

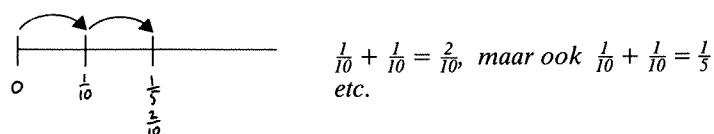
I: Hoeveel vijfden in een hele?

P_H : Vijf.

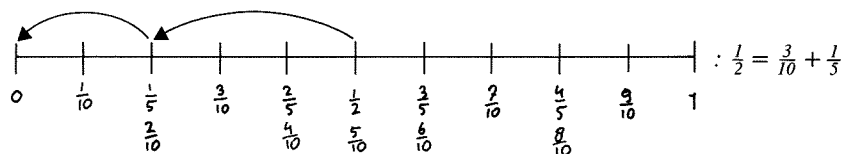
Met de inrichting van de getallenlijn heeft P_H nu geen noemenswaardige moeite meer. Wanneer ook de gelijke maat, de tienden, erop staan



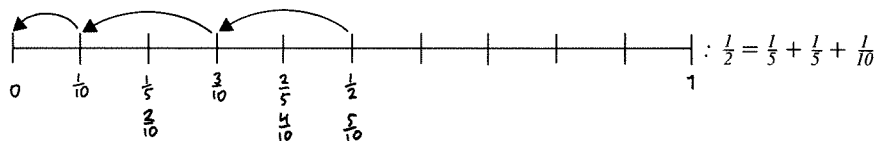
begint P_H spontaan allerlei sprongetjes te maken, waarbij hij in zeker opzicht systematisch te werk gaat en allerlei betrekkingen voor zichzelf vaststelt.



en ook omgekeerd:



of



Op het belang van deze ervaring komen we nog terug (par. 6).

Voor dit moment lijkt het toereikend om vast te stellen, dat verdelen van segmenten en springen op de getallenlijn tot het (spontaan) vaststellen (en vastleggen) van allerlei betrekkingen aanleiding kunnen geven, waarin de gelijkwaardigheid van breuken en het omzetten in gelijkwaardige breuken alsmede het informeel voltrekken van bewerkingen een wezenlijke rol vervullen. Zaken, die verband houden met wat in par. 1 het structureren van breuken genoemd werd. Bovendien diende het schattend ordenen (het plaatsen van $\frac{2}{3}$ t.o.v. $\frac{1}{2}$) zich even aan als belangrijke en tot dusver teveel impliciet gebleven activiteit.

De bewerkingen met de getallen uitvoeren

Vijf leerlingen gingen zo te werk, daarbij in sommige gevallen gebruikmakend van de daarvoor in de getallenlijn opgeslagen informatie, b.v. bij het verifiëren van omzettingen in gelijkwaardige breuken. In dit verband brengen we nogmaals de reeds weergegeven ervaringen met P_L en B in herinnering (p. 141), die maatgevend waren voor het geheel van deze categorie.

5 DE KWALITEIT VAN HET BREUKBEGRIIP VAN DE KINDEREN IN HET ONDERZOEK

5.1 Inleiding

Wie het standpunt, dat in dit boek ten aanzien van de breuken wordt vertolkt op zijn juiste waarde heeft weten te schatten kan onderschrijven, dat we onder breukbegrip niet een mooi afgerond welgedefinieerd fenomeen verstaan, waarop kinderen van item 1, sub 1, tot en met item 10, sub 10, systematisch kunnen

worden afgetoetst. Het kan dus – gegeven de aanhef van deze paragraaf – zeker niet de bedoeling zijn de verwachting te wekken, dat we van kind X in onderzoeksonderdeel Y vaststellen, dat het op het punt van het beheersen van de breuken in deze of gene relatie nog zus – en – zo oefenstof zou moeten verwerken.

We willen recht doen aan breuk als veelzijdig fenomeen, dat hecht verankerd is in de realiteit, zo hecht soms, dat wij, onderwijsgeevenden en didactici, het over het hoofd dreigen te zien. We willen de veelzijdige toepasbaarheid ervan benadrukken. Het moet operationeel zijn. Wie een begrip, wat dit dan ook moge zijn, wie een begrip als breuk wil afgrenzen, ja meer dan afgrenzen, harnassen zelfs, in een aftoetsbaar geheel, pretendeert volledige didactische beheersing, wendt voor dat er niets nieuws zich meer zal voordoen. Wij hebben die pretentie niet. Het miskent de dynamiek van wiskunde en de toepasbaarheid ervan. Bovendien, waar de grenzen van het breukenveld vervagen, doemen nieuwe, andere, verwante wiskundige perspectieven op die we open willen houden voor de leerlingen. Wie een begrip afgrenst door puntsgewijs afvragen, doet de deur dicht voor zulke wijdere verbanden.

Laat dit vooraf gezegd zijn.

Overzien we dan – vanuit dit perspectief – de ervaringen tot dusver, dan levert dit de volgende bloemlezing aan dwalingen op.

- $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{1}$ (2.2)
- $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{5} = 2\frac{2}{7}$ (3.1)
- $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{15}$ (3.1)
- $1\frac{5}{6} + 1\frac{1}{8}$ 'schatten' op $2\frac{6}{14}$ (3.1)
- $\frac{4}{8}$ is de helft van $\frac{8}{16}$ (3.2)
-  (4.2)

Welke conclusie moet men nu hieraan verbinden? Is het echt zó, dat de kinderen – het waren steeds dezelfde drie – geen notie van breuken hebben, als het gaat om rekenen ermee, of ...? Een feit is stellig, dat als er al sprake is van aanwezige noties omtrent breuken van enige kwaliteit, dit inzicht nog lang niet is opgewassen tegen de ruis vanuit de natuurlijke getallen.

Bij het laatste geval in de opsomming spraken we van 'afglijden naar de natuurlijke getallen'. Herstel van het ontsporen werd in de meeste gevallen door de leerlingen zelf voltrokken. Voorwaarde daartoe was wél een vraagstelling, waardoor zij met hun eerste, impulsieve antwoord in conflict zouden komen. De fout werd in alle gevallen hersteld, wanneer op de betekenisverlenende context van verdeelsituaties werd teruggegrepen.

Een andere opvallende trek van overeenkomst voor alle genoemde fouten is, dat zij stuk voor stuk gemaakt werden in leersituaties, waarin van algoritmiseren (nog) geen sprake was. Het ging meer om fouten, die thuishoren in de fase van het informele opereren wanneer breuken verkend worden vanuit allerlei contexten en met name intensieve exploratie van verdeelsituaties een belangrijke rol speelt. De ontsporingen die werden gesignaleerd bij het toepassen van de tabelmethode waren van een wezenlijk ander kaliber. Dit neemt overigens niet weg, dat enkele van de waargenomen fouten ook in constaterend onderzoek veelvuldig gesignaleerd werden (hfdst. VIII).

Wij zijn geneigd de drie kinderen waarom het hier gaat toch verschillend naar de kwaliteit van hun breukbegrip te beoordelen. Voor de zwaksten (twee van de drie) zouden we willen stellen, dat het weinig zinvol is contextloos met breuken te gaan opereren.⁸⁾ Bij het loslaten van de context verliezen zij hun houvast en zwichten voor allerlei afleiders.

Voor de overige kinderen, die dergelijke fouten gedurende langere tijd blijven maken – en E was daarvan een duidelijk voorbeeld – zou een wat hechter verankerd breukbegrip toereikend kunnen zijn om de gesignaleerde neiging tot ‘afglijden naar IN’ uit te bannen. Wèl dient het onderwijs dan voldoende valstrikken tot afglijden te bevatten om weerstand ertegen te kunnen opbouwen. En ook de middelen tot die immuniteit dienen dan voorhanden te zijn in het leerproces. De vraag is, of er nog zulke middelen zijn, die zekere waarborg bieden tot een hechtere verankering van het breukbegrip.

We zijn van mening, dat dit het geval is met het schatten. Incidenteel kwam dit een enkele maal al ter sprake (3.1). In par. 1 werd aangekondigd, dat het schatten onderdeel van dit voortgezette onderzoek zou zijn. Overigens zijn we van mening, dat aan het schatten systematisch aandacht zou moeten worden besteed gedurende het volledige leerproces. Dit vereist nieuw, ingrijpend, lange-termijn onderzoek. Vandaar, dat we ons hier niet anders dan kunnen beperken tot enkele ervaringen. Die willen we de lezer(es) niet onthouden, omdat ze onthullend zijn omtrent de tot nu toe onverdachte kwaliteit van het breukbegrip bij de nog onbesproken gebleven, overige leerlingen.

5.2 Schatten en de kwaliteit van het breukbegrip

Als instap dient het protocol van J (m).

Protocol

J heeft een vouwstrook, die als volgt is ingericht.

0	2	4

en de volgende opgave: $1\frac{5}{8} + 1\frac{4}{5} =$

I: Schat maar hoeveel dat is en zet een streepje voor je schatting op de getallenlijn.

J doet lang over de schatting. Ze schat $1\frac{5}{8}$ af en wil dan voor $1\frac{4}{5}$ een sprong verder maken. Ernstige twijfels overvallen haar echter en ze begint hardop tegen zichzelf te praten.

J (tegen zichzelf): Is dat ($1\frac{4}{5}$) nu groter of kleiner (dan $1\frac{5}{8}$)? Zij neigt tot kleiner, maar blijft twijfelen. Dan legt zij uit zichzelf verband met verdeelsituaties. Ze denkt hardop:

J: Als je nu eens 8 kinderen hebt, die 5 pannekoeken verdelen en 5 kinderen die 4 pannekoeken verdelen, dan is het in dit geval meer, dus ... $1\frac{4}{5}$ is meer ...

I: Jij dacht eerst, dat $1\frac{5}{8}$ meer was hè ...?

J: Ja!

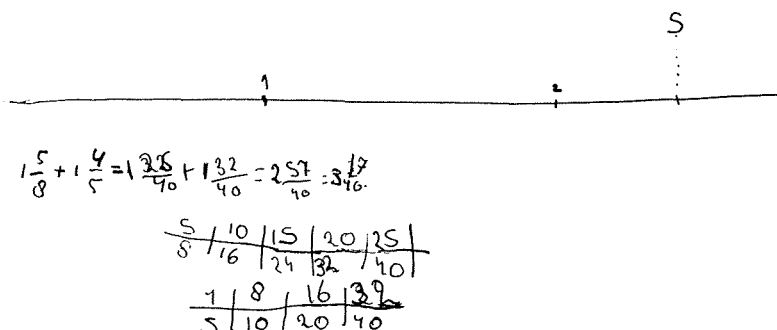
I: Vanwege die 8 hè!

J: Ja!

I: Maar nu vind je dat niet meer?

J: Nee.

Als J echter haar schatting wil aangeven op de getallenlijn, heeft zij toch weer de neiging voor $1\frac{4}{5}$ een kleinere sprong te maken dan voor $1\frac{5}{8}$.



J's werk

Na de schatting gaat J eerst haar getallenlijn inrichten voor sprongen van 1.

I: Nu kun je 't uitrekenen.

J past de tabelmethode toe, waarbij ze voor $\frac{4}{5}$ verkort te werk gaat. Ze vergist zich nog een keer, door $2\frac{57}{40}$ in eerste instantie om te zetten in $3\frac{3}{40}$, voordat zij, door zich te realiseren dat er 40 veertigsten in een hele gaan, tot $3\frac{17}{40}$ besluit.

I: Hoeveel is dat nu, als je er wat soepel tegenaan kijkt?

J: (aarzelend) ... Een half? ...

Dan laat zij haar twijfels weer duidelijk blijken.

I: (moedigt haar aan): Hoeveel veertigsten heb je nodig voor precies een half?

J: $\frac{20}{40}$.

I: Dus ...?

J: Ongeveer $3\frac{1}{2}$.

*I: Je komt dus boven de drie, maar bij je schatting bleef je er duidelijk onder.
Laten we nog eens naar de som kijken of je dit niet van te voren had kunnen zien.*

I: Waar schat je $1\frac{4}{5}$ op ... bijna ... ?

J: Twee.

I: En $1\frac{5}{8}$..., ruim ... ?

J: Anderhalf.

I: Dus?

J: $3\frac{1}{2}$.

I: Als je van te voren dus wat beter gekeken had, dan ...

Dit protocol geeft ons in verband met de kwaliteit van het breukbegrip (van J) en het schatten aanleiding tot de volgende kanttekeningen.

J heeft er tot dusver blijk van gegeven, dat zij over een goed inzicht in de breuken beschikte. Doordat zij zowel vrij gemakkelijk situaties concretiseerde als bij algoritmische verwerking het meest gedifferentieerde oplossingsgedrag vertoonde, dat uitblonk door efficiency vanwege de afstemming van het gekozen oplossingsproces op de aard van de opgaven, maakte zij de meest veelzijdige en evenwichtige indruk van alle tien leerlingen. Dit was mede hieraan te danken, dat zij nogal reflectief was ingesteld. Zij stelde zichzelf vragen om zich essentiële kwesties bewust te maken. Zo ook hier. Desondanks had ook zij een zwak moment en neigde zij even toe te geven aan uitsluitend de natuurlijke getalbetekenis van de noemers in de gegeven breuken. Zij herstelde zichzelf en gaf er spontaan blijk van, dat de verbinding van verdeelsituaties en getallenlijnactiviteiten heel natuurlijk, ja vanzelfsprekend was voor haar en – zoals eerder bleek – voor haar niet alleen.

Voor de rol van het schatten in verband met breuken op de getallenlijn kan het volgende worden vastgesteld.

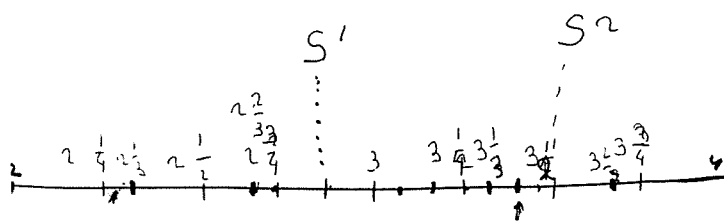
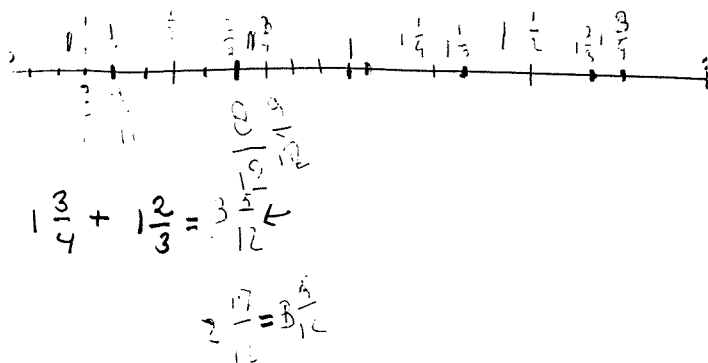
De eis tot schatten appelleert niet alleen aan een flexibel breukbegrip, maar draagt er ook toe bij. In het geval van J dienden de getallen globaal beschouwd op hun waarde (het vervangen door gemakkelijke breuken of hele getallen 'in de buurt') ten opzichte van elkaar (welke is groter) en tezamen.

Door te schatten werd op de te voltrekken bewerking globaal vooruitgelopen met als resultaat een uitkomst, die de rol van richtpunt voor het vervolg kan vervullen.

Als de precieze berekening is uitgevoerd, ligt vergelijking van uitkomst en schatting voor de hand; de schatting vervult nu zijn rol als referentiepunt.

Bij al te grote discrepantie tussen schatting en uitkomst kan een bezinning op de schatting volgen (of op de uitkomst), die tot bijstelling kan leiden van de overwegingen (resp. berekeningen) die in eerste instantie tot de schatting (of uitkomst) geleid hebben.¹⁰⁾

De verbinding met de nog slechts schaars ingerichte getallenlijn kan in een vroeg stadium nog een extra bezinningsmoment opleveren, getuige de ervaring met J (zz).



Werk van J (zz)

Protocol

J krijgt de opgave $1\frac{3}{4} + 1\frac{2}{3} =$

Hij doet een eerste schatting (S_1)

Vervolgens gaat hij de getallenlijn inrichten op eenheden. Dit brengt aan het licht, dat zijn schatting kleiner dan drie is uitgevallen.

I: Wat vind je nu van je schatting?

J: Niet zo goed.

I: Waarom niet?

J: Nou, 1 en 1 is al 2 en $\frac{3}{4}$ is bijna een hele en $\frac{2}{3}$ ook.

I: Je mag wel een nieuwe schatting maken.

J vult nu S_2 bij de getallenlijn in, waarna deze ingericht gaat worden voor precieze berekening.

Vermeldenswaard is, hoe het schatten bij J (in tweede instantie) het afronden van de gegeven breuken in mooie getallen teweegbrengt. Daardoor kan hij zijn eerder gegeven schatting kwalificeren als "Niet zo goed." In het eerste geval, dat beschreven werd, kwam dit proces pas wat op gang aan het eind van het gesprek, door de vragen van de interviewer.

Van de overige vijf kinderen, die de schatvraag voorgelegd kregen, waren er nog drie die hun schattingen van meet af aan op soortgelijke overwegingen baseerden als J in het tweede protocol.

Dat de vraag tot schatten onzeker kan maken en het inzicht aan het wankelen kan brengen bewijst het volgende.

Protocol

P_H schat ($1\frac{3}{8} + 1\frac{1}{5}$) op ruim drie. Daarna richt hij de getallenlijn in voor sprongen van 1, zodat het ruim drie gemarkeerd wordt.

I: Wat denk je, kom je met je schatting boven de drie?

P_H: Nee.

Hij geeft nu een nieuwe schatting op de getallenlijn aan, die zo'n kwart krapper dan drie uitvalt.

I: Waarom schat je nu de uitkomst kleiner dan drie?

P_H: ... Ik denk dat het toch boven de drie moet zijn.

I: Waarom denk je dat?

P_H: Nou, $1\frac{3}{8} + \frac{1}{5} = 1\frac{4}{13}$ en dat is $3\frac{1}{3}$.

Het is duidelijk, dat hij nu de kluts even volledig kwijt was, toen hij met zijn twijfels op zijn pure inzicht werd teruggeworpen. Daaraan nu de conclusie verbinden, dat P_H geen notie van breuken heeft, gaat te ver. Eerdere van hem weergegeven protocolgedeelten leggen hiervan getuigenis af.

Met betrekking tot de kwaliteit van het inzicht in breuken van de tien kinderen, die deelnamen aan het voortgezette onderzoek, is de slotsom gerechtvaardigd, dat zes van hen opgewassen waren tegen alle valstrikken, die gespannen werden.

De overige vier kinderen bleken zich op gevarieerd niveau van inzicht te bewegen. Voor twee van hen (zz, z) was het nodig te blijven bij concrete, betekenisvolle situaties; geen abstracties te forceren en hulpmiddelen aan te reiken, waardoor de binding met de realiteit zo veel mogelijk behouden blijft (verdeelsituaties en tabellen, getallenlijn).

De overige twee (z, m) bleken de weg van het algoritmiseren vrij gemakkelijk ingeslagen te hebben, doch de kwaliteit van hun verrichtingen wees uit, dat ze soms 'afgleden naar IN', doch dit wel weer heel gemakkelijk – desgevraagd – herstelden.

De vraag is omgekeerd of de gevolgde didactiek voor de breuken opgewassen was tegen zulke kinderen. Er lijken nog aanzienlijke verbeteringen mogelijk. In par. 1 werd al gewezen op mogelijke hiaten. Bovendien heeft dit hele hoofdstuk de betekenis van didactische vervolmaking. Het onderwijs zou b.v. meer gericht kunnen worden op het zelf tijdig vragen gaan stellen. Integreren van het schatten in het leerproces, vooral in de periode van de veelsporige benadering (hfdst. III en IV) kan voor een deel der kinderen de nodige (extra) bewustmakingsmomenten opleveren.

6 BESLUIT

In de inleiding op dit hoofdstuk werden de doelen van het voortgezette onderzoek gegrondvest op een aantal vragen, die uit het eerste onderzoek (hfdst. V) voortvloeiden. Behalve de kwaliteit van het breukbegrip van de kinderen in het

onderzoek betrof dit de beschikbaarheid van de aftrekalgoritme, verkortingsniveaus daarbij, context en kaal vraagstuk en gewenste herhaling van het voorafgaande leerproces. Voor de uitkomsten van het onderzoek verwijzen we naar de betreffende paragrafen.

Het belangrijkste dat rest – en daarom gaat het toch feitelijk in ontwikkelingsonderzoek – is de opbrengst voor de didactiek.

Allereerst menen we, dat een sterker accent op de getallenlijn een aanzienlijke en noodzakelijke aanvulling is op de voorgestelde didactiek. De eenheid in benadering van verdeelsituaties en getallenlijnactiviteiten is bij herhaling gebleken. Onder verwijzing naar hoofdstuk IX van dit boek brengen we voor dit hoofdstuk de volgende punten in herinnering.

De spontane verbinding, die door enkele kinderen tussen getallenlijn en verdeelsituaties gelegd werd (o.a. 5.2).

De gelijkwaardigheid van breuken en het spontane niet-algoritmische opereren, welke van de verdeelwerkzaamheden deel uitmaken en eruit voortvloeien (hfdst. III en IV en VII.4 en VII.5).

Tenslotte noemen we het schatten, dat naar het zich liet aanzien, in belangrijke mate zou kunnen bijdragen tot een hechtere mentale verankering van een operationeel breukbegrip met de getallenlijn daarbij wederom in een modelrol.

VIII BREUKEN IN RECENT ONDERZOEK

1 INLEIDING

Het eerste hoofdstuk gaf een neerslag van bronraadpleging in de internationale literatuur aangaande het breukenonderwijs. Verschillende invalshoeken werden belicht, zoals bijvoorbeeld de ontwikkelingspsychologische (I.4) en de wiskundige (I.5) om er nog enkele in herinnering te brengen.

Het innovatieve belang van een verbeterd breukenonderwijs blijft zich ook internationaal doen gelden. Dit blijkt uit de publikatiestroom, die nog steeds aanhoudt, hoewel er – het moet gezegd – de laatste tijd een kentering valt waar te nemen. De stroom neemt af, zo lijkt het. Zo had 'The Arithmetic Teacher' in 1982 slechts één bijdrage over breuken.¹⁾

Daarnaast blijven alleen in het gebied van de psychologie van het wiskunde-leren op gezette tijden nog publikaties verschijnen. Ze doen verslag van onderzoek.

In dit hoofdstuk wordt de stand van zaken anno 1982 van het internationale breukenonderzoek weergegeven. Van enkele hoofdtrekken zal worden nagegaan in hoeverre de door ons ontvouwd ideeën aangaande theorievorming voor het leren breukrekenen worden ondersteund, dan wel aangevochten in de meest recente literatuur.

Het gaat om:

- effecten van de traditionele breukendidactiek (resultaten van constaterend onderzoek);
- de breukentaalkwestie;
- conceptuele samenhang in het curriculum (verbinding met verhoudingen);
- het opschorten van het leren van algoritmen ten gunste van het vasthouden van het inzicht;
- meer algemene kwesties als methoden van analyse van het gebied, methoden van onderzoek.

Met dit laatste punt beginnen we.

2 ANALYSES EN ONDERZOEKSMETHODEN

Zojuist maakten we melding van een recessie in de publikatiestroom aangaande het breukenonderwijs. Het lijkt erop alsof veel onderzoekers hun tanden stukgebeten hebben op dit weerbarstige onderwerp. Bovendien slokt de vernieu-

wing door zakrekenmachines en zakcomputers veel aandacht van didactici en onderzoekers op.

Wat de breuken aangaat, noemt Mick²⁾ (indirekt) enkele oorzaken voor de impasse waarin zijns inziens het onderzoek verkeert. Zo bepleit hij bijvoorbeeld een totaalaanpak van het breukenprobleem en wijst hij onderzoeken op deelaspecten af. Hiermee onderschrijft hij de opvattingen van Carpenter (c.s) die in het eerste hoofdstuk (I.3) werden weergegeven en bepleit hij dus een totaalaanpak, die eveneens de grondslag voor ons onderzoek vormde. In dit verband bepleit Mick te zoeken naar natuurlijke sequenties voor het breukenonderwijs, dat wil zeggen passend bij de cognitieve ontwikkeling van de kinderen (bijvoorbeeld à la Piaget). Hij legt sterk de nadruk op de bewustmaking van en reflectie op gewichtige momenten en gebeurtenissen in het leerproces (bijvoorbeeld plotseling doorbrekend inzicht, een vondst, een sprong in het leerproces).

Na inventarisatie van enkele theoretisch onderbouwde benaderingen (van Kieren, Noelting en Payne) komt Mick tot de slotsom dat er met betrekking tot de theorie van het breuken leren en de methoden van onderzoek toch iets zal moeten gebeuren, wil er een echte doorbreking van de impasse komen. Hij bepleit de ontwikkeling van methoden om conceptuele structuren te meten:

*'However developing effective methods to measure conceptual structures may do more than anything else, to provide us with a 'breakthrough' in research of learning and teaching fractions.'*³⁾

In het zogenaamde 'Rational Number Project'⁴⁾ (RNP) kiest men juist enkele van de door Mick ontoereikend geachte theorieën als uitgangspunt. Wat de verkenning van de inhoud aangaat, wordt voor een logisch-mathematische of logische analyse gekozen⁵⁾, dat wil zeggen, een analyse op basis van de wiskundige structuur van de breuken.

Kierens opvattingen vormen voor de RNP-groep daartoe de breukentheoretische basis. Op deze grondslag – de formeel als wiskundig object beschouwde breuk – bouwt men verder.

Door middel van zogenaamde 'manipulative aids' wordt de breuk concreet gemaakt. Dit is de tweede pijler, waarop het project inhoudelijk steunt. Een derde vormen Dienes' opvattingen omtrent het verloop van leerprocessen.⁶⁾

Al deze theoretisch georiënteerde fundamenteen verwijzen ondubbelzinnig naar een structuralistische opvatting omtrent wiskunde-onderwijs, waarvan eerder melding werd gemaakt (II.2.2).

Voor het concretiseren postuleert men een interactief model dat de samenhang tussen verschillende representatiewijzen van breuken tot uitdrukking moet brengen. De grondslag vormt het verdelen. Tevens wil men de rol van het lange termijngeheugen in de beschouwing betrekken en een schets gaan geven van de verschillende geheugenstructuren, die door de leerder ontwikkeld gaan worden als resultaat van een 'theory based instructional sequence'.

Dit laatste vormt eigenlijk het hoofddoel van het project, namelijk de ontwikkeling van goed gedefinieerde onderwijssituaties voor breuken met het oog-

merk op grond daarvan de mentale wording van het begrip rationaal getal tot en met het stadium van het formele opereren ermee te kunnen beschrijven.

Ook het RNP gaat dus uit van een totaalaanpak. In individuele en groepsinterviews en systematisch gecontroleerde onderwijsexperimenten op kleine schaal tracht men genoemd projectdoel te realiseren. De basisvisie achter dit project verschilt evenwel wezenlijk van die waarop deze studie stoelt (II.2.3).

De eerste onderzoeksresultaten, die inmiddels gepubliceerd zijn en waarop in ander verband nog wordt terug gekomen (par. 3), moeten dus binnen de context van de door ons ontvouwde benadering met het nodige voorbehoud beschouwd worden. Desondanks – naar nog zal blijken – worden onze uitgangspunten voor een theorie voor breukenonderwijs op onderdelen bevestigd door de eerste uitkomsten van het RNP.

Tot zover de meer algemene kwesties in het breukenmoeras.

3 DE BREUKENTAAL EN DE BEGRIPSVORMING

3.1 De breukentaal

In de volgende paragraaf, handelend over het uitstellen van algoritmen ten gunste van nagestreefde inzichtelijkheid, zal de taalkwestie opnieuw zijdelings ter sprake komen. Het betreft het werk van Floyd, die voortbouwt op het werk van James, dat hier aan de orde is.

James⁷⁾ betoogt, dat het de nodige tijd vergt om aan kinderen de breukentaal te leren. Aan kinderen moet de gelegenheid geboden worden vanuit hun natuurlijk taalgebruik en gebaseerd op concrete activiteiten, geleidelijk aan een passende breukentaal te ontwikkelen. James schetst in dit verband een sequentie van ‘doen en mondeling beschrijven’ (zonder notaties in deze fase) tot aan het werken ‘volgens het boekje’. Enkele tussenstadia die hij noemt, zijn:

- uitleggen aan anderen wat je gevonden hebt;
- in tekeningen laten zien wat je gedaan hebt;
- verhaaltjes bij de tekeningen bedenken, eerst voluit geschreven en later in symbolen.

Het behoeft geen betoog hoe deze voorstellen van James in de door ons voorgestane benadering in de begripsvormingsfase zijn ingebed. Bovendien zoekt James, evenals dit in deze studie in sterke mate het geval is, aansluiting bij de breukwoorden ‘half’ (de helft) en ‘kwart’ die kinderen uit ervaring kennen. Hij wil bewustmaking van het waarom van juist gebruik van zulke termen. Je noemt iets een ‘half’, als een geheel in twee gelijke delen verdeeld is... etc. Hierbij aansluitend worden de andere breuknamen geleerd.

Waar James niet op ingaat, iets dat wij steeds opnieuw observeerden, is het feit dat kinderen gaan opereren op hun breukensysteem van ‘half’ en ‘kwart’ en daarmee nieuwe mogelijkheden scheppen tot beschrijvingen als ‘de helft van een halve kwart’ of ‘een half en de helft van een half’ (hfdst. III en IV).

Wat James eveneens ongemoeid laat is de storende invloed die er van de betekenis van de gebruikte symbolen in de context van IN kan uitgaan (de breuknamen als rangtelwoorden, de toegepaste cijfersymbolen en bewerkingstekens; I.3; II.3; hfdst. VII).

Noelting, Mackernan, Bertisen en Behr (e.a.) doen dit wel.⁸⁾

Noelting benadert deze kwestie in constructieve zin door te stellen, dat de symbolen waarmee de kinderen bij het rekenen met natuurlijke getallen vertrouwd zijn geworden, een betekenis-uitbreiding ondergaan als ze voor de breuken worden toegepast. Met deze betekenis-uitbreiding moet je de kinderen vertrouwd maken. Het gaat volgens hem om 'adaptive restructuring' van het reeds aanwezige symbolensysteem.⁹⁾

Mackernan pleit ervoor de breuknamen voluit te blijven schrijven. De uitkomst $\frac{3}{10}$ voor $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$ noemt hij begrijpelijk in verband met de natuurlijke getalbelasting van de toegepaste symbolen. Niemand zal echter voor '2 vijfden + 1 vijfde' 3 tienden schrijven. Als argument voor het voluit blijven schrijven van de breuknamen voert Mackernan aan het betekenisverschil van de cijfersymbolen in een breuk. In $\frac{3}{4}$ bijvoorbeeld geeft '3' een aantal aan – het is een kardinaalgetal – terwijl de '4' duidt op vierden (vierde delen van de eenheid). Hij gaat dus duidelijk uit van de verschillende rollen die 3 en 4 spelen bij het verdelen.

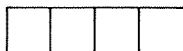
Als bezwaren tegen Mackernans argumenten kan men aanvoeren, dat door het voluit blijven schrijven van de breuknamen het hoeveelheidsaspect in de breuk te sterk beklemtoond wordt. De indruk wordt dan gewekt bij de leerlingen, dat het breukrekenen net zo gaat als het rekenen met natuurlijke getallen, althans als met benoemde getallen respectievelijk natuurlijke grootheidswaarden.

Start men – en dit is een tweede bezwaar – met verdeelsituaties zoals in de door ons voorgestelde benadering, dan zijn beide getallen in eerste instantie kardinaalgetallen (aantal pannekoeken, aantal kinderen), die tijdens het verdeelproces hun betekenis blijven behouden en van waaruit de uitkomst verklaard wordt, ook al ondergaan in diezelfde uitkomst deze getallen een betekenisverandering (met behoud van de kardinaalgetalbetekenis van een van beide). Met de betekenis-veranderingen van de gebruikte symbolen zullen de kinderen vertrouwd moeten worden, omdat de dynamiek van de breukverwekkende processen nu eenmaal resulteert in de (dikwijls tijdelijke) status quo van uitkomsten, waarvoor dezelfde symbolen gebruikt worden.

Behr e.a. beschouwen visueel-perceptieve distractoren in verband met het voltrekken van verdeeltaken, dat wil zeggen zij gaan na in hoeverre afleiders in een bepaalde verdeeltaak het kinderlijk oplossingsgedrag beïnvloeden.

In onderstaand voorbeeld is een strip in vier gelijke delen verdeeld:

Gegeven:



Gevraagd: neem van onderstaande strip $\frac{3}{5}$ deel af:



Wanneer een kind nu de tweede strip als volgt verdeelt:



en vervolgens het grote stuk verwijdt en van het overblijvende, verdeelde stuk $\frac{3}{5}$ afneemt, dan is het misleid door de gegeven kleine strip, aldus deze onderzoekers. Deze strip heeft als distractor gewerkt.¹⁰⁾

Behr e.a. onderscheiden eveneens numerieke distractoren. Als voorbeeld beschrijven zij een observatie van een vierdeklasser, die $\frac{5}{3}$ en $\frac{10}{6}$ moest vergelijken. Ze kende *de regel* om gelijkwaardige breuken voort te brengen.

Dit kind redeneerde:

'I think they are equal, because 5 times 2 is 10 and 3 times 2 is 6',

maar ze twijfelde en kwam uiteindelijk tot de slotsom:

'... that $\frac{10}{6}$ is greater than $\frac{5}{3}$ because the numbers were larger in $\frac{10}{6}$ '¹¹⁾

Behr e.a. concluderen:

*'Our research implies that a concept should be somewhat established before a distractor is introduced.'*¹²⁾

Voor de breuken zal dit moeilijk kunnen, omdat de afleiders nu eenmaal ingebouwd zijn in het notatiesysteem, dat zoveel associaties oproept met de ervaringen die de leerlingen met de natuurlijke getallen hebben.

Resumerend komen we tot de slotsom dat de taalkwestie als afzonderlijk aandachtsgedebiet voor het breukenonderwijs erkend is in de internationale literatuur. De weergegeven bevindingen ondersteunen onze theoretische uitgangspunten, zoals die voor een breukentheorie geformuleerd zijn. Deze bevindingen werden bovendien nog eens bevestigd in het onderzoek van Bertisen, dat sterk op de door ons ontvouwde ideeën geïnspireerd was. Hoewel hij zich beperkte tot begrips- en ordeningsvragen en de hoofdbewerkingen buiten beschouwing liet, stelde hij ook, vooral bij leerlingen met een zwak breukbegrip, de hinder vast die zij ondervonden van de storende invloed van hun kennis van en ervaring met het rekenen met natuurlijke getallen.¹³⁾

Bij de door ons gekozen oplossingen voor de micro-uitwerking hebben vele geobserveerde (min of meer spontane) leerprocessen van kinderen model gestaan. Op dit punt vertoonde de geraadpleegde literatuur de nodige beperkingen.

3.2 Ordenen en gelijkwaardigheid

Een tweede kwestie in verband met de begripsvorming is het belang dat wordt toegekend aan ordenen en gelijkwaardigheid. In het RNP wijdde men hieraan een publikatie.¹⁴⁾ Behr e.a. schetsen hierin dat het hebben van kwantitatieve noties van breuk voor de ontwikkeling van begrip voor het ordenen en de gelijkwaardigheid van breuken uiterst belangrijk is.

Bij het uitvoeren van vergelijkingstaken observeren Behr (e.a.) zeven verschillende benaderingen van kinderen.

Bijvoorbeeld de aanpak door complementbepaling, waarbij gegeven breuken geordend worden op grond van de ordening van het complement tot de eenheid: $\frac{3}{4}$ is groter dan $\frac{2}{3}$, want $\frac{3}{4}$ scheelt maar $\frac{1}{4}$ met een hele en $\frac{2}{3}$ scheelt $\frac{1}{3}$ en dit is groter dan $\frac{1}{4}$.

Deze, evenals andere door Behr e.a. genoemde aanpakken, werden niet alleen in ons onderzoek gesignaleerd, doch het ontwikkelde experimentele materiaal werd daarop afgestemd.

Zo onderscheidde men ook de 'Category IRP' (Imaginable Referent-Positive);

*'Subject refers to both the numerator and denominator in his/her explanation. Indicates that the same number of pieces is present (numerator) but that one has a bigger size (denominator).'*¹⁵⁾

Deze door Behr (e.a.) onderscheiden categorie vormt een belangrijk criterium in de ontwikkelde deelleergang voor het vergelijken van verdeelsituaties (hfdst. V).

Ook foutieve ordening op grond van de symbool-betekenis in IN wordt door Behr opnieuw geobserveerd.¹⁶⁾

Bijvoorbeeld: $\frac{1}{4} > \frac{1}{3}$, omdat 4 groter is dan 3.

De taken die de proefpersonen voorgelegd kregen, waren contextloos. Er werden alleen materialen als cuisenaire staafjes en gekleurde schijfjes gebruikt, waarmee de breuken verbeeld konden worden respectievelijk werden. Het ordenen verliep dan ook niet vlekkeloos en de onderzoekers stelden op grond daarvan vast:

*'Observational data obtained during lessons indicate that ordering fractions continues to be a persistent problem.'*¹⁷⁾

Ook bij de gelijkwaardigheidsstaken die de leerlingen kregen voorgelegd, werden diverse responscategorieën onderscheiden. In vrij uitvoerige observatiebeschrijvingen lichtten de auteurs een en ander nader toe. Leerlingen kregen bijvoorbeeld de opdracht de gelijkwaardigheid van breuken aan cuisenaire-staafjes te illustreren, bijvoorbeeld:

donkergroen	
oranje	rood

Lengten gelijk aan beide staafjes leggen

met  geeft $\frac{3}{6}$

met  geeft $\frac{6}{12}$

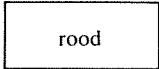
met  geeft $\frac{2}{4}$

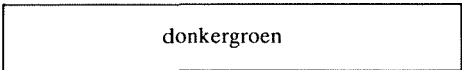
De auteurs maken geen melding van het feit dat hier van de leerlingen verwacht wordt, dat zij de gegeven respectievelijk geconstrueerde verhoudingsrelaties in gelijkwaardige breuken moeten beschrijven, hetgeen nogal wat inzicht in breuken en verhoudingen en hun onderlinge samenhang vooronderstelt.

Uit de reacties van een van de geïnterviewde kinderen blijkt het opereren op halven¹⁸⁾, waarvan we in par. 3.1 melding maakten. De auteurs gaan hierop niet verder in.

Equivalentie van breuken wordt niet voortgebracht door breukverwekkende processen, doch vooraf vastgelegd in gegevens en bijpassende materialen.

Bijvoorbeeld:

 rood

 donkergroen

Door $\frac{2}{6} = \frac{\square}{18}$

We zouden willen stellen dat hier meer sprake is van het juist toepassen van bepaalde materieel ondersteunde inwisselregels voor natuurlijke getallen dan dat er de equivalentie van breuken door verkend wordt.

Het beroep dat gedaan wordt op de kinderlijke ervarings- en voorstellingswereld is vrij gering, zo niet afwezig.

Bij ordenings- en gelijkwaardigheidsstaken vervielen de kinderen nogal eens in additief aanpakgedrag onder negatie van multiplicatieve verbanden:

*'... it may be hypothesized that fourth grade students are hesitant to use multiplicative strategies because the concepts of multiplication has not yet been internalized.'*¹⁹⁾

Wij achten deze verklaring aanvechtbaar, omdat door andere onderzoekers is vastgesteld dat ook op latere leeftijd kinderen een sterke neiging tot optelgedrag vertonen, ook wanneer oplossen door toepassing van vermenigvuldigen tot de mogelijkheden behoort, ja zelfs veel efficiënter is en tevens verwacht mag worden op grond van het 'internaliseren' van het vermenigvuldigen.²⁰⁾

Wat reeds bij herhaling in onderzoeksliteratuur werd vermeld, was dat:

‘... children employ strategies not being taught directly.’²¹⁾

Het grote bezwaar dat aan het werk van het RNP-team kleeft, is het ontbreken van een mathematisch-didactische analyse van het bestudeerde gebied, dus van een visie op wiskunde-onderwijs. Dat men er door een formeel-wiskundig uitgangspunt te concretiseren met ‘manipulative aids’ niet komt, blijkt bijvoorbeeld uit het volgende.

De auteurs stellen aan het slot van dit deel van hun werk:

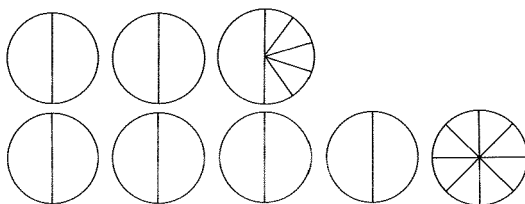
‘It turns out that $\frac{3}{5}$ and $\frac{5}{8}$, for example, are very difficult fractions to order by any means other than an abstract algorithm such as converting to a decimal or using a common denominator or a cross multiplication approach; residual strategies would hardly apply to this case.’²²⁾

Het tegenbewijs is hier snel geleverd. Wie uitgaat van de verdeelsituaties:

vijf kinderen verdelen drie pannenkoeken, en

acht kinderen verdelen vijf pannenkoeken,

mag – naar de ervaring leerde – de volgende oplossingswijze vrijwel zeker verwachten:



Conclusie: in het tweede geval krijg je meer. Er komt geen abstract algoritme aan te pas.

Ondanks de totaalaanpak van het RNP is men teveel gefixeerd geweest door een geval voor geval voortschrijding. Dit komt tot uitdrukking in de observatie van lokale strategietjes van kinderen, zonder dat de uitkomsten ervan van wezenlijke invloed zijn bij de totale analyse van het gebied en dus op de uitlijning en vormgeving van het experimentele onderwijsmateriaal, waarvan men gebruik maakt.

Desondanks werden nogal wat van onze bevindingen bevestigd. Als belangrijkste noemen we:

- de aanwezigheid van een ‘eigen’ breukensysteem bij kinderen, gekenmerkt door het opereren met halven en kwarten;
- het gedifferentieerd voltrekken van verdeeltaken;
- de storende invloed van de natuurlijke getalbetekenis van breuknamen (als rangtelwoorden) en symbolen voor cijfers en bewerkingen;
- de overeenkomst in aanpak bij het uitvoeren van vergelijkingstaken, zoals de complementredenering en het formuleren van ordeningscriteria vanuit de betekenis van teller en noemer bij het verdelen.

Tevens liet het RNP-team nog eens duidelijk zien dat de beschikbaarheid van

een regel voor het omzetten van breuken in daarmee gelijkwaardige geen enkele garantie biedt voor het operationeel zijn van echt begrip.

4 INZICHTELIJKHEID EN HET UITSTELLEN VAN ALGORITMISCHE REGELS

De observatie van Behr e.a. die in het voorafgaande beknopt werd weergegeven, vormde nog eens de zoveelste bevestiging van het feit, dat het vertrouwd zijn met een regel geen enkele garantie biedt voor aanwezig begrip. In paragraaf 6 zal dit opnieuw blijken.

In deze studie hebben we laten zien hoe een veelzijdige benadering van het breukbegrip, voortgebracht door breukverwekkende processen, van meet af aan de bewerkingen op inzichtelijke niet-algoritmische wijze binnen het blikveld van de kinderen brengt (hfdst. III en IV). Informeel opereren met breuken blijkt inherent aan het bijbrengen van begrip. In latere instantie blijkt de bron voor de begripsvorming ook de bron voor algoritmisering te zijn (hfdst. V).

Floyd²³⁾ stond eveneens het nastreven van inzichtelijkheid voor, gepaard met uitstel van het leren van algoritmische regels. Zij sloot daarbij aan op James' pleidooi (zie par. 3) voor het met de nodige zorgvuldigheid ontwikkelen van een breukentaal, waarbij de kloof tussen het handelen met concreet materiaal en met (wiskundige) symbolen zou moeten worden overbrugd. Floyd legt sterk de nadruk op het concrete handelen. Zij baseert het vermenigvuldigen van breuken, waarop zij in het bijzonder ingaat, op het herhaald verdelen als breukverwekkend proces.

Het vasthouden aan de context van het verdelen, gepaard met het uitvoeren en onderling bespreken en beargumenteren van verdelingen en uitkomsten, beschreven in breukentaal, die nog nauw bij het verdelen aansluit (bijvoorbeeld $\frac{1}{3}$ van $\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$), vormt de kern van Floyds benadering. Telkens opnieuw moet aan de kinderen hun oplossingsproces gevraagd worden en zullen zij hun uitkomsten moeten kunnen verantwoorden vanuit de context, want alleen dan:

*'... can the teacher be sure, that the tracks between the 'real world' and the symbols on the paper are surely laid.'*²⁴⁾

Wat beslist niet mag gebeuren is, dat de kinderen tot algoritmische regels geforceerd worden. Zij stelt in dit verband:

*'The pitfall to be avoided in such prompting (bedoeld is aanzetten tot algoritmiseren; toevoeging L.S.) is that the child may see the symbol manipulation as a trick of some sort, not as something that makes practical sense.'*²⁵⁾

Het zo lang mogelijk openhouden van de bronnen van inzichtelijkheid biedt zekere garanties ter voorkoming hiervan, zoals we in deze studie hebben laten zien. Het onderzoek van Verhoef en Vroonhof (zie par. 6) laat zien dat het erop lijkt, dat rekenonderwijs dat sterk bepaald wordt door vaardigheidstraining, de door Floyd bedoelde val juist opzet; een val waaraan veel kinderen niet bij machte zijn te ontsnappen, met alle nare consequenties van dien.²⁶⁾

5 VERBINDING MET VERHOUDINGEN

Noelting (e.a.)²⁷⁾ leggen verband tussen verhoudingen en breuken. Zij beschouwen het verhoudingsredeneren in vier verschillende contexten, namelijk mengverhoudingen bij het limonade maken, verhoudingen tussen aantallen kinderen en te verdelen koekjes, het vergelijken van ongelijknamige breuken en het optellen van ongelijknamige breuken.

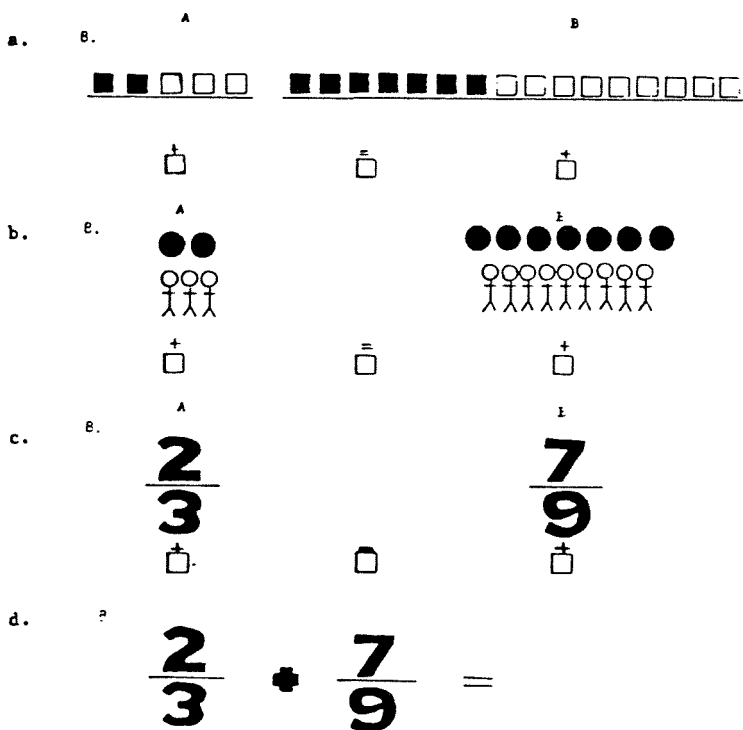


Fig. 1 - Item 8 of the four different experiments:
Orange Juice (a), Sharing Cookies (b),
Comparison of Fractions (c), Addition of
Fractions (d).

Tussen genoemde vier taakgebieden wordt een zeker verband gezien, gelet op het bijeenbrengen ervan in eenzelfde onderzoek. Wie zich op het standpunt van de breuken stelt, herkent in het algoritmiseringsproces voor verhoudingen een belangrijk toepassingsgebied voor de breuken. Uit het bijeenbrengen van genoemde taakgebieden blijkt, dat het onderwijskundige belang van een dergelijke samenhang door Noelting (e.a.) is ingezien.²⁸⁾

Onze benadering onderscheidt zich van die van Noelting (e.a.) hierin, dat de genoemde taakgebieden geïntegreerd opgaan in situaties, dat vanzelfsprekend voert tot verschil- en niet tot sombepaling van ongelijknamige breuken. Deze contextuele en mathematisch-didactische samenhang zal de begripsvorming ten goede komen. Bovendien worden er bij een dergelijke uitlijning macro-structurele verbanden gelegd tussen de verschillende stadia van het (langdurige) begripsvormingsproces. Dit proces wordt gedragen door de wiskundige werktuigen die zijn aangereikt, zoals tabel en getallenlijn.

Omdat oplossingsprocedures van vergelijkingsproblemen niet in een (te) vroeg stadium geforceerd worden tot onwrikbare algoritmen, blijven zowel de bron van het inzicht als de weg naar meer gestroomlijnde oplossingsmethoden open. Het is een benadering, die naar twee kanten 'werkt'.

6 TUSSENSTAND

Wanneer de voorgestane benadering van het breukenonderwijs, waarvoor in deze studie elementen voor een theorie ontvouwd zijn, vergeleken wordt met uitkomsten van internationaal onderzoek, dan blijkt deze ook bij fundamenteel andere uitgangspunten de nodige bijval te verwerven. Het betreft:

- het aanpakken van het breukenprobleem in zijn volle omvang en niet op deelaspecten (par. 2, Mick, Behr (e.a.));
- het zorgvuldig ontwikkelen van een breukentaal: aansluiten bij het natuurlijk taalgebruik en rekening houden met de belasting van breuknamen, cijfer- en operatiesymbolen met betekenissen uit het rekenen met natuurlijke getallen (par. 3, 4, James; Noelting, Mackernan en Behr (e.a.));
- het toepassen van een eigen breukensysteem door kinderen, gebaseerd op halven en kwarten en operaties daarmee (par. 3, James, Behr (e.a.));
- het toepassen door kinderen van overeenkomstige methoden van vergelijken en ordenen van breuken en het onderkennen van belangrijke criteria daarvoor (par. 3, Behr (e.a.));
- het nastreven van het algoritmiseren van verhoudingen als toepassingsgebied voor het breukrekenen (par. 5, Noelting e.a.);
- het openhouden van de bronnen van het inzicht, het uitstellen van de algoritmen en de waarschuwing dat de leerlingen niet tot algoritmiseren geforceerd mogen worden, waardoor deze als trucs gaan worden toegepast (par. 4, Floyd).

Om te laten zien dat met het laatstgenoemde punt echt ernst gemaakt zal moeten worden, besluiten we dit hoofdstuk met een paragraaf, waarin wat uitkomsten van constaterend onderzoek besproken zullen worden, waarin effecten van onderwijs dat mikte op geforceerd algoritmiseren geregistreerd zijn.

7 CONSTATEREND ONDERZOEK

Telkens opnieuw verschijnen er weer publikaties waarin onderzoek wordt beschreven dat louter registreert wat leerlingen van zekere leeftijd van de breuken weten en kunnen. Soms reiken dergelijke onderzoeken iets verder en verbindt men voorzichtige interpretaties aan verkregen uitkomsten (bijvoorbeeld het verklaren van bepaalde, veelvuldig voorkomende fouten). Zulk onderzoek werd recentelijk gepubliceerd door Pinchback, Harrison (e.a.), Hershkowitz (e.a.), Hasemann en Verhoef (e.a.).²⁹⁾

Zo ging Pinchback na welke fouten kinderen bij het algoritmisch rekenen met breuken maakten. Veel van de geconstateerde fouten bleken te wijten aan defecte algoritmen.

Harrison e.a. stelden vast, dat het met de eenvoudige, concrete, procesgerichte breuktaken nog wel lukt, maar dat er bij het formeel opereren met breuken iets misloopt. Dit wordt door Pinchback's onderzoeksuitkomsten dan nog eens bevestigd.

Ook Hershkowitz e.a. gingen de effecten van het breukenonderwijs na bij leerlingen van twaalf tot zestien jaar, net als Hasemann.

Ook het onderzoek van Verhoef (e.a.) was van dien aard. Omdat zij onderzoek verrichten in de Nederlandse situatie en ook nagingen wat het verval was van kennis en vaardigheden bij het breukrekenen nadat het systematische breukonderwijs ongeveer een jaar had stilgestaan, willen we hierbij wat uitvoeriger stilstaan.

Verhoef e.a. moesten hun onderzoek in beperkte tijd verrichten en konden dus geen groepen leerlingen over meerdere jaren volgen. Zij kozen daarom voor de volgende opzet, die ons inziens een alleszins acceptabel alternatief vormt voor een longitudinaal onderzoek.

Om hun onderzoeksdoelen te realiseren (het betrof de vraag naar de bekwaamheden van brugklassers van *mavo-havo-vwo*, bij het vermenigvuldigen en delen, het vereenvoudigen van breuken en de vragen, in hoeverre bedoelde bekwaamheden verband houden met de wijze van aanleren), werd een passende onderzoeksgroep gezocht, dat wil zeggen brugklassers van scholen of een scholengemeenschap met een beperkt aantal toeleveringsscholen. Hiervan selecteerde men de vier die de meeste leerlingen 'leverden'. De rekenmethoden die op deze scholen gebruikt werden, waren 'Boeiend Rekenen', 'Naar Zelfstandig Rekenen' (niet-herziene versie), 'Niveau Cursus Rekenen' (NCR) en het programma van de School Advies Centrum Utrecht, kortweg het 'SAC-programma' (alleen in de lagere leerjaren).

In de geselecteerde brug- en zesdeklassen van deze scholen werd dezelfde toets afgenomen.

De resultaten van de leerlingen uit de vier lagere scholen met een mavo-, havo- of vwo-advies werden vergeleken met die van de brugklassers. De toets was samengesteld uit vijf vereenvoudigopgaven (bijvoorbeeld: $\frac{3}{9} = \dots$), vijf verme-

nigvuldigheden (bijvoorbeeld $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \dots$) en vijf delingen (bijvoorbeeld: $5\frac{2}{5} : 3 = \dots$; $\frac{4}{5} : \frac{4}{7} = \dots$). Er bleek een aanzienlijk verval in beheersing van de onderzochte vaardigheden te zijn.

	zesdeklassers	brugklassers
vereenvoudigen	70%	59%
vermenigvuldigen/delen	53%	42%

De auteurs geven een interessante, maar ook onthullende bloemlezing van fouten, die veel overeenkomst vertonen met Pinchback’s bevindingen. Enkele van die fouten waren:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{21}{35} \times \frac{20}{35} = \frac{420}{35}$$

$$3\frac{2}{7} \times 1\frac{2}{5} = 3 \times 1 + \frac{2}{7} \times \frac{2}{5} = 3 + \frac{4}{35} = 3\frac{4}{35}$$

$$3\frac{2}{7} \times 1\frac{2}{5} = 3\frac{2}{7} \times 1\frac{5}{2} = 3\frac{35}{4} = 11\frac{3}{4}.^{30)}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Zij komen op grond van de resultaten tot de conclusie dat het onderwijs in de gecompliceerde breukbewerkingen vermenigvuldigen en delen voor de leerlingen, die aan het onderzoek deelnamen, volledig gefaald heeft en dat het breukbegrip aan de meesten is voorbij gegaan. Deze auteurs stelden ook vast, dat men er met stampwerk niet komt, omdat uit het grote verval tussen zesde klas en brugklas blijkt dat een dergelijke aanpak volledig onbegrip slechts voor een korte periode kan verbloemen. De kinderen, die met NCR waren ‘opgevoed’ scoorden het slechtst. De totale prestatie van NCR-leerlingen verviel van 52% goede antwoorden bij de zesdeklassers tot slechts 23% bij de brugklassers. Bij het vernemen van deze resultaten dient men zich te realiseren, *dat de kinderen voorbestemd voor het lager beroepsonderwijs niet aan het onderzoek hebben deelgenomen.*

Op grond van deze uitkomsten en de bevindingen van Harrison (e.a.) kan men de conclusie trekken, dat er kennelijk een kloof is in de traditionele didactiek voor de breuken tussen de fase, waarin het begrip gevormd wordt en de fase waarin de algoritmen geleerd worden en bovendien, dat de begripsvormingsfase voor veel kinderen verregaand ontoereikend is, blijkens het feit dat het bijgebrachte (respectievelijk veronderstelde) begrip letterlijk niet operationeel is. Bij het opereren met breuken valt het door de mand en belanden de leerlingen in de val, die het onderwijs zelf zette.

IX ONDERWIJSPRINCIPES

1. Inleiding

In het eerste hoofdstuk van dit boek werd enkele malen naar de methode 'Nieuw rekenen voor de basisschool' verwezen. Wie de deeltjes van deze methode voor de hogere leerjaren doorbladert en de voor breuken ingeruimde plaats in het oog houdt, wordt getroffen door de omvang ervan. Naar schatting 25% van de opgaven zijn contextloze breuksommen. Toch is de deelleergang breuken in 'Nieuw Rekenen', vergeleken met andere traditionele rekenmethoden nog terughoudend van opzet. Het doelbewust van meet af aan oefenen van de hoofdbewerkingen om deze er hoe dan ook in te krijgen, is zichtbaar wat teruggedrongen.

Deze omstandigheid laat echter het gewicht van de breuken in het traditionele rekenonderwijs onverlet. Het blijft een sleutelrol vervullen, een sleutelrol op grond van omvang en bemeten tijd. Maar ook de sleutel die de wissel doet omslaan naar een ontmoedigend zijspoor, waar de afhakers heen gelooft worden om uitgerangeerd te raken wat hun wiskundige ontwikkeling betreft. Voorwaar geen fraaie rol voor de breuken, maar wel een ingrijpende.

Het uitblijven van afdoende oplossingen voor dit probleemgebied bij uitstek in het rekenonderwijs, is elders een van de oorzaken geweest, waardoor vernieuwingen slechts moeizaam en 'mondjesmaat' in het (reken)onderwijs doordrongen.¹⁾ Door de hardnekkigheid van de moeilijkheden met deelgebieden binnen het per traditie bepaalde rekenprogramma, ontbrak de vernieuwingsbereidheid bij veel leerkrachten en de nodige tijd om ingrijpende inhoudelijke veranderingen door te voeren. Dit onderstreept het innovatieve belang van een verbeterd breukenonderwijs.

Dit is in ons land eveneens ingezien door auteursgroepen van recent verschenen reken/wiskundemethoden. Zij hebben niet geschroomd ook deze in didactisch opzicht zo weerbarstige materie aan te pakken. Of de aangedragen oplossingen didactisch toereikend zullen blijken te zijn, zal de praktijk nog moeten uitwijzen en moet binnen dit kader onbeschouwd blijven, al lijkt een enkele aanzet veelbelovend.²⁾

In het algemeen geldt (nog) voor het gangbare breukenonderwijs – gezien vanuit de door ons geschetste benaderingswijze – dat er sprake is van aanwijsbare tekortkomingen. Deze betreffen het ontbreken van een visie op het reken/wiskundeonderwijs, het niet rekening houden met kinderen bij de keuze van taken. Eenzijdige nadruk op algoritmisering, een didactisch armoedige oriënteringsfase en weinig of geen samenhang met andere programma-onderdelen kunnen ook nog genoemd worden. Te dikwijls en uitsluitend staat het vakge-

bied hiervoor model; wiskunde waarin breuken reeds de formele status van rationaal getal hebben.

Het beschreven onderzoek, zowel als het daarop inleidende onderwijs, stoelde wel op een visie die werd uiteengezet. Bovendien werd wel rekening gehouden met kinderen, met hun denkbeelden, hun leerprocessen, misvattingen en bedoelingen in verband met het breukbegrip. Ook werd getracht aan de overige bezwaren van de breukendidactiek per traditie tegemoet te komen.

Ons inziens waren er voldoende aanwijzingen om te kunnen stellen dat met de voorgestelde inhoudelijke keuzen voor het breukenonderwijs een weg wordt ingeslagen, die de moeite waard is.

Gebleken is, dat het gangbare breukenonderwijs bij de 'afhakers' geweldige weerstanden kan oproepen.³⁾ Onze ervaringen wijzen uit dat bij de voorgestelde benadering van de breuken geen leerlingen op grond van onbegrip behoeven af te haken.

Onze benadering kan overigens bij leerkrachten wel enige weerstand oproepen. In algemene literatuur over innovatie spreekt men o.a. van psychologische weerstanden.⁴⁾ Het nieuwe in onze benadering, de afwijking van het vertrouwde, kan dergelijke weerstanden oproepen met als gevolg afwijzing. Hinderlijk kunnen echter – en dat ligt hier meer voor de hand – ook belemmeringen in de persoon van de leerkracht zelf zijn, door zijn of haar kennis van het betrokken gebied.⁵⁾

Bij het gedifferentieerd voltrekken van verdeeltaken, met het oog op het breukbegrip staat, zo is gebleken, het operationele nadrukkelijk voorop. Hierdoor moet de leerkracht van meet af aan de neiging kunnen weerstaan 'door te stoten' naar ongewenste formalisering.

'Knowing a piece of mathematics too well, may be a serious impediment to teaching it decently as long as the teacher is unconscious about the learning process, that produced his excellence. So he needs relearning by observing learning processes of less skilled people, of children',

hield Freudenthal zijn toehoorders voor, in zijn openingsrede voor de vierde ICME.⁶⁾

Onze inhoudelijke voorstellen voor de breuken zijn mede gebaseerd op de observatie van leerprocessen in het onderwijs. Ook de aanwijzingen voor de leerkrachten berusten hierop. Bij opvolging hiervan en het weerstaan van de neiging tot formaliseren, zullen momenten van (h)erkenning zeker niet uitblijven, al was het maar doordat de activiteiten dan voor de leerlingen (her-)kenbaar geworden zijn.

2 ALGEMENE PRINCIPES VOOR HET BREUKENONDERWIJS VOLGENS WISKOBAS

2.1 Inleiding

Voor het breukenonderwijs kan men algemene principes formuleren voor de *inhoud*, het begrip breuk en het rekenen met breuken, dus voor het *leren* van de kinderen (en de onderwijsgevende!) en voor het *onderwijzen* door de onderwijsgevende (en de kinderen!).

Op elk van de drie genoemde gebieden zullen basisgedachten worden geformuleerd.

Achtereenvolgens wordt ingegaan op enkele algemene principes voor een nieuwe breukendidactiek en op principes, die meer betrekking hebben op de *inhoud* van het onderwijs. Vervolgens worden deze principes toegelicht aan enkele voorbeelden.

Tenslotte worden de kerngedeelten in dit onderwijsvoorstel nog eens beknopt samengevat.

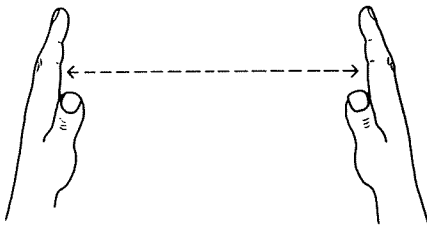
2.2 Algemene principes voor een nieuwe didactiek

Uitgangspunt zal zijn: Hoe ver kunnen kinderen komen met de breuken en het breukrekenen als hun een zeker houvast geboden wordt, zonder echter algoritmische regels en modellen dwingend op te leggen.

Voorop staat dus de *constructie* van de bewerkingen met breuken door de kinderen *zelf*. Wat kinderen doen wordt dus positief *gewaardeerd* en *gebruikt* als *materiaal* in het *voortgaande leerproces*. Bij *constructie* moet men denken aan activiteiten, die breuken teweeg brengen, waarbij de precisie kan toenemen.

Bijvoorbeeld:

- Door te *schatten* wordt veelal op grond van globale indrukken een *veronderstelling* geuit over een uitkomst.
 - Door *gebaren in de lucht* kunnen uitkomsten globaal worden aangegeven.
- Als dit een hele is



dan is dit...

Het globaal schatten staat dus nadrukkelijk voorop. Bij de gebaren in de lucht zullen de kinderen naar elkaar kijken en 'antwoorden' van elkaar overnemen. Het gaat om het ontwikkelen van een zeker *gevoel* voor orde van grootte.

- Door uitkomsten op de getallenlijn te plaatsen, worden de grootten van breuken vergelijkbaar. Het vergelijken kan nog preciezer gebeuren door de getallenlijn constructief te vullen met nieuwe maten, waardoor zelfs precieze verschillen vastgesteld kunnen worden.

In het onderwijs dient men zich te richten op het constructief verwerven door de kinderen van wat men beoogt. Het *aanleren* van regels wordt dan *afgeschaft*! Algoritmiseren en modellen worden niet meer opgelegd of dwingend voorgeschreven. Voorop staat de waardering voor wat kinderen doen, wat zij voortbrengen aan methoden en procedures, ook al wijkt dit af van de formele operaties met breuken. Daar ligt de *sleutel*. Uitgaande van het *informele*, zoals de kinderen de zaken aanpakken, wordt op weg gegaan naar het formele. Vanuit een *inzichtelijke basis* wordt de weg van het *algoritmiseren* en verkorten ingeslagen. De kinderen hoeven daarbij niet met lege handen te staan. Hun wordt een zeker houvast geboden in bepaalde aangereikte middelen.

2.3 Inhoudelijke principes

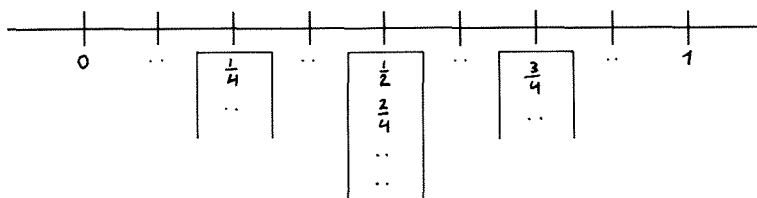
Hoofdprincipe is, dat kinderen zelf procedures voor de hoofdbewerkingen *construeren*, op basis van:

- *verdelen, meten, het samenstellen* en *exploreren* van mengverhoudingen e.d.;
- het *vergelijken* en *ordenen* van situaties, waarin breukverwekkende activiteiten voltrokken worden en de uitkomsten daarvan;
- het *samenstellen* en *uiteenleggen* tot/van gehelen en delen, etc.

We bieden ze *modellen* (cognitieve representatievormen), die daarbij houvast kunnen geven. Maar ook probleemsituaties als denkmiddelen.

De modellen zijn:

- de *strook*, die van alles kan representeren en een verbinding legt tussen probleemsituaties (als denkmiddelen) en het *derde* model, de getallenlijn. Bij het constructief vullen van de getallenlijn



vervult een punt in eerste instantie de rol van 'hectometerpaaltje' $\frac{1}{2}$ is een naam voor de plek op de getallenlijn, maar ook een afstand (tot 0). Vanuit het meten, met de strook in een bemiddelende rol, dienen deze noties post te vatten. Voorkomen moet worden, dat het voorzien van de getallenlijn van breuk-etiketten alleen maar een rationele stap in het leerproces wordt;

- de *verhoudingstabel* met betrekking tot *eerlijk* verdelen. Daarin worden gelijkwaardige verdeelsituaties weergegeven, die tot *equivalente* breuken leiden:

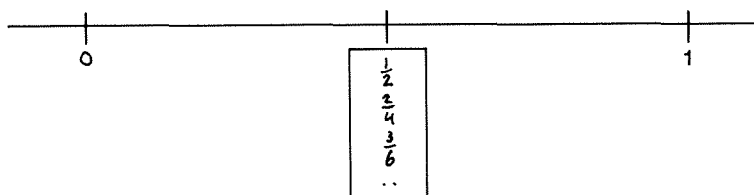
1 (eenheid) verdelen met z'n tweeën
 2 (eenheden) verdelen met z'n vieren
 3 (eenheden) verdelen met z'n zessen

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{3}{6}$$

.....

geven hetzelfde resultaat $\frac{1}{2}; \frac{2}{4}; \frac{3}{6}; \dots; \dots;$

- de *getallenlijn* waarop het resultaat wordt gezet:



Het eerste en het derde model zeggen iets over de grootte van de breuk: 'Zijn de breuken even groot' of 'Is de ene breuk groter dan de andere?'

De verhoudingstabel geeft het eindresultaat een *dynamisch* trekje, je kunt bij een breuk (als hij kaal gegeven is) iets denken, dat het gewenste resultaat oplevert. Met de tabel worden gelijkwaardige breuken *gegenereerd* en met de getallenlijn *gevisualiseerd*.

Essentieel in het voorgaande is de *nagestreefde samenhang* tussen de onderscheiden modellen. Tabel en getallenlijn zijn bedoeld om eenheid te scheppen in de veelheid aan *toegangen* (verdelen, uitdelen, mengverhoudingen etc.) die voor de breuken gekozen zullen (moeten) worden. Bedoelde samenhang uit zich ook in de hechte band die er tussen *breuken* en *verhoudingen* gesmeed wordt. In dit geheel van samenhangen speelt de *gelijkwaardigheid* van breuken (en verhoudingen) bij het *vergelijken* en op weg gaan naar *procedures voor bewerkingen* een *kernrol*.

In eerste instantie worden gelijkwaardige breuken *geconstrueerd*, voortgebracht door activiteiten. In de beschrijving ervan neemt de *notatie* in equivalente breuken een belangrijke plaats in. De schrijfwijze zal benadrukt en expliciet gemaakt (moeten) worden. Pas in latere instantie kan en mag op weg gegaan worden naar het automatiseren en algoritmiseren bij het voortbrengen van gelijkwaardige breuken. Het exploreren van toegangen die zo reëel mogelijk zijn, is belangrijk.

Als de breuken (te snel) in kale opgaven gegeven worden, gaan de leerlingen louter getalsmatig werken, onthecht van enige betekenis- en inzichtverlenende realiteit.

De getallenlijn als model staat *centraal* in de opzet en vormt de verbinding tussen de probleemsituaties in de verschillende contexten (toegangen) en de verhoudingstabel en het getalsmatig werken. De getallenlijn biedt dus (samen met de strook) *houvast* naar twee kanten.

Samengevat komt het erop neer, dat de getallenlijn dient:

- als *denkmodel*;
- voor de *samenhang* in een breukenleergang;
- voor het *openhouden* van de *bronnen van het inzicht*.

Ook de *verhoudingstabel* is ondergebracht bij de *modellen*. Men dient zich ervan bewust te zijn, dat de tabel in de loop van het lange termijn leerproces verschillende betekenissen kan hebben.

Aanvankelijk is de tabel voornamelijk *notatieschema* met een uiterst gewichtige functie, namelijk het ondersteunen van de *constructieve begripsverwerving*:

$$\frac{1}{4} \quad \frac{2}{8} \quad \frac{3}{12} \quad \dots$$

namelijk ‘verhouding’ en ‘breuk’ leren zien als *klassen* en (bij de breuken) de verbinding van *proces* en *uitkomst*. In het voorbeeld van zojuist kan $\frac{12}{2}$ ook representant van de gegeven klasse zijn. Dit wordt door de context van het gegeven probleem bepaald, bijvoorbeeld ‘2 kinderen krijgen samen $\frac{1}{2}$ ’, maar (dan) ook ‘1 kind krijgt $\frac{1}{4}$ ’ of ‘4 kinderen krijgen 1’. Voor iedere vertegenwoordiger uit een klasse geldt, dat hij representant kan zijn, hetzij in zijn gegeven vorm, hetzij terug gebracht tot de kleinste (of gewenste) proporties. Allengs gaat de tabel in het leerproces voor de kinderen de betekenis van *denkmodel* aannemen. Vooral bij het algoritmiseringsproces voor het aftrekken van ongelijknamige breuken, zoals beschreven in hoofdstuk 5, vervult de tabel deze functie. Er is dan wel een sterke verbinding met de klassebetekenis van breuk. Naarmate het proces vordert, kan de tabel weer op de achtergrond raken, zoals we hebben laten zien (hoofdstuk VII).

Een vraag, die zich telkens opdringt, luidt: Hoe realiseer je dergelijke idealen? Hoe moet een breukenleergang eruit zien, die beantwoordt aan het voorgaande? En hoe springen onderwijsgevend en leerlingen ermee om, wil de gegeven beginselverklaring ook maar enigszins tot zijn recht komen?

We zullen een en ander illustreren aan enkele essentiële activiteiten die zo’n deelleergang noodzakelijkerwijs dient te bevatten, zonder overigens tot volledige uitschrijving over te gaan.

In algemene zin kan er al wel dit van gezegd worden. Zo’n deelleergang zal er zich in de eerste plaats op moeten richten een *breukentaal* te ontwikkelen als beschrijvingsmiddel voor breukverwekkende processen en de uitkomsten daarvan. In het *voltrekken* van (eerlijke) verdelingen bijvoorbeeld blijken breuken en breukbewerkingen in betekenisvolle samenhang besloten te liggen. Dat wil zeggen *begrip* en *begripsvol opereren* trekken *nauw samenhangend* met elkaar op. Bij de beschrijving wordt gebruik gemaakt van operatietekens (bij het samenvoegen van stukken, bij het uiteenleggen in delen, bij het herhaald samenvoegen van gelijke stukken e.d.) en van benaderende beschrijvingen.

Twee kwesties zijn hierbij essentieel, namelijk:

1. Er wordt *uitgegaan* van het *fragmentarisch kennisbestand*, dat de kinderen van breuken hebben en de taal daarvoor (de helft, een half, de helft van een half, een halve kwart ...). Door het onderwijs vindt ontwikkeling tot een vol-

waardig breukentaal-apparaat plaats. Het accent ligt daarbij zoveel mogelijk op het verbaliseren door de kinderen zelf. Ook voor de taal wordt aan het *constructieprincipe* recht gedaan.

2. Dit geldt in het bijzonder voor het *formuleren van regels*. De vraag is: Hoe laat je regels formuleren? Hiernaar zal nog nader onderzoek verricht moeten worden. Het opleggen en vervolgens laten citeren van regels heeft geen enkele zin.

Wat wel belangrijk is, is het *verbaliseren* van wat begrepen is om vooruitgang te boeken in het leerproces. Leren – waar dat zinvol is – een regel te formuleren en bijvoorbeeld de kracht van het generaliseren inzien, daar gaat het om. Door het *compliceren* van opdrachten kunnen regels worden *uitgelokt*. Dat is het geëigende didactische middel ervoor.

Het is overigens zo, dat ook hier een *differentiatiemoment* ligt. Niet iedereen komt tot de gewenste algemene formuleringen en verkortingen. Aan de andere kant weten we dat kinderen in dit opzicht ook van elkaar (kunnen) leren en elkaars regels overnemen.

Zoals reeds bij het *constructieprincipe* werd uiteengezet, is er voor het *schatten* als benaderende activiteit een belangrijke plaats ingeruimd. De kinderlijke aanpakken bieden daartoe in verschillende stadia van het leerproces ruimschoots de gelegenheid. Ze vormen een rijke ingang tot de doelen die we voor het breukenonderwijs nastreven. Daarop dient zich de aandacht te richten.

De onderwijsgevende zal zich geduldig en terughoudend moeten opstellen en de neiging moeten onderdrukken om niet reeds bij de eerste les tot het optellen van ongelijknamige breuken over te gaan. Uit de voorbeelden zal blijken, dat zulke mogelijkheden van meet af aan in de activiteiten besloten liggen. We moeten er echter *met onze vingers afblijven*. De leerlingen construeren immers *zelf, niet wij!* En zij zijn op dat moment nog lang niet toe aan wat wij aan mogelijkheden in de situaties herkennen. Het gaat om hún leerproces. Zij moeten het nog leren. Daarvoor kan onze kennis en kunnen onze inzichten van dat moment toch niet maatgevend zijn?

Na een breedverkenkend begin geven we vervolgens opdrachten om breuken uiteen te leggen in verschillende welomschreven delen. Bij deze en voorgaande constructie-activiteiten komen gelijknamigheid en ongelijknamigheid van pas. Sterker nog, deze zaken spruiten uit de constructiewerkzaamheden voort, als ook toegangen tot het ‘helen uithalen’ en ‘gelijkwaardigheid’. Op de essentiële plaats die ingeruimd wordt voor gelijkwaardigheid, werd reeds ingegaan. Vervolgens worden de breuken *vergeleken* en *het verschil bepaald*.

En tenslotte komen – hoewel van *meet af aan in de activiteiten ingebed*, zoals we nog zullen laten zien – vermenigvuldigen en delen – meer expliciet – aan bod. Is $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ bijvoorbeeld eenmaal als beschrijving met een activiteit in een bepaalde situatie verbonden, dan kan dat op verschillende manieren gedacht worden ($1\frac{1}{4} \rightarrow \frac{3}{8}$, of direct $\frac{3}{8}$), afhankelijk van de wijze waarop verdelingen bijvoor-

beeld voltrokken worden. Ook dit zullen we laten zien. Belangrijk – bij dit laten zien – is wat kinderen hier uitdenken, of al uitgedacht hebben.

Bij het vermenigvuldigen en delen van breuken zijn op voorhand regels als ‘teller keer teller’ en ‘noemer keer noemer’ (en daarna wegstrepen) en ‘delen is vermenigvuldigen met het omgekeerde’ *uit den boze*. Aan de andere kant moet er voor gewaakt worden dat procedures voor deze bewerkingen niet op een *intuïtief en te aanschouwelijk* niveau blijven steken met het oog op het functioneren van het geleerde verderop in het leerproces (in het voortgezet onderwijs). Het delen van breuken bijvoorbeeld zal in een goede context moeten worden ingebed.

Waarop we ons uiteindelijk willen richten, is het voorkomen van ontsparingen als $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$ en andere automatische fouten, waarvan in hoofdstuk 8 een bloemlezing gegeven werd. Deze dienen bestreden en dus door de leerlingen beargumenteerd weerlegd te kunnen worden.

2.4 Principes aan enkele voorbeelden toegelicht

Enkele verdeelsituaties verkend

Allereerst verwijzen we naar de hoofdstukken III, IV en V in verband met verdeelsituaties. We willen in deze paragraaf vooral de aandacht vestigen op enkele aspecten van het vermenigvuldigen en delen van breuken in verband met verdeelsituaties en op de rol van de getallenlijn. Verdelen doet zich voor in allerlei situaties in verschillende nuances.

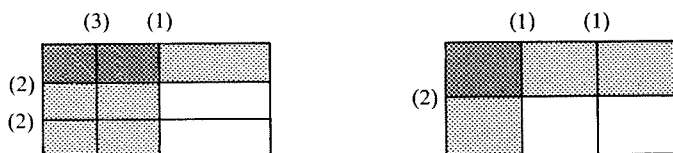
Bij het verdelen kunnen bijvoorbeeld onderscheiden worden ‘verdelen over’ (uitdelen aan) en ‘verdelen in’, waarbij zowel de omvang van de porties als het aantal kan worden voorgeschreven (verhoudings- en verdelingsdeling). De uitkomst van het verdelen, de verdelingsstructuur die aangebracht is, kan evenwichtig zijn – alle proporties gelijk(waardig) – of niet. Verdelen doet zich in een veelheid van contexten voor met een andere intentie dan in echte verdeelsituaties. Zo is er het meten, waarbij het verdelen in dienst gesteld wordt van het maatverfijnen, het bepalen van gemiddelden, het bepalen van dichtheden, waarbij bijvoorbeeld gedacht wordt in evenwichtige verdelingen van bevolking, voorzieningen e.d. over beschikbaar land om onderlinge vergelijking van situaties te vereenvoudigen.

Vanuit al dergelijke gezichtspunten dient het verdelen te worden verkend met de leerlingen.

Het breukverwekkende eerlijk verdelen kan zich voordoen als ‘verdelen over’ en ‘verdelen in’, waarbij alles opgaat en delen en eenheden gelijk(waardig) zijn. Het is ‘eerlijk’ verdelen.

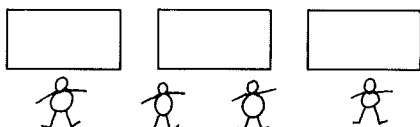
In te geven voorbeelden zullen we uitgaan van het verdelen van repen (rechthoeken), om te laten zien dat die didactisch nog wat meer te bieden hebben dan de cirkels (pannekoeken). De cirkels doen zich bij het uitvoeren van verdeeltaken één-dimensionaal voor. De tweede dimensie aan rechthoeken geeft extra mogelijkheden, namelijk het herhaald verdelen in twee dimensies als ingang tot

het vermenigvuldigen van breuken (en de eigenschappen daarvan), bijvoorbeeld:



$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \quad \text{en} \quad \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

Bovendien doet bij verdeelactiviteiten het werken met rechthoeken een groter appel op de mentale activiteit, omdat afzonderlijk gegeven delen minder gemakkelijk als zodanig herkenbaar zijn als bij cirkeldelen. Dit dwingt de leerlingen de relaties, die van belang zijn voor de oplossing van een gegeven probleem *bewuster* in het oog te houden.

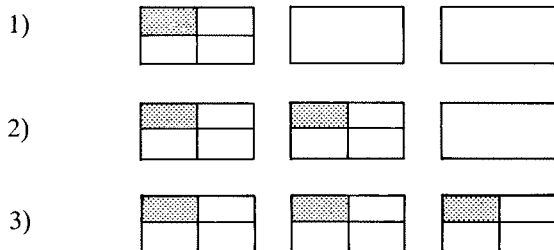


Verdeelsituatie 1

Vier kinderen verdelen drie repen. *Hoeveel krijgt elk?*

Mogelijke constructieprocessen van de kinderen zijn (zie ook hoofdstuk III en IV), de volgende.

EERSTE OPLOSSING:



De repen worden de één na de ander in vieren gedeeld en vervolgens wordt de uitkomst beschreven.

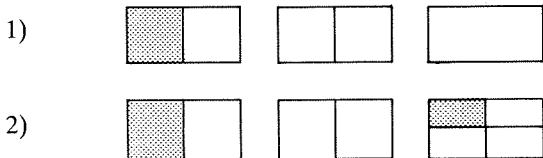
Ieder krijgt:

- een kwart en een kwart en een kwart
 $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$;
- drie keer een kwart
 $\left(3 \times \frac{1}{4}\right)$;
- drie kwarten
 $\left(\frac{3}{4}\right)$.

Soms blijft iets van het verdeelproces in de uitkomst zichtbaar:

- een half van een half *en* een half van een half *en* een half van een half;
- drie keer een half van een half
($3 \times \frac{1}{2} \text{ van } \frac{1}{2}$).

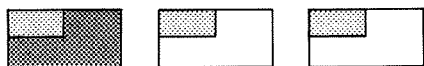
TWEDE OPLOSSING:



Het successief verdelen van twee repen in halven en één reep in vier stukken.
Ieder krijgt:

- een half en een kwart
($\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$);
- een half en de helft van een half
($\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ van } \frac{1}{2}$).

DERDE OPLOSSING:



Het verdelen van elke reep in stukken van $\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4}$.

Ieder krijgt

- een hele min een kwart
($1 - \frac{1}{4}$);
- drie keer een kwart
($3 \times \frac{1}{4}$).

Alle individuele oplossingen worden in de nabespreking samengebracht. Beschrijvingen worden met elkaar vereenzelvigd:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ van } \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$$

Merk op hoe de ratio 'repen-kinderen' betekenis verleent aan de uitkomst en ook hoe de som van ongelijknamige breuken (en andere bewerkingen) reeds in deze activiteit vervat is (zijn).

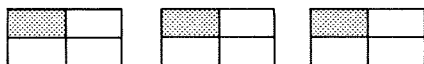
Het lastige van de breuken (en een geschikte didactiek daarvoor) is, dat men zo gemakkelijk en snel naar het formele, naar het algoritmische kan doorstoten.

Wat in het gegeven voorbeeld vooral van *wezenlijk* belang is – en een *ingrijpend verschil* met de gebruikelijke benadering van breuken – is, dat achter $\frac{3}{4}$ een gedifferentieerd proces van verdelen, samennemen, verkorten etc schuilgaat. In $\frac{3}{4}$ is het hele daaraan voorafgaande proces compact samengebond. $\frac{3}{4}$ blijkt dus veel meer te kunnen zijn dan: 

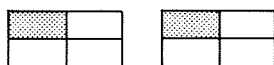
De verdeelsituatie, de constructie van de verdelingsstructuur, het beschrijven daarvan en van de uitkomst, hangen nauw en betekenisvol samen.

Opmerking: In voorgaande voorbeelden lieten we $\frac{1}{2}$ van $\frac{1}{2}$ maar even zo staan. Een belangrijke didactische kwestie is de overgang naar $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$. Hiervoor zou de analogie met een 'geheel aantal keer' het uitgangspunt kunnen zijn:

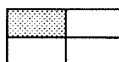
Bijvoorbeeld:



3 repen – 4 kinderen, ieder krijgt $3 \times \frac{1}{4}$.



2 repen – 4 kinderen, ieder krijgt $2 \times \frac{1}{4}$.



1 reep – 4 kinderen, ieder krijgt $1 \times \frac{1}{4}$



$\frac{1}{2}$ reep – 4 kinderen, ieder krijgt $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$.

Een andere mogelijkheid is de rondgangen van de wijzers bij het (leren) klok-kijken. De grote wijzer gaat:

$2\frac{1}{2}$ keer rond ($2\frac{1}{2} \times \dots$)

2 keer rond ($2 \times \dots$)

1 keer rond ($1 \times \dots$)

$\frac{1}{2}$ keer rond ($\frac{1}{2} \times \dots$)

N.B.: ook het 'plotten' van uitkomsten van verdeelsituaties *op de getallenlijn* dient met voorgaande verdeelactiviteiten 'hand in hand' te gaan.

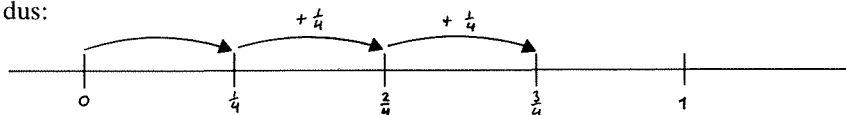
Bijvoorbeeld: 6 dropveters verdelen met 8 kinderen kan bij het voltrekken van de verdeling dergelijke beschrijvingen opleveren als

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}; 6 \times \frac{1}{8} \text{ en } \frac{6}{8}.$$

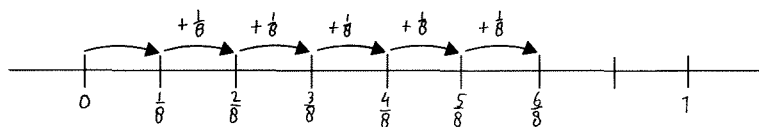
Maar, degenen die er de 'dubbele' situatie 'drie dropveters voor vier kinderen' in herkend hebben, kiezen voor

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}; 3 \times \frac{1}{4} \text{ of } \frac{3}{4},$$

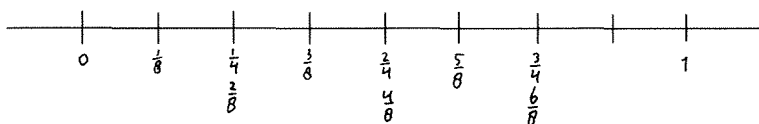
dus:



en:



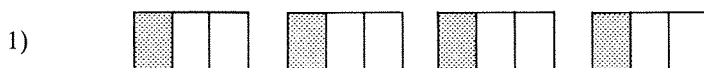
en (samen):



Aldus ontstaat er een nauwe verbinding tussen de diverse (verdeel-)contexten en bovendien krijgt de *teller* als zodanig echte betekenis.

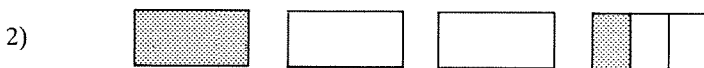
Verdeelsituatie 2

Drie kinderen verdelen vier repen. Eerst vooruitlopen op de uitkomst (schatten). Krijgt ieder meer of minder dan één hele, twee helen? Daarna verdelen. Men kan onder andere de volgende oplossingen verwachten:



Ieder krijgt:

- een derde en een derde en een derde en een derde
 $(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3})$
- vier keer een derde
 $(4 \times \frac{1}{3});$
- vier derden
 $(\frac{4}{3}).$



Ieder krijgt:

- een hele en een derde
 $(1 + \frac{1}{3});$
- een (...) en een derde
 $(1\frac{1}{3})$

Beschrijvingen worden achteraf (in samenspraak) met elkaar in verband gebracht en 'gelijk' verklaard, dus:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

'Helen uithalen' is dus in het verdelen ingebed. Hierbij kan men het (voorlopig)

laten. Men kan echter ook nieuwe verdeelprobleempjes hierop laten aansluiten. We zullen twee voorbeelden laten zien, die toegangen zijn tot het *vermenigvuldigen* en *delen* van breuken.

Jan kreeg (in de vorige verdeelsituatie) $1\frac{1}{3}$ reep. Hij besloot zijn deel met zijn vriendje te delen. Wat kregen beide?



Ieder kreeg – gegeven het probleem –

$\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{3}$ of $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$, maar ook – gegeven deze verdeling –

$\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ of $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$.

Andere mogelijkheden tot verdelen zijn:



Ieder krijgt: twee derden ($\frac{2}{3}$).



Ieder krijgt:

- een zesde en een zesde en ... en een zesde ($\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$);
- vier keer een zesde ($4 \times \frac{1}{6}$);
- vier zesden ($\frac{4}{6}$).

Uit de beschrijvingen kan nu onder andere geconcludeerd worden:

$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$, maar ook

$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{6}$.

Uit de laatste, formele beschrijvingen blijkt opnieuw, wat in de verdelingen al zichtbaar werd, namelijk dat in $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$, $\frac{1}{2}$ als operator op de teller 'werkt', waarbij de 'maat' (= de noemer) ongemoeid gelaten wordt. $\frac{1}{2}$ kan ook de 'maat' verfi-jnen ($\frac{1}{3}$ wordt $\frac{1}{6}$) en het maatgetal (de teller) in tact laten.

Delen

Petra tracteert op repen, ieder krijgt $\frac{1}{4}$ reep. Als zij nog $2\frac{1}{2}$ reep heeft, schrikt zij. Er zijn nog zoveel kinderen. Zou zij wel genoeg hebben?

Hoeveel kinderen kan Petra nog $\frac{1}{4}$ reep geven met haar $2\frac{1}{2}$ reep?

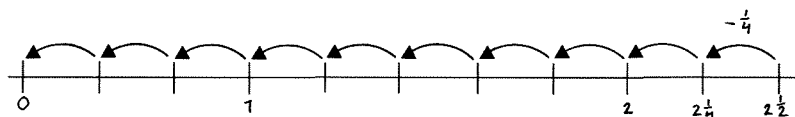


In $2\frac{1}{2}$ reep zitten 10 kwarten, dus

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{2}$$

$$10 \times \frac{1}{4} = 2\frac{1}{2}$$

$$2\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 10$$



‘In $2\frac{1}{2}$ zitten 10 kwarten.’

Aldus blijken de kiemen voor het begripvol uitvoeren van de vier hoofdbewerkingen in het breukverwekkend delen besloten te liggen. Het is nu zaak dat vanuit deze informele toegangen tot de hoofdbewerkingen geleidelijk aan regels ontdekt worden door de leerlingen en geverbaliseerd. Ons standpunt ten aanzien van het formuleren van regels hebben we eerder uiteengezet.

In hoofdstuk V hebben we laten zien, hoe dit op basis van het vergelijken van situaties, onder gebruikmaking van verhoudingstabellen, zou kunnen geschieden voor het aftrekken (en optellen) van ongelijknamige breuken, in hoofdstuk VII nog aangevuld met de getallenlijn.

De getallenlijn bij vergelijken en verschil bepalen

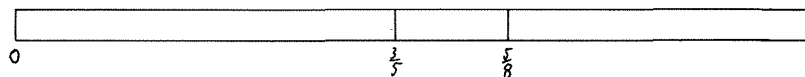
Een nieuw element in de opzet vormt de getallenlijn: *plotten op de getallenlijn en verschil bepalen* (niet forceren!).

We gaan uit van toepassingssituaties, bijvoorbeeld:

Twee slakken houden een wedstrijd. De ene kruipt 3 dm in 5 minuten, de andere 5 dm in 8 minuten. Welke is het snelst?

We laten in eerste instantie differentiatie toe, dus beginnen we met ‘grove’ middelen (schatten).

Bijvoorbeeld: in ruwe maten tekenen (of ‘afpassen’ op een strook):



en verwoorden:

Het verschil is minder dan een half (halve decimeter per minuut).

Het verschil is heel klein.

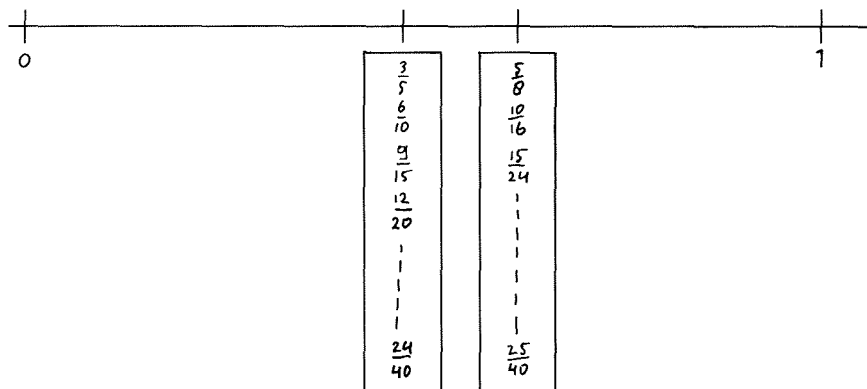
Het verschil is nog minder dan een kwart (decimeter per minuut).

tabellen

Met behulp van tabellen gaan toewerken naar gemakkelijk vergelijkbare situaties (criteria, hoofdstuk V):

dm	3	6			24	dm	5	10				25
min	5	10			40	min.	8	16				48

Mag dat zomaar? Wordt een slak nooit moe?
Daarmee kan ook het verschil bepaald worden.
Vervolgens gaan we terug naar 'onze' getallenlijn:



Het verschil blijkt $\frac{1}{40}$ te zijn.

Hoe kan nu voor meer precisie op de getallenlijn gezorgd worden?

Het is zaak hier gebruik te maken van contextopgaven die weinig 'ruis' hebben.
OPMERKING 1: bij het werken met de tabellen doen zich (impliciet) steeds weer de in hoofdstuk 5 beschreven verschijnselen voor, onder andere blijkt telkens opnieuw dat bij het werken met en in verhoudingstabellen breuken worden toegepast.

OPMERKING 2: door de tabelmethode is voortschrijding in schematiseren en het toepassen van verkortingen mogelijk (zie hoofdstuk V en VII).

verfijningen op de getallenlijn (vanuit een (verdeel-)situatie)

Bijvoorbeeld: een geheel onderverdelen in een aantal stukken (zoveel mogelijk stukken) volgens zeker voorschrift.

Iemand verdeelde vier pannenkoeken in halven en derden.

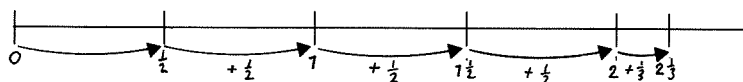
► Maak nog een verdeling, maar nu met *meer* halven dan de eerste verdeling.

► Kun je zo'n verdeling maken met in totaal negen stukken?

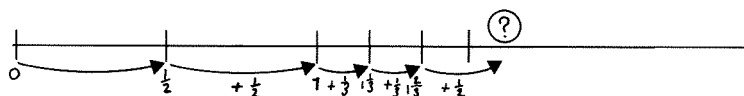
Iemand vond deze verdeling:



Wat werd verdeeld? Eerst (vlug) *schatten*. Dan de verdeling op de getallenlijn.
Handig (soort bij soort):



In volgorde:



Op deze manier doet zich de behoefte aan een nieuwe, fijnere maat voelen. Dergelijke activiteiten geven vanzelf ook aanleiding tot het alleen in breukgetallen beschrijven van zulke verdeeluitkomsten en het bepalen van de totaaluitkomst:

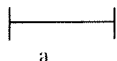
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} =$$

samenvatten tot:

$$4 \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{1}{3} = 2 + 2 = 4.$$

OPMERKING: hier ligt een mogelijkheid tot lettergebruik:

- stukje bij stukje;
- maat bij maat:



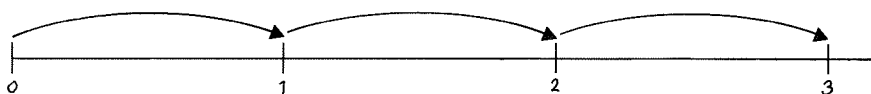
' $4a + 6b$ '

Het beschrijven van verdelingen in veel stukken op de getallenlijn riep de behoefte aan een nieuwe, gemeenschappelijke maat op. Deze kwestie staat nu centraal.

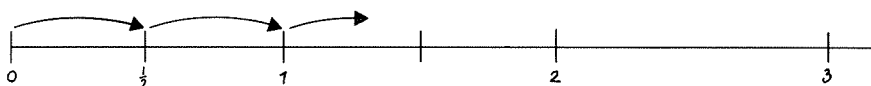
Gemene maat

Een voorbeeld als instap.

Dit zijn de stappen van vader:

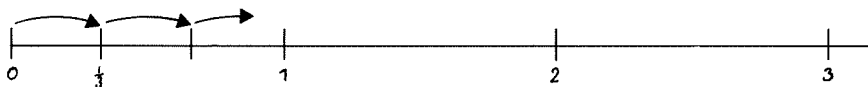


En van Els



► Maak af.

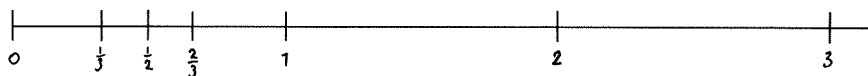
En van Dirk-Jan:



► Maak af.

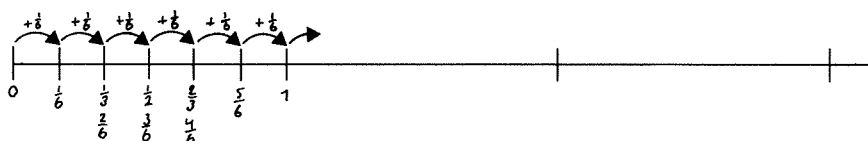
Wat denk je, is Dirk-Jan kleiner of groter dan Els?

Zet de stappen van alle drie op een getallenlijn, dat wil zeggen, de plekjes waar hun voeten steeds terecht komen, kijk zó:



► Maak maar af.

Petra is nog kleiner dan Dirk-Jan. Ik verklap: als zij op de getallenlijn loopt, komt zij op alle voetstappen die er al staan. Hoe groot is Petra's stap?

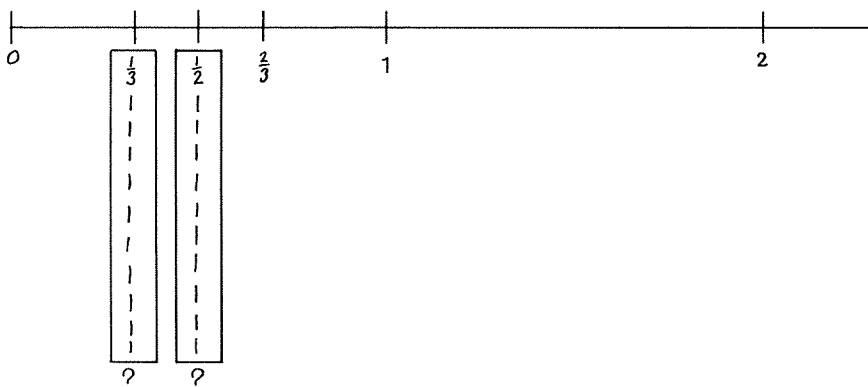


► Kan Petra nog kleinere stapjes gemaakt hebben?

Op dit resultaat volgt:

a. bezinning

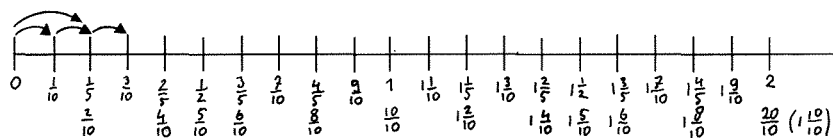
Hadden we dit niet kunnen voorspellen, nadat we de getallenlijn met stap-punten van vader, Els en Dirk-Jan beschikbaar hadden?



► Bij elk punt dat we al hebben, passen nog veel meer breuknamen.

b. Wanneer eenmaal voldoende punten op de getallenlijn beschikbaar zijn, volgen activiteiten die gericht zijn op het samenstellen tot en het uiteenleggen van breukgetallen.

Voorbeeld 1:

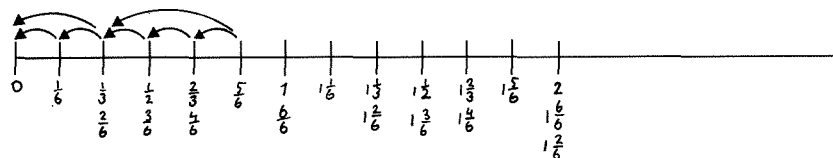


$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} \rightarrow 2 \times \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$$

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \rightarrow 2 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}, \text{ etc., maar ook:}$$

Voorbeeld 2:



$$\frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}; \quad \frac{5}{6} = 5 \times \frac{1}{6}.$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

$$\frac{5}{6} = 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

etc.

Terugblik op de voorbeelden

Met de zojuist gegeven voorbeelden werden de bedoelingen achter dit onderwijsvoorstel voor breuken enigszins toegelicht. Zo'n toelichting is in feite bij voorbaat tot mislukken gedoemd, omdat de dynamiek die het onderwijsproces kenmerkt eraan ontbreekt. Oplossings-processen van kinderen zijn door de beschrijving achteraf verstard tot onwrikbare feiten. Zo is het (gegaan) en niet anders; als zou het ook niet anders kunnen.

Zouden we gepoogd hebben een volledige deelleergang te beschrijven, dan zou de overvloed aan *leerstoftermen* die dan onvermijdelijk wordt, een verkeerde indruk gewekt hebben; vandaar de beperkingen die we onszelf hebben opgelegd. Bovendien gaat van een volledige beschrijving nog sterker de suggestie uit van 'zo moet het en niet anders.'

Wie het aandurft uit te gaan van het constructieprincipe – want moed is er stellig voor nodig bij de onderwijsgevende en ook een geschikte attitude, wat trouwens ook voor de leerlingen geldt – wie dit dus aandurft, komt zeker voor verrassingen te staan,⁷⁾ hoewel veel van de oplossingen, die men verwachten kan, ook voorspelbaar zijn. Ook dat wilden we met de voorbeelden laten zien.

2.5 Samenvatting

Als algemene principes voor het breukenonderwijs werden genoemd:

- het zelf verwerven door de leerlingen van een *constructief breukbegrip*, dat wil zeggen:
 - constructie van procedures voor de bewerkingen;
 - constructie van een breukentaal;
 - constructie van regels;
 - constructie van verbalisering voor regels;

Dit constructieprincipe schept de mogelijkheid tot gedifferentieerd werken op alle onderscheiden aspecten. Aan de leerlingen wordt houvast geboden bij hun voortgang in het leerproces door strook, tabel en getallenlijn.

De breukentaal-ontwikkeling, het beschrijven van processen en uitkomsten en de equivalentie van situaties en uitkomsten krijgen nadrukkelijk aandacht. Het fragmentarisch kennisbestand van de kinderen vormt hiertoe de grondslag (verdelen, de helft, een half, een kwart, de helft van een halve kwart, ...).

Het dwingend *opleggen* van modellen, het eenzijdig *voorschrijven* van regels, het snel en eenzijdig *algoritmiseren* worden *afgeschaft* en ingeruild voor geleidelijke voortgang op basis van inzicht en zelfconstructie.

De leerkracht dient zich dus *terughoudend* ten aanzien van zijn eigen kennis en *onbevangen* en *positief waarderend* ten aanzien van de te verwachten inbreng van de kinderen op te stellen.

Een strikt onderscheid tussen verhoudingen en breuken is er niet gemaakt. Men kan stellen, dat de samenhang met verhoudingen gerespecteerd wordt. Ze spelen op de achtergrond steeds mee, zonder dat dit expliciet gemaakt wordt.

Op overeenkomstige wijze zal de samenhang met kommabreuken en procenten moeten worden aangegeven in het praktische materiaal.

NOTEN

NOTEN HOOFDSTUK I

- 1 Een gestage en nog steeds aanhoudende stroom van publikaties (over breuken en daarmee samenhangende gebieden als verhoudingen e.d.) getuigt hiervan.
Als voorbeelden van enkele recent verschenen publikaties noemen we:
Carpenter, T.P., Kepner, H., Corbitt, M.K., Lindquist, M.M. en Reijs, R.E.: *Results and Implications of the Second NAEP-Mathematics Assessments: Elementary School*, in 'The Arithmetic Teacher', vol 27 nr 8, 1980, pag. 10–12 en 44–47.
N.B.:
 - a) zie met name de pagina's 11, 12 en 47, die aangeven dat we de resultaten terecht droevig noemden;
 - b) NAEP staat voor The National Assessment of Educational Progress;
 - c) vergeleken met het eerste NAEP-verslag van vijf jaar geleden, blijkt er geen enkele vooruitgang in dit probleemgebied van het reken/wiskunde-onderwijs geboekt te zijn.Carpenter, T.P., Coburn, F.G., Reijs, R.E. en Wilson, J.W.: *Results and implications of the NAEP-Mathematics Assessments: Elementary School*, in 'The Arithmetic Teacher', vol 22 nr 6, 1975, pag. 438–450.
Suydam, M.N.: *Review of Recent Research Related to the concepts of Fractions and of Ratio*, in 'Osnabrücker Schriften zur Mathematik' – Cohors-Fresenborg, E. en Wachsmuth, I. (eds) – Osnabrück 1978, pag. 296–333, met name pag. 326.
Wiskobasteam: *Onderzoeksnota. Onderzoek voor wiskundeonderwijs*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 9 nr 4/5, 1980, pag. 2–19. Zie met name par. IV 2.2 'breuken en verhoudingen', pag. 11–12.
Soms verschijnen publikaties onder veelzeggende titels, die erop duiden dat we met een probleemgebied te doen hebben:
Janssen, G.: *Breuken, een poging tot herstel*, in 'Wiskrant', jrg 2 nr 7, 1977, pag. 6–8.
Hiele, P.M. van: *Zouden we het rekenen met breuken misschien kunnen afschaffen?*, in 'Begrip en Inzicht', Purmerend 1973, pag. 196–204, met name pag. 196.
- 2 Deze lijst laten we hier onvermeld, omdat we op enkele van de hoofdoorzaken nog uitvoerig zullen ingaan. Bovendien verwijzen de oorzaken veelal naar het aangetroffen onderwijs en zijn daarom dikwijls van afgeleid belang. Hier volstaan we met te verwijzen naar:
Padberg, F.: *Didaktik der Bruchrechnung*, Freiburg/Basel/Wien 1978, met name pag. 14.
Streefland, L.: *Davydov, Piaget en de breuken*, in 'Pedagogische Studiën', jrg 56 nr 7/8, 1979, pag. 289–307, zie met name pag. 305.
- 3 Het betreft een aantal, dat de honderd ruimschoots overschrijdt. Om te voorkomen, dat we ons verliezen in een labyrint van titels en verwijzingen, vermelden we alle geraadpleegde artikelen slechts één maal in het literatuuroverzicht. Het gaat immers om het aangeven van bepaalde hoofdlijnen in de aan de breukenproblematiek gewijde artikelen. Betreft het een artikel, dat voor het verloop van ons betoog van meer belang is, en waaruit bijvoorbeeld geciteerd wordt, dan zullen in een eventuele verwijzing wel de vereiste gegevens vermeld worden.
- 4 *Nieuw Rekenen voor de basisschool*, auteurs: een werkgroep onder redactie van B. Bruinsma, uitg. Bosch & Keuning, Baarn.
Zie voor een uitvoerige bespreking van deze methode:
Jansen, H.: *Nieuw Rekenen (2)*, in 'Rapportboekje 3: Overzicht rekenmethoden anno 1980, IOWO, Utrecht 1980, pag. 50–60.
Deze methode kan zeker niet tot de slechtste gerekend worden, wat de breuken betreft.

- 5 Zie in verband met contexten en de functie ervan:
Treffers, A. (ed): *Vermenigvuldigen en delen I. Overzicht en achtergronden*, in 'IOWO-leerplanpublikatie 10', Utrecht 1979, hierin met name hoofdstuk 3: Fundering.
Goffree, F.: *Leren onderwijzen met Wiskobas*, Utrecht 1979, met name pag. 210–216.
Streefland, L.: *Makrostructurele verkenningen voor het wiskundeonderwijs*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980, hfdst. 5.
- 6 Zie: Treffers, A. (ed): *Vermenigvuldigen en delen I. Overzicht en achtergronden*, in 'IOWO-leerplanpublikatie 10', Utrecht 1979, met name hoofdstuk 2.
- 7 Zie voor een uitvoerige analyse van alle complete reken/wiskundemethoden die anno 1980 op de Nederlandse markt waren:
Wiskobas-team: *Overzicht rekenmethoden anno 1980*, in 'Rapportboekje 3', IOWO, Utrecht 1980.
Voor een voorbeeld van een veel schralere, minder rijke instap in het gebied van de natuurlijke getallen verwijzen we naar:
Niveau Cursus Rekenen, auteurs: werkgroep onder leiding van H.M.M. Vossen, uitg. Malmberg, 's-Hertogenbosch.
Voor een voorbeeld van een andere aanpak van de algoritmisering van de hoofdbewerkingen verwijzen we naar:
Taal, auteurs: J. Postema, K. Kuipers en J.J. Haverkort, uitg. Dijkstra, Zeist.
De inbedding van getalbegrip en bewerkingen is in deze methode breder, genuanceerder dan dit in 'Nieuw Rekenen' het geval is.
- 8 In de meer psychologisch getinte literatuur komt die aandacht voor kinderen en de ontwikkeling van hun getalbegrip en de bewerkingen tot uitdrukking. We denken in dit verband aan namen als Piaget en Ginsburg en in eigen land aan Koster, Borghouts-Van Erp en de groep 'Kwantiwijzer'.
- 9 Zie in dit verband bijvoorbeeld:
Wiskobas-team: *Overzicht rekenmethoden anno 1980*, in 'Rapportboekje 3', IOWO, Utrecht 1980.
Treffers, A.: *Cito item dito. Over leerdoelgerichte toetsen en toetsgerichte leerdoelen*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 9 nr 6, 1980, pag. 81–99.
- 10 CITO: *Rekentoetsen leerjaar 2, 3 en 4 basisonderwijs*, Handleiding, Arnhem 1979.
De hierin gepresenteerde leerdoelgerichte toetsen zijn gebaseerd op een achttal traditionele rekenmethoden, waaronder 'Nieuw Rekenen'.
- 11 Zie in verband met leerdoelen ook:
Treffers, A.: *Cito item dito. Over leerdoelgerichte toetsen en toetsgerichte leerdoelen*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 9 nr 6, 1980.
- 12 Voor de breuk als klasse van gelijkwaardige breuken heeft men geen oog; voorbeeld: $\frac{1}{2}$ opvatten als representant voor $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \dots\}$.
- 13 Zie: Wiskobas-team: *Overzicht rekenmethoden anno 1980*, in 'Rapportboekje 3', IOWO, Utrecht 1980.
- 14 Zie in verband met algoritmiseren in 'onze' betekenis:
Jong, R. de (ed): *De abakus. Een belangrijk leermiddel voor het wiskundeonderwijs op de basisschool*, in 'IOWO-leerplanpublikatie 6', Utrecht 1977.
Treffers, A. (ed): *Vermenigvuldigen en delen I. Overzicht en achtergronden*, in 'IOWO-leerplanpublikatie 10', Utrecht 1979.
Zie in dit verband met mathematiseren:
Treffers, A.: *Wiskobas Doelgericht*, Utrecht 1978, hoofdstuk 2.
Streefland, L.: *Makrostructurele verkenningen voor het wiskundeonderwijs*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980.
- 15 Bij de nieuwere methoden geschiedt dit via tussenkomst van de zogenaamde machientjes; zie par. 1.3.
Zie bijvoorbeeld ook:
Getal in beeld; vernieuwd en activerend rekenen voor de basisschool, auteurs: Tineke Brinkman, Valeer van Achter, Piet de Jong, fr. Jan Nieland; in hogere leerjaren met medewerking van Eugène Niels en Jan van Loon, uitg. Malmberg, 's-Hertogenbosch, 1e druk 1971.
Wiskobas-team: *Overzicht rekenmethoden anno 1980*, in 'Rapportboekje 3', IOWO, Utrecht 1980, pag. 162.
- 16 De voor breuken gebruikte cijfersymbolen en breuknamen als 'derde', 'vierde' etc. hebben al nadrukkelijk betekenis verworven voor de leerlingen bij het rekenen met

- natuurlijke getallen. De introductie van de breuken veroorzaakt daardoor dubbelzinnigheid ten aanzien van symbolen en terminologie, die storend werkt.
Zie in dit verband:
Streefland, L.: *Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction*, in 'Educational Studies in Mathematics', 9, 1978, pag. 51–73, met name pag. 51 en 53.
Ook in het Engelse taalgebruik geldt genoemde dubbelzinnigheid.
Zie in dit verband bijvoorbeeld:
Lloyd, D.G.H.B.: *The case against fractions*, in 'Mathematics in School', vol 5 nr 2, 1976, pag. 27, waar de auteur opmerkt:
'For instance isn't it strange that we cannot distinguish verbally between an ordinal and a rational number with numerator.'
- 17 Zie: Streefland, L.: *Cognitieve ontwikkeling en wiskunde-onderwijs*, in 'Pedagogische Studiën', jrg 57 nr 7/8, 1980, pag. 344–357, met name pag. 348–349.
 - 18 Dit kan bijvoorbeeld geschieden door aan te sluiten bij het natuurlijke spraakgebruik (van kinderen). De termen 'een half', 'de helft' en 'kwart' zijn niet 'besmet' met betekenissen van natuurlijke getallen.
Zie ook hfdst. III.
 - 19 Zie in verband met 'veelsporige benadering':
Streefland, L.: *Makro-structurele verkenningen voor het wiskundeonderwijs*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980.
Zie ook de hoofdstukken III en IV. Op de achterliggende opvatting over begripsvorming wordt dan eveneens ingegaan.
 - 20 Een didactisch-fenomenologische benadering van de breuken laat zien hoe nadrukkelijk het operatorische bij de breuken voorop staat. Dit rechtvaardigt het pleidooi ten gunste van 'breukverwekkende' activiteiten en breukveroorzakende processen. Dat met bedoelde vaststellingen geen eenduidige aanwijzing voor micro-uitwerking beschikbaar is, blijkt uit de invloed die deze zogenaamde operator-opvatting anderszins op het breukrekenen – vooral internationaal – is gaan uitoefenen. Zie in dit verband par. 1.5.
Zie voor de methode van de didactische fenomenologie: hoofdstuk III.
 - 21 Terminologie van Freudenthal.
 - 22 Voor wat we met geleidelijke algoritmiseren precies bedoelen, verwijzen we naar de kern van deze studie, namelijk hoofdstuk V.
De geleidelijkheid doet zich onder meer voor in het ontstaan van de uiteindelijke algoritme uit een proces van vertikaal mathematiseren en de ruimte, die daarin is voor individuele verschillen tussen de leerlingen met betrekking tot bijvoorbeeld het toepassen van verkortingen en het voortschrijden in schematisering.
Hieruit blijkt al, dat de term algoritmiseren eigenlijk niet zo geschikt is. Wij bedoelen er juist mee, dat we het algoritmiseren in de meer gangbare betekenis willen tegenhouden, uitstellen. Het is ons te doen om een proces van verwiskundigen dat op den duur een algoritme zou kunnen opleveren. De inbedding van dit proces in toepassingssituaties is daarbij van belang. Het gaat dus zeker niet om een 'kale' rekenwijze.
 - 23 'The Arithmetic Teacher' is een uitgave van *NCTM* (National Council of Teachers of Mathematics) in de Verenigde Staten van Noord Amerika.
Zie ook noot 3.
 - 24 Zie voor enkele voorbeelden van dergelijke oefenspelletjes:
Streefland, L.: *Oefenstofferij: Oefenspellen*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 8 nr 4, pag. 59–71.
 - 25 Met 'stadsplan' wordt bedoeld een rooster.
 - 26 In een tijd van enkele jaren werd in een tiental artikelen aandacht aan deze kwestie besteed. Wellicht is hier sprake van beïnvloeding door de zogenaamde 'New-Math'-beweging, die een sterk accent legde op het structurele aspect van het reken-wiskunde-onderwijs. Door deze omstandigheid werd het breukrekenen 'verwiskundigd'.
Zie in dit verband bijvoorbeeld:
Meijer, H. en Streefland, L.: *Elementair Wiskundig Rekenen*, in 'Rapportboekje 3', IOWO, Utrecht 1980, pag. 78–97, met name pag. 90–92.
 - 27 Carpenter, T.P., Reijs, R.E., Coburn, T.G. en Wilson, J.W.: *Notes from National Assessment: addition and multiplication with fractions*, in 'The Arithmetic Teacher', vol 23 nr 2, 1976, pag. 137–141.
loc. cit. pag. 140 (zie ook noot 1).

- 28 Braunfeld, P. en Wolfe, M.: *Fractions for low achievers*, in 'The Arithmetic Teacher', vol 13 nr 8, 1966, pag. 647–655.
- 29 In par. 1.5 wordt nader op deze kwestie ingegaan.
Zie ook voetnoot 20.
Omstreeks de tijd, waarin het artikel van Braunfeld (c.s.) verscheen, doemde de zogenaamde operator-benadering van de breuken en het breukrekenen in allerlei publikaties op. Als voorbeelden van praktische publikaties noemen we:
Dienes, Z.P.: *Fractions. An operational approach*, Paris 1967.
Dienes, Z.P.: *Mathematics in the primary schools*, Toronto 1966, met name pag. 42 e.v.
- 30 Zweng, M.J.: *The fourth operation is not fundamental – fractional number and problem solving*, in 'The Arithmetic Teacher', vol 22 nr 1, 1975, pag. 28–32.
loc. cit. pag. 28.
In verband met de geschiedenis van het breukrekenen is zelfs het woord 'kindermishandeling' weleens gevallen. Zie in dit verband:
Leen, A.: *De ontwikkeling van het rekenonderwijs op de lagere school in de 19e en het begin van de 20ste eeuw*, Groningen, 1961, hoofdstuk XVIII:
Beperking der leerstof, speciaal wat betreft de breuken, pag. 188–191.
loc. cit. pag. 189.
- 31 Zie in dit verband:
Rankford, F.G.: *What can a teacher learn about a pupil's thinking through oral interviews?*, in 'The Arithmetic Teacher', vol 21 nr 1, 1974, pag. 26–32.
Peck, D.M. and Jencks, S.M.: *What the tests don't tell*, in 'The Arithmetic Teacher', vol 21 nr 1, 1974, pag. 54–56.
De misvattingen die genoemde auteurs signaleren bij kinderen over de regels van het breukrekenen en het breukbegrip zelf, tonen sterke overeenkomst met wat Erlwanger in ander verband vaststelde.
Zie hiervoor:
Erlwanger, S.H.: *Benny's conception of rules and answers in IPI-mathematics*, in 'The journal of children's mathematical behavior', vol 1 nr 3, 1975, pag. 157–283.
Erlwanger, S.H.: *Case studies of children's conception of mathematics. Part I*, in 'The journal of children's mathematical behavior', vol 1 nr 3, 1975, pag. 157–283.
- 32 Voor een voorbeeld van een dergelijke discussie verwijzen we naar:
Lloyd, D.G.H.B.: *The case against fractions*, in 'Mathematics in schools', vol 5 nr 2, 1976, pag. 27, met als reactie daarop:
Joy, R.R.: *In Defence of Fractions*, in 'Mathematics in schools', vol 5 nr 4, 1976, pag. 12.
Cable, J.: *A society for the preservation of Fractions*, in 'Mathematics in schools', vol 5 nr 4, 1976, pag. 13–14.
Ook in het 'Wiskobas-Bulletin' werd enige discussie gevoerd inzake het breukrekenen. Zie hiervoor jaargang 1 nr 4 en 5 (1972).
Vanuit de hoek van het beroepsonderwijs kwam daarop later nog een reactie binnen:
Gaillard, F.F.J.: *Breuken toch maar handhaven?*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 2 nr 4/5, 1973, pag. 950 e.v.
- 33 Zie in dit verband bijvoorbeeld:
Jones, E.: *Historical Conflict-Decimal Versus Vulgar Fractions*, in 'The Arithmetic Teacher', vol 7 nr 4, 1960, pag. 184–188, met name pag. 187.
Uit de op pag. 187 door Jones gesignaleerde verschillende oplossingen van dit sequenteringsprobleem blijkt duidelijk, dat het niet eenvoudig is eenduidige beslissingen te nemen op grond van bepaalde overwogen sequenteringsdimensies. Er wordt uiteindelijk een bepaalde keuze gedaan, die niet volledig logisch-rationeel te verklaren is.
Zie in dit verband:
Nijhof, W.J. en Reints, A.: *Sequenteringsdimensies in het kader van curriculumontwikkeling*, in 'Schaalvergroting als opgave' – Nijhof, W.J. en Sixma, J. (red) – Utrecht 1980, pag. 61–95, zie met name par. 4.3.
- 34 Zie in dit verband:
Streefland, L.: *Breuk in ontwikkeling. Een oriëntatie in psychologie*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1976.
Streefland, L.: *Davydov, Piaget en de breuken*, in 'Pedagogische Studiën', 56, 1979, pag. 289–307, waarin uitvoerig ingegaan wordt op onder andere:
Davydov, V.V. en Tsvetkovic, Z.: *Over de konkrete bronnen van het breukbegrip*, in:
Davydov, V.V.: *Psychologische mogelijkheden van jonge leerlingen bij het leren van wis-*

- kunde, Moskou 1969, hfdst. 2.
Desjardins, M. en Hétu, J.C.: *l'Activité mathématique dans l'enseignement des fractions*, Quebec 1974.
Piaget, J., Inhelder, B. en Szeminska, A.: *The child's conception of geometry*, Londen 1966.
- 35 Zie in dit verband:
Duquette, R.J.: *Some thoughts on Piaget's findings and the teaching of fractions*, in 'The Arithmetic Teacher', vol 19 nr 4, 1972, pag. 273–275.
Voor een meer algemene beschouwing verwijzen we naar:
Bussman, H.: *Jean Piaget und die Mathematik-didaktik*, in 'Zeitschrift für Pädagogik', jrg 20 nr 5, 1974, pag. 703–719.
- 36 Freudenthal, H.: *Didactische fenomenologie van wiskundige grondbegrippen*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1976–1979.
loc. cit. pag. 136.
- 37 Het betreft (onder andere):
Griesel, H.: *Eine verbandstheoretische Analyse der Bruchrechnung*, in 'Mathematisch-physikalische Semesterberichte', 1959, pag. 195–216, Band VI.
Griesel, H.: *Eine Analyse und Neubegründung der Bruchrechnung*, in 'Mathematisch-physikalische Semesterberichte', 1968, pag. 48–68, Band XV.
Griesel, H.: *Algebra und Analysis des Grossensysteme*, in 'Mathematisch-physikalische Semesterberichte', 1969, pag. 56–93, Band XVI.
Kirsch, A.: *An analysis of commercial arithmetic*, in 'Educational Studies in Mathematics', 1, 1969, pag. 300–311.
Pickert, G.: *Die Bruchrechnung als operieren mit Abbildungen*, in 'Mathematisch-physikalische Semesterberichte', 1968, pag. 32–47, Band XV.
Steiner, H.G.: *Magnitudes and rational numbers*, in 'Educational Studies in Mathematics', 2, 1969, pag. 371–392.
En tevens nog:
Griesel, H.: *Der Wissenschaftliche Hintergrund der Bruchrechnung*, in 'Der Mathematikunterricht', jrg 16 Heft 2, 1970, pag. 5–29.
Kirsch, A.: *Gehört die Multiplikation vor die Addition?*, in 'Der Mathematikunterricht', jrg 21 Heft 2, 1975, pag. 7–19.
Schwartz, H.: *Zur Problematik der Einführung von Addition und Multiplikation in Q durch Operatorverkettungen*, in 'Der Mathematikunterricht', jrg 24 Heft 4, 1978, pag. 75–89.
- 38 Men koos daarbij het aangetroffen breukenonderwijs als uitgangspunt. Dit trachtte men wiskundig te onderbouwen en te verantwoorden. Scandura deed precies het omgekeerde. Hij modelleerde het breukenonderwijs overeenkomstig de rationale getallen. Hij 'perste' (het aangetroffen) onderwijs als het ware in dat model.
Zie: Scandura, J.: *Mathematics: Concrete Behavioral Foundations*, New York 1971, met name hoofdstuk 7 handelt over de rationale getallen.
- 39 In hoofdstuk V komen we uitvoerig op deze kwestie terug.
- 40 Dienes spreekt bijvoorbeeld van 'operator' en 'state'; zie de literatuur in voetnoot 29.
- 41 Freudenthal, H.: *Didactische fenomenologie van wiskundige grondbegrippen*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1976–1979.
loc. cit. pag. 139.

NOTEN HOOFDSTUK II

- 1 Van 1971–1973 werden exploratieve werkzaamheden verricht in verband met een aantal min of meer nieuwe gebieden voor het wiskunde-onderwijs op de basisschool.
Van 1973–1975 volgde de ontwikkeling van een geïntegreerd schoolwerkplan (het rekenen ingebed in die nieuwe gebieden) voor de Dr. W. Dreesschool te Arnhem. Hierop duidt de term 'integratiefase'.
Voor uitvoeriger informatie verwijzen we naar:
Treffers, A.: *Wiskobas Doelgericht*, Utrecht 1978.
Zie met name van de inleiding de tweede paragraaf: 'De geschiedenis van Wiskobas'.
- 2 Zie in dit verband:
Freudenthal, H.: *Structuur der wiskunde en wiskundige structuren*, in 'Pedagogische Studiën', 56, 1979, pag. 51–61.

- Treffers, A.: *Vermenigvuldigen en delen I. Overzicht en achtergronden*, IOWO-leerplan-publikatie 10, Utrecht 1979, hoofdstuk 3: 'Fundering'.
- 3 Zie in dit verband bijvoorbeeld:
Streefland, L.: *Makro-structurele verkenningen voor het wiskundeonderwijs*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980, met name hoofdstuk 1.
 - 4 Genoemde opvatting leidde ertoe, dat men met het oog op de uitlijning van onderwijs een (kunstmatige) scheiding heeft aangebracht tussen logische en psychologische analyse, waarbij vakinhouden bepalend geacht worden voor de logische analyse, terwijl de concretisering in onderwijsleersituaties tot het terrein van de psychologische analyse gerekend wordt.
Zie in dit verband:
Nijhof, W.J. en Reints, A.: *Sequenteringsdimensies in het kader van curriculumontwikkeling*, in 'Schaalvergroting als opgave' – Nijhof, W.J. en Sixma, J. (red) – Utrecht 1980, pag. 61–95.
Streefland, L.: *Cognitieve ontwikkeling en wiskunde-onderwijs*, in 'Pedagogische Studiën', 57, 1980, pag. 344–357, met name pag. 346–348, pag. 350–352 en pag. 354.
Treffers, A.: *Vermenigvuldigen en delen I. Overzicht en achtergronden*, IOWO-leerplan-publikatie 10, Utrecht 1979, hoofdstuk 3: 'Fundering', met name pag. 89–98.
 - 5 Zie de onder 4) genoemde literatuur en ook nog:
Streefland, L.: *Makro-structurele verkenningen voor het wiskundeonderwijs*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980, met name par. 5.3.
 - 6 Om niet al te zeer op zijsporen te geraken, volstaan we hier met enkele literatuurverwijzingen:
Freudenthal, H.: *Structuur der wiskunde en wiskundige structuren*, in 'Pedagogische Studiën', 56, 1979, pag. 51–61.
In dit artikel gaat Freudenthal onder andere op de invloed van Bourbaki in en hij laat zien, hoe bijvoorbeeld Piaget bij de beschouwing van de meetkundige ontwikkeling te werk is gegaan, door een ontwikkeling van arme naar rijkere meetkundige structuren te veronderstellen.
Streefland, L.: *Cognitieve ontwikkeling en wiskunde-onderwijs*, in 'Pedagogische Studiën', 57, 1980, pag. 344–357.
In dit artikel komt de kwestie van wetenschapsstructuur-leerplannen en de invloed van Bourbaki eveneens ter sprake. Hier is het met name Davydov, als sovjet-vertegenwoordiger van het structuralisme, waarnaar verwezen wordt.
Zie in dit verband ook:
Davydov, V.V.: *Logical en psychological Problems of Elementary Mathematics as an Academic Subject*, in 'Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics' – Kilpatrick, J., Wirsup, J., Begle, E.G. en Wilson, J.W. (eds) – vol III, Chicago 1975.
In dit lange artikel gaat Davydov uitvoerig op Bourbaki in en bespreekt de mogelijkheid van het idee een begrip als verzameling, dat pas vrij recent in de geschiedenis van de wiskunde ging functioneren (als substraat van structuren) vooraan in het wiskunde-onderwijs te plaatsen.
Tenslotte vermelden we nog:
Treffers, A.: *Vermenigvuldigen en delen I. Overzicht en achtergronden*, IOWO-leerplan-publikatie 10, Utrecht 1979, hoofdstuk 3: 'Fundering'.
In dit artikel wordt eveneens op de kwestie van het vakstructurele uitgangspunt voor wiskunde-onderwijs ingegaan.
 - 7 Zie voor voorbeelden:
Freudenthal, H.: *Didactische fenomenologie van wiskundige grondbegrippen*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1976–1979.
 - 8 Voor uitvoeriger informatie betreffende deze kwesties van macro-uitlijning en micro-uitwerking van (wiskunde-)onderwijs verwijzen we naar de literatuur genoemd in de voetnoten 4, 5, 6 en 7.
Tevens vermelden we nog:
Streefland, L.: *Makro-structurele verkenningen voor het wiskundeonderwijs*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980.
Treffers, A.: *Cito item dito. Over leerdoelgerichte toetsen en toetsgerichte leerdoelen*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 9 nr 6, 1980, pag. 81–99.
 - 9 Voor deze kwesties verwijzen we naar:

- Bruggen, J.C. van: *Leerpsychologische vergelijkingen*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1976.
- Freudenthal, H.: *Weeding and sowing. Preface to a science of mathematics education*, Dordrecht/Boston 1978, met name hoofdstuk 4.
- Lakatos, I.: *Proofs and refutations. The Logic of Mathematical discovery*, Cambridge/London/New York/Melbourne 1976, met name de appendix (zie bijvoorbeeld pag. 146).
- Streefland, L.: *Makro-structurele verkenningen voor het wiskundeonderwijs*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980, met name hoofdstuk 2.
- Treffers, A.: *Wiskobs Doelgericht*, Utrecht 1978, met name hoofdstuk II.
- 10 Zie opnieuw de in voorgaande noten vermelde literatuurverwijzingen.
- 11 Zie: Treffers, A.: *Vermenigvuldigen en delen I. Overzicht en achtergronden*, IOWO-leerplanpublikatie 10, Utrecht 1979, met name hoofdstuk 3.
- 12 Zie in dit verband:
Streefland, L.: *Verhoudingen zoals kinderen (6–9) ze zien*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980.
Hechte verankering van het breukbegrip in de realiteit zou er weleens de oorzaak van kunnen zijn, dat belangrijke aspecten over het hoofd gezien worden.
Janvier spreekt van een rijk begrip:
Janvier, C.: *Use of situations in mathematics education in 'Educational Studies in Mathematics'*, 12, 1981, pag. 113–122.
- 13 Zie in dit verband:
Davydov, V.V. en Tsvetkovic, Z.: *Over de concrete bronnen van het breukbegrip*, in 'Psychologische mogelijkheden van jonge schoolkinderen bij het wiskunde leren', Moskou 1969, hoofdstuk 2.
Streefland, L.: *Davydov, Piaget en de breuken*, in 'Pedagogische Studiën', 56, 1979, pag. 289–307, met name pag. 294.
Zie in dit verband ook:
Seijffert, S.: *Bruchrechnung und natürliche Sprache*, in 'Der Mathematikunterricht', jrg 21 Heft 1, 1975, pag. 35–47.
- 14 We verwijzen in dit verband naar:
Freudenthal, H.: *Didactische fenomenologie van wiskundige grondbegrippen*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1976–1979, hoofdstuk VI.
Piaget, J., Inhelder, B. en Szeminska, A.: *The child's conception of geometry*, London 1966, met name hoofdstuk 12.
Streefland, L.: *Breuk in ontwikkeling. Een oriëntatie in psychologie*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1976, met name hoofdstuk 2.
Streefland, L.: *Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction*, in 'Educational Studies in Mathematics', 9, 1978, pag. 51–73.
Streefland, L.: *Breuken 1. Verdelen en gelijkwaardigheid*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 9 nr 4/5, 1980, pag. 96–103.
- 15 Zie in dit verband:
Freudenthal, H.: *Didactische fenomenologie van wiskundige grondbegrippen*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1976–1979, hoofdstuk VI, met name pag. 132.
Streefland, L.: *Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction*, in 'Educational Studies in Mathematics', 9, 1978, pag. 51–73.
Streefland, L.: *Davydov, Piaget en de breuken*, in 'Pedagogische Studiën', 56, 1979, pag. 289–307, met name pag. 295.
- 16 Zie: Streefland, L.: *Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction*, in 'Educational Studies in Mathematics', 9, 1978, pag. 51–73, met name pag. 60–61 en 70–71.
Zie ook de volgende hoofdstukken.
- 17 Gedurende een reeks van achtereenvolgende jaren werden wiskundige ervaringen met Coen opgetekend om de vorming van complexe wiskundige begrippen te achterhalen.
Zie voor het voorbeeld het in voetnoot 16) genoemde artikel (pag. 68–69).
Zie in verband met het verhoudingsbegrip:
Streefland, L.: *Verhoudingen zoals kinderen (6–9) ze zien*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980.
- 18 Zie: Streefland, L.: *Davydov, Piaget en de breuken*, in 'Pedagogische Studiën', 56, 1979, pag. 289–307.
Streefland, L.: *Breuken 1. Verdelen en gelijkwaardigheid*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 9 nr 4/5, 1980, pag. 96–103.

- 19 Zie: Treffers, A.: *Wiskobas Doelgericht*, Utrecht 1978, pag. 15.
- 20 Zie: Wiskobas-team: *Heroriëntering onderwijzers 1968–1978*, IOWO-uitgave, Utrecht 1978.
- 21 De Dr. W. Dreesschool te Arnhem fungeerde als ontwerpschool in het Wiskobas-project.
- 22 Genoemd standpunt was gebaseerd op een vrij brede literatuuroriëntatie, die aan de start van het Wiskobas-project vooraf ging en beschreven werd in:
Treffers, A.: *Tweede oriëntatiepunt*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1971.
- 23 Dit verschijnsel deed zich bijvoorbeeld voor bij onderwerpen als 'waarschijnlijkheid en statistiek', 'spijkerbord' (bij het meten van oppervlakte en het verfijnen van de maateenheid).
- 24 Een en ander werd gepresenteerd onder de titel: *Wegen, aksentueren, breuken*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 1 nr 4, 1972, pag. 284 e.v. en jrg 1 nr 5, 1972, pag. 402 e.v.
- 25 Genoemde raamplannen gaven een globale schets van het onderwijs in termen van verschijnselen in de realiteit, leerstof, voorbeelden, literatuurverwijzingen, ervaringen uit de exploratiefase etc.
Deze raamplannen hadden een richtsnoerfunctie, een ondersteuningsfunctie voor de ontwerpers in het project. Ze waren zo 'ruim' opgesteld, dat een creatief ontwikkelingsproces niet bij voorbaat 'gesmoord' werd in regels, afspraken en voorschriften. Anderzijds dienden de raamplannen als inhoudelijke houvast om het zich verliezen in stokpaardjes en het zich begeven op zijsporen te voorkomen.
Voor een nadere beschouwing van de ontwerpruimte, die men bij het in acht nemen van bepaalde uitgangspunten heeft, verwijzen we naar:
Treffers, A.: *Wiskobas Doelgericht*, Utrecht 1978, met name hoofdstuk 5.
Streefland, L.: *Makro-structurele verkenningen voor het wiskundeonderwijs*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980, met name hoofdstuk 4.
- 26 Zie in dit verband:
IOWO-team: *Onderzoeksnota. Onderzoek voor wiskundeonderwijs*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 9 nr 4/5, 1980, pag. 2–19, met name par. 4.2.2.
Streefland, L.: *Davydov, Piaget en de breuken*, in 'Pedagogische Studiën', 56, 1979, pag. 289–307, met name pag. 289–290.
- 27 Streefland, L.: *Breuken beoefenen*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 3 nr 4/5, 1974, pag. 391 e.v.
- 28 Het betreft hier de samenhang tussen de vorming van het breukbegrip, van bewerkingen, modelvorming daarbij en de ontwikkeling van algoritmen. Dit pleidooi voor samenhang werd via de *NAEP*-onderzoeken eveneens gehoord. Zie in dit verband hoofdstuk I.
- 29 Het betrof vooral:
 - a) de grondige verkenning van een bepaald verschijnsel, voordat de structuur ervan als model kan worden toegepast;
 - b) de discrepantie tussen probleem en (gesuggereerd) model of oplossingssschema, waarbij de dynamiek van een breukverwekkend proces en toegepast model of schema dikwijls niet (afdoende) met elkaar strookten.
- 30 Freudenthal heeft bij herhaling gewezen op het belang van dergelijk 'materiaal' van blijvende betekenis in het wiskunde-onderwijs.
Zie bijvoorbeeld: Freudenthal, H.: *Didactische fenomenologie van wiskundige grondbegrippen*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1976–1979, met name hoofdstuk 2.
- 31 Zie: Streefland, L.: *Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction*, in 'Educational Studies in Mathematics', 9, 1978, pag. 51–73.
- 32 Onder een didactische fenomenologie verstaan we een hypothetisch voorontwerp voor de ontwikkeling van onderwijs, waarin de nadruk ligt op de verhouding tussen de verschijnselen in de realiteit en de breuken (waarmee bedoelde verschijnselen geordend worden), met het oog op verwerving van de betrokken wiskunde (in leerprocessen).
- 33 Het pleidooi voor een dergelijke conceptuele samenhang ondervindt ook steun in de psychologische literatuur.
Zie in dit verband bijvoorbeeld:
Elshout-Mohr, M. en Daalen-Kapteijns, M.: *Het leren van begrippen en woordbetekenissen*, in 'Losbladig onderwijskundig lexicon', Alphen a/d Rijn 1979, met name pag. PO-4220-7.
Hetzelfde kan overigens gezegd worden voor een veelsporige benadering van bijvoorbeeld wiskundige begrippen, operaties e.d. Het gaat bij operaties bijvoorbeeld, psycho-

logisch gezien, om variaties in handelingen, die uiteindelijk resulteren in 'hetzelfde' wiskundig produkt.

Zie in dit verband bijvoorbeeld:

Parreren, C.F. van: *Niveaus in de ontwikkeling van het abstraheren*, interne publikatie RU Utrecht, 1978.

Streefland, L.: *Makro-structurele verkenningen voor het wiskundeonderwijs*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980, met name par. 5.3.

- 34 Het geleidelijk algoritmiseren van de bewerkingen en het uitstellen van het opzettelijk automatiseren ervan (als doel in zichzelf), berusten op de stellingname, dat het formeel opereren met breuken in het gebied van de algebra thuis hoort.

Zie bijvoorbeeld:

Freudenthal, H.: *Breuken in de brugklas*, in 'Wiskrant', jrg 1 nr 3, 1976, pag. 2–3.

Hiele, P.M. van: *Begrip en Inzicht*, Purmerend 1973, hoofdstuk 22, pag. 196–204.

- 35 Zie: IOWO-team: *Onderzoeksnota. Onderzoek voor wiskundeonderwijs*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 9 nr 4/5, pag. 2–19, met name pag. 11.

- 36 Zie in dit verband bijvoorbeeld:

Suydam, M.N. en Reijs, R.E. (eds): *Developing Computational Skills*, Reston, Virginia 1978.

Dit werk verscheen als jaarboek 1978 van de *NCTM* (National Council of Teachers of Mathematics) in de Verenigde Staten en is geheel gewijd aan het vaardigheidsaspect bij het rekenen.

In het bijzonder verwijzen we hierin naar:

Ellerbruch, L.W. en Payne, J.N.: *A teaching sequence from Initial Fraction Concepts through the Addition of Unlike Fractions* (pag. 129–148).

Tevens willen we nog verwijzen naar *NACOME* (National Advisory Committee on Mathematical Education): *Overview and analysis of school mathematics Grades K-12*, Washington 1975.

In dit boek wordt een analyse gegeven van de innovatie van het wiskunde-onderwijs in de Verenigde Staten. Uit dit werk blijkt, dat voor het basisonderwijs globaal gesproken geldt, dat de nieuwe onderwerpen in de methodes, zoals meetkunde en waarschijnlijkheid en statistiek worden overgeslagen of niet eens in methoden zijn terechtgekomen.

'Despite presence in most textseries, these topics are most often skipped in favor of more time to develop computational skills that are comfortable to and valued by elementary teachers.' (loc. cit. pag. 11) en:

'If there are indeed declines in mathematics test scores, it is questionable that a large part of that decline can be attributed to 'new mathematics' since few of the reform movements suggestions have been extensively implemented in the classroom.' (loc. cit. pag. 78).

NOTEN BIJ HOOFDSTUK III

- 1 Zie hoofdstuk 5 in:

Streefland, L.: *Makro-structurele verkenningen voor het wiskundeonderwijs*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980.

- 2 Zie in verband met modelvorming en modelgebruik:

Treffers, A.: *Vermenigvuldigen en delen I. Overzicht en achtergronden*, IOWO-leerplan-publikatie 10, Utrecht 1979, pag. 48–78.

Freudenthal, H.: *Verhoudingen als verschijnsel*, in 'Wiskrant', jrg 4 nr 17, 1979, pag. 5–9, met name pag. 5.

Sanders, W.J.: *The use of models in mathematics instruction*, in 'The Arithmetic Teacher', vol 11 nr 2, 1964, pag. 157–165.

Overigens dient hier gewaarschuwd te worden voor de verschillende interpretaties van model en modelgebruik, die in de literatuur omtrent het wiskunde-onderwijs opgeld doen.

In beide eerstgenoemde publikaties, waarnaar hier verwezen wordt, gaat het om de structuur van een bepaald verschijnsel dat – eventueel in gevisualiseerde vorm – eveneens voor de structuur van andere verschijnselen model kan staan, respectievelijk als model gebruikt kan worden. Modellen en modelvorming hebben binnen realistisch wiskunde-onderwijs dus nadrukkelijk hun plaats en functie in het mathematiseringsproces. In de

- Amerikaanse literatuur bijvoorbeeld – of beter in de literatuur over wiskunde-onderwijs overeenkomstig het structuralistische uitgangspunt – wordt onder model dikwijls verstaan concretisering van een abstract wiskundig begrip e.d. Middels modellen tracht men de wiskunde 'uit te beelden'.
- Het artikel van Sanders berust op het laatste uitgangspunt. Hij gaat vooral in op het visualiseren van de operatie vermenigvuldigen met breuken.
- 3 Zie in verband met het gedifferentieerde karakter van het wiskunde-onderwijs: Treffers, A.: *Wiskobas Doelgericht*, Utrecht 1978, pag. 69–70.
 - 4 loc. cit. pag. 78–79.
 - 5 Wijdeveld spreekt in dit verband van verschrallen om te verrijken, daarmee doelend op de bijdrage, die het resultaat van de wiskundige verwerking daarna kan leveren aan het volledig doorgronden van het probleemveld.
Zie: Wijdeveld, E.: *Matematiseren, een didactisch model*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 9 nr 6, 1980, pag. 28–49.
 - 6 Zie: Treffers, A.: *Wiskobas Doelgericht*, Utrecht 1978, met name pag. 79.
 - 7 loc. cit. pag. 79.
 - 8 Zie in dit verband:
Streefland, L.: *Makro-structurele verkenningen voor het wiskundeonderwijs*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980, met name hoofdstuk 2.
 - 9 In de huidige didactiek voor het breukenonderwijs zijn verdelingen er 'zo maar'. De aanleiding ontbreekt nog steeds. Degenen over wie iets verdeeld zal worden of is verdeeld, worden systematisch weggelaten, verzwegen. Er is geen sprake van echte verdeelsituaties. Daarmee wordt een mogelijkheid aan de leerlingen ontnomen zich – via identificatie met de verdelenden – in de situatie in te leven.
 - 10 In het vervolg zullen we dergelijke verdeelsituaties kort omschrijven met 3p–4k etc.
 - 11 Het voltrekken van dergelijke verdelingen ligt uiteraard niet eenduidig vast. Zie onder 7 (pag. 49), waarin op het aspect van de differentiatie wordt ingegaan.
 - 12 Zie in dit verband bijvoorbeeld:
Matthews, W.N.: *Teaching of comparison of common fractions*, in 'The Arithmetic Teacher', vol 15, nr 3, 1968, pag. 271–273.
De auteur beschrijft voor het vergelijken en ordenen drie methoden, namelijk die van de gemeenschappelijke noemer, de kruisprodukt-methode en die, waarbij het rooster als visualiseringsmiddel gebruikt wordt.
 - 13 Dit betekent overigens, dat een van de traditie en vaklogische uitlijning afwijkende keuze wordt gedaan voor de macro-uitlijning van de bewerkingen (optellen en aftrekken) met breuken.
Zie in dit verband:
Streefland, L.: *Makro-structurele verkenningen voor het wiskundeonderwijs*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980, pag. 36.
 - 14 Voor een overzicht van realistisch wiskunde-onderwijs voor de basisschool verwijzen we naar:
Jong, R. de, Treffers, A. en Wijdeveld, E.: *Overzicht van wiskundeonderwijs op de basisschool*, IOWO-leerplanpublikatie 2, Utrecht 1975.
 - 15 Zie in dit verband bijvoorbeeld:
Treffers, . (ed): *Vermenigvuldigen en delen I. Overzicht en achtergronden*, IOWO-leerplanpublikatie 10, Utrecht 1979, hoofdstuk 3, met name pag.57–60.
 - 16 loc. cit. pag. 59.
Zie ook: Treffers, A.: *Wiskobas Doelgericht*, Utrecht 1978, hoofdstuk 4, waarin een uitvoeriger analyse van genoemde, algemene context (met specifieke contexten daarbinnen) beschreven staat.
 - 17 Er doen zich vanzelfsprekend nog allerlei andere mogelijkheden tot wiskundige probleemstellingen voor, bijvoorbeeld in verband met de mogelijkheden tot plaatsing van een gezelschap aan tafeltjes; de duur van het restaurantbezoek en wachttijden, het afrekenen, de samenstelling van diverse pannenkoeken, de samenstelling van menu's uit verschillende 'gangen' etc.
 - 18 Zie in dit verband:
Freudenthal, H.: *Structuur der wiskunde en wiskundige structuren*, in 'Pedagogische Studiën', 56, 1979, pag. 51–61.
 - 19 De Lange spreekt in dit geval van contexten van de derde soort. Hij wijst tevens op het belang van het zorgvuldig experiment. Contexten van de tweede soort zou men de toepas-

singsgebieden van de wiskunde kunnen noemen, terwijl als voorbeeld van contexten van de eerste soort de traditionele tekstproblemen (redactiesommen) genoemd kunnen worden.

Zie: Lange, J. de: *Contextuele problemen*, in 'Euclides', jrg 55 nr 2, 1979, pag. 50–60.

- 20 Zie voor de persoonlijke betekenis van contexten voor de leerling:

Goffree, F.: *Vakdidaktische notities*, in 'Euclides', jrg 54 nr 6, 1979, pag. 221–224.

Goffree, F.: *Leren onderwijzen met Wiskobas*, Utrecht 1979, pag. 210–216.

Streefland, L.: *Makro-structurele verkenningen voor het wiskundeonderwijs*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980, pag. 84–85.

- 21 Deze analyse is mede gebaseerd op ervaringen met kinderen.

- 22 Freudenthal komt tot het onderscheid van deze aspecten mede op grond van een analyse van de breuken in de dagelijkse taal.

Freudenthal, H.: *Didactische fenomenologie van wiskundige grondbegrippen*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1976–1979, hoofdstuk V, par. 5.3 en 5.5.

Opmerkelijk is in dit verband hoe het vakstructurele uitgangspunt bij dergelijke analyses (wellicht) oorzaak is van een minder rijke opbrengst. Zo pleegt Seyffert bijvoorbeeld ook een taalanalyse, waarbij hij de grammaticale rol, die breukwoorden in bepaalde constructies vervullen, nagaat.

Hij komt tot de onderscheiding van:

- de breuk als quasi-aantal;
- de breuk in een operator.

Zie: Seyffert, S.: *Bruchrechnung und natürliche Sprache*, in 'Der Mathematikunterricht', jrg 21 Heft 1, 1975, pag. 35–47.

N.B.:

- 1) Men zou kunnen stellen, dat Freudenthal in zijn taalanalyse achterhaald heeft hoe hierin 'onthuld' wordt, hoe men in de loop der tijden met breuken in het dagelijks leven is omgesprongen.

Frappant aan deze analyse is, dat de onderscheiden aspecten aan breuk zich (deels) in kinderlijk gedrag in verband met breuken net zo voordoen.

- 2) Het gesignaleerde verschil in opbrengst van analyses geldt ook het breukbegrip.

Kieren (bijvoorbeeld) somt een zevental interpretaties van rationale getallen op, die sterk op grond van vakstructurele overwegingen bepaald zijn (breuken die vergeleken, opgeteld, afgetrokken kunnen worden; kommabreuken die een natuurlijke uitbreiding vormen van het systeem der natuurlijke getallen etc).

Zie: Kieren, Th.F.: *On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers*, in 'Number and Measurement' – Lesh, R.A. (ed) – Georgia 1976, pag. 101–144.

- 23 Zie in dit verband ook:

Streefland, L.: *Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction*, in 'Educational Studies in Mathematics', 9, 1978, pag. 51–73, met name pag. 59–63.

- 24 Zie bijvoorbeeld: Streefland, L.: *Davydov, Piaget en de breuken*, in 'Pedagogische Studiën', 56, 1979, pag. 289–307, met name pag. 295.

- 25 De verzameling der rationale getallen zou men de wiskundige formalisering van de breuken kunnen noemen.

- 26 Zie in dit verband ook hoofdstuk III par. 4.2, waarin onder meer op het verband van breuken met verhoudingen wordt ingegaan.

- 27 Een ander bezwaar betreft de algoritmisering. De machientjesbenadering verwijst sterk naar het vermenigvuldigen (en delen). De andere operaties kunnen niet zo eenvoudig op deze aanpak gebaseerd worden.

- 28 In recente literatuur wordt het samenstellen van mengsels (voor het eerst, voorzover bekend) in verband gebracht met de ontwikkeling van breuk- en verhoudingsbegrip.

Zie in dit verband bijvoorbeeld:

Noelting, G.: *The Development of Proportional Reasoning in the Child and Adolescent through Combination of Logic and Arithmetic*, in 'Osnabrücker Schriften zur Mathematik' – Cohors-Fresenborg, E. en Wachsmut, I. (eds.) – Osnabrück 1978, pag. 242–278.

Desjardins, M. en Hétu, J.C.: *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions*, Quebec 1974.

Noelting beschrijft een onderzoek naar het functioneren van het verhoudingsbegrip aan het voorbeeld 'limonade maken', waarbij mengverhoudingen door middel van getallen-

paren worden weergegeven.

Desjardins en Hétu gaan op de ontwikkeling van het breukbegrip in. Ze sluiten zich aan bij de theorie van Piaget – evenals Noëting overigens. Zij onderscheiden enkele aspecten aan 'breuk', namelijk het hoeveelheidsaspect, het relatie-aspect en verhoudingen. In verband met het laatste beschrijven zij het oplossingsgedrag van vijfde- en zesdeklassers bij een vermengprobleem.

Op beide publikaties gingen we reeds in ander verband in.

Zie hiervoor respectievelijk:

Streefland, L.: *Verhoudingen, zoals kinderen (6–9) ze zien*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980, hoofdstuk 1.

Streefland, L.: *Breuk in ontwikkeling. Een oriëntatie in psychologie*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1976.

- 29 Bij het gebruik van een telelens bouwt men in zekere zin eerst nog een vergrotingsfactor in (om de storende verkleiningsfactor 'afstand' weer wat teniet te doen).

- 30 In de traditionele didactiek wordt 'deel van' in ' $\frac{1}{4}$ deel van' zomaar omgezet in 'keer', dus ' $\frac{1}{4}$ keer', omwille van de snelle algoritmisering. Vanuit vakstructureel standpunt bezien, is een dergelijk onderscheid onbelangrijk, merkt Griesel op.

Griesel, H.: *Eine verbandtheoretische Analyse der Bruchrechnung*, in 'Mathematisch-physikalische Semesterberichte', 1959, Band VI, pag. 195–216; loc. cit. pag. 211 (noot 14).

In een didactische fenomenologie van de breuken is een dergelijk onderscheid belangrijk voor de uitlijning van het breukenonderwijs.

Zie in dit verband:

Freudenthal, H.: *Didactische fenomenologie van wiskundige grondbegrippen*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1976–1979, hoofdstuk 5, met name par. 5.3: Breuken in de dagelijkse taal.

- 31 Op de Jozefschool in Bussum werd de uitwerking van het principe der veelzijdige benadering in direct realiseerbare onderwijsuggesties beproefd. Ook het onderwerp 'vergroten en verkleinen' is vanuit diverse invalshoeken, waaronder de fotografieprocedure en experimenten met de diaprojector, belicht.

Ervaringen met leerlingen uit vierde en vijfde leerjaren wezen uit dat het herkennen van breuken in geschakelde machientjes, zoals geschetst, door de meeste leerlingen *niet* zelfstandig gerealiseerd werd, terwijl toch een schat aan gevarieerde ervaringen met breuken daaraan voorafgegaan was.

- 32 Let in verband met het gegeven voorbeeld op aspecten van (verwerkings-)differentiatie, die in dit hoofdstuk aan de orde komen. Kinderen die de geschetste verdeling aanbren- gen, hebben wellicht 'een klok achter elke pannekoek gedacht'.

Opmerkelijk is tenslotte nog, dat in het beschreven verdeelgedrag van kinderen géén sprake is van een vaste relatie tussen het aantal delen, waarin een (continu) geheel verdeeld wordt en het aantal sneden om die verdeling tot stand te brengen, zoals Piaget voor- af als kenmerk van de 'deel-geheel-relatie-breuk' formuleerde.

Zie in dit verband:

Streefland, L.: *Davydov, Piaget en de breuken*, in 'Pedagogische Studiën', 56, 1979, pag. 289–307, met name pag. 295.

- 33 We volstaan met te verwijzen naar:

Parreren, C.F. van: *Niveaus in de ontwikkeling van het abstraheren*, interne publikatie RU Utrecht 1978.

In dit artikel kritiseert Van Parreren het onderwijs, dat wel variaties aanbrengt in materiaal, waarvan een begrip geabstraheerd dient te worden, maar niet in de betreffen- de handelingen. Bij verschillende toegangen tot dezelfde (wiskundige) abstractie, bij- voorbeeld een operatie, is dit evenzeer noodzakelijk.

Zie eveneens:

Elshout-Mohr, M. en Daalen-Kapteyns, M.: *Het leren van begrippen en woordbetekenis- sen*, in 'Losbladig onderwijskundig lexicon', Alphen a/d Rijn 1979.

Streefland, L.: *Verhoudingen, zoals kinderen (6–9) ze zien*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980, hoofdstuk 2.

Treffers, A. (ed): *Vermenigvuldigen en delen I. Overzicht en achtergronden*, IOWO-leer- planpublikatie 10, Utrecht 1979, met name pag. 90–96.

- 34 Een grootheid is een niet lege verzameling G met een orderrelatie ($<$) en een optelling ($+$), zodat:

als $(a, b, c, \in G)$:

1) $a < b$ of $a = b$ of $a > b$ (exclusieve 'of'); (de zgn. trichotomie)

2) $\left. \begin{matrix} a < b \\ b < c \end{matrix} \right\} \Rightarrow a < c$ (transitiviteit)

3) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associativiteit)

4) $a + b = b + a$ (commutativiteit)

5) $a + c = b + c \rightarrow a = b$ (regulariteit)

6) $a < b \Leftrightarrow \forall c (a + c = b)$ (deze c is eenduidig bepaald); (hiermee wordt tot uitdrukking gebracht dat de orderrelatie ($<$) en de operatie (+) 'elkaar verdragen').

Zie Freudenthal, H.: *Mathematics as an educational task*, Dordrecht 1973, pag. 199–200.

35 loc. cit. pag. 204.

36 Freudenthal, H.: *Didactische fenomenologie van wiskundige grondbegrippen*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1976–1979, hoofdstuk 1.

37 Observatie ontleend aan:

Streefland, L.: *Breuk in ontwikkeling. Een oriëntatie in psychologie*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1976, pag. 8.

38 Davydov en Tsvetkovic gingen uit van meten, het verdelen van lengten en van de maateenheid bij de ontwikkeling van het breukbegrip.

Zie: Davydov, V.V. en Tsvetkovic, Z.: *Over de konkrete bronnen van het breukbegrip*, in 'Psychologische mogelijkheden van jonge leerlingen bij het leren van wiskunde' – Davydov, V.V. (ed) – Moskou 1969.

Piaget c.s. bestudeerden de ontwikkeling van het breukbegrip aan het verdelen van vlakdelen in verband met oppervlakte.

Zie: Piaget, J., Inhelder, B. en Szeminska, A.: *The child's conception of geometry*, Londen 1966, hoofdstuk 12.

Voor een analyse en kritische beschouwing van beide benaderingen,

zie: Streefland, L.: *Davydov, Piaget en de breuken*, in 'Pedagogische Studiën', 56, 1979, pag. 289–307.

39 Was in plaats van lengtemeting het meten van oppervlakte als voorbeeld gebruikt, dan zou sprake geweest zijn van éénmaal verfijnen bij twee cijfers achter de komma.

40 Zie in dit verband:

Streefland, L.: *Ralph, de zeerover*, in 'Oppervlakte 2' – Jong, R. de (ed) – IOWO-leerplanpublikatie 9, Utrecht 1978, pag. 57–65, waarin alle genoemde relatie-aspecten van breuken en komabreuken middels oppervlaktetelling binnen het betrokken thema door onderwijsuggesties geconcretiseerd zijn.

41 Zie in dit verband:

Freudenthal, H.: *Weeding and sowing. Preface to a science of mathematics education*, Dordrecht/Boston 1978, pag. 300.

42 Het gaat om afbeeldingen, die structuurbehoudend van karakter zijn, zoals bijvoorbeeld de lineaire afbeelding, die verhoudingen intact laat.

Zie in dit verband bijvoorbeeld:

Freudenthal, H.: *Mathematics as an educational task*, Dordrecht 1973, pag. 204–207.

43 Kirsch, A.: *An analysis of commercial arithmetic*, in 'Educational Studies in Mathematics', 1, 1969, pag. 300–311, loc. cit. pag. 307.

44 De wet van de grote aantallen brengt tot uitdrukking, dat de fractie waarmee de verdeling van een uitkomstenverzameling beschreven kan worden, op den duur, dat wil zeggen bij een voldoende grote proef, willekeurig dicht bij de theoretische kans zal liggen.

45 Zie in dit verband:

Bruggen, J.C. van en Streefland, L.: *Oriëntatietocht in ontwerp en psychologie*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 2 nr 4/5, 1973, pag. 885 e.v.

Goffree, F.: *Kijk op Kans – proefwerk nieuwe stijl*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 2 nr 4/5, 1973, pag. 907 e.v.

IOWO-NOT-TELEAC: *Kijk op Kans. Wiskunde voor de hoogste klassen van de basisschool*, Den Haag z.j.

Goffree, F.: *Kans voor het onderwijs*, doktoraalscriptie, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1973.

46 Zie in verband met de functies van modellen:

Freudenthal, H., Janssen, G.M. en Sweers, W.J. (eds): *Five years IOWO*, in 'Educational Studies in Mathematics', vol 7 nr 3, 1976, pag. 315–318.

Treffers, A. (ed): *Vermenigvuldigen en delen I. Overzicht en achtergronden*, IOWO-leer-

- planpublicatie 10, Utrecht 1979, hoofdstuk 2.
- 47 Ervaring van Treffers.
- 48 Zie: Streefland, L.: *Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction*, in 'Educational Studies in Mathematics', 9, 1978, pag. 51–73, loc. cit. pag. 59–60.
- 49 Zie bijvoorbeeld:
- 50 Streefland, L.: *Breuken en klokken*, in 'Wiskrant', jrg 5 nr 22, 1980, pag. 13–15.
- 50 Pas nu wordt de functie van de tweeschalige getallenlijn goed duidelijk. Ze wordt namelijk (samen met andere middelen) dienstbaar gemaakt aan het doel, de 'optelling, aftrekking en orderrelatie in IN isomorf over te brengen op $\frac{1}{m}IN (n \rightarrow \frac{n}{m})$.
- Freudenthal, H.: *Didactische fenomenologie van wiskundige grondbegrippen*, interne IOWO-publicatie, Utrecht 1976–1979, loc. cit. pag. 145.
- 51 Niet één van de vele artikelen in 'The Arithmetic Teacher' bijvoorbeeld laat zien, dat gelijkwaardigheid zich op deze wijze kan voordoen als gevolg van verschillende benaderingen van eenzelfde activiteit, proces of situatie.
- Zie in verband hiermee ook de hoofdstukken IV en V.
- 52 Zie bijvoorbeeld:
- 53 Streefland, L.: *Zon zien*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 4 nr 2, 1975, pag. 168–185.
- 53 Zie: Freudenthal, H.: *Didactische fenomenologie van wiskundige grondbegrippen*, interne IOWO-publicatie, Utrecht 1976–1979, pag. 153–154.
- 54 De Dr. W. Dreesschool fungeerde als ontwerpschool in het Wiskobas-project.
- 55 Andere spontane oplossingen – deze leerlingen waren nooit eerder met het delen van breuken in aanraking geweest – die gesignaleerd werden, waren:
- a) omzetten van de breuken in kommagetallen en de bewerking uitvoeren;
 - b) gelijknamig maken en redeneren: $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} \rightarrow \frac{3}{6} : \frac{2}{6}$ en $\frac{2}{6}$ gaat $1\frac{1}{2}$ keer in $\frac{3}{6}$;
 - c) de breuken door middel van een tabel wegwerken:

$\frac{1}{2}$	1	3			
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2			

- 56 In hoofdstuk VI gaan we nader op deze kwestie in bij de bespreking van enkele reacties van deskundigen op onze voorstellen inzake het breukenonderwijs.
- 57 Voor meer algemene informatie omtrent het gedifferentieerde karakter van 'wiskunde als menselijke activiteit', verwijzen we naar:
- Treffers, A.: *Wiskobas Doelgericht*, Utrecht 1978, hoofdstuk 2, met name pag. 69–70.
- Streefland, L.: *Makro-structurele verkenningen voor het wiskundeonderwijs*, interne IOWO-publicatie, Utrecht 1980, pag. 93–103.
- Wijdeveld, E.: *Matematiseren, een didactisch model*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 9 nr 6, 1980, pag. 28–49.

NOTEN HOOFDSTUK IV

- 1 Zie hoofdstuk III par. 2.2 en met name ook voetnoot 9 aldaar.
- 2 Zie:

Piaget, J., Inhelder, B. en Szeminska, A.: *The child's conception of geometry*, London, hoofdstuk 12.

Desjardins en Hétu: *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions*, Quebec 1974.

Bedoelde onderzoeksuitkomsten berusten op een ontoereikende analyse vooraf van eerlijk verdelen en het breukbegrip. Overigens dient het werk van Piaget c.s. zeker positief gewaardeerd te worden, al was het alleen maar omdat de proefpersonen echte verdeel-situaties als probleempjes voorgelegd kregen.
- 3 Zie in dit verband:

Streefland, L.: *Davydov, Piaget en de breuken*, in 'Pedagogische Studiën', 56, 1979, pag. 289–307, met name pag. 299–301.

Overigens dient men ook met de omgekeerde situatie de nodige voorzichtigheid te

betrachten, zoals we in verband met het beter presteren bij vermenigvuldigen van breuken in vergelijking met het optellen hebben laten zien.

4 loc. cit. pag. 299.

Bert en Ernie spelen in het kinderprogramma, waarnaar verwezen wordt, in de geschetste verdeelsituatie (het samen delen van een dropveter) een duidelijke rol. Jonge kinderen kunnen zich inleven in de situatie en zich met de belanghebbenden identificeren. Vanuit een op de situatie betrokken standpunt wordt dan beslist over het (niet) eerlijk zijn van de verdeling.

5 Zie hoofdstuk III par. 4.2: 'De breuken in wijder verband' (grootheden).

Freudenthal onderscheidt een periode in het begripsvormingsproces, dat aan het expliceren van volwaardig begrip vooraf gaat. Hij spreekt van de 'constitutie van mentale objecten'.

Zie in dit geval:

Freudenthal, H.: *Didactische fenomenologie van wiskundige grondbegrippen*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1976–1979, met name hoofdstuk 2.

Streefland, L.: *Verhoudingen zoals kinderen (6–9) ze zien*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980, hoofdstuk 2.

Overigens kan men een dergelijke fase, zij het onder andere benamingen en dikwijls eveneens met (enigszins) gewijzigde interpretatie bij andere auteurs aantreffen. We denken aan:

Vygotsky: zone van naaste ontwikkeling.

Piaget: intuïtieve noties.

Thom: idem.

Fischbein: 'intuitions'.

In het boekje over verhoudingen, waarnaar we verwezen, wordt uitvoerig op onder andere deze kwestie in verband met begripsvorming ingegaan.

6 zie hoofdstuk III, par. 4.2.

Zie voor uitvoeriger informatie over grootheden (en breuken):

Freudenthal, H.: *Mathematics as an educational task*, Dordrecht 1973, hoofdstuk XI.

Freudenthal, H.: *Didactische fenomenologie van wiskundige grondbegrippen*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1976–1979, hoofdstukken 1 en 5.

Steiner, H.G.: *Magnitudes and rational numbers*, in 'Educational Studies in Mathematics', 2, 1969, pag. 371–392.

7 Freudenthal, H.: *Didactische fenomenologie van wiskundige grondbegrippen*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1976–1979.

loc. cit. pag. 136.

N.B.: de geschetste trek was onder meer kenmerkend voor de benadering van de breuken in de traditionele rekenmethode 'Nieuw Rekenen voor de basisschool', zoals eerder werd opgemerkt.

8 loc. cit. pag. 136.

9 Zie bijvoorbeeld:

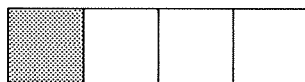
Meijer, H. en Streefland, L.: *Elementair Wiskundig Rekenen*, in 'Rapportboekje 3', IOWO-Utrecht 1980, pag. 78–97, met name pag. 90–91.

Streefland, L.: *Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction*, in 'Educational Studies in Mathematics', 9, 1978, pag. 51–73, met name pag. 51–52.

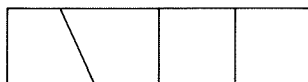
10 Zie bijvoorbeeld: *Nieuw Rekenen voor de basisschool*, deel 4b, pag. 54.

11 Zie hoofdstuk III par. 5.

12 In de schoolboekjes wordt gelijkwaardigheid van de delen soms geïnterpreteerd als gelijkheid zonder meer, soms zelfs als visuele gelijkheid. Bijvoorbeeld:



A



B

Bij rechthoek A kan de breuk $\frac{1}{4}$ als beschrijvingsmodel worden toegepast, bij rechthoek B echter niet, zo luidt dan de suggestie, omdat de delen daar niet 'gelijk' zijn.

- Zie: Breuken 1, 2 en 3 van een werkgroep voor G.I. onder leiding van L. Goulouze, P.J. Kampman en L.J. van Boven, Alphen a/d Rijn 1972, 1973, 1975.
- 13 Zie: Streefland, L.: *Breuken 1. Verdelen en gelijkwaardigheid*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 9 nr 4/5, 1980, pag. 96-102.
loc. cit. pag. 102.
 - 14 Zie over de rol van conflicten in verband met begripsvorming, bewustwording en reflectie:
Streefland, L.: *Verhoudingen zoals kinderen (6-9) ze zien*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980, hoofdstuk 2.
 - 15 In Frankrijk blijken pizza-restaurants te bestaan, waar men inderdaad op de beschreven manier te werk gaat.
 - 16 Zie hoofdstuk III par 2.2.
 - 17 Zie: Davydov, V.V. en Tsvetkovic, Z.: *Over de konkrete bronnen van het breukbegrip*, in 'Psychologische mogelijkheden van jonge schoolkinderen in het wiskunde-onderwijs' - Davydov, V.V. (ed) - Moskou 1969.
 - 18 Voor de rol van gelijkwaardigheid bij het optellen en aftrekken verwijzen we naar voetnoot 55 bij hoofdstuk III.
 - 19 Zie ook hoofdstuk III, par. III.5 en met name daarbij voetnoot 55.
 - 20 Zie voor de bewerking aftrekken bijvoorbeeld hoofdstuk III par. 3.2.
 - 21 Het is ondoenlijk het volledige programma, dat de leerlingen volgden, in detail te beschrijven. De wat meer gedetailleerde beschrijving op slechts enkele onderdelen geeft tevens een indicatie omtrent de wijze, waarop de slechts globaal geduide onderdelen in het onderwijs verwerkt zijn. Bovendien realiseren men zich, dat die verwerking in het onderwijs in de eerste plaats gericht was op de ontwikkeling van onderwijsmateriaal. De geëntameerde leerprocessen werden vooral ook daartoe geobserveerd.
 - 22 Wat met 'beginsituatie' nu bedoeld wordt, moge blijken uit het voorafgaande in deze paragraaf. Het gaat zeker niet om een interpretatie die uitsluitend op de motivatie betrekking heeft.
Zie in dit verband bijvoorbeeld:
Gelder, L. van (e.a.): *Didactische Analyse*, Reader 1, Groningen 1972, met name hoofdstuk 5, pag. 82-90.
 - 23 Freudenthal noemde dit één van de problemen van het wiskunde-onderwijs in zijn openingsrede voor de vierde ICME (International Conference on Mathematics Education), gehouden te Berkeley (Verenigde Staten) van 11-16 augustus 1980.
Freudenthal, H.: *Major problems of Mathematics Education*, in 'Educational Studies in Mathematics', 12, 1981, pag. 133-150.
 - 24 Zie: Streefland, L.: *Breuken (1). Verdelen en gelijkwaardigheid*, in 'Wiskobas Bulletin', jrg 9 nr 4/5, 1980, pag. 96-102.
In dit artikel zijn bedoelde activiteiten integraal beschreven.
 - 25 Zie ook hoofdstuk III par. 2 en par. 3, waarin van het breukverwekkende eerlijk verdelen een analyse gegeven wordt.
 - 26 Zie ook hoofdstuk III par. 4.2.
 - 27 Zie in dit verband de hoofdstukken II en III.
 - 28 Zie: Streefland, L.: *Breuken (2). De wekker zetten*, in 'Wiskobas Bulletin', jrg 9 nr 6, 1980, pag. 132-140.
In dit artikel worden de activiteiten (inclusief werkbladen) integraal geschetst.
 - 29 Uit de (Angelsaksische) naamgeving van de wijzers van de klok, blijkt de functie. Dergelijke benamingen zijn ons inziens daarom didactisch (psychologisch) beter dan onze termen 'grote' en 'kleine' wijzer.
 - 30 Zie ook hoofdstuk III par. 5.
 - 31 Zie: Treffers, A. *Wiskobas Doelgericht*, Utrecht 1978, met name hoofdstuk IV met de noten 1) en 6) daarbij.
 - 32 Voor de leerlingen is het wellicht nog motiverender de eigen verrichtingen tijdens de gymles bij hoogspringen, verspringen e.d. numeriek (en statistisch) te verwerken.
 - 33 Bij de systematische ontwikkeling van het systeem der kommagetallen vormen de maatverfijningen bij lengte-, oppervlakte-, inhoud- en gewichtmeting opnieuw de instap. In feite kan het programma hiervoor op dezelfde wijze gekenschetst worden als dat van de gewone breuken, dat wil zeggen door de veelzijdigheid van benadering, het vooropstaan van het operatorische, bij het voltrekken van (komma-)breukverwekkende processen, modelvorming en toepassing e.d.

We laten de voortschrijdende mathematisering in het gebied van de kommabreuken verder buiten beschouwing.

Het ging er slechts om enkele raakpunten met dit nauwverwante wiskundig gebied te duiden.

- 34 Zie hoofdstuk III par. 3.2 voor de rol van het mathematiseren bij het vergelijken en ordenen van verdeelsituaties.
- 35 Vooral de laatste jaren gaan er steeds meer stemmen op in het (wiskunde-)onderwijs uit te gaan van situaties, contexten om aan wiskundige ideeën, begrippen, operaties e.d. betekenis te verlenen, waardoor de ontwikkelde wiskunde in de realiteit (van de leerlingen) verankerd is.
Zie in dit verband:
Thom, R.: *Modern mathematics; does it exist*, in 'Developments in Mathematics Education' – Howson, A.G. (ed) – Cambridge 1973, pag. 194–209.
Zie ook hoofdstuk III par. 3.1 en de in de bijbehorende voetnoten vermelde literatuur, waarnaar verwezen wordt.
- 36 Zie hiervoor hoofdstuk III par. 5; zie ook het vervolg van deze beschrijving.
- 37 Voor andere belangrijke argumenten, verband houdende met gedifferentieerd werken, algoritmiseren en met name het verkorten en progressief schematiseren daarbij, verwijzen we naar het volgende hoofdstuk.
- 38 Zie ook par. hoofdstuk III par. 5 en hoofdstuk IV par. 3.2.
- 39 Zie ook hoofdstuk III par. 4.
- 40 Ontleend aan: Streefland, L.: *Breuken 1. Eerlijk verdelen en gelijkwaardigheid*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 9 nr 4/5, 1980, pag. 96–102.
loc. cit. pag. 97.
- 41 loc. cit. pag. 101.
- 42 Zie hoofdstuk IV par. 2.
- 43 Zie hoofdstuk V.
Achteraf beschouwd, kan de vraag naar verdeelsituaties bij gegeven uitkomst als een (didactische) vondst beschouwd worden. Het idee voor deze geraffineerde vraagstelling, de beslissende schakel tussen breukverwekkend eerlijk verdelen en het algoritmiseren van het aftrekken en optellen van (ongelijknamige) breuken, werd spontaan tijdens gesprekken met kinderen gevonden.
- 44 Zie voor verschillende mogelijkheden bij dit voorbeeld hoofdstuk III par. 7.
- 45 Zie hoofdstuk IV par. 3.2.
- 46 In hoofdstuk V gaan we nog uitvoerig op dit en andere 'bijverschijnselen' van het werken met bedoelde verhoudingstabellen in.
- 47 Zie hoofdstuk IV par. 3.2.
- 48 Zie hoofdstuk III par. 5.

NOTEN HOOFDSTUK V

- 1 Voor een wetenschapsfilosofische verhandeling omtrent context en contextgebondenheid van het wetenschapsbedrijf verwijzen we naar:
Mishler, E.G.: *Meaning in context: Is there any other kind?*, in 'Harvard Educational Review', vol 49 nr 1, 1979, pag. 1–19.
Voor een interpretatie daarvan op het niveau van een feitelijk uitgevoerd ontwikkelingsonderzoek verwijzen we naar:
Goffree, F.: *Leren onderwijzen met Wiskobas*, Utrecht 1979, met name hoofdstuk 5.
- 2 Voor een verhandeling over mathematiseren en het onderscheiden 'verticaal mathematiseren' verwijzen we naar:
Treffers, A.: *Wiskobas Doelgericht*, Utrecht 1978, met name hoofdstuk 2.
- 3 In hoofdstuk V par. 5 vatten we de ontwikkelde deelleergang beknopt samen.
- 4 Na participatie in de ontwikkeling van het zogenaamde 'tweede model heroriëntering' was de Josephschool volgschool geworden in het Wiskobasproject. Zie in dit verband: Wiskobasteam: *Heroriëntering onderwijzers 1968–1978*, in 'Rapportboekje 2, IOWO-Utrecht 1978', met name de hoofdstukken 4 en 5.
- 5 Men gebruikte tot aan de vernieuwing 'Operator rekenen' (oude versie) van W. Birkhoff, N. Buijs en J.M.F. Teunissen, uitg. Zwijssen, Tilburg.
- 6 Volgens daartoe door het departement van onderwijs en wetenschappen opgestelde normen, verwierf de Josephschool zich een extra leerkracht voor een halve weektaak.

- Door de sociaal-economische achtergrond van een aantal leerlingen, doch vooral ook door het afkomstig zijn uit onvolledige gezinnen, maakte de school daarop aanspraak.
- 7 De grote moeiten, die een aanzienlijk deel van de leerlingen had met de sleutelonderwerpen uit het traditionele rekenen, zoals breuken, kommagetallen en procenten, vormden voor de Josephschool juist de aanleiding om tot ingrijpende vernieuwing van het rekenonderwijs over te gaan.
 - 8 Zie bijvoorbeeld:
Corte, E. de: *Objecten, Doelen en Methodologie van de Onderwijspsychologie*, in 'Tijdschrift voor Onderwijsresearch', nr 5, 1979, pag. 209-217; zie met name pag. 214.
 - 9 loc. cit. pag. 214.
 - 10 Door het accentueren van het belang van dergelijke onderzoeksmethoden vindt als het ware een (her-)waardering van de zogenaamde 'zachtere' methoden plaats.
loc. cit. pag. 212.
 - 11 Zie bijvoorbeeld:
Goffree, F.: *Leren onderwijzen met Wiskobas*, Utrecht 1979, met name hoofdstuk 5.
 - 12 Tijdens de heuristische fase verscheen een didactische fenomenologie voor de breuken van de hand van Freudenthal.
Freudenthal, H.: *Didactische fenomenologie van wiskundige grondbegrippen*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1976-1979; hierin hoofdstuk 5.
 - 13 Zie: Bruggen, J. van: *Hoe maak je zo'n schoolwerkplan?*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 2 nr 6, 1973, pag. 1038-1045.
 - 14 Ook hier wilden we, zoals bij herhaling bepleit, reeds op het niveau van de macro-uitlijning en als voorbereiding op de micro-uitlijning, nadrukkelijk rekening houden met kinderen en hun leerprocessen.
 - 15 Zie: Corte, E. de: *Objecten, Doelen en Methodologie van de Onderwijspsychologie*, in 'Tijdschrift voor Onderwijsresearch', nr 5, 1979, pag. 209-217.
loc. cit. pag. 213.
 - 16 Ook in het ontwikkelingsproces met de voltallige groep werd deze strategie gevolgd. Op het belang van het zelf ontwikkelen van algoritmen door de leerlingen (en hun creatieve inbreng daarbij) werd met name door Landa gewezen.
Zie: Parreren, C.F. van en Carpay, J.A.M.: *Sovjet-psychologen aan het woord*, Groningen 1972, hoofdstuk 2.
loc. cit. pag. 122.
 - 17 Het spreekt vanzelf, dat de inmiddels 'ingewijden' niet de kans krijgen beslissende invloed op het ontwikkelingsonderzoek uit te oefenen.
 - 18 Treffers, A.: *Wiskobas Doelgericht*, Utrecht 1978.
 - 19 loc. cit. pag. 229-233.
Zie ook hoofdstuk 5.
 - 20 Zie: Streefland, L.: *Makro-structurele verkenningen voor het wiskundeonderwijs*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980.
loc. cit. pag. 63.
Vooral Freudenthal benadrukte het belang van het observeren van leerprocessen als dé methode voor onderzoek in het onderwijs.
Zie bijvoorbeeld:
Freudenthal, H.: *Onderzoek in het Onderwijs*, in 'Pedamorfose' jrg 12, nr 45, 1980, pag. 57-66; zie pag. XLV-61.
 - 21 Het bezwaar van een dergelijk participierend-observerende opstelling is natuurlijk de mogelijkheid van te sterke subjectieve 'kleuring' van de gegevens.
Zie in dit verband bijvoorbeeld:
Terwel, J.: *Observeren in het onderwijs, Theorie, Methoden en kritiek*, in 'INFO', april 1978, met name hoofdstuk 6.
 - 22 Vanwege de aangehangen visie op wiskunde-onderwijs met accent op het activiteitsprincipe en het zelf ontdekken, vormt het 'materiaal' dat de leerlingen tijdens een les inbrengen steeds de stuwende kracht in het onderwijsleerproces. Hierdoor was het gevaar van ongewenste doublures en stagnatie in het onderzoek op grond daarvan nauwelijks aanwezig.
 - 23 Tijdens de lessen in het vijfde leerjaar droeg ook de betrokken onderwijzeres haar steentje bij, wanneer zij niet in het vierde leerjaar voor de schoolleider behoefte in te vallen, omdat een andere vervanger beschikbaar was.
 - 24 Zie: IOWO-team: *Onderzoeksnota. Onderzoek voor wiskundeonderwijs*, in 'Wiskobas-

- Bulletin', jrg 9 nr 4/5, 1980, pag. 2–19.
- Goffree, F.: *Leren onderwijzen met Wiskobas*, Utrecht 1979, hoofdstuk 5.
- 25 Zie: Nauta, L.W.: *Context of discovery and context of justification, notities in de marge van een onderscheid*, in 'Kennis en Methode', 1977, pag. 5–20.
- Overigens zijn we in verband met 'justification' al buiten de grenzen van het ontwikkelingsonderzoek getreden, door onder andere de ontwikkelde ideeën voor een deel voor te leggen aan een forum van deskundigen tijdens de grote voorjaarsconferentie van Wiskobas te Noordwijkerhout in 1979.
- 26 Voor uitvoeriger informatie over algoritmen in deze betekenis verwijzen we naar: Leeuw, L. de: *Computer gestuurd denken*, in 'Pedagogische Studiën', 52, 1975, pag. 377–393, met name pag. 378, waar gesteld wordt, dat een algoritme is opgebouwd uit sequenties van toetsingen en operaties.
- Parreren, C.F. van: *Algoritmen en heuristieken in het onderwijs*, in 'Pedagogische Studiën', 52, 1975, pag. 394–405.
- Op pag. 394 gaat Van Parreren in op het verschil tussen algoritmen en heuristieken. Hij stelt in dit verband dat algoritmen zich kenmerken door 'oplossingszekerheid'.
- Parreren, C.F. van en Carpay, J.A.M.: *Sovjetpsychologen aan het woord*, Groningen 1972, met name hoofdstuk 5.
- 27 Zie: Treffers, A. (ed): *Vermenigvuldigen en delen I. Overzicht en achtergronden*, IOWO-leerplanpublikatie 10, Utrecht 1979, pag. 131–153.
- 28 Zie: Jong, R. de (ed): *De abakus. Een belangrijk leermiddel voor het wiskundeonderwijs*, IOWO-leerplanpublikatie 6, Utrecht 1977.
- 29 Zie noot 28, hoofdstuk III.
- 30 Zie: Treffers, A. (ed): *Vermenigvuldigen en delen I. Overzicht en achtergronden*, IOWO-leerplanpublikatie 10, Utrecht 1979.
- 31 loc. cit. pag. 44.
- 32 loc. cit. pag. 39.
- 33 loc. cit. pag. 44.
- 34 Zie de hoofdstukken III en IV.
- 35 Voor een uitvoerige en wiskundig veel meer gefundeerde analyse verwijzen we naar: Kirsch, A.: *An analysis of commercial arithmetic*, in 'Educational Studies in Mathematics', 1, 1969, pag. 300–311.
- Tevens verwijzen we naar het eerste hoofdstuk van deze studie, waar reeds op het belang van dit artikel gewezen werd in verband met (het algoritmiseren van) verhoudingen als toepassingsgebied voor de breuken (par. 1.5).
- 36 Zie bijvoorbeeld:
- Freudenthal, H.: *Weeding and sowing. Preface to a Science of mathematical education*, Dordrecht/Boston 1978, met name hoofdstuk 4.
- Freudenthal, H.: *Lernzielfindung im Mathematikunterricht*, in 'Zeitschrift für Pädagogik', jrg 20 Heft 5, 1974, pag. 719–729.
- 37 Zie: Treffers, A. (ed): *Vermenigvuldigen en delen I. Overzicht en achtergronden*, IOWO-leerplanpublikatie 10, Utrecht 1979.
- 38 Zie bijvoorbeeld hoofdstuk V par. 2.2.
- 39 Dit 'terugvallen' gaat niet vanzelf en vereist het nodige initiatief van de leerlingen. Het was deze kwestie, waarop aan het einde van hoofdstuk V par. 3.1 al gewezen werd.
- 40 In de gangbare didactiek wordt de aandacht van de leerlingen van meet af aan gefixeerd op de kleinste gemeenschappelijke noemer, waardoor de algoritme 'gesloten' van karakter wordt. Een uitzondering hierop vormt de benadering in 'Elementair Wiskundig Rekenen' (uitg. Van Gorcum en Comp., Assen).
- De daarin gepropageerde open benadering wordt helaas echter snel ingeruild voor de 'kgv-methode'.
- Zie: Meijer, H. en Streefland, L.: *Elementair Wiskundig Rekenen*, in 'Rapportboekje 3', IOWO-uitgave, Utrecht 1980, pag. 78–97.
- 41 Landa wijst het aanbieden van kant-en-klare algoritmen in het onderwijs af. Hij bepleit dus een niet algoritmische gang van zaken bij algoritmiseringsprocessen. De creatieve inbreng van de leerlingen daarin, het zelf vinden van de oplossingen verdient de voorkeur.
- Zie: Klerk, L.F.W. de: *Inleiding in de onderwijspsychologie*, Deventer 1979, pag. 143–147.
- 42 Zie: Greeno, J.G.: *Cognitive objectives of instruction: Theory of knowledge for solving*

problems and answering questions, in 'Cognition and Instruction' – Klahr, D. (ed) – Hillsdale 1976, pag. 123–159.

Hierin schetst de auteur (onder andere) drie algoritmische benaderingen voor het gelijknamig maken van breuken om te laten zien, hoe via verschillende procedures toch hetzelfde wiskundig produkt gerealiseerd kan worden. Dat wiskundig produkt als cognitieve verworvenheid heeft echter voor Greeno's analyse model gestaan, omdat het eerlijk verdelen en het vergelijken van verdeelsituaties buiten beschouwing gebleven is. Bij het aanbieden van kant-en-klare algoritmen in het onderwijs zal het door ons genoemde reflectieve moment, leidend tot de standpuntverandering van de leerlingen, moeilijk kunnen plaatsvinden. De eigen ervaringen en eventuele creatieve bijdrage aan de algoritme worden dan namelijk bij voorbaat uitgesloten.

- 43 Eerder raakten we aan de differentiatiekwestie, in verband met het gedifferentieerd voltrekken en beschrijven van verdeeltaken en ook bij het algoritmiseren van verhoudingen en bewerkingen aftrekken en optellen van breuken; zie respectievelijk de hoofdstukken III.7, V.3.2 en V.3.3.

- 44 In Soest bevindt zich een pannekoekenhuis met die naam.

- 45 Zie voor een nadere definiëring van het begrip *toetsles*:

Heege, H. ter en Treffers, A.: *Peiling*, IOWO-leerplanpublicatie 10, Utrecht 1979, hoofdstuk 4.

In een toetsles richt de aandacht zich op de evaluatie van voorafgaand onderwijs. Er wordt echter ook les in gegeven. Hulp van de leerkracht is niet uitgesloten. Vooral in sovjetpsychologische literatuur wordt deze leerhulp bij de beschrijving van uitkomsten van onderwijs-experimenten regelmatig gemeld.

Zie bijvoorbeeld:

Davydov, V.V. (ed): *Psychische mogelijkheden van jonge leerlingen in het wiskunde-onderwijs*, Moskou 1969.

- 45a In het vervolg van deze beschrijving zullen de leerlingen uit het vierde en vijfde leerjaar, die aan het onderzoek deelnamen, respectievelijk met groep 1 en groep 2 aangeduid worden.

- 45b In hoofdstuk IV par. 4.3 wezen we reeds op de mogelijkheid van hinderlijke bijverschijnselen bij dergelijk tabelgebruik.

- 46 Het gaat hier om onderschatting onzerzijds van de complexiteit van deze bedoelingen en de taken in verband daarmee. Bovendien, en dat geldt niet alleen voor deze fase van het werk, was niet onderkend, dat de leerkracht hinder zou kunnen ondervinden van zijn kennis en ervaring van en met breuken. Juist het vergelijken en ordenen komt in de traditionele benadering van de breuken niet of nauwelijks voor, zeker niet als voorbereiding op het aftrekken van breuken.

- 47 Zie ook hoofdstuk V par. 2.3.

- 48 Of hier sprake is van navolging, is niet meer met zekerheid te achterhalen. De leerlingen van groep 2 waren met de vergelijking van $\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{4}$ bezig, toen genoemde leerling(e) de geschetste aanpak mocht vertellen. Onmiddellijk daaraan voorafgaand, was een soortgelijke opdracht gezamenlijk schriftelijk verwerkt en ook waren – bij wijze van herhaling – bij afzonderlijke verdeelsituaties daarmee in de uitkomst gelijkwaardige bedacht en in tabellen genoteerd.

- 49 In het vervolg van deze paragraaf zal niet alleen blijken, hoe de retentie van de aanpak al enigszins gerealiseerd is. Ook zullen enige leerlingen in hun oplossingsgedrag van enige voortgang in de progressieve schematisering blij geven.

- 50 Vergelijking via 'complementbepaling' lag hier kennelijk minder voor de hand. Niemand kwam althans op dit idee.

- 51 Dit moet waarschijnlijk aan tijdgebrek geweten worden. De voorafgaande toepassings-situatie was namelijk wel goed door deze leerling verwerkt.

NOTEN HOOFDSTUK VI

1 Zie ook hoofdstuk VI par. 3.

2 Zie bijvoorbeeld hoofdstuk I par. 2.3, met name ook voetnoot 22, hoofdstuk II par. 5, met name de formulering van de bedoelingen van deze studie en hoofdstuk V.

3 Voor de kwestie van het begrijpen in het wiskunde-onderwijs verwijzen we naar het 'Losbladig Onderwijskundig Lexicon':

Freudenthal, H., Goffree, F. en G. Schoemaker: *Wiskunde Onderwijs*, 1981, pag. SG1200-1 tot SG1200-77.

De auteurs gaan onder andere in op het algoritmiseren en de opvattingen van Skemp over instrumenteel en relationeel begrippen.

4 Zie pag. 37, 49 en 110.

5 Zie ook hoofdstuk V par. 2 in:

Streefland, L.: *Makro-structurele verkenningen voor het wiskundeonderwijs*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980.

NOTEN HOOFDSTUK VII

- 1 Tussen de verrichting van het in hoofdstuk V beschreven onderzoek en dit vervolg zijn inmiddels enkele jaren verstreken. Daarmee is de longitudinaliteit van het oorspronkelijk onderzoek doorbroken. We menen desondanks aan de uitkomsten van dit onderzoek met een nieuwe groep van 10 leerlingen enige relevantie te kunnen toekennen binnen de context van deze studie als geheel, omdat
 - a het onderzoek heeft plaatsgevonden op dezelfde school als destijds, nl. de Jozefschool te Bussum en
 - b de leerlingen die aan het onderzoek deelnamen breukenonderwijs hebben gevolgd in de geest van hetgeen in de hoofdstukken III, IV en V beschreven is.
 - c de personen van leerkracht en onderzoeker dezelfde zijn als destijds.
- 2 Ook Bertisen noemt de getallenlijn als uiterst essentieel voor een breukenleergang en deelt in dit opzicht de kritiek uit kleine kring.

Bertisen, R: *Een aanzet tot verantwoord breukenonderwijs – Op zoek naar wat en hoe –* (M.O.B scriptie) Jabeek, 1982.
- 3 Voor de mogelijkheden van progressief schematiseren bij de vier hoofdbewerkingen met natuurlijke getallen, waar zich genoemde verschijnselen eveneens voordeden, verwijzen we naar:

Jong, R. de (ed), 1977 en Dekker, A., Heege, H. ter en Treffers, A.: *Cijferend Vermenigvuldigen en Delen volgens Wiskobas*, OW & OC Utrecht, 1982.
- 4 Voor een eerste uitwerking van deze uitspraak verwijzen we naar hoofdstuk IX.
- 5 De in praktijkmateriaal uitgewerkte deelleergang hield hiermee in zoverre al rekening, dat ook problemen in verband met afstand, tijd en snelheid werden opgenomen als toepassingen voor het ontwikkelde algoritmiseringsproces om dit los te kunnen maken van de realiteit van verdeelsituaties en te verheffen tot algemene procedure voor het aftrekken (en dan ook optellen) van ongelijknamige breuken. Zie in dit verband Streefland, L.: *Het aftrekken van ongelijknamige breuken met een slakkengang* in: *Nieuwe Wiskrant* 2 (1983) pag. 3–9.
- 6 Eigenlijk is de terminologie 'contextloos opereren met breuken' slechts geschikt in objectieve zin. Subjectief namelijk, vanuit de leerling gedacht, is de ontvouwde breukendidactiek erop gericht context, betekenis, voorstelbaarheid juist bij kale vraagstukken, indien daaraan behoefte bestaat, vast te houden dan wel op te roepen.
- 7 In traditionele didactische sequenties en vrijwel alle onderzoek tot dusver, maakt men een strikte scheiding tussen het begrip breuk en het opereren met breuken. Ook Bertisen (1982) ging impliciet uit van deze scheiding, blijkens de samenstelling van de toetsen, die hij aan zesdeklassers afnam. Zijn beoordeling van hun breukbegrip moet dan ook vanuit die beperking begrepen worden.
- 8 Ook Bertisen, 1982, p. 103, neemt voorzichtig dit standpunt in als hij stelt: 'Misschien mag men hieruit zelfs de conclusie trekken, dat de breuken als abstracte getallen, voor sommige kinderen *niet* haalbaar zijn'.
- 9 Voor de rol ervan verwijzen we eveneens naar hoofdstuk IX.
- 10 Voor de rol van het schatten bij het leren van verhoudingen verwijzen we naar Streefland, L.: *The role of rough estimation in learning ratio and proportion – an exploratory research*, Vermandel, A. (ed) – 'Proceedings of the sixth International Conference for the Psychology of Mathematisch Education'. Voor de rol van het schatten bij het rekenen met natuurlijke getallen verwijzen we naar: Dekker, A., Heege, H. ter en Treffers, A.: *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas*, OW & OC, Utrecht 1982.

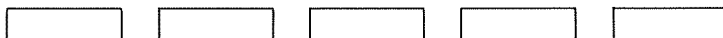
NOTEN HOOFDSTUK VIII

- 1 'The Arithmetic Teacher', vol 30 nr 2, oktober 1982, geeft 'Ideas' in verband met breuken, onderwijspraktische tips met werkbladen. De tips betroffen:
 - delen van figuren met breuken beschrijven; bij welke hoort dezelfde breuk, en
 - een breukendoolhof; de grootste breuk bij elke splitsing bepaalt het juiste vervolg van de route, dus het ordenen van breuken zonder context.
- 2 Mick, H.W.: *Natural Developmental Sequencies for Learning and Teaching Fractions*, in 'Proceedings of the fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education' – Karplus, R. (ed.) – Berkeley 1980, p. 32–39.
- 3 loc. cit. p. 37.
- 4 Zie bijvoorbeeld: Behr, M.J. en T.R. Post: *The effect of visual perceptual distractors on children's logical mathematical thinking in rational-number situations*, paper gepresenteerd tijdens de vijfde Internationale conferentie voor de Psychologie van het Wiskunde Onderwijs, Grenoble 1981.
- 5 Lesh, R., Landau, M. en E. Hamilton: *Rational number Ideas and the role of Representational systems*, in 'Proceedings of the fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education' – Karplus, R. (ed.) – Berkeley 1980, p. 50–60.
Behr, J.M., Lesh, R. en T.R. Post: *Construct Analysis, manipulative aids, representational systems and learning rational number concepts*, in 'Equipe de Recherche Pedagogique', PME, Grenoble 1981, p. 203–210.
- 6 Dienes, Z.P.: *Building up Mathematics* (revised edition), London 1967.
- 7 James, N.: *Towards thinking Mathematically. Part I – What is a fraction?*, in 'Proceedings of the fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education' – Karplus, R. (ed.) – Berkeley 1980.
- 8 Noelting, G.: *The development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept. Part II: Problemstructure at Successive stages: Problem Solving. Strategies and the Mechanism of Adaptive Restructuring*, in 'Educational Studies in Mathematics', 11, 1980, p. 331–363.
Mackernan, J.: *The merits of verbalism*, in 'Mathematics in School', september 1982, p. 27–30.
Behr (e.a.), 1981 (zie noot 4).
Bertisen, 1982 (zie hoofdstuk VII).
- 9 Noelting, 1980, p. 349.
- 10 Behr (e.a.), 1981, p. 10.
N.B.: met dergelijke conclusies moet men overigens uiterst voorzichtig zijn, naar onze ervaring leert. De technische eisen aan kinderen gesteld, kunnen te hoog zijn, waardoor de neiging ontstaat gebrekkige of foutieve uitvoering van taken als onbegrip te interpreteren (zie bijvoorbeeld Streefland (1978)).
- 11 loc. cit., p. 21.
- 12 loc. cit., p. 22.
- 13 Bertisen, 1982, p. 85, 93–97, 99, 100.
- 14 Behr, M.J., Post, Th.R. en I. Wachsmuth: *Children's acquisition of order and equivalence concepts for rational numbers. Report on a Clinical Teaching Experiment*, paper presented at the 1982 Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York 1982.
- 15 loc. cit. p. 5.
- 16 Evenals in Behr (e.a.), 1981.
- 17 Behr (e.a.), 1982, p. 11.
- 18 loc. cit. p. 20.
- 19 Ibid, p. 30.
- 20 Zie in dit verband bijvoorbeeld:
Hart, K.M. (ed.): *Children's understanding of Mathematics: 11–16*, London 1981.
- 21 Behr (e.a.), 1982, p. 30.
Zie ook noot 20.
- 22 loc. cit. p. 31.
- 23 Floyd, A.: *Towards thinking mathematically. Part II – Combining Fractions*, in 'Proceedings of the fourth international Conference for the Psychology of Mathematics Education' – Karplus, R. (ed.) – Berkeley 1980.
- 24 loc. cit. p. 49.
N.B.: jammer is, dat Floyd 'real world' nog tussen aanhalingstekens moet plaatsen. Ze

- voelt kennelijk zelf wel aan, dat de door haar beschreven verdeelproblemen nogal gekunsteld aandoen.
- 25 Ibid.
 - 26 Medewerkers van Open scholen komen soms met volwassen cursisten in aanraking, die uit hun lagere schooltijd een breukentrauma hebben overgehouden en van breuken letterlijk onpasselijk worden.
 - 27 Noelting, G. en L. Gagné: *The development of Proportional Reasoning in Four different Contexts*, in 'Proceedings of the fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education' – Karplus, R. (ed.), Berkeley 1980, p. 126–136.
 - 28 loc. cit., p. 127.
 - 29 Pinchback, C.L.: *Computational error of seventh and eighth grade students*, in 'Equipe de Recherche Pédagogique' (ed.), Grenoble 1981, p. 210–216.
 - Harrison, B., Brindley, S. en M.P. Bye: *Effects of a Process-Enriched Approach to Fractions*, in 'Proceedings of the fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education' – Karplus, R. (ed.), Berkeley 1980, p. 75–82.
 - Hershkowitz, R., Vinner, S. en M. Bruckheimer: *Some Cognitive Factors as Causes of Mistakes in the Addition of Fractions*, in 'Proceedings of the fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education' – Karplus, R. (ed.), Berkeley 1980, p. 24–32.
 - Hasemann, K.: *On the understanding of concepts and rules in Secondary Mathematics: Some examples illustrating the Difficulties*, in 'Proceedings of the fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education' – Karplus, R. (ed.) – Berkeley 1980, p. 68–75.
 - Verhoef, G. en M. Vroonhof: *Een scriptie in twee delen. Deel 1: Een onderzoek naar de beheersing van gecompliceerde breukbewerkingen van leerlingen van de zesde klas van de lagere school en van diezelfde leerlingen aan het einde van de brugklas*, Utrecht 1982, p. 1–26.
 - 30 Verhoef (e.a.), p. 17, 18.

NOTEN HOOFDSTUK IX

- 1 Dit geldt zeker voor de Verenigde Staten van Amerika, zoals in hoofdstuk 2 gemeld werd.
- 2 Bertisen 1982, pag. 64–68.
- 3 Zie in dit verband:
Sweers, W. (red.): *Leerplanontwikkeling onderweg 2a*, IOWO-publikatie, Utrecht 1980, pag. 125, of noot 26 van het achtste hoofdstuk.
- 4 Zie bijvoorbeeld:
Dalin, P.: *Innovatie in het onderwijs*, vertaald en gedeeltelijk bewerkt door H. Kaldenbach, Amsterdam z.j.
- 5 Zie hoofdstuk V, noot 46.
- 6 ICME, International Congress on Mathematics Education, 10–16 augustus 1980 te Berkeley (USA).
Freudenthal, H.: *Major Problems of Mathematics Education*, later gepubliceerd in 'Educational Studies in Mathematics', 12, 1981, pag. 133–150.
- 7 Bij een kort geleden op vier lagere scholen in Schotland afgenomen toets (10–12 jarigen) luidde de 3e vraag: 'Cut these chocolate bars to share them equally among 6 children.'



Bidwell beschrijft hoe er bij 300 kinderen die de toets maakten 28 verschillende oplossingen voorkwamen! James K. Bidwell: *Share Five Chocolate Bars among Six Children*, in 'Mathematics Teaching', 99, 1982, pag. 4–8.

LITERATUUR

Artikelen uit 'The Arithmetic Teacher':

- Addition of unlike fractions*, vol 15 nr 3, 1969, pag. 221–223.
Suggestions from research-fractions, vol 16 nr 2, 1969, pag. 131–135.
Of fractions, fractional numerals and fractional numbers, vol 21 nr 5, 1974, pag. 442–444.
Teaching for generalization: An array approach to equivalent fractions, vol 20 nr 7, 1973, pag. 591–599.
An algorithm for reducing fractions, vol 21 nr 4, 1974, pag. 299–300.
Action research on division of fractions, vol 13 nr 4, 1966, pag. 293–295.
Paperfolding and equivalent fractions – bridging a gap, vol 18 nr 4, pag. 245–249.
Fractions in the new elementary curricula, vol 15 nr 3, 1968, pag. 216–220.
Fractions for low achievers, vol 13 nr 8, 1966, pag. 647–655.
To invert or not to invert?, vol 10 nr 5, 1963, pag. 274–277.
More rationalizing Division of Fractions, vol 2 nr 1, 1955, pag. 25–26.
Fractions on grid paper, vol 26, jan 1979, pag. 8–10.
An introduction to fractions, vol 22 nr 7, 1975, pag. 538–546.
Using rectangles and squares to develop fraction concepts, vol 24 nr 2, 1977, pag. 96–102.
Mathematical systems and their relationship to the real world, vol 17 nr 7, 1970, pag. 563–573.
Division of fractions, vol 9 nr 1, 1962, pag. 10–16.
Crazy fractions: an equivalence game, vol 20 nr 4, 1973, pag. 303–304.
Results and implications of the NAEP Mathematics assessment: Elementary school, vol 22 nr 6, 1975, pag. 438–450.
Notes from National Assessment: Addition and multiplication with fractions, vol 23 nr 2, 1976, pag. 137–143.
Results and Implications of the Second NAEP Mathematics Assessments: Elementary school, vol 27 nr 8, 1980, pag. 10–12 en 44–47.
Rationalizing 'inverting and multiplying', vol 10 nr 5, 1963, pag. 272–273.
A number pencil, vol 14 nr 7, 1967, pag. 557–559.
The board stretcher: A model to introduce factors, primes, composites and multiplication by a fraction, vol 20 nr 8, 1973, pag. 649–656.
From halves to hundredths, vol 26 nr 3, pag. 4–8.
Groups and line-arrangements help develop concepts for numbers in the span from ten through twenty, vol 7 nr 7, 1960, pag. 367–372.
Division with common and decimal fraction numbers, vol 17 nr 5, 1970, pag. 438–441.
The relationship between Arithmetic Research and the content of Arithmetic Textbooks (1900–1957), vol 9 nr 4, 1960, pag. 178–183.
FRIO, or Fractions In Order, vol 13 nr 8, 1966, pag. 684–685.
Rationalizing Division of Fractions, vol 1 nr 4, 1954, pag. 20–24.
Some thoughts on Piaget's findings and the teaching of fractions, vol 19 nr 4, 1972, pag. 273–275.
Don't let that inverted divisor become mysterious, vol 1 nr 3, 1954, pag. 15–17.
The concept of the shifting unit, vol 19 nr 3, 1972, pag. 171–177.
Rate pairs, fractions and rational numbers, vol 7 nr 7, 1960, pag. 389–399.
Fractions as operators, vol 15 nr 3, 1968, pag. 228–232.
Programmed instruction in arithmetic, vol 13 nr 1, 1966, pag. 19–23.
Fractions, decimals and their futures, vol 24 nr 3, 1977, pag. 238–240.
Mrs. Murphy's pies – an introduction to division by fractions, vol 14 nr 4, 1967, pag. 310–311.
Reduction of fractions, vol 4 nr 5, 1957, pag. 209–210.
Some historical whats, hows and whys in teaching arithmetic, vol 17 nr 6, 1970, pag. 461–475.

Help children Discover Fraction Facts, vol 4 nr 6, 1957, pag. 250–256.
A model for teaching multiplication of fractional numbers, vol 20 nr 1, 1973, pag. 5–9.
Fraction concepts held by young children, vol 4 nr 4, 1957, pag. 168–173.
Fractions – Seven-Year-Olds use them, vol 5 nr 5, 1958, pag. 233–238.
Dividing fractions with fraction wheels, vol 17 nr 7, 1970, pag. 619–621.
A device for practice with common denominators and addition of unlike fractions, vol 8 nr 7, 1961, pag. 373.
Why invert the divisor?, vol 4 nr 6, 1957, pag. 262–265.
'Sets', aid in adding fractions, vol 6 nr 1, 1959, pag. 35–39.
Concept determines process – a look at the fraction symbol, vol 13 nr 4, 1966, pag. 298–302.
Division of fractional numbers, vol 16 nr 2, 1969, pag. 99–103.
An ordered pair approach to addition of rational numbers in second grade, vol 12 nr 2, 1965, pag. 106–108.
Meaning for multiplication of fractions, vol 5 nr 2, 1958, pag. 89–90.
'Ideas', in vol 19 nr 4, pag. 290–292; vol 19 nr 5, 1972, pag. 465; vol 20 nr 3, 1973, pag. 205–206; vol 22 nr 5, 1975, pag. 396–399.
If the hands can do it, the head can follow, vol 19 nr 7, 1972, pag. 571–577.
Fun with fractions for special education, vol 18 nr 6, 1971, pag. 417–419.
Mental imagery in mathematics, vol 19 nr 8, 1972, pag. 642–644.
Symbolism and the world of objects, vol 22 nr 5, 1975, pag. 370–371.
Division with fractions – levels of meaning, vol 12 nr 5, 1965, pag. 362–368.
Decimal Versus Common Fractions, vol 3 nr 5, 1956, pag. 201–203.
Historical Conflict – Decimal versus Vulgar Fractions, vol 7 nr 4, 1960, pag. 184–188.
A game of fractions, vol 13 nr 6, 1966, pag. 494.
Visual aid for multiplication and division of fractions, vol 14 nr 1, 1967, pag. 44–46.
An approach to division with common fractions, en *Now try this – division of fractions*, vol 15 nr 2, 1968, pag. 176–178.
Dividing by a fraction, vol 12 nr 3, 1965, pag. 225–226.
The division of common fractions, vol 7 nr 3, 1960, pag. 133–134.
Illustrating the multiplication and division of common fractions, vol 10 nr 5, 1963, pag. 268–271.
From cake to cancellation, vol 4 nr 4, 1957, pag. 136–137.
What can a teacher learn about a pupil's thinking through oral interviews?, vol 21 nr 1, 1974, pag. 26–32.
The structure of a fraction, vol 13 nr 4, 1966, pag. 296–297.
The conversion game, vol 18 nr 1, 1971, pag. 54–55.
Fractions with models, vol 27 nr 9, pag. 6–11.
A fraction circle, vol 3 nr 3, 1956, pag. 119–121.
Teaching comparison of common fractions, vol 15 nr 3, 1968, pag. 271–273.
Division by a fraction – a new method, vol 9 nr 1, 1962, pag. 122–126.
Teaching the concept of $\frac{1}{2}$ in the primary grades, vol 25 nr 5, 1977/1978, pag. 57–58.
Fracto, vol 21 nr 4, 1974, pag. 321–322.
Fractional numbers with a sum of 1, vol 13 nr 8, 1966, pag. 658–661.
A working model for rational numbers, vol 22 nr 4, 1975, pag. 328–332.
Testing the attainment of the broader objectives of arithmetic, vol 3 nr 2, 1956, pag. 66–71.
On the fraction as a numeral, vol 8 nr 5, 1961, pag. 234–238.
Pegboard multiplication of a fraction by a fraction, vol 16 nr 2, pag. 142–144.
Results of general mathematics Tests, vol 3 nr 1, 1956, pag. 21–27.
Another look at fractions, vol 20 nr 1, 1973, pag. 10–12.
Two approaches to the algorithm for multiplication of fractional numbers, vol 12 nr 7, 1965, pag. 552–555.
What the tests don't tell, vol 21 nr 1, 1974, pag. 54–56.
A meaningful approach to cancellation, vol 3 nr 1, 1956, pag. 29–30.
Addition and subtraction fraction algorithms, vol 16 nr 2, 1969, pag. 141–142.
Why teach division of common fractions?, vol 16 nr 2, 1969, pag. 111–112.
Teaching one of the differences between rational numbers and whole numbers, vol 18 nr 5, 1971, pag. 317–320.
Illustrating the division of fractions, vol 10 nr 5, 1963, pag. 292.
Take the folly out of fractions, vol 2 nr 4, 1955, pag. 113–119.
The role of geometry in elementary school mathematics, vol 13 nr 1, 1966, pag. 3–10.

- Making a whole – a game using simple fractions*, vol 18 nr 2, 1971, pag. 116–118.
- A note on multiplying fractions*, vol 15 nr 3, 1968, pag. 263–265.
- Fraction Rummy – a game*, vol 19 nr 5, 1972, pag. 387–388.
- The use of models in mathematics instruction*, vol 11 nr 2, 1964, pag. 157–165.
- Children's concept of scale and the subtraction of fractions*, vol 9 nr 1, 1962, pag. 115–118.
- Adding fractions using the definition of addition of rational numbers and the Euclidian algorithm*, vol 20 nr 1, 1973, pag. 27–28.
- Models for fractional numbers – a quiz for teachers*, vol 18 nr 1, 1971, pag. 44–46.
- Retention of the skill of division of fractions*, vol 7 nr 1, 1960, pag. 28–31.
- How I learned do percents*, vol 26 nr 1, 1979, pag. 16–17.
- The future of fractions*, vol 26 nr 1, 1979, pag. 18–20.
- A natural way to teach division of rational numbers*, vol 16 nr 2, 1969, pag. 91–93.
- A fraction of a fraction*, vol 11 nr 2, 1964, pag. 116–118.
- Reducing fractions can be easy, maybe even fun*, vol 21 nr 2, 1974, pag. 99–102.
- The fourth operation is not fundamental – fractional numbers and problem solving*, vol 22 nr 1, 1975, pag. 28–32.
- Behr, M.J.; Post, T.R.: *The effect of visual perceptivè distractors on children's logical mathematical thinking in rational number situations*, paper gepresenteerd tijdens de vijfde internationale conferentie voor de Psychologie van het Wiskunde Onderwijs in Grenoble, Frankrijk, juli 1981.
- Behr, J.M.; Lesh, R. en Post, T.R.: *Construct Analysis, Manipulative aids, Representational Systems and Learning Rational Number Concepts*, in Equipe de Recherche Pédagogique (ed): *Psychology of Mathematics Education*, Grenoble, 1981, pag. 203–210.
- Behr, M.J.; Post, Th.R. en Wachsmuth, I.: *Children's Acquisition of order and equivalence concepts for rational numbers*, Report on a clinical Teaching Experiment, paper presented at the 1982 annual meeting of the American Educational Research Association, New York, 1982.
- Bertisen, R.: *Een aanzet tot verantwoord breukenonderwijs – Op zoek naar wat en hoe* (M.O.B. scriptie), Jabeek, 1982.
- Bruggen, J.C. van: *Hoe maak je zo'n schoolwerkplan?*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 2 nr 6, 1973, pag. 1038–1045.
- Bruggen, J.C. van: *Leerpsychologische vergelijkingen*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1976.
- Bruggen, J.C. van: *Oriëntatietocht in ontwerp en psychologie*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 2 nr 4/5, 1973, pag. 885 e.v.
- Bussman, H.: *Jean Piaget und die Mathematikdidaktik*, in 'Zeitschrift für Pädagogik', jrg 20 nr 5, 1974, pag. 703–719.
- Cable, J.: *A society for the preservation of fractions*, in 'Mathematics in Schools', vol 5 nr 4, 1976, pag. 13–14.
- CITO: *Rekentoetsen leerjaar 2, 3 en 4, basisonderwijs*, handleiding, Arnhem 1979.
- Corte, E. de: *Objecten, Doelen en Methodologie van de Onderwijspsychologie*, in 'Tijdschrift voor Onderwijsresearch', jrg 4, nr 5, 1979, pag. 209–217.
- Dalin, P.: *Innovatie in het Onderwijs*, vertaald en gedeeltelijk bewerkt door H. Kaldenbach, Amsterdam z.j.
- Davydov, V.V. en Tsvetkovic, Z.: *Over de konkrete bronnen van het breukbegrip*, in 'Psychologische mogelijkheden van jonge kinderen bij het leren van wiskunde, Moskou 1969.
- Davydov, V.V.: *Logical and psychological problems of Elementary Mathematics as an Academic Subject*, in 'Soviet Studies in the psychology of learning and teaching mathematics' – Kilpatrick, J., Wirsup, J., Begle, E.G. en Wilson, J.W. (eds) – vol VII, Chicago 1975.
- Dekker, A.; Heege, H. ter; Treffers, A.: *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas*, OW & OC, Utrecht, 1982.
- Desjardins, M. en Héту, J.C.: *Mathématique dans l'enseignement des fractions*, Quebec 1974.
- Dienes, Z.P.: *Mathematics in the primary schools*, Toronto 1966.
- Dienes, Z.P.: *Fractions. An operational Approach*, Paris 1967.
- Dienes, Z.P.: *Building up mathematics* (revised edition), London 1967.
- Ellerbruch, L.W. en Payne, J.N.: *A teaching sequence from Initial Fraction concepts through the Addition of unlike Fractions*, in 'Developing Computational Skills' – Suydam, M.N. en Reys, R.E. (eds) – jaarboek NCTM, Reston Virginia 1978, pag. 129–148.
- Elshout-Mohr, M. en Daalen-Kapteyns, M.: *Het leren van begrippen en woordbetekenissen*, in 'Losbladig onderwijskundig lexicon', Alphen a/d Rijn 1979.

- Equipe de Recherche Pédagogique (ed): *Psychology of Mathematics Education*, Grenoble 1981.
- Erlwanger, S.H.: *Benny's conception of rules and answers in IPI-mathematics*, in 'The journal of children's mathematical behavior', vol 1 nr 2, 1973, pag. 7–26.
- Erlwanger, S.H.: *Case studies of children's conceptions of mathematics. Part I*, in 'The journal of children's mathematical behavior', vol 1 nr 3, 1975, pag. 157–283.
- Floyd, A.: *Towards thinking Mathematically, Part II – Combining fractions*, in Karplus (ed) 1980, pag. 46–50.
- Freudenthal, H.: *Mathematics as an educational task*, Dordrecht 1973.
- Freudenthal, H.: *Lernzielfindung im Mathematikunterricht*, in 'Zeitschrift für Pädagogik', jrg 20 Heft 5, 1974, pag. 719–729.
- Freudenthal, H.: *Breuken in de brugklas*, in 'Wiskrant', jrg 1 nr 3, 1976, pag. 2–3.
- Freudenthal, H.: *Didactische fenomenologie van wiskundige grondbegrippen*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1976–1979.
- Freudenthal, H.: *Weeding and sowing. Preface to a science of mathematics education*, Dordrecht/Boston 1978.
- Freudenthal, H.: *Verhoudingen als verschijnsel*, in 'Wiskrant', jrg 4 nr 17, 1979, pag. 5–9.
- Freudenthal, H.: *Structuur der wiskunde en wiskundige structuren*, in 'Pedagogische Studiën', 56, 1979, pag. 51–61.
- Freudenthal, H.: *Onderzoek in onderwijs*, in 'Pedagogische Studiën', 12, nr 45, 1980, pag. 57–66.
- Freudenthal, H.: *Major problems of mathematics education*, in 'Educational Studies in Mathematics', 12, 1981, pag. 133–150.
- Freudenthal, H.; Janssen, G.M. en Sweers, W.J. (eds): *Five years IOWO*, in 'Educational Studies in Mathematics', vol 7 nr 3, 1976.
- Gaillard, F.F.J.: *Breuken toch maar handhaven?*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 2 nr 4/5, 1973, pag. 950 e.v.
- Gelder, L. van (e.a.): *Didactische Analyse*, Reader 1, Groningen 1972.
- Getal in beeld. Vernieuwd en activerend rekenen voor de basisschool, auteurs: Tineke Brinkman, Valeer van Achter, Piet de Jong, fr. Jan Nieland, in hogere leerjaar mmv Eugène Biels en Jan van Loon, uitg. Malmberg, 's-Hertogenbosch vanaf 1971.
- Goffree, F.: *Kans voor het onderwijs*, doktoraalskriptie, interne IOWO-uitgave, Utrecht 1973.
- Goffree, F.: *Kijk op Kans – proefwerk nieuwe stijl*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 2 nr 4/5, 1973, pag. 907 e.v.
- Goffree, F.: *Vakdidactische notities*, in 'Euclides', jrg 54 nr 6, 1979, pag. 221–224.
- Goffree, F.: *Leren onderwijzen met Wiskobas*, Utrecht 1979.
- Greeno, J.G.: *Cognitive objectives of instruction: Theory of knowledge for solving Problems and Answering Questions*, in 'Cognition and Instruction' – Klahr, D. (ed) – Hillsdale 1976, pag. 123–159.
- Griesel, H.: *Eine verbandtheoretische Analyse der Bruchrechnung*, in 'Mathematisch-physikalische Semesterberichte', Band VI, 1959, pag. 195–216.
- Griesel, H.: *Analyse und Neubegründung der Bruchrechnung*, in 'Mathematisch-physikalische Semesterberichte', Band XV, 1968, pag. 48–68.
- Griesel, H.: *Algebra und Analysis der Grossensysteme*, in 'Mathematisch-physikalische Semesterberichte', Band XVI, 1969, pag. 56–93.
- Griesel, H.: *Der Wissenschaftliche Hintergrund der Bruchrechnung*, in 'Der Mathematikunterricht', jrg 16 Heft 2, 1970, pag. 5–29.
- Harrison, B.; Brundley, S. en Bye, M.P.: *Effects of a Process-enriched Approach to Fractions*, in Karplus (ed), 1980, pag. 75–82.
- Hasemann, K.: *On the understanding of concepts and rules in secondary mathematics: Some Examples illustrating the Difficulties*, in Karplus (ed), 1980, pag. 68–75.
- Hershkowitz, R.; Vinner, S. en Bruckheimer, M.: *Some Cognitive Factors as Causes of Mistakes in the Addition of Fractions*, in Karplus (ed), 1980, pag. 24–32.
- Hiele, P.M. van: *Begrip en Inzicht*, hfdst. 22, pag. 196–204, Purmerend 1973.
- IOWO-NOT-TELEAC: *Kijk op Kans. Wiskunde voor de hoogste klassen van de basisschool*, Den Haag z.j.
- IOWO-team: *Onderzoeksnota. Onderzoek voor Wiskundeonderwijs*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 9 nr 4/5, 1980, pag. 2–19.
- James, N.: *Towards thinking mathematically Part I – What is a fraction*, in Karplus (ed), 1980, pag. 39–46.
- Jansen, H.: *Nieuw Rekenen (2)*, in 'Rapportboekje 3', IOWO-uitgave, Utrecht 1980.

- Jansen, G.: *Breuken, een poging tot herstel*, in 'Wiskrant', jrg 2 nr 7, 1977, pag. 6–8.
- Janvier, C.: *The use of situations in Mathematics education*, in 'Educational Studies in Mathematics', 12, 1981, pag. 113–122.
- Jong, R. de (ed): *De abakus. Een belangrijk leermiddel voor het wiskundeonderwijs op de basisschool*, IOWO-leerplanpublicatie 6, Utrecht 1977.
- Jong, R. de; Treffers, A. en Wijdeveld, E. (red): *Overzicht van wiskundeonderwijs op de basisschool*, IOWO-leerplanpublicatie 2, Utrecht 1975.
- Joy, R.R.: *In defence of fractions*, in 'Mathematics in Schools', vo 5 nr 4, 1975, pag. 12.
- Karplus, R. (ed): *Proceedings of the fourth international conference for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley 1980.
- Kieren, Th.E.: *On the mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers*, in 'Number and Measurement', Georgia 1976, pag. 101–144.
- Kirsch, A.: *An analysis of commercial arithmetic*, in 'Educational Studies in Mathematics', 1, 1969, pag. 300–311.
- Kirsch, A.: *Gehört die Multiplikation vor die Addition?*, in 'Der Mathematikunterricht', jrg 21 Heft 1, 1975, pag. 7–19.
- Klerk, L.F.W. de: *Inleiding in de onderwijspsychologie*, Deventer 1979.
- Lakatos, J.: *Proofs and Refutations. The logic of mathematical discovery*, Cambridge/London/ New York/Melbourne 1976.
- Lange, J. de: *Contextuele problemen*, in 'Euclides', jrg 55 nr 22, 1979, pag. 50–60.
- Leen, A.: *De ontwikkeling van het rekenonderwijs op de lagere school in de 19e en het begin van de 20ste eeuw*, Groningen 1961.
- Leeuw, L. de: *Computergestuurd denken*, in 'Pedagogische Studiën', 52, 1975, pag. 377–393.
- Lesh, R.; Landau, M. en Hamilton, E.: *Rational Number Ideas and the role of Representational Systems*, in Karplus (ed) 1980.
- Lloyd, D.G.H.B.: *The case against fractions*, in 'Mathematics in Schools', vol 5 nr 2, 1976, pag. 27.
- Mackernan, J.: *The merits of verbalism*, in 'Mathematics in School', 1982, pag. 27–30.
- Mick, H.W.: *Natural Developmental Sequencies for Learning and Teaching Fractions*, in Karplus, R. (ed), Berkeley 1980, pag. 32–39.
- Mishler, E.G.: *Meaning in context: Is there any other kind?*, in 'Harvard Educational Review', vol 49 nr 1, 1979.
- Meijer, H. en Streefland, L.: *Elementair Wiskundig Rekenen*, in 'Rapportboekje 3', IOWO-uitgave. Utrecht 1979.
- NACOME (National Advisory Committee on Mathematical Education): *Overview and Analysis of School Mathematics Grades K-12*, Washington 1975.
- Nauta, L.W.: *Context of discovery en context of justification, notities in de marge van een onderscheid*, in 'Kennis en Methode', 1977, pag. 5–20.
- Noelting, G.: *The Development of Proportional Reasoning in the Child and Adolescent through Combination of Logic and Arithmetic*, in 'Osnabrücker Schriften zur Mathematik' – Cohors-Fresenborg, E. en Wachsmuth, I. (eds) – Osnabrück 1978, pag. 242–278.
- Noelting, G.: *The development of proportional reasoning and the ratioconcept. Part II – Problem Structure at Successive Stages: Problem Solving. Strategies and the Mechanism of Adaptive Restructuring*, in 'Educational Studies in Mathematics', 1980, 11, pag. 331–363.
- Noelting, G. en Gagné, L.: *The development of proportional Reasoning in Four different contexts*, in Karplus (ed), 1980, pag. 126–136.
- Nijhof, W.J. en Reints, A.: *Sequenteringsdimensies in het kader van curriculumontwikkeling*, in 'Schaalvergroting als opgave' – Nijhof, W.J. en Sixma, J. (eds) – Utrecht 1980, pag. 61–95.
- Padberg, F.: *Didaktik der Bruchrechnung*, Freiburg, Basel, Wien 1978.
- Parreren, C.F. van: *Algoritmen en heuristieken in het onderwijs*, in 'Pedagogische Studiën', 52, 1975, pag. 394–405.
- Parreren, C.F. van: *Niveaus in de ontwikkeling van het abstraheren*, interne publicatie RU Utrecht, 1978.
- Parreren, C.F. van en Carpay, J.A.M.: *Sovjetpsychologen aan het woord*, Groningen 1972.
- Piaget, J.; Inhelder, B. en Szeminska, A.: *The child's conception of geometry*, London 1966.
- Pickert, G.: *Die Bruchrechnung als operieren mit Abbildungen*, in 'Mathematische-physikalische Semesterberichte', Band XV, 1968, pag. 32–47.
- Prichbach, C.L.: *Computational Error of seventh and eight grade students*, in Equipe de Recherche Pédagogique (ed), 1981, pag. 210–216.

- Postema, J.; Kuipers, K. en Haverkort, J.J.: *Taalka*, uitg. Dijkstra Zeist.
- Scandura, J.: *Mathematics Concrete Behavioral Foundations*, New York 1971.
- Schwartz, H.: *Zur Problematik der Einführung von Addition und Multiplikation in Q durch Operatorverkettungen*, in 'Der Mathematikunterricht', jrg 242 Heft 4, 1978, pag. 75–89.
- Seijffert, S.: *Bruchrechnung und natürliche Sprache*, in 'Der Mathematikunterricht', jrg 21 Heft 1, 1975, pag. 35–47.
- Steiner, H.G.: *Magnitudes and rational numbers*, in 'Educational Studies in Mathematics', 2, 1969, pag. 371–392.
- Streefland, L.: *Breuken beoefenen*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 3 nr 4/5, 1974, pag. 391 e.v.
- Streefland, L.: *Zon Zien*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 4 nr 2, 1975, pag. 168–185.
- Streefland, L.: *Breuk in ontwikkeling. Een oriëntatie in psychologie*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1976.
- Streefland, L.: *Oefenstof offering. Oefenspelen*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 8 nr 4, 1979, pag. 59–71.
- Streefland, L.: *Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction*, in 'Educational Studies in Mathematics', 9, 1978, pag. 51–73.
- Streefland, L.: *Ralph de Zeerover*, IOWO-leerplanpublikatie 9 (handleiding), Utrecht 1978, pag. 57–65.
- Streefland, L.: *Davydov, Piaget en de breuken*, in 'Pedagogische Studiën', jrg 56 nr 7/8, 1979, pag. 289–307.
- Streefland, L.: *Makrostructurele verkenningen voor het wiskundeonderwijs*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1980.
- Streefland, L.: *Breuken 1. Verdelen en gelijkwaardigheid*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 9 nr 4/5, 1980, pag. 96–103.
- Streefland, L.: *Verhoudingen zoals kinderen (6-9) ze zien*, interne IOWO-uitgave, Utrecht 1980.
- Streefland, L.: *Cognitieve ontwikkeling en wiskundeonderwijs*, in 'Pedagogische Studiën', jrg nr 7/8, 1980, pag. 344–358.
- Streefland, L.: *Breuken en klokken*, in 'Wiskrant', jrg 5 nr 22, 1980, pag. 13–15.
- Streefland, L.: *Breuken (2). De wekker zetten*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 9 nr 6, 1980, pag. 132–140.
- Streefland, L.: *The role of rough estimation in learning ratio and proportion – an exploratory research*, in Vermandel, A. (ed): 'Proceedings of the sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education', Antwerpen 1982, pag. 193–200.
- Streefland, L.: *Subtracting fractions with different denominators*, in 'Educational Studies in Mathematics', 13, 1982, pag. 233–255.
- Streefland, L.: *Wijzer met voedingswaarden*, in 'Nieuwe Wiskrant', jrg 2 nr 1, 1982, pag. 19–22.
- Streefland, L.: *Rechthoeken en breuken*, in 'Nieuwe Wiskrant', jrg 2 nr 2, 1982, pag. 60–64.
- Streefland, L.: *Het aftrekken van ongelijknamige breuken met een slakkengang*, in 'Nieuwe Wiskrant', jrg 2 nr 3, 1983, pag. 3–9.
- Suydam, M.N.: *Review of Research related to the Concepts of Fractions and of Ratio*, in Osna-brücker Schriften zur Mathematik – Cohors-Fresenborg, E. en Wachsmuth, I. (eds) – Osnabrück 1978, pag. 296–333.
- Suydam, M.N. en Reys, R.E. (eds): *Developing computational skills*, Reston Virginia 1978.
- Sweers, W. (ed): *Leerplanontwikkeling onderweg 2a*, IOWO-uitgave, Utrecht 1980.
- Terwel, J.: *Observeren in het onderwijs. Theorie, methoden en kritiek*, in 'INFO', april 1980.
- Thom, R.: *Modern mathematics, does it exist?*, in 'Developments in Mathematics Education' – Howson, A.G. (ed) – Cambridge 1973, pag. 194–209.
- Treffers, A.: *Tweede oriëntatiepunt*, interne IOWO-publikatie, Utrecht 1971.
- Treffers, A.: *Wiskobas Doelgericht*, Utrecht 1978.
- Treffers, A. (ed): *Vermenigvuldigen en delen I Overzicht en achtergronden*, IOWO-leerplan-publikatie 10, Utrecht 1979.
- Treffers, A.: *Cito item dito. Over leerdoelgerichte toetsen en toetsgerichte leerdoelen*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 9 nr 6, 1980, pag. 81–99.
- Verhoef, G. en Vroonhof, M.: *Een scriptie in twee delen. Deel I. 'Een onderzoek naar de beheersing van gecompliceerde breukbewerkingen van leerlingen van de zesde klas van de lagere school en van diezelfde leerlingen aan het einde van de brugklas'*, Utrecht 1982, pag. 1–26.
- Vermandel, A. (ed): *Proceedings of the sixth International Conference for the Psychology of*

- Mathematics Education*, Antwerpen 1982.
- Vossen, H.M.M. (e.a.): *Niveau Cursus Rekenen*, uitg. Malmberg, Den Bosch.
- Wiskobas-Bulletin: *Wegen, aksentueren, breuken*, jrg 1 nr 4, 1972, pag. 284 e.v.; jrg 1 nr 5, 1972, pag. 402 e.v.
- Wiskobas-team: *Heroriëntering onderwijzers 1968-1978*, IOWO-uitgave, Utrecht 1978.
- Wiskobas-team: *Overzicht rekenmethoden anno 1980*, in 'Rapportboekje 3', IOWO-uitgave, Utrecht 1980.
- Wolters, M.A.D.: *Van rekenen naar algebra*, Utrecht 1978.
- Wijdeveld, E.: *Matematiseren, een didaktisch model*, in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 9 nr 6, 1980, pag. 28-49.