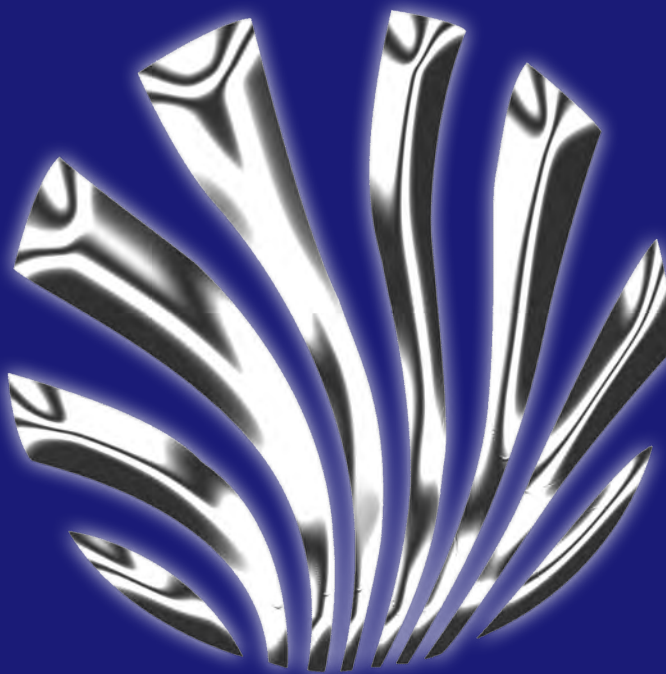


Waardevol reken-wiskundeonderwijs kenmerken van kwaliteit

M. van Zanten (red.)



Waardevol reken-wiskundeonderwijs
- kenmerken van kwaliteit -

Waardevol reken-wiskundeonderwijs

- kenmerken van kwaliteit -

M. van Zanten (red.)

Verslag van de 28^{ste} Panama-conferentie gehouden op
20, 21 & 22 januari 2010 te Noordwijkerhout

Panama
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

eindredactie: M. van Zanten
redactie : B. Heijman & N. Kuijpers
vormgeving en lay-out: B. Heijman
Illustratie omslag: R. Guiljam
druk: wilco amersfoort

ISBN 97890-70786-10-6

©2010 Flsme, Universiteit Utrecht

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, microfilm of op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de houder van het copyright.

Inhoud

Woord vooraf	7
Pendelen in je hoofd <i>V. Klabbers</i>	11
KNAW-advies Rekenonderwijs op de basisschool <i>KNAW-commissie rekenonderwijs</i>	27
Natural Differentiation in Mathematics - the NaDiMa project <i>P. Scherer & G. Krauthausen</i>	33
1 + 1 is genoeg <i>A. Goddijn</i>	59
Van videoclip naar TalentenKaart <i>J. Corvers, J. de Lange & P. Leseman</i>	75
Beeld van het rekenonderwijs <i>M. van der Burg & M. Espeldoorn-Finke</i>	85
Het rekenen de baas <i>N. Boswinkel</i>	101
Beroepscompetenties en wiskundige vaardigheid <i>H. van der Kooij</i>	115
Het referentiekader rekenen in het MBO - vele uitdagingen! <i>K. Corbet</i>	129
Dagelijks instructie <i>S. Huitema</i>	133
Hoe de zakrekenmachine te integreren in het basisonderwijs? <i>W. Vermeulen</i>	139
Getallen zijn je beste vrienden <i>V. van der Noort</i>	149
De positie van het cijferend rekenen binnen het realistisch reken-wiskundeonderwijs <i>A. Haverhals</i>	159
Met de leraar een stap verder <i>E. Westra-Mattijssen</i>	173

Specifieke wiskundige kennis, inzicht en vaardigheden van leerkrachten <i>F. Garssen</i>	185
Moeilijke onderwerpen in het wiskundecurriculum <i>H. Van Steenbrugge, M. Valcke & A. Desoete</i>	197
Handig rekenen en gedachtenvol oefenen <i>HaVER-team</i>	211
zOEFi een jaar later ... <i>zOEFi-team</i>	221
Kenmerken van waardevol reken-wiskundeonderwijs <i>M. Verschoor</i>	235
Waardevol reken-wiskundeonderwijs - kenmerken van kwaliteit <i>S. Lit & R. Keijzer</i>	243

Woord vooraf

Op 20, 21 & 22 januari 2010 vond in Noordwijkerhout de jaarlijkse Panama-conferentie plaats, onder de titel 'Waardevol reken-wiskundeonderwijs – kenmerken van kwaliteit'. Deze 28^e Panama-conferentie richtte zich vanuit twee perspectieven op de waarde en de kwaliteit van reken-wiskundeonderwijs. In de eerste plaats werden zaken die bijdragen aan de kwaliteit van reken-wiskundeonderwijs, en aldus dit onderwijs waardevol maken, onder de loep genomen. De tweede invalshoek betrof de waarde die rekenen-wiskunde heeft, of kan hebben, als discipline. Daarbij staat in het primair onderwijs de voorbereidende waarde voorop. In het basisonderwijs wordt letterlijk de basis gelegd voor het kunnen functioneren in het vervolgonderwijs en de maatschappij. Rekenwiskundige inzichten en vaardigheden zijn daarbij onmisbaar. Kinderen die voldoende toegerust worden, hebben hier hun hele leven plezier van. Helaas is het omgekeerde ook waar; kinderen bij wie de basis niet voldoende is gelegd ondervinden hier blijvend hinder van. Kinderen hebben dus recht op kwalitatief hoogstaand reken-wiskundeonderwijs. De belangrijkste vraag van de 28^e Panama-conferentie was daarom: wanneer kan van reken-wiskundeonderwijs worden gesteld dat het 'goed' is en daarmee waardevol voor kinderen?

De conferentieorganisatie stelde zich op het standpunt dat elk antwoord op deze vraag wordt gekleurd door de rol, functie en waarde die men toekent aan rekenen-wiskunde, maar ook door de visie die men heeft op de functie van het (primair) onderwijs in het algemeen. De visie op leren speelt een belangrijke rol bij de keuzes die worden gemaakt bij de uiteindelijke vormgeving van het reken-wiskundeonderwijs. Nadruk op voorbereiding op het voortgezet onderwijs leidt tot meer aandacht voor rekendoelen die daar sterk gewaardeerd worden, zoals het beheersen van formele rekenprocedures. Als men grote waarde hecht aan sociale redzaamheid, zal dat leiden tot meer aandacht voor het kunnen rekenen in toepassings-situaties.

Naast aandacht voor de voorbereidende en maatschappelijke waarde van rekenen-wiskunde, werd op de conferentie ook nadrukkelijk stil gestaan bij de intrinsieke waarde van rekenen-wiskunde.

Vanuit bovenstaande gedachtegangen was op de conferentie, en is in deze conferentiebundel, aandacht voor uiteenlopende zaken; van de rol van de leerkracht tot de schoonheid van de discipline (rekenen-)wiskunde.

De leerkracht is waarschijnlijk de meest bepalende factor in het onderwijs. De man of vrouw voor de klas is van doorslaggevende invloed op de kwaliteit van de reken-wiskundelessen. De KNAW-rekencommissie vraagt in

haar advies 'Rekenonderwijs op de basisschool' dan ook nadrukkelijk aandacht voor de leerkracht en de opleiding van de leerkracht. De samenvatting en conclusies van het advies van de KNAW-rekencommissie zijn opgenomen in deze bundel. De commissie stelt, terecht, dat de sleutel tot verbetering van de rekenopbrengsten ligt bij de leerkracht. De leerkracht staat dan ook in verschillende artikelen in deze bundel centraal. Zo belicht V. Klabbers de vele afwegingen die de leerkracht maakt bij het realiseren van reken-wiskundeonderwijs. Hij verhaalt hoe leerkrachten een daadwerkelijk krachtige leeromgeving voor rekenen-wiskunde kunnen realiseren en geeft concreet aan hoe daar in de opleiding al aandacht aan kan worden geschonken. Duidelijk is dat een en ander van de leerkracht veel specifieke kennis en inzicht op het gebied van rekenen-wiskunde vraagt. Welke specifieke kennis, inzichten en vaardigheden de leerkracht nodig heeft is onderwerp van het onderzoek van F. Garssen. Zij richt zich op *specialized content knowledge* die leerkrachten nodig hebben om aan te kunnen sluiten op leerprocessen bij rekenen-wiskunde. Garssen laat zien dat het hierbij gaat om kennis die veel verder reikt dan de reguliere reken-wiskundekennis die mensen in bijvoorbeeld het dagelijks leven nodig hebben. Naast kennis, inzicht en vaardigheden is ook de attitude van leerkrachten van belang. In dit verband zijn de bijdragen van A. Haverhals en van M. van der Burg en M. Espeldoorn over onderzoek naar opvattingen van leerkrachten interessant. Van der Burg en Espeldoorn bevroegen tevens leerlingen over hun reken-wiskundeonderwijs en brengen aldus zowel leerkracht- als leerlingperspectieven in beeld.

Het perspectief van de leerling staat eveneens centraal in de bijdrage van P. Scherer en G. Krauthausen. Zij werken in het NaDiMA-project aan een natuurlijke wijze van differentiëren, die recht doet aan kinderen met uiteenlopende capaciteiten op het gebied van rekenen-wiskunde. Er zijn meer bijdragen in deze bundel die zich nadrukkelijk op de leerling richten. J. Corvers, J. de Lange en P. Leseman gaan in op het onderzoek van het project Talentenkracht. Hun onderzoek beoogt onder meer in kaart te brengen hoe de ontwikkeling van talenten van kinderen kan worden bevorderd. N. Boswinkel beschrijft opbrengsten van interviews met leerlingen over hun aanpakgedrag. Uit haar gesprekken met leerlingen in groep 3, 4 en 5 vallen belangrijke aanwijzingen voor de leerkracht te destilleren ten aanzien van het omgaan met verschillende oplossingsstrategieën.

Ook andere bijdragen bevatten aanwijzingen die kunnen worden ingezet bij de ondersteuning en opleiding van leerkrachten. S. Huitema beschrijft een lesmodel voor dagelijkse instructie aan alle leerlingen en waarschuwt voor al te veel zelfstandig werken in de reken-wiskundelees. Het Haver-team en het ZOEFI-team geven aanwijzingen voor het optimaliseren van de

leeropbrengsten bij oefenen. W. Vermeulen gaat in op mogelijkheden om de rekenmachine te integreren in het onderwijs. De reken-wiskundemethode is onderwerp van de bijdrage van H. Van Steenbrugge, M. Valcke en A. Desoete. E. Westra ten slotte, laat zien hoe binnen het Montessorionderwijs kan worden gewerkt met werkkaarten voor leerlingen en bijbehorende zogenoemde didactische bijsluiters voor leerkrachten.

Enkele artikelen in deze bundel staan expliciet in het teken van de waarde die (rekenen-)wiskunde als discipline heeft of kan hebben voor mensen. H. van der Kooij gaat in op wiskunde die nodig is voor specifieke beroepen en hoe juist wiskunde bovendien kan bijdragen aan algemene competenties voor die beroepen. De bijdrage van M. Verschoor handelt over schoolse, gevorderde en functionele gecijferdheid en richt zich daarmee op rekenen-wiskunde voor beroep en het maatschappelijk functioneren. Verder gaat K. Corbet in op de invoering van het referentiekader rekenen in het MBO. Last but not least vragen A. Goddijn en V. van der Noort aandacht voor de schoonheid van (rekenen-)wiskunde zelf, oftewel voor de intrinsieke waarde van rekenen-wiskunde. Goddijn brengt allerlei wiskundige en meetkundige hoeken van het rekenen prachtig in beeld. Van der Noort richt zich specifiek op het mooie, leuke en onderhoudende van getallen en hun eigenschappen.

Zoals elk jaar hebben velen weer belangeloos bijgedragen aan de Panamaconferentie, alsmede aan de totstandkoming van deze bundel. De onderlinge uitwisseling die daarmee ontstaat is, om bij de conferentiethematiek te blijven, van grote waarde voor het reken-wiskundeonderwijs in Nederland. Bij dezen een woord van dank aan allen die bijdroegen aan de conferentie en de conferentiebundel.

Marc van Zanten
Panama



V. Klabbers
Hs De Kempel, Helmond

1 inleiding

Kinderen verdienen het beste. Op de basisschool is dit een leeromgeving die zo krachtig is dat kinderen zich optimaal kunnen ontwikkelen. Een goede leraar is zich hiervan bewust. Hij weet welke interventies de leeromgeving van kinderen krachtiger maken. Een leraar van hoge kwaliteit is namelijk bewust bekwaam. Hij werkt niet alleen vanuit intuïtie maar kiest voor een interventie na het vergelijken en combineren van kennis. Dit proces heet 'pendelen in je hoofd' en is gericht op effectief handelen.

Pendelen kun je leren. Opleiders en onderwijsadviseurs kunnen het aanleren. Hiervoor is een aanvulling nodig op de gangbare didactiek van het opleiden en begeleiden. In deze aanvullende didactiek is het methodisch gebruik van zowel stilstaand als bewegend beeldmateriaal onmisbaar.

Achtereenvolgens richt ik in deze tekst de aandacht op een krachtige leeromgeving, het pendelen in je hoofd en op kenmerken van een aanvulling op de gangbare opleidingsdidactiek.

2 een krachtige leeromgeving

In een Franse supermarkt kun je heel veel leren. Het gebeurt alleen niet. Mensen komen met een lege kar en vertrekken met een volle. Zelfs bij de kassa doen mensen iets dat ze de dagen daarvoor ook al deden. Een Franse supermarkt is géén krachtige leeromgeving. Misschien is het pro-

bleem in zo'n supermarkt wel dat je in zo'n ruimte té veel kunt leren (fig1).



figuur 1

In een badkamer is dit anders. Je vindt er niet véél maar wat je vindt, is er in overvloed. Ze heten milliliters en ze hebben zich perfect verstopt in bijvoorbeeld de deodorantroller en de tube tandpasta. En hoe ze het doen, weet ik niet. Maar die milliliters spelen het klaar om zich te groeperen in mooie ronde aantallen, zoals vijftig en honderd. De kracht van een badkamer als context zit in de beperking. Je kunt binnen deze context werken aan het begrip voor de milliliter als maat en relaties ontdekken met een kubieke decimeter, een kubieke centimeter en natuurlijk een liter. Wat nu nog ontbreekt is een leraar die de kunst verstaat om van de badkamer onderwijs te maken. Dat doet hij door in te zoomen op een stukje van de badkamer en dit stukje mee te nemen naar het kringgesprek van morgen. Je ziet de kring zo voor je. In het midden staat een laag tafeltje en daarop ligt een tandenborstel met een beetje tandpasta er op (fig.2a). Daarnaast ligt een tube met een inhoud van 100 ml. De leraar wijst de kinderen hierop. Zien jullie dat, vraagt hij? Hoeveel keer kun je tanden poetsen met zo'n tube? De leraar laat kinderen reacties geven en beoordeelt niet. De tandpasta op de borstel trekt vanzelf de aandacht. Ik zal het proberen te tekenen, zegt de leraar en hij schetst een balkje van $3 \times 1 \times \frac{1}{3}$ cm. Dit komt overeen met tandpasta voor één poetsbeurt. Een milliliter heeft dezelfde inhoud als 1 cm^3 . Het gesprek gaat verder en even later toont de leraar een grote pot gel. Op de productinformatie staat dat deze pot een inhoud heeft van 1000 ml (fig.2b). Zo'n pot hebben wij ook, zegt een van de kinderen.

De relatie met een liter als maat hangt in de lucht.

Dit onderwijs gaat door. Een krachtige leeromgeving is geboren en gaat verder. Het huiswerk voor vandaag is immers het meenemen van een product met daarin milliliters.



figuur 2a en 2b

Deze opdracht is beter dan te vragen naar iets uit de badkamer. Zo zie je maar. Een krachtige leeromgeving kan fysiek heel klein zijn, maar sterk gericht zijn op het behalen van tussendoelen.



3 zeven pijlers

In de definitie van een krachtige leeromgeving voor reken-wiskundeonderwijs (KLO) valt het woord 'vakkundig' op. Het verwijst naar het vakmanschap van de leraar dat nodig is om een krachtige leeromgeving te ontwerpen en hierin de juiste begeleiding te geven. Om een leeromgeving krachtig te kunnen maken is vakkundigheid vereist op het gebied van de hieronder

genoemde zeven pijlers voor het ontwerpen en begeleiden van een krachtige leeromgeving (Klabbers, 2007; 2009a; 2009b). Deze pijlers zijn uitspraken die kenmerken benoemen van een leeromgeving. Ze kunnen worden gebruikt in het proces van ontwerpen én om na te gaan of een bestaande leeromgeving krachtiger gemaakt kan worden.

zeven pijlers voor een krachtige leeromgeving

- Een krachtige leeromgeving is gebaseerd op tussendoelen en leerlijnen.
- Een krachtige leeromgeving is aantrekkelijk en uitdagend.
- Een krachtige leeromgeving houdt rekening met basisbehoeften van kinderen.
- In een krachtige leeromgeving leren kinderen mathematiseren.
- In een krachtige leeromgeving woont een leraar.
- Een krachtige leeromgeving is gebaseerd op sociaal-constructivisme.
- Een krachtige leeromgeving is geschakeld

De pijlers zijn niet genummerd om de indruk te vermijden dat ze een vaste volgorde hebben. Dit neemt niet weg dat de eerstgenoemde pijler bij ieder onderwijsontwerp een onmisbare onderlegger is. Een krachtige leeromgeving is immers altijd gericht op het behalen van leerdoelen. Achteraf zijn het ook deze pijlers die centraal staan in de evaluatie van het gegeven onderwijs.

De pijlers die aangeven dat onderwijs aantrekkelijk en uitdagend moet zijn en tevens rekening moet houden met basisbehoeften van kinderen zijn niet alléén pedagogisch van aard. Uitdagend onderwijs is onderwijs dat kinderen stimuleert om een volgende zone van ontwikkeling te betreden. Ook hier is kennis van tussendoelen en leerlijnen en daarmee van vakdidactiek onmisbaar.

Kinderen die zich competent voelen, een goede relatie hebben met elkaar en zich tevens eigenaar voelen van hun eigen leerproces zijn in staat om uitdagingen aan te gaan en effectief te leren.

In een krachtige leeromgeving voor reken-wiskundeonderwijs leren kinderen mathematiseren. De kinderen leren dat je de werkelijkheid kunt omzetten in rekentaal en ook hoe je dit kunt doen. Ze leren ook waarom het de moeite waard is om te mathematiseren.

De aanwezigheid van een leraar is het belangrijkste kenmerk van de KLO. De interventies van de leraar bepalen een groot deel van de kwaliteit van het onderwijs. De leraar heeft een sturende en coördinerende kracht. Zijn interventies hebben invloed op de kwaliteit van de andere pijlers. Een duidelijk voorbeeld is de pijler over het sociaal-constructivisme. Deze pijler doet een uitspraak over hoe kinderen komen tot effectief leren. De leraar kiest werkvormen die deze manier van leren mogelijk maakt. De leraar

stelt vragen en geeft opdrachten. Hij activeert en verbindt het leren van kinderen met elkaar.

De laatste pijler verwijst naar de voortgang van een leeromgeving in de tijd. Een krachtige leeromgeving kan zich niet beperken tot een bijzonder motiverende rekenmiddag of zelfs niet tot een knallende projectweek. Een echt krachtige leeromgeving gaat altijd door. Dit geldt voor tal van zaken zoals de mate waarin kinderen eigenaar zijn van hun eigen leerproces, voor het type werkvormen, voor de aandacht voor het ontwikkelen van inzicht en zelfs voor de toon waarop leraar en leerlingen met elkaar spreken. Eigenlijk heeft de pijler die aangeeft dat onderwijs geschakeld moet zijn betrekking op al de andere zes pijlers.

Voor een uitvoerige beschrijving van deze pijlers die voorzien zijn van praktijkvoorbeelden verwijs ik graag naar de referenties.

4 pendelen in je hoofd

Pendelen in je hoofd is het vergelijken en combineren van kennis, het zien van handelingsalternatieven en het maken van een keuze voor de meest effectieve interventie. Het pendelen, zoals hier bedoeld, is daarom een kwaliteit van de leraar. Het doel van pendelen is om te komen tot effectief handelen. Dit handelen past bij de leraar, bij de kinderen, bij de na te streven doelen en bij de context waarin deze doelen behaald moeten worden. Het pendelen in je hoofd beïnvloedt het handelen en het handelen beïnvloedt de leeromgeving.

Neem bijvoorbeeld leerkracht Ans in groep zes van basisschool 'De Regenboog'. Ze wil een start maken met breuken en bedenkt enkele vragen: 'Wat is een breuk?' 'Wat is een vierde deel?' 'Gaat het hierbij om veel of slechts een beetje?' De rekenmethode die zij gebruikt, maakt een start met breuken door kinderen plaatjes te laten zien van allerlei stambreuken. In het werkboek mogen kinderen stambreuken tekenen in meetkundige figuren. Leerkracht Ans twijfelt. Is deze start actief genoeg? Zijn er kinderen in haar groep die onzeker kunnen worden van deze eerste breukenles uit de methode? Kunnen we beter beginnen met schatten? En is werken met concrete materialen laagdrempelig?

Achter in de klas liggen vouwblaadjes van verschillende formaten, bij het bord hangt een klok waarop je in de kleur blauw een kwartier kunt zien. Er zijn ook nog dropveters over van de verjaardag van leerkracht Ans. Ze denkt aan het competentiegevoel van de rekenzwakke kinderen. Ze denkt aan stambreuken die je kunt vouwen met gekleurd papier. Ze denkt ook

aan de leerdoelen en realiseert zich dat breukenonderwijs drie jaar mag duren. Ze combineert kennis op verschillende niveaus en kiest daarna een startactiviteit. Ze ziet verschillende mogelijkheden als startschot voor het komende breukenonderwijs en komt tot een keuze. Dit is pendelen tussen materialen en doelen, tussen doelen en basisbehoeften van kinderen, tussen doelen op verschillende niveaus, tussen leerlijnen en activiteiten, enzovoort.



2. Pendelen in je hoofd

Pendelen is een mentale activiteit van de leraar, waarbij hij kennis vergelijkt en combineert om te bepalen welke interventies nodig zijn voor het krachtiger maken van de leeromgeving. Pendelen is gericht op het nemen van een beslissing

5 pendelbewegingen hebben namen

Iedere pendelbeweging is uniek, omdat ieder onderwijsmoment uniek is. Aan de andere kant komen verschillende pendelbewegingen in hun kern met elkaar overeen. Dit maakt dat je pendelbewegingen kunt indelen in categorieën en kunt voorzien van een naam, van een eigen label.

Het doel van dit labelen, is het hanteerbaar maken van die eindeloos grote hoeveelheid pendelbewegingen die een leraar maakt of kan maken. Dit labelen maakt het mogelijk om het pendelen gericht te trainen met leraren of aanstaande leraren. Bewustzijn ontwikkelen van de eigen pendelbewegingen versterkt de kwaliteit van de leraar. De kans neemt hiermee immers toe dat je kiest voor de juiste interventie.

De lijst met pendelbewegingen kan niet uitputtend zijn en hoeft dit ook niet te zijn. Gerichte training van enkele pendelbewegingen verhoogt het zelfbewustzijn. De labels van de getrainde pendelbewegingen zullen vanzelf worden aangepast en aangevuld, passend bij jouw eigen hoofd. De oriëntatie op het handelen, verschuift naar aandacht voor wat voorafgaat aan handelen. Een training in het pendelen is niet gericht op het aanmaken van een afvinklijst, maar op attitudeontwikkeling.

Binnen de context van dit artikel volstaat het om de eerste drie pendelbewegingen nader toe te lichten. Verder is het belangrijk om te noemen dat onderstaand lijstje van pendelbewegingen niet volledig is en in de nabije

toekomst zal groeien.

Rekenogen ontwikkelen

VIP-arrangement aanbieden

Beeld bewerken

Denken aan doen

Verstand van gevoel

Kruisbestuiving

Werkvormen vervoege

Voorrang verlenen

Niveaus in de lift

Achter de coulissen

Vooruit evalueren

Competenties combineren

Kruislings communiceren

rekenogen ontwikkelen

Rekenogen kijken scherp en zien kansen. Met rekenogen pendel je in je hoofd van dingen om je heen naar mogelijkheden om deze dingen te benutten voor onderwijsdoelen. Rekenogen zien bij voorkeur dingen die kinderen bekend voorkomen. Dikwijls gaat het om iets in een context die duidelijke associaties oproept met een plaats en met handelingen die daar bij horen. De eerdergenoemde badkamer is daar een mooi voorbeeld van. De kinderen weten dat dit de ruimte is waar je, kijkend in een spiegel, met gel je haren in bedwang houdt en waar je met een borstel en tandpasta voor een fris en schoon gebit zorgt. De leraar weet dit ook en heeft bovendien oog voor al die milliliters in de gelpot en in de tube tandpasta. De leraar kent bovendien de tussendoelen van het subdomein inhoud en weet wat hiervan relevant is voor de kinderen in zijn groep.

Wie rekenogen heeft, pendelt van concreet materiaal naar tussendoelen en terug.

voorrang verlenen

Dit is nodig wanneer hetzelfde onderwijsmoment vraagt om interventies die elkaar uitsluiten. Voorrang verlenen, is het bewust aanbrengen van een volgorde in je interventies. Dit lukt door een volgorde te kiezen in het werken aan onderliggende doelen. Een interventie die voorrang geeft, krijgt zelf op een later tijdstip de aandacht die het verdient.

Neem als voorbeeld een groepje van vijf kleuters die samen spelen in de bouwhoek. Ze maken een toren die zo hoog is dat de kleuters er nog maar net overheen kunnen kijken. De regel in de groep is dat er slechts vier kinderen gelijktijdig in de bouwhoek mogen spelen. Dat was ook het geval, maar sinds tien minuten is Thijs als vijfde kleuter op eigen initiatief aangesloten. Thijs is zwak op rekegebied en je ziet op afstand dat Thijs met zijn rug tegen de toren gaat staan. De andere kinderen doen hem na. Wie is van ons de langste?

Wat doe je nu als leerkracht? Thijs is aan het meten zonder dit zelf te beseffen en hij lijkt er veel plezier in te hebben. Maar ja, vijf kleuters is eigenlijk één te veel. Een vakman geeft nu even voorrang aan de leertrek

van Thijs. Hij ontdekt het meten met een natuurlijke maat en ook zijn klasgenoten profiteren daar van. Het consequent omgaan met regels in de klas is belangrijk, maar geeft nu even voorrang aan een ander doel, een rekendoel. Het zou iets anders zijn als Thijs dagelijks en willens en wetens klassenregels aan zijn laars lapt. Morgen in de kring is het niet te laat om voorrang te geven aan de klassenregels en om dan opnieuw te bespreken hoeveel kinderen samen in een hoek mogen spelen. Een kringgesprek zonder de aandacht op Thijs te vestigen. Het is belangrijk dat hij zich competent blijft voelen. Voorrang verlenen is pendelen tussen doelen die onderwijsinhoudelijk zijn en doelen die onderwijsondersteunend zijn om bewust te kunnen kiezen voor de ideale volgorde van interventies.

VIP-arrangement aanbieden

Bied kinderen die een leerachterstand hebben ten opzichte van de methodelijn of het gemiddelde van de groep een leeromgeving aan die chique is. Geef ze taken waarmee ze binnen de groep op een voetstuk komen te staan in relatie tot de inhoud waarin ze juist een achterstand hebben. Met *pre-teaching* rust je deze kinderen toe met de baggage waarmee ze kunnen schitteren.

Een voorbeeld hiervan is de opdracht aan Ans, Agnes en Annabel uit groep 4 om iedere maandag te beginnen met het opmeten van de bloemstengel en de bladeren van de amaryllusbol van de meester. Een exclusieve opdracht die veel klasgenootjes ook willen doen (fig.3).



figuur 3

Aanleiding tot dit VIP-arrangement zijn de lage en achterblijvende resultaten op het vlak van rekenen tot 100. De meisjes zijn gestart met meetlatjes van dertig centimeter. Lekker vertrouwd en voorlopig is de bordliniaal van

een meter toch niet echt nodig. Er ontstaat wat je kunt noemen een natuurlijk groeiproces van een getallenlijn tot dertig naar een getallenlijn tot honderd. Iedere maandag worden de meetgegevens in een staafdiagram met maateenheden van 1 centimeter bij 1 centimeter weergegeven. En een wekelijks terugkerend mondeling verslag aan de groep hoort als vanzelfsprekend bij de klus.

Het inzicht van de meisjes groeit mee met de stengels van de bloembol en de meisjes voelen zich competent en autonoom. Zij hebben het vertrouwen gekregen van de meester en dat voelt zichtbaar goed.

Een VIP-arrangement aanbieden, is expliciet rekening houden met basisbehoeften van kinderen én gelijktijdig werken aan vakinhoudelijke tussen-doelen.

6 oefenen

Om als vakman te leren pendelen, is oefenen nodig met zowel materialen, foto's als met videofragmenten. In dit artikel is ruimte voor een voorbeeld van oefenen met hulp van fotografie. Echte materialen en bewegend beeld passen immers niet in platte tekst.

Als bijlage bij dit artikel zijn drie werkbladen voor (aanstaande) leraren toegevoegd (pag. 23-26). Deze werkbladen zijn gericht op het ontwikkelen van rekenogen. Het eerste werkblad stimuleert leraren om goed te kijken naar eigenschappen van materiaal. Het tweede werkblad vraagt naar verbindingen tussen materiaal en een leerdoel. Het derde werkblad is een oefening in het formuleren van denkvragen voor kinderen.

7 aanvullende didactiek

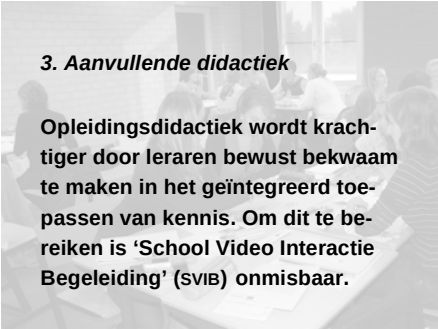
Het is geen toeval dat de kwaliteit van het onderwijs en de kwaliteit van de leraar op alle mogelijke onderwijsagenda's staan en voorlopig blijven staan. Onderwijs geven is immers een complexe bezigheid. Het vereist veel kennis die geïntegreerd toegepast moet worden. Juist dit maakt het beroep van leraar mooi, maar ook moeilijk.

De huidige opleiding van aanstaande leraren bestaat vooral uit aandacht voor afzonderlijke aspecten van het vakmanschap. Aanstaande leraren volgen bijvoorbeeld een module over de leerlijn meten of een training over coöperatieve werkvormen. En vrijwel los daarvan nemen zij deel aan bijeenkomsten over basisontwikkeling en basisbehoeften van kinderen of aan een programma om allerlei rekenwerk te oefenen. De aandacht voor

deze afzonderlijke delen van het vakmanschap is zonder twijfel noodzakelijk als basis. Maar alleen de optelsom der delen leidt in dit geval niet automatisch tot vakmanschap. Vandaar de behoefte aan aanvullende didactiek.

De aanvulling op bestaande didactiek heeft als voornaamste doel dat de (aanstaande) leraar bewust bekwaam is in het geïntegreerd toepassen van kennis. De woorden ‘kennis’ en ‘geïntegreerd toepassen’ verwijzen naar het in samenhang toepassen van de eerdergenoemde zeven pijlers van een krachtige leeromgeving. Een leraar die hierin bewust bekwaam is, kan benoemen wat hij hierover heeft gedacht en hoe hij uiteindelijk heeft gekozen. Deze leraar is bewust bekwaam in het pendelen in je hoofd.

De pendelbewegingen zijn voorzien van een naam waarmee gericht oefenen binnen handbereik komt. Bewust bekwaam zijn in het geïntegreerd toepassen van kennis moet leiden tot de meest effectieve interventies. Deze interventies, het handelen van de leraar staan voor het toepassen van de kennis. En dit in de overtuiging dat de leeromgeving voor kinderen hiervan krachtiger wordt.



3. Aanvullende didactiek

Opleidingsdidactiek wordt krachtiger door leraren bewust bekwaam te maken in het geïntegreerd toepassen van kennis. Om dit te bereiken is ‘School Video Interactie Begeleiding’ (SVIB) onmisbaar.

kracht van SVIB

‘School Video Interactie Begeleiding’ is een methodiek die vertrekt vanuit leervragen van de lerende. Het doel is om te komen tot duurzame gedragsverandering. Met videobeelden wordt een stukje werkelijkheid vastgelegd dat relevant is voor de gestelde leervraag. De SVIB-coach activeert de lerende om te kijken en te luisteren naar opnamen van eigen handelen. De lerende vindt antwoorden door zelf actief te zijn en de video-opnamen te benutten. Hij leert om beter te kijken en te luisteren, hij leert om handelingsalternatieven te zien en pas daarna een gewogen keuze te maken. Dit leerresultaat is een gevolg van het methodisch werken aan een specifieke leervraag gedurende een traject. De lerende kijkt en luistert uiteindelijk als een camera, ook als die niet meer in de buurt is.

groot en klein

Een voorbeeld van aanvullende didactiek is het traject dat ik de naam 'Groot en Klein' heb gegeven. Zoals de pendelbewegingen zijn voorzien van een label, zo zijn ook vormen van aanvullende didactiek voorzien van een naam. Het gaat bij deze didactiek niet om werkvormen maar om trajecten. 'Groot en Klein' is een traject dat bestaat uit vier stappen waar verspreid over ongeveer zeven bijeenkomsten aan gewerkt moet worden.

- *Groot*: leraren of aanstaande leraren kijken minimaal twee keer naar eenzelfde videofragment van een onderwijssituatie. In het beeldmateriaal is een leraar te zien tijdens zijn werk met kinderen. Het gaat om een voorbeeld van *good practice* dat als rolmodel fungeert. Het gekozen fragment is ongeveer tien minuten lang en past inhoudelijk bij de fase van ontwikkeling van de leraren.

De opdracht aan de leraren is om te reageren op de vragen: Wat zie ik? Wat hoor ik? De observaties worden individueel genoteerd en plenair besproken. Het is de kunst om in het gesprek te blijven bij het benoemen van waarneembaar gedrag.

- *Pendelen in je hoofd*: hetzelfde videofragment wordt opnieuw bekeken. De leraren noteren welke pendelbewegingen vermoedelijk vooraf zijn gegaan aan het waarneembaar gedrag van de leraar in beeld.

In de plenaire uitwisseling is het de kunst om deelnemers de relatie te laten benoemen tussen pendelbewegingen en waarneembaar gedrag.

- *Leervraag formuleren*: de deelnemers aan dit traject formuleren een leervraag. Ze doen dit aan de ene kant op basis van inspiratie die is opgedaan tijdens de eerste fase van het traject; het voorbeeld van *good practice*. Aan de andere kant sluit de leervraag aan bij de persoonlijke werk- of stagesituatie.

De leervraag heeft betrekking op het trainen van een pendelbeweging. De lerende neemt zich voor om het integreren van kennis te oefenen met hoogwaardige interventies als gevolg.

- *Klein*: de lerende werkt enkele weken aan de leervraag en probeert de voortgang vast te leggen met video-opnamen. Dit gebeurt met hulp van een statief of een bereidwillige collega. Na iedere opname, die niet langer hoeft te duren dan een kwartier, analyseert de lerende de eigen opname en kiest een fragment uit van één of twee minuten. Dit fragment wordt besproken in een groep van ongeveer vier (aanstaande) leraren die vanuit een eigen leervraag ook een fragment ter bespreking inbrengen. Een groep (aanstaande) leraren die deelneemt aan een traject 'Groot en Klein', wordt opgedeeld in enkele intervisiegroepen. Het is de bedoeling om uiteindelijk op beeld zichtbaar te kunnen maken dat het leerdoel is bereikt.

De uitvoering van het traject 'Groot en Klein' veronderstelt voorkennis over basisonderwijs. Je herkent geen enkele pendelbeweging als je niet weet wat hiermee wordt bedoeld en zonder basiskennis over het vak valt er bovendien weinig te pendelen. Dit traject 'Groot en Klein' is daarom vooral geschikt voor aanstaande leraren in de tweede fase van hun opleiding en voor leraren basisschool met ervaring. Voor aanstaande leraren in de eerste fase van hun opleiding zijn laagdrempelige trajecten mogelijk die zich bijvoorbeeld richten op het trainen van afzonderlijke pendelbewegingen. De oefenbladen voor het ontwikkelen van rekenogen illustreren dit.

Om bewust bekwaam te worden in het integreren van alle kennis die een leraar in zijn werk inzet, is het juiste denkniveau vereist. Ook is voldoende onderwijstijd nodig om te oefenen met de deskundige begeleiding van een vakbekwaam docent of onderwijsadviseur.

Aanvullende didactiek is handelingsgericht. Bewust handelen vraagt om verdieping in de beweegredenen die vooraf gaan aan een handeling. Anders gezegd, er is expliciete aandacht nodig voor pendelen in je hoofd om te komen tot de interventies die het leren van kinderen stimuleren.

8 vooruit evalueren

In mijn hoofd pendel ik heel wat af. Dit is voor u na het lezen van deze tekst waarschijnlijk geen verrassing. Een van de pendelbewegingen in mijn top tien heet 'vooruit evalueren'. Het staat voor de verbinding tussen wat was, wat is en wat gaat komen. Vooruit evalueren is een slinger in de tijd van een openingslezing (Panama-conferentie 2010) via deze tekst naar mijn wensenlijstje voor morgen en daarna. De pendelbeweging vooruit evalueren maakt dat ik in mijn hoofd volop werk aan het vervolg op deze tekst.

De komende tijd ga ik aan de slag met het uitwerken van pendelbewegingen en het ontwerpen van nieuwe opleidingstrajecten als aanvulling op bestaande opleidingsdidactiek. Wordt vervolgd!

literatuur

- Klabbers, V.L.F.M. (2007). School Video Interactie Begeleiding in een leerwerkgemeenschap. *Jeugd in School en wereld*, 91, 14-17.
- Klabbers, V.L.F.M. (2009a). Een krachtige leeromgeving deel 1. *Praxisbulletin* 26(6), 19-23.
- Klabbers, V.L.F.M. (2009b). Een krachtige leeromgeving deel 2. *Praxisbulletin* 26(7), 10-15.

Wat zie je ?

Je wilt chocolade gebruiken in jouw rekenles.
Noteer bij ieder stuk chocolade welke eigenschappen
van belang kunnen zijn voor het maken van een
goede keuze. Noteer alleen wat je ziet.



Rekenogen Chocolade

Copyright Vincent Klabbers

Leerdoelen

Voor welke leerdoelen ga je deze chocolade gebruiken in jouw rekenonderwijs?

Noteer bij ieder stuk chocolade een passend leerdoel.

Rekenogen Chocolade

The image displays five different chocolate products, each associated with a letter for labeling learning objectives:

- a**: A box of round chocolates, some dark and some light.
- b**: A small bar of chocolate divided into four equal squares.
- c**: A large, standard chocolate bar divided into a 4x6 grid of squares.
- d**: A chocolate bar with a complex, irregular shape, possibly representing a fraction or a specific measurement.
- e**: A chocolate bar with a cow print pattern, where some squares are white and others are dark.

Denkhulp

Voorbeelden van leerdoelen:

Ik wil de kinderen combinaties laten maken tussen stambreuken en procenten.

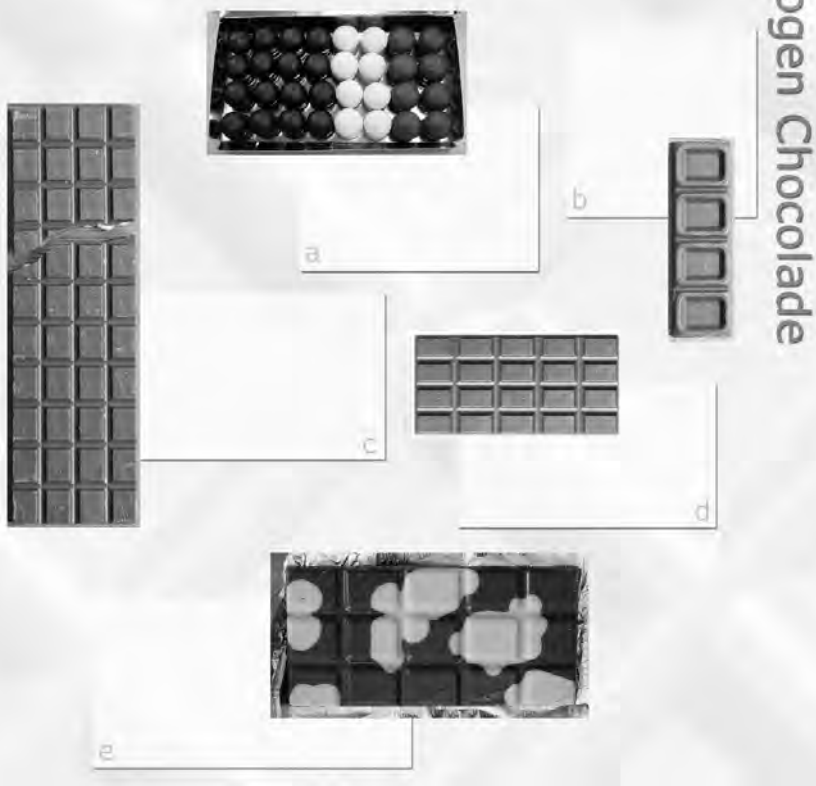
Ik wil de kinderen leren om tafelsommen te herkennen in een rechthoekmodel.

Ik wil de kinderen leren wat $\frac{1}{4}$ deel is.

Copyright Vincent Klabbers

Denkvragen

Je wilt de kinderen activeren. Welke denkvrage ga je stellen bij deze chocolade?



Rekenogen Chocolate

Denkhulp

Je wilt dat kinderen een leerdoel bereiken. Met een denkvraag maak je een verbinding tussen de eigenschappen van concreet materiaal en een leerdoel.

Je vraagt bijvoorbeeld bij *chocolade e* of er ongeveer evenveel witte als bruine chocolade nodig is om dit tablet chocolade te maken. Je wilt kinderen leren om delen van een geheel te bepalen door eerst te schatten. De vervolgvraag heb je al bedacht: Hoe kun je nauwkeuriger bepalen of de uitkomst van de gegeven schatting correct is?

Het aantal witte vlekken en de vormen van deze vlekken maken dat je niet onmiddellijk ziet wat de verhouding is tussen de hoeveelheden witte en bruine chocolade. Hierdoor ervaren de kinderen de noodzaak om het onderliggende rechthoekmodel te gebruiken.

Copyright Vincent Klabbers

KNAW-advies Rekenonderwijs op de basisschool¹

- analyse en sleutels tot verbetering -

KNAW-commissie rekenonderwijs²

1 inleiding

Bezorgdheid over de rekenvaardigheid van kinderen heeft de laatste jaren geleid tot een publieke discussie over het rekenonderwijs in ons land. Daarin staan de aanhangers van de ‘traditionele’ en de ‘realistische’ rekendidactiek tegenover elkaar.

Het debat werkt polariserend en lijkt slechts in geringe mate gevoerd te worden op basis van wetenschappelijk gefundeerde kennis over de zaken die ter discussie staan. De KNAW besloot daarom een commissie ‘Rekenonderwijs op de basisschool’ in te stellen. Toen de staatssecretaris van OCW, mevrouw Dijkma, een studie naar rekenmethodieken aankondigde, werd besloten beide initiatieven te combineren. De commissie had de volgende opdracht:

Breng in kaart wat er bekend is over de relatie tussen rekendidactiek en rekenvaardigheid op grond van bestaande inhoudelijke inzichten en empirisch feitenmateriaal.

Geef daarbij aan hoe ruimte kan worden geschapen voor leraren en ouders om te kiezen op basis van informatie over deze relatie tussen rekendidactiek en effect.

Naast de vraag wat er feitelijk bekend is over de relatie tussen rekendidactiek en rekenvaardigheid, heeft de commissie zich ook de vraag gesteld hoe het staat met de rekenvaardigheid van kinderen.

De antwoorden op deze vragen zijn gebaseerd op wetenschappelijke publicaties. De verkenning door de commissie van de ruimte die er is om te kiezen tussen rekendidactieken en, in bredere zin, om het rekenonderwijs te verbeteren is gebaseerd op interviews die de commissie heeft gehouden en op feitenmateriaal, voor zover dat binnen het gegeven tijdsbestek kon worden verzameld.

2 hoofdconclusies

- 1 De bezorgdheid over de rekenvaardigheid van basisschoolleerlingen is op zijn plaats. Nederland dreigt zijn sterke internationale positie te verliezen. Achteruitgang bij bewerkingen met grotere getallen en komma-getallen wordt niet gerechtvaardigd door vooruitgang bij onderdelen als getalbegrip en schattend rekenen. Het rekenpeil kan en moet over de gehele linie omhoog.
- 2 Het publieke debat overdrijft de tegenstelling tussen de traditionele en de realistische rekendidactiek en gaat bovendien over het verkeerde onderwerp, namelijk een vermeend verschil in het effect van beide didactieken. Er is geen overtuigend verschil aangetoond.
- 3 De sleutel tot verbetering van de rekenvaardigheid ligt in het niveau van de leraar. De opleiding en nascholing van de leraar zijn in ernstige mate geërodeerd. Het Ministerie van OCW dient de pabo-opleiding aan een grondig onderzoek te onderwerpen en nascholing in rekenvaardigheid en rekendidactiek krachtig te stimuleren.

3 ontwikkelingen in het rekenonderwijs

Het primaire onderwijs in Nederland heeft de laatste vijftig jaar ingrijpende veranderingen ondergaan. De oprichting van basisschool en pabo, de formulering van kerndoelen, de invoering van het zelfstandig werken en de goedkope rekenmachine hebben een grote invloed uitgeoefend.

In het rekenonderwijs was de belangrijkste wijziging de invoering van de realistische rekendidactiek. Deze geeft een prominente rol aan contexten die eigen oplossingsstrategieën van de leerlingen uitlokken; interactie hierover en reflectie hierop onder leiding van de leraar leiden dan tot de opbouw van inzicht, kennis en vaardigheid. In de traditionele rekendidactiek staat het systematisch aanleren van één standaardalgoritme per bewerking centraal, via een directere sturing van de leerling en voornamelijk aan de hand van contextloze opgaven.

Traditioneel en realistisch rekenonderwijs zijn echter geen eenduidige begrippen. De gedaanten van een didactiek variëren van ideëel concept via methode in het boekje en perceptie van de leraar tot de praktijk in de klas. Anno 2009 zijn sommige aspecten van realistisch rekenen minder goed ingevoerd dan de ontwikkelaars voor ogen stond; traditioneel rekenen zal kerndoelen die verder reiken dan de beheersing van één standaardalgoritme per bewerking niet kunnen negeren. Een realistische aanpak stelt wellicht hogere eisen aan de leraar dan een traditionele.

4 rekenvaardigheid

In nationale peilingen zijn de rekenprestaties de afgelopen twintig jaar op veel onderdelen vrij stabiel gebleven. Tegenover een achteruitgang op sommige onderdelen staat een vooruitgang op andere. Internationaal neemt Nederland nog steeds een sterke positie in, maar deze kalft af.

De rekenvaardigheid van de Nederlandse leerlingen stemt de commissie niet tot tevredenheid. Positieve en negatieve ontwikkelingen mag men niet tegen elkaar wegstrepen. Er zijn veel aspecten waarbij het prestatiepeil en de ontwikkeling daarvan onvoldoende zijn. Ook bij onderdelen waar vooruitgang is geboekt, zoals getalbegrip en schattend rekenen, blijft het peil ver achter bij de gestelde standaard. Bij bewerkingen met grotere getallen en kommagetallen is het peil sterk gedaald, deels door een keuze voor uit het hoofd rekenen waar schriftelijk rekenen geboden is. Dit mag niet worden gerelativeerd door te wijzen op de rekenmachine. Te weinig leerlingen bereiken een geavanceerd niveau. Nederland blijft achter bij de Aziatische landen en verliest terrein aan andere West-Europese landen.

5 relatie tussen didactiek en rekenvaardigheid

De studie door de commissie naar de relatie tussen rekendidactiek en rekenvaardigheid heeft zich geconcentreerd op empirisch onderzoek dat de laatste twintig jaar in Nederland is verricht, maar omvat ook een beknopte inventarisatie van buitenlands onderzoek.

De conclusie is dat dit materiaal geen eenduidig beeld oplevert en geen algemene wetenschappelijke uitspraken rechtvaardigt over de relatie tussen rekendidactiek en rekenvaardigheid. Het onderzoek is beperkt en biedt geen overtuigende empirische ondersteuning voor de claims van enige partij in de discussie over traditioneel versus realistisch rekenen. Het bereik van het wetenschappelijk onderzoek op het gebied van de effectiviteit van het rekenonderwijs is smal. 'Interventiestudies' en 'curriculum-studies' kennen, ondanks een vaak zorgvuldige opzet, serieuze beperkingen qua omvang of qua gebrek aan controle over externe variabelen. *Design experiments* zijn veelal gericht op de ontwikkeling en evaluatie van leergangen, niet op vergelijkend onderzoek.

Toch bestaat er op een aantal punten wel duidelijkheid:

- *Binnen* een bepaalde rekendidactiek bestaan vaak grotere verschillen in de leerlingprestaties dan 'tussen' rekendidactieken. De specifieke uitwerking van de didactiek en de interactie tussen leraar en leerling spelen kennelijk een grotere rol dan de algemene reken-didactische principes.

- Meer onderwijstijd en aandacht voor rekenen leidt tot betere resultaten.
- Rekenzwakke kinderen lijken minder gebaat bij een vrije vorm van instructie en hebben meer behoefte aan een sturende rol van de leraar.

Het Ministerie van OCW moet maatregelen nemen om het wetenschappelijk onderzoek naar het rekenonderwijs in omvang en variatie te doen toenemen. Naast een reflectie op de kerndoelen en ontwikkelingsexperimenten vraagt de commissie om aandacht voor methodologisch verantwoord vergelijkend onderzoek naar het effect van rekendidactieken en realisaties daarvan, nadere analyses van gegevens van grootschalige nationale en internationale peilingen, en studies naar rol en effect van informatietechnologie. Universiteiten moeten de inrichting van hun opleidingen voor leraar primair onderwijs aangrijpen als een gelegenheid het palet van het onderzoek te vergroten. NWO moet de multidisciplinaire samenwerking tussen wiskundigen, vakdidactici, pedagogen en psychologen bij het uitvoeren van onderzoek naar het rekenonderwijs stimuleren.

6 ontwikkeling in het aanbod van rekenmethoden

Het marktaandeel van realistische rekenmethoden is toegenomen van 15 procent in 1987 tot 100 procent in 2004. Rond 2010 komen er nieuwe uitgaven op de markt. De ervaringen in de klas en ook het huidige debat stimuleren een aanpassing, met meer rust in de presentatie en met meer aandacht voor oefenen en het onderhouden van basale vaardigheden en cijferen. Ook komen er nieuwe rekenmethoden beschikbaar met minder ruimte voor contexten en eigen oplossingswijzen van leerlingen.

De toenemende diversiteit in het aanbod geeft scholen meer ruimte om te kiezen. Scholen zijn echter nauwelijks in staat om rekenboeken goed met elkaar te vergelijken. Het Ministerie van OCW, in samenwerking met partijen in het veld, moet er daarom voor zorgen dat rekenmethoden objectief worden geanalyseerd, opdat scholen een verantwoorde keuze kunnen maken.

De onderwijsinspectie moet zich blijven beperken tot de controle *of* de doelen en referentieniveaus worden bereikt en niet sturen op *hoe* ze worden bereikt. Cito moet in zijn toetsen een balans aanbrengen tussen opgaven met en zonder context, tussen inzicht en vaardigheid.

7 rol, opleiding en nascholing van de leraar

De leraar is de spil in het onderwijsleerproces. De kwaliteit van de leraar heeft direct effect op de leerprestaties. De rol van de leraar staat echter onder druk door het zelfstandig werken, door een tekortschietende pabo-opleiding, en door beperkte nascholing en begeleiding.

De commissie plaatst vraagtekens bij de effectiviteit van niet-begeleid zelfstandig werken tijdens de rekenles en pleit voor een grotere inhoudelijke rol voor de leraar. Sturing door en interactie met de leraar en instructie, oefening en nabespreking zijn noodzakelijk.

Er bestaat grote zorg over de situatie op de pabo. Het niveau van de instroom neemt af. Het aantal contacturen voor rekenen is laag. Vakdocenten zijn niet inhoudelijk betrokken bij de stages van hun studenten. Er wordt vaak integraal getoetst, wat slechte rekenresultaten kan camoufleren. Er is nog geen landelijke afstemming van de te stellen eisen.

Het Ministerie van OCW dient de situatie op de pabo's aan een grondig onderzoek te onderwerpen, met als doel het vakinhoudelijke en vakdidactische niveau van de opleiding te verhogen. Het gaat daarbij om de volgende vragen: Is het mogelijk hogere eisen te stellen aan de instroom? Is er een goede balans tussen algemene pedagogische en vakspecifieke leergebieden en tussen rekenvaardigheid en rekendidactiek? Kan de tijd voor rekenen worden uitgebreid, ter verhoging van de professionele gecijferdheid en vakdidactische kennis? Biedt de kennisbasis die de HBO-raad heeft laten ontwikkelen kans op een landelijke normering? Is het zinvol specialisaties voor onderbouw en bovenbouw op de pabo in te voeren? Kunnen universitaire pabo's een rol spelen bij de verbetering van het rekenonderwijs?

Nascholing in rekenen is van belang, maar de vraag ernaar is de afgelopen jaren sterk afgenomen. Internationaal gezien is Nederland op dit punt hekkensluiter. Het Ministerie van OCW dient nascholing in rekenen, in combinatie met begeleiding op de werkvloer, krachtig te stimuleren. Scholen moeten overwegen rekencoördinatoren aan te stellen, ter ondersteuning van de leraar.

noot

- 1 Deze tekst is eerder gepubliceerd als samenvatting van het rapport 'Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering.' KNAW, 2009.
- 2 De commissie bestond uit: H. Bijl, M. Hickendorff, M. Kool, A. Korbijn, J.K. Lenstra (voorzitter), A. Noteboom, C. van Putten, R. Tijdeman & L. Verschaffel.

literatuur

KNAW-Commissie rekenonderwijs basisschool (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering*. Amsterdam: Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.

Natural Differentiation in Mathematics - the NaDiMa project¹

P. Scherer & G. Krauthausen
Universität Bielefeld, IDM, Duitsland

1 heterogeneity and differentiation

Differentiation in mathematics education is not a new problem teachers have to cope with. Since the early seventies of the last century, many publications can be found, and those references are still cited in actual publications (Bönsch, 1976; Geppert, 1981; Klafki & Stöcker, 1976; Winkeler, 1976). Though it is an old problem, it can be stated that the extent of heterogeneity, the range between slower and faster learning students, low achievers and bright children, has been expanded (Beutel & Ruberg, 2010). In one classroom there may be students whose range of proficiency can spread over three grades.

You will find in a first grade classroom children whose mathematical knowledge is restricted to numbers up to 10 and others who calculate with numbers up to 1000.

Besides this, 'differentiation' has become a modern term in pedagogy and educational policy, if not to say a label which is expected to serve as an all-purpose weapon for optimizing the output of achievement at school. Differentiation and individualization are two of those pedagogical terms which are so universal and by this so ambiguous that it makes sense to have a closer look at opportunities and forms of differentiation, because it remains a convincing leitmotiv to create the most favourable learning conditions for each individual student (Wielpütz, 1998, p.42).

classical ways for coping with heterogeneity

Analyzing the literature and the common practice of teacher education in Germany, it is obvious that till today nearly the same solutions as 20-30 years ago are offered for coping with heterogeneity (Bönsch, 2004; Paradies & Linser, 2005; Vollstädt, 1997). Heterogeneity is mostly seen as a *problem* because of didactical traditions in teachers' heads which still may be oriented to an ideal of a homogenous learning group (Reh, 2005; Tillmann, 2004). This habit in itself already can be questioned, which is

part of our project as well, but will be addressed later. In our view - and our project experiences confirm this view - heterogeneity, under certain conditions, can be a source of productivity and a chance and great *advantage* for teaching and learning.

But what are the suggested (classical) solutions in literature:

- social differentiation (individual work, partner work, group work): The teacher puts together a heterogeneous group and the faster learning pupils should help the slower learning ones;
- differentiation via teaching methods (e.g. projects, courses): In project work that touches different subject matters the pupils could choose an activity according to their strengths;
- differentiation via media (e.g. textbooks, worksheets, manipulatives): Low achievers may use counters or a calculation frame for a task whereas the bright children solve the same task mentally;
- quantitative differentiation (same amount of time for different amount of content, or different amount of time for same amount of content): In a phase of individual work pupils are expected to finish one or two worksheets;
- qualitative differentiation (different aims respectively levels of difficulty): For a specific topic, like calculations up to 20, the teachers prepares three different worksheets on three different levels.

This list could have been taken from a current catalogue of pre-service and in-service courses. But it dates back to a publication from Winkeler (1976).

As our concrete examples illustrate, most of the decisions are usually made by the teacher and they are made in advance. That's not to say that those mentioned solutions *per se* are to be valuated in a negative way, nor do we say they are ineffective. But as we think, there are several indications:

- that they are not always implemented in the intended way;
- that they are necessary, but not at all sufficient.

what about mathematics?

One major problem is the fact that the discussion concerning heterogeneity and differentiation is mostly guided by organizational and methodical questions (e.g. see above social differentiation). Secondly, if one looks at the literature, the discussion about conceptual forms of differentiation is dominated by pedagogy. This neglects the essential importance of the subject matter, here mathematics, and its specifics. Some suggestions in literature even can be seen as counter examples,

related to essentials of mathematics education.

Although by all means there *are* several proposals for learning environments in mathematics education where desirable forms of differentiation can take effect – because, in a sense, it is implemented in the topic itself (Hengartner et al., 2006; Hirt & Wälti, 2009). But what is missing, is a more comprehensive contribution which deals with a concept of natural differentiation from a theoretical point of view and with the perspective of mathematics education. It is merely mentioned on a half page in a teachers' manual of the German textbook 'Zahlenbuch' (Wittmann & Müller, 2004, p.15).

natural differentiation

The following attributes (Wittmann, 2001a; Krauthausen & Scherer, 2007, p.228 f.) are constituent for natural differentiation (ND):

- All students get the same material. So there is no need for a vast number of additional worksheets or materials.
- This offer must be holistic (referring to the content, and, here, not meant in the sense of 'head, heart & hand'), and it may not fall below a specific amount of complexity and mathematical substance (complexity is not necessarily the same as complicated). It could be an open task, a problem to be solved or an activity that looks for structures and patterns. These kind of challenging and complex learning environments (in contrast to common isolated tasks) are absolutely not just an advantage for better learning students (Scherer, 1999; Van den Heuvel-Panhuizen, 1996).
- Holistic contexts in that sense by nature contain various levels of demands which must not be determined in advance. The level of that spectrum which is actually worked on is no longer assigned by the teacher, but by the student him- or herself. This not only subserves the support of increasingly realistic self-assessment, but the student him- or herself can rate his or her specific abilities better than the teacher who is not able to look inside the student's head. Though, students have to learn that kind of self-assessment, and that does not happen by simply tossing them again and again into such situations. Rather they need situations, consciously planned and organized by the teacher, where they can talk and reflect about demands and their criteria on a meta-cognitive level (Treffers, 1991, p.25).
- In addition to the level the students decide to work on, they can freely make their own decisions concerning: ways to solve, use of manipulatives and facilities, kinds of notation, and even the problems they decide to solve (problem solving also includes problem posing).

- The postulate of social learning from and with each other is fulfilled in a natural way as well, because it makes sense from the content itself: it is obvious to exchange various approaches, adaptations and solutions. In doing so, insight and understanding can grow or be deepened.

All students will be confronted with alternative ways of thinking, different techniques, variable conceptions, independent from their individual cognitive level. Rigid inner differentiation more likely will just complicate this opportunity. (...) So, the various, individually organized ways of solution also have an impact on affective, emotional areas. They leave a cognitive margin to students what can facilitate their identification with the learning demands. In this way, the direct experience of autonomy can lead to motivation and interest.

(Neubrand & Neubrand, 1999, p.155, translated PS/GKr; also cf. Freudenthal, 1974, p.66 ff.).

These attributes have to be described in more detail (e. g. what does the same offer mean) and have to be put in concrete terms for teaching and learning processes. This is the aim of the project that will be described in the following. The presented concept can be seen in accordance with 'realistic mathematics' (Treffers, 1991, p.24 ff.): Learning mathematics is a constructive activity, moves at various levels of abstraction, is promoted through reflection and interaction and leads to a structured entity of mathematics. The different types of problems and tasks can be seen as 'free productions' or 'own productions' in the sense of developing own strategies (Streefland, 1990).

2 the project *NaDiMa* (natural differentiation in mathematics)

project group

The European project NaDiMa 'Motivation via Natural Motivation in Mathematics' is supported by the Comenius-program 'LifeLongLearning' (LLL; duration: 01.10.08-30.09.10). The official scientific project partners are from Poland (Eva Swoboda), Czech Republic (Alena Hospesova, Filip Roubicek & Marie Ticha), the Netherlands (Maarten Dolk) and Germany (Günter Krauthausen & Petra Scherer). Moreover, this international cooperative project includes partner schools and associated schools.²

Aims and objectives

The project NaDiMa stresses the necessity of a differentiation which amplifies the nature of the subject matter. That is not the same as to make the

formalism of the mathematics science absolute. Differentiation which lies within the subject, can be given complete expression under the premise that the topic is not step by step anatomized and supplied to the students bit by bit, but as a holistic, sufficiently complex learning environment (see par. 'Natural Differentiation' on page 35). We explicitly see the teacher as responsible for the sound identification, selection and framing of the problems to work on in classroom that means: the first two of the constituent attributes of ND mentioned above. Very helpful for that can be the four characteristics which Wittmann (2001a) has established as a definition of a so called 'substantial learning environment' (SLE) (Krauthausen & Scherer, 2007, p.197 ff.):

- 1 It represents central objectives, contents and principles of teaching mathematics at a certain level.
- 2 It is related to significant mathematical contents, processes and procedures beyond this level, and is a rich source of mathematical activities.
- 3 It is flexible and can be adapted to the special conditions of a classroom.
- 4 It integrates mathematical, psychological and pedagogical aspects of teaching mathematics, and so it forms a rich field for empirical research (Wittmann 2001a, p. 2).

Criteria like these, as well as others which are postulated for 'good problems', can be stated as necessary prerequisites, but do not guarantee effective teaching and learning by themselves (cf. Griffin 2009). With his criteria, Wittmann gives priority to arithmetical topics but the criteria are also applicable with geometrical or context-embedded topics.

In NaDiMa the concept of 'natural differentiation' will be investigated. Our hypothesis is that for the learners this concept will contribute:

- to a deeper mathematical understanding, as well as
- to the development of general learning strategies, and
- to high (intrinsic) motivation.

Although the relations between motivation (respectively its various components) and achievement in mathematics are not consistent in diverse studies (for an overview see Moser Opitz, 2009), we see intrinsic motivation as a general aim in mathematics education. In addition to this, the theoretical concept and the term of natural differentiation should be sharpened.

Design and methods

Together with selected teachers, different learning environments were designed and tried out in primary school (in Germany grade 1-4). The lessons (for pilot study and field test 1 completely and for field test 2 partly

video-taped) are analysed and evaluated with respect to the realization of natural differentiation. By a cyclic process of evaluation (pilot study, field test 1 & 2) with reflections of the participating teachers and an extension of classes and teachers the tested material should be tried out, evaluated and optimized (fig.1).

pilot study (grade 2 & 4; one class)	march/april 2009	– 3 lessons SLE 'number chains' – individual interviews about motivation (5 to 6 per class)
field test 1 (grade 2 & 4; one class)	may/june 2009	– pre-test SELLMO-S (grade 4) – 8 lessons SLE 'number triangles' – post-test SELLMO-S (grade 4) – adapted TIMSS-items on motivation in mathematics respectively specific SLE – individual interviews about motivation (5 to 6 per class) – teacher interview
field test 2 (12 classes; different grades from 3 schools)	october 2009 – january 2010	– implementation of different SLEs – adapted TIMSS-items on motivation in mathematics respectively specific SLE – if applicable, individual interviews about motivation (5 to 6 per class) – if applicable, teacher interview or questionnaire

figure 1: overview on content, time schedule and methods
for NaDiMa (Germany)

In addition to this, the materials should be prepared for pre-service as well as for in-service courses.

For measuring motivation, different instruments and methods have been chosen dependent on the children's age and on the phase of the project (fig.1). As standardized methods the TIMSS-items (Walther et al., 2008) as well as the SELLMO-S (Spinath et al., 2002) were chosen. For a qualitative analysis guided interviews took place (in all project phases video-taped) with selected children in each class. In addition to other aspects, the children were asked about their favorite subjects and their attitude towards mathematics, about the level of difficulty of mathematics and the specific learning environment they had experienced in the study.

Whereas the other participating countries tested context-embedded or geometrical learning environments, in Germany we focused on arithmetical SLEs for different grades. For the SLE number chains used in the pilot study, the structure of the series of lessons was the following:

- 1st lesson: introduction/revision of the format; open problem: own number chains (see par. 'Natural differentiation ...' on this page);
- 2nd lesson: problem structured activity: reaching a specific target num-

- ber (see par. 'Natural differentiation ...' on page 43);
- 3rd lesson: different investigations (e.g. effects of operative variations; investigation of specific starting numbers). For the investigation of the third lesson the teachers were free to choose which and how many they tried out.

Field test 1 was extended to the following teaching unit, using the SLE number triangles:

- 1st lesson: introduction / revision of the format; own number triangles;
- 2nd-4th lesson: investigating operative variations;
- 5th-8th lesson: diverse investigations, e.g. number triangles with numbers from the times-table, reaching even/odd exterior fields (see par. 'Natural differentiating on page 46), number triangles with three given exterior fields etc.

Teachers and researchers met several times for discussing the learning environments and the teachers were equipped with didactical literature, suggested lesson plans and worksheets. These materials should serve as a framework, and the teachers were free in selecting specific topics of the series and modify the given plans.

For field test 2, besides number chains and number triangles, we offered the learning environments 'time-plus-houses' (Verboom, 2002; Valls-Busch, 2004), 'minus walls' (Krauthausen, 2006; 2009) and 'bars and angles on the field of 20' (Hirt & Wälti, 2009). For these SLEs again various types of problems (operative and problem structured as well as open tasks) were offered.

3 selected results

pilot study and field test 1

In the following, three different types of problems will be illustrated showing the opportunities for natural differentiation and discussing the different outcomes. The first two examples refer to findings from the pilot study (SLE: number chains), whereas the third example is taken from field test 1 (SLE: number triangles). At first, an open task in the sense of a free production will be presented. The second and the third example deal with problem solving activities including the discussion of structures and mathematical connections.

natural differentiation with open problems: number chains

For our first SLE we focused on 'number chains' and chose the length of

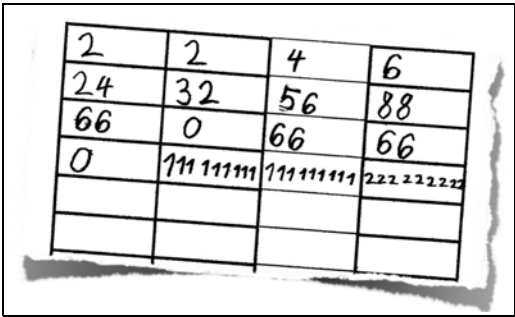
four numbers (cf. Scherer, 2007a). The underlying rule is the Fibonacci rule: Choose two (arbitrary) numbers as starting number, and write them side-by-side. Work out the sum and write it to the right. Finally, add the second and the third number, and write the result as a target number to the right. Examples:

2 4 6 10 or 12 3 15 18

For both classes (2nd and 4th grade) that format was new, and after a short introduction on the blackboard the students completed a worksheet with four given examples to ensure the correct application of the rule. The worksheet also contained empty formats to fill in own number chains and to become familiar with the format. Moreover, the students had a second worksheet with more empty formats at their disposal. Especially with own productions and without any specific demands, the students have the opportunity to work on their own level (Treffers, 1991, p.25). The question arose if and to what extent the students make use of this openness. In both classes the students strongly concentrated on their own worksheet. The results differed with respect to the quantity of tasks and worksheets as well as with respect to the concrete number chains and the chosen numbers. Anyhow, the quantity does not say anything about the chosen level of difficulty. The concrete tasks indicated a wide spectrum and the following categories are quite representative.

dimensions of starting numbers

In grade 4, the material for the starting numbers varied from numbers less than ten up to numbers with millions. The biggest numbers were used by Julian (fig.2). The individual spectrum of one and the same child differed: just two students restricted their number chains to target numbers close to 100.



A handwritten table with 4 columns and 6 rows. The first row contains the numbers 2, 2, 4, and 6. The second row contains 24, 32, 56, and 88. The third row contains 66, 0, 66, and 66. The fourth row contains 0, followed by a series of vertical lines, then another series of vertical lines, and finally a series of vertical lines. The fifth and sixth rows are empty.

2	2	4	6
24	32	56	88
66	0	66	66
0			

figure 2: Julian's (grade 4) own number chains

As expected, the second graders used smaller numbers. Many of the children stayed in the official number space up to 100. But we could also detect excursions into 'unknown' number spaces up to 1 000, 10 000, 100 000, and even up to one million (fig. 3a and 3b).

2	2	4	6
3	3	6	9
20.000	20.000	40.000	60.000
60.000	60.000	120.000	180.000

10000	10000	10000	21000
100000	100000	300000	500000
79	79	48	67
90000	100000	120000	290000
0	100	100	200
11	12	23	35

figure 3a and 3b: Konrad's and Ben's (both grade 2)
own number chains

special starting numbers

A lot of students chose own productions as starting numbers, e. g. number chains with zero, pure tens/hundreds/thousands, numbers with the unit 5 or numbers with equal digits (multiples of 11, 111, 1111, ...). Two second graders made number chains with zeroes in the following way (fig.4a and 4b). Here, the possible individual (mis)understanding of zero or a different meaning (counters?) has to be clarified through the classroom discussion.

00	00	000	0000
----	----	-----	------

0000	0200	0000	000000
------	------	------	--------

figure 4a and 4b: Louis' and Ben's (both grade 2)
use of zero

relations between starting numbers

The students explored the relation between the two starting numbers (e.g. starting numbers of nearly the same size, combination of a rather big number with a rather small one). Moreover, they chose starting numbers such a way that they could reach pure tens or hundreds with the third number.

relations between chains

Relations became obvious not only between the starting numbers but also between the chains. For example, many second and fourth graders tried out equal starting numbers or successive starting numbers. In that phase, some students (more or less consciously) already explored operative variations like constant sums or increasing both starting numbers by 1 or by the same amount (see also fig.5b).

For us, a sound phase of plenary reflection at the end of the lesson seems very important. In such phases students should present and commonly reflect their individual learning products (see also Treffers, 1991, p.25). The individual reasons can be quite different: size of the target number, easy or difficult number chains, appearance of patterns like 123 and 123 as starting numbers etc. (fig.5a). Two children also presented their operative variations (fig.5b).

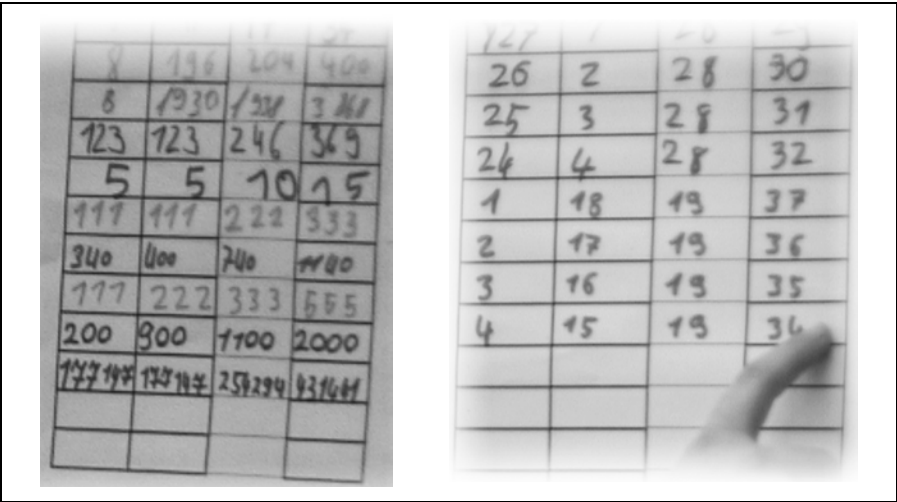


figure 5a and 5b: collection of number chains at the blackboard (grade 4)

Leon und Nina transformed the law of constant sums (in a different way for the first and second starting number). The change by 1 for the target number could be discovered, and moreover, the constant result of the

third number. The difference between these two variations was not discussed in that phase. But this may serve as a starting point for further investigations in one of the following lessons: What happens if you increase the first starting number by 1 or both starting numbers? (Scherer 2007a). Discoveries like those are more likely the more the substance of the learning environment can foster that - a theoretical assumption which could also be affirmed practically in our project.

Summarizing the results for this type of problems, the self-chosen tasks represented a wide spectrum according to different criteria and with a wide-spread size of numbers. At first sight, one could object, that the students did not choose the size of numbers appropriate to their achievement level (e.g. the fourth graders actually calculated with numbers up to one million). But one has to take into account that this is allowed when dealing with an open problem. Moreover, the teacher could get helpful information with respect to the achievement level or more general for the work with open problems.

On the other hand, the above mentioned categories for choosing examples could show that special numbers, e.g. in the sense of operative variations, must not inevitably be done with bigger numbers. Perhaps they consciously shouldn't even be done with bigger numbers because then the calculation demands absorb too much cognitive energy. This energy should have priority for describing, explaining and justifying the patterns. As a consequence for field test 1, we wanted to ensure that the students make their choices with a greater (also meta-cognitive) awareness and we changed the corresponding worksheet for open problems for the SLE 'number triangles' in the way that children should differentiate between what they find 'easy', 'difficult' and 'special' number triangles (see also Van den Heuvel-Panhuizen 1996, p.145 f.).

natural differentiation with a problem structured task: number chains

In the second lesson of the pilot study, the problem of reaching a specific target number was posed (Scherer, 1999, p.283 ff.; 2007a; Van den Heuvel-Panhuizen, 2001, p.72 f.). On purpose, we chose the small number 50 for the target number. On the one hand, all second graders should have the opportunity to find solutions. On the other hand, the development of problem solving strategies and the discovery of patterns should have priority and not the training of calculation. Insofar, the target number 50 is also appropriate for the 4th grade and can be discussed with the students in a meta-cognitive way. Principally, the selection of numbers should be done according to the dominant aims and objectives of an activity.

For the target number 50, there are several solutions in $\mathbb{N}_0$ (fig.6) as well

as solution strategies to solve it. Deliberately, we formulated the instruction that approximate solutions are also allowed (or desired) which later could lead to exact solutions.

0	25	25	50
2	24	26	50
4	23	27	50
6	22	28	50
8	21	29	50
10	20	30	50
12	19	31	50
14	18	32	50
16	17	33	50
18	16	34	50
20	15	35	50
22	14	36	50
24	13	37	50
26	12	38	50
28	11	39	50
30	10	40	50
32	9	41	50
34	8	42	50
36	7	43	50
38	6	44	50
40	5	45	50
42	4	46	50
44	3	47	50
46	2	48	50
48	1	49	50
50	0	50	50

figure 6: solutions for the target number 50, notated in a systematic way

In addition, the teacher emphasized that the students should try out things and they were requested not to erase. This request, however, was more and more ignored when working on the problem because finding an exact solution dominated.

The problem can be solved with different strategies and on different levels: Children can do it by trial and error (more or less systematically), by dis-

covering and using operative variations ('If I increase the first starting number by 1, the target will increase by 1, too. I found a chain with the starting numbers 17 and 15 and the target number 47, so I increased the first starting number to 20 and got it!') or by calculating backwards (the sum of the third and second number equals 50; the first number can be found by subtracting the second from the third).

For our empirical study, in both classes the students at first should work individually. Besides the empty formats to try out, the students had so-called 'hit-chains', one big empty format per sheet, to fill in the exact solutions for the target number 50. Those papers were just collected individually and not presented yet. Compared with the open problem presented before (see par. 'Natural differentiation ...' on page 39), we could also identify that the children worked individually. But we found a stronger orientation on other students ('How many solutions do you already have?') This - seen positively - could be a motivation to find more solutions. On the other hand, it can put pressure on students, if one has not found as many solutions as the others. The role of the teacher is important here, to do justice to the individuality of all students (pointing out that this is not a competition against each other, but efforts to a common objective) and to give all students the opportunity to present results, their discoveries and, more general, their insights.

While collecting strategies and results, our students were mainly interested in collecting the solutions to make sure that they had found all. They were less interested in reflecting on their strategies, so this reflection was postponed to the following lesson.

The collection of solutions has to be organized methodically in a way that all students can contribute to the overall solution of the problem: In grade 4 every volunteering student should tape one solution (hit-chain) on the blackboard (at first unsystematically). At the same time, the others were asked to check that the solutions are correct and that there are no doubles. By and by, the blackboard arrangement became confusing and the students looked for a better arrangement, for a structure to get a better overview. At once, the students suggested to sort the solutions according to the size of the first starting number starting with the biggest one. With this strategy, they were able to find missing solutions and, lately, to find all solutions.

This activity was more demanding and time-consuming for the second graders, but they also found nearly all solutions. Their spontaneous suggestions for sorting were the following: Sorting the number chains according to the first starting number (starting numbers beginning with 40s on the left side of the blackboard, beginning with 30s in the middle

and so on). Another suggestion was the distinction if the first starting number is bigger than the second or vice versa. A third proposal brought up by a second grader was to change the places of the both starting numbers to get all solutions. This could be disproved by a concrete counter example. With the discussion of different proposals, the students found out that the first starting number has to be an even number. In the end, also the pupils in grade 2 found all solutions for the target number 50. Nevertheless, if applicable, for grade 2 one could decide to reduce the size of the target number (for example 20), so that *all* students have the opportunity to develop problem solving strategies and are not hindered by calculations demands. That was realized in field test 2.

natural differentiation with a problem structured task: number triangles

For field test 1 we chose the SLE number triangles (Scherer, 1997; Wittmann, 2001b). The rule for this format is the following (fig.7). The sum of two adjacent interior fields is written down in the exterior field.

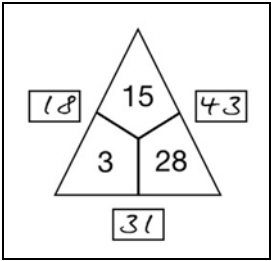


figure 7: number triangles

WS 4	name:	class:	date:
------	-------	--------	-------

Mandy from another class claimed:
„There are no number triangles with three even numbers in the exterior fields!“

And John claimed:
„There are no number triangles with three odd numbers in the exterior fields!“

Who is right? Try out and explain:

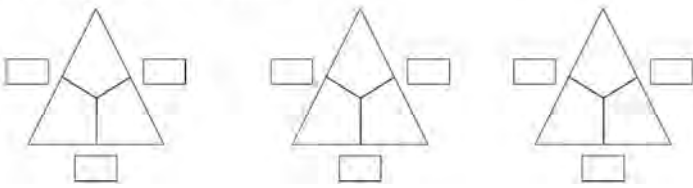


figure 8: worksheet of pupils

For primary grades we (among others) designed the following problem for investigation (fig.8) which was dealt with in the 6th lesson in the series of number triangles (see par. 'Design and methods' on page 37).

This format can be challenging for pupils and they might 'happily play the role of sceptic, looking for falsifying examples' (Burton, 1987, p.11).

Checking whether the statements are true or false, can be done more or less extensive and on different levels. Obviously, Mandy's statement is false and can be disproved by *one* counter example (some children did so). Moreover, the situation can be investigated in a systematic way with systematic reasoning (three even or three odd exterior fields).

This could be found with several students: They had a look at several examples and different cases (three even interior fields with three equal or different numbers; or analogous for odd interior fields). Others used case discriminations in order to explore what will happen with a combination of even and odd interior fields. On the one hand, the chosen level could be 'based on examples (arithmetical)' (fig.9a and 9b).

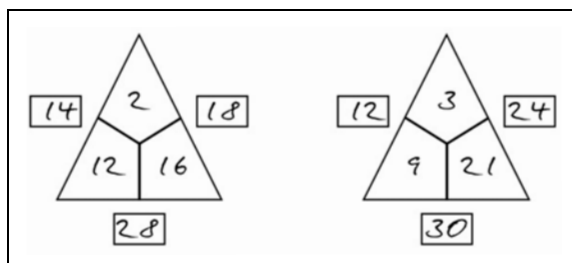


figure 9a and 9b: even exterior fields with three even or three odd interior fields

Moreover, this problem aims at developing algebraic thinking - not on a formalistic level, but pre-algebraically: The children argued with even and odd numbers and used the complete words (fig.10a) or the abbreviations (fig.10b).

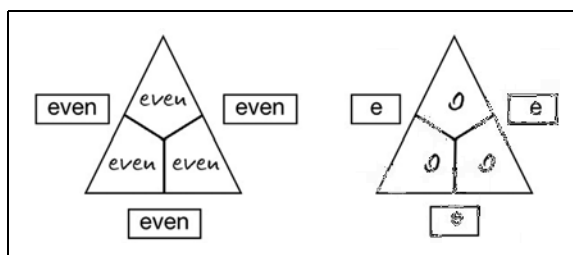


figure 10a and 10b: even exterior fields on a pre-algebraic level

This was realized in grade 2, with a distinction by different colors. The formal ‘algebraic’ representation (as $2n$ for even numbers and $2n + 1$ for odd numbers) is not intended for primary level, but for secondary students (and of course for teacher students and teachers).

The exploration of John’s statement on the mentioned worksheet is more demanding and can be illustrated on the pre-algebraic level: If you want to reach three odd exterior fields, you have to choose for two adjacent interior fields one odd and one even number (fig.11a, right side). To get an odd exterior field also in the bottom field, you have to add an odd number to the already given even interior field. With this, the numbers for the interior field on the left side are fixed and, by force, make the exterior field an even one (fig.11b). Therefore, you will never get a number triangle with three odd exterior fields if natural numbers are used.

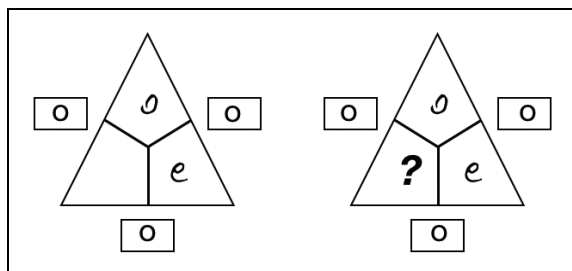


figure 11a and 11b: trial to get three odd exterior fields

According to the intention of this investigation, we chose a true and a false statement (for primary students) on purpose, to analyse the potentially different argumentations. Unsolvable tasks may challenge arguments and reasoning in a special way, but at the same time demand adequate mathematical competences. Beyond content-related objectives, here, process-related objectives are required: the development of problem solving strategies, argumentations and reasoning (Scherer, 2007b).

As shown before, the students dealt with number triangles during six lessons (introduction, open problems, operative-structured activities (see par. ‘Design and methods’ on page 37). For this specific problem solving activity, the students should not only calculate but be encouraged to verbalize and write down their discoveries. Those verbalizations and notations could and should be done with the help of number examples and drawings/sketches, so that different representation levels can be integrated in a natural way.

For primary students, the second statement (John) is an unsolvable situ-

ation when using natural numbers; that means John's statement is true. In our empirical study we found a variety of students' discoveries:

Carl (2nd grade) showed a typical solution, he tried out a lot (exclusively with even numbers) and came to the conclusion:

John is right. Because I tried out very often if there are only odd numbers.

Some of the students ascribed the fact that they could not solve the problem to their own incapability or to the fact that they did not try enough. This is a crucial point for the plenary reflection, to work out the reasons for not finding a solution (see also Scherer 2007b).

Don (2nd grade) expressed the effects of addition of even and odd numbers, directly addressed to John:

You were right because the numbers are mixed, at least one is even, because you get an even when you add an odd to an odd.

He concluded, that at least one even number is necessary.

The same direction could be seen with Carsten's argumentation (4th grade), expressed in a rather elaborated way:

Even exterior numbers exist. But there aren't any odd exterior numbers because one number is always even, namely the number you need to get the first two odd numbers.

Also Lena (4th grade) reasoned, that one even number is necessary:

There are number triangles with even numbers but no number triangles with odd exterior numbers. Because 3 odd numbers always have 1 even number. If you would have a two-sided figure or a number quadrangle, it could happen that you have all results odd.

She went one step further, looking for alternatives to make the problem solvable (here turning the figure into a 'symmetric' one; in field test 2 it happened that students explored this idea more systematically by investigating polygons with even and odd numbers of edges like pentagons, hexagons, ...).

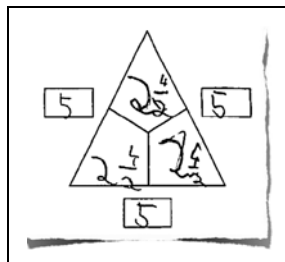


figure 12: Damian's (grade 2) number triangles with fractions

Damian (2nd grade, fig.12) found a number triangle with fractions. Understandably, problems with this new symbolic expression occur. Verbally he explained: 'Two and two fourth', so he mixed up numerator and denominator.

4 interim conclusions and perspectives

SLE and opportunities for natural differentiation

Our first results could show, that the students really made use of the containing substance that allows working on different levels. Moreover, it could be stated that the different types of tasks, such as open problems, free explorations and productions, more purposeful problems, problems which contain the construction, discovery and explanation of patterns and structures have different effects. Beyond this, it became clear that the size of the numbers is an important and influencing factor and has to be reconsidered with respect to the underlying aims and objectives.

Absolutely essential for the use of substantial learning environments like these is the opportunity to both foster and demand the general, process-related competencies, besides the content-related ones. The implementation and the fulfilment of just these objectives has become more and more valued and stressed by education policy (NCTM, 2000; KMK, 2005).

The concrete opportunities of natural differentiation became obvious with respect to the:

– selection of numbers

The widespread selection was presented with the open tasks in the format of number chains (see par. 'Natural differentiation ...' on page 39). This became true also for other formats and free productions like creating patterns for others. With the second problem, reaching a specific target number (see par. 'Natural differentiation on page 39), this freedom was not given, but we could state that some students first tried out 'easy' numbers (pure tens or multiples of 5). The target number 50 consciously was chosen as an easy one and the importance of such a selection became clear. With the presented activity for number triangles, reasoning about the given statements (see par. 'Natural differentiation ...' on page 46), the children were completely free to choose the numbers. Many children chose numbers up to 10 or 20 as a maximum, which is quite sensible for such an investigation, as you may concentrate on the pattern. This is a crucial point for the common reflection with respect to the development of more general

problem solving strategies. If the focus is on investigation and explanation of structural relationships, then it is clever to reduce the own calculation demands because the size of the numbers does not play any role for the structure.

The children also used own productions like equal numbers or successive numbers or multiples of 11. During the plenary reflection on John's statement, looking for three odd exterior fields, a fourth grader commented: 'I tried it out with a zero' and another: 'I guessed, perhaps it will work with prime numbers'. This makes clear that the children do not choose the numbers accidentally but on the basis of mathematical experiences and knowledge.

- *number of examples*

The problems also differentiate according to the numbers of examples (which is not independent from the former point; see also above: quantitative differentiation).

- *problem solving strategies respectively general (solution) strategies*

The second and the third problem-structured activities focused on problem solving. As problem solving strategies we could find argumentations with respect to concrete numbers or in a more general manner. The students should gain experiences with these different levels and we found a wide spectrum. We could also find students who considered particular cases, distinction of cases, up to completeness of a proof. Such types of investigation could challenge a general requirement of reasoning and proofs (Winter, 1983). For example, some of our children thought you just have to examine 'enough' examples to have a proof. Also with other types of tasks (e.g. inquiry of structures or self-designed patterns) we could find different ways and levels of working which could provide important aspects for reflection and discussion.

- *searching for alternatives to turn a problem into a solvable one*

For our second statement (John), it turned out that this was difficult for many students, mostly because they had only few experiences with such an activity (Scherer, 2007b). But this type nevertheless lead some children to further investigations. The proposals could be amusing, like: 'If 6 and 6 would make 13, then it could work'. Other ideas showed complex mathematical thinking processes, lead to fractions or variations of the format as shown before: Johanna (4th grade) suggested to change the operation of number triangles: 'If you would multiply, then it would work'.

One advantage of SLEs is the fact that the levels of demand are not determined in advance, but develop quite naturally within a substantial research problem with floating transitions. This facilitates natural differ-

entiation for the students, combined with an economical expenditure for the teacher who therewith wins free zones a) for diagnostic work, and b) for framing the plenary phase at the end of a lesson. We consciously used the benefit of the mixture between individual approaches, partner or small group work, but also with common phases of reflection and integration. In doing so, the important social learning is strongly taken into consideration, and real deepening mathematical knowledge can take place (cf. Treffers, 1991).

findings with respect to motivation

The first results based on the interviews as well as on the TIMSS-items have shown a rather high motivation of the students with respect to mathematics education and mathematics learning in general. These results are in accordance with the findings of large scale studies for this age (cf. Walther et al. 2008, p.78). In our study this positive attitude is not only true for the bright students, but for nearly all students. Exemplary statements in the interviews:

- It's interesting.
- It's tricky.
- Because it is easy.
- I like difficult problems.
- Because there exist easy and difficult problems.
- You have to do it with your brain and are not required to write so much stuff like in German language.

Some of the students commented on the given SLE, that they liked those activities more than the regular mathematics lessons, because they were more successful than usually. Exemplary statements:

- I like this format very much.
- Because every time you could do something new with it.
- I was successful with the number chains;
- When I made sense of it, I liked it very much.

In the ongoing project we will scan and analyze different aspects of motivation in more detail (Krauthausen & Scherer, in preparation). Our examples certify that intrinsic motivation is not imperatively bound to a realistic, everyday context situation: Pure inner-mathematical problems and contents can be motivating for all children as well. More important than the question of contexts versus inner-mathematical structures is the enclosed 'substance'.

consequences for teacher education

The crucial demands for the teacher and the teacher's role are the following (see also Scherer & Steinbring, 2006; Speer & Wagner, 2009):

- own mathematical exploration of the format or problem in order to be able to class and value the different strategies and solutions,
- an anticipated reflection of possible strategies and levels for pupils, as well as
- an analysis of real student documents,
- the reflection on integration of different strategies, solutions and argumentations, and
- the sound capability to moderate plenary discussions, which includes e.g. posing questions, initiations, even irritations if needed.

The responsibility for ensuring that these mathematical conversations are productive 'ultimately lies with the teacher'. To organize, manage, and support such classroom dialogue, teachers must model appropriate discursive practices for students, present meaningful tasks, and actively monitor students' interactions. Teachers should listen to and help guide the conversations by requiring explanations and clarification of ideas as well as provide feedback about students' ways of thinking about the problem and their solutions. Students should also have sufficient time to work on tasks, grapple with mathematical ideas, consider alternative approaches, and formulate reasonable explanations to support their solutions (Kilic et al., 2010, p.352; *emphasis GKR/PS*).

In our view, a subserving classroom culture is of major importance (see also Griffin, 2009). It is a prominent task for teachers to provide their students with a sound image of mathematics as a science. Inherent to this is to consciously value the central attributes of doing mathematics. And that cannot be successful by just giving isolated information, but with the teacher him- or herself offering a continuous, explicit model, and habitually initiating and maintaining of meta-cognition.

For example referring to the level of difficulty of a specific task. Questions like: 'What is an easy or a difficult task?', will usually make the students yield just statements - with a reduced meaning and mostly without any consequences. Referring to this, not only the sensibility to questions like these or the consciousness and diversity of the answers must be fostered. Rather often, deeply internalized underlying pre-experiences have to be discussed. As traditional classroom culture more likely emphasized the content-related competencies and neglected the process-related ones, students internalized implicit valuations and units of value - unconsciously or caused by that kind of teaching and learning.

One is rather proud if one can deal successfully with difficult operations, unusual number systems, like fractions or negative numbers, or big numbers. But students still do have less role models for cherishing process-related competencies. And that is also true for attributes of desirable attitudes of sound working, like endurance, persistence, patience. Students

must have criteria in order to be able to rate levels of difficulty because ‘difficulty’ can be related to:

- the complexity of calculation (kind and size of numbers);
- the operations involved (addition / subtraction is often said to be easier than multiplication / division);
- the demand of thinking and reflection, strategic understanding, process-related competencies;
- the understanding of the given tasks (language understanding);
- the amount of necessary (written) text production.

From this, for the implementation of a sound culture of teaching and learning, the following consequences can be drawn.

The teacher has to make it plausible for the students that the amount of reflections, the flexibility of strategic ways of solution, an attitude of questioning, and the individual request for proving (Winter, 1983) at least are good reasons to feel proud of one’s own capability. The easier that goes, the more a steady culture of meta-cognition is implemented in the classroom, so that everybody can talk about the problem in a natural and habitual way.

Students by themselves will offer reasoning and proofs for solutions quite naturally if the teacher has asked ‘why’ before (in the beginning: in substitution for the child).

In the same way, with the role model of the teacher, the students’ sensibility, diversity, and valuations of the aspects mentioned above will increase and be established as an attitude. This points to an educational assignment of mathematics education which leads far beyond the subject and the subject matter.

5 final remarks

The project NaDiMa has reached more than half time, and we have already gained important experiences. In the second part of the project an extension and evaluation of the first project activities will take place (at the moment the second field test is running, partly finished). In the center of the project are the teachers as well as the concrete design of mathematics lessons.

We also suggest to keep in mind that the described concept of natural differentiation within substantial learning environments is not meant as an exclusive one for the whole range of mathematical learning and teaching, though rather likely for its major part. Training the basic facts e.g. or intro-

ducing a specific procedure, may require other practices. Above all, successful and motivating learning processes should be possible and are desirable for as many students as possible.

notes

- 1 Acknowledgement: The work is supported by grant 142453-LLP-1-20089-1-PL-COMENIUS-CMP.
- 2 See for more details: www.nadima.eu

references

- Bönsch, M. (1976). *Differenzierung des Unterrichts: Methodische Aspekte*. München: Ehrenwirth.
- Bönsch, M. (2004). *Differenzierung in Schule und Unterricht*. München: Oldenbourg.
- Burton, L. (1987). *Thinking Things Through*. Oxford: Basil Blackwell.
- Freudenthal, H. (1974). Die Stufen im Lernprozeß und die heterogene Lerngruppe im Hinblick auf die Middenschool. *Neue Sammlung*, 14, 161-172.
- Geppert, K. (1981). *Differenzierender Unterricht - konkret. Analyse, Planung und Gestaltung. Ein Modell zur Reform des Primarbereichs*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
- Griffin, P. (2009). What makes a rich task? *Mathematics Teaching*, 212, 32-34.
- Hengartner, E. et al. (2006). *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht*. Zug: Klett & Balmer.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. Utrecht: Freudenthal Institute.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den (2001, ed.). *Children learn mathematics*. Utrecht: Freudenthal Institute.
- Hirt, U. & B. Wälti (2009). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Seelze: Kallmeyer.
- Kilic, H. et al. (2010). Techniques for small-group discourse. *Teaching Children Mathematics*, 16(6), 350-357.
- Klafki, W. & H. Stöcker (1976). Innere Differenzierung des Unterrichts. *Zeitschrift für Pädagogik*, 4, 497-523.
- KMK - Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2005 ed.). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich Beschluss vom 15.10.2004*. München: Wolters Kluwer.
- Krauthausen, G. (2006). Minusmauern - ein variiertes Aufgabenformat. *Praxis Grundschule*. 1, 6-8.
- Krauthausen, G. (2009). Kinder machen mathematische Entdeckungen mit Zahlenmauern. In: Leuders, T. et al. (eds.). *Mathemagische Momente*. Berlin: Cornelsen Scriptor, 86-101.
- Krauthausen, G. & P. Scherer (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik. 3rd Edition*. Heidelberg: Spektrum.
- Krauthausen, G. & P. Scherer (2011, in preparation). Natürliche Differenzierung - Motivation, Einstellung und Selbstkonzept im Mathematikunterricht.
- Moser Opitz, E. (2009). Ich liebe es einfach, mit Zahlen und Brüchen zu jonglieren. Begründungsmuster zur Einstellung zum Fach Mathematik in Klasse 5 und 8. *Journal für Mathematik-Didaktik*. 30(3/4), 181-205.
- NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. Commission on Standards

- of School Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.
- Neubrand, J. & M. Neubrand (1999). Effekte multipler Lösungsmöglichkeiten: Beispiele aus einer japanischen Mathematikstunde. In: Selter, C. & G. Walther (eds.). *Mathematikdidaktik als design science*. Leipzig: Klett Grundschulverlag, 148-158.
- Paradies, L. & H. J. Linser (2005). *Differenzieren im Unterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Reh, S. (2005). Warum fällt es Lehrerinnen und Lehrern so schwer, mit Heterogenität umzugehen? - Historische und empirische Deutungen. *Die Deutsche Schule*, 97(1), 76-86.
- Scherer, P. (1997). Substantielle Aufgabenformate – jahrgangsübergreifende Beispiele für den Mathematikunterricht, Teil III. *Grundschulunterricht*, 6, 54-56.
- Scherer, P. (1999). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte: Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung*. 2nd Edition. Heidelberg: Edition Schindele.
- Scherer, P. (2007a). Investigating children learning mathematics - investigating mathematics. In: Novotná, J. & H. Moraova (eds.). *SEMT 2007. Proceedings: Approaches to Teaching Mathematics at the Elementary Level*. Prague: Charles University, 22-32.
- Scherer, P. (2007b). Unscharfbar«. Unlösbar Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. *Grundschulunterricht*, 2, 20-23.
- Scherer, P. & H. Steinbring (2006). Noticing Children's Learning Processes - Teachers Jointly Reflect Their Own Classroom Interaction for Improving Mathematics Teaching. *Journal for Mathematics Teacher Education*. 9(2), 157-185.
- Speer, N. M. & J. F. Wagner (2009). Knowledge Needed by a Teacher to Provide Analytic Scaffolding During Undergraduate Mathematics Classroom Discussions. *Journal for Research in Mathematics Education*. 40(5), 530-562.
- Spinath, B. et al. (2002). *SELLMO - Skalen zur Erfassung der Lern- und Leistungsmotivation. Manual*. Göttingen: Hogrefe.
- Streefland, L. (1990). Free Productions in Learning and Teaching Mathematics. In: Gravemeijer, K. et al. (eds.). *Contexts Free Productions Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education*. Utrecht: Freudenthal Institute, 33-52
- Tillmann, K.-J. (2004). System jagt Fiktion. Die homogene Lerngruppe. *Friedrich Jahresheft XXII. Heterogenität. Unterschiede nutzen - Gemeinsamkeiten stärken*, 6-10.
- Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. In: Streefland, L. (ed.). *Realistic Mathematics Education in Primary School. On the occasion of the opening of the Freudenthal Institute*. Utrecht: Freudenthal Institute, 21-56
- Valls-Busch, B. (2004). Rechnen und entdecken am Mal-Plus-Haus. *Die Grundschulzeitschrift*. 177, 22-23.
- Verboom, L. (2002). Aufgabenformate zum multiplikativen Rechnen. Entdecken und Beschreiben von Auffälligkeiten und Lösungsstrategien. *Praxis Grundschule*, 2, 14-25.
- Vollstädt, W. (1997). Differenzierung im Unterricht. Oder: Prüfungswissen kompakt. *Pädagogik*. 12, 36-40.
- Walther, G. et al. (2008). Mathematische Kompetenz im internationalen Vergleich: Testkonzeption und Ergebnisse. In: Bos, W. et al. (eds.). *TIMSS 2007. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in*

- Deutschland im internationalen Vergleich*. Münster: Waxmann, 49-85.
- Wielpütz, H (1998). Das besondere Kind im Mathematikunterricht - Anmerkungen aus der Sicht einer reflektierten Praxis, Beobachtung und Beratung. In: Peter-Koop, A. (ed.). *Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule*. Offenburg: Miltenberger, 41-58.
- Winkeler, R. (1976). *Differenzierung: Funktionen, Formen und Probleme*. Ravensburg: Maier.
- Winter, H. (1983). Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 1, 59-95.
- Wittmann, E. C. (2001a). Developing mathematics education in a systematic process. *Educational Studies in Mathematics*. 48(1), 1-20.
- Wittmann, E. C. (2001b). Mathematics in Designing Substantial Learning Environments. In: M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.). *PME 25. Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.1). Utrecht: Freudenthal Institute, 193-197.
- Wittmann, E. Ch. & G. N. Müller (2004). *Das Zahlenbuch. Mathematik im 4. Schuljahr. Lehrerband Neubearbeitung*. Leipzig: Klett Grundschulverlag.

1 + 1 is genoeg

- hoeveel rekenen is nodig om van wiskunde te houden? -

A. Goddijn
Flsme, Universiteit Utrecht

1 het rekenen is uitgevonden!

Groot nieuws, ik las het kort geleden: het rekenen is uitgevonden! Het stond niet in de krant, maar in 'Prometheus geboeid', een theaterstuk van zo'n 2500 jaar oud. Waarom ben jij hier door de goden aan de rotsen vastgekluiserd, vragen omstanders daarin aan de hoofdpersoon van het stuk. Prometheus zegt dat het was omdat hij de mensen hielp in de moeilijke dagen van weleer:

Geen vast kenteken voor de winter hadden zij,
voor bloesemende lente of vruchtenweelde van de
zomer; zonder zin of overleg deden
zij alles, tot ik hen de sterren leerde met
hun moeizaam te verklaren op- en ondergang.
Dan kwam 't getal, die kunde bij uitnemendheid
die 'kvond voor hen, en 't schrift met lettertekenen
waardoor men 't Al onthoudt: de moeder aller kunst.

Voor 'die 'k vond voor hen' ἐξῆνυγον geeft het woordenboek twee betekenissen: uitvinden en ontdekken. Getallen staan hier vlakbij de gang van de sterren. De mythische anti-god Prometheus heeft daarin van geschiedwetenschappers vaak zijn historische gelijk gekregen. Het oudst bekende wis-rekenkundig document is een botje van 22.000 jaar oud, het Ishangobotje (fig.1), waarop ingekerfde streepjes te zien zijn.



figuur 1: het Ishangobotje (bron: Wikimedia)

Eén veronderstelling is dat het astronomische betekenis heeft gehad (Fauvel, 1987). Precies zoals Prometheus vertelt. Rekenen past niet alleen bij sterren en seizoenen, het gaat ook samen met redelijk overleg, met moeizaam verklaren en met zin. Het verheft!

Mijn eerste rekenopdracht van 2010 sloot aan op vinden of uitvinden van getallen. De opgave luidt 'Maak 2010' en zeilde binnen op een nieuwjaarskaart (fig.2). Getallen maak je ook volgens de zender van de kaart zelf; komt er denken bij, dan wordt het nog leuk ook.



figuur 2: nieuwjaarskaart (Kool & De Moor, 2009)

Een voor de handliggende reactie op 'Maak 2010' grijpt terug op het tellen zelf. $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ is het doorlopende antwoord dat uiteindelijk stilstaat bij $1 + 1 = 2010$.

De uitdaging is nu het feestelijk op papier te krijgen. Op één A4'tje, dat precies mooi tot in de hoeken vol is, zoals in figuur 3.

Dan begint het denken vanzelf met de vraag: 'Hoeveel tekens moeten op die bladzijde komen?'

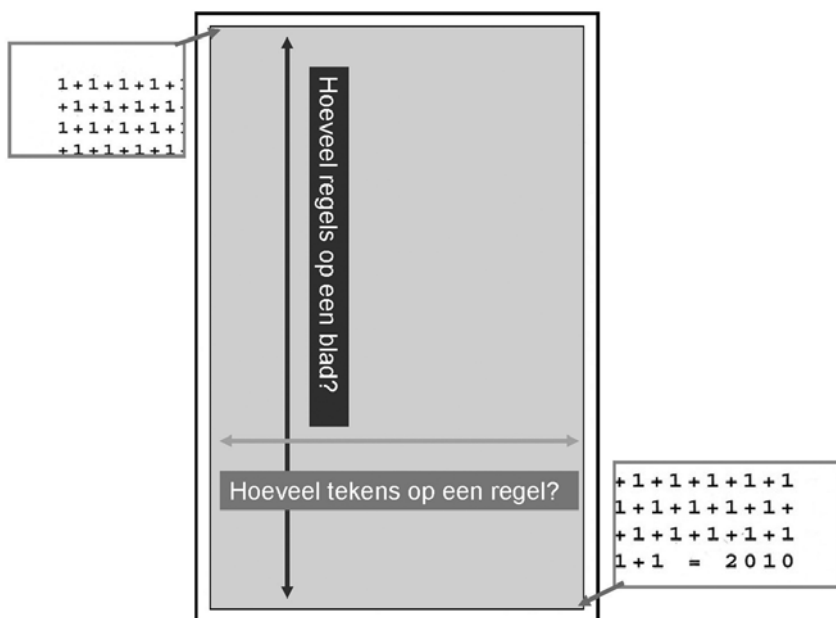
Uiteraard 2010 keer '1' en 2009 keer '+'; tot slot nog 7 tekens (waaronder twee spaties) voor het staartje ' $= 2010$ '. Samen 4026 tekens. Een mooi vel krijgen we, als we een font met vaste breedte kiezen, courier bijvoorbeeld. De regels bestaan dan allemaal uit evenveel tekens. Een lelijk streperig vel ontstaat als alle regels (op de laatste na) beginnen met het cijfer 1 en eindigen met het teken '+'. Dat doen we dus niet en de regels krijgen

daarom ofwel één eentje meer dan de plusjes, ofwel één plusje meer dan de eentjes. Dat uiteraard afwisselend. De 1-enen staan dan zo'n beetje opgesteld als de sterren in de Amerikaanse vlag. In dit patroon is in elke regel het aantal tekens oneven.

Gezocht: geschikte getallen voor 'breed maal lang is 4026' waarin 'breed' oneven is en 'geschikt' betekent, dat het redelijk moet passen.

De kenmerken van een echte wiskundeopgave zijn in dit vraagstuk aanwezig: zo willen we 2010 maken!

De opgave is zelfbedacht, komt uit een behoefte voort, kan betrekkelijk eenvoudig geformuleerd worden, bevat een impliciete roep om schoonheid en het is nog niet bekend óf er wel een oplossing is (fig.3).



figuur 3: zo willen we 2010 maken!

2 de botjes van 4026

Om te weten hoe we 4026 uit een geschikte vermenigvuldiging kunnen krijgen, kijken we hoe we 4026 kunnen maken uit de kleinste botjes van het vermenigvuldig-gebeuren: de ondeelbare getallen.

Begin met delen door 2 en reken handig:

$$\begin{aligned} 4026 &= 2 \times 2013 && \text{(alle cijfers half)} \\ &= 2 \times 3 \times 671 && \text{(eerst een hap van 1800} \\ &&& \text{bij delen van 2013 door 3)} \end{aligned}$$

Nog eens delen door 3 werkt niet, 5 en 7 passen ook niet in 671. Het volgende geschikte ondeelbare getal is 11. Kenners zien direct dat 11 past.

$$\begin{aligned} &2 \times 3 \times 11 \times \dots && \text{(want } 7 = 6 + 1, \text{ de 11-proef)} \\ 4026 &= 2 \times 3 \times 11 \times 61. \end{aligned}$$

61 kunnen we verder niet delen.

Oneven breedtes die mogelijk zijn, zijn opgebouwd uit de getallen 3, 11, en 61. Zoals 3×11 en 11×61 of 3, 11 en 61 zelf. Alleen 61 biedt uitzicht op een mooie bladzijde van 61 tekens breed en 66 regels hoog. Met een tekstverwerker met *courier* aan boord wordt de klus via een paar *copy* en *paste*-slagen snel afgemaakt.

3 11-proef in twee patronen

Jawel, maar wat was dat toch met die 11-proef? Daar ga ik nu op in; op de eerste plaats omdat de 11-proef zo aardig is en op de tweede plaats om nog een kenmerk van mooie wiskunde te tonen.

Met de 11-proef kunnen we bij een groot getal voorspellen of het deelbaar is door 11, zonder dat we de deling uitvoeren. Twee voorbeelden om te laten zien hoe het werkt.

- 45738 is deelbaar door 11, want $4 - 5 + 7 - 3 + 8 = 11$ en 11 is deelbaar door 11;
- 123474321 is niet deelbaar door 11, want $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 = 3$ en dat is niet deelbaar door 11.

Een getal is deelbaar door 11 als de ‘alternerende’ som van de cijfers 0 of een 11-voud is (Kool & De Moor, 2009).

Waaróm is dit zo zeker en zo algemeen waar?

Bij wiskundigen staat elke bewering altijd eerst in het beklaagdenbankje. Het vak van de grootste zekerheid wordt bedreven vanuit de hoogste twijfel. Je gaat niet op gezag van vreemden aannemen, dat de beklaagde de waarheid spreekt, maar geeft hem wél uitvoerig gelegenheid zich te verdedigen en zijn waarheid aan te tonen.

Luister hier kritisch naar het betoog, want de bewijslast is in dit geval zwaar. Het gaat namelijk niet om twee voorbeelden, maar om één uitspraak over ‘alle’ getallen. In de bewering van de 11-proef zit het woord

‘alle’ verstopt in het onbepaalde lidwoord aan het begin van de zin. ‘Een getal ..’ betekent dat het getal waar het over gaat niet gespecificeerd wordt: de bewering moet voor welk getal dan ook uit de rij 1, 2, 3, 4, .. aangetoond worden.

Houd de beklagde dus goed in de gaten als die eerst in gaat op het getal 45738, zeker omdat hij een gidsvoorbeeld naar voren brengt.

$$\begin{aligned}
 40000 &= 4 \times (9999 + 1) = 4 \times 9999 + 4 \\
 5000 &= 5 \times (1001 - 1) = 5 \times 1001 - 5 \\
 700 &= 7 \times (99 + 1) = 7 \times 99 + 7 \\
 30 &= 3 \times (11 - 1) = 3 \times 11 - 3 \\
 8 &= 8 \times (1 + 1) = 8 \times 1 + 8
 \end{aligned}$$

Opgesplitst naar cijfer en positie. Rechts zijn handig 11-vouden afgesplitst. 9999, 1001, 99, 11 zijn namelijk zelf 11-vouden. Bij sommige regels zit je onder, bij andere boven een 11-voud. Als we dat eenmaal weten zien we dat we alleen naar $4 - 5 + 7 - 3 + 8$ hoeven te kijken. Als dat een 11-voud is, is het hele getal 45738 het dus ook.

Dat 9999, 1001, 99, 11 zelf 11-vouden zijn, is wel na te gaan. Nu kunnen we eventueel hetzelfde doen met een andere getal, bijvoorbeeld 62304. Maar, vertrouwend op het patroon, rekenen we dan natuurlijk direct $6 - 2 + 3 - 0 + 1 = 8$ uit. Geen 11-voud. Sterker nog, de rest bij deling door 11 van 62304 is 8. Gevonden zonder staartdeling!

De meesterzet in de redenering van de verdachte is het aangeven van het patroon; dat patroon garandeert dat de 11-proef ook voor andere getallen dan 45738 opgaat. Zo is aan de hand van een getal de eigenschap voor veel getallen aangetoond.

Het zwakke punt is dat we toch nog moeten ‘weten’ dat 9999, 1001, 99, en 11 deelbaar door 11 zijn. Sterker nog: dat we voor grotere getallen eigenlijk nog met lege handen staan. Ja, we zijn eventjes heel streng.

De oplossing is dat nu wéér met een patroon gewerkt moet worden, maar nu met een patroon dat een gezonde dosis ‘enzovoort’ bevat, om te voorkomen dat de methode stopt bij een of andere grens. Hieronder is dat tweede patroon de voortzetting van de rij 11, 99, 1001, 9999. De onderstrepingen zijn steeds van paartjes 9-s of 1-en, waardoor we zien dat alle getallen in de rij veelvouden van 11 zijn, en natuurlijk afwisselend onder en boven getallen liggen uit de rij 10, 100, 1000, enzovoort.

$$\begin{array}{llll}
 11 = & 10 & +1 = & \underline{11} \\
 99 = & 100 & -1 = & \underline{99} \\
 1001 = & 1000 & +1 = & \underline{99} \ 0 \quad + \ \underline{11} \\
 9999 = & 10000 & -1 = & \underline{99} \ \underline{99} \\
 100001 = & 100000 & +1 = & \underline{99} \ \underline{99} \ 0 \quad + \ \underline{11}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}999999 &= 1000000 - 1 = \underline{99\ 99\ 99} \\10000001 &= 10000000 + 1 = \underline{99\ 99\ 99\ 0} + \underline{11} \\99999999 &= 100000000 - 1 = \underline{99\ 99\ 99\ 99}\end{aligned}$$

Per twee regels gebeurt er steeds hetzelfde. Het gaat onbeperkt volgens het patroon door; we weten daarom dat de 11-proef voor onbeperkt grote getallen opgaat.

In de nadruk op ‘patroon’ schuilt een belangrijk inzicht. We kunnen alleen helderheid krijgen over het oneindige van iets, als we er een of ander patroon in kunnen zien. Dat is die gezonde dosis ‘enzovoort’. Dat patroon kan ingewikkeld zijn.

4 het getal van Leopold Bloom

Op <http://www.unc.edu/~rowlett/units/large.html> staan de juiste Amerikaanse en Europese namen voor de getallen 10, 100, 1000, enzovoort. Het laatste getal op die pagina is de 1 met 99 nullen, in goed Nederlands *sexdeciljard*.

De jarden en de joenen wisselen elkaar als volgt af.

miljoen	= 1 000 000
miljard	= 1 000 000 000
biljoen	= 1 000 000 000 000
biljard	= 1 000 000 000 000 000
triljoen	= 1 000 000 000 000 000 000
triljard	= 1 000 000 000 000 000 000 000

Voor in de naam wordt ook geteld: bi, tri, quadri, quinti, enzovoort. Tot en met inderdaad sexdeci, zestien. Bij de joenen gaat het om het aantal groepen van zes nullen, de jarden staan hebben er nog drie meer.

Sexdeciljard; $99 = 16 \times 6 + 3$, inderdaad zestien. Het daarop volgende getal (nou ja) is een 1 met 100 nullen. Dat getal heeft van de negenjarige Milton Sirota in 1938 de naam *googol* gekregen. $\text{Googol} + 1$ is niet deelbaar door 11, want er staan 99 nullen tussen de twee enen.

(Het woord ‘Google’ is dé tikfout van de twintigste eeuw. Larry Page, mede-ontwikkelaar van een bekend internet-zoekprogramma, maakte hem.)

Naarmate we grotere getallen voor ons zien, krijgen we steeds meer de neiging ze te beschrijven met hun omvang in cijfers. Een handige manier werkt iets algemener: je schrijft op hoeveel factoren van een bepaalde soort een getal heeft; zo betekent 2^5 het getal $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, vijf tweeën met elkaar vermenigvuldigd. 10^{99} is dan het al bekende sexdeciljard. Deze notatie is erg efficient: de reus is getemd met vier cijfers.

Zou 9^{99} dan het grootste getal zijn, dat met drie cijfers kan worden opgeschreven? Het lijkt van wel, maar bedenk dat niets ons tegenhoudt ook in de cijfers boven de grondlijn (de exponent) te zetten wat we willen. Zo maak je bijvoorbeeld het getal 10^{googol} , googolplex genoemd. (Googolplex bestaat natuurlijk ook.) Dat mag ook in drie verdiepingen, opgeschreven worden:

$$10^{10^{10}}$$

Helaas: zes cijfers, en als we de nullen weg zouden laten, stond er gewoon 1. Het grootste getal van drie cijfers, en geen andere tekens of letters is veel kleiner dan googolplex

$$9^{9^9}$$

maar toch nog zo groot dat het op James Joyce gigantische indruk maakte. Dat blijkt in zijn *Ulysses* (Joyce, 1922). Hoofdpersoon is Leopold Bloom, een uiterst gewone Dubliner en daardoor als moderne Elckerlick de tegenpool van godenbestormer Prometheus. Bloom was een getal aan de weet gekomen

... dat zo het met een betrekkelijke mate van precisie berekend was, zo groot was geworden en zoveel plaatsen had vereist, bijvoorbeeld de negende macht van de negende macht van 9, dat men, nadat de uitkomst was vastgesteld, 33 dicht bedrukte delen van 1000 pagina's elk van ontelbare katernen en riemen dundrukpapier nodig zou hebben gehad om de gehele geschiedenis te bevatten van de gedrukte eenheden, tientallen, honderdtallen, duizendtallen, tienduizendtallen, honderdduizendtallen, miljoentallen, tienmiljoentallen, honderdmiljoentallen, miljardtallen, daar de kern van de nevelvlek van elk cijfer onder 10 in elke serie in kort bestek in potentie verheven kon worden tot de uiterste kinetische resultante van elke macht van elk van zijn machten.

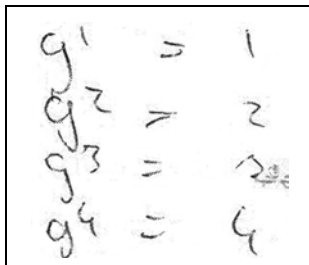
Bij het werkstuk van 'Maak 2010' op een A4'tje moest de lettergrootte ruim genomen worden om de bladzijde te vullen. Voor Blooms schatting van het aantal cijfers nemen we wegens 'dicht bedrukt' dan ook 3×4026 tekens op een bladzijde. Dat levert in 33 banden van 1000 bladzijden ruw geschat 398574000 cijfers op.

Zou Joyce zomaar wat gegokt hebben of is de schatting misschien heel redelijk?

Om achter het juiste aantal cijfers te komen, legde ik de vraag aan leerlingen 5-vwo voor. Die merkten snel op dat aanvankelijk in de rij van machten van 9 elk nieuw getal steeds één cijfer langer is: 9, 81, 729, 6561, 59049, enzovoort.

Geretta en Bart noteerden het een tikkeltje aanvechtbaar, maar binnen de context van de gestelde vraag heel duidelijk, zoals in figuur 4.

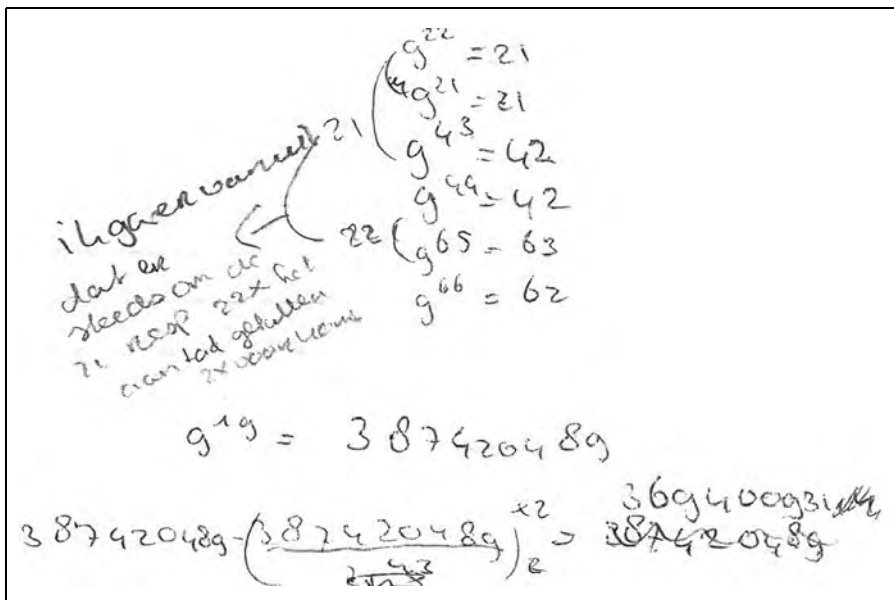
De rekenmachine toonde dat er bij de stap van 9^{21} naar 9^{22} en weer bij de stap van 9^{43} naar 9^{44} géén extra cijfer nodig is. Er leek een patroon gevonden te zijn en dat patroon werd onmiddellijk uitgebuit.



$$\begin{array}{lcl} 9^1 & = & 1 \\ 9^2 & = & 2 \\ 9^3 & = & 3 \\ 9^4 & = & 4 \end{array}$$

figuur 4: lelijk, maar wel duidelijk genoteerd

Hoe vaak komt zo'n niet-ophogende stap in de rij van de $9^9 = 387420489$ opeenvolgende machten van 9 voor? In figuur 5 zien we dat daartoe $387420489 / 43$ uitgerekend werd. Per groep van 43 machten moeten er twee cijfers af.



illegaal vanuit 21

dat er
steeds om de
21 naar 22 x het
aantal cijfers
van 9^21 komt

$$\begin{array}{lcl} 9^{22} & = & 21 \\ 9^{21} & = & 21 \\ 9^{43} & = & 42 \\ 9^{44} & = & 42 \\ 9^{65} & = & 63 \\ 9^{66} & = & 62 \end{array}$$

$$9^{19} = 387420489$$

$$387420489 - \frac{(387420489)^{43}}{2^{43}} = 369400931$$

figuur 5: aantal cijfers van het getal van Bloom

Geretta en Bart houden het uiteindelijk op 369400931 cijfers. Het is die dag niet gelukt deze leerlingen duidelijk te maken, dat het heel zeker is dat

het patroon, dat tot macht 43 klopt, straks zeker niet helemaal opgaat. Met wat moeite valt namelijk wel aan te tonen, dat als er een regelmatig patroon zou zijn, er een macht van 9 gelijk zou moeten zijn aan een macht van 10. Er was gelukkig een Paul in de klas die al bekend was met het zwaardere rekenmiddel 'logaritme'. Zonder toelichting deel ik hier zijn (correcte) antwoord mee. Het getal van Bloom heeft exact 369693100 cijfers, de laatste twee nullen zijn hier echt goed. Geretta en Bart vonden hun antwoord behoorlijk nauwkeurig en wat cijferaantal betreft is dat ook zo. Jammer dat het wáre getal 9 tot de 9 tot de 9-de wel met 292169 factoren 10 gemist wordt, een kniesoor die daar op let.

5 krakend ijs onder de wiskunde van rond 1900

We hebben het gehad over het grootste getal van drie cijfers, zonder letters en andere tekens genoteerd. Ik denk dat het dat het getal van zo even inderdaad was. Maar echt nagegaan is het nog niet. Ik denk dat het waar is, maar ook dat we op zijn minstens vlakbij krakend ijs zijn. Laten we eens voorzichtig kijken naar het merkwaardige getal in figuur 6.



figuur 6: de paradox van Richard (1905): het kleinste getal dat niet met achtenzeventig tekens kan worden opgeschreven is hier met achtenzeventig tekens opgeschreven

Kent u die van de straat van de schoenmakers?

Een schoenmaker beweerde de beste schoenmaker van de stad te zijn. De tweede ging met zijn reclame er stevig overheen, hij noemde zich de beste schoenmaker van de wereld. De derde won gemakkelijk met de bescheiden leus 'Beste schoenmaker van de straat'.

Paradoxen en paradoxale definities zijn al heel oud. De Bijbel bevat er al een. Hier is Paulus, in de brief aan Titus (die zich op Kreta bevond), I,12:

Een van hun eigen profeten, zelf een Kretenzer, heeft gezegd: 'Kretenzers zijn onverbeterlijke leugenaars, gemene beesten, vadsige vreters'.

De bewuste profeet was de filosoof Epimenides, Kretenzer uit de zesde eeuw voor Christus, die hier inderdaad letterlijk door Paulus wordt geciteerd.

Deze rarigheden hebben gemeen dat ze ontkennend naar zich zelf verwijzen: de Kretenzer die iets over ligende Kretenzers zegt (liegt ie zelf ook?), een getal dat zijn eigen beschrijving gebruikt en die ontkent.

Het verbijsterende van deze gedachten is niet dat ze op papier bestaan, maar dat ze in de periode rond 1900 als een regelrecht gevaar voor de wiskunde zelf werden gezien. Hoe kon dat gebeuren?

In de negentiende eeuw worden allerlei intuïtief gebruikte wiskundige constructie zoals getal, ruimte, het begrip limiet en raaklijn, de concepten oneindig groot en oneindig klein en de manieren om er mee te werken van hechte grondslagen voorzien; dat alles om de wiskunde zo zeker en veilig mogelijk te maken.

Zo publiceerde Giuseppe Peano in 1889 vijf grondslagen voor de natuurlijke getallen. De eerste drie vertellen hoe de natuurlijke getallen door hun opvolgstructuur worden vastgelegd. Eigenlijk zoals wij '2010' maakten.

- 1 Nul is een getal.
- 2 Elk getal heeft een opvolger en die opvolger is ook een getal.
- 3 Nul is niet de opvolger van enig getal.

De stevigste algemene onderbouwing van de wiskunde werd toentertijd in de verzamelingenleer van Cantor gevonden, waarbinnen ook de natuurlijke getallen soepel konden worden ondergebracht. De zogenaamde naïeve verzamelingenleer liet echter toch - zo bleek keer op keer - paradoxen als die van hierboven toe. Alarm alom, ons mooie bouwwerk stort in!

Er waren grofweg gesproken twee reacties op de situatie.

De ene probeerde de wiskundige objecten nauwkeuriger te beschrijven en wel zo vergaand, dat de paradoxen niet meer mogelijk waren. Onderschat het niet, een goede versie van de axiomatiek van de verzamelingenleer kwam pas tot stand in de jaren twintig van de vorige eeuw!

De andere reactie probeerde de hele wiskunde van axioma's te ontdoen, door te proberen de wiskunde niet meer te zien als een 'vak waarin de logica gebruikt' wordt om uit fundamentele waarheden andere af te leiden, maar als een 'onderdeel van de logica' zelf. Kampioenen van deze laatste visie zijn Gottlieb Frege en Bertrand Russell. Vooral Russell was hierbij geïnspireerd door zijn held Leibniz, de filosoof uit de zeventiende eeuw die in feite toen al dit zogenaamde 'logicistische' standpunt innam. Voltaire schreef zijn geestige novelle Candide onder andere als verzet tegen Leibniz'

vooruitgangsgeloof, dat de wereld door zuiver logisch juist handelen begrepen kon worden en dat de benodigde logica als het ware in een soort rekenmachine kon worden gerealiseerd. Voltaire laat in *Candide* nadrukkelijk de aardbeving (een tsunami, zoals wij zouden zeggen) in Lissabon van 1755 langkomen om aan te tonen dat onze wereld niet de best van alle mogelijke werelden is, wat Leibniz juist wel dacht op grond van een mix van theologische en logicistische argumenten.

Sinds vorig jaar maakt een stripboek over de grondslagenstrijd van rond negentienhonderd veel furore: 'Logicomix', door een team waarin onder andere Apostolos Doxiadis, al eerder bekend als groot popularisator van moeilijke wiskunde. Zie de bladzijde in figuur 7 waar Russell 'zijn' paradox ontdekt: de verzameling van alle verzamelingen die zichzelf niet als element bevatten. Bevat die zichzelf nu wel of niet?



figuur 7: Russel ontdekt de paradox die hem jarenlang zal achtervolgen

In 'Logicomix' is Russell zelf de verteller, die tijdens de tweede wereldoorlog een lezing houdt voor een groep Amerikaanse pacifisten. Russell was zelf extreem pacifist tijdens de eerste wereldoorlog. Ik laat het aan de lezer over om na te gaan of Russell uiteindelijk, in weerwil van zijn gehoor, toch in de sporen van Voltaire stapt (en de Amerikanen naar Europa wil sturen) of dat hij pacifist blijft.

Wat de betekenis van de grondslagenstrijd voor de wiskunde zelf betreft nog dit. Een gevolg ervan is zeker geweest dat er grote aandacht is ontstaan voor correcte en volledig onderbouwde bewijsvoering, volgens sommigen ten nadele van intuïtie en ja, van begeestering. Voor grote wiskundigen is begeestering met fundamentele correctheid goed combineerbaar; voor de minderen, zeg maar de niet-professionele wiskundigen in de grote klas van het dagelijks leven, lijkt dat minder mogelijk en ook niet nodig. Henri Poincaré (1854-1914) zou mij zeker steunen in deze mening. Hij is rond 1900 een van de weinige wiskundigen die meende dat het gedoe rond de antinomieën en paradoxen minder belangrijk was dan het leek. Alleen als we er op uit zijn paradoxen te bouwen, lukt dat en lijkt het gebouw in gevaar. Gaat het om onderzoeken van wiskundige objecten als ruimte en getal en ook subtilere zaken en hun bijhorende abstracte structuur, dan is de kritische gebruikte intuïtie niet de slechtste gids om tot nieuwe vondsten te komen, ook bij onderzoek van nieuwe vormen van ruimte als die met meer dan drie dimensies en met eigenschappen als negatieve kromming, zoals in de relativiteitstheorie werden gebruikt, waar Poincaré allemaal met succes aan meewerkte.

Een goede gids door de roerige periode van de grondslagenstrijd 1860-1940 met veel informatie over de diverse opvattingen is 'Plato's Ghost' (Gray, 2007).

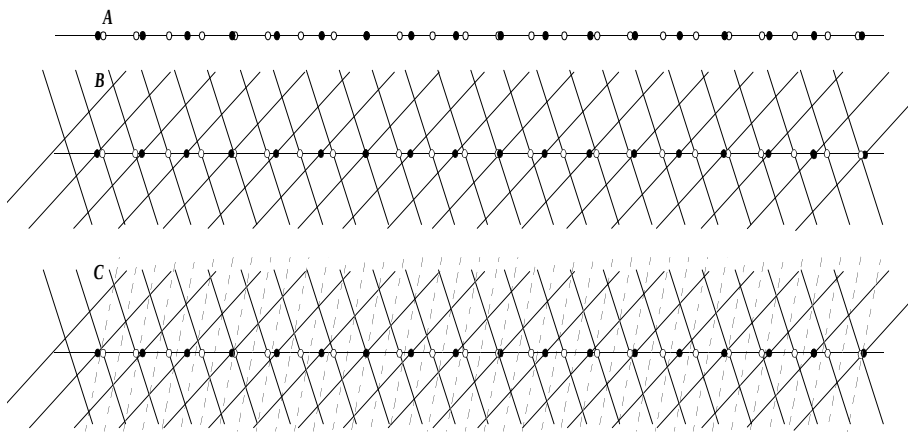
6 de dans van het derde kikkertje

Als contrast met het voorgaande besluit ik met een (in mijn ogen) charmant stukje wiskunde, waarin in de bijhorende redenering geen getal, formule of iets dergelijks voorkomt. Het is meetkunde die uit de getallenlijn opbloeit. Aanleiding is het springen op de getallenlijn, zoals dat in het proefschrift 'Met sprongen vooruit' (Menne, 2001) tot leidraad van een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars is gemaakt. Daarin staan veel schetsjes als in figuur 8; er zijn vooral veel sprongen van 1 en 10.

In mijn eerste voorbeeld treden twee springende kikkertjes op. De groene kikker (onder) springt met een sprong van 7, de blauwe (boven) met een sprong van 9. Ze laten hun gekleurde sporen op de getallenlijn na. Die vin-

Dat gaan we niet doen. Integendeel, we gooien voor het maken van de stelling van het derde kikkertje al onze getallen de deur uit en kijken naar rijtjes stippen op gelijke afstand. Twee van die rijtjes zien we in figuur 11, witte en zwarte. Ze lopen nu onbeperkt in beide richtingen door. Kunnen we nu ook een derde regelmatige onbeperkte rij maken die precies in alle vakje een (grijze stip) heeft?

Het kan echt altijd! Zie het driestappenbewijs in figuur 11.



figuur 11: springen op de getallenlijn kan zonder $1 + 1$

Bij A zijn de twee stippenrijen getekend met witte en zwarte stippen. Bij B zijn twee bundels evenwijdige lijnen toegevoegd, zodat een soort schuin ruitjespatroon ontstaat. Bij elk van de stippen hoort een lijn. Bij C wordt duidelijk wat het nut is van de lijnen bij B. Daar is een derde bundel lijnen getekend, gestippeld, diagonaal over de schuine ruiten.

Kijk, die lijnen snijden precies in de oorspronkelijke rechte lijnen een derde reeks punten in. Dáár komen de grijze punten. Het kan, het kan altijd.

7 tot slot

De redenering bij het derde kikkertje had inderdaad $1 + 1$ niet nodig. De onverwachte wending is hier het buiten de lijn van de stippen treden, Door het probleem in een bredere wereld te bekijken, was een goed begrijpbare verklaring toegankelijk geworden. Maar ik hoor hier en daar een enkele lezer wat knorren: zoets vind ik toch nooit.

Nee, misschien is dat wel zo, maar wat hindert dat nu eigenlijk? Mijden we de Nachtwacht, Yesterday en de ijsbaan omdat we zelf het niveau van

Rembrandt, Lennon en Ireen niet halen?

Tussen 1 + 1 van ons begin en de kikkertjes ligt een breed gebied, waarop iedereen wel een beetje kan scoren en ook kan meegenieten. De voorwaarde voor het plezier, voor het genieten van de schoonheid van rekenen-wiskunde zit dan ook niet in het leveren van een prestatie, of in de moeilijkheidsgraad, maar in het plezier van het denken op zich en de tinteling van het kleine of grote lichtje dat daarbij hoort.

De stelling van de drie kikkertjes is in de vorm van de twee getalrijen gevonden door een Australische wiskundeleraar, Sam Beatty, in 1921. Er bestaat ook een mooi en, zoals wiskundigen het graag zeggen, elegant bewijs van Ostrowski uit 1927 met wat algebra (Honsberger, 1975).

Het hier gegeven bewijs werkt nog onder iets algemener omstandigheden dan bij de rijen van Beatty. Ik vond het kijkend naar een schuine streep over een tegelvloer. Dat beeld is precies het derde deel van figuur 11. Uitvinden, vinden, ontdekken: niet zo verschillend allemaal.

literatuur

- Doxiadis, A. & C. Papadimitriou *Logicomix, Een epische zoektocht naar de waarheid*. Nederlandse vertaling Mat Schifferstein. Amsterdam: De Vliegende Hollander.
- Fauvel, John & Gray, Jeremy (1987). *The History of Mathematics: A Reader*. The Open University. New York: Palgrave Macmillan.
- Gray, Jeremy. (2008) *Plato's Ghost: the modernist transformation of mathematics*. Princenton, New Jersey: Princeton University Press.
- Honsberger, Ross (1975). *Ingenuity in Mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Joyce, J. (1922) *Ulysses*. Nederlandse vertaling John Vandenbergh (1969). Amsterdam: Bezige Bij.
- Kool, M. & E. de Moor (2009). *Rekenen is leuker dan/als je denkt*. Amsterdam: Bert Bakker.
- Menne, J.J.M. (2001). *Met sprongen vooruit*. Utrecht: Universiteit van Utrecht (proefschrift).

Van videoclip naar Talenten-Kaart¹

J. Corvers, J. de Lange & P. Leseman
Flsme, Universiteit Utrecht

1 inleiding

Je hoeft geen onderzoeker te zijn om te weten dat er in jonge kinderen ongelooflijk veel talent zit. Ze zijn nieuwsgierig, proberen van alles uit en het leven is één grote ontdekkingstocht. Om deze talenten optimaal tot hun recht te laten komen, is het belangrijk om ze in kaart te brengen. De ‘TalentenKaart’ gaat voor het eerst in de wereldgeschiedenis de wetenschappelijke talenten van jonge kinderen in kaart brengen. Zo krijgen we inzicht in hun onbegrensde exploratiedrang en de natuurlijke neiging de wereld te willen begrijpen. Met deze kennis kunnen we niet alleen in het onderwijs, maar ook in de kinderopvang, de voorschoolse educatie en thuis, de leefomgeving van jonge kinderen zo inrichten dat ze zich op alle fronten onbevangen en optimaal kunnen ontwikkelen.

2 kinderen kunnen meer

De achterliggende gedachte van het onderzoeksproject ‘TalentenKracht’ is dat jonge kinderen veel meer kunnen dan over het algemeen wordt aangenomen. Deze gedachte heeft de afgelopen jaren van diverse kanten steun gekregen. Zowel psychologen als hersenonderzoekers rapporteren hun zorg rond de ontwikkeling van jonge kinderen. Cognitief psychologen, verzameld in een werkgroep van de ‘National Research Council’, publiceren in 2005 een rapport met een verontrustende boodschap: we doen kinderen te kort. We halen er, cognitief gezien, niet uit wat er in zit. Er zit te weinig lijn in wat wij ze van hun geboorte tot hun achtste aanbieden op het gebied van reken- en natuuronderwijs. Hersenonderzoekers, verenigd in het ‘Centre for Educational Research and Innovation’ van de ‘Organisation for Economic Co-operation and Development’ (OECD 2007), doen er nog een schepje bovenop. Jonge kinderen kunnen ook neurocognitief gezien veel meer dan we tot nog toe aannamen. Jonge hersenen zijn heel leergierig en

nog heel erg vormbaar. Door alle objecten en verschijnselen in hun omgeving intensief te onderzoeken, creëren de hersenen in de vroege kindertijd fundamentele cognitieve en emotionele structuren die van grote invloed zijn op het latere leren en op de talenten die dan zichtbaar worden. Ook van hun kant komt het dringende advies om jonge kinderen meer te stimuleren in hun mogelijkheden. Deze adviezen sluiten naadloos aan bij de bevindingen uit een breed scala aan vakgebieden, die beschreven staan in het standaardwerk 'How People Learn' (National Research Council, 2000):

- Jonge kinderen proberen constant de wereld om zich heen te begrijpen. In enkele domeinen, taal in de eerste plaats, lijken ze een natuurlijke aanleg te hebben. Maar ook inzicht in biologische en natuurkundige causaliteit en in getallen is er al heel vroeg in de ontwikkeling.
- Kinderen weten misschien minder, maar zijn zeker niet dom. Ze kunnen heel goed redeneren over zaken die ze willen begrijpen.
- Kinderen zijn goede probleemoplossers. Door hun grenzeloze nieuwsgierigheid kunnen ze buiten de geijkte kaders treden, nieuwe vragen stellen en nieuwe oplossingen vinden. Zij doen dit met een zekere hardnekkigheid, omdat succes en begrip voor hen heel motiverend zijn.
- Kinderen ontwikkelen al op heel jonge leeftijd kennis omtrent hun eigen leermogelijkheden - metacognitie genoemd. Deze metacognitieve competentie geeft hen de mogelijkheid om te 'plannen' en de mate van succes te beoordelen, en eventuele fouten te corrigeren.
- De natuurlijke capaciteiten van kinderen behoeven steun en faciliteiten. De ontwikkeling van de cognitieve competenties van jonge kinderen hangt sterk af van stimulering en interactie. Volwassenen spelen een cruciale rol in het bevorderen van de nieuwsgierigheid van jonge kinderen.

Alle reden om niet alleen in de breedte maar ook in de diepte naar de talenten van jonge kinderen te zoeken. Hoe redeneren kinderen, hoe formuleren ze problemen, hoe bedenken ze oplossingen, hoe onderzoeken ze dingen? Wanneer we hier (meer) inzicht in hebben, kunnen we kijken hoe we deze talenten het beste kunnen stimuleren en verdiepen.

3 meten van 'talent'

Het doel van de 'TalentenKaart' is om de talenten, mogelijkheden en kwaliteiten van kinderen van drie tot zes jaar op het gebied van wetenschap en techniek in kaart te brengen. Om dat te kunnen doen, moet je die talenten eerst in beeld brengen. De TalentenKracht-onderzoekers van het Freuden-

thal Instituut (Universiteit Utrecht) doen dit door middel van video-opnamen. Eén of twee kinderen worden op een semi-gestructureerde wijze door een volwassene ondervraagd terwijl ze een probleem oplossen of de werking van een apparaat onderzoeken.² Door deze opnamen te analyseren, leer je heel veel over 'talent'.

Talent wordt dus in 'beeld' gebracht door het samenspel van kind, instrument en volwassene te filmen en te analyseren. Kind, instrument en volwassene vormen samen de zogenaamde 'talent-driehoek'. De essentie hiervan is dat talent niet iets constants is dat in het kind zit, maar ter plekke ontstaat in een dynamische interactie tussen kind, instrument en volwassene. Het gebruikte instrument en de vragen die de volwassene stelt, zijn cruciaal bij het ontlokken van talent bij het kind. Het ontwerpen van instrumenten en interventies speelt dan ook een belangrijke rol in het onderzoek van de satelliet Utrecht.

De analyse-fase moet antwoord geven op de centrale vragen van TalentenKracht:

- Wat zijn de talenten van kinderen op het gebied van wetenschap en techniek?
- Welke instrumenten zijn het meest geschikt om deze talenten te ontlokken?
- Hoe kun je dat proces didactisch het beste ondersteunen?

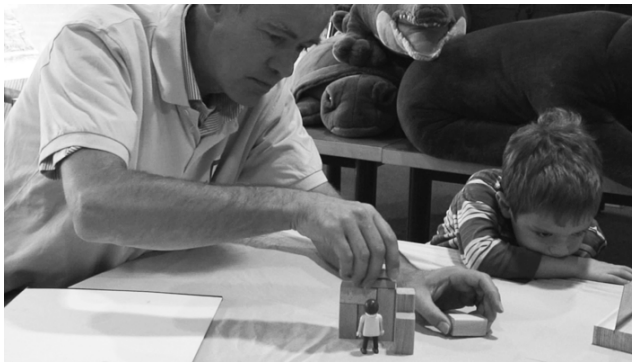
4 analyse van talentstructuur

Het videomateriaal levert een schat aan spontane intuïtieve reacties op, creatieve redeneringen en originele metaforen die kinderen bedenken om complexe verschijnselen te verwoorden. Beschrijven wat kinderen denken, doen en zeggen alleen, is echter niet voldoende voor het maken van een TalentenKaart. Hoewel veel mensen die de videoclips van TalentenKracht bekijken, welhaast intuïtief aanvoelen dat er sprake is van talent, dus van fundamentele en cognitief complexe inzichten, is een meer formele analyse van de structuur van die talenten noodzakelijk om de inzichten beter te kunnen duiden.

Zo'n analyse is ook nodig om preciezer te onderzoeken hoe in een concrete situatie met de gebruikte instrumenten en de vragen van de volwassene het talent van kinderen als het ware ontstaat. Het is een achterhaald idee dat 'talenten' al bij geboorte zijn meegegeven en kant-en-klaar liggen opgeslagen in hersencircuits in de hoofden van kinderen, waar ze alleen nog maar, zoals bij een schakelaar, door een miraculeuze gebeurtenis aangezet hoeven te worden. De videoclips laten zien dat talent, in welk inhoudelijk

domein dan ook, niet statisch is. Er is altijd sprake van een veranderlijk constructieproces. In dat constructieproces proberen kinderen eerst lagere orde inzichten uit. Daarna komen ze in een paar stappen, geholpen door wat het materiaal ontlokt én door de vragen van de volwassene, tot inzichten op een hoger niveau.

Een theorie die de interactie tussen persoon en omgeving centraal stelt en handreikingen biedt voor het analyseren van de structuur van bovengenoemde ‘inzichten’, is de *Skill Theory* van Fischer (1980; Fischer & Bidell, 2006). Deze theorie beschouwt de ontwikkeling van cognitieve vaardigheden als de gesitueerde constructie van hiërarchieën van deelvaardigheden. Cognitieve vaardigheden zijn volgens Fischer ‘dynamisch gesitueerde structuren’, die veranderen van situatie tot situatie en zich ontwikkelen van concrete sensomotorische handelingen naar abstracte mentale structuren. Of een persoon een bepaalde vaardigheid laat zien, is zowel afhankelijk van kenmerken van de persoon als van kenmerken van de situatie, zoals de gebruikte materialen en de aanwezige sociale of didactische ondersteuning. Voor elke taak zijn volgens de theorie tien niveaus van deelvaardigheden te formuleren, die oplopen in complexiteit. Het is niet zo dat altijd alle niveaus worden doorlopen. De hoogste niveaus zullen door jonge kinderen (nog) niet bereikt worden, maar ook volwassenen halen lang niet altijd het hoogste niveau.



figuur 1: Marien en de spiegel

Aan de hand van Fischer's *Skill Theory* worden inzichtschalen gemaakt bij de verschillende activiteiten uit het onderzoek van ‘TalentenKracht’. De inzichtschalen geven aan de hand van wat kinderen concreet hebben laten zien en horen, weer wat bij iedere activiteit de talentstructuur is. De inzichtschalen zijn in eerste instantie ontstaan door reflectie op de video-clips, maar uiteindelijk gebaseerd op een formele analyse. De schalen vatten samen welke stappen kinderen doorgaans doorlopen als ze met een

activiteit aan de slag gaan en hoe ze lagere orde inzichten combineren tot hogere orde inzichten. Niet het proces, maar de ‘structuur van het proces’ van talentconstructie is in de inzichtschalen vervat. Om dit te illustreren, bespreken we hieronder kort de video van Marien (vijf jaar en vier maanden) terwijl hij experimenteert met een spiegeltje (fig.1). Deze videoclip is te bekijken op de website van TalentenKracht.³

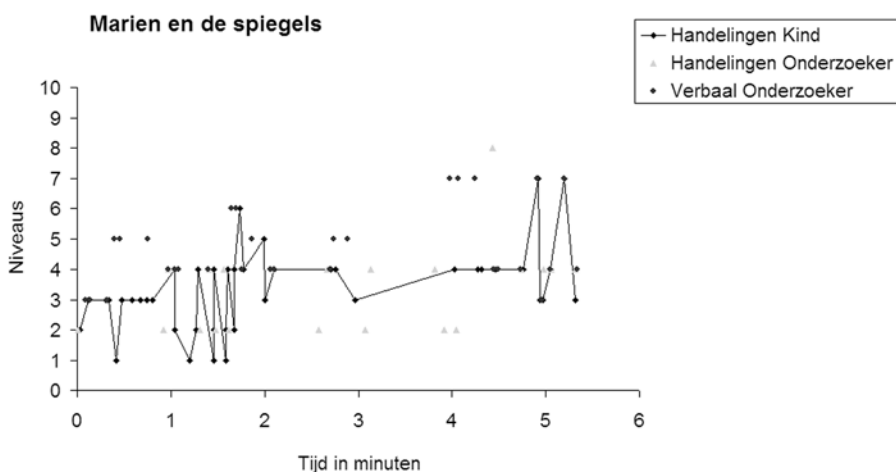
5 Marien, de spiegel en het poppetje achter de muur

Begrijpen hoe een spiegel werkt en hoe je daarmee om een muurtje van blokjes heen kunt kijken om een poppetje te zien, is een voorbeeld van een inzicht dat in een paar opeenvolgende stappen ontstaat. De video van Marien kan gescoord worden met een formele inzichtschaal, afgeleid uit Fischer's *Skill Theory*. In figuur 2 is een korte versie van deze inzichtschaal te zien. Het inzicht wordt daarin ontleed in handelingen van het kind op tien niveaus. In de lijst worden bij elk niveau één of meer voorbeelden van handelingen van het kind gegeven.

- 1 Het kind grijpt, kijkt of wijst willekeurig.
- 2 Het kind pakt de spiegel. / Het kind wijst een object aan.
- 3 Het kind herkent zijn eigen spiegelbeeld en dat van andere personen of objecten. / Het kind beweegt zijn hoofd óf de spiegel op en neer.
- 4 Het kind beweegt zijn hoofd óf de spiegel op en neer en ziet willekeurige objecten in de spiegel.
- 5 Het kind kan doelbewust een object in de spiegel te zien krijgen door zowel zijn eigen positie als de positie van de spiegel te veranderen.
- 6 Het kind positioneert de spiegel op een zodanige manier dat het vrijwel direct het beoogde object in de spiegel te zien krijgt (het gaat om een object dat ook zonder spiegel is waar te nemen).
- 7 Het kind kan de spiegel zo positioneren dat het via de spiegel naar een poppetje achter een muurtje kan kijken (het kind past de algemene regel toe dat je onder een hoek kunt kijken).
- 8 Het kind kan de geleerde regel toepassen in een nieuwe context (bijvoorbeeld in een andere setting met een ander spiegeltje en andere objecten).
- 9 Het kind kan de geleerde regel veralgemeniseren, bijvoorbeeld naar straling van een lichtbron (het kind vergelijkt de eigen kijklijn met een lichtstraal).
- 10 Het kind kan de onderliggende principes van weerkaatsing van licht uitleggen en verklaren, bijvoorbeeld door het tekenen van kijklijnen. Het kind kan met begrip de gelijkheid *hoek van inval = hoek van uitval* verwoorden.

figuur 2: inzichtschaal bij de activiteit ‘de spiegel’ (verkorte versie)

De schaal bij 'de spiegel' loopt van heel basale inzichten en vaardigheden, zoals 'grijpen', 'kijken', 'wijzen', enzovoort, tot hogere, meer complexe vaardigheden, zoals 'het kind kan doelbewust een object in de spiegel te zien krijgen door zowel zijn eigen positie als de positie van de spiegel te veranderen', naar - uiteindelijk - nog abstractere inzichten als 'het kind kan de onderliggende principes van weerkaatsing van licht uitleggen en verklaren, bijvoorbeeld door het tekenen van 'kijklijnen' of 'het kind kan met begrip de gelijkheid *hoek van inval = hoek van uitval* verwoorden'. Marien bereikt dit stadium trouwens nog niet. Zulke abstracte principes moet hij waarschijnlijk nog construeren door met andere spiegels in andere situaties te spelen en door expliciet gestimuleerd te worden om de inzichten te verwoorden of uit te tekenen. Het toepassen van de formele inzichtsschaal op de stappen die Marien zet in zijn proces van talentconstructie, levert een grafische weergave op van het 'talentproces' (fig.3).



figuur 3: grafische weergave van de ontwikkeling van het inzicht van Marien (5;4) gedurende de activiteit 'de spiegel', in relatie tot de interventies van de volwassene

De donkere, ononderbroken lijn geeft de ontwikkeling weer van het inzicht van Marien over de tijd, ongeveer zes minuten. De lichte driehoekjes en de donkere bolletjes in de grafiek geven respectievelijk het voordoen en vragen stellen door de volwassene weer. Te zien is dat Marien gaandeweg steeds complexere inzichten ontwikkelt en dat deze vaak vooraf gegaan worden door interventies van de volwassene. Aan het begin, links in de grafiek, zien we dat de spiegel eerst op een *trial-and-error* manier wordt geëxploreerd. Marien ziet zichzelf in de spiegel en weet dat het spiegelbeeld een beeld van hemzelf is. Hij toont het besef dat het veranderen van de

positie van de spiegel tot verandering van het beeld leidt. Veel verder komt hij in het begin nog niet. De vragen van de interviewer nodigen Marien echter uit tot stappen die tot een hoger, meer omvattend niveau van inzicht zullen leiden. Dit heeft zichtbaar effect: de pieken in de grafiek worden hoger en tonen daarbij bovendien een zekere stabiliteit (het niveau van inzicht, zoals blijkt uit het gedrag, valt niet meteen weer terug naar een lager niveau). Marien begrijpt nu hoe de spiegel geplaatst moet worden als je iemand wilt zien via de spiegel, maar zijn inzicht beperkt zich aanvankelijk tot de situatie waarin hij zichzelf als waarnemer, de spiegel als instrument en de ander als object in één blikveld kan overzien.

Wanneer de interviewer met blokjes een muurtje bouwt waar een poppetje achter is verstopt (Marien weet dat, want hij heeft het bouwen van het muurtje en het verstoppen van het poppetje zien gebeuren), lukt het hem niet meteen om de spiegelrelatie opnieuw toe te passen. Op de vraag of hij de spiegel zó kan neerzetten dat hij het poppetje kan zien, blijft het antwoord aanvankelijk uit. Dat komt, zo vermoeden wij, omdat Marien het poppetje zelf niet meer direct kan zien. Er is zelfs sprake van een terugval in inzicht, want hij probeert nu maar wat uit. De interviewer demonstreert dan hoe je de spiegel moet verplaatsen en moet draaien. Marien pikt het meteen op, plaatst de spiegel nu zelf en draait hem zodanig dat het poppetje inderdaad te zien is. Hij zet het spiegeltje trouwens net iets anders neer dan de interviewer deed (dat moet ook, want Marien zit op een andere plek aan tafel en zou anders zelf niet goed in de spiegel kunnen kijken). We concluderen daaruit dat er sprake is van een hoger inzicht, niet van simpel imitatiegedrag. Marien komt hiermee op het zevende niveau van inzicht dat wordt onderscheiden, het hoogste niveau dat hij in deze taaksituatie bereikt. De essentiële rol van de volwassene is goed zichtbaar: pieken in Mariens ontwikkelingsproces worden steeds voorafgegaan door bolletjes en driehoekjes die staan voor de interventies van de volwassene in woord en gebaar.

De ononderbroken lijn in de grafiek weerspiegelt het inzicht van Marien dat zich manifesteert in zijn handelingen. Deze lijn komt in hoge mate overeen met de ontwikkelingslijn van het inzicht dat Marien laat zien door middel van zijn verbale uitingen. Om de leesbaarheid van de grafiek te vergemakkelijken, hebben we die ontwikkelingslijn hier weggelaten.

6 abstractie

Een belangrijke vraag is of Mariens inzicht al meteen een algemenere geldigheid heeft en of het ook meteen in andere situaties, met andere spiegels

en andere objecten, of in een situatie met meer spiegels in een aparte constellatie, zoals bij de periscoop, toegepast kan worden (niveau 8). Ons vermoeden is van niet. Een dergelijke generalisatie en abstractie van inzichten is misschien nog wel 'meer' wat je bedoelt met talent, maar om daartoe te komen moeten kinderen nieuwe ervaringen opdoen met soortgelijke instrumenten die toch ook weer net iets anders zijn, in situaties die ook weer net iets anders zijn.

Abstractie komt neer op het combineren van de concrete inzichten die in verschillende, steeds net iets andere situaties met net iets andere, maar *in abstracto* verwante instrumenten ontstaan, tot een hoger geordende cognitieve structuur. Een formele analyse van de structuur biedt aanknopingspunten om, over de afzonderlijke clips en instrumenten heen, te onderzoeken hoe meer algemene en abstracte inzichten ontstaan en hoe je dat proces zou kunnen bevorderen. Voor de 'TalentenKaart' betekent dit dat, met de formele analyse in de hand, gezocht wordt naar clusters van talenten, die tezamen een abstractere structuur vormen, en van instrumenten en vraagstellingen die aan de vorming van die clusters ondersteuning kunnen geven.

7 tot slot

Er zijn inmiddels meer dan honderd activiteiten met verschillende kinderen gefilmd. Als we al deze opnamen op deze manier analyseren, hebben we een enorme schat aan informatie over de talenten van kinderen. Voor elke activiteit kunnen de niveaus van inzicht worden beschreven, hoe ze vorm krijgen in concreet onderzoeksgedrag en in specifieke redeneringen en metaforen. Hoewel de formele structuur van de inzichten over activiteiten en domeinen heen naar onze verwachting constant is, varieert uiteraard de verschijningsvorm - en die is uiteindelijk, vanwege de tastbaarheid, voor educatieve doeleinden het meest interessant. Alle concrete inzichten tezamen, geordend naar niveau en domein, vormen straks de 'TalentenKaart'. Clusters die binnen domeinen en over domeinen heen kunnen worden aangebracht, voegen belangrijke informatie toe om generalisatie en abstractie te kunnen bevorderen.

De 'TalentenKaart' zal een uniek overzicht geven van wat jonge kinderen kunnen op het gebied van wetenschap & techniek. Het levert praktische tips voor instrumenten en materialen, met een omschrijving van hun talentontlokkende en motiverende eigenschappen. Daarnaast is er een voor iedereen goed bruikbaar overzicht van de verschillende manieren waarop een volwassene (leidster, leerkracht of ouder) de ontluikende

talenten van kinderen het beste kan ondersteunen. Wat zijn bijvoorbeeld goede vragen? Iedereen weet het; niets is zo moeilijk als het stellen van de juiste vragen om de processen van begrip, probleemoplossen, informatieverwerking, oorzaak en gevolg in gang te zetten en zich te laten ontwikkelen. Het is een kunst die lang niet alle leidsters, leerkrachten en ouders van nature beheersen. De nieuwe inzichten en de praktische uitwerkingen bieden bovendien een uiterst waardevol kader dat gebruikt kan worden voor het ontwerpen van nieuw materiaal en beschikbaar is voor onderwijsontwikkelaars, vakdidactici, bedenkers van vroege interventieprogramma's en natuurlijk speelgoedfabrikanten.

noten

- 1 Met dank aan E. Feijs en P. van Oers van het Freudenthal Instituut voor hun bijdrage aan het ontwikkelen van de inzichtschaal, het scoren van de opname van Marien en het maken van de grafiek.
- 2 Voorbeelden hiervan zijn te zien op de website van TalentenKracht: www.talentenkracht.nl.
- 3 Zie: www.talentenkracht.nl > Video.

literatuur

- Fischer, K.W. (1980). A theory of cognitive development: The control and construction of hierarchies of skills. *Psychological Review*, 87, 377-531.
- Fischer, K.W. & T.R. Bidell (2006). Dynamic development of action and thought. In: W. Damon & R.M. Lerner (editors-in-chief) and R.M. Lerner (vol. ed.). *Handbook of child psychology. Vol. 1: Theoretical models of human development* (6th ed). Hoboken, NJ: Wiley, 313-399.
- National Research Council (2000). *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School: Expanded Edition*. Washington DC: National Academic Press.
- National Research Council (2005). *Mathematical and Scientific Development in Early Childhood*. Washington DC: National Academic Press.
- Organization for Economic Co-operation and Development (2007). *Understanding the Brain. The Birth of a Learning Science*. Paris: OECD.

Beeld van het rekenonderwijs

- Rekenonderwijs door de ogen van leerkrachten en leerlingen

M. van der Burg & M. Espeldoorn-Finke
Bureau Spring, Utrecht
Expertis Onderwijsadviseurs, Hengelo

1 inleiding

Het onderwijs in rekenen-wiskunde staat volop in de belangstelling. Er wordt veelvuldig gediscussieerd over wat goed reken-wiskundeonderwijs is en hoe we dat het beste vorm kunnen geven. Daarbij worden ook uitspraken gedaan over de kwaliteit van het rekenonderwijs op de basisscholen in Nederland. Vooral onderzoekers, ontwikkelaars en vakdidactici zijn tot zover aan het woord geweest. Maar hoe denken leerkrachten en leerlingen in de basisschool over hun eigen rekenonderwijs? Deze vraag was voor de NVORWO en SLO aanleiding om onderzoek te doen onder de titel 'Beeld van het rekenonderwijs op de basisschool'. Leerkrachten en leerlingen zijn uitgenodigd om deel te nemen aan het onderzoek. Via een digitale enquête zijn meningen, verwachtingen, ideeën en behoeften van leerkrachten van alle groepen van de basisschool en van leerlingen uit groep uit 7 en 8 geïnventariseerd. Het onderzoek beoogt relevante informatie te verzamelen die door instellingen gebruikt kan worden bij verdere activiteiten rondom rekenonderwijs in basisscholen, zoals het opzetten van rekenpilots, innovatietrajecten, speerpunten, leerplanontwikkeling en toetsing. Ook kan het onderzoek aanleiding geven tot verdere verdieping van uit de enquête gebleken relevante onderwerpen of problemen.

In dit artikel worden de hoofdlijnen van het onderzoek weergegeven. Eerst worden de bevindingen uit het onderzoek onder leerkrachten gepresenteerd en vervolgens de bevindingen uit het onderzoek onder leerlingen.

2 onderzoek

onderzoeksvragen

De hoofdvraag van het onderzoek luidt:

Hoe denken leerkrachten en leerlingen in het basisonderwijs over hun eigen rekenonderwijs?

Deze hoofdvraag wordt verdeeld in twee deelvragen, namelijk:

- 1 Welk beeld hebben leerkrachten in het basisonderwijs van hun eigen reken- en wiskundeonderwijs?
- 2 Welk beeld hebben leerlingen van groep zeven en acht van de basisschool van hun eigen rekenonderwijs?

Onderzoeksvraag 1 wordt onderverdeeld in de volgende thema's:

- 1 Waardering ten aanzien van eigen rekenonderwijs.
- 2 Rekenbeleid
- 3 Professionalisering.
- 4 Visie ten aanzien van inhoud en didactiek van het vak rekenen.
- 5 Wensen en behoeften ten aanzien van de toekomst van het rekenonderwijs.

De thema's zijn vervolgens onderverdeeld in de volgende deelvragen:

- 1.1 Hoe bekwaam vinden leerkrachten zichzelf ten aanzien van rekenonderwijs?
- 1.2 Hoe bekwaam vinden leerkrachten zichzelf ten aanzien van niveaudifferentiatie tijdens de rekenles?
- 2.1 Wat is de mening van leerkrachten ten aanzien van rekenbeleid?
- 2.2 Over welke aspecten ten aanzien van rekenbeleid wordt overleg gevoerd in het basisonderwijs?
- 3.1 Wat is de behoefte van leerkrachten ten aanzien van hun eigen professionalisering met betrekking tot het vak rekenen?
- 3.2 Wat vinden leerkrachten van belang wanneer het om professionalisering met betrekking tot het vak rekenen gaat?
- 4.1 Wat is de visie van leerkrachten ten aanzien van de inhoud en didactiek van het vak rekenen?
- 5.1 Welke wensen en behoeften hebben leerkrachten voor de toekomst ten aanzien van goed rekenonderwijs?

Onderzoeksvraag 2 is onderverdeeld in de volgende thema's:

- 1 Tevredenheid.
- 2 Eigen rekenvaardigheden.
- 3 Beleving.
- 4 Rekenen in de toekomst

Deze thema's zijn vervolgens uitgewerkt in de volgende deelvragen:

- 1 Hoe tevreden zijn leerlingen over hun rekenonderwijs?
- 2 Welk beeld hebben de leerlingen van hun eigen rekenvaardigheden?
- 3 Hoe beleven de leerlingen hun rekenlessen?
- 4 Hoe moet het rekenonderwijs er in de toekomst uit zien?

opzet

In dit kwantitatieve onderzoek wordt nagegaan hoe leerkrachten en leer-

lingen tegen hun eigen rekenonderwijs aankijken en hoe ze dat waarderen. De populatie van dit onderzoek betreft leerkrachten, directeuren, interne begeleiders en remedial teachers werkzaam in het basisonderwijs en leerlingen uit groep 7 en 8 van de basisschool. Omdat een nieuw toetsinstrument ontwikkeld moest worden, is er uitgebreid vooronderzoek gedaan. Aan de hand van uitspraken, gedaan door de deskundigen en mensen uit het veld, zijn items voor de proefenquête ontwikkeld. Er is gekozen voor een directe, gestructureerde dataverzamelmethode, een digitale enquête via internet. De enquête was *online* van 29 mei tot en met 4 augustus 2009. Via diverse kanalen (onderwijsbegeleidingsdiensten, leden van de NVORWO, pabo's, het netwerk schoolbegeleiders rekenen en diverse websites) is aandacht geschonken aan de enquête en aandacht gevraagd voor het invullen ervan.

onderzoeksgroep

Uit de operationele populatie is een steekproef getrokken. De respondenten uit de *a*-selecte steekproef bestaan uit 575 leerkrachten en 512 leerlingen (fig.1 en fig.2).

Respondenten uit de steekproef	Aantal	Procent	Gemiddelde leeftijd
Vrouwen	456	79	42
Mannen	119	21	49
Totaal	575	100	44

figuur 1: weergave van de onderzoeksgroep leerkrachten

Respondenten uit de steekproef	Aantal	Groep 7		Groep 8		Leeftijd
		N	%	N	%	M
Jongens	262	108	41	154	59	10
Meisjes	250	102	41	148	59	12
Totaal	512	210	41	302	59	11

figuur 2: weergave van de onderzoeksgroep leerlingen

3 bevindingen vanuit het onderzoek onder leerkrachten

waardering eigen rekenonderwijs

Leerkrachten zijn heel tevreden over hun eigen bekwaamheid ten aanzien van het vak rekenen en iets minder tevreden over het rekenonderwijs dat

zij geven op de basisschool (fig.3). Deze hoge waardering komt overeen met de bevindingen uit TIMSS-2007. Ook uit dat onderzoek blijkt dat de meerderheid van de Nederlandse leerkrachten zich voldoende tot zeer goed toegerust vindt om rekenlessen te geven. Hierbij moet opgemerkt worden dat het beeld dat de leerkracht heeft van zijn eigen bekwaamheid een subjectief beeld is. De leerkracht construeert immers zijn eigen referentiekader (Boekaerts & Simons, 2003).

	Thema	Schaal	Schaal
	Waardering ten aanzien van eigen rekenonderwijs	Bekwaamheid eigen rekenonderwijs	Bekwaamheid niveaudifferentiatie
NI	575	575	575
M	4.14	4.10	4.19
SD	0.39	0.40	0.47

figuur 3: gemiddelde waardering van leerkrachten voor hun eigen bekwaamheid ten aanzien rekenonderwijs op een schaal van 1 tot 5

De eigen bekwaamheid ten aanzien van het vak rekenen wordt iets lager gewaardeerd, maar ook hier vindt de leerkracht zichzelf in ruim voldoende mate bekwaam. Het onderzoek van de KNAW-Commissie rekenonderwijs basisschool (KNAW, 2009) stelt echter dat de wiskundige kennis van leraren beperkt en ontoereikend is.¹ Dit komt niet overeen met de subjectieve beleving van leerkrachten uit dit onderzoek. In het kader van dit onderzoek is het weergeven van die subjectieve beleving toch relevant. Hiermee kan namelijk wel een beeld dat leerkrachten hebben van hun eigen rekenonderwijs gegeven worden.

rekenbeleid

Leerkrachten zijn in geringe mate tevreden over het beleid dat op hun school gevoerd wordt ten aanzien van het vak rekenen. Zij geven aan het belangrijk te vinden dat er gezamenlijke afspraken gemaakt worden op het gebied van rekenonderwijs en dat deze afspraken ook worden nagekomen door collega's. Hierover is de leerkracht tevreden. In mindere mate zijn zij tevreden over hun leidinggevend. De manier waarop het rekenbeleid op school vorm krijgt wordt als *top down* ervaren. Leerkrachten zien in dat onderwijs de verantwoordelijkheid van het hele schoolteam is, maar ze zien dat niet terug in de onderwijspraktijk. Zij ervaren weinig samenwerking tussen team en directie en vinden dat zij weinig betrokken worden bij het vormgeven van het rekenbeleid op hun school. Er is weinig aandacht voor de gemeenschappelijke visie (fig.4). Hier ligt een taak voor de school-

leiding. Die zal de ontwikkeling van een gezamenlijk beleid moeten bevorderen en hierop moeten reflecteren op individueel en teamniveau (Pameijer, Beukering & De Lange, 2009).

Vraag / stelling	Gemiddelde	Standaard deviatie
Items met een tien-puntschaal		
Hoe waardeert u de kwaliteit van het rekenonderwijs bij u op school	6.98	1.10
Hoe waardeert u het rekenbeleid bij u op school	6.55	1.50
Items met een vijf-puntschaal		
Ik vind het belangrijk dat er op school gezamenlijke afspraken gemaakt worden rond het geven van rekenen	4.73	0.55
Ik kom de afspraken die gemaakt zijn in het team met betrekking tot rekenen na	4.32	0.82
Ik vind dat iedere basisschool een rekencoördinator moet hebben	3.78	1.23
Mijn collega's komen de afspraken die gemaakt zijn in het team met betrekking tot rekenen na	3.58	0.93
Ik word betrokken bij de formulering van het rekenbeleid op mijn school	3.42	1.41
Onze school werkt planmatig aan het verbeteren van rekenonderwijs	3.35	1.22
Binnen onze school zijn er afspraken over de te volgen didactiek	3.35	1.18
Ik ben betrokken bij de formulering van het rekenbeleid op mijn school	3.27	1.45
Binnen onze school hebben we een gemeenschappelijke visie op rekenen	3.25	1.14
Binnen onze school werken team en directie goed samen aan het rekenbeleid	3.21	1.23
Schaalscore Mening ten aanzien van rekenbeleid	3.50	0.56

figuur 4: mening van leerkrachten ten aanzien van het rekenbeleid op hun school per item

professionalisering

Leerkrachten geven aan zich te professionaliseren door regelmatig vakartikelen over rekenonderwijs of over het onderwijs in het algemeen te lezen. Van de aangegeven mogelijkheden tot professionalisering is er het minste behoefte aan overleg in een rekennetwerk met collega's van andere scholen

(fig.5 en fig.6). Een groot deel van de respondenten vindt dat er meer aandacht moet zijn voor professionalisering.

Mening over de stelling	Gemiddelde	Standaard-deviatie
Ik lees regelmatig vakartikelen over onderwijs in het algemeen	4.08	1.13
Ik lees regelmatig vakartikelen over rekenonderwijs	3.68	1.26
Ik heb behoefte aan meer professionalisering op het gebied van rekenonderwijs	3.58	1.07
Ik vind dat ik nog veel kan leren op het gebied van rekenonderwijs	3.55	1.19
Ik zoek regelmatig op internet naar aanvullingen of ideeën voor mijn rekenonderwijs	3.05	1.20
Ik zou graag, samen met collega's van andere scholen, deelnemen aan een rekennetwerk	2.98	1.32
Schaalscore Eigen professionalisering	3.62	0.75

figuur 5: behoefte aan professionalisering per onderwerp

De meeste aandacht moet volgens de respondenten uitgaan naar het voeren van diagnostische gesprekken met leerlingen. Ook meer tijd en aandacht voor leerlijnen, inhoud en didactiek van het rekenonderwijs worden belangrijk gevonden. Overleg met collega's over het vak rekenen en groepsbezoeken bij collega's tijdens een rekenles worden minder belangrijk gevonden.

Ik vind het belangrijk dat leerkrachten extra tijd besteden aan	Gemiddelde	Standaard-deviatie
Diagnostische gesprekken met leerlingen	4.36	0.79
Leerlijnen/inhoud/didactiek	4.26	0.84
Professionalisering	4.22	0.87
Continue bijscholing voor het vak rekenen	3.99	0.97
Rekenoverleg met collega's	3.75	0.95
Groepsbezoeken bij collega's	3.27	1.11
Deelname aan een rekennetwerk	2.98	1.05

figuur 6: onderwerpen met betrekking tot professionalisering ten aanzien van het vak rekenen waaraan leerkrachten hun aandacht en tijd moeten besteden

visie op rekenonderwijs

Figuur 7 laat zien dat leerkrachten zowel het leren cijferen en het hanteren

van vaste standaardprocedures belangrijk vinden, als interactie tussen leerlingen en het rekenen in contexten. Onderzocht is of er onderlinge verbanden zijn tussen items die betrekking hebben op 'visie van leerkrachten ten aanzien van inhoud en didactiek van het vak rekenen'. Er zijn echter geen correlaties gevonden.

Mening over de stelling	Gemiddelde	Standaarddeviatie
Ik vind het belangrijk dat leerlingen leren cijferen	4.46	0.80
Ik vind dat je zwakke rekenaars beter vaste standaardprocedures kunt leren	4.44	0.92
Ik vind interactie tussen leerlingen belangrijk voor het leren rekenen	4.37	0.85
Het leren uitrekenen van kale sommen garandeert niet dat je in dagelijkse situaties goed kan rekenen	4.19	0.90
Ik vind kunnen rekenen in contexten een belangrijk einddoel voor het rekenonderwijs	4.12	0.89
Ik vind het gebruik van modellen essentieel voor het leren rekenen	4.10	0.85
Ik vind het belangrijk dat leerlingen meerdere oplossingsstrategieën leren hanteren	4.07	0.95
Ik vind samenwerken van leerlingen belangrijk voor het leren rekenen	4.05	0.96
Veel rekenproblemen ontstaan door de veelheid van strategieën die de leerlingen krijgen aangeboden	3.56	1.22
Cijferen is makkelijker voor leerlingen dan kolomsgewijs rekenen	3.42	1.07
Ik vind dat contexten aan de basis moeten staan van het leren rekenen	3.38	1.26
Ik vind dat leerlingen eerst sommen moeten leren maken en deze daarna pas moeten toepassen in rekensituaties	3.09	1.35
Als leerlingen niet in contexten kunnen rekenen dan heeft het rekenonderwijs gefaald	2.94	1.17
Ik vind contexten een ballast bij het leren rekenen	2.78	1.22
Schaalscore Visie ten aanzien van inhoud en didactiek van het vak rekenen	3.25	0.54

figuur 7: visie van leerkrachten ten aanzien van inhoud en didactiek van het vak rekenen

wensen voor de toekomst

Op de open vraag: 'Als u de minister van onderwijs, uitgevers en/of ontwikkelaars of onderwijsondersteuners advies zou mogen geven ten aanzien van het rekenonderwijs, welke wensen, ideeën en veranderingen zou u aandragen?', hebben 491 leerkrachten gereageerd. Dat is 85 procent van de respondenten. De meeste opmerkingen (53 procent) worden gemaakt op het thema 'Visie ten aanzien van inhoud en didactiek van het vak rekenen'. Daarvan is 38 procent gericht tot methodemakers en ontwikkelaars. Ruim 10 procent van de leerkrachten vraagt om minder verschillende oplossingsstrategieën, zeker voor zwakke rekenaars, en om meer aandacht voor het leren van cijferen en standaardprocedures. Meer dan 20 procent van de leerkrachten vraagt de methodemakers en ontwikkelaars meer aandacht aan oefenen en automatiseren te besteden en 10 procent vraagt om minder verschillende somtypes per les. Een en ander geeft een beeld van zaken die leerkrachten van belang achten. Ook de interactie tussen leerlingen en het rekenen in contexten en in dagelijkse situaties worden erg belangrijk gevonden. Dit kan betekenen dat leerkrachten sterke accenten zullen moeten gaan leggen op uitdagingen en begeleiding. Bijvoorbeeld door het stellen van vragen de leerlingen uit te dagen informatie te verzamelen en daaruit voor hen betekenisvolle kennis te construeren (Letschert & Letschert-Grabbe, 2007). Leraren lijken nog te zoeken naar een evenwicht tussen enerzijds interactie en reflectie onder leiding van de leerkracht (bijvoorbeeld bij het oplossen van contextrijke opgaven) en anderzijds directe sturing van de leerling (bijvoorbeeld bij kale opgaven). De verschuiving van instruerend leerkrachtgedrag naar leerkrachtgedrag dat accenten legt op uitdaging en begeleiding is nog niet helemaal ingebed in de dagelijkse onderwijspraktijk. Leerkrachten hebben geen specifieke voorkeur voor meer instruerend of meer uitdagend reken-wiskundeonderwijs, maar streven naar een balans tussen verschillende instructievormen.

aanbevelingen vanuit het onderzoek onder leerkrachten

Naar aanleiding van de kwantitatieve en kwalitatieve gegevens uit dit onderzoek en de daaruit voortvloeiende conclusies worden de volgende aanbevelingen gedaan:

- leerkrachten hebben behoefte aan laagdrempelige bij- of nascholing, het liefst op de werkvloer;
- een extern deskundige zou deze nascholing samen met de rekencoördinator kunnen realiseren;
- het eigen maken van een vakinhoudelijk en vakdidactisch repertoire zou bij leerkrachten kunnen leiden tot meer inzicht in de complexiteit van het rekenonderwijs;
- leerkrachten moeten geholpen worden bij de didactische vertaling van

de onderwijsinhoud en het omgaan met verschillen tussen leerlingen in de klas. De fundamentele doelen (Expertgroep Doorlopende Leerlijnen, 2008) moeten zo uitgewerkt worden dat leerkrachten kunnen zien welk aanbod voor welke leerling relevant is;

- leerkrachten zouden meer kunnen luisteren naar leerlingen zodat het (reken)onderwijs niet alleen ‘voor’, maar ook ‘met’ leerlingen wordt gemaakt.

4 bevindingen vanuit het onderzoek onder leerlingen

Na analyse kan antwoord gegeven worden op de onderzoeksvraag: ‘Wat zijn de meningen en wensen van leerlingen van groep 7 en 8 in het basis-onderwijs over hun rekenonderwijs?’

tevredenheid

Met de vraag: ‘Hoe tevreden zijn leerlingen over hun rekenonderwijs?’, wordt de tevredenheid ten aanzien het rekenonderwijs van kinderen uit groep zeven en acht weergegeven. De leerlingen hebben hun waardering kunnen uitspreken over hun eigen rekenonderwijs door middel van het geven van een cijfer van 1 tot 10. De leerlingen waarderen het vak rekenen met een gemiddeld cijfer van 6.97 (fig.8).

Geslacht Groep (N)	Totaal		Jongens		Meisjes	
	M	SD	M (N)	SD	M (N)	SD
Groep 7 (209)	7.12	1.78	7.46 (107)	1.68	6.76 (102)	1.82
Groep 8 (303)	6.87	1.91	7.06 (154)	1.98	6.72 (148)	1.78
Totaal (512)	6.79	1.86	7.22 (262)	1.87	6.74 (250)	1.79

figuur 8: gemiddeld cijfer dat gegeven is voor het vak rekenen door leerlingen van groep zeven en acht van de basisschool.

Hierbij moet in acht worden genomen dat het gegeven cijfer niet alleen op het vak rekenen op zich betrekking hoeft te hebben, maar ook beïnvloed kan zijn door de manier waarop de leerkracht het rekenonderwijs in de groep vorm geeft. Het gemiddelde cijfer 6.97 is een voldoende, maar er spreekt geen grote waardering uit. Wanneer specifiekere gekeken wordt hoe dit cijfer tot stand is gekomen, wordt zichtbaar dat jongens gemiddeld genomen meer tevreden zijn over hun rekenonderwijs dan meisjes. Deze conclusie is eerder gevonden in het TIMSS-onderzoek van 2007. Evenals de

conclusie dat leerlingen die een hoger cijfer geven voor hun eigen rekenonderwijs het vak rekenen ook leuker vinden (Meelissen & Drent, 2008). De rekenprestaties van de leerlingen zijn in dit onderzoek weliswaar niet gemeten, maar wel bleek dat hoe moeilijker leerlingen rekenen vinden, des te minder ze het vak waarderen. Leerlingen hebben kenmerken genoemd waaraan een goede rekenles zou moeten voldoen. In de top vijf van genoemde kenmerken staan: 'hulp krijgen', 'goede uitleg', 'genoeg tijd hebben', 'geconcentreerd kunnen werken' en 'ervan kunnen leren'. Deze vijf kenmerken worden ook door Marzano (2003) en de KNAW-commissie (2009) genoemd als factoren die een positieve invloed hebben op leerlingprestaties.

eigen rekenvaardigheden

Om een antwoord te kunnen geven op de vraag: 'Welk beeld hebben de leerlingen van hun eigen rekenvaardigheden?', zijn items samengevoegd die betrekking hebben op leerlingactiviteiten tijdens de rekenles en items die betrekking hebben op de verschillende type rekenopdrachten die tijdens rekenlessen gemaakt worden. Daarnaast is in beeld gebracht welke rol de leerkracht speelt tijdens de rekenlessen bij het ontwikkelen van rekenvaardigheden.

activiteiten

Wat betreft de eigen rekenvaardigheden geven leerlingen aan dat ze het 'soms tot vaak' moeilijk vinden om uit te leggen hoe ze een opdracht uitrekenen. Tevens geven de leerlingen aan dat ze zelden meer rekentijd nodig hebben dan geboden wordt en dat ze het zelden moeilijk vinden om hulp aan klasgenoten te vragen (fig. 9 en fig.10).

Stelling	M	SD
Ik vind het moeilijk om uit te leggen hoe ik reken	2.14	0.78
Ik vind het moeilijk om te begrijpen hoe andere kinderen rekenen	1.89	0.59
Ik zou graag meer uitleg willen hebben	1.80	0.69
Ik heb meer tijd nodig voor rekenen dan andere kinderen	1.77	0.74
Ik heb meer uitleg nodig bij rekenen dan andere kinderen	1.61	0.74
Ik wil meer rekentijd omdat ik meer oefening nodig heb	1.58	0.71
Ik vind het moeilijk om rekenhulp aan klasgenoten te vragen	1.37	0.62

figuur 9: mening van de leerlingen over hun eigen vaardigheden betreffende de activiteiten tijdens de rekenlessen

Stelling	M	SD
Ik vind vlot uit het hoofd rekenen moeilijk	2.08	0.80
Ik vind het moeilijk als je in een les veel verschillende soorten sommen krijgt aangeboden	1.98	0.78
Ik vind rekenen moeilijk	1.96	0.73
Ik vind rekentoetsen moeilijk	1.96	0.65
Ik vind verhaaltjessommen moeilijk	1.85	0.72
Ik vind breuken moeilijk	1.80	0.70
Ik vind procenten moeilijk	1.71	0.75

figuur 10: mening van de leerlingen over hun eigen vaardigheden betreffende de verschillende rekenopdrachten tijdens de rekenlessen.

rol van de leerkracht

De leerlingen hebben hun mening gegeven over de mate waarin de leerkracht ondersteuning biedt om rekenvaardigheden te ontwikkelen tijdens de rekenles. Leerlingen geven aan dat de leerkracht vaak tot altijd helpt als er rekenhulp nodig is. Ook vinden de leerlingen dat de leerkracht vaak tot altijd goed rekenles geeft en de sommen goed kan uitleggen. Ondersteuning in de vorm van procesbegeleiding, extra hulp en instructie door de leerkracht, wordt volgens de leerlingen soms tot vaak gegeven. De leerkracht zorgt er volgens de leerlingen regelmatig voor dat het maken van rekenopdrachten leuk wordt om te doen (fig.11).

Stelling	M	SD
Mijn leerkracht helpt mij als ik rekenhulp nodig heb	3.27	0.76
Mijn leerkracht kan goed rekenles geven	3.23	0.70
Mijn leerkracht legt goed uit hoe je sommen uitrekent	3.16	0.77
Mijn leerkracht vindt het belangrijk om te weten hoe ik mijn sommen uitreken	2.87	0.80
Als ik iets niet begrijp dan krijg ik extra hulp	2.86	0.90
Ik krijg eerst een korte uitleg voordat ik aan mijn rekenwerk kan beginnen	2.84	0.90
Mijn leerkracht vertelt vooraf aan de rekenles wat we gaan leren	2.55	0.91
Mijn leerkracht zorgt ervoor dat het maken van rekenopdrachten leuk wordt om te doen	2.37	0.78

figuur 11: mate waarin de leerlingen ondersteuning ondervinden van hun leerkracht tijdens de rekenlessen

beleving

In welke mate plezier en uitdaging beleefd wordt tijdens rekenlessen wordt zichtbaar in figuur 12 en 13. Leerlingen vinden rekenen regelmatig een leuk vak. Daarbij is geconstateerd dat er samenhang is tussen de mate van tevredenheid en de mate van plezier en uitdaging ($r = 0.56$, $p = 0.00$).

Stelling	M	SD
Ik vind het leuk om rekenspelletjes op de computer te spelen	2.58	0.98
Ik vind rekenen een leuk vak	2.51	0.68
Ik vind het leuk om tijdens de rekenles rijtjes sommen te maken	2.14	0.85
Ik vind het leuk om tijdens de rekenles verhaaltjessommen te maken	2.01	0.84
Ik reken buiten school	1.94	0.73
Ik wil meer rekenlessen in de week omdat ik rekenen een leuk vak vind	1.53	0.75

figuur 12: mening van leerlingen over het beleven van plezier tijdens de rekenlessen

Stelling	M	SD
Ik ontdek graag zelf hoe je een som moet uitrekenen	2.43	0.80
Als ik alleen werk leer ik meer dan wanneer ik samen werk	2.19	0.79
Ik wil huiswerk als dat beter is voor mijn rekenprestaties	2.15	0.96
Ik kan bij rekenen betere cijfers halen dan de cijfers die ik nu haal	2.05	0.73
Ik zou graag moeilijkere rekenopdrachten willen	1.77	0.76

figuur 13: mening van leerlingen over beleven van uitdaging tijdens de rekenlessen

Motivatatie voor het vak rekenen en het beleven van plezier tijdens de rekenlessen zijn essentieel vanwege de positieve invloed op de leerprestaties van kinderen. Een van de factoren die daarop van invloed kan zijn, wijst wederom in de richting van de leerkracht. De manier waarop leerlingen door de leerkracht gemotiveerd worden, heeft bewezen effect op leerresultaten. Een andere factor die een positieve bijdrage kan leveren aan het plezier tijdens het rekenonderwijs is de manier waarop de rekenopdrachten in de methoden worden aangeboden (Marzano, 2003). Met andere woorden, de ontwerpers van de rekenmethoden zullen in de opdrachten kunnen inspelen op interesses en behoeften van leerlingen. Betekenisvolle en contextrijke opdrachten kunnen bijdragen aan meer rekenplezier en uitdaging in de rekenlessen.

rekenen in de toekomst

Op de open vraag: 'Als jij de minister van onderwijs, jouw leerkracht of de ontwikkelaars van rekenboeken advies zou mogen geven over het rekenonderwijs op de basisschool wat zou je dan adviseren? Welke wensen en ideeën heb je?', heeft 66 procent van de respondenten gereageerd. Het merendeel van die opmerkingen gaat over de inhoud van het vak rekenen en over hoe de instructie tijdens de rekenlessen zou moeten plaatsvinden.

De onderzoeksvraag die gericht is op een wenselijke situatie voor het rekenonderwijs laat zien, dat leerlingen graag op een speelse manier hun rekenlessen willen uitvoeren. Hier noemen de kinderen meer rekenopdrachten met behulp van de rekenmachine maken, meer rekenspelletjes doen en praktische rekenopdrachten maken. De leerlingen geven ook aan dat zij meer met computers willen werken tijdens de rekenles. In de huidige maatschappij, waarin kinderen opgroeien met de meest geavanceerde technologie, is dit een logische reactie. Slavin en Lake (2008) hebben bovendien aangetoond dat het gebruik van ICT-middelen een positieve invloed kan hebben op leerlingprestaties. Volgens Bronkhorst (2002), Kohnstamm (2002) en Vanderpoorten (2004) kan integratie van ICT in het onderwijs een positieve invloed uitoefenen op de leerwinst van de kinderen, de onderwijscultuur en de leerhouding. Tevens heeft ICT een meerwaarde door snellere leerresultaten, succeservaringen, hogere motivatie en mogelijkheden tot differentiatie op vorm en inhoud. Leerlingen uit dit onderzoek laten zien dat ze gemotiveerd zijn om met behulp van ICT middelen hun onderwijs vorm te geven.

Bij de vraag naar de wenselijke situatie betreffende goed rekenonderwijs zijn de meeste reacties gegeven over onderwerpen die direct met de leerkracht te maken hebben, namelijk 'instructie', 'begeleiding', 'rol van de leerkracht', 'klassenmanagement' en 'klassenorganisatie'. De instructie en begeleiding van de leerkracht moeten volgens de leerlingen aandacht krijgen. Leerlingen verwachten meer enthousiasme bij leerkrachten zodat rekenen leuker gaat worden. Hiermee geven leerlingen aan dat de leerkracht grotere invloed moet krijgen in hun rekenonderwijs. In het KNAW rapport is aangegeven dat de kwaliteit van de leraar direct effect op de leerprestaties van kinderen heeft. De respons van leerlingen die deelgenomen hebben aan dit onderzoek bevestigt dit. Ook voor leerlingen is de leerkracht een belangrijke factor die bijdraagt aan goed rekenonderwijs.

aanbevelingen vanuit het onderzoek onder leerlingen

Naar aanleiding van de bevindingen uit dit onderzoek en de daaruit getrokken conclusies worden de volgende aanbevelingen gedaan:

- De leerling geeft aan dat de leerkracht er toe doet en dat de leerkracht

de spil in het onderwijsproces is. De leerkracht kan in zijn handelen systematisch werk maken van het motiveren van leerlingen waardoor het plezier in het rekenonderwijs positief beïnvloed kan worden.

- Ontwikkelaars van methoden zouden in het ontwikkelproces meningen en ideeën van leerlingen meer kunnen benutten bij het ontwerpen en samenstellen van leer- en werkboeken en aanvullende materialen en daarbij ICT gebruiken. Zo wordt onderwijs niet ‘voor’ maar ‘met’ leerlingen gemaakt.
- Naar aanleiding van de onderzoeksbevindingen is nader onderzoek gewenst naar de relatie tussen de ondersteuning van leerkrachten tijdens de rekenlessen, zoals bijvoorbeeld het geven van instructie, en de mate waarin leerlingen de rekenopdrachten beleven en uitvoeren.

5 tot slot

citaten van leerkrachten en leerlingen

Veel reacties op de open vraag aan het eind van de enquête zijn veelzeggend. Daarom worden tot slot enkele letterlijke uitspraken van leerkrachten en leerlingen gepresenteerd:

Als u de minister van onderwijs, uitgevers en/of ontwikkelaars of onderwijsondersteuners advies zou mogen geven ten aanzien van het rekenonderwijs, welk advies zou u geven?

Enkele adviezen van leerkrachten:

- Luister eens naar de mensen die al jaren voor de klas staan!
- Leerkrachten die dagelijks voor de klas staan betrekken bij besluiten, geen academici vanachter een bureau!
- De opleidingseisen moeten sterk worden opgeschroefd.
- Dat elke leerkracht één keer per vijf jaar een verplichte cursus rekendidactiek volgt.
- Ik mis collega's om te praten over rekeninhouden.
- Het wordt tijd dat er eens een intelligente discussie komt rondom rekenonderwijs met een positieve, opbrengstgerichte insteek

Als jij de minister van onderwijs, je leerkracht of de ontwikkelaars van rekenboeken advies zou mogen geven over het rekenonderwijs op de basisschool, welk advies zou je dan geven?

Enkele adviezen van leerlingen:

- Ik zou bij nieuwe dingen die we nog nooit hadden in het begin beter uitleg geven en beginnen met makkelijke oefeningen daarover.
- Hebben we een manier om een som uit te rekenen, krijgen we weer een andere die we opnieuw moeten ontdekken.

- Nou, het rekenen is pas leuk als iedereen het leuk vindt. Als leerkr8 zou ik zeggen maak de les leuk. Zo serieus hoeft het nou ook weer niet!
- Voor de leerkrachten: houd rekening met de hele klas, dus ook met de kinderen die beter kunnen rekenen!
- Alle kinderen een eigen pakket geven waarin je kunt doorwerken op eigen niveau.
- Er een soort AVI van rekenen maken.

De opmerkingen die gemaakt zijn door leerkracht en leerling kunnen een welkome aanvulling zijn tijdens de discussie over de kwaliteit van het rekenonderwijs.

noot

- 1 Zie het artikel in deze bundel (pagina 27-32).

literatuur

- Boekaerts, M. & P.R.J. Simons (2003). *Leren en instructie*. Assen: Van Gorcum.
- Bronkhorst, J. (2002). *Basisboek ICT-didactiek*. Baarn: HB uitgevers.
- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008). *Over de drempels met rekenen. Consolideren, onderhouden, gebruiken en verdiepen*. Enschede: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen taal en rekenen.
- Kohnstamm, R. (2002). *De kleine ontwikkelingspsychologie 2: de schoolleeftijd*. Houten/Diegem: Bohn Stafleu Van Loghum.
- KNAW-Commissie rekenonderwijs basisschool (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering*. Amsterdam: Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.
- Letschert, J.F.M. (2007). *De ontdekking van de leraar*. Gevonden op 18 juni 2009, op www.scienceguide.nl/pdf/Letschert.pdf.
- Letschert, J. & B. Letschert-Grabbe (2007). *Wat leraren willen! Over veranderingen in onderwijs van binnenuit*. Assen: Van Gorcum.
- Marzano, R.J. (2003). *What works in schools: Translating research into action*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Meelissen, M.R.M. & M. Drent (2008). *TIMSS-2007 Nederland. Trends in leerprestaties in exacte vakken in het basisonderwijs*. Enschede: Universiteit Twente.
- Pameijer, N., T. Beukering & S. de Lange (2009). *Handelingsgericht werken: een handreiking voor het schoolteam. Samen met collega's, leerlingen en ouders aan de slag*. Leuven: Acco.
- Treffers, A., E. de Moor & E. Feijs (1998). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 1 Overzicht einddoelen*. Tilburg: Zwijzen.
- Vanderpoorten, M. (2004). *ICT-competenties in het basisonderwijs*. Binnengehaald op 21 juni 2009 van: <http://www.ond.vlaanderen.be/DVO/ICT/brochureBaO/indexbrochure.htm>.

Het rekenen de baas

- *Beter met Rekenen*¹ in groep 3, 4 en 5 -

N. Boswinkel
SLO, Enschede

1 achtergrond

Veel mensen houden zich bezig met de kwaliteit van het rekenonderwijs op de basisscholen. Naast deskundigen en vakexperts zitten ook veel scholen met vragen over de kwaliteit van het rekenonderwijs op de eigen school. Zo gaven enkele scholen uit Noord-Holland aan een relatief groot deel *D*- en *E*-leerlingen te hebben, terwijl daar geen logische verklaring voor was. Men vroeg zich af of achterblijvende resultaten iets met de in gebruik zijnde methode te maken kon hebben. Naar aanleiding hiervan is de SLO een driejarig project 'Beter met Rekenen' gestart, gericht op het analyseren van de problemen van scholen en op het ontwikkelen van materialen om scholen te kunnen ondersteunen bij 'reken-verbetertrajecten'.

De rol van leerlijnen bij het professionaliseren van de leerkracht komt hierbij ook onder de aandacht.

2 zicht op doorlopende leerlijnen

In het project gaan we er vanuit dat de kwaliteit van het reken-wiskunde-onderwijs sterk kan verbeteren, als systematisch gewerkt wordt aan verdieping van inzicht bij leerkrachten en teams in doorlopende leerlijnen. Om in de rekenles goed te kunnen focussen op wat belangrijk is, en om bijvoorbeeld te kunnen kiezen om een onderdeel uit het aanbod te schrappen, is enig inzicht in leerlijnen van belang.

Aan de hand van grafische leerlijnen kan een teamgesprek op gang komen over relevante doelen en mogelijke bijbehorende activiteiten. We noemen hier met nadruk 'grafische leerlijnen', omdat die herkenbaar zijn en aansluiten bij de 'taal' van de leerkracht. Grafische leerlijnen bieden een gemakkelijke aanleiding om regelmatig in gesprek te gaan met collega's over langetermijndoelen: waar komen we vandaan, waar staan we nu en waar gaan we naartoe (zie figuur 7 voor een voorbeeld van een grafische leerlijn)? Leerkrachten worden zo in staat gesteld regelmatig over de gren-

zen van een periode en liefst ook van het eigen leerjaar heen te kijken en zo een helikopterview te ontwikkelen (Boswinkel & Nelissen, 2007). In plaats van te praten over bijvoorbeeld splitsen van getallen tot 10 in groep 3, kan het gesprek gaan over wanneer en waarvoor het splitsen eigenlijk van belang is. Dat is met name in groep 4, waar het optellen en aftrekken over het tiental een belangrijke rol speelt. Dankzij een dergelijk inzicht kunnen eventueel keuzen in leerstofaanbod gemaakt worden, of activiteiten worden verplaatst naar een geschikter tijdstip.

3 werkwijze

Het project is gestart met het analyseren van de belangrijkste leerlijnen in groep 3 en 4 van de op school in gebruik zijnde methoden. Na de analyse zijn voorzichtige conclusies getrokken over ‘witte vlekken’, inconsistenties in leerlijnen en potentiële knelpunten. Met witte vlekken bedoelen we bijvoorbeeld dat een leerlijn ineens ophoudt om later op een hoger niveau weer op te duiken. De logica in de leerlijn is dan weg.

In een eerste gesprek met directie, IB'ers en IT'ers zijn de knelpunten besproken, waarna het team op schoolniveau aan de slag kon gaan. Uit die gesprekken kwamen soms ook verrassende punten naar voren. Zo waren er op een school bijvoorbeeld geen rekenrekjes aanwezig, terwijl daar in de methode volop mee gewerkt wordt.

Aansluitend zijn interviews gehouden met zwakkere leerlingen eind groep 3 en eind groep 4. We stelden ons de vraag of de geconstateerde witte vlekken in de methoden terug te vinden zouden zijn in het strategiegebruik van de leerlingen.

Tot slot zijn alle bevindingen met aansluitend enkele aanbevelingen in een rapport vastgelegd en met het team besproken. Waar mogelijk kunnen de aanbevelingen *input* leveren voor de ontwikkeling van plannen voor ‘verbetertrajecten’.

4 de interviews

In dit artikel doen we met name verslag van de uitkomsten van de interviews met de leerlingen. In een kleinschalig onderzoekje binnen het project zijn de kennis en het strategiegebruik van de zwakkere leerlingen eind groep 3 en eind groep 4 systematisch achterhaald. De focus lag daarbij op de domeinen rekenen tot 10 (groep 3) en rekenen tot 100 (groep 4). Daarnaast is gekeken naar de leerbaarheid van de leerlingen, door het aftasten

van de 'zone van de naaste ontwikkeling'. Informatie daarover bood aanknopingspunten over hoe de betreffende leerlingen mogelijk verder geholpen kunnen worden.

De interviews hadden een semi-klinische opzet. Dat wil zeggen, dat er sprake was van open interviews vanuit een vast protocol en met vaste opgaven. De interviews zijn geregistreerd met behulp van een cassette-recorder of video. Alle interviews zijn in een verslag vastgelegd, waarbij bij de leerlingen uit groep 4 ook is gekeken naar de snelheid waarmee opgaven werden opgelost.

de geïnterviewde leerlingen

Er zijn in totaal 46 leerlingen geïnterviewd, waarvan 27 eind groep 4 en 19 eind groep 3. De leerlingen waren afkomstig van vier verschillende scholen. Onder de groep 3 leerlingen zaten enkele leerlingen in groep 4 of 5 die de rekenlessen van groep 3 volgden. Op alle scholen werd of de methode 'Rekenrijk' (tweede editie), of 'Pluspunt' (tweede editie) gebruikt. Voor alle leerlingen geldt, dat de Cito score voornamelijk laag *C* of *D* was. Een enkele leerling scoorde op *E*-niveau.

interviews eind groep 3

De interviews zijn afgenomen in de maanden mei en juni, dus eind groep 3 en eind groep 4. In groep 3 staan op dat moment de volgende onderdelen centraal:

- handig tellen van grote hoeveelheden tot 100;
- optellen en aftrekken tot en met 10;
- rekenen tot 20 al dan niet met het rekenrek;
- tellen met sprongen van (5 en) 10 op de kralenketting met 100 kralen, of op de getallenlijn
- plaatsen van getallen op de kralenketting met 100 kralen (fig.1).



figuur 1

optellen en aftrekken tot en met 10

In een kwantitatieve analyse is nauwkeuriger gekeken naar de manier waarop leerlingen de sommen tot 10 oplosten. De veronderstelling is, dat

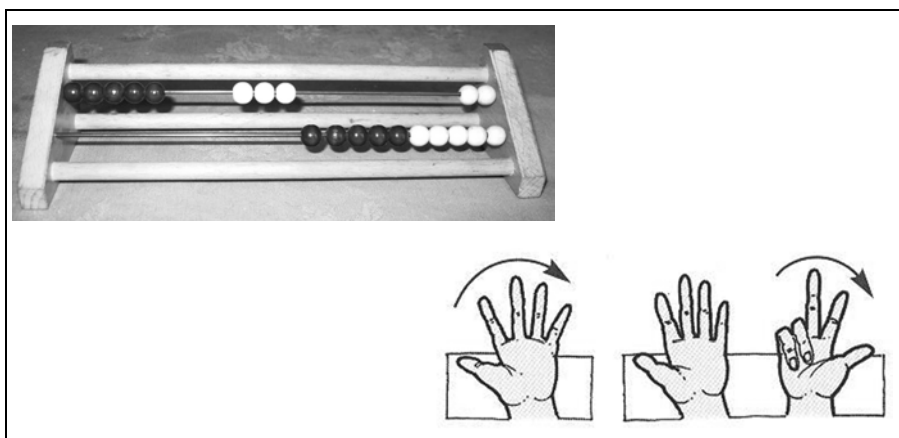
optel- en aftrekepgaven tot 10 eind groep 3 grotendeels geautomatiseerd zijn en voor een deel zelfs gememoriseerd. De methode is volop bezig met getalbeelden op het rekenrek in het kader van optellen en aftrekken tot 20, en er is een begin gemaakt met het verkennen van getallen tot 100. Tellen met sprongen van tien op de kralenketting en later op de halfgevlude getallenlijn en het noteren van getallen hebben met name binnen dat getallengebied de aandacht. Zowel het optellen en aftrekken tot 20 als het verkennen van getallen tot 100 komt vanaf het begin van groep 4 nog volop aan bod.

In de interviews kregen de leerlingen kale optel- en aftreksommen voorgesteld, waarbij de vraag steeds was in hoeverre de som geautomatiseerd was, welke strategieën de leerling eventueel te beschikking heeft, en of het mogelijk zou zijn hem met kleine hints een stapje verder te helpen.

De volgende sommen zijn aan de leerlingen voorgelegd:

$$\begin{array}{ll} 3 + 3 & 9 - 3 \\ 2 + 6 & 7 - 4 \\ 4 + 3 & 8 - 5 \\ 5 + 4 & 9 - 7 \end{array}$$

De leerlingen kregen de mogelijkheid om gebruik te maken van materialen en middelen die ze in de klas ook gebruiken ter ondersteuning. Op tafel stond dus een rekenrek en er lag een kralenketting (fig.2).



figuur 2: $5 + 3$ op het rekenrek of op de vingers

resultaten

Van de optelsommen was alleen $3 + 3$ door alle leerlingen gememoriseerd. $5 + 4$ werd door elf van de negentien leerlingen geautomatiseerd opgelost,

terwijl de andere acht leerlingen strategieën gebruikten als tellen, werken met getalbeelden via het rekenrek of rekenen met de vijfstructuur ($5 + 5 - 1$). Aftrekken kostte de geïnterviewde leerlingen aanzienlijk meer moeite. Geen enkele opgave was gememoriseerd en bijna de helft van de leerlingen ging over op de telstrategie bij vrijwel alle opgaven. Enkele leerlingen maakten gebruik van getalbeelden op het rekenrek bij $8 - 5$ en $9 - 7$. Opvallend was dat geen van de leerlingen spontaan gebruik maakte van het rekenrek, ondanks dat gezegd was dat dit mocht. Omdat het rekenrek op het moment van het interview sterk in de spotlights stond, is bij enkele leerlingen die de getalbeelden als strategie gebruikten gevraagd hoe ze het rekenrek gebruiken in de klas.

Een van hen was Noortje, een leerling uit groep 4, die rekt op *E*-niveau. Noortje praat honderduit tijdens het interview en al snel wordt duidelijk dat ze weliswaar het rekenrek gebruikt en ze dit soms ook handig vindt, maar dat ook het een voor een tellen op de vingers of op het rekenrek vaak door haar wordt toegepast. Beide 'materialen' bieden de mogelijkheid om gebruik te maken van de vijfstructuur, onder voorwaarde dat de leerling zich hiervan bewust is.

De rekenmanieren van Noortje

$3 + 3$ en $2 + 6$: Weet ze meteen.

$4 + 3$: Na lang nadenken zegt ze '7'.

'Dan heb je er 3 en je doet er 4 bij en dan is het 7.

Je kunt hem ook omdraaien, dan is het $3 + 4$ en dan is het ook 7.'

Ze heeft naar eigen zeggen niet geteld.

$5 + 4$: Doortellen op de vingers: 9. In de klas gebruikt ze ook wel het rekenrek. Dat vindt ze wel handig.

Minsommen vindt ze moeilijk.

$9 - 3$: ze denkt eerst een tijd na, en pakt dan het rekenrek. Ze zet 9 in een keer op, 3 trekt ze er tellend vanaf, 6 herkent ze meteen. Daarna gebruikt ze deze strategie ook bij de andere aftreksommen, waarbij $8 - 5$ fout gaat (2 als antwoord).



zone van de naaste ontwikkeling

Veel zwakke rekenaars gebruiken de vingers bij het optellen en aftrekken, maar dan vaak een voor een tellend, terwijl de handigheid van de vijfstructuur hen ontgaat. Ook bij Noortje lijkt dit het geval; zij laat bij een deel van

de sommen zien, dat ze gewend is op de vingers te tellen. Het rekenrek biedt haar ondersteuning bij het optellen, maar bij het aftrekken raakt ze de draad kwijt en valt ze terug op het tellen van de kralen. Het gebruikmaken van de 5 als steunpunt lijkt binnen handbereik te liggen, maar gebruikt ze niet spontaan bij het oplossen van sommen.

In het kader van 'aftasten van de zone van de naaste ontwikkeling' is verder gekeken of ze gevoelig is voor het rekenen met vingerbeelden, met de 5 als steunpunt. Het betreft steeds sommen waar het begingetal boven de 5 uitkomt en er 5 afgaan of overblijven, dus bijvoorbeeld $8 - 5$ en $9 - 4$ en $6 - 5$.

Eerst zet ik zelf een aantal getalbeelden op (8, 9, 6) en vraag haar er 5 af te trekken. De eerste keer doet ze dat één voor één tellend. Als ik vraag of ze ergens vijf vingers ziet, wijst ze de volle hand aan.

Volgende vraag: haal er zo snel mogelijk 5 vanaf. Ze wijst daarop de volle hand aan en doet dit vervolgens ook bij de andere opgaven.

Het afhalen van vijf vingers wordt afgewisseld met drie, respectievelijk vier en één vinger. Daarna draaien we de rollen om: Noortje zet een getalbeeld op en haalt er 5 of het getal van de andere hand af. Ook dit gaat verrassend goed.

Opvallend is dat Noortje in eerste instantie geen 5 als volle hand eraf haalt, maar op de andere hand begint. Dit leidt logischerwijs tot één voor één tellen op de vingers, want 5 eraf halen als 3 en nog 2 heeft ze niet geautomatiseerd. Een kleine hint (waar zie je vijf vingers?) zet haar op het spoor van de 5, waarna ze de rest van de vragen goed en snel oplost.

verbanden leggen

Een ander opvallend gegeven, dat we vaker bij zwakke rekenaars zien, is dat Noortje niet automatisch de link legt tussen de vingerbeelden en de bijbehorende som. Ze weet bijvoorbeeld wel negen vingers op te zetten en er in een keer vijf af te halen en geeft 4 als antwoord, maar bij de direct volgende vraag 'hoeveel is $9 - 5$?', aarzelt ze. Uit eerdere ervaringen, bijvoorbeeld met 'Speciaal Rekenen' (Speciaal Rekenen, 2003), zijn we dit gegeven ook veelvuldig tegen gekomen. Leerlingen leggen niet automatisch het verband tussen de ene en de andere fase in het proces van formalisering. Het gaat dan niet alleen om het verband tussen getalbeelden op de vingers en de bijbehorende sommen, maar ook om het verband tussen het ene materiaal en het andere met dezelfde structuur (bijvoorbeeld vingers en rekenrek), of tussen een verhaal met echte personen en een werkblad met afbeeldingen van die personen. Op metaniveau leggen veel leerlingen geen verband tussen wat ze thuis bijvoorbeeld op de computer leren en de rekenles op school.

Terug naar het interview met Noortje: het feit dat ze in het interview laat

zien dat ze gevoelig is voor de vijfstructuur op de vingers, wil nog niet zeggen dat ze dit dus ook gaat doen in de klas. Daar gelden andere regels, en je weet maar nooit of het van de juf ook mag. Een gesprek met de leerkracht is dus van essentieel belang om ervoor te zorgen dat kinderen als Noortje ook echt iets hebben aan wat ze tijdens dit soort interviews laten zien.

geldt dit ook voor andere leerlingen?

Van de negentien leerlingen waren er negen die bij het aftrekken gebruikmaakten van de strategie terugtellen. Om te kijken of het gebruikmaken van de vingers met de 5 als steunpunt voor meer leerlingen zou worden opgepikt, is bij een aantal van hen min of meer dezelfde weg gevolgd als bij Noortje. Hieruit bleek, dat van de negen leerlingen er één was die bleef bij het één voor één terugtellen op de vingers. De anderen maakten allemaal gebruik van de 5 als steunpunt. Ook voor hen geldt echter, dat de link met het rekenen in de klas gelegd moet worden, omdat de kans anders groot is, dat ze daar weer terugvallen op het een voor een tellen.

interviews eind groep 4

Eind groep 4 staan de volgende onderdelen centraal in het rekenaanbod optellen en aftrekken tot 100:

- getallen globaal op de getallenlijn plaatsen en kunnen beredeneren (positioneren);
- optel- en aftreksommen over de 10 ($6 + 8$, $15 - 9$);
- optel- en aftreksommen tot 100

Een andere belangrijke leerlijn die in groep 4 een groot deel van de onderwijstijd in beslag neemt is de vermenigvuldiglijn. In dit artikel gaan we daar niet verder op in, hoewel de leerlingen er wel op zijn bevraagd. Optellen en aftrekvaardigheden - of het ontbreken daarvan - kunnen zwakke rekenaars parten spelen bij het toepassen van handige vermenigvuldigstrategieën als verdubbelen/halveren, of een-keer-meer/een-keer-minder. Immers, als een leerling een opgave als 8×6 wil uitrekenen via $2 \times (4 \times 7)$, moet hij wel 28 en 28 bij elkaar kunnen optellen en dat is een van de moeilijkste sommen onder de 100. Afstemmen van de leerlijnen optellen en aftrekken tot 100 en vermenigvuldigen is dus van groot belang, om ervoor te zorgen, dat leerlingen de veronderstelde handige strategieën ook kunnen toepassen en ze ook als handig zullen ervaren.

Verder wordt eind groep 4 een begin gemaakt met het verkennen van getallen tot 1000. Vanaf begin groep 5 komt dit nog volop aan bod, net zoals het optellen en aftrekken tot 100.

optel- en aftrekopgaven tot 100

In het interview is gefocust op de moeilijkste opgaven tot 100, hoewel op dat moment ook nog minder ingewikkelde opgaven als $36 + / - 7$ en $63 + / - 20$ volop ingeoeft worden. De lege getallenlijn is in beide methoden aan bod geweest. De leerlingen mogen deze gebruiken bij het uitrekenen van sommen tot 100. Opgaven die in het interview naar voren kwamen zijn:

$$\begin{array}{ll} 36 + 27 = & 42 - 23 = \\ 57 + 34 = & 83 - 46 = \end{array}$$

De achterliggende vraag was welke strategieën de leerlingen met name hanteren, welke ondersteunende materialen en middelen ze gebruiken en hoe ze een stapje verder geholpen kunnen worden, rekening houdend met de zone van de naaste ontwikkeling.

In de methode 'Pluspunt' komt - zoals in de meeste methoden - de rijgstrategie als dominante strategie naar voren. De leerlingen worden verondersteld de tientallen er in verkorte vorm bij op te tellen dan wel vanaf te halen. 'Rekenrijk' biedt daarnaast de 'rond-getal-manier' (of 'rekenen met een rond getal') aan. De leerling gaat op zoek naar het dichtstbijzijnde ronde getal en rekent daarmee verder. Bijvoorbeeld: $36 + 27$ kan worden opgelost via $36 + 40$ (76), maar dan moet de 3 die er teveel bij is opgeteld er aan het eind weer af. 'Pluspunt' biedt diezelfde strategie onder de noemer 'handig rekenen' aan.

	Rijgaanpak (op getal- lenlijn of mentaal)		Splitsaan- pak (com- binatie of zuiver)		Verkeerd Splitsen	Rond Getal aanpak		Komt er niet uit	Anders		
	f	g	f	g	f	f	g	f	f		
36 + 27 57 + 34	2	13	3	8	-	7	9	11	1	-	54
42 - 23 83 - 46	1	15	-	6	4	5	-	20	3	-	54
Tot. abs.	3	28	3	14	4	12	9	31	4	-	108
Tot. rel.	.10	0.90	.18	.82	1.00	.57	.43	1.00			

figuur 3

de resultaten

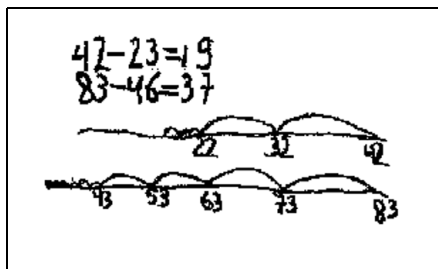
Net als bij het rekenen tot 10, wordt ook hier het optellen aanzienlijk beter

beheerst dan het aftrekken. Percentages goedscores zijn echter ook bij het optellen niet bijzonder hoog te noemen: iets meer dan de helft van de leerlingen maakt deze opgaven goed, waarbij $57 + 34$ weer iets makkelijker blijkt dan $36 + 27$. De aftrekopgaven zijn door ongeveer een derde deel van de leerlingen goed opgelost. De meeste leerlingen schrijven de som op en rekenen deze naar eigen goeddunken uit: met hulponotaties of direct uit het hoofd. In figuur 3 is te zien welke strategieën we tegenkwamen bij de geïnterviewde leerlingen.

Uit deze figuur blijkt, dat leerlingen gebruikmaken van de rijgstrategie, de splitsstrategie en de 'rond-getal-aanpak'. Daarnaast is het aantal opgaven dat niet wordt opgelost tamelijk hoog (31). Leerlingen die de rijgstrategie toepassen komen in de meeste gevallen ook tot een goed antwoord (90 procent goed, tegen 10 procent fout). Dat geldt niet voor de splitsstrategie en de rond-getal-aanpak. Voor deze beide strategieën geldt dat er met name bij het aftrekken een probleem ontstaat als er over het tiental heen gerekend moet worden.

Hoewel de rijgstrategie relatief veel wordt gebruikt, is dat meestal niet in de meest verkorte vorm, en ook niet altijd met de lege getallenlijn als ondersteuning. Sommige leerlingen proberen de opgaven ten onrechte uit het hoofd te doen en lopen daarin vast. Als de interviewer hen herinnert aan de lege getallenlijn als mogelijke uitrekenhulp, gaat niet onmiddellijk een lampje branden. Net als bij het rekenen tot 10 geldt ook hier wellicht, dat de leerlingen niet automatisch bedenken dat je dit hulpmiddel kunt (of mag!) gebruiken. In de meeste methoden staat vaak vermeld dat de lege getallenlijn gebruikt mag worden, in de klas zegt de leerkracht het.

Sommige leerlingen komen alsnog tot een oplossing, als de interviewer hen helpt herinneren aan het tellen met sprongen van tien. Een voorbeeld van een leerling die de rijgstrategie gebruikt na interventie van de interviewer (fig.4).



figuur 4

Er zijn relatief veel leerlingen die de tientallen er in sprongen van tien afhalen en de lossen vervolgens één voor één, zoals in figuur 4 is te zien.

De splitsaankpak is een andere veelvoorkomende strategie, die bij het optellen meestal goed gaat, maar bij het aftrekken vaak fout (fig.5).

Handwritten student work for Figure 5. On the left, the addition $36 + 27 = 63$ is written. Below it, the number 13 is circled, and 50 is written underneath. On the right, two subtraction problems are shown: $42 - 23 = 21$ and $83 - 46 = 49$.

figuur 5

Tot slot een voorbeeld van een leerling die de rond-getal-aankpak gebruikt bij het optellen en daarbij tot een goed antwoord komt (fig.6). De betreffende leerling compenseert de teveel opgetelde eenheden door er meteen een andere som van te maken.

Handwritten student work for Figure 6. It shows two addition problems: $36 + 27 = 63$ and $33 + 30 = 63$.

figuur 6

Bij optellen kan dit een handige manier zijn, maar bij aftrekken leidt het gemakkelijk tot problemen. Bijvoorbeeld: $83 - 46$ zou conform de rond-getal-aankpak omgezet kunnen worden naar $80 - 46$, maar aan het eind moet de 3 er weer bij. Veel leerlingen halen die 3 er ook nog af en komen op 31 als antwoord. Naast het verwarrende aspect dat je moet optellen, terwijl het om een aftrekopgave gaat, is ook $80 - 6$ geen eenvoudige som voor zwakke rekenaars.

voorzichtige conclusies naar aanleiding van de interviews eind groep 4

De leerlingen hebben verschillende strategieën ter beschikking, maar passen die niet altijd correct toe. Bij de leerlingen constateerden we regelmatig onzekerheid en verwarring: 'Hoe ging dat maniertje ook alweer?' De methoden bieden meerdere oplossingsstrategieën aan in de veronderstelling, dat leerlingen uiteindelijk kunnen kiezen voor de strategie die het meest vertrouwd voor ze is. Echter, kennis van strategieën lijkt soms te vervagen, nadat andere strategieën zijn geïntroduceerd.

Ook wordt de ene strategie doorgaans beter onderbouwd dan de andere of

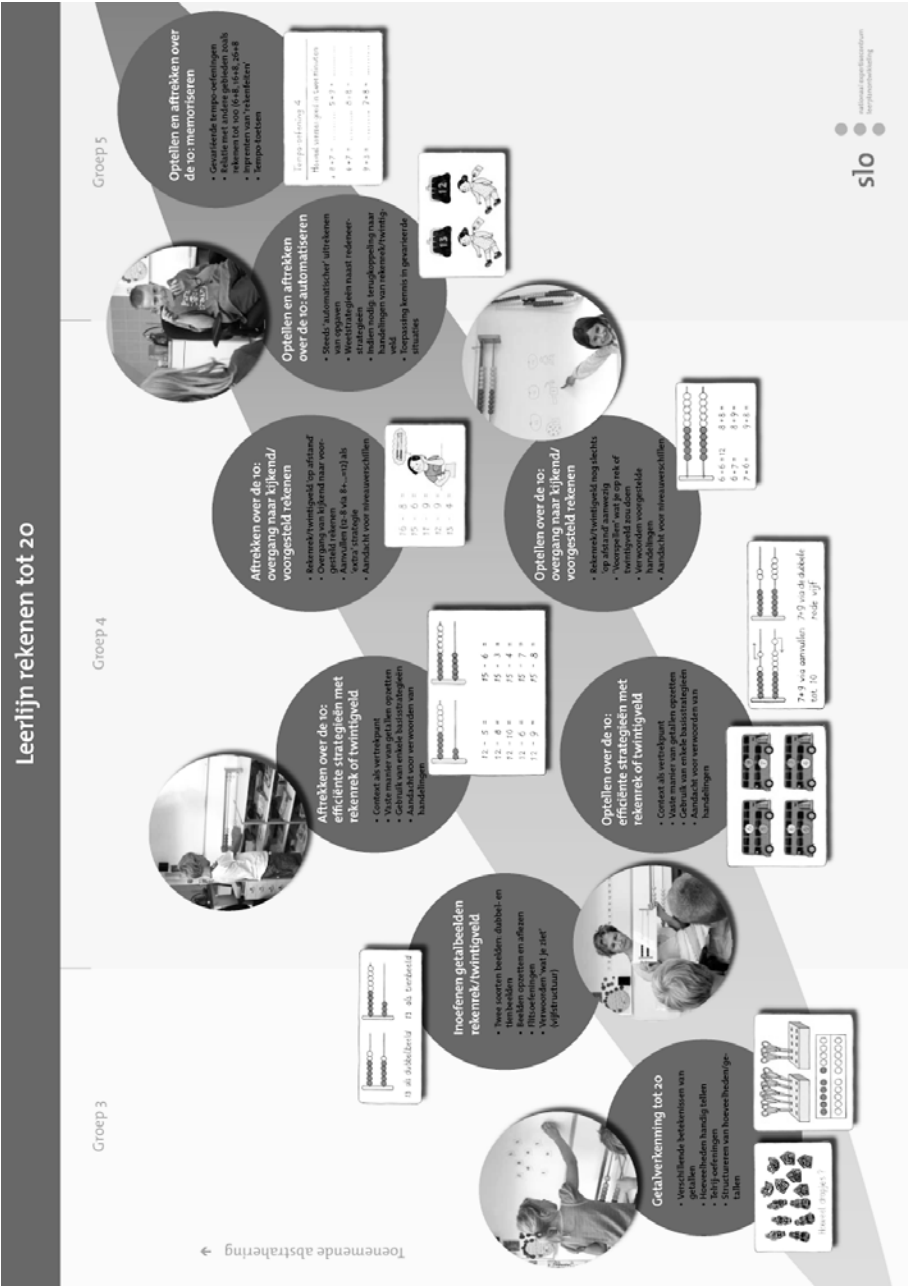
komt dominanter en frequenter aan bod. Zo komt de rijgstrategie vaak wel langdurig en consequent naar voren, maar de splitsstrategie niet. Gezien de foutgevoeligheid van de splitsstrategie bij het aftrekken is hier iets voor te zeggen, maar leerlingen die deze strategie toepassen moeten wel ondersteund worden in het correct toepassen ervan. Dat kan bijvoorbeeld door met materialen te werken en in rekentaal op te schrijven wat er gebeurt. Een andere mogelijkheid is ervoor te kiezen de splitsstrategie pas te introduceren als dit nodig is, namelijk eind groep 5 bij het kolomsgewijs rekenen. Als de 'rond-getal-aanpak' aan de orde komt, staat de rijgaanpak op een lager pitje, in de (onterechte) veronderstelling dat de leerlingen dat wel onder de knie hebben. Een bijkomend probleem is, dat de lege getallenlijn een minder grote rol speelt bij de 'rond-getal-manier'. Logisch gevolg is dat leerlingen ook bij de rijgaanpak overstappen op mentaal rijgen, terwijl eigenlijk nog gebruik zou moeten worden van de lege getallenlijn of een kladbloodje om tussenantwoorden of andere hulpsnotaties in rekentaal op te noteren.

5 de leerkracht als belangrijke schakel

Het moge duidelijk zijn, dat bij alles wat de leerlingen krijgen aangeboden de leerkracht de cruciale schakel is. De methode is weliswaar van belang, maar blijft altijd een handreiking waar de leerkracht meer of minder rijk rekenonderwijs mee kan geven. Ook is het aan de leerkracht om verbanden te leggen, daar waar de leerlingen dat niet doen. Goed kijken en luisteren naar kinderen, gecombineerd met een beeld van de langlopende leerlijnen kan leiden tot onderwijs dat ook voor de leerlingen logisch is.

Voor de mogelijke oplossingsstrategieën voor het rekenen tot 100 geldt bijvoorbeeld, dat niet alle leerlingen automatisch zullen begrijpen wat de bedoeling is van al die verschillende strategieën. De leerkracht moet hen ervan bewust maken dat ze mogen kiezen, en moet hen helpen hun eigen weg te vinden bij het aanbod aan strategieën. Daarvoor is een helikopterview nodig, waarbij de leerkracht zicht heeft op belangrijke leermomenten, tussenschakels en uiteindelijke einddoelen.

Hierbij kan een grafisch leerlijnenoverzicht houvast bieden (fig.7). 'Speciaal Rekenen' heeft hiervoor al voorbeelden gemaakt in de vorm van methodegebonden grafische leerlijnen (Boswinkel & Nelissen, 2007). Echter, methoden verouderen en daarmee ook methodegebonden leerlijnen. Wat niet veroudert zijn de cruciale leermomenten. Die kunnen gebruikt worden in methodeoverstijgende overzichten, waarvan binnen 'Beter met Rekenen' voor de belangrijkste leerlijnen posters gemaakt zijn.



figuur 7

Kortom, de rijkdom van het onderwijs zit niet in de methode, of in de materialen die gebruikt worden in de klas, maar in wat de leerkracht ermee doet.

noten

- 1 'Beter met Rekenen' is een project van de SLO, onder leiding van Kees Buijs. Voor een nadere toelichting op het project verwijzen we naar Buijs, K. (2010).

literatuur

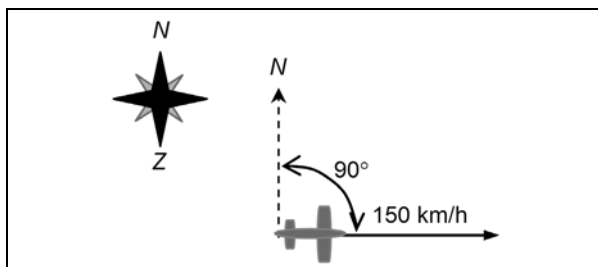
- Boswinkel, N. & J.M.C. Nelissen (2007). Leerstoflijnen in methoden: leerstoflijnen uit Speciaal Rekenen nader toegelicht. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 26(4), 43-50.
- Buijs, K. (2010). Beter met Rekenen - werken aan de kwaliteitsverbetering van reken-wiskundeonderwijs. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 29(1), 39-50.
- Team Speciaal Rekenen (2006). *Map groep 3, optellen en aftrekken tot 100*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Beroepscompetenties en wiskundige vaardigheid

H. van der Kooij
Flsme, Universiteit Utrecht

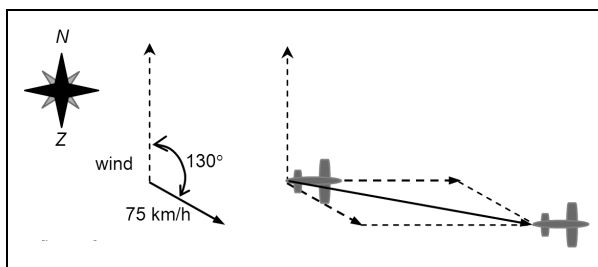
1 inleiding

Stel je voor: je zit in een klein vliegtuig dat met een flinke wind schuin van achteren van Rotterdam naar Arnhem vliegt. Arnhem ligt pal oost van Rotterdam, dus de piloot moet een kompaskoers van 90° aanhouden (de richting wordt als hoek gemeten ten opzichte van de richting noord (fig.1).



figuur 1

Met een snelheid van 150 km/u kan de afstand van 100 km in veertig minuten overbrugd worden. Maar dat is alleen waar onder ideale omstandigheden. Als het waait moeten zowel de kompaskoers van het vliegtuig als de benodigde vliegtijd worden aangepast.

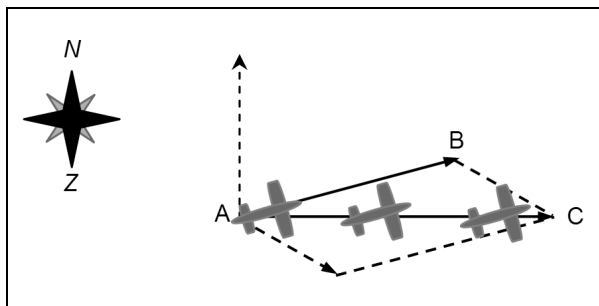


figuur 2

Stel dat de piloot rekening moet houden met een windsnelheid van 75 km/u en windrichting 130° . Als hij, ondanks de wind, met een kompaskoers van 90° naar Arnhem vliegt, komt hij zuidelijker uit, omdat het vliegtuig door de wind uit de koers wordt gedrukt (fig.2).

Dus moet de piloot voor vertrek een meer noordelijke koers uitzetten om zijn toestel toch boven Arnhem te laten uitkomen.

Daarvoor gebruikt hij een figuur die in de vliegerij de 'winddriehoek' wordt genoemd (fig.3).

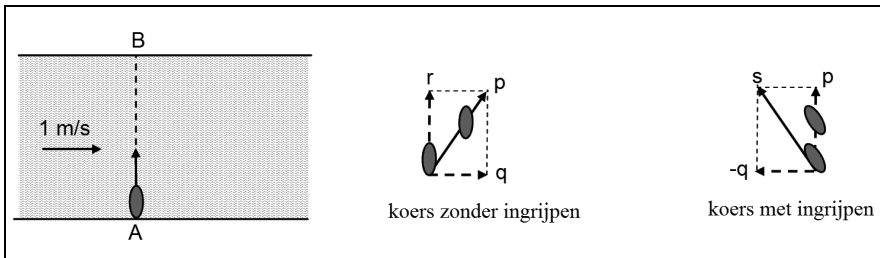


figuur 3

De piloot bepaalt voor vertrek de kompaskoers door de hoek te berekenen die pijl AB maakt met de richting noord (zie stand van het vliegtuig in figuur 3) en de uiteindelijke snelheid die zijn vliegtuig gaat krijgen vindt hij door de lengte van pijl AC te bepalen. In driehoek ABC zijn gegeven: $AB = 150$ (de eigen snelheid van het vliegtuig), $BC = 75$ (de gegeven windsnelheid) en de hoek tussen AC en BC (in dit geval 40°). Met behulp van elementair wiskundig gereedschap uit de goniometrie zijn de kompaskoers en de uiteindelijke snelheid nu te bepalen. Gelukkig zijn piloten goed in staat om dergelijke berekeningen aan een winddriehoek te maken. Een piloot is competent in zijn beroepsuitoefening als hij voor de dagelijkse werkpraktijk over de nodige kennis en vaardigheden beschikt om juiste beslissingen te nemen die ervoor zorgen dat hij efficiënt en effectief zijn werk verzorgt, in zijn geval het veilig verplaatsen van zijn toestel van het ene naar het andere vliegveld. Natuurlijk is het kunnen bepalen van de kompaskoers slechts een van de vele vaardigheden die hij moet beheersen.

In Engeland is op grote schaal onderzoek gedaan naar de manier waarop wiskunde wordt gebruikt in allerlei beroepssituaties. Daartoe werden beroepsbeoefenaars tijdens hun werk van heel dichtbij geobserveerd en daarover ondervraagd. Er werd onder andere gekeken of de wiskunde die op school was geleerd ook echt functioneert in de praktijk. De piloten bijvoorbeeld kregen op papier vraagstukken voorgelegd die te maken hadden

met de berekeningen aan winddriehoeken. Dat leidde tot opzienbarend gedrag. Sommige piloten waren niet in staat om de berekeningen op papier te maken buiten de vertrouwde omgeving van de cockpit. Verder kon een aantal van hen een wiskundig gelijkwaardig vraagstuk niet oplossen, waarbij een bootje een rivier moet oversteken van A naar B (fig.4), rekening houdend met de stroming. De uiteindelijke koers en snelheid van het bootje (pijl p) worden gevonden uit de samenstelling van de stroming (pijl q) en de 'fout' uitgezette koers van het bootje (pijl r).



figuur 4

Om toch op de goede plek aan de overkant te komen moet een uit te zetten koers (pijl s) worden gevolgd die de stromingspijl opheft (pijl $-q$) om zo te resulteren in de gewenste koers (pijl p). Als belangrijkste reden voor het niet kunnen oplossen van dit probleem werd genoemd, dat de gegeven getallen voor de piloten geen betekenis hadden, omdat de snelheden zoveel kleiner zijn dan wind- en vliegsnelheden.

Dergelijke problemen werden ook geconstateerd bij andere beroepen. Zolang de benodigde wiskunde wordt gebruikt binnen het kader van de beroepscontext handelen werkers over het algemeen zelfbewust, maar zodra toepassing van wiskundige kennis en vaardigheden in abstracte problemen of in een andere context worden gevraagd, blijken zelfbewuste personen te veranderen in onzekere figuren die niet goed raad weten met de gestelde problemen. De Engelse onderzoekers (Hoyles & Noss, 1998) concluderen dat beroepsbeoefenaars bij het toepassen van wiskunde altijd gebruik maken van de eigenheid van de context van het probleem en elementen van die context (*contextual anchors*) inpassen bij het vinden van oplossingen. Ze pleiten er daarom voor om het leren van wiskunde in het beroepsonderwijs niet volledig los te koppelen van betekenisvolle situaties, zoals in traditioneel wiskundeonderwijs wel wordt gedaan. Abstractie en generalisatie, wezenlijke kenmerken van de wiskunde, zouden niet volledig moeten voorbijgaan aan de context van het probleem (*situated abstraction*).

In deze bijdrage wordt geschetst op welke manier en onder welke voorwaarden wiskunde kan bijdragen aan competentiegericht beroepsonderwijs. Daarbij wordt gedeeltelijk gesteund op de ervaringen van het project 'Techniek, Wiskunde, ICT, Natuurkunde' (TWIN, 1998; 2000),

2 mathematical literacy

In onze moderne technologische maatschappij wordt het belangrijk geacht dat werkers op alle niveaus wiskundig bekwaam zijn. Internationaal wordt dit vaak omschreven met de term *mathematical literacy* of *quantitative literacy*. Met name de voortschrijdende automatisering zorgt ervoor dat steeds meer productiewerk niet meer handmatig, maar machinaal wordt uitgevoerd. De gespecialiseerde handwerkers van vroeger, moeten nu in staat zijn om de (vaak computergestuurde) apparatuur te bedienen, te controleren en zo het productieproces op gang te houden. Dit betekent dat werkers op een abstracter vaardigheidsniveau moeten handelen. Tegelijkertijd zorgt de automatisering er ook voor dat er steeds meer getalsmatige informatiestromen worden gegenereerd en die moeten worden geïnterpreteerd en - waar nodig - geanalyseerd. Voor dit soort activiteiten is een zekere mate van wiskundigheid vereist, en dat wordt dus vaak aangeduid met de term *mathematical literacy* (ML). Het begrip *mathematical literacy* is echter tot op heden niet of nauwelijks nader uitgewerkt. In de politieke agenda's van veel landen wordt *numeracy* of *literacy* vaak alleen maar op een heel basaal niveau beschreven. Zo is in Engeland het begrip *numeracy* teruggebracht tot het heel platte 'being able to add up' (Noss, 1997), waarmee ML is uitgedoosd tot het beheersen van de meest elementaire reken-technieken die zelfs niet zijn ingebed in maatschappelijk of beroepsspecifieke contexten. Hoewel het kunnen rekenen in zekere zin belangrijk is, vormt het niet de kern van ML. Het vermogen om te structureren en te analyseren vormt een wezenlijk onderdeel van competenties. Als ML vanuit dit gezichtspunt wordt benaderd, is het mogelijk om het op een hoger en tegelijk beroepsrelevanter niveau te beschrijven. Iets dergelijks is gedaan in een programma van de OECD, waarmee elke drie jaar de literacy van vijftienjarigen op de gebieden taal, wiskunde en natuurwetenschappen wordt gemeten. In het project 'Programme for International Student Assessment' (PISA) wordt ML beschreven vanuit wiskundige competentie (onder andere vaardigheden op het gebied van wiskundig denken en redeneren, modelleren, *problem posing* en *problem solving*, het verstandig inzetten van hulpmiddelen) en deze competenties moeten blijken bij het gebruiken ervan op overkoepelende wiskundige concepten (kwantitatief redeneren, verande-

ring en verbanden, ruimte en vorm, onzekerheid) in probleemsituaties die zijn ontleend aan de dagelijkse praktijk in maatschappij en beroep. In het document 'The PISA 2003 Assessment Framework' (OECD, 2002) wordt ML omschreven als:

Het vermogen om de rol die wiskunde in de wereld speelt te onderkennen en te begrijpen, om goed-gefundeerde beoordelingen te maken en wiskunde te gebruiken op een manier die nodig is om te kunnen functioneren als een betrokken, opbouwend en kritisch wereldburger.

Hoewel het PISA-programma zich richt op vijftienjarigen die veelal in het algemeen vormend onderwijs zitten, is het geformuleerde idee van ML ook goed bruikbaar in de context van beroepscompetenties.

3 wiskunde voor het beroep

Beantwoording van de vraag welke wiskundige vaardigheden dan zo belangrijk zijn, zou richting moeten geven aan de leeractiviteiten voor de wiskunde van het competentiegerichte (beroeps)onderwijs. Duidelijk is dat de traditionele visie op wiskunde moet worden bijgesteld. Door velen wordt wiskunde nog steeds gezien als het vak waar men algoritmische, technische slimmigheidjes leert hanteren door deze veelvuldig op een routinematige manier te oefenen. Het zijn echter juist deze routinematige technieken die tegenwoordig met veel meer precisie - en dus met minder fouten - door allerlei ICT-middelen kunnen worden uitgevoerd. Dit leidt tot het volgende dilemma (Sträßer, 2001; Kent & Noss, 2001): enerzijds komen er steeds meer geavanceerde ICT-middelen beschikbaar die wiskundige routines standaard in zich dragen. Daardoor lijkt het steeds minder zinvol om het leren van wiskunde voornamelijk te richten op het onderwijzen en trainen van technische, algoritmische kennis. Maar anderzijds is voor het effectief en efficiënt hanteren van deze geavanceerde apparatuur steeds meer een analyserende en reflecterende houding nodig van degene die deze apparatuur aanstuurt of controleert. Daarbij moeten veelal kwantitatieve datasets of informatiestromen worden geïnterpreteerd en geanalyseerd. Deze aspecten zijn typisch wiskundig van aard, maar van een heel ander karakter dan beheersing van de eerder genoemde algoritmische kennis en vaardigheden.

In de geavanceerde ICT-middelen die in het arbeidsproces worden gehanteerd, zijn veel wiskundige structuren verborgen aanwezig. Alleen wanneer een werker zicht heeft op 'wat' er is verborgen en 'hoe', is hij/zij in staat om vaardig met zo'n ICT-middel om te gaan en mag worden verwacht dat

in een *break-down* situatie handelend kan worden opgetreden. In veel gevallen blijken werkers nu alleen in staat om de juiste handelingen te verrichten als alles gaat zoals het hoort, maar zijn ze volledig onthand als er iets mis gaat (Noss, 1997). In dit kader wordt het tot de taak van het wiskundeonderwijs gerekend om lerenden 'grey-box experiences for a black-box world' te geven (Kennelly, 2000).

De behoefte aan wiskundige scholing voor de beroepsuitoefening binnen de huidige technologische maatschappij heeft dus veel meer te maken met het herkennen en analyseren van regelmatigheden, structuren en patronen in data of in een (productie)proces dan met getalmanipulatie zelf. Daarbij komt dat de problemen die in een beroepscontext worden voorgelegd complex van karakter zijn, en niet zomaar eenduidig (wiskundig) herkenbaar. Modelleren (of mathematiseren), dat wil zeggen het vertalen van een probleemsituatie in een wiskundig model, is dan ook een belangrijk aspect van wiskundige vaardigheid voor de werkplek. Maar ... modelleren is niet goed mogelijk als niet eerst verschillende wiskundige modellen (min of meer) bekend zijn.

Zinvol wiskundeonderwijs binnen beroepsopleidingen kent daarom een aantal aspecten die weliswaar van elkaar zijn te onderscheiden, maar die alleen in hun onderlinge samenhang hun waarde zullen bewijzen. Net als in de omschrijving van competenties (ACOA, 1999) kunnen deze aspecten beschreven worden met de termen 'kennis', 'vaardigheden' en 'attitude'.

Het belang van wiskunde kan daarom het best benaderd worden vanuit de methodische competenties. De betekenis van wiskunde voor het beroeps- onderwijs moet gezocht worden in haar bijdrage aan het analyseren van problemen die in de context van het beroep spelen: het stimuleren van een *problem posing* en *-solving*houding, het leren structureren van problemen om er zo beter grip op te krijgen en het leren reflecteren op een (oplossings)proces. Dit houdt in dat het belang van wiskunde niet wordt bekeken vanuit de kennis van specifieke vakinhouden, maar vanuit het idee dat cursisten 'geëigende wiskundige methodieken moeten leren hanteren om een probleemstelling uit het vakgebied aan te pakken en tot een oplossing te brengen' (TWIN, 2000).

Het lijkt wat arrogant om te claimen dat methodische competenties bij voorkeur bij wiskunde worden ontwikkeld, maar het is een feit (en dit wordt onderschreven door beleidsmakers en management van technische opleidingen) dat de praktijkvakken zich weinig of geheel niet bezighouden met aspecten als *problem solving* en reflectie. In deze vakken staat het maken van een product centraal en niet (kennelijk typisch wiskundige) vragen als: 'Wat gebeurt er met het proces en het eindproduct als er iets

wordt veranderd in bepaalde onderdelen van dat proces?', die duiden op kritische reflectie en die gericht zijn op kwalitatieve verbetering van het te maken product of op optimalisering van het proces. Een uitgebreide discussie over de rol van wiskundige vaardigheden binnen competentiegericht opleiden, belicht vanuit verschillende gezichtspunten, is te vinden in de CINop publicatie 'Exacte vakken en competenties in het beroepsonderwijs' (2002).

4 welke wiskunde?

Wiskundige vaardigheden voor het middelbaar technisch onderwijs kunnen op drie niveaus worden beschreven (TWIN, 1998). Voorbeelden van dergelijke vaardigheden zijn de volgende.

niveau 1: algemene vaardigheden

De deelnemer kan:

- bij een probleemsituatie uit het vakgebied aangeven welke wiskundige modellen en methodieken kunnen helpen het probleem te beschrijven en te analyseren;
- reflecteren op een gekozen werkwijze bij de analyse van een probleemsituatie;
- vaststellen in welke mate ICT-hulpmiddelen kunnen worden ingezet bij het analyseren van een probleemsituatie.

niveau 2: vakvaardigheden

De deelnemer kan:

- de nauwkeurigheid van de gegevens of werkwijzen betrekken bij de beoordeling van het resultaat;
- een bij het gekozen model passende oplossingsmethode correct uitvoeren;
- onderzoeken of een model moet worden bijgesteld ten gevolge van wijzigingen in de gegevens;
- bij het analyseren van een probleem ICT-middelen doelmatig gebruiken;
- bij een gegeven verband tussen grootheden dit verband beschrijven met formules en grafieken.

niveau 3: specifieke vaardigheden

De deelnemer kan:

- evenredigheden gebruiken bij berekeningen aan meetkundige figuren;
- alle oplossingen van eenvoudige vergelijkingen van het type $\sin x = a$,

- $\cos x = b$ en $\tan x = c$ bepalen door het vinden van één oplossing met behulp van de grafische rekenmachine (GRM) en de andere via gebruikmaking van symmetrie en periodiciteit;
- logaritmische vergelijkingen oplossen met algebra dan wel met behulp van de GRM;
 - gebruikmaken van logaritmisch grafiekenpapier, onder andere om te onderzoeken of een verband exponentieel is (enkellogaritmisch papier) dan wel een machtsverband is (dubbellogaritmisch papier).

Deze scheiding in verschillende niveaus is vooral gemaakt om scherp te krijgen dat wiskunde meer is dan alleen maar het leren van technieken (de zogenoemde specifieke vaardigheden). Sterker nog: in feite zijn die specifieke vaardigheden ondergeschikt aan algemenere wiskundige vakvaardigheden, die beschrijven in welke zin de technieken in samenhang met elkaar en met kritische, zorgvuldige afwegingen kunnen worden ingezet, onder andere afhankelijk van de context waarin het probleem speelt. Zo zijn nauwkeurigheden en toleranties heel sterk gekoppeld aan de situatie waarin het meet- en rekenwerk plaatsvindt en aan de kwaliteitseisen die aan het eindproduct worden gesteld. Uiteindelijk zijn de niveaus 2 en 3 beide ondergeschikt aan de meest algemene vaardigheid: het doelmatig kunnen beschrijven, analyseren en aanpakken van een probleemsituatie uit de (maatschappelijke of) beroepspraktijk met voor het probleem geëigende wiskundige methodieken. De bovengenoemde niveaus sporen daarom heel goed met de drie elementen van competentie: 'kennis' (specifieke vaardigheden), 'vaardigheden' (vakvaardigheden) en 'houding' (algemene vaardigheden). Dit spoort goed met de competentieklassen die in het PISA-document zijn beschreven en met het idee dat overkoepelende concepten het onderwijs moeten sturen en niet de aparte wiskundige leerstofinhouden.

Met opzet wordt in dit kader ook gesproken van wiskundige methodieken in plaats van 'wiskunde' om te voorkomen dat wordt gedacht dat het om een specifiek formeel wiskundig model gaat. Met name de ICT-middelen maken het tegenwoordig mogelijk om problemen op een weinig traditionele methode aan te pakken; vaak zelfs op een aantal verschillende manieren.

Een tweede reden voor deze niveauscheiding is het feit dat de ondergeschiktheid van niveau 3 aan de twee andere niveaus vastlegt welke specifieke wiskundige kennis en vaardigheden worden aangeboden. In het traditionele programma, waarbij de vakdiscipline wiskunde het uitgangspunt was, werd veel wiskunde om de wiskunde geleerd die verder geen enkele toepasbaarheid had binnen de technische beroepscontext.

Het uiteindelijke doel van wiskunde binnen een beroepsopleiding moet zijn dat een deelnemer in staat is om problemen in de context van het beroep

vol zelfvertrouwen, vanuit een flexibel aanpakrepertoire op een wiskundig verantwoorde manier te analyseren en tot oplossingen te komen die zinvol zijn binnen de praktijksituatie.

5 zinvolle wiskunde: een voorbeeld

Eerder is al betoogd dat de voortschrijdende technologie een hoger vaardigheidsniveau eist van alle werkers. Dat wordt met name veroorzaakt door het feit dat een productieproces steeds abstracter wordt. Machines die vroeger met de hand moesten worden ingesteld en bediend, zijn in toenemende mate computergestuurd. De instelling en bediening van zulke apparatuur wordt geregeld via datasets in de vorm van tabellen en structuurdiagrammen. Als voorbeeld van een dergelijk fenomeen wordt hier een stukje uit het TWIN materiaal (deel 1, hoofdstuk 2) besproken. Figuur 5 komt uit een fietshandboek.

	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56
12	467	502	538	574	610	646	682	718	754	790	826	861	897	933	969	100
14	400	431	461	492	523	554	585	615	646	677	699	739	769	800	830	861
16	350	376	403	431	458	484	511	538	565	593	619	646	673	700	727	754
18	311	335	359	383	407	431	455	479	502	526	550	574	598	622	646	670
20	280	301	323	345	366	388	409	431	452	474	495	517	538	560	581	603
22	254	274	294	313	333	353	372	392	411	431	451	470	490	509	528	548
24	233	251	269	287	305	323	333	359	377	395	413	431	449	467	484	502
26	215	231	249	265	282	298	315	331	348	365	381	398	414	431	447	463
28	199	215	230	246	262	277	292	308	323	338	354	369	384	400	415	431

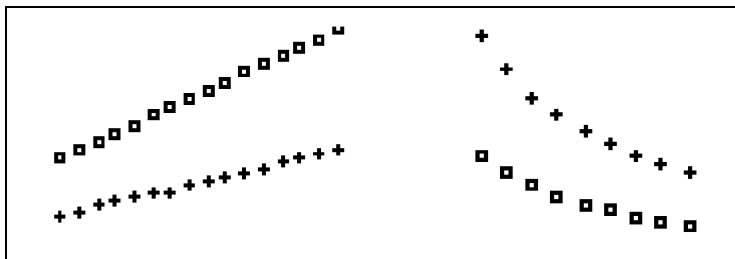
figuur 5

Het verzet (de afgelegde afstand per pedaalslag) hangt af van de overbrenging (de verhouding tussen het aantal tandjes op het voorblad en het aantal tandjes op het achterblad van de fiets). In figuur 5 zijn langs de bovenkant het aantal tandjes van het voorblad vermeld, terwijl langs de linkerkant het aantal tandjes van het achterblad zijn gegeven.

Uit de figuur valt onder andere af te lezen: bij de overbrenging 38×20 is het verzet 409 cm. De toegevoegde zin geeft aan hoe een dergelijke tabel kan worden uitgelezen. Daarmee heeft een gebruiker nog niet noodzakelijk inzicht in de manier waarop het aantal voortandjes (*tv*) en achtertandjes (*ta*) bijdragen aan het voortbewegen van een fiets. Een dergelijke tabel kan

wel heel goed een startpunt zijn om dat te onderzoeken. Zowel horizontaal (in de rijen, onder invloed van een verandering van het aantal voortandjes bij een vast aantal achtertandjes) als verticaal (in de kolommen, onder invloed van een verandering van het aantal achtertandjes bij een vast aantal voortandjes) verandert het verzet. Door zulke patronen in de tabel te onderzoeken (bijvoorbeeld met een grafische rekenmachine) kan een beeld ontstaan van de wetmatigheden die er in liggen opgesloten. In figuur 6 zijn vier voorbeelden van dergelijke wetmatigheden in beeld gebracht met een grafische rekenmachine.

Links staat het verband tussen de verzetwaarden en tv bij respectievelijk $ta = 12$ (de vierkante blokjes) en $ta = 24$ (de kruisjes) en rechts is het verband getekend tussen de *verzet*-waarden en ta bij respectievelijk $tv = 26$ (de vierkante blokjes) en $tv = 52$ (de kruisjes).



figuur 6: wetmatigheden uit een tabel grafisch gevisualiseerd

Een wiskundig competent oog ziet nu welk type verband mogelijk tussen de verschillende grootheden bestaat: rechtevenredig (bij de linkergrafieken) en omgekeerd evenredig (rechts). Dit kan op verschillende manieren nader worden onderzocht:

- bestudeer het veranderingsgedrag in de tabellen;
- controleer rechtevenredigheid met de eigenschap dat het quotiënt van de gekoppelde getallen constant moet zijn en de omgekeerde evenredigheid met het constante product van de getallen;
- gebruik de technische context van de werking van een tandwieloverbrenging.

Een ander soort activiteit om patronen in de figuur te onderzoeken is bijvoorbeeld aan de hand van eigenaardigheden die optreden:

Het verzet 431 komt acht keer voor in de figuur. Zoek ze op en verklaar waarom op die plaatsen dezelfde verzetten staan. Zoek in de tabel nog een aantal combinaties van ta en tv waarvoor het verzet hetzelfde is.

Ten slotte kan het fenomeen ook nog algebraïsch in formulevorm worden

beschreven, waarmee in één klap de structuur van de hele figuur wordt blootgelegd. Dan blijkt ook dat de evenredigheidsconstante gekoppeld is aan de maat van het wiel (in dit geval een 27 inch wiel, met een omtrek van $\pi \times 27 \times 2.54 = 215.5$ cm).

$$\text{verzet} = 215.5 \cdot \frac{tv}{ta}$$

De formule geeft ook de mogelijkheid om buiten de toevallige tabelwaarden te treden met interpolatie en extrapolatie. Dergelijke tabellen, die in techniekboeken en op de werkvloer te vinden zijn, kunnen aanleiding zijn voor zinvolle activiteiten die bijdragen aan *mathematical literacy*. Bestudering van patronen en structuren in de gegeven tabel verduidelijkt globaal de werking van het onderliggende apparaat (in dit geval de tandwieloverbrenging bij een fiets).

6 tot besluit

In het voorgaande is, zij het niet uitputtend, een beeld geschetst van de manier waarop binnen competentiegericht beroepsonderwijs een ondersteunend vak als wiskunde een plaats kan krijgen. Competentiegericht leren vraagt om een verdere bijstelling van doelen en vormen van het onderwijs in de wiskunde. Richtinggevend daarbij is de vraag, in hoeverre wiskunde bijdraagt aan competenties of dat er zelfs sprake is van een algemene wiskundige competentie. Verder is betoogd, dat een invulling van het vak waar wiskundige methodieken worden geleerd met als vertrekpunt de complexe werkelijkheid van authentieke probleemsituaties, zeker kan bijdragen aan de brede beroepscompetentie. Ook is aangegeven dat binnen de beroepscompetenties een essentiële rol is toebedacht aan het vermogen om te structureren en te analyseren. Aan deze vermogens wordt in een wiskundeprogramma, zoals dat in het voorgaande is geschetst, als leerdoel een hogere plaats toegekend dan aan de technische vaardigheden. In Amerika is Steen voorvechter van een wiskundeprogramma dat meer recht doet aan de wensen die in de moderne bedrijfsvoering leven (Forman & Steen, 2000). Hij noemt drie soorten van wiskundige *performance* die (naast beheersing van basisvaardigheden als het kunnen lezen van tabellen, grafieken en structuurdiagrammen) in een onderwijsprogramma aan bod zouden moeten komen:

- *Problem solving* die steunt op het geraffineerd gebruik van (een combinatie van) relatief elementaire wiskundige gereedschappen. Zulke *problem solving* activiteiten zijn concreter en meer algemeen bruikbaar

dan het technisch manipuleren van geavanceerde onderwerpen als goniometrische- en kwadratische vergelijkingen, zoals die nu nog vaak worden onderwezen in het voortgezet onderwijs. De besproken activiteiten die zijn gekoppeld aan de fietstabel zijn hiervan een voorbeeld.

- Het gebruiken en analyseren van moderne management *tools*, zoals *Systems Analysis* en *SQC-charts* (statistische controle op bedrijfsprocessen). Het kritisch leren hanteren van dergelijke *tools* bereidt voor op werken in de wereld van morgen, terwijl typische wiskundige algoritmiek, zoals het ontbinden in factoren en het vinden van nulpunten van functies, alleen maar voorbereiden op een verdere studie in de formele wiskunde.
- Een wiskundige grondhouding (*mathematical habits of mind*) die is ingebed in contexten zoals meten, management en kwaliteitscontrole. Deze kenmerkende wiskundige denkpatronen liggen ten grondslag aan veel aspecten van brede beroepscompetenties, maar worden (in tegenstelling tot eenvoudig herkenbare wiskundige vaardigheden van het rekenen, in de meetkunde en in algebra) nu nog slechts sporadisch als wiskundige vaardigheden erkend.

In één zin formuleert Steen treffend het verschil tussen wiskunde zoals die op school wordt geleerd en de manier waarop wiskunde wordt ingezet in de beroepspraktijk als volgt:

Mathematics in the workplace makes sophisticated use of elementary mathematics rather than, as in the classroom, elementary use of sophisticated mathematics. (Steen, 2003)

In zekere zin ligt in de laatste beschrijving besloten wat onder wiskundige competentie moet worden verstaan. Het is het vermogen om in een maatschappelijke of een beroepsmatige probleemsituatie een wiskundige denkhouding en instelling te hebben van waaruit het probleem kritisch wordt geanalyseerd. Wiskundige methodieken die worden geleerd vanuit en teruggekoppeld naar authentieke probleemsituaties zullen zeker bijdragen aan de methodische en vakmatige competenties van de moderne werker.

literatuur

- ACOA (1999). *Een wending naar kerncompetenties: de betekenis van kerncompetenties voor de versterking van de kwalificatiestructuur secundair beroeps onderwijs*. 's-Hertogenbosch: ACOA.
- CINop (2002). *Exacte vakken en competenties in het beroeps onderwijs*. In: Sormani e.a. (eds.). 's-Hertogenbosch: CINop.
- Forman, S.L. & L.A. Steen (2000). *Making Authentic Mathematics Work For All Students*. In: Annie Bessot & Jim Ridgway (eds.). *Education for Mathematics in the Workplace*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Hoyle, C. & R. Noss (1998). *Anchoring Mathematical Meanings in Practice*. In: K.

- Gravemeijer (ed.). *Introductory texts for the International Conference on Symbolizing and Modeling in Mathematics education*. Utrecht: Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.
- Kennelly, J & D. Warner (2000). When Machines do Mathematics, then what do Mathematics Teachers Teach? *Proceedings of the 9th ICME*, Makuhari, Tokyo Japan, 147-148.
- Kent, P. & R. Noss (2001). Finding a Role for Technology in Service Mathematics for Engineers and Scientists. In: Derek Holton et al (eds.). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: an ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Noss, R. (1997). *New Cultures, New Numeracies*. London: Institute of Education (Inaugural lecture).
- OECD (2002). *The PISA 2003 Assessment Framework*. Paris: Organisation for Economic Co-operation and Development.
- Steen, L.A. (2003). Data, Shapes, Symbols: Achieving balance in school mathematics. In: B.L. Madison & L.A. Steen (eds.). *Quantitative literacy: Why literacy matters for schools and colleges*. Washington, DC: The Mathematical Association of America, 53-74.
- Sträßer, R. (2001). *Mathematics at/for the Workplace. An attempt to describe the scene*. Paper presented at the Math at Work conference, februari 2001, Manchester, Engeland.
- TWIN (1998). *Eindtermendocument Doorstroom MTO-HTO, een advies*.
<http://www.fi.uu.nl/twin/nl/welcome.html>
- TWIN, (2000). *Beroepsgerichte Wiskunde*, delen 1, 2, 3, 6 en 7. Utrecht: Thieme-Meulenhoff.

Het referentiekader rekenen in het MBO - vele uitdagingen!

K. Corbet
ROC Mondriaan, Den Haag

1 inleiding

Binnen het MBO zijn er ongeveer zevenhonderd beroepsopleidingen. Studenten vanuit het VMBO hebben dus een ruime keuze. Ze kiezen soms bewust talige-opleidingen of opleidingen waar wiskunde of rekenen een belangrijke rol spelen.

Er is binnen het MBO een aantal opleidingen, waarvoor rekenen-wiskunde voor het beroep niet zo belangrijk is. Denk daarbij bijvoorbeeld aan Helpende in de zorg of welzijn, sociaal cultureel werker, kappers of de secretaresse-opleiding. De studenten kiezen deze opleidingen bewust, omdat er geen wiskunde of rekenen voor nodig is.

Voor opleidingen waar rekenen-wiskunde wel van belang is voor het beroep worden al meerdere jaren op beperkte schaal reparatielessen verzorgd. Deze lessen zijn sterk gericht op de rekenvaardigheid die in het beroep noodzakelijk is, maar halen het generieke rekenniveau niet omhoog.

In 2009 heeft de gemeente Den Haag geld ter beschikking gesteld aan ROC Mondriaan voor zowel taal- als rekenondersteuning. We hebben bij een nulmeting geconstateerd dat soms 70 tot wel 95 procent van sommige studentengroepen het vereiste VMBO-niveau voor rekenen niet behaalden. We lezen bijna dagelijks in de kranten dat de rekenvaardigheid van middelbare scholieren achteruit is gegaan. Maar is dat wel alleen van deze tijd? Er wordt zo vaak gezegd dat 'ze niet meer kunnen rekenen'. We gaan het bijna geloven.

In het rapport van de 'commissie Meijerink' worden oorzaken genoemd voor de lage rekenvaardigheid (Expertgroep Doorlopende Leerlijnen, 2008). Een van de oorzaken waar we in het MBO veel last van hebben is dat er geen onderhoud wordt gepleegd in het VMBO. In contacten met de omliggende VMBO's wordt dat beeld bevestigd. Ook het kunnen laten vallen van het vak wiskunde vanaf klas 2 van het VMBO werkt niet mee aan het op peil

houden van de rekenvaardigheid van de toekomstige MBO'ers. In het VMBO moeten nu dan ook slagen worden gemaakt, zodat daar het rekenniveau op een generiek peil wordt gehouden en waar mogelijk wordt verhoogd.

2 is het referentiekader wel de oplossing?

Nu we als onderwijsveld kunnen werken met het referentiekader van de 'commissie Meijerink', zorgt dat ervoor dat we nu dezelfde taal spreken als het gaat om reken- en taalniveaus. Maar het 2F-niveau is gedefinieerd voor het VMBO vanaf de beroepsgerichte leerweg tot en met niveau 3 van het MBO. Dat is een heel breed bereik voor slechts één referentieniveau. Daar moeten eigenlijk meerdere rekenniveaus in te onderscheiden zijn. In het MBO is namelijk niet één 'drempel' te onderscheiden maar het heeft – vanwege de verschillende MBO-niveaus - twee of drie drempels in haar systeem.

De invoering van het referentiekader zorgt er ook voor dat er meer aandacht komt voor taal en rekenen. De conclusies van de 'commissie Meijerink' zijn heel helder. Er moet echt meer aan taal en rekenen worden gedaan, in het hele onderwijsbouwwerk. Reparatie en onderhoud zijn dan ook de sleutelwoorden voor de nabije toekomst. Maar dat vraagt wel om visie en beleid binnen de scholen en daar ontbreekt het op dit moment nog teveel aan.

Het geldt dat het MBO krijgt van het ministerie voor taal en rekenen is geoormerkt. Dat betekent dat de school een implementatieplan voor taal en rekenen moet schrijven om aan te geven waar ze het beschikbare budget aan zullen uitgeven. Dit plan moet na een jaar ook inhoudelijk en financieel worden verantwoord. Dat geeft het MBO een positieve impuls om visie en beleid voor rekenen-wiskunde te ontwikkelen. Nu er bovendien centrale examens voor rekenen-wiskunde komen, geeft dat een extra stimulans aan de scholen om leestijd aan rekenen-wiskunde te besteden. Ik had echter gehoopt - en misschien wel verwacht - dat er een soort natuurlijke ontwikkeling in het onderwijs zou optreden om meer aandacht aan rekenen te besteden. Ik merk zo'n natuurlijke aandacht echter helaas niet.

Ik vind het treffend, maar ook triest, dat ondanks alle publiciteit veel van mijn collega's in het MBO niet bekend zijn met de bevindingen van de 'commissie Meijerink'. Helaas hoor ik ook geluiden, zowel binnen het VMBO als het MBO, dat het allemaal wel niet zo'n vaart zal lopen en het systeem van de referentieniveaus zichzelf opblaast. Dat alles doet geen recht aan de terechte conclusies van de 'commissie Meijerink': er moet nu echt iets gaan gebeuren aan het taal- en rekenniveau van onze studenten.

3 de zoektocht naar de verdwenen kennis

In het MBO van de jaren tachtig waren vakken als wiskunde en rekenen standaard in het rooster opgenomen. Er waren ook vakdocenten voor in dienst. Binnen het huidige MBO zijn die vakdocenten of gepensioneerd, ze hebben het onderwijs verlaten of ze geven een geheel ander vak of discipline. Daarmee lijkt veel kennis en kunde binnen de scholen verdwenen. De gevolgen zijn merkbaar binnen onze sector. De docenten met kennis van rekenen en de didactiek daarvan zijn binnen de ROC's niet meer te vinden. Niet-opgeleide docenten worden nu ingezet om rekenen te gaan geven.

In de landelijke commissies waar ik in participeer merk ik de zoektocht naar het juiste niveau. Niemand weet precies aan te geven wat een 3F-rekenopgave is. Deze zoektocht moet worden gehouden in samenwerking met het veld, omdat de hele MBO-sector te maken heeft met een gebrek aan kennis. Zoeken vergt tijd, maar als we er lang de tijd voor nemen blijft het rekenniveau van veel van onze studenten te laag.

Sommige scholen zetten digitale leermiddelen in om hun studenten hun achterstand voor rekenen in te laten halen. Ik merk echter maar al te vaak dat de inzet van de docent bij het gebruik van het leermiddel essentieel is. Studenten zelfstandig achter de computer aan het werk zetten is niet de oplossing. Zo bleek bij een *try-out* op mijn school van zelfstandig werken met behulp van een digitaal leermiddel dat slechts 22 procent van de les-tijd door de studenten effectief aan rekenen werd besteed.

Docenten hebben meerdere didactische vaardigheden nodig om studenten op MBO-niveau te kunnen helpen bij het repareren van hun achterstand en daarna het verhogen van hun rekenniveau.

De docent wordt bijvoorbeeld geconfronteerd met studenten die een aversie hebben opgebouwd tegen rekenen-wiskunde. Louter kennis van wat niveau 3F inhoudt, is dan niet voldoende. In het MBO hebben we vakdocenten nodig die ook kunnen analyseren waar de problemen van de student vandaan komen. Daar ligt wat mij betreft een uitdaging voor de lerarenop-leidingen om hun kennis op dat terrein met ons te delen.

4 tot besluit

In het VMBO wordt nu geen onderhoud gepleegd. Deze passiviteit vind ik zorgelijk. Uit metingen blijkt dat het instroomniveau van onze studenten eigenlijk al jaren te laag is. Nu er generieke eisen zijn, moeten alle studenten een basisniveau taal en rekenen bereiken. Om dat te realiseren zal ook

het vmbo een actieve bijdrage moeten leveren. Het mbo biedt studenten de laatste kans om in hun onderwijsloopbaan iets aan taal en rekenen te doen. Maar het bereiken van een hoger niveau betreft echt een gezamenlijke onderwijsverantwoordelijkheid. Op dit moment komen we vakkennis bij docenten tekort en is de instroom van studenten nog niet op het vereiste niveau.

Het referentiekader van Meijerink is voor vmbo, mbo en hbo een uitdaging en biedt vele kansen die we niet moeten laten liggen. Het gaat om de verhoging van het rekenniveau van de studenten en dat is een gedeelde verantwoordelijkheid.

literatuur

Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008). *Over de drempels met taal en rekenen. Hoofdrapport van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen*. Enschede: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen.

Dagelijks instructie

- goede rekenresultaten voor de hele groep -

S. Huitema
Malmberg, 's-Hertogenbosch

1 inleiding

In de afgelopen jaren zijn de verschillen tussen de kinderen in een klas duidelijk toegenomen. De tijd die een leraar heeft voor aandacht en zorg voor individuele kinderen is echter beperkt. Hoe zorg je er dan voor dat alle leerlingen aan hun trekken komen? Heel veel scholen zijn op dit moment bezig met 'passend onderwijs'. Maar hoe organiseer je dat, zonder te vervallen in individueel onderwijs?

2 de noodzaak van dagelijkse instructie

Bij rekenen zijn er vaak flinke niveauverschillen tussen de kinderen in een klas. Vanuit de intentie om iedere leerling op maat te bedienen, kiezen sommige scholen er voor om de klas op te splitsen in kleinere homogene groepen. De leerkracht geeft een korte taakinstructie en loopt vervolgens rond door de klas. De instructie beperkt zich tot korte interacties van enkele minuten met kleine groepjes of individuele leerlingen. De rest van de tijd besteden de leerlingen aan zelfstandig werken. Mijn ervaringen met scholen met achterblijvende rekenresultaten wijzen duidelijk in een andere richting. Mijn advies is: elke dag instructie, volgens een vast patroon. In alle mij bekende gevallen leverde dat direct leerwinst op. Om goed te leren rekenen hebben alle kinderen namelijk instructie nodig: alleen zelfstandig sommen maken is daarvoor niet genoeg. En met die instructietijd is het net als met leren piano spelen: elke dag twintig minuten heeft veel meer effect dan twee keer per week een uur. Dat kan alleen met een strakke organisatie, waarin de hele groep tegelijk instructie krijgt. Daarbij moet je natuurlijk wel rekening houden met de niveauverschillen.

3 de hele groep bij elkaar houden

Het heeft grote voordelen om de hele groep bij elkaar te houden tijdens de instructie. Om te beginnen is het organisatorisch verreweg het handigste: je hoeft de instructietijd niet te verdelen over verschillende groepen. Veel kinderen vinden het ook het prettigste om met de hele groep instructie te krijgen: ze willen geen uitzondering zijn. Sterke en zwakke leerlingen doen het liefst mee met de hele groep, mits daarbij rekening gehouden wordt met hun capaciteiten.

Tijdens zo'n gezamenlijke interactieve instructie kunnen de kinderen van elkaar leren. De verschillen tussen de kinderen zijn dan juist een voordeel. Kinderen komen met verschillende oplossingen op verschillend niveau. Dat betekent dat ze naar elkaar leren luisteren, hun oplossingen helder onder woorden moeten brengen en zich moeten inleven in elkaars denk-wijzen.

Soms worden zwakke rekenaars in een aparte groep bij elkaar gezet en volgen zij een apart programma. Dan blijkt steeds weer dat in een dergelijke groep bijzonder weinig vooruitgang wordt geboekt. Deze kinderen komen nooit meer op het niveau van de grote groep. Dat leidt tot een laag reken-niveau aan het einde van de basisschool en bovendien tot een negatief zelf-beeld. Eigenlijk mogen kinderen tot en met groep 6 nooit op die manier los-gehaald worden van de rest van de klas. Het negatieve effect op het toekomstperspectief van die kinderen is te groot.

Ook sterke rekenaars worden wel eens in een aparte groep gezet. Zij mogen dan vooruitwerken. Dat heeft twee negatieve effecten. Ergens in groep 7 of 8 hebben deze kinderen het laatste rekenboek uit en moeten ze de rest van de tijd bezig gehouden worden. Misschien nog wel erger is dat er voor deze groep kinderen vrijwel geen instructietijd beschikbaar is: de leerkracht heeft de handen al vol aan het geven van instructie aan de gemiddelde en aan de zwakke groep. Door het gebrek aan instructie bestaat het grote risico dat deze goede leerlingen te weinig automatiseren. Ook komt het regelmatig voor dat zij door gebrek aan instructie omslachtige, inefficiënte strategieën hanteren. Zoals Peter, die bij het rekenen met procenten alles 'via 1 procent' deed en ernstig in problemen kwam bij de som:

Oude prijs € 4,50, nieuwe prijs € 3,60. Hoeveel procent korting krijg je?

Dat, terwijl deze goede rekenaars een heel belangrijke rol kunnen vervullen tijdens de klassikale instructie voor de hele groep. Dit zijn de leerlingen die ideeën en mogelijke aanpakken inbrengen. Hun vondsten prikkelen de rest van de klas tot nadenken om daarmee op een hoger niveau te komen. De goede rekenaars zelf moeten daarvoor hun strategieën onder woorden brengen. Dit expliciteren vraagt hen om op een hoger niveau na te denken.

4 goede instructie in beperkte tijd

In goed rekenonderwijs is er dus dagelijks twintig minuten instructie voor de hele groep. Niet langer: na die tijd haken de kinderen af, is mijn ervaring. Langer doorgaan heeft dan nauwelijks effect meer. De beschikbare instructietijd moet dus efficiënt worden besteed. Daarvoor moet aan enkele voorwaarden voldaan worden:

- de instructie concentreert zich op één onderwerp;
- de lesorganisatie is simpel en elke dag hetzelfde;
- er wordt rekening gehouden met de verschillen tussen kinderen.

Elke dag staat één onderwerp centraal in de instructie. Dat geeft helderheid voor de leerkracht en de kinderen. Daarbij is het van groot belang dat de leerkracht precies weet wat de nieuwe rekeninhoud is, en hoe die aansluit bij wat eerder behandeld is: zicht op de leerlijn dus. Een goede handleiding faciliteert een leerkracht hierbij, zodat de voorbereiding niet al te veel tijd hoeft te kosten. Een vaste opbouw van de les geeft houvast voor leerkracht en kinderen. Iedereen weet precies wat de verschillende onderdelen van de les zijn: er wordt dus geen tijd verspild aan organisatorische zaken. Natuurlijk moet deze klassikale instructie rekening houden met de verschillen tussen kinderen.

5 driedeling in de instructie

In de praktijk is een driedeling goed werkbaar. In het begin van de instructie leveren de goede rekenaars hun bijdrage en krijgen zij voldoende *input* om zelf verder te kunnen. De beste leerlingen kunnen vaak al na ongeveer vijf minuten zelf aan de slag gaan. De grote groep heeft wat langer instructie nodig, voor hen moeten de mogelijke oplossingen rustig naast elkaar worden gezet. Na een kwartier gaan ook zij aan de slag. Voor de zwakke rekenaars volgt ten slotte de verlengde instructie. Doordat deze kinderen ‘onder handbereik’ aan de instructietafel zitten, kun je direct reageren op wat je hoort en ziet. Kinderen die nog omslachtig te werk gaan of een model niet goed gebruiken, vallen direct op. Kinderen die een stapje gemist hebben in de gezamenlijke instructie krijgen de kans het in eigen tempo tot zich te nemen. Op een lager niveau krijgen deze kinderen bij hetzelfde onderwerp een vaste oplossingsstrategie aangereikt. Uiteraard moet die strategie ook voor de grote groep al aan bod geweest zijn. Deze verlengde instructie versterkt de vaardigheid en het zelfvertrouwen van de kinderen. Daardoor zal het zelfstandig werken daarna veel succesvoller zijn!

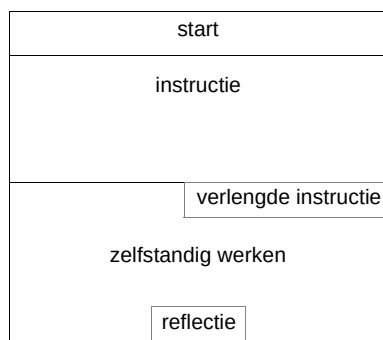
6 concreet model

In mijn werk als schoolbegeleider hanteer ik het volgende model (fig.1). De les begint altijd met een startopgave waarin ‘oude’ leerstof even herhaald en geoefend wordt. Bijvoorbeeld het automatiseren van sommen tot 20, de tafels van vermenigvuldiging of teloefeningen krijgen op die manier blijvende aandacht. Tijd: vijf à tien minuten.

Daarna volgt de klassikale instructie, volgens bovenstaande opzet. Dit is het interactieve deel van de les. Door samen te overleggen over de aanpak van een probleem, door oplossingsstrategieën te verwoorden en te vergelijken leren kinderen van elkaar, aan elkaar en met elkaar. Daarbij is het van groot belang het doel van de les, zoals aangegeven in de handleiding, nauwkeurig voor ogen te houden. Anders dreigt het gevaar van een richtingloos gesprek. Tijd: tien à vijftien minuten.

Het grootste deel van de groep gaat daarna deze leerinhoud verwerken met een vervolgoefening. Daarna gaan ze verder met zelfstandig werken, waarover straks meer.

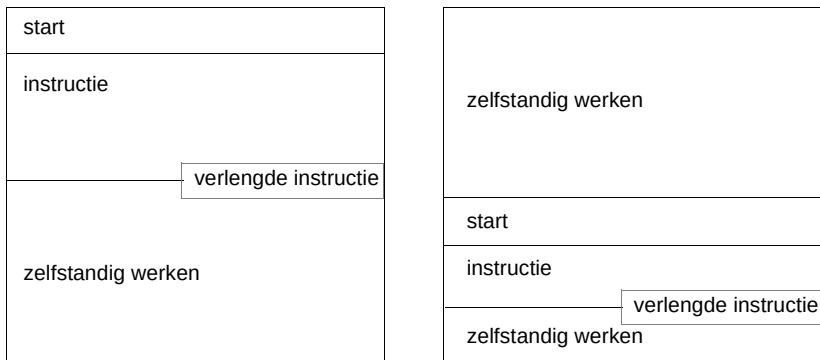
De zwakke leerlingen krijgen verlengde instructie. Terwijl de leerkracht de rest van de groep aan het werk zet, maken zij een korte overstapopgave waarin benodigde voorkennis even opgehaald wordt. Aan de instructietafel legt de leerkracht hen dezelfde leerstof opnieuw uit, maar nu met eenvoudiger getallen en contexten. Deze leerlingen krijgen één oplossingsstrategie aangeboden. Deze oplossingsstrategie speelde eerder in de klassikale uitleg ook al een belangrijke rol. Daarna gaan deze leerlingen de leerinhoud verwerken in een vervolgoopgave die past bij hun niveau. Om het leerlingen en leerkracht eenvoudig te maken is een speciaal werkboek voor de verlengde instructie, samen met suggesties in de handleiding, eigenlijk noodzakelijk. Een groot voordeel van dit model is dat hiermee recht wordt gedaan aan alle kinderen.



figuur 1: lesmodel

7 combinatiegroepen

Ook bij scholen die te maken hebben met gecombineerde groepen is dit model te hanteren. Veel van deze scholen hanteren een methode die uitgaat van twee leerkrachtgebonden lessen per week. Ook in dat geval adviseer ik deze lessen in tweeën te knippen en te spreiden over twee dagen. De praktijk leert dat de instructies op de leerkrachtgebonden dagen vaak (veel) te lang duren, want er moeten meerdere onderwerpen worden behandeld. Verder moet er op de leerkrachtvrije dagen vaak toch nog een instructie worden gegeven. Instructie en zelfstandig werken over twee dagen spreiden geeft veel meer rust, is mijn ervaring. Voorwaarde voor het hanteren van dit model in gecombineerde groepen is het in de hand houden van de tijd. Maar dit kan tegelijkertijd een uitdaging zijn. In een schema ziet dit model er in gecombineerde groepen als volgt uit (fig.2).



figuur 2: lesmodel voor een combinatiegroep

8 de weektaak

Na de instructie gaan de kinderen zelfstandig aan het werk. Steeds meer scholen kiezen voor het werken met een weektaak. De kinderen kunnen dan zelf het werk voor de verschillende vakken uit de weektaak verdelen over de dagen en tijden dat aan de weektaak gewerkt kan worden. Maar er kan ook worden gewerkt met een weektaak alleen voor rekenen. De weektaak bevat oefenmateriaal bij leerstof uit voorgaande weken; leerstof dus waarvoor de instructie en eerste oefening al zijn geweest. Door deze opzet kunnen de kinderen altijd vlot beginnen met de weektaak en zelfstandig daaraan werken. De leerkracht heeft daardoor in de tweede helft van de

les de handen vrij en kan deze tijd besteden aan kinderen die om welke reden ook nog wat extra aandacht kunnen gebruiken.

Ook in de weektaak kan prima worden gedifferentieerd door materiaal aan te bieden op drie niveaus, niveaus die passen bij de hiervoor beschreven instructie. Kinderen kunnen dus op hun eigen niveau werken: dat geeft hen kans op succeservaring. Gaat het goed, dan kunnen ze meteen doorgaan met opgaven van een hoger niveau. De leerkracht heeft dus geen omkijken naar de organisatie hiervan. Ook het oefenen op de computer kan worden opgenomen in de weektaak: daarmee is het organisatieprobleem rond de ICT ook opgelost.

Effectief rekenonderwijs houdt rekening met verschillen tussen kinderen in alle fasen van de rekenles. Daardoor wordt het mogelijk om de groep bij elkaar te houden. Binnen een dergelijke overzichtelijke organisatie kan dagelijkse instructie gewaarborgd worden voor de hele groep: en dat is voorwaarde voor goede rekenresultaten!

9 tot slot

In het advies van de 'KNAW-Commissie rekenonderwijs basisschool' is de eerste conclusie (pag.88):

De kwaliteit van de leerkracht heeft direct effect op de leerprestaties.

De eerste aanbeveling luidt:

Scholen dienen zich te bezinnen op het veelvuldig gebruik van niet-begeleid zelfstandig werken tijdens de rekenles. De commissie plaatst vraagtekens bij de effectiviteit van deze werkvorm en pleit voor een grotere inhoudelijke rol voor de leraar. Sturing en interactie met de leraar en instructie, oefening en nabespreking zijn noodzakelijk.

Conclusie en aanbeveling samengevat: Verbetering van het rekenonderwijs begint bij de leerkracht die zeer regelmatig (effectief) instructie geeft. Elke dag instructie geven, volgens een vaste opzet, zoals in dit artikel geschetst, geeft daar een concrete en werkbare invulling aan.

literatuur

KNAW-Commissie rekenonderwijs basisschool (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering*. Amsterdam: Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.

Hoe de zakrekenmachine te integreren in het basisonderwijs?

W. Vermeulen
uitgeverij Thieme Meulenhoff, Baarn

1 inleiding

De belangstelling voor de zakrekenmachine als leermiddel voor het basisonderwijs dateert van begin jaren zeventig van de vorige eeuw. Begin jaren tachtig werd de 'Ontwikkeldgroep Zakrekenmachine' opgericht. In de groep kwamen ontwikkelaars, onderzoekers, opleiders en leerkrachten samen. Zij bogen zich over de rol die de rekenmachine in het basisonderwijs zou moeten en kunnen spelen. De 'Ontwikkeldgroep Zakrekenmachine' heeft zich tot halverwege de jaren negentig ingezet om de mogelijkheden van gebruik van de zakrekenmachine in het onderwijs te onderzoeken, en te stimuleren dat de rekenmachine in de moderne reken-wiskundemethoden een gerechtvaardigde plek krijgt (Van den Brink e.a., 1988).

2 de plaats van de rekenmachine

De vraag was, en is nog steeds, wat de plaats van de rekenmachine in het onderwijs moet zijn. In elk geval moeten kinderen geleid kennismaken met het apparaat, om de mogelijkheden en de onmogelijkheden ervan te verkennen en na te gaan wanneer de rekenmachine zinvol kan worden gebruikt, en wanneer niet. De meeste kinderen weten door ervaringen buiten school hoe de rekenmachine werkt en kunnen ze het apparaat al op jonge leeftijd gebruiken om getallen te maken en basisbewerkingen uit te voeren. Jonge kinderen weten dat een rekenmachine sommetjes als: $6 + 3 =$, $6 \times 3 =$, $6 : 3 =$, of $6 - 3 =$ foutloos uitvoert, tenminste als je de juiste knopjes in de juiste volgorde intoetst. Immers: de rekenmachine geeft hetzelfde antwoord als de kinderen zelf, wanneer ze deze eenvoudige sommetjes uit het hoofd uitrekenen. Kinderen vertrouwen er op dat de rekenmachine ook bij grote getallen correct rekt, en dus kunnen ze de rekenmachine gebruiken voor opgaven die hun eigen 'rekenkracht' te boven gaan. Zo kunnen bijvoorbeeld kinderen uit groep 3 als ze willen

weten hoeveel ze overhouden als ze 850 eurocent hebben gespaard, en ze geven iets uit voor een cadeautje van 480 cent, dit met de rekenmachine uitrekenen, terwijl ze dat nog helemaal niet uit het hoofd kunnen. Alleen: als ze een intoetsfout maken, kunnen ze niet bedenken dat de uitkomst niet klopt. Daarom is het belangrijk om de kracht van het eigen denken te meten met die van de zakrekenmachine. Voor de onderbouw zijn er activiteiten, zoals het maken van rijtjes sommen die de ene leerling uit het hoofd uitrekent, en de andere met de rekenmachine. Het gaat dan om eenvoudige en samenhangende opgaven (fig.1). Wie is het snelste klaar? Zijn de uitkomsten met de rekenmachine en uit het hoofd hetzelfde? Als dat niet zo is, zoek dan uit welk antwoord goed is, en waarom.

	met de rekenmachine	uit het hoofd
6 + 4	_____	_____
4 + 6	_____	_____
5 + 6	_____	_____
6 + 6	_____	_____

figuur 1

Op deze manier leren de leerlingen dat de rekenmachine niet altijd even handig is, en ook dat je er niet blindelings op moet vertrouwen.

In hogere leerjaren moeten de kinderen met name bij de analyse van complexere problemen en vraagstukken op de kracht van het eigen denken blijven vertrouwen. Bij simpele opgaven moeten kinderen zoveel mogelijk de eigen rekenkennis inzetten. Voor een opgave als $5 \times 5 =$ heb je de rekenmachine niet nodig; het is omslachtig en de kans op een intoetsfout is altijd aanwezig.

Door de grenzen van de rekenmachine te verkennen ontwikkelen de kinderen een 'rekenmachine-geweten'. Dat houdt in dat ze weten dat je door intoetsfouten, of omdat de machine iets anders doet dan je denkt, gemakkelijk een foutieve uitkomst kunt krijgen. Daarom moeten leerlingen leren om er schattend mee te rekenen, zodat ze niet klakkeloos 'rare' uitkomsten opschrijven (Struik, 1986). Denk bijvoorbeeld aan een opgave als:

Je koopt 2 spelletjes van € 8,40 en 7 spelletjes van € 9,96.

Hoeveel moet je betalen?

Als je op de rekenmachine intoetst: $2 \times 8,40 + 7 \times 9,96$, verschijnt in het venster:

237.048

Je moet in dit geval meteen bedenken dat dit antwoord niet kan:

- bij rekenen met geld moet je op maximaal twee cijfers achter de komma uitkomen;
- als je schattend rekt, moet je tot de conclusie komen dat je nooit meer dan twee keer negen euro en zeven keer tien euro moet betalen, dus de uitkomst in het venster is veel te groot.

Bij deze situatie is het verkeerde antwoord het gevolg van het feit dat de eenvoudige rekenmachine alles achter elkaar uitrekt, en dus niet de regel ‘vermenigvuldigen of delen gaat voor optellen of aftrekken’ gebruikt (geavanceerdere rekenmachines doen dat wel).

Door de houding van schattend meerekenen te ontwikkelen, wordt het belang van het schattend rekenen, gebruikmakend van handige afrondingen en belangrijke eigenschappen, benadrukt.

Door kinderen te wijzen op intoetsfouten die je kunt maken, leren ze om steeds goed te kijken of het antwoord in het venster wel kan kloppen.

Het nadenken over intoetsfouten kan aanleiding zijn om kinderen het belang van zorgvuldig gebruik van de rekenmachine te laten onderzoeken. Bijvoorbeeld door opdrachtjes te geven als: ‘Jana wil de opgave $22 \times 18 =$ ’ met de rekenmachine uitrekenen. In het venster komt:

40.

Kan dat kloppen? Wat kan er mis zijn gegaan?

Het schattend rekenen wint door de invoering van de rekenmachine aan betekenis, omdat het steeds als controlemiddel op de uitkomst in het venster wordt gebruikt.

De rekenmachine als maatje vereist inzichtrijke rekenkennis en andere vaardigheden. De leden van de ‘Ontwikkelgroep Zakrekenmachine’ huldigen het standpunt dat je pas zinvol en handig met de rekenmachine kunt werken als je al kunt rekenen, dat wil zeggen, als je inzicht hebt in de getallen en de getalopbouw, in de betekenis van bewerkingen, en als je rekeneigenschappen en spelregels bij het handig en schattend rekenen kent. Pas dan kan de rekenmachine een echt rekenmaatje worden. Door de meeste didactici wordt gepleit voor inzet van de rekenmachine vanaf de bovenbouw van het basisonderwijs. Dan hebben de kinderen een aantal fundamentele elementen van het rekenen in een mentaal kennisnetwerk bijeen gebracht. Als

de rekenmachine voor de kinderen een rekenmaatje is geworden, moeten ze het apparaat ook naar believen kunnen gebruiken. Dat pleit ervoor om elk kind in de bovenbouw van het basisonderwijs permanent een rekenmachientje ter beschikking te stellen. Voor het onderwijs is het gevolg dat het rekenen meer dan nu wordt gericht op de structuur van echt realistische problemen, wat er moet worden berekend om problemen op te lossen, en hoe de rekenmachine daarbij zinvol kan worden ingezet, en op het vlot en vaardig gebruiken van de rekenmachine. Het betekent ook dat er minder aandacht hoeft te worden besteed aan het inoefenen van de traditionele pen-en-papier bewerkingsschema's. Die hebben door de opkomst van de rekenmachine immers sterk aan betekenis ingeboet.

3 ontdekkingen met de rekenmachine

Naast het leren goed de rekenmachine te gebruiken, zijn er ook mogelijkheden om aan de hand van de rekenmachine ontdekkingen te doen, die voortvloeien uit de eigenschappen en eigenaardigheden van de rekenmachine. Er zijn meerdere belangrijke ontdekkingen.

een black box

De rekenmachine werkt als een *black box*: hij vertelt niet hoe hij rekt, en evenmin hoe je ermee moet rekenen (Van den Brink, 1986). Gevolg voor de didactiek: de kinderen moeten zich bewust worden van het feit dat de rekenmachine een eigen 'verborgen agenda' heeft. Door te reflecteren op wat de rekenmachine zou kunnen hebben gedaan (hypotheses vormen) kunnen uitspraken worden gedaan over de *black box*. Aanleiding hiertoe is een opgave waar de rekenmachine een ander antwoord geeft dan je verwacht, zoals de bekende opgave: $4 \times 5 - 4 \times 5 =$. Besproken wordt wat de leerlingen denken dat er uit komt. De leerlingen zijn er van overtuigd dat het 0 moet zijn. De eenvoudige rekenmachine geeft echter:

80.

opgave	jij verwacht	uitkomst op de rekenmachine
$5 \times 4 - 5 \times 4$	_____	_____
$6 \times 4 + 6 \times 4$	_____	_____
$4 \times 6 + 4 \times 6$	_____	_____

figuur 2

Nu treden de leerlingen op als detectives. Ze worden uitgedaagd om te achterhalen wat de rekenmachine kan hebben gedaan. Ter vergelijking worden analoge opgaven gepresenteerd (fig.2).

een autoritaire rekenautomaat

De rekenmachine is een autoritaire rekenautomaat: de rekenmachine eist dat de gebruiker zich aan het interne programma aanpast, en duldt geen eigen procedures (Van den Brink, 1986).

Gevolg voor de didactiek: kinderen moeten de baas blijven over de autoritaire automaat. Zo kan de autoriteit van de kinderen over de machine worden ontdekt door opgaven te geven die de machine niet aankan, zoals: $18 + .. = 148$.

Als je intoetst: $18 + .. =$ (het knopje met het puntje een aantal keren indrukken), dan geeft de rekenmachine 18. Dus je zou zeggen: op de puntjes komt 18. Maar $18 + 18 = 36$. Dat kan niet goed zijn. Er wordt nu gezocht naar mogelijkheden om de autoritaire rekenmachine de baas te blijven. Een mogelijkheid is om te proberen wat er op de puntjes kan komen, bijvoorbeeld: $18 + 110 = .$ En de machine geeft 128. Maar je moet krijgen: 148. Dus er moet nog wat bij. Ook kunnen kinderen er de verborgen aftrekopgave in zien, en die wil de rekenmachine wel voor je uitrekenen: $148 - 18 = 130$.

Op deze manier kunnen de machineweigeringen uitgebuit worden, om het eigen relatienetwerk te verstevigen.

eigenschappen en werkwijzen

De rekenmachine heeft eigenschappen en werkwijzen, die kunnen worden verkend en die worden gebruikt bij het rekenen, zoals een geheugen, de constante factor, het '='-teken als signaal voor de uitkomst (en niet als 'gelijk aan'-teken), puntgetallen in plaats van kommagetallen.

Gevolgen voor de didactiek (Van den Brink e.a., 1988):

- De constante factor is geschikt om programmaatjes te maken als $2 + (+) = .$ Vervolgens drukt de leerling steeds de '='-knop in; de uitkomsten van de tafel van 2 verschijnen in het venster. De leerling ervaart dat het niet ophoudt bij 10×2 . Een niveau hoger is het achterhalen wat een programmaatje doet. Zo kan een leerling intoetsen $3 + (+) 5 = .$ De andere leerling mag drie keer op het '='-knopje drukken en moet daarna voorspellen wat er in het venster verschijnt als hij of zij weer op het '='-knopje drukt. De controle op de juistheid van het antwoord zit uiteraard al in het programmaatje ingebakken.
- de betekenis van het '='-teken komt tot zijn recht bij een gezamenlijk te bespreken opgave als $18 \times 6 = 3 \times \dots$. Eerst wordt de opgave uit het hoofd

uitgerekend; hierbij kan de weg worden gevolgd van het eerst uitrekenen van het stukje voor het '='-teken, en de uitkomst delen door 3. Mooier is het als de leerlingen zien dat het eerste getal na het '='-teken een halvering is van 6, zodat de tweede term een verdubbeling moet worden van 18. Dus op de puntjes komt 36.

Met de rekenmachine merk je dat je het eerste deel kunt intoetsen; zodra je het '='-teken intoetst geeft de rekenmachine de uitkomst: 108. Toets je daarna in: $3 \times$ dan blijft 3 in het venster staan. Na het '='-teken beschouwt de rekenmachine de opgave als afgedaan. Je moet daarom van bovenstaande opgave er twee maken, om met de rekenmachine verder te kunnen.

Ook kun je ontdekken dat niet alleen het '='-teken dient als signaal voor de uitkomst, maar elk bewerkingsteken kan die functie krijgen, bijvoorbeeld bij een opgave als: $3 \times 49 : 7 =$. Zodra je het deelteken hebt ingetoetst krijg je de uitkomst van de 3×49 in het venster:

147.

Hier moet expliciet de aandacht op worden gericht. Om dit te doen kan de strokentaal worden geïntroduceerd. Daarmee wordt geregistreerd wat de vluchtige rekenmachine, waar getallen in het venster komen en weer verdwijnen, heeft gedaan (Ter Heege, 1985):

3	x	49	:	7	=	
			↓		↓	
			147		21	

De strook is een geschikt hulpmiddel om gezamenlijk reflectie te plegen op dit soort opgaven, en in het algemeen om te kijken hoe een procedure met de rekenmachine is verlopen.

- Puntgetallen kunnen worden besproken zodra de leerlingen vertrouwd zijn met de kommagetallen. Puntgetallen wijken af van kommagetallen, omdat ze op de eenvoudige rekenmachine worden afgekapt, en niet afgerond, en omdat nullen achteraan wegvallen. Dat onze komma een punt is op de rekenmachine is voor de meeste kinderen geen probleem. In advertenties wordt de punt ook steeds vaker gebruikt, met name bij de geldnotatie om euro's van eurodubbeltjes en eurocenten te scheiden. Op de rekenmachine wordt 'vier broodjes van € 0.85' dan $4 \times 0.85 = 3.4$ in plaats van 3.40.

Deze uitkomst is aanleiding om te bespreken of 3,4 en 3,40 hetzelfde zijn. In termen van geld: zie je het als vier eurodubbeltjes of als veertig eurocent? Op de rekenmachine geeft de deling $17 : 3 =$

5.6666666

Je moet zelf een vertaalslag maken, aan de hand van de context waarin deze opgave verschijnt. Er kunnen verschillende contexten voor deze opgave worden aangeboden:

- als er zeventien pannenkoeken onder drie kinderen worden verdeeld krijgt ieder $5\frac{2}{3}$ pannenkoek. De rekenmachine kan hier niet zinvol worden ingezet;
- als je met z'n drieën zeventien euro mag delen, dan kom je op 5 euro en 66 eurocent per persoon, en nog een beetje. Je kijkt dus iets verder dan de twee posities na de punt, die bij de geldnotatie worden gebruikt. Terugrekenen geeft $3 \times 5.66 = 16.98$, ofwel, je houdt nog 2 cent over;
- als je met zeventien personen groepjes van drie moet maken, dan kun je vijf groepjes maken. Je moet afzien van alles wat achter de vijf staat. Er blijven twee personen over, wat doe je met die personen?
- als er voor een kleine veerpont die aan de overkant ligt zeventien auto's staan te wachten, en er kunnen maar drie auto's tegelijk mee, dan moet de pont zes keer heen en weer varen om ze allemaal naar de overkant te brengen.

Elk van deze situaties geeft een ander antwoord, dat op basis van het rekenmachinepuntgetal geherinterpreteerd wordt. Het karakter van de autoritaire rekenautomaat, die geen rekening houdt met verschillende contexten, is juist aanleiding om zulke verschillende situaties te overdenken.

Ten slotte kan een opgave als $1 : 7 \times 7 =$ worden besproken. Na enige discussie leggen de kinderen uit dat er 1 uit moet komen, bijvoorbeeld door te redeneren: 'Je verdeelt een pannenkoek in zeven stukjes en daarna krijg je zeven van die stukjes'. De eenvoudige zakrekenmachine geeft echter bij $1 : 7 \times 7 =$

0.9999997

Besproken wordt wat deze uitkomst betekent; het ligt dicht bij 1. Wat zou er in het venster komen als er niet zeven cijfers achter de punt in

het venster kunnen, maar bijvoorbeeld tien? Kun je bedenken hoe dat komt?

redeneren met getallen en bewerkingen

De rekenmachine kan worden gebruikt als model aan de hand waarvan de kinderen met getallen en bewerkingen redeneren.

In de onderbouw kan dat met een tactiele oefening als: 'Zet je vinger op het knopje met 5. Sluit je ogen. Kun je nu 56 maken? Kijk of het goed is. Zet nu je vinger weer op 5, en maak 54' (Vermeulen, 2009). In de midden- en bovenbouw kunnen denkopdrachten worden gegeven aan de hand van imaginair niet goed functionerende rekenmachines.

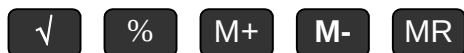
Denk aan een opdracht als: 'Het knopje met 4 doet het niet meer op je rekenmachine. Kun je nu toch de opgave 4×356 met je rekenmachine uitrekenen?'

Er zijn verschillende oplossingen, te weten: $356 + 356 + 356 + 356 =$, of $2 \times 2 \times 356 =$, of $5 \times 356 - 356 =$, of $3 \times 356 + 356 =$, die het denken van de kinderen weergeven, en zich uitstekend lenen voor een gezamenlijke bespreking.

4 de rekenmachine als didactisch middel: integreren in het rekenonderwijs

De ontdekkingen die samenhangen met kenmerken en eigenaardigheden van de rekenmachine kunnen didactisch worden ingezet, dat wil zeggen, dat ze gepland deel uitmaken van het curriculum (Ter Heege, 1991; 1992). Dat is mogelijk, omdat inzicht verwerven in de kenmerken en eigenaardigheden van de rekenmachine bijdraagt aan het rekeninzicht. De rekenmachine wordt gebruikt om het relatienetwerk te verkennen en op te bouwen.

In de bovenbouw kan het relatienetwerk met de rekenmachine worden uitgebreid als kinderen de gelegenheid krijgen om kenmerken en eigenaardigheden van de rekenmachine verder te onderzoeken. Zo kunnen kinderen ontdekkingen doen door de werking van knopjes te onderzoeken (fig.3).



figuur 3

Hoe deze knopjes werken wordt door middel van opdrachten onderzocht, bijvoorbeeld:

- kijk eens wat er gebeurt als je 1, 2, 3, ... enzovoort op je rekenmachine zet, en dan steeds het knopje met $\sqrt{}$ indrukt.
Schrijf de antwoorden die in het venster komen op. Bij welke getallen krijg je een heel getal als antwoord (zonder punt tussen de cijfers)? Kijk of je met de rekenmachine meer getallen kunt vinden die een heel getal als uitkomst geven;
- zet het getal 4 in het venster. Druk nu vijf keer op het knopje met $M+$. Wat gebeurt er in het venster?
Druk nu op het knopje met: MR Wat zie je nu? Weet je nu wat het knopje $M+$ en MR doet?
- procentrekenen op de rekenmachine vraagt inzicht in wat ‘procent van’ in rekentechnische zin betekent, dus waarom ‘25 procent van’ berekend kan worden via $0.25 \times ..$? (Ter Heege, 1986). Met behulp van de rekenmachine kunnen kinderen vervolgens laten zien hoe ze denken. Bijvoorbeeld bij de volgende opgave: Als je een bedrag wegzet van 2500 euro tegen 2,3 procent rente, hoeveel heb je dan na een jaar?

Oplossing 1: $2500 : 100 = \times 2.3 = + 2500 =$ (rekenen via 1 procent).

Oplossing 2: $2500 \times 2.3\% = + 2500 =$.

Oplossing 3: $2500 \times 0.023 = + 2500 =$.

Oplossing 4: $2500 \times 1.023 =$.

Elke oplossing weerspiegelt een ander denkniveau, en dit kan gezamenlijk worden besproken.

Ook in de onderbouw kan de rekenmachine een didactische rol vervullen bij het ontdekken van de betekenis van getallen en bewerkingen (Vermeulen, 2009).

Getalvormen: de verschillen tussen de cijfervormen op de knopjes en de cijfervormen in het venster worden besproken. Dat kan kinderen er toe aanzetten om naar nog andere vormen op zoek te gaan.

Bij getalrijsoefeningen kan de constante factor worden gebruikt, waardoor de rekenmachine als tellertje fungeert:

$$1 + 1 = = = = =$$

$$25 - 1 = = = = =$$

Deze functie wordt ook gebruikt bij de uitbreiding van de getalrij, met name bij overgang naar honderdtallen, duizendtallen, tienduizendtallen, enzovoort.

$$989 + 1 = = = = =$$

$$10010 - 1 = = = = =$$

Ook bij vermenigvuldigtafels in de onderbouw kan de constante factor worden gebruikt:

$$3 + 3 = = = = =$$

De ene leerling voorspelt wat het volgende getal is, de andere leerling drukt steeds de '='-knop in.

5 besluit

De rekenmachine kan vanaf het begin van de basisschool een functie vervullen mits de kenmerken van het apparaat didactisch worden uitgebuit. Door middel van geleid ontdekken van kenmerken en de werking van de rekenmachine kan verdieping van inzicht in getalopbouw en getalrelaties tot stand komen. Door inzichtelijk gebruik wordt de rekenmachine een rekenmaatje voor leerlingen, dat het handmatig uitwerken van bewerkingen op een efficiënte manier overneemt. Tegelijkertijd wordt het schattend en handig rekenen ondersteund, omdat de kinderen een 'rekenmachine-geweten' ontwikkelen. Ook moeten de leerlingen op de kracht van hun eigen denken leren vertrouwen, omdat ze merken dat juist het begrijpen en analyseren van problemen niet door de rekenmachine wordt overgenomen. Daarom is de rekenmachine, mits goed geïntroduceerd en begeleid, een machtig middel bij het leren rekenen en bij het opbouwen van een gedegen relatienetwerk bij het rekenen.

literatuur

- Brink, F. J. van den (1986). De autoritaire rekenautomaat en realistisch rekenonderwijs. *Willem Bartjens*, 6(1), 48-53.
- Brink, F.J. van den (1986). Ssst, zieke rekenmachines, tssss. Ofwel: onderzoek naar eigenaardigheden van rekenmachines. *Willem Bartjens*, 6(2), 60-62.
- Brink, F.J. van den, H. ter Heege, W. Struik, W. Sweers & W. Vermeulen (1988). *De taal van de rekenmachine*. Tilburg: Zwijsen, OBR reeks 319.
- Heege, H. ter (1985). *Mijn zakrekenmachineboek*. Enschede: SLO.
- Heege, H. ter (1986). Procenten in het basisschoolcurriculum. *Willem Bartjens*, 6(1), 36-40.
- Heege, H. ter (1991). Ontwikkeling en onderzoek ten behoeve van de integratie van de zakrekenmachine in het basisonderwijs, 1. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het rekenonderwijs*, 10(2), 26-32.
- Heege, H. ter (1992). Ontwikkeling en onderzoek ten behoeve van de integratie van de zakrekenmachine in het basisonderwijs, 2. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het rekenonderwijs*, 10(3), 26-29.
- Struik, W. (1986). Het schatten van uitkomsten met behulp van de zakrekenmachine. *Willem Bartjens*, 6(1), 44-48.
- Vermeulen, W. (2009). De rekenmachine in het basisonderwijs van meet af aan. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 28(3), 38-41.
- Vermeulen, W. (2010). Nog steeds bang voor de zakrekenmachine op de basisschool. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 29(1), 59-68.

Getallen zijn je beste vrienden

V. van der Noort
Universiteit Utrecht

1 inleiding

Als ik mensen vertel dat ik wiskundige ben krijg ik vaak de vraag: 'Wiskunde, veel getallen zeker?' Ik zou willen zeggen: 'Was het maar waar'. De meeste wiskunde is mooi en meeslepend, maar ook abstract en ongrijpbaar. Als je als wiskundige af en toe de kans krijgt iets over getallen, gehele getallen, te zeggen is dat altijd een bron van vreugde. Getallen zijn je beste vrienden: die ken je al vanaf je vroegste jeugd, je weet hoe ze denken, wat ze voelen en wie ze zijn. Heel anders dan al die ingewikkeldere wiskundige concepten die je je in de rest van je leven met pijn en moeite een beetje eigen gemaakt hebt.

Dit is natuurlijk niet voorbehouden aan wiskundigen. De meeste mensen praten er nooit meer over als ze geen acht meer zijn, maar volgens mij heeft iedereen uit zijn vroege jeugd nog wel bepaalde onverklaarbare beelden of associaties bij getallen: dat even getallen rond zijn en oneven vierkant (of andersom); of oneven getallen rood en even blauw; of oneven mannelijk en even vrouwelijk of andersom. Dat bepaalde getallen sympathiek zijn en andere arrogant of mysterieus. Ik sprak ooit een meisje dat een hekel had aan het getal 1 omdat het overal maar als eerste en belangrijkste bij staat zonder ooit iets echt gepresteerd te hebben en een jongen die vond dat getallen met veel zevens erin, zoals 77, meer zelfvertrouwen uitstraalden dan andere getallen. Een andere vrouw hield van het getal 63, maar had eerder het gevoel dat het getal haar had uitgekozen dan andersom: op belangrijke momenten in haar leven dook het steeds op. Hoe kleiner de getallen, hoe sterker de meningen erover. Het getal 3 kan zich in een zekere populariteit verheugen, over 5 zijn de meningen een beetje verdeeld. Sommige mensen vinden 5 maar een naar arrogant mannetje, anderen zien er een ongenaakbare schone jonkvrouw of een betrouwbare vriend in, met wie je een gezellige avond in de kroeg zou kunnen doorbrengen als het een echt mens was. Met hoe meer mensen je hierover praat, hoe meer je merkt dat je eigen associaties en gevoelens bij getallen eigenlijk volstrekt willekeurig zijn. Maar ook: hoe leuk het is om hier na al die jaren weer eens over na te denken.

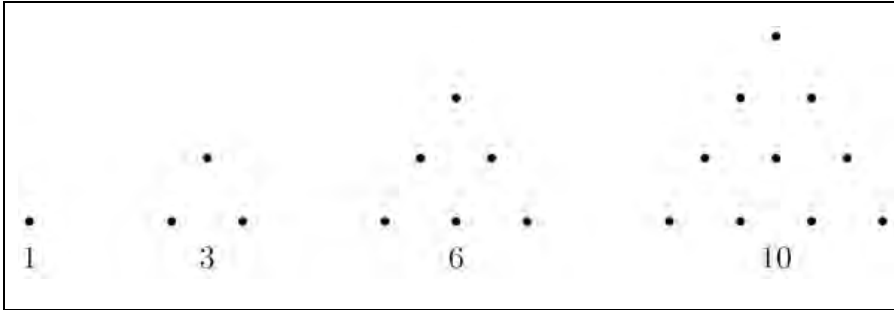
Ik raakte in een discussie met een vriendin die meende dat oneven getallen vrouwelijk zijn en even getallen mannelijk - ik zie het al mijn hele leven andersom (waarom weet ik eigenlijk niet). Zij was er van overtuigd dat ik ergens een denkfout gemaakt moest hebben: oneven getallen zijn immers zoveel grilliger, mooier en mysterieuzer? Ik had wat moeite om haar duidelijk te maken dat in mijn wereld als vijfjarige de archetypische *femme fatale* geen rol van betekenis speelde.

Toch krijg ik uit mijn volkomen niet-wetenschappelijke onderzoekje naar associaties die mensen met gehele getallen hebben, de indruk dat er wel een paar vage overeenkomsten zijn op te merken. Bijvoorbeeld dat deelbaarheid een rol speelt in hoe getallen gezien worden. Een getal met veel delers, zoals 24, wordt over het algemeen wel gezien als sympathiek, een beetje saai misschien, maar op een goede manier: als een soort oude vriendelijke Sint-Bernardshond. Getallen met heel weinig delers, zoals 7, 13 en 23 lijken eerder eigenwijs, mysterieus, stoer of juist gevaarlijk. Getallen die daar een beetje tussenin zitten qua hoeveelheid delers, bijvoorbeeld 26, 34 of 58 zijn dan eerder getallen waar niemand een mening over lijkt te hebben. Het zijn de grijze voorbijgangers die je elke dag bij de bushalte ziet zonder ze ooit echt op te merken.

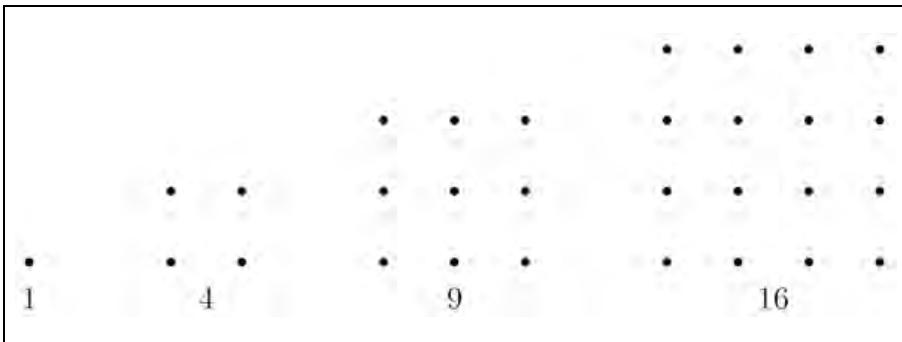
2 vierkants- en driehoeksgetallen

Zoals gezegd, vind ik het een beetje jammer dat mensen niet vaker over dit soort irrationele associaties met getallen praten. Een paar duizend jaar geleden was dat wel anders. Pythagoras (grootweg 580-490 v Chr.), tegenwoordig vooral bekend van de 'Stelling van Pythagoras', groeide door zijn bereidsheid, charisma en retorisch talent tegen het eind van zijn leven uit tot wat we tegenwoordig een sekteleider zouden noemen. Zijn volgelingen, de Pythagoreërs, vormden ook na zijn dood een hechte religieuze gemeenschap die nadacht over wiskunde, geen vlees at en behoorlijk ver ging om de (wiskundige) ontdekkingen van de broederschap voor de buitenwereld geheim te houden - tot aan als-schipbreuk-gecamoufleerde moorden toe. Maar zoals dat gaat, in alles komt uiteindelijk de klad en zo is er in de loop der eeuwen toch het een en ander over de Pythagoreërs uitgelekt. Ik kan u nu zonder gevaar voor eigen leven vertellen dat de kern van hun religie bestond uit getallen. Getallen? Ja, ze vereerden getallen als iets heiligs, maar meenden ook dat de natuur en alle dingen op het diepste niveau uit getallen bestaan. En vooral kleine getallen stonden symbool voor van alles en nog wat. Zo stond 1 voor de rede, 4 voor rechtvaardigheid, 5 voor het huwelijk omdat het de verbinding symboliseerde tussen 2, het kleinste

even, en 3, het kleinste oneven getal (waarom 1 niet als oneven telde is mij ook een raadsel) en 7 voor de godin Athene. Bijzondere verering was echter weggelegd voor 'vierkantsgetallen' en 'driehoeksgetallen', getallen die je in een vierkant of een driehoek kunt tekenen (fig.1 en 2).



figuur 1: driehoeksgetallen



figuur 2: vierkantsgetallen

De vierkantsgetallen, 1, 4, 9, 25, 36, 49, ... zijn vandaag de dag beter bekend als kwadraten: je krijgt het n -de (wiskundeslang voor 'zoveelste') door het getal n met zichzelf te vermenigvuldigen: het tweede vierkantsgetal is 4 want 2 keer 2 is 4, het derde vierkantsgetal is 9 want 3 keer 3 is 9, het twaalfde vierkantsgetal is $12 \times 12 = 144$ en zo verder.

De eerste driehoeksgetallen zijn 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ... en wie goed naar de rij kijkt, ziet al gauw wat de regelmaat is en hoe het verder gaat. Het is leuk om te weten dat een bepaald getal een vierkants- of driehoeksgetal is. Het geeft een ogenschijnlijk saai getal als 55 toch wat meer allure (en een getal als 36, dat zowel een vierkants- als een driehoeksgetal is, al helemaal!).

3 perfecte en bevriende getallen

Maar hoe mooi vierkants- en driehoeksgetallen ook zijn, hun schoonheid valt enigszins in het niet bij de majesteitelijke uitstraling van de zogeheten perfecte getallen, ook een ontdekking van de Pythagoreërs. Of een getal wel of niet perfect is, wordt bepaald door zijn 'delers', de getallen waar je het getal door kunt delen met als uitkomst een geheel getal. Zo is 15 deelbaar door 1, 3 en 5 (en door zichzelf, maar dat vinden we niet zo'n interessante observatie) en als je die getallen optelt krijg je 9. Tja, 24 is deelbaar door een stuk meer getallen: 1, 2, 3, 4, 6 en 12, opgeteld 28. Het getal 23 is deelbaar door 1, opgeteld 1. Al met al lijkt dat uitrekenen van delers nog wel aardig: het aantal delers van een getal kan nogal sterk verschillen, maar dat optellen lijkt een tamelijk zinloze toevoeging. Toch deed Pythagoras dat en hij ontdekte zo een bijzondere eigenschap van het getal 28: de delers van 28 zijn 1, 2, 4, 7 en 14 en als je die bij elkaar optelt krijg je weer 28! Om die reden noemde hij 28 volmaakt (of perfect). Het getal 28 en zijn delers leven samen in een perfecte wereld waar ze niemand anders nodig hebben: het geheel is gelijk aan de som der delen, het getal 28 herrijst als een fenix uit zijn eigen as.

Een kleiner voorbeeld van een perfect getal is 6. Namelijk: 6 is deelbaar door 1, 2 en 3 en $1 + 2 + 3 = 6$. Als u nu enthousiast geworden bent en zelf ook op zoek wilt naar andere perfecte getallen moet ik u wel waarschuwen dat perfecte getallen, zoals alle perfecte zaken in het leven, extreem zeldzaam zijn: onder de duizend is er naast 6 en 28 nog maar één ander perfect getal en onder de tienduizend nog maar twee.¹

In zijn zoektocht naar meer volmaakte getallen stuitte Pythagoras op twee getallen die op een bepaalde manier nog mooier zijn: 220 en 284. Als je de delers van 220 opschrijft, vind je 1, 2, 4, 10, 11, 20, 22, 40, 44 en 110 en deze tellen op tot 284. Tot zover niks bijzonders. Maar de delers van 284 zijn 1, 2, 4, 71 en 142 en die tellen op tot 220! De getallen 220 en 284 lijken dus aan elkaar te denken - ze zijn in de eerste plaats 'elkaars' beste vrienden. Pythagoras noemde deze getallen bevriende getallen en vertelde zijn leerlingen een voorbeeld aan deze getallen te nemen: 'Wat is een vriend? Een vriend is een ander ik, zoals met 220 en 284'. Door de eeuwen heen hebben deze getallen veel mensen geïnspireerd. In de middeleeuwen gaven verschillende Arabische boeken de volgende tip aan hun lezers: als u bij iemand in het gevlei wilt komen, schrijft u op twee stukjes papier de getallen 220 en 284. Het ene eet u zelf op, het andere prakt u stiekem door het eten van de ander.' Het opeten van deze bevriende getallen zou de relatie zeker ten goede komen! Ook gaat het verhaal dat in het middeleeuwse Europa geliefden vaak een kettinkje droegen met daaraan stukje hout met een getal erin gekerfd: bij de ene geliefde 220 en bij de andere 284. Een

stuk romantischer dan die halve hartjes die je tegenwoordig vaak ziet, vind u ook niet? Ik zou er persoonlijk erg voor zijn als deze gewoonte terugkwam.

In de loop der eeuwen zijn er een hoop andere paren bevriende getallen gevonden. Sommige wiskundigen ontwikkelden zelfs min of meer systematische manieren om ze te vinden. Het eerst volgende tweetal dat ontdekt werd, in de negende eeuw, was 17296 (met delers 1, 2, 4, 8, 16, 23, 46, 47, 92, 94, 184, 188, 368, 376, 752, 1081, 2162, 4324, en 8648) en 18416 (met echte delers 1, 2, 4, 8, 16, 1151, 2302, 4604 en 9208).

In de negentiende eeuw waren er al een stuk of zestig van dit soort paren bekend toen een zestienjarige jongen, Nicolo Paganini, opeens het kleinste paar na 220 en 284 vond: 1184 en 1210. De delers van 1184 zijn 1, 2, 4, 8, 16, 32, 37, 74, 148, 296 en 592 die inderdaad optellen tot 1210 en de delers van 1210 zijn 1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110, 121, 242 en 605 die optellen tot 1184.

Vanwege de jeugdige leeftijd van de ontdekker liggen de grappen voor de hand: het beeld rijst op van een eenzame ongelukkige jongen die tot zijn ontsteltenis moet ontdekken dat zelfs zijn beste vrienden, de getallen, nog meer vrienden hebben dan hij. Maar aan de andere kant: hoe stoer had u het niet gevonden als u op zestienjarige leeftijd iets ontdekt had wat alle grote wetenschappers voor u met hun domme kop over het hoofd gezien hebben? Precies. Hoe Paganini deze getallen gevonden heeft, nam hij overigens mee in zijn graf.

Paganini zou tegenwoordig overigens weinig kans maken: met brute rekenkracht hebben computers alle paren getallen onder de honderd biljoen (10^{14}) gecontroleerd op wel of niet bevriend zijn en daarbij zijn negenendertigduizendduizendvierenzeventig paren bevriende getallen gevonden. In totaal zijn er, door boven de honderd biljoen 'slim' te zoeken, bijna twaalf miljoen paren bevriende getallen bekend. Opmerkelijk is dat er daarbij nog nooit twee bevriende getallen gevonden zijn waarvan het ene even is en het andere oneven. Kennelijk kunnen de families van even en oneven getallen elkaar niet luchten of zien. Maar, zoals we uit de geschiedenis weten, bloeit er soms toch iets moois op tussen een lid van de ene familie en de andere. Dat de eerste honderd biljoen getallen het niet aandurven zegt nog niks over de volgende oneindig. Misschien ontdekt een moderne Paganini morgen wel zo'n Romeo-en-Juliapaar.

4 priemgetallen

Hoe mooi vierkants- en driehoeks-, bevriende en perfecte getallen ook zijn,

er is een soort getallen dat de gemoederen van de mensheid al eeuwen meer bezighoudt dan welke andere soort dan ook. Waar iedereen van houdt, maar tegelijkertijd ook een beetje bang voor is, als een straatmuzikant die de ene na de andere betoverende melodie uit zijn viool tovert maar heel hard en onsamenvattend begint te schreeuwen als je te dichtbij komt: de priemgetallen. Een priemgetal is een getal groter dan 1 dat alleen maar deelbaar is door 1 en zichzelf. De eerste vijftientig priemgetallen zijn: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 en 97.

Vijf andere random gekozen priemgetallen zijn: 113, 1871, 161773, 5068691 en 6036092681. Door hun gebrek aan bemoeienis met kleinere getallen hebben ze iets ongenaakbaars, iets onsympathieks misschien zelfs, maar ik krijg de indruk dat mensen het ook wel stoer vinden, zeker van de grotere priemgetallen, dat ze zich niet laten inpakken door al die kleinere getallen waar ze deelbaar door hadden kunnen zijn en stug hun eigen plan blijven trekken. Zo'n 67, hij doet het toch maar mooi daar in zijn eentje.

De magie van priemgetallen zit erin dat ze zo onvoorspelbaar zijn. Ze komen en gaan wanneer ze zelf willen en slaan toe wanneer je ze het minst verwacht. Als je door de getallenlijn heen loopt kan het ieder moment gebeuren dat het volgende getal een priemgetal is, maar meestal gebeurt het niet. Als u in 1952 geboren bent, heeft u hele jeugd moeten doorbrengen zonder ooit in een priemjaartal te leven: pas in 1973 was het zover. Als u daarentegen geboren bent in 1986 dan denkt u misschien dat priemjaartallen heel normaal zijn: 1987 was meteen al priem en snel daarna 1993, 1997, 1999 en 2003.

Ook in andere stukken van de getallenlijn is er weinig peil op te trekken. De priemgetallen tussen één miljoen en één miljoen plus 100 zijn: 1.000.003, 1.000.033, 1.000.037, 1.000.039, 1.000.081 en 1.000.099 - niet echt gelijkmatig verdeeld dus. Een formule waar je een getal n instopt en waar het n -de priemgetal uitkomt (zoals we voor vierkants- en driehoeksgetallen hebben) was ooit de heilige graal van de wiskunde, maar al enige honderden jaren geleden gaf de laatste optimist de hoop op dat zo'n formule bestaat. Ook variaties, zoals een recept om uit een gegeven priemgetal het volgende, of *überhaupt* een groter priemgetal af te leiden, worden tegenwoordig geschaard in hetzelfde rijtje als het recept om lood te maken uit goud en het recept voor de eeuwige jeugd. Iets bescheidener formules, waar je een getal n instopt en waar altijd een priemgetal (maar niet noodzakelijk het n -de) uitkomt bestaan wel, maar zijn zonder uitzondering heel flauw (zoals de formule die, ongeacht wat je er instopt altijd het getal 17 uitspuugt).

Is er echt niets over te zeggen? Nou ja, met een beetje gevoel voor logica ligt het voor de hand te denken dat naarmate de getallen groter worden, de priemgetallen een steeds zeldzamer verschijnsel worden. Twee en drie *moeten* wel priem zijn, omdat er domweg geen kleinere getallen zijn waardoor je ze zou kunnen delen. Tegen de tijd echter dat je in de miljarden bent aangekomen zijn er zoveel kleinere getallen dat je wel erg goed je best moet doen om niet per ongeluk door eentje deelbaar te zijn. Deze redenering is natuurlijk niet echt wiskundig precies, maar is dat wel te maken. De statistieken geven ons gelijk: tussen de 0 en de 100 is een kwart van alle getallen priem, tussen 2000 en 2100 nog maar veertien van de honderd en tussen 1.000.000 en 1.000.100 nog maar zes. Priemgetal zijn, je eigen race blijven lopen zonder te zwichten voor de verleidingen van kleinere getallen wordt, kortom, steeds moeilijker.

5 priemtweelingen

En toch, ondanks deze ijskoude logica, duiken er om de zoveel tijd twee getallen op die zich niks van alle tegenslagen aantrekken en zo dicht mogelijk bij elkaar blijven: 11 en 13, 17 en 19, 41 en 43, 149 en 151. Ondanks dat de kans steeds kleiner wordt een priemgetal te zijn en de gaten tussen de priemgetallen steeds groter worden, blijven ze bij elkaar omdat ze zoveel van elkaar houden. Het mooiste is dat dit nooit ophoudt. Ook in de miljoenen en de miljarden blijven deze paren priemgetallen, priemtweelingen genaamd, opduiken: 1949 en 1951; 21091979 en 21091981; 123455999 en 123456001. Samen staan ze sterk, niemand houdt ze tegen om bij elkaar te blijven. Het is een prachtig idee: liefde overwint alles.

De grootst bekende priemtweeling op het moment van schrijven is $65516468355 \times 2^{333333} - 1$ en $65516468355 \times 2^{333333} + 1$ en werd ontdekt in 2009. De manier van opschrijven is om ruimte besparen: 2^{333333} betekent twee keer twee keer twee keer twee ... en dat dan 333333 keer - een getal van 10034 cijfers. Dit wordt dan nog eens vermenigvuldigd met 65516468355 om het even getal tussen de tweelingen in te vinden. Het gevolg is dat beide priemgetallen 100355 cijfers lang zijn - ze eindigen respectievelijk op ...6159 en ...6161.

Telkens als er weer een nieuwe priemtweeling ontdekt wordt is dat goed voor een éénregelig berichtje in de krant. Terecht, want als je er te lang niets over hoort ga je toch twijfelen. Zou het hier ophouden? Zouden er boven een bepaald getal met, zeg, een miljoen cijfers geen priemgetallen meer zijn die het voor elkaar krijgen zo dicht bij elkaar te komen? Nemen de kwade machten het dan toch over?

Het gekke is namelijk dat we niet zeker weten of het wel oneindig lang zo doorgaat. Overwint liefde wel echt alles, of houdt het een keer op met die priemtwelingen? Ondanks dat de mensheid hier al eeuwen over nadenkt is er niemand die een sluitend antwoord heeft kunnen geven. De meeste mensen geloven wel dat er oneindig veel priemtwelingen bestaan, maar om het echt te bewijzen blijkt heel moeilijk.

Dat brengt ons op een andere romantische kant van de wiskunde; dat van de 'Grote Onopgeloste Problemen'. De vraag: 'Zijn er oneindig veel priemtwelingen of niet?', is makkelijk te stellen. Je zou het aan een elfjarige kunnen uitleggen, sterker nog, ik heb hier voor het eerst over gehoord toen ik elf was. De vraag is zo simpel dat het heel gek is dat het antwoord zo moeilijk te vinden is. Bovendien heb je alle benodigde informatie tot je beschikking. Het is niet nodig om een tunnel naar het binnenste van de aarde te boren en daar iets te meten, of om in een atlas op te zoeken hoe de hoofdstad van Frankrijk heet. Het antwoord zit in principe besloten in de vraag. Het feit dat allerlei slimme mensen in de afgelopen drieduizend jaar er niet in geslaagd zijn te bewijzen dat er oneindig veel priemtwelingen zijn, wil niet zeggen dat niet u of ik of een of andere elfjarige morgen opeens een nieuwe manier ontdekt om ertegen aan te kijken die iedereen al die tijd over het hoofd gezien heeft en waardoor alles opeens duidelijk wordt. De gedacht dat al die mensen dit ook tevergeefs geprobeerd hebben maakt het alleen maar aantrekkelijker om hier over na te denken.

Nu gebiedt de eerlijkheid me wel te zeggen dat, hoe meer ik over wiskunde te weten ben gekomen, des te minder ben ik gaan geloven dat ik ooit zou slagen het priemtwelingvermoeden (zo heet het vermoeden dat er oneindig veel priemtwelingen zijn) zou bewijzen. Misschien is dat de tragiek van ouder worden. Je gaat inzien dat er al heel veel een stuk minder beroemde problemen zijn die je ook al niet aankunt en je begint te begrijpen dat de mensen voor je al heel veel goede ideeën vergeefs op het probleem hebben botgevierd.

Bovendien leert de ervaring dat op de zeldzame momenten dat zo'n oud en beroemd probleem wordt opgelost, dit altijd gebeurt door iemand die al eerder indrukwekkende wiskundige prestaties heeft geleverd en bovendien waanzinnig veel tijd in het betreffende probleem heeft gestoken. Toch is er geen enkele echt wiskundige reden waarom u niet morgenochtend onder de douche het cruciale idee zou kunnen hebben dat tot het bewijs van het priemtweling-vermoeden leidt en daarmee tot eeuwige roem voor u. Het kan nooit kwaad om te blijven dromen.

noot

- 1 Mocht u toch op zoek willen dan is het goed om te weten dat alle even perfecte getallen ook driehoeksgetallen zijn, waarbij de onderste rij in de driehoek 1 kleiner is dan een macht van 2 (bijvoorbeeld 6 is het derde driehoeksgetal en $3 = 2 \times 2 - 1$ en 28 is het zevende driehoeksgetal terwijl $7 = 2 \times 2 \times 2 - 1$). Oneven perfecte getallen zijn nooit gevonden.

zOEFi een jaar later ...

- didactische kenmerken van basaal, digitaal, klassikaal oefenen -

zOEFi-team¹
Flsme, Universiteit Utrecht

1 inleiding

Op 21 januari 2009 gaf de toenmalige staatssecretaris van OCW, mevrouw Sharon Dijksma, het startsein voor zOEFi, de 'Nationale Oefenimpuls voor rekenen'.² Een jaar later, tijdens de Panama-conferentie 2010, blikt het zOEFi-team in een werkgroep terug op een jaar zOEFi. In deze terugblik gaat het om kenmerken en uitgangspunten van het zOEFi-oefenen, de oefenactiviteiten en de reacties en ervaringen van het veld.

2 even voorstellen

Elke dag tien minuten klassikaal de basis van het rekenen oefenen, dat zou de rekenprestaties van alle leerlingen van vier tot veertien jaar ten goede kunnen komen (fig.1).



figuur 1: zOEFi staat voor dagelijks, digitaal, klassikaal, basaal, interactief, speels en denkend oefenen

De staatssecretaris gaf daarom het Freudenthal Instituut de opdracht een 'Nationale Oefenimpuls' gestalte te geven. Dat werd zOEFi, een naam die de voorkeur kreeg omdat hij wat 'sneller' klinkt dan het eigenlijke acroniem nOEFi. Het zOEFi-team ging aan de slag en ontwikkelde digitale oefenactiviteiten waarmee leerkrachten met behulp van hun digibord het dagelijkse klassikale oefenen gestalte kunnen geven.

Een belangrijk uitgangspunt van zOEFi is het oefenen van de basis. De oefeningen zetten een flinke stap terug op de leerlijnen. Kennis en vaardigheden die langer geleden verworven zijn worden herhaald en verstevigd. Iets waar de methoden over het algemeen weinig tijd voor uittrekken. Tevens spelen begrip en inzicht een grote rol. Het gaat bij zOEFi om denkend oefenen in een interactieve setting waarbij leerlingen kunnen leren van en met elkaar, waarbij speelse en coöperatieve werkvormen worden ingezet om iedereen betrokken te houden. Met deze kenmerken, die straks nader besproken worden, onderscheidt zOEFi zich voor een groot deel van de andere oefeninitiatieven die als paddestoelen uit de grond lijken te schieten, zoals 'Met Sprongen Vooruit', 'De Rekentuin', 'De Meester met de Bal' en 'RekenBeter'. Oefenen lijkt een nieuwe trend in rekenland.

3 zOEFi past in een trend

De laatste tijd staat het oefenen van rekenkennis en -vaardigheden volop in de belangstelling. Verschillende instanties pleiten voor meer oefentijd en -aandacht. De rekencommissie van de 'Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen' die vorig jaar een advies uitbracht betreffende de verbetering van het rekenonderwijs op de basisschool,³ vermeldt in haar rapport:

Alle partijen zijn van mening dat leerlingen meer moeten oefenen met rekenen.' (KNAW-Commissie rekenonderwijs basisschool(2009), pag.81).

Dit sluit aan bij wat de 'commissie Meijerink' al eerder naar voren bracht. Deze commissie van de doorgaande leerlijnen voor taal en rekenen, gaf haar rapport 'Over de drempels van rekenen' de subtitel: 'Consolideren, onderhouden, gebruiken en verdiepen.' De eerste twee woorden verwijzen nadrukkelijk naar oefenen. Op pagina 17 wordt opgemerkt:

... In de praktijk van het onderwijs moet meer expliciet werk worden gemaakt van het systematisch consolideren en oefenen totdat het gewenste beheersingsniveau van paraat hebben is bereikt.

(Expertgroep Doorlopende Leerlijnen, 2008)

Een andere oefenimpuls komt voort uit het project van de PO-raad van de

rekenverbetertrajecten dat leerkrachten stimuleert om dagelijks vijf tot tien minuten rekenen te oefenen. Verder is de onderwijsinspectie een onderzoek gestart naar het effect van oefenen. Ook zien we in de nieuwe reken-wiskundemethoden wat meer aandacht voor oefenen, maar vaak betreft het daar het oefenen van recent verworven rekenkennis. Er is te weinig aandacht voor kennis die wat langer geleden verworven is, de rekenbasis. Die taak heeft zOEFi op zich genomen. Door de rekenbasis te verstevigen, verwerven leerlingen een degelijk fundament voor hun reken-wiskundige ontwikkeling. Tevens krijgt de leerkracht tijdens het oefenen met zOEFi in beeld hoe de rekenbasis van zijn leerlingen ervoor staat en wat daar nog aan moet gebeuren.

Blijvend werken aan de rekenbasis is voor alle leerlingen van belang, maar hoe kan dat het beste gebeuren? Het zOEFi-team begon haar ontwikkelwerkzaamheden met twee belangrijke vragen:

- 1 Welke reken-wiskundige inhoud behoort tot de rekenbasis?
- 2 Welke didactische uitgangspunten en werkvormen zijn effectief als het gaat om het oefenen van de rekenbasis?

4 welke reken-wiskundige inhoud stelt zOEFi aan de orde?

Er liggen verschillende bronnen ten grondslag aan de zOEFi-oefenactiviteiten. Uiteraard werden de verschillende reken-wiskundemethoden bestudeerd, maar het was al snel duidelijk dat het basale oefenen, het herhalen van wat langer geleden geleerd is, in de methoden slechts een kleine rol speelt. De TAL-brochures werden geraadpleegd om tussendoelen en leerlijnen in beeld te krijgen. In de rapporten van de periodieke peilingen van het onderwijsniveau (PPON) staan voorbeelden van opgaven die leerlingen zouden moeten beheersen. Daaruit kon het zOEFi-team conclusies trekken voor de rekenbasis die daaraan ten grondslag moet liggen. Een belangrijke bron vormde het eerdergenoemde rapport van de 'commissie Meijerink'. Dit rapport bevat een beschrijving van het fundamentele niveau dat alle kinderen aan het eind van de basisschool moeten bereiken. A. Noteboom heeft dit niveau verder geconcretiseerd en uitgewerkt (Noteboom, 2009). Omdat de doorlopende leerlijnen van primair naar voortgezet onderwijs van groot belang zijn, besloot het zOEFi-team haar ontwikkelwerk te starten in de bovenbouw van de basisschool.

Om een doorlopende leerlijn van het basisonderwijs naar het voortgezet onderwijs te garanderen onderscheidt de 'commissie Meijerink' vier domeinen:

- 1 Getallen.
- 2 Verhoudingen (waaronder breuken, kommagetallen, procenten).
- 3 Meten en meetkunde.
- 4 Verbanden (denk hierbij aan grafieken, tabellen, diagrammen en patronen).

zOEFi heeft deze indeling overgenomen, maar de laatste twee domeinen samengevoegd, zodat de volgende driedeling ontstond:

- 1 Getallen.
- 2 Verhoudingen, breuken, kommagetallen, procenten.
- 3 Meten, meetkunde en verbanden.

Voor deze driedeling is gekozen omdat de onderdelen 'meetkunde' en 'verbanden' binnen zOEFi een veel kleinere rol spelen dan de overige domeinen. Dat heeft te maken met het feit dat meetkunde en verbanden in de reken-wiskundeles op de basisschool vooral in de oriënterende fase voorkomen; de fase van ervaring-opdoen-met, verkennen. Formele kennis en vaardigheden op deze twee terreinen behoren slechts in zeer geringe mate tot de basisschoolstof en dus valt er op dit gebied nog niet zo veel te oefenen.

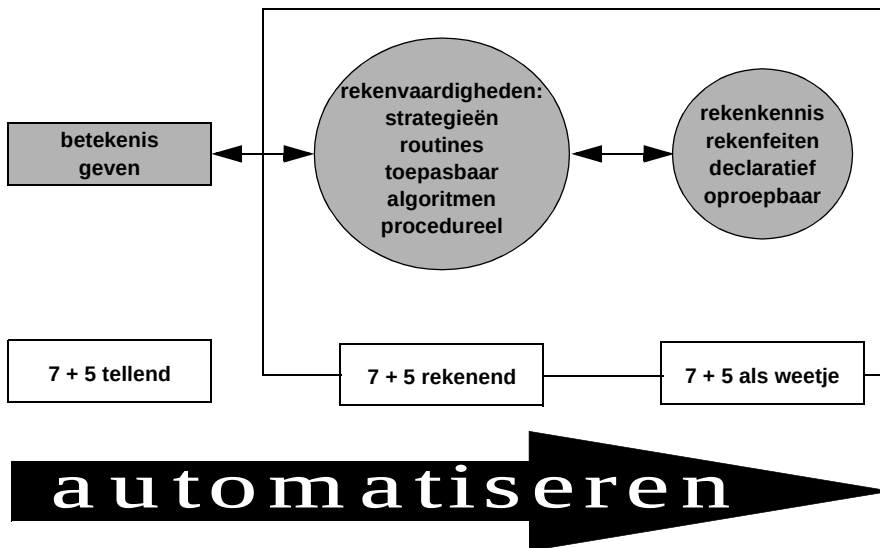
Toch heeft het zOEFi-team besloten om wat activiteiten uit deze domeinen in zOEFi op te nemen om het signaal af te geven dat dit wél belangrijke onderwerpen zijn, die zeker tot de basisschoolstof behoren en die ook wel degelijk te oefenen zijn. Denk aan snelle oefeningen als: Welke uitslag levert een doosje op? Vanuit welk standpunt is de foto genomen? Welk figuur is het spiegelbeeld van een gegeven figuur? Welk puzzelstuk past in het gat? Hoe kun je dit patroon voortzetten?

5 denkend oefenen

Het zOEFi-team gaat er vanuit dat oefenen gebaseerd moet zijn op begrip, inzicht en betekenis. Ga niet oefenen wat niet begrepen is. Elk leerproces in rekenen-wiskunde begint met een fase van verkennen, oriënteren, betekenis verlenen en kennis construeren. Gaandeweg ontwikkelen leerlingen onder leiding van de leerkracht daaruit strategieën. Deze kunnen geoefend worden zodat ze steeds vaardiger en efficiënter beheerst worden en uiteindelijk levert dat oefenen naast geautomatiseerde vaardigheden ook parate rekenfeiten, weetjes, op.

Zo zie je bijvoorbeeld dat jonge kinderen $7 + 5$ eerst nog tellend op hun vingers uitrekenen. Na verloop van tijd kunnen ze sprongen maken en wordt het $7 + 3 + 2 = 12$ of $5 + 5 + 2 = 12$. Het benutten van de vijfstructuur, het springen naar 10, het splitsen van 7 en 5 zijn vaardigheden geworden en na verloop van tijd zelfs geautomatiseerde vaardigheden die kinderen zon-

der veel nadenken kunnen uitvoeren, ook bij andere rekenopgaven. Uiteindelijk levert het steeds maar weer automatiseren van vaardigheden bepaalde parate rekenfeiten op. De kinderen weten dan onmiddellijk $7 + 5 = 12$. Ze putten dit direct uit hun lange-termijn-geheugen en hun werkgeheugen is voor deze berekening niet meer nodig. Daar ontstaat ruimte voor complexere berekeningen (fig.2) En het verworven weetje kan weer uitgangspunt vormen voor een volgende stap op de oefenlijn. Wie meteen weet dat $7 + 5 = 12$, kan dit benutten bij opgaven als bijvoorbeeld $70 + 50$, $37 + 5$ en $47 + 25$. Als het goed is groeit tijdens het oefenen het aantal beschikbare rekenfeiten, maar niet elke berekening hoeft uiteindelijk een weetje te worden. 8×25 is voor veel mensen een rekenfeit waar ze niet meer over na hoeven te denken, 7×36 is dat niet. Dat is niet erg, maar zo'n berekening moet iedereen wel vlot kunnen uitvoeren.



figuur 2: bij het zOEFi-oefenen zijn begrip, vaardigheden en kennis met elkaar verbonden

Natuurlijk is het ook mogelijk om rekenfeiten in je geheugen te prenten zonder dat daar een betekenisvolle basis aan ten grondslag ligt. Toch heeft het zOEFi-team daar niet voor gekozen en wel om twee redenen:

- als een rekenfeit zonder begrip geoefend is, wordt het lastig om het weer op te diepen als het op zekere dag uit het geheugen verdwenen is. Het is niet mogelijk om het via terugdenken weer te reconstrueren vanuit een vaardigheid. Iemand anders zal het opnieuw moeten aanreiken;

- betekenisloze rekenfeiten zijn minder goed bruikbaar en toepasbaar. Kennis die zonder begrip geleerd is, heeft geen of weinig interne verbanden, en ook weinig verbanden met de realiteit. Deze 'losse' rekenkennis is minder goed inzetbaar bij complexere bewerkingen en het oplossen van problemen.

Het oefenen met begrip en inzicht is niet nieuw. Het is gebaseerd op deelleergangen die in de jaren tachtig van de vorige eeuw ontwikkeld zijn. In die tijd werden tussendoelen en leerlijnen ontwikkeld voor het rekenen tot 10 en 20, voor het rekenen tot 100, voor de tafels, voor het cijferen, voor breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen en voor meten en meetkunde (Treffers & De Moor, 1990; Treffers, Streefland & De Moor, 1994, 1996; Van den Heuvel-Panhuizen & Streefland, 1993; Van den Heuvel-Panhuizen, Buijs & Treffers, 2001; Van den Heuvel-Panhuizen & Buijs 2004; Van Galen e.a., 2005; Gravemeijer e.a., 2007). Overeenkomst tussen deze deelleergangen is dat ze starten met betekenisvolle situaties voor de leerlingen, om die gaandeweg te abstraheren. Het uiteindelijke doel is dat er geautomatiseerde en gememoriseerde kennis ontstaat. Bij het leren van de tafels gebeurt dit bijvoorbeeld door in het onderwijs de aandacht te vestigen op strategieën om producten verkort uit te rekenen (Ter Heege, 1985). Leerlingen weten bijvoorbeeld dat je 5×8 kunt uitrekenen door middel van $8 + 8 + 8 + 8 + 8$, maar ze ontdekken dat het sneller gaat als je de helft van 10×8 neemt. Dit verkorten en gebruiken van steunpunten is kenmerkend voor vrijwel alle leergangen die in de afgelopen dertig jaar zijn ontwikkeld. Leerlingen breiden hun kennis uit door gebruik te maken van dergelijke steunpunten: als je $5 \times 7 = 35$ weet, kun je dat gebruiken bij 15×7 ; als je weet dat een grote stap ongeveer een meter is kun je dat gebruiken om de lengte van het klaslokaal te schatten. Parate kennis vormt de basis om de reken-wiskundige ontwikkeling op te bouwen. Die basis moet stevig zijn en onderhouden worden.

Dit vraagt dan ook om voortdurend oefenen en beoefenen, en dat is in de aangegeven leergangen ook nadrukkelijk ingebed. Maar even nadrukkelijk wordt uitgedragen dat het bij dit oefenen niet om het inslijpen van onbegrepen regels en feitjes gaat, maar om het aansluiten bij wat begrepen is, het vergroten van vaardigheden en het op basis daarvan uitbreiden en herhalen van parate kennis, die vervolgens weer ingezet kan worden bij het verwerven van nieuwe vaardigheden. Het gaat om een continu proces van het geven van betekenis, het leggen van verbanden, het verkorten van procedures en het bereiken van geautomatiseerde vaardigheden en gememoriseerde kennis (Menne & Treffers, 2001; Menne, 2001). Productief oefenen in deze betekenis vormt een van de uitgangspunten van zOEFi.

Om dit productieve oefenen gestalte te geven vraagt de leerkracht tijdens

het oefenen regelmatig naar begrip, betekenis en argumenten om zo de leerlingen aan te zetten tot redeneren. Maar hij moet wel vermijden dat het oefenen hierdoor vaart verliest. Het is natuurlijk niet de bedoeling dat het oefenen verwordt tot een filosofisch debat, maar het is goed mogelijk om leerlingen om een korte toelichting op hun antwoord te vragen zonder dat dit uitmondt in een lang gesprek. Als een kind bijvoorbeeld beweert dat $\frac{5}{6}$ groter is dan $\frac{6}{7}$, is het best mogelijk om naar een snelle toelichting te vragen. Sterker nog: het geven van een korte mondelinge toelichting bij een antwoord moet ook geoefend worden en vormt dus een wezenlijk onderdeel van de zOEFi-activiteiten.

6 klassikaal interactief oefenen

zOEFi heeft nog meer uitgangspunten. Op veel scholen speelt tegenwoordig het zelfstandig werken tijdens de rekenles een belangrijke rol. Na een korte gezamenlijke instructie gaan de leerlingen aan het werk en heeft de leerkracht gelegenheid om groepen leerlingen onderwijs op maat (verlengde instructie) aan te bieden. Er is weinig gelegenheid voor klassikaal werken, terwijl dat juist een waardevolle aanvulling kan zijn op het zelfstandig werken. Het oefenen van de rekenbasis biedt goede kansen voor een klassikale aanpak.

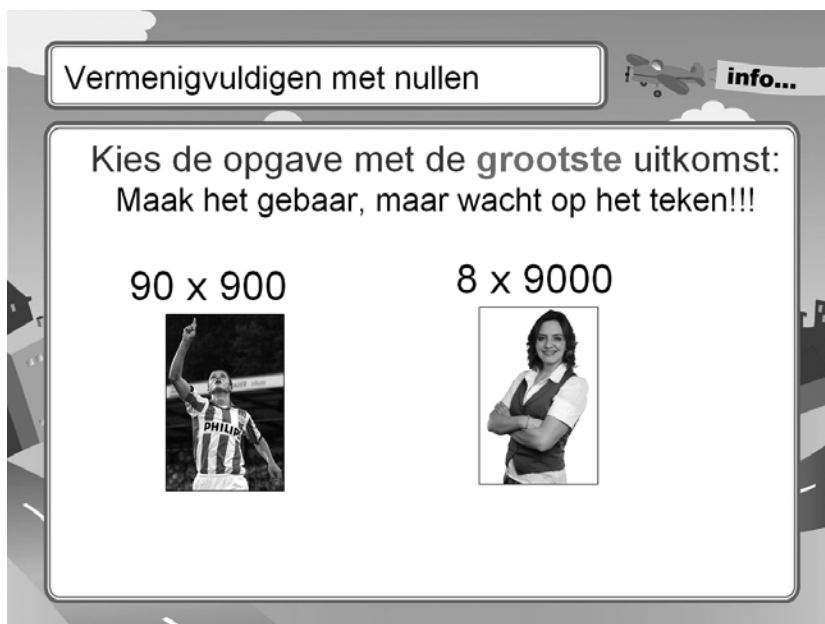
Het zOEFi-team kiest voor klassikaal interactief oefenen, omdat het de leerlingen veel kan opleveren. Ze leren van en met elkaar, horen en zien hoe klasgenoten rekenopgaven aanpakken. Onder leiding van de leerkracht ontwikkelen ze een gemeenschappelijke rekentaal. Ook het correct noteren van een oplossing kan tijdens het gezamenlijk oefenen aan de orde komen. Het klassikale oefenen is vaak mondeling en leerlingen worden dus uitgedaagd om hun oplossingsmanieren te verwoorden en soms ook te verdedigen. De leerkracht krijgt een indruk van de oplossingsmanieren van de leerlingen. Hij kan meteen *feedback* geven, hij kan de vaart erin houden en hij kan zien waar nog hiaten zitten in de rekenbasis van de leerlingen. Dat zijn onderwerpen voor een volgende oefenles, of voor een instructie tijdens de gewone rekenles.

Klassikaal interactief oefenen heeft wel een nadeel. Het vraagt veel van de leerkracht. Die moet er voor zorgen dat in zo'n klassikale les sterke en zwakke rekenaars beide voldoende aan hun trekken komen. Hoe kun je voorkomen dat zwakke rekenaars afhaken of dat sterke rekenaars het gras voor de voeten van zwakkere wegmaaien?

In een klas met grote verschillen tussen leerlingen is dat een moeilijke opgave. Het zOEFi-team probeert in de opbouw van haar activiteiten leer-

krachten steun te bieden bij het omgaan met verschillen tussen de leerlingen in hun klas:

- in elke oefenactiviteit is een opbouw van makkelijk naar moeilijk aan gebracht. De leerkracht kan de zwakste rekenaars de eerste vragen geven en de moeilijkere laatste vragen voor de betere rekenaars bewaren;
- in de activiteit zit regelmatig bedenktijd ingebakken. Leerlingen mogen pas een antwoord geven als die tijd verstreken is;
- in de oefeningen komen geregeld meerkeuzevragen voor waarbij de leerlingen door het maken van gebaren hun keuze kenbaar kunnen maken (fig.3). Natuurlijk bestaat hierbij het risico op ‘meeliften’, maar dat hoeft geen bezwaar te zijn. Zwakke rekenaars die meeliften kunnen zo in ieder geval ook eens een keer ‘veilig’ meedoen met hun klasgenoten. Ze blijven betrokken en haken niet af. Bij de waarom-vraag die vervolgens gesteld wordt kan de leerkracht kiezen om bij hen door te vragen, of dat misschien juist bewust niet te doen;
- Spelletjes, gevarieerde werkvormen, raad-vragen kunnen ook de sterke rekenaars motiveren, zelfs als de oefenactiviteit voor hen makkelijk is. In het voorbeeld van figuur 4 hebben sterke en zwakke rekenaars evenveel kans om een goede deur te kiezen.



figuur 3: een gedifferentieerde zOEFi-activiteit: zwakke rekenaars gaan rekenen en sterke rekenaars gaan redeneren

- sommige oefenactiviteiten bezitten een extra uitdaging voor de sterke rekenaars. In het voorbeeld van figuur 3 gaan de zwakkere rekenaars rekenen, terwijl de sterke het antwoord beredeneren.



figuur 4: een zOEFi-activiteit met een raadelement geeft sterke en zwakke rekenaars evenveel kansen op succes

7 hoe gaat zOEFi in de praktijk?

Op dit moment doen negentien scholen met 23 groepen 8 mee aan de *try-out* van 1 november 2009 tot en met 1 juni 2010. De deelnemende scholen zijn enthousiast. De dagelijkse evaluatieformulieren zijn lovend en zeer stimulerend. De leerkrachten kunnen eenvoudig het dagelijks oefenen gestalte geven en zien het belang van het oefenen van de rekenbasis. Ze krijgen door het dagelijks oefenen goed in beeld wat er nog ontbreekt in de basis van hun leerlingen. zOEFi heeft duidelijk een signalerende functie. De leerlingen zijn gemotiveerd en waarderen de speelse werkvormen. Maar we zien ook dat sommige leerkrachten het niet volhouden om zOEFi echt elke dag te doen. Hun programma is overladen en het lukt niet altijd om tijd voor zOEFi te vinden. Het is duidelijk dat scholen keuzen moeten maken. Je kunt nou eenmaal niet alles. Wie werkelijk zijn rekenonderwijs wil verbeteren zal een investering moeten doen. Een deel van de *try-*

outscholen krijgt het wél elke dag voor elkaar. Zij gebruiken zOEFi als *warming-up* van de rekenles of als dagelijkse *braintraining*. Enkele leerkrachten melden dat ze voorheen al elke dag tien minuten aan het oefenen van de basis besteedden. Daar gebruiken ze nu zOEFi voor.

Het uitproberen van de zOEFi-materialen in de praktijk bracht een ander probleem aan het licht: klassikaal oefenen is een vak apart. Leerkrachten zijn zo gewend geraakt aan het zelfstandig werken van de leerlingen, dat een klassikale aanpak van een deel van de rekenles niet zomaar vanzelf lukt. Het probleem van het omgaan met verschillen is hiervoor al besproken. Sommige leerkrachten hadden aanvankelijk ook de neiging om tijdens het oefenen over te stappen op instructie. Als er een onderdeel aan bod kwam dat door een of meer leerlingen niet beheerst werd, ging menig leerkracht hier tijdens het oefenen uitvoerig op in. Het kan soms zinvol zijn om hier bewust voor te kiezen, maar misschien moet dat dan niet klassikaal gebeuren. Sterke rekenaars die het onderdeel wel beheersen zullen snel afhaken. Het is meestal zinvoller om het zOEFi-moment kort te houden, als een *warming-up* van de rekenles ter versteviging van de basis, tevens te gebruiken als middel om een indruk te krijgen van de vorderingen van de groep en de individuele leerlingen. Komt men bij het zOEFi-oefenen een hiaat op het spoor, dan kan men daar later in de gewone rekenles of verlengde instructie op terugkomen.

Sommige leerkrachten hadden de neiging om tijdens het oefenen de diepte in te gaan en uitgebreid op allerlei verschillende oplossingsmanieren van de leerlingen in te gaan. Dat kan soms nuttig zijn, maar in de meeste gevallen is de oefenactiviteit daar niet voor bedoeld. zOEFi probeert juist bij oefenactiviteiten vaak tempo te maken, de vaart erin te houden, soms gericht aan één oplossingsmanier te werken en de andere aanpakken dus even te negeren. Die komen wel weer op een ander moment in de rekenles aan bod.

Omdat het klassikale interactieve oefenen niet voor alle groepen en leerkrachten even makkelijk bleek te zijn is het zOEFi-team gaandeweg meer didactische ondersteuning gaan bieden. Bij elke dagelijkse oefenactiviteit is een docentenhandleiding opgenomen. Daarin staan naast specifieke tips die betrekking op de activiteit hebben ook algemene didactische richtlijnen die voor elke oefenactiviteit van belang zijn, zoals:

- vertel leerlingen wat je gaat oefenen;
- hou de vaart erin;
- laat leerlingen eventueel een kladblaadje gebruiken;
- registreer wat lukt en wat nog meer aandacht behoeft (in de gewone rekenles of in een volgende oefenles);
- stel eerst de vraag en geef dan pas een beurt;

- geef de eerste (makkelijkere) vragen aan de zwakkere rekenaars;
- geef ook leerlingen die hun vinger niet opsteken een beurt;
- geef niet meteen *feedback*, maar laat eerst meer leerlingen een antwoord geven;
- laat leerlingen soms gezamenlijk antwoorden bijvoorbeeld door gebaren te maken.

Naast de aanwijzingen in de docentenhandleiding zijn er in de zOEFi-activiteiten zelf didactisch kadertjes opgenomen met specifieke aanwijzingen, zoals bijvoorbeeld: 'Geef nu even denktijd.' 'Laat leerlingen een kladblaadje gebruiken.' 'Laat leerlingen overleggen met hun buur.' en 'Hou hier de vaart erin' (fig.5). Geleidelijk aan krijgt het klassikale oefenen bij de *try-out* leerkrachten meer de vorm die het zOEFi-team voor ogen heeft. Toch is goed oefenmateriaal nog maar het halve werk. Met nascholing op het gebied van oefenen zouden leerkrachten en leerlingen nog veel meer vooruitgang kunnen boeken en veel meer uit hun oefenmomenten kunnen halen. Dat is dan ook de reden waarom het Freudenthal Instituut in het nieuwe schooljaar een zOEFi-professionaliseringstraject aanbiedt met *coaching* en supervisie bij het gebruik van zOEFi.



figuur 5: een zOEFi-activiteit met rechtsonder een kadertje met een didactische tip

8 resultaten van zOEFi

Wat levert het dagelijks oefenen met zOEFi op? Het is te vroeg om daar nu al harde uitspraken over te doen, maar de eerste signalen zijn positief. Alle leerlingen maken aan het begin van elk blok een voortoets, aan het eind van het blok wordt die toets nog eens herhaald. Dan blijkt er vrijwel altijd bij alle leerlingen vooruitgang te zijn. Wat de opbrengst daarvan op de lange termijn is, blijft voorlopig nog een vraag. Aan het begin, halverwege en aan het eind van de zOEFi-try-outperiode maken leerlingen een algemene rekentoets. Die zou vooruitgang over het hele traject zichtbaar kunnen maken. De deelnemende leerkrachten hebben zelf het idee dat hun leerlingen vooruitgaan en dus ook in de gewone rekentoetsen betere resultaten scoren.

Daarnaast laten sommige leerkrachten weten dat leerlingen meer zelfvertrouwen ontwikkelen voor het rekenen. Zwakke rekenaars blijven meer betrokken. Ze durven iets vaker ook eens wat te proberen, of een doorzicht gokje te wagen. Bovendien zijn er geluiden dat leerlingen meer plezier krijgen in de rekenles en zelfs om zOEFi vragen.

de toekomst

Scholen die na de zomervakantie met zOEFi aan de slag willen gaan, kunnen een jaarabonnement nemen voor het schooljaar 2010-2011. Ze krijgen dan *online* de beschikking over de oefenmaterialen voor groep 7 en groep 8. Op www.fi.uu.nl/zoefi kunnen leerkrachten kennis maken met twintig gratis oefenactiviteiten. Op dit moment hebben al veel leerkrachten belangstelling getoond voor zOEFi. Ze adviseren het zOEFi-team om zo snel mogelijk ook activiteiten voor de overige groepen van de basisschool te maken. Ook in het voortgezet onderwijs is de behoefte aan geschikt klassikaal oefenmateriaal groot.

De deelnemers aan de werkgroep op de Panama-conferentie hadden nog meer wensen: ontwikkel een module zOEFi voor de pabo. Maak een zOEFi-zoekmachine zodat je oefeningen op rekenonderwerp kunt zoeken. (Hier wordt inmiddels aan gewerkt.) Ook het idee van het zOEFi-team om het klassikale oefenen te combineren met individuele oefeningen op de computer kon op veel bijval rekenen.

Het zOEFi-team heeft nog bergen werk te verzetten, maar aangemoedigd door collegiaal enthousiasme op de Panama-conferentie, is het team weer extra gemotiveerd om op deze wijze door te gaan met het leveren van haar bijdrage aan nog beter rekenonderwijs in Nederland.

noten

- 1 Het zOEFi-team bestaat uit: Marjolein Kool, Barbara van Amerom, Bas Bank, Jos van den Bergh, Ronald Keijzer & Ans Veltman.
- 2 Leerkrachten die zich willen aanmelden voor een zOEFi-abonnement of het professionaliseringstraject, of die vrijblijvend op de hoogte gehouden willen worden van de laatste zOEFi-ontwikkelingen kunnen een e-mailbericht sturen met de gegevens van hun school naar zoefi@fi.uu.nl. Ook zijn er informatie en voorbeeldactiviteiten te vinden op www.fi.uu.nl/zoefi.
- 3 Zie ook het artikel op pagina 27 in deze bundel.

literatuur

- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008). *Over de drempels met rekenen. Consolideren, onderhouden, gebruiken en verdiepen*. Enschede: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen.
- Galen, F. van, E. Feijs, N. Figueiredo, K. Gravemeijer, E. van Herpen & R. Keijzer (2005). *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen. Tussendoelen Annex Leerlijnen Bovenbouw basisschool*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Gravemeijer, K., N. Figueiredo, E. Feijs, F. van Galen, R. Keijzer & F. Munk (2007). *Met en meetkunde in de bovenbouw. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Bovenbouw basisschool*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Heege, J. ter (1985). The acquisition of basic multiplication skills. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 375-388.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den, & L. Streefland (1993). Per Sense - een onderwijsleerpakketje over procenten. In: M. Dolk & W. Uittenbogaard (red.). *Procenten – op de grens van basisschool en basisvorming*. Utrecht: Panama, HMN/Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht, 25-48.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den, K. Buijs & A. Treffers (red.) (2001). *Kinderen leren rekenen. Tussen-doelen Annex Leerlijnen. Hele getallen bovenbouw basisschool*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Heuvel-Panhuizen & K. Buijs (red.) (2004). *Jonge kinderen leren meten en meetkunde. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Meten en meetkunde onderbouw basisschool*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- KNAW-Commissie rekenonderwijs basisschool (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering*. Amsterdam: Koninklijke Nederlandse Academie voor Wetenschappen.
- Menne, J.J.M. (2001). *Met sprongen vooruit: een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars in het getallengebied tot 100: een onderwijsexperiment*. Utrecht: CDβ-press (proefschrift).
- Menne, J.J.M. & A. Treffers (2001). Productief oefenen. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 19(2), 28-35.
- Noteboom, A. (2009) *Fundamentele doelen Rekenen-wiskunde*. Enschede: SLO. www.slo.nl/primair/leergebieden/rekenen/minimumdoelen/
- Treffers, A. & E. de Moor (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2. Basisvaardigheden en cijferen*. Tilburg: Zwijssen.
- Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor (1994). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool 3A: Breuken*. Tilburg: Zwijssen.
- Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor (1996). *Proeve van een nationaal programma*

voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool 3B: Kommagetallen. Tilburg: Zwijsen.

Treffers, A., M. van den Heuvel-Panhuizen & K. Buijs (red.) (1999). *Jonge kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Hele getallen onderbouw basisschool.* Groningen: Wolters-Noordhoff.

Kenmerken van waardevol reken-wiskundeonderwijs

- gevorderde, functionele en schoolse gecijferdheid -

M. Verschoor
Zwijssen, Tilburg

1 inleiding

Het probleem dat velen met het rekenen op school hebben is dat op school met een boek wordt gerekend. Maar rekenen uit een boek heeft weinig met het rekenen in het dagelijkse leven te maken. Daarom is het van het grootste belang om werkelijke, betekenisvolle reken-wiskundige activiteiten als het meten (van lengte, gewicht, inhoud en oppervlakte) en meetkunde-probleempjes regelmatig in het onderwijs in te bouwen. Louter rekenen uit een boek biedt kinderen onvoldoende bagage voor het dagelijks leven en draagt niet voldoende bij aan hun gecijferdheid in de uitoefening van een beroep (Van Groenestijn, 2010). Rekenkennis heb je nodig om boodschappen te kunnen doen of om te begrijpen wat er op je bankrekening staat. Dagelijkse activiteiten die velen als vanzelfsprekend beschouwen, vereisen vaak basale en soms verdergaande reken-wiskundige kennis. We laten de winterschilder komen of besluiten om ons in te laten enten tegen de Mexicaanse griep. Wat betekent het verhogen van de pensioengerechtigde leeftijd naar 67 jaar voor onze samenleving, en voor mij persoonlijk? Is 1,3 miljard euro voor verbreding van de autosnelwegen A12 en A27 en het aanleggen van ongelijkvloerse kruisingen op de noordelijke randweg van Utrecht een verantwoorde investering van ons belastinggeld? Om hier beslissingen over te kunnen nemen, moet je in staat zijn om structuur aan te brengen in de omgeving waarin je leeft, en om risico's tegen elkaar af te wegen. En je moet je redeneringen mede kunnen baseren op wiskundige kennis.

2 rekenen in een beroep

Ook voor het uitoefenen van een beroep is een zekere mate van gecijferdheid nodig. We spreken dan van 'functionele gecijferdheid'. Om als ver-

pleegster de juiste dosis medicijnen te berekenen, of als vrachtwagenchauffeur je route en lading te kunnen plannen, moet je goed kunnen rekenen. Onze kenniseconomie vraagt om gecijferde werknemers die kunnen werken als onderzoeker, econoom, accountant en - ook - als leraar. Van jongvolwassenen die doorstromen naar dit type banen, zal een diep ingebedde en goed onderhouden reken-wiskundige kennis worden verwacht.

In de kwestie van functionele gecijferdheid zit er een addertje onder het gras. Wij leven in een dynamische samenleving, waarbij we voortdurend te maken hebben met snelle technologische en maatschappelijke veranderingen. Het onderwijs van onze kinderen, en van de huidige pabo-studenten, is niet afgerond als ze voor de laatste keer de deur van een onderwijsinstelling achter zich dichttrekken. Dan begint het pas. Om volwaardig te kunnen participeren in de maatschappij zullen volwassenen in de toekomst continu nieuwe informatie moeten opdoen en toepassen, veelal in actieve werksituaties. Dat wil zeggen, dat die kennis in het algemeen in samenwerking met anderen wordt opgedaan. Dit is waar wij onze kinderen op voorbereiden, en waar de leraren van nu mee geconfronteerd worden. Meestal wordt verondersteld dat hetgeen leerlingen op school leren, als vanzelfsprekend in buitenschoolse situaties kan worden aangewend. Het is echter de vraag of dit daadwerkelijk gebeurt.

Wake en Williams (2000) hebben onderzoek gedaan naar reken-wiskundig handelen op de werkvloer. Zij onderscheiden hierbij de volgende componenten: (1) het direct kunnen beschikken over technische reken-wiskundige vaardigheden (*knowledge and skills*), (2) het kunnen begrijpen van reken-wiskundige situaties, (3) het hieruit wiskundige berekeningen kunnen afleiden en deze kunnen omzetten naar wiskundige formules (*comprehension*), (4) het kunnen toepassen en uitvoeren van berekeningen en daarin de samenhang zien met andere gerelateerde problemen (*application*) en (5) het kunnen bedenken en oplossen van wiskundige problemen in functionele en innovatieve situaties (*problem solving*).

Uit onderzoek van Evans (2000) blijkt dat lang niet alle kinderen deze transfer makkelijk kunnen maken. Wellicht valt dit te begrijpen uit het gegeven dat we in schoolboeken vooral de eerste drie componenten terugvinden (*knowledge en skills, comprehension en application*). De directe koppeling met functionele en innovatieve praktijksituaties blijft hierin echter onderbelicht.

3 elementaire en gevorderde gecijferdheid

Tijdens een werkgroep op de Panama-conferentie van 2010 werd het pro-

bleem van de ‘gecijferdheid’ aan de orde gesteld. Het doel was om, op basis van een indeling in vormen van gecijferdheid, deelnemers te inspireren na te denken over wat gecijferdheid nu precies is. En over de vraag welke kennis en vaardigheden leerlingen nodig hebben om verder te kunnen leren of te kunnen functioneren in een beroep dat zij in de toekomst zullen uitoefenen. Dus, niet meer en niet minder, om als volwassene te kunnen participeren in de maatschappij. Het ging in de werkgroep dus over de drieslag ‘leren, loopbaan en burgerschap’.

	E	G		E	G
boodschappen doen			jaarrekening opzetten		
werkdagen plannen			scheiden		
tafelsommen t/m 10 memoriseren			kolomsgewijs optellen en aftrekken		
planten kopen voor de tuin			cijferend optellen en aftrekken		
mantelzorg organiseren			rekenles geven in groep 1 en 2		
werken vs kosten kinderopvang			rekenles geven in groep 3 en 4		
kiezen voor een sportvereniging			rekenles geven in groep 5 en 6		
een auto kopen			rekenles geven in groep 7 en 8		
kleding aanschaffen via Wehkamp			kinderen krijgen		
kwantitatieve gegevens in de krant interpreteren			deelname aan maatschappelijk of politiek georiënteerde belangenverenigingen		
gebruik van de creditcard			traditionele staartdeling maken		
rekenen met de rekenmachine			denksporten		
mobiel abonnement (of <i>prepaid</i>) aanschaffen			berekenen hoe laat het nu is in Washington		
pensioen regelen			games spelen		
werken als econoom			excel gebruiken		
studieverzekering voor de kinderen afsluiten			reizen met de auto of het openbaar vervoer		
de winterschilder langs laten komen			computerprogramma's maken		
trouwen			tekenen		
musiceren			wiskundedocent zijn		
een hypotheek afsluiten			begroting maken tot _ 1000		
breuken vermenigvuldigen			begroting maken tot _ 100.000		
keuze wel of niet minder uren werken			begroting maken > _ 1000.000		
beeldhouwen					

figuur 1

In deze werkgroep werden de termen ‘elementaire gecijferdheid’ en ‘gevorderde gecijferdheid’ gehanteerd. Het eerste duidt op de noodzaak om minimaal te kunnen functioneren in werk en persoonlijk leven, het tweede op het streven om over een breed scala van wiskundige kennis en vaardigheden beschikken, die nodig zijn om adequaat te kunnen handelen in het persoonlijke en maatschappelijke leven en in werk. Deze indeling is gebaseerd het All-onderzoek (Gal e.a., 1999). Met de opdracht om aan een reeks van dagelijkse activiteiten een noodzakelijke vorm van gecijferdheid toe te kennen, werd de grens tussen deze twee vormen van gecijferdheid tijdens de werkgroep verkend (fig.1). De opdracht aan de deelnemers luidde:

Welke vorm van gecijferdheid (elementair of gevorderd) heeft een Nederlandse volwassene nodig om deze activiteiten uit te voeren?

Tijdens de bespreking van de opdracht werd het kopen van een auto als voorbeeld genomen. Deze activiteit kan op verschillende niveaus worden uitgevoerd, zoals het budgetteren van de aankoop, het doorrekenen van de maandlasten en de afschrijving, en daarmee het berekenen van het maandbudget. Dit zal tot de elementaire gecijferdheid behoren. Maar wil de koper de ins en outs van zijn aankoop weten, bijvoorbeeld ten aanzien van de motor, dan zal hij over gevorderde gecijferdheid moeten beschikken.

Maar ook de zelfstandig werkende timmerman, die met een vmbo-diploma op zak aan de slag gaat, zijn jaarrekening door een accountant laat maken, maar daar toch zelf verantwoordelijk voor blijft, werd als een voorbeeld van gevorderde gecijferdheid gezien. De conclusie was dat in onze samenleving deze activiteiten wellicht door hooggecijferden worden uitgevoerd, maar dat iedere burger een hoge passieve gecijferdheid moet bezitten om in het dagelijks leven niet in de problemen te komen.

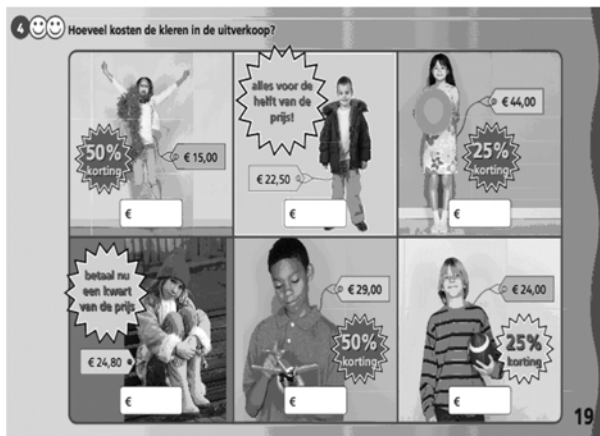
4 functionele gecijferdheid

Om het begrip ‘gecijferdheid’ te concretiseren, onderscheiden we functionele en schoolse gecijferdheid (Van Groenestijn, 2010¹). Met functionele gecijferdheid wordt de reken-wiskundige kennis bedoeld die in het leven van alledag functioneert. Schoolse gecijferdheid duidt op kennis die leerlingen in onderwijs, met behulp van schoolboeken, verwerven.

Functioneel rekenonderwijs legt de link tussen het rekenen en de wiskunde in de school en de toepassing van de aldus opgedane reken-wiskundige kennis in het dagelijks leven.

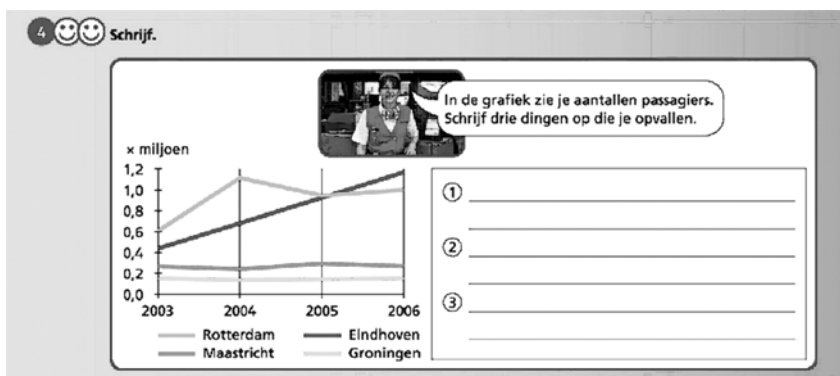
Door keuzen in type opdrachten en contexten, kan de functionele toepassing van die kennis voor leerlingen inzichtelijk worden gemaakt. Tijdens

de werkgroep werden daarvoor enkele voorbeelden aangedragen. Zoals het volgende. In het dagelijks leven kom je zelden uitgeschreven bewerkingen, zoals $8 \times 34 =$, tegen. Je krijgt daar getallen gepresenteerd, waar je zelf de bewerkingen bij moet bedenken en uitvoeren. Bijgaande opgaven,² gebaseerd op winkelfolders, zijn hiervan een voorbeeld. Dit type opgaven kan al in de basisschool worden aangeboden (fig.2).



figuur 2

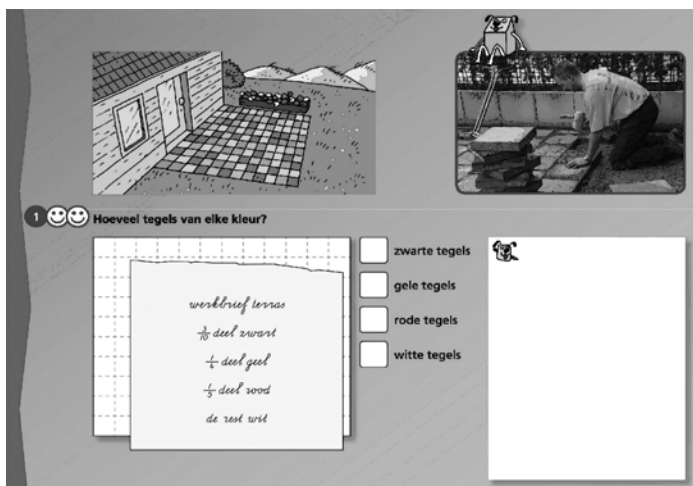
Het analyseren en interpreteren van getalsmatige informatie is een belangrijke vaardigheid. Opdrachten die hierop geselecteerd worden, kunnen dit stimuleren (fig.3).



figuur 3

We zijn gewend om in de keuze van een context dicht bij de beleveniswereld van kinderen te blijven. Dit, vanwege de affiniteit met en herkenbaarheid van de contexten. Door in contexten ook het verband te leggen met

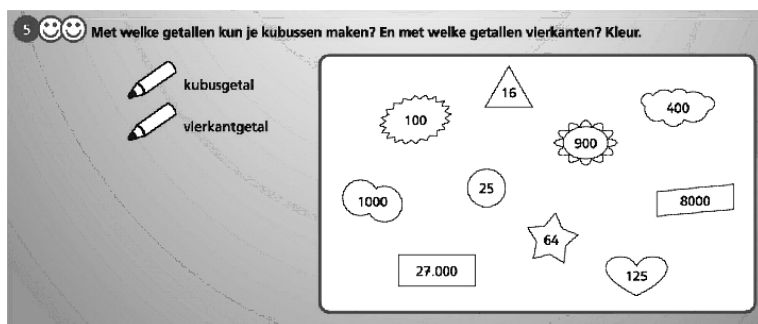
toepassingen van het rekenen in allerlei beroepssituaties, wordt het voor kinderen duidelijk gemaakt hoe het rekenen is ingebed in het dagelijks leven. Daarnaast geldt, dat in de functionele toepassing van het rekenen de leerstofdomeinen 'verhoudingen' en 'meten' veelal hand in hand gaan. Specifiek daarvoor ontwikkelde opdrachten kunnen dit versterken (fig.4).



figuur 4

5 schoolse gecijferdheid

s-niveaus zijn de streefniveaus, die door de commissie Meijerink werden voorgesteld om de doorstroming naar vervolgoopleidingen makkelijk te kunnen realiseren.



figuur 5

Hiervoor zijn meer schoolse kennis en vaardigheden nodig. We kunnen dit met ‘schoolse gecijferdheid’ aanduiden. De huidige leerstof van het primair (en het voortgezet) onderwijs komt in redelijke mate overeen met wat we ons bij de s-route voor schoolse gecijferdheid voorstellen. Daarbij wordt het rekenen op een hoger abstractieniveau gestimuleerd. Het type opdrachten dat daarbij hoort, kan een betere aansluiting op de ontwikkeling van leerlingen in de bètavakken bewerkstelligen (fig.5).

6 samenwerken

‘Gecijferdheid’ is een dynamisch concept dat ook door maatschappelijke ontwikkelingen wordt beïnvloed. Leerlingen zullen zich later in veelal functionele zin verder moeten bekwamen. De tijdens onderwijs verworven kennis veroudert snel (Van Groenestijn, 2002). Flexibele toepassing van kennis en vaardigheden in een veranderende omgeving vraagt om aandacht voor het zelfstandig kunnen oplossen van problemen met een reken-wiskundig aspect. Wake en Williams (2000) scharen dit onder hun vierde component, *problem solving*. Het leren in arbeidssituaties gaat niet in solitaire situaties, maar *on the job*, in interactie met collega's. Een belangrijk onderdeel van de probleemoplossende vaardigheid is dan ook het vermogen om met anderen samen te kunnen werken. Voor samenwerking is interactie nodig. Deze interactie is effectief, als de betrokkenen in staat zijn om hun gedachten te verwoorden en als zij er zich van bewust zijn dat problemen volgens verschillende procedures kunnen worden opgelost. Het leren van deze vaardigheden hoeft zich niet te beperken tot vervolgopleidingen. Het is van belang om hier al vanaf het basisonderwijs aandacht aan te besteden. Er zal dus tijd gereserveerd moeten worden voor samenwerkend leren. Het aanbieden van complexe problemen en nieuwe leerstof zonder voorafgaande instructie in een praktische, innovatieve context, daagt de leerlingen uit om samen aan de slag te gaan. Hierbij is het rekenen niet alleen maar een doel, maar ook middel geworden (Boekaerts e.a., 1995).

7 samenvatting

Transfer van reken-wiskundige kennis naar de praktijk van alledag gaat niet vanzelf. Specifieke aandacht voor de functionele component van gecijferdheid kan deze transfer versterken. Dit kan door in het onderwijs gebruik te maken van contexten die aansluiten bij deze functionele gecij-

ferdheid. Hierbij kan gedacht worden aan contexten waarbij leerlingen zelf bewerkingen construeren, in plaats van alleen maar uitvoeren. In het rekenen zou er specifieke aandacht voor functionele situaties, zoals werk moeten zijn. Er zou een beroep kunnen worden gedaan op contexten uit de alledaagse werkelijkheid, waarbij aandacht wordt besteed aan het analyseren en interpreteren van de gegevens. Er is een grotere verwevenheid van functionele contexten op het gebied van meten en toepassing van getallen en bewerkingen. Bovendien kan schoolse gecijferdheid in het rekenen een hoger abstractieniveau stimuleren.

De kennis die onze leerlingen nu opdoen, zal snel verouderd raken. De leerlingen zullen daarom ook vaardigheden moeten verwerven om zelfstandig en in groepsverband reken-wiskundige problemen op te lossen in voor hen nieuwe situaties. Het vermogen om samen te werken met anderen is hierbij van cruciale betekenis.

Tijdens de werkgroep op de Panama-conferentie leidde het verkennen van de grens tussen elementaire en gevorderde gecijferdheid tot een levendige discussie. Geconcludeerd werd dat, om als volwassene te kunnen participeren in de maatschappij en daadwerkelijk inzicht te hebben in consequenties van alledaagse beslissingen, iedereen passieve wiskundige kennis op een gevorderd niveau nodig heeft.

noten

- 1 Rede uitgesproken bij het aanvaarden van haar functie als lector Gecijferdheid aan de Hogeschool Utrecht op 8 januari 2010.
- 2 Deze en alle volgende illustraties komen uit de reken-wiskundemethode 'Wizwijs' voor het basisonderwijs.

literatuur

- Boekaerts, M. & P.R.J. Simons (1995) *Leren en instructie. Psychologie van de leerling en het leerproces*. Assen: Van Gorcum.
- Evans, J. (2000). The transfer of Mathematics Learning from School to Work. In: A. Bessot & J. Ridgway (eds.). *Education for Mathematics in the Workplace*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 5-16.
- Gal, I., M. van Groenestijn, M. Manly, M.J. Schmitt & D. Tout (1999). *Numeracy Framework for the international Adult Literacy and Lifeskills Survey (ALL)*. Ottawa, Canada: Statistics Canada, <http://nces.ed.gov/surveys/all>.
- Groenestijn, M. van (2002). *A Gateway to Numeracy. A Study of Numeracy in Adult Basic Education*. Utrecht: Universiteit Utrecht, CD-β Press, Centrum voor Didactiek van Wiskunde (proefschrift).
- Groenestijn, M. van (2010). *Op weg naar Gecijferdheid. Openbare les*. Utrecht: Hogeschool Utrecht (lectoraat Gecijferdheid).
- Wake, G. & J. Williams (2000). Developing a new mathematics curriculum. In: A. Bessot & J. Ridgway (eds.). *Education for Mathematics in the Workplace*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 167-180.

Waardevol reken-wiskunde-onderwijs¹ - kenmerken van kwaliteit

S. Lit & R. Keijzer
Flsme, Universiteit Utrecht

1 vooraf

De Panama-conferentie van 2010, met als titel 'Waardevol reken-wiskunde-onderwijs - kernmerken van kwaliteit', vond van 20 tot en met 22 januari 2010 plaats. We doen hier verslag van.

Aan dit verslag leverden enkele deelnemers aan de conferentie een bijdrage, te weten: Marjoke Bakker, Bas Bank, Nico den Besten, Conny Bodin, Douwe Jan Douwes, Yvonne van der Eerden, Martine den Engelsen, Hans ter Heege, Ton van der Heiden, Ruud Houweling, Ortwin Hutten, Wim Keijzer, Francis Meester, Ed de Moor, Sylvia van Os, Gert Schoeman, Jan Stapel, Jan van Stralen en Bronja Versteeg. Mede op basis hiervan is dit verslag geschreven.

Alleen maar rekenen uit een boek biedt kinderen onvoldoende bagage voor rekenen in het dagelijks leven en voor hun toekomstig beroep.

(Mieke van Groenestijn, lector gecijferdheid)

2 verschillende perspectieven

Marc van Zanten opent de conferentie. Rekenen-wiskunde staat volop in de belangstelling. In een hoog technologische maatschappij is reken-wiskunde-onderwijs van goede kwaliteit nodig. Maar wat goed reken-wiskunde-onderwijs is, weten we nog onvoldoende, stelt Van Zanten. Hij kondigt een conferentie aan waarin ruimte is voor verschillende visies en standpunten en zet de toon door een tiental citaten vanuit verschillende perspectieven te presenteren: een citaat van staatssecretaris Van Bijsterveldt, die op vrijdag aanwezig zal zijn bij de conferentie, een citaat van hoogleraar Marja van den Heuvel, citaten van beide lectoren Mieke van Groenestijn

en Ronald Keijzer, en citaten van onder meer een leraar, een schoolleider en een opleidingsdocent. Ze zijn verspreid in dit verslag opgenomen.

De maatschappelijke discussie over de betekenis van de realistische tegenover de meer traditionele didactiek bereikte in het najaar van 2009 een mijlpaal met het verschijnen van het advies 'Rekenonderwijs op de basisschool, analyse en sleutels tot verbetering' van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, onder voorzitterschap van Jan Karel Lenstra. De landelijke pers vatte het rapport samen in koppen als 'Rekenniveau daalt door docent'. 'Dat doet de conclusies geen recht', zegt Van Zanten, 'maar wel is het zo dat de leerkracht van niet te overschatten belang is voor goed reken-wiskundeonderwijs. De leraar is van belang en de didactiek doet ertoe; het gaat om het zoeken naar een goede balans tussen leerstof en leerling; om cognitie en emotie. Juist het in beschouwing nemen van alle mogelijke relevante aspecten doet recht aan het belang van goed reken-wiskundeonderwijs.'

Dit verslag start met het onderzoek van de KNAW-Commissie rekenonderwijs basisschool (2009) naar de oorzaken van achterblijvende rekenresultaten. We gaan ook in op ander onderzoek. In lijn met de conclusies van het KNAW-onderzoek, stellen we vervolgens de leraar centraal: wat kenmerkt een goede reken-wiskundeleraar? In een volgende paragraaf worden kenmerken van betekenisvolle didactiek besproken. Daarna is de blik gericht op doorgaande leerlijnen, om vervolgens de aandacht te richten op het kind en de ontwikkeling van zijn talent, gevolgd door de intrinsieke waarde van de wiskunde en een korte beschouwing in historisch perspectief: over de vraag welke doelen voor rekenen-wiskunde in deze maatschappij, ook met het oog op de toekomst, waardevol moeten worden geacht. Het verslag eindigt met een korte reflectie en een vooruitblik, mede aan de hand van het gesprek met de staatssecretaris.

De staartdeling, dat icoon, is ook niet van God gegeven.

(Jan Karel Lenstra, voorzitter KNAW-rekencommissie)

3 onderzoek naar onderwijs-opbrengst

Verschillende onderzoeken richten zich op de oorzaken van (vermeend) tegenvallende rekenresultaten. Daarbij heeft de commissie van de KNAW expliciet gelet op het verschil tussen de realistische en de traditionele didactiek. De invloed van de leraar blijkt groter dan van de gehanteerde didactiek. Deze conclusie wordt bevestigd door andere onderzoeken.

Op 4 november 2009 werd het advies 'Rekenonderwijs op de basisschool, analyse en sleutels tot verbetering' van de Koninklijke Nederlandse Aka-

demie van Wetenschappen, aangeboden aan staatssecretaris Sharon Dijksma (KNAW, 2009). Aanleiding ervoor was de discussie van de laatste jaren over het rekenonderwijs, waarin op sommige momenten exponenten van de realistische rekendidactiek en van de traditionele rekendidactiek lijnrecht tegenover elkaar stonden. Dit advies heeft van verschillende kanten waardering gekregen. Jan Karel Lenstra, voorzitter van de adviescommissie, presenteerde op de conferentie de resultaten van het onderzoek naar het rekenonderwijs op de basisschool en gaf een toelichting bij de belangrijkste conclusies. De KNAW heeft gekeken of er wetenschappelijk bewijs was ten gunste van de effectiviteit van de ene of de andere didactiek. De hoofdconclusies van het advies zijn:

- 1 De bezorgdheid over de rekenvaardigheid van basisschoolleerlingen is op zijn plaats. Het rekenpeil kan en moet over de gehele linie omhoog.
- 2 Het publieke debat overdrijft de tegenstelling tussen de traditionele en de realistische didactiek en gaat bovendien over het verkeerde onderwerp, namelijk een vermeend verschil in het effect van beide didactieken. Er is geen overtuigend verschil aangetoond.
- 3 De sleutel tot verbetering van de rekenvaardigheid ligt in het niveau van de leraar. De opleiding en nascholing van de leraar zijn in ernstige mate geërodeerd.

Binnen een bepaalde rekendidactiek bleken de verschillen in de rekenvaardigheid van leerlingen groter dan tussen de rekendidactieken zelf. De leraar blijkt belangrijker dan de gebruikte didactiek. Er is meer onderwijs-tijd en aandacht nodig en meer nascholing. In Nederland wordt, internationaal gezien, zeer weinig aan nascholing en begeleiding van reken-wiskundeonderwijs gedaan. Het advies is dan ook daar meer werk van te



maken. Tevens is het advies om op basisscholen rekencoördinatoren aan te stellen. Verder noemt de commissie een aantal problemen die in de

opleiding van leraren spelen: het dalende niveau van de instroom, het lage aantal contacturen voor rekenen-wiskunde & didactiek, de verminderde vakinhoudelijke betrokkenheid van vakdocenten bij de stagebegeleiding en tenslotte de keuze voor een integrale toetsing van studenten, waardoor slechte resultaten in het rekenen worden gecamoufleerd.

Lenstra spreekt ook over mogelijke verbeteringen, vooral in de opleidingen. Hij gaat daarbij in op de eisen die aan de instroom van studenten in de opleiding mogen worden gesteld, de balans tussen algemene pedagogiek en vakkennis en tussen rekenvaardigheid en rekendidactiek, de beschikbare opleidingstijd voor rekenen-wiskunde, de kansen die de onlangs ontwikkelde kennisbasis voor de pabo (Van Zanten, Barth, Faarts, Van Gool & Keijzer, 2009) biedt en het idee om de pabo te splitsen in opleidingen voor onder- en bovenbouw.

De tegenvallende resultaten in het reken-wiskundeonderwijs hebben de SLO doen besluiten onderzoek te doen naar oorzaken. Hier zijn vier basisscholen bij betrokken. Kees Buijs doet verslag. Hij constateert een gebrek aan inzicht bij leraren in doorlopende leerlijnen (Buijs, 2010). Veel leraren werken in hun onderwijs van dag tot dag, met hun methode als leidraad, maar weten onvoldoende welke onderdelen van belang zijn voor de doorgaande ontwikkeling van kinderen. Buijs laat een voorbeeld zien waarin een leerling in moeilijkheden komt bij de som $83 - 46$ doordat hij splitst in plaats van rijgt; een bekend probleem in groep 4. Toch heeft de leraar niet door dat het gegeven antwoord 43 voortkomt uit een incorrecte procedure, namelijk het cijfer voor cijfer 'groot min klein' aftrekken. Uit het onderzoek komt naar voren dat ook de methode van de school de leraar parten speelt, en dat instructievaardigheden van leraren soms tekort schieten. Ook blijkt van belang dat er onvoldoende samenhang is in de zorgstructuur van een school - dat wat de ene leraar doet, niet bekend is bij de andere - en dat kinderen op sommige scholen te veel zelfstandig moeten werken. Er is in toenemende mate twijfel aan de effectiviteit van een weekprogramma voor rekenen-wiskunde dat twee dagen leraargebonden lessen en drie dagen zelfstandig werken bevat. Buijs constateert dat juist een combinatie van bovengenoemde factoren een negatief effect op de resultaten voor rekenen-wiskunde heeft. Naar aanleiding van het onderzoek ontwikkelde de SLO een nascholingstraject en een serie posters waarop leerlijnen in beeld worden gebracht. Deze posters moeten leraren het gewenste overzicht in doorlopende leerlijnen geven.

Ook Martijn Smoors heeft zich verdiept in de factoren die van invloed zijn op de resultaten van het reken-wiskundeonderwijs. Hij baseert zich grotendeels op het meta-onderzoek van Marzano (2007), die onderzoeksgege-

vens over 'Wat werkt op school?'² over een periode van 35 jaar heeft geanalyseerd. Deze meta-analyse leverde elf factoren op die van belang zijn op leerling-, leraar- en schoolniveau. Smoors vertaalt de bevindingen van Marzano naar het reken-wiskundeonderwijs. Op het niveau van de leraar is een positief effect gevonden voor een aanpak waarin de leraar zijn leerlingen denkstrategieën leert, zoals het identificeren van overeenkomsten en verschillen. Het zou dus effectief kunnen zijn met leerlingen strategieën te vergelijken of met leerlingen te kijken waarom de ene opgave makkelijker is dan de andere. Op schoolniveau is een haalbaar en gedegen programma van belang. Daarin gaat het ook om de mate waarin een school kan garanderen dat bepaalde onderwerpen onderwezen zullen worden, ongeacht welke leraar het onderwijs in een bepaalde klas verzorgt. De school moet doelgerichter werken: de basisleerstof zal in de beschikbare onderwijstijd gerealiseerd moeten worden. Dit vraagt om een doordacht lesplan met voldoende lestijd.

Het onderzoek van Hendrik Van Steenbrugge van de Universiteit Gent bevestigt dat de invloed van de leraar groter is dan de invloed van de methode die in het reken-wiskundeonderwijs wordt gehanteerd. Van Steenbrugge is van mening dat nationale en internationale studies in het domein van rekenen-wiskunde hun aandacht te eenzijdig richten op de resultaten van leerlingen. In recent Vlaams onderzoek is er ook aandacht voor de kennis en ervaring van leraren. Gekeken werd naar lesbeschrijvingen van leraren die werken met de Vlaamse versie van de methode Pluspunt, met de Vlaamse rekenmethode Kompas of met de nieuwste versie van Talrijk. Uit die lesbeschrijvingen is echter niet goed op te maken of er met die methoden ook op een realistische manier gewerkt wordt. Om dat te kunnen bepalen, moeten lessen worden geobserveerd. Kortom: het uitvoerend handelen van de leraar bepaalt, meer dan de methode, het verloop van de reken-wiskundeles.

Een andere onderzoeker uit Gent, Ineke Imbo, onderzoekt culturele verschillen bij het rekenen. Het onderzoek (Imbo, 2009) is gericht op de selectie en efficiëntie van strategieën bij het hoofdrekenen zonder kladblaadje, in opgaven als $8 - 5$, $56 : 8$ en $28 + 57$. Haar onderzoek is uitgevoerd met veertig Belgen, veertig Canadezen en veertig Chinezen, allen studenten aan een universiteit. Imbo constateert dat Chinezen sneller rekenen en minder fouten maken dan Belgen en Canadezen, maar niet zo flexibel zijn in het gebruik van strategieën. Als mogelijke verklaring noemt zij dat Chinezen uit haar onderzoek positiever staan tegenover rekenen-wiskunde dan Belgen en Canadezen. Ook hebben ze op de basisschool meer lessen rekenen-wiskunde gehad en wordt er in China meer geautomatiseerd. In een vervolgonderzoek wil Imbo zich richten op manieren van oplossen van

personen met verschillende culturele achtergronden, om daarmee na te gaan of de sterke kanten van beide groepen kunnen worden gecombineerd.

Ook onderwijsadviseurs zoeken naar manieren om de resultaten van het reken-wiskundeonderwijs te verhogen. Zij discussiëren over zaken als opbrengstgericht werken, schoolontwikkeling en rekenbeleid, over rekenverbetertrajecten en de implementatie van de nieuwe reken-wiskundemethoden, over differentiatie in de rekenles en de overgang van PO naar VO en over verbetering van het onderwijs aan zwakke rekenaars in de bovenbouw. Zij denken na hoe het verder moet met de referentieniveaus, en over de vraag hoe een leraar meer kan profiteren van evaluatiegegevens die hij verzamelt.



Opbrengstgericht werken moet, volgens sommigen, altijd beginnen bij de (bovenschools) manager. Deze moet sturen naar opbrengsten en om die opbrengsten vragen. Dan zal de directeur van de school deze bij het maken van de nieuwe schoolplannen meenemen. Naast de aandacht voor leerlingen 'aan de onderkant' is er groeiende aandacht voor de ontwikkeling van leerlingen 'aan de bovenkant': gaat de ontwikkeling van kinderen in de bovenbouw van de basisschool door, zoals gewenst?

Een interessant gespreksthema in de groep vloeit voort uit de conclusies uit het KNAW-rapport: 'Heb je een aanbod voor nascholing, dan gaat er niemand naar toe ... Hoe verleid ik de leraar, het team en de school?'

Het lijkt me verschrikkelijk moeilijk om leerlingen te leren rekenen - ongeacht de methode die je gebruikt. Diep respect voor de leraren die dit lukt.
(Ionica Smeets, 'wiskundemeisje')

4 de kwaliteit van de leraar

Discussies over het vakmanschap van de leraar spitsen zich in deze conferentie toe op de kennis van de leraar en de toekomstige leraar. De kennisbasis wordt geïmplementeerd in de opleidingen, maar hoe moet die getoetst gaan worden? En hoe krijgen we zicht op de vakkennis van zittende leraren?



Vincent Klabbers zet zich als opleider al jaren in voor de kwaliteit van de leraar. Op een video zien wij hem zelf in actie in een basisschoolgroep. In de getoonde les gaat het onder meer om de opgave 8×3 . Een leerling mag uitleggen hoe ze dat uitrekent en maakt daarbij gebruik van een pak met $2 \times 3 \times 4$ rollen toiletpapier, dat speciaal daarvoor in de groep is neergezet. 'Vertel eens hoe je dat ziet, dan denken wij met je mee', nodigt Klabbers haar uit. Dit soort videofragmenten bespreekt hij met zijn studenten in de minor rekenen-wiskunde. De leraar moet oog krijgen voor het inrichten van een krachtige leeromgeving. En hij moet daarin voortdurend keuzen maken. Klabbers voorziet zijn studenten van richtlijnen om dit mogelijk te maken en gaat met hen in gesprek over deze keuzen, onder andere aan de hand van videomateriaal, waarvan hij zojuist een voorbeeld liet zien. Het pak toiletpapier biedt bijvoorbeeld verschillende mogelijkheden om een vermenigvuldigstructuur te laten zien. De vraagstelling is in de videoles zorgvuldig gekozen om leerlingen zelf aan het denken te zetten. Klabbers brengt zijn vakmanschap ook tijdens de plenaire voordracht op de conferentie in praktijk:

Ik zie aan de ogen in de zaal dat ik dit even uit moet leggen. Ik ben niet tevreden als kinderen in mijn klas zeggen $1\text{ ml} = 1\text{ cm}^3$. Dat is niet genoeg. Ze moeten er een gevoel bij hebben. Dan moet ik andere vragen stellen, zoals: een milliliter, kun je daar nat van worden?

Klabbers pakt een spuit en spuit 1 ml water de zaal in. Ja, ook emotie speelt mee, 'dus ik ontwerp dat erin', aldus Klabbers.

Rekenen is ook emotie.

(Marjolein Kool, lerarenopleider)

Een ander voorbeeld van actueel opleidingsonderwijs wordt gegeven door Hilde Amse, Erica Woltjes en Ans Veltman van de pabo Almere en de Theo Thijssenacademie. Deze docenten richten samen met hun studenten 'hoeken' in, zoals dat op de basisschool ook gebeurt in de groepen 1 tot en met 4. Op deze manier leren studenten de wiskunde in dagelijkse situaties herkennen en benutten. Er wordt gezocht naar activiteiten voor kinderen die bij het thema passen en die daarom in de hoek centraal staan. Er wordt stilgestaan bij geschikt materiaal, bijvoorbeeld of er (speel)geld in de hoek gelegd moet worden, en zo dit het geval is, in welke vorm. De inleiders bespreken hoe de leraar 'mee kan spelen' en welke vragen goed zijn om te stellen aan de kinderen. Het zijn vaak 'grote gesprekken over kleine dingetjes'. De studenten presenteren de hoeken aan elkaar en voeren observaties uit in het basisonderwijs. Hierbij moeten zij vaktermen en begrippen gebruiken, waardoor zij de theorie aan de praktijk verbinden. Dit vinden studenten niet makkelijk, maar wel leerzaam.

Veel opleiders zijn inmiddels volop bezig met de implementatie van de kennisbasis en de toetsing daarvan. In de categoriale bijeenkomst van de opleiders wordt kort informatie gegeven over de stand van zaken van het project kennisbases voor de pabo. Projectleider is Jan Haan. Voor de ontwikkelde kennisbases voor Nederlands en rekenen-wiskunde is veel waardering. Elke afgestudeerde van de pabo moet de kennis die is vastgelegd in de kennisbases beheersen. Momenteel wordt in zes *pilots* aandacht besteed aan de implementatie van de kennisbases taal en rekenen. De bedoeling is om de kennisbases per 1 augustus 2010 in te voeren. Op het moment van schrijven is nog niet duidelijk of er in het eerste jaar nog wat meer geëxperimenteerd kan worden, zodat de verplichting de kennisbases op te nemen in het Onderwijs- en ExamenReglement pas vanaf 1 augustus 2011 zou gelden.

Een deel van de opleiders verdiept zich in de toetsing van de kennisbasis. Harrie Sormani schetst de toetsstructuur bij rekenen op Pabo Arnhem (HAN). Daarna volgt een discussie over de inhoud van 'professionele gecijferdheid'. De auteurs van de kennisbasis hebben zich bij het schrijven gebaseerd op de definitie van professionele gecijferdheid, zoals beschreven

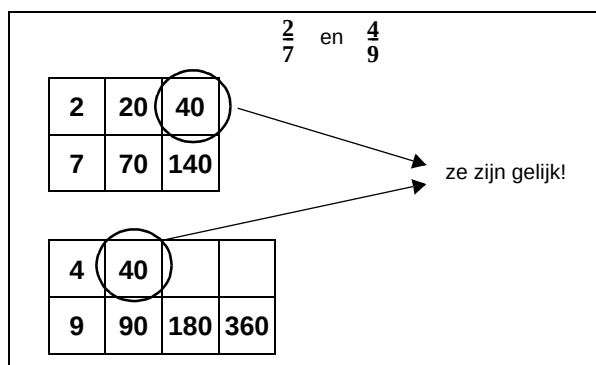
in het artikel van Oonk, Van Zanten en Keijzer (2007). Hierin worden vier kenmerken van professionele gecijferdheid onderscheiden, die onderling sterk samenhangen: het beschikken over eigen rekenvaardigheid en gecijferdheid; het in het onderwijs betrekken van wiskunde uit de realiteit; het gericht zijn op oplossingsprocessen en het bevorderen van het wiskundig denken van leerlingen. Voor de aanwezige opleiders is het duidelijk dat de kennis zoals die is omschreven in de kennisbasis niet alleen kan worden getoetst met gesloten toetsvragen in een digitale toets. En dat is nu juist wel de bedoeling, volgens projectleider Haan: er komt in ieder geval een centrale toetsing. Deze toets zal in ieder geval digitaal zijn en liefst ook een meerkeuzetoets. Ze moet vooral gezien worden als legitimering 'naar buiten' toe, als een garantie naar de samenleving. Hiermee zijn gevoelens als 'de juf kan zelf niet eens rekenen' te weerleggen. Alles wat niet digitaal getoetst kan worden, kan, stelt Haan, in een lokale toets worden ondergebracht, dat wil zeggen dat dit in eigen beheer van de pabo zal worden getoetst.

De discussie spitst zich toe op de verdeling van de stof in de centrale toets en in lokale toetsen. Het idee ontstaat dat alleen het eerste en tweede niveau van professionele gecijferdheid, namelijk de eigen rekenvaardigheid en het betekenis kunnen geven aan rekenen en wiskunde, zich lenen voor centrale toetsing en dat de beide andere niveaus lokaal moeten worden getoetst. Dat is tegen de traditie in om eigen rekenvaardigheid en didactiek in samenhang te toetsen. Opleiders zien als risico dat 'men in het land' een dergelijke centrale toets straks ziet als 'het eindexamen van de pabo'. Als dat een 'platte kennistoets' is, dan bestaat het risico dat ze wordt gezien als voldoende om leraar te worden. Dat is niet wenselijk, want de kennisbasis is breder. Vanuit deze gedachtegang ontstaat het idee dat pabo's het moment van de centrale toetsing misschien zelf zouden moeten kunnen bepalen, bijvoorbeeld juist voor de specialisatiefase.

Francien Garssen is in het kader van haar promotieonderzoek bezig met het ontwikkelen van een toets, die specifieke wiskundige kennis en inzichten van een leraar zichtbaar maakt. Zij spreekt hierbij van *specialized content knowledge* (Hill, Schilling & Ball, 2004). Een leraar heeft specifieke vakkennis nodig, zoals het kunnen oplossen van een opgave op verschillende manieren en de oorzaak van een rekenfout achterhalen.

Ze haalt een voorbeeld uit groep 7 aan: een leraar geeft zijn klas de opdracht om breuken met elkaar te vergelijken. Hieronder een van de breukenparen die vergeleken moet worden en de oplossing van een leerling, die op grond van zijn verhoudingstabel concludeert dat ze gelijk zijn (fig.1). Weet een leraar raad met een oplossing als deze? De deelnemers van de werkgroep van Garssen verwachten dat dit onderzoek interessante

gegevens zal opleveren over de *specialized content knowledge* van leraren. De kennis van de leraar en zijn rol in het onderwijzen stonden ook centraal in de ontwikkeling van de 'Kwaliteitskoffer Speciaal Rekenen'. Dit digitale pakket is ontwikkeld in het project 'Speciaal Rekenen', dat al ongeveer negen jaar loopt.



figuur 1

Dit project heeft een groot aantal mappen met onderwijsuggesties opgeleverd, die echter vaker in de kast blijven liggen dan dat ze op het bureau van de leraar terechtkomen. De ontworpen onderwijsactiviteiten bieden leraren in het s(ba)o kennelijk niet voldoende aanknopingspunten om ze in de praktijk van alledag in te passen. Daarom is er een kwaliteitskoffer gemaakt, voor de opleider, onderwijsadviseur, de rekencoördinator of de interne begeleider. De kwaliteitskoffer bevat suggesties voor de invoering van realistisch rekenen in het s(ba)o met het oog op 'verandermanagement', professionalisering van leraren, met tips voor implementatie. Als voorbeeld wordt de reflectie van leraren besproken, die als graadmeter kan dienen voor hun ontwikkeling. Gebleken is dat de vakspecifieke taal van de leraar, waarmee hij zijn eigen handelen in de klas beschrijft, een indicatie is voor zijn ontwikkelingsniveau. Ook het idee dat leraren een ontwikkeling door moeten maken, om vernieuwingen op hun waarde te schatten en deze in te passen in hun handelen, spreekt de aanwezige onderwijsbegeleiders aan.

Te vaak is de leraar niet de baas over de methode. Dit is de ervaring van Maaïke Verschuren en Kris Verbeeck van KPC-groep Den Bosch, die daarmee aansluiten bij ervaringen van veel schoolbegeleiders. Ze komen in de praktijk vaak tegen dat leraren 'slaafs' de methode volgen en dan denken dat leerlingen leren wat zij moeten leren. Het is een hardnekkige schijnwerkelijkheid. Verschuren en Verbeeck pleiten ervoor dat leraren doelge-

richter gaan denken aan de uitoefening van hun beroep. Dit begint ermee leerlingen deelgenoot te maken van de doelen die worden nagestreefd. Dus niet meer vertellen wat ze moeten doen, maar wel wat ze gaan leren. Kennis van de leerlijnen met cruciale leermomenten is daarbij van eminent belang. Verschuren en Verbeeck geven tips om zo baas te blijven over de methode. De essentie is dat leraren zich er steeds bewust van zijn welke middelen en werkvormen ze in moeten zetten om alle kinderen op een hoger reken-wiskundig niveau te krijgen. Dat de methode daarin een belangrijke rol speelt, is evident, maar leren rekenen houdt veel meer in dan opdracht na opdracht uit de methode maken.

In de werkgroep 'Een stap verder met de leraar' vertellen Joyce Kruys en Els Westra (CED Groep Rotterdam en projectgroep wiskunde Montessori basisonderwijs³) over de aanpak van de professionalisering van leraren in het Montessori-onderwijs. In het Montessori-onderwijs heeft het accent nooit op methoden gelegen, maar op de leraar, die het kind observeert en begeleidt. Om het *laissez-faire* karakter dat dreigt tegen te gaan, werden er kaarten ontwikkeld met opdrachten die beogen het kind wiskundige essenties te laten ontdekken. Voor de leraar is er een 'didactische bijsluiter' bij, die hem houvast biedt in wat de leerling bij aanvang moet kunnen om zinvol met de kaart aan het werk te gaan en die een suggestie geeft welk leerproces de leraar van het kind mag verwachten. Als voorbeeld worden twee kaarten met combinatorische problemen getoond. 'Op hoeveel manieren kan de muis naar de kaas?', is de eerste, en 'Hoeveel verschillende vlaggen kun je maken met drie/vier verschillend gekleurde banen?', de tweede. Kruys en Westra hebben de ervaring dat leraren de neiging hebben teveel informatie weg te geven aan het kind en dat ze kinderen te weinig zelf laten ontdekken. De toehoorders vinden combinatoriek een moeilijk onderwerp en de beschrijving voor de leraren erg abstract. De reactie daarop is dat het geen boek moet worden, maar in de hoofden van de leraren moet komen en dat er scholingsbijeenkomsten bij horen.

Deze rekenmethode vind ik zó mooi ... het is net de Ikea-gids.
(een basisschoolleraar)

5 de kwaliteit van de didactiek

Om de realistische didactiek goed uit de verf te laten komen, hebben leraren voldoende vakkennis nodig. Tijdens de conferentie komen verschillende vernieuwende ideeën naar voren, die kunnen bijdragen aan het vergroten van deze vakkennis. Zo wordt het belang van dagelijkse instructie en dagelijks 'gedachtevol' oefenen benadrukt. Vernieuwende didactische

impulsen komen ook vanuit de hoek van natuuronderwijs en techniek. Frans van Galen en Barbara van Amerom doen onderzoek naar het realiseren van de discussie in de klas bij het vak rekenen-wiskunde. Het belang dat zij toekennen aan kinderen laten discussiëren over oplossingen, komt voort uit de concepten van het geleid heruitvinden, zoals ontwikkeld door Hans Freudenthal (1991), en het idee van de lokale onderwijstheorie, van Koen Gravemeijer (2004). Om na te gaan hoe dit gerealiseerd kan worden, is onderzoek gedaan bij twee leraren in de groepen 7 en 8. Er werden video-opnamen gemaakt van lessen en van voor- en nabesprekingen met deze leraren. Als voorbeeld wordt een video van een les over oppervlakte vertoond. Na de introductie van het probleem moeten de kinderen eerst een minuut in stilte over de oplossing van het probleem nadenken. Daarna gaan ze in groepjes op zoek naar een oplossing. Ze discussiëren vervolgens over een mogelijke oplossing, om uiteindelijk gezamenlijk een presentatie voor te bereiden. Er is aandacht voor zaken als: een minuut zelf nadenken. De leraar wijst aan wie er dit keer zal presenteren, met de toevoeging dat je niet je eigen zaken mag presenteren, maar het groepsstandpunt. Het is van belang elkaar in de discussie een beurt te geven. De leraar trekt zich tijdens de presentatie van een leerling enigszins terug door achter in de klas te gaan staan. Ten slotte wordt het gedrag dat leerlingen in de les laten zien onderwerp van gesprek, als dit gewenst is.

Bij de les over oppervlakte valt op dat de leraar niet goed weet waar hij naar toe moet werken. Mede daardoor kan hij de betekenis van de oplossingen die leerlingen inbrengen niet altijd goed inschatten. De methode die de school gebruikt blijkt voor het aspect 'oppervlakte' veel hiaten in de leerlijn te bevatten. Naar aanleiding van hetgeen in de werkgroep ter sprake komt, ontstaat er een discussie over de vraag of dit type onderwijs wel haalbaar is. De benodigde vaardigheden die leraren zouden moeten hebben, liggen in de sfeer van het creëren van de juiste klassencultuur, maar ook op vakinhoudelijk gebied zijn de eisen hoog. Men ziet ook beperkingen aan de voorgestelde werkwijze: 'de momenten van geleid heruitvinden moet je zorgvuldig uitzoeken, want niet al het onderwijs is daarvoor geschikt.'

Sjoerd Huitema wijst in zijn conferentiebijdrage op het veelvuldig voorkomend gebruik van niet-begeleid zelfstandig werken. Hij hekelt de indeling van klassen in verschillende niveaugroepen, omdat dit in zijn ogen een voorname oorzaak vormt van het lage rekenniveau dat hij af en toe observeert. Deze werkvorm leidt, volgens Huitema, tot oplopende niveauverschillen, waardoor centrale instructie in de bovenbouw uiteindelijk niet meer mogelijk is. Daarnaast schetst hij hoe vaak hij in de praktijk merkt dat de instructietafel er wel staat, maar zelden gebruikt wordt. De aanbe-

velingen van Huitema zijn duidelijk: start elke dag met een (korte) klassikale instructie, waaraan ook de beste leerlingen meedoen ('Je hebt ze zo hard nodig'), om vervolgens een deel van de leerlingen de verlengde instructie te geven. Zorg voor een vaste structuur, die dagelijks terugkeert, en leg de nadruk op de basisstrategieën. Verder heeft Huitema de ervaring dat een sterke directie die 'er met de neus boven op zit' een belangrijke factor is bij het slagen van een 'rekenverbetertraject'. Huitema ondersteunt zijn verhaal met voorbeelden uit de praktijk, zoals het voorbeeld van een school met 80 procent 'nieuwe Nederlanders', die al jaren boven het landelijk gemiddelde scoort. Hij noemt ook wat zijns inziens geen effect heeft, namelijk het reflecteren aan het einde van de les. Een deel van de aanwezigen is het hiermee duidelijk niet eens, maar van het belang van een dagelijkse instructie in de rekenles is iedereen overtuigd.

In verschillende werkgroepen worden nieuwe oefenmogelijkheden verkend. De Rekentuin⁴ is daar een van. Het gaat hierbij om een webbased programma, waarin kinderen rekenvaardigheden kunnen oefenen en waarbij hun prestaties worden bijgehouden. Het is een adaptief programma, waarin kinderen steeds opdrachten krijgen die zijn afgestemd op hun niveau. Er zijn inmiddels acht domeinen ontwikkeld, voor de volgende gebieden: tellen, reeksen, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, mix en breuken. Kinderen krijgen vragen waarbij de kans dat ze correct kunnen antwoorden 75 procent is. Sharon Klinkenberg legt uit wat de wiskundige achtergronden zijn. 'De Rekentuin' is gebaseerd op de item-respons-theorie, hetzelfde model achter de Wiscat-toets. In de tuin staan stekjes die tot bloei komen als er veel geoefend wordt. Wordt er een tijdje niet geoefend, dan verdorren de planten. Van leerlingen die in 'De Rekentuin' oefenen, worden de gegevens geanonimiseerd opgeslagen en onderzocht. Het is de bedoeling om hieruit nieuwe wetenschappelijke inzichten te ontwikkelen, wat weer kan leiden tot verbetering van het onderwijs. Marthe Straatemeijer geeft aan op welke manier, aan de hand van 'De Rekentuin', onderzoek gedaan wordt naar de vaardigheid van leerlingen. Dat blijkt echter niet eenvoudig, omdat verschillende leerlingen verschillende opgaven maken en ook omdat er een leereffect in de toetsen zit. Er is onder andere een empirische leerlijn gemaakt op basis van de antwoorden van leerlingen. De toehoorders zijn vooral benieuwd naar de vraag of er ook strategiegebruik geoefend kan worden. Dat blijkt niet het geval te zijn: de leerlingen moeten de strategieën beheersen voordat ze gaan oefenen in 'De Rekentuin'.

In het project 'Handig, Verstandig en Effectief Rekenen' (Haver) is dat wel het geval. Hier is men expliciet op zoek naar manieren om, wat men noemt, leerlingen 'gedachtevol' te laten omgaan met rekensommen uit de

methode. Sommen uit de methode worden vaak ‘gedachteloos’ afgewerkt van boven naar beneden. Door de sommen niet in rijtjes te zetten, maar door elkaar heen, kijken kinderen bewuster naar de sommen en de relaties daartussen. De nabespreking in de les heeft een positieve invloed op de aanpak die kinderen vervolgens hanteren.



De deelnemers van de werkgroep worden uitgedaagd om op dit idee door te denken. Zij verzinnen vragen voor een nabespreking, zoals ‘Welke sommen hebben een uitkomst onder de honderd?’ of ‘Welke som heeft de kleinste uitkomst?’ Dit idee ligt in dezelfde sfeer als wat Smoors in zijn bijdrage noemde: het zou effectief kunnen zijn om met leerlingen strategieën of getallen te vergelijken.

Het ZOEFi-project ontwikkelt oefenstof om kinderen van vier tot veertien jaar dagelijks tien minuten met de hele groep te laten oefenen.⁵ Het gaat om basale oefeningen, waarbij begrip en inzicht, tempo en plezier centraal staan en die aanleiding zijn voor klassikale interactie.



Voor het ontwikkelteam is een belangrijke vraag welke kennis en vaardigheden aan de orde moeten komen. Voor de domeinen ‘getallen’ en ‘verhou-

dingen' lijkt die vraag makkelijker te beantwoorden dan voor de domeinen 'meten/meetkunde' en 'verbanden'. Aan de deelnemers van de werkgroep wordt daarom de vraag voorgelegd welke kennis en vaardigheden hiervoor aan de orde zouden moeten komen in ZOEFI. De ontwikkelaars nemen de antwoorden mee bij de ontwikkeling van het materiaal. Een andere belangrijke vraag is over welke kennis en vaardigheden de leraar moet beschikken om op deze wijze met zijn klas te kunnen oefenen en hoe de leraar daarbij ondersteund kan worden. De conclusie is dat de leraar over een groot deel van de pabo-kennisbasis moet beschikken om aan de slag te kunnen.

Dit schooljaar doen in een *pilotsetting* 23 groepen 8 mee met ZOEFI. Over het algemeen wordt enthousiast gereageerd, al lopen leraren wel tegen problemen aan. Een steeds terugkerende vraag is hoe je ervoor kunt zorgen dat zowel sterke als zwakke rekenaars aan hun trekken komen. Deze vraag wordt ook aan de deelnemers van de werkgroep voorgelegd. Met name het productief oefenen lijkt voor een grote groep leerlingen uitdaging te bevatten.

Julie Menne, bekend van het oefenprogramma 'Met sprongen vooruit' voor groep 3 en 4,⁶ presenteert op de conferentie haar nieuwe programma voor groep 1 en 2. Korte, speelse activiteiten, ondersteund door materiaal dat speciaal ontwikkeld is voor de drie domeinen van de kleuterwiskunde: tellen-en-rekenen, meetkunde en meten. Bij dit materiaal is tevens een professionaliseringstraject ontwikkeld.

Rekenen via de didactiek van verhalend ontwerpen wordt onder de aandacht gebracht door drie studenten van de Hogeschool Zuyd: Koen Tuinte, Michelle Hendrix en Roel Gielen. Een verhaal als leidraad van het onderwijs, daagt kinderen uit. In de context van het verhaal komen ze rekenproblemen tegen. De theorie wordt door de studenten ter plekke in praktijk gebracht door de deelnemers even in het 'verhaal' van de conferentie te laten rekenen: voor welk bedrag is er gedurende de conferentie koffie gedronken? Er wordt informatie bij verstrekt over soorten koffie, de prijs van vaatwassers, de prijs van energie per kwh en het loon in de horeca. De antwoorden lopen uiteen van € 1200,- tot € 9000,-. Hendrix noemt op wat ze heeft geconstateerd: gebruik van het metrieke stelsel, verhoudingstabellen, procenten en allerhande schattingen. 'En juist dat maakt een rijk rekenprobleem zo sterk, want er wordt in korte tijd gerekend met verschillende onderdelen van het rekenen.' Daarna bespreken de deelnemers in de werkgroep de haalbaarheid van verhalend ontwerpen. De doelen, waaraan gewerkt wordt, moeten goed gedocumenteerd worden, om geen doublures te krijgen in het vervolg. Je moet van tevoren nadenken wat de mogelijkheden en de beperkingen van het verhaal zijn en uitkijken dat je er geen

‘verhaaltjessommen’ van maakt. Ook moet je inschatten wanneer je de kinderen de vrijheid geeft en wanneer je ingrijpt. Maar als het goed is voorbereid, zal het effect je verrassen.

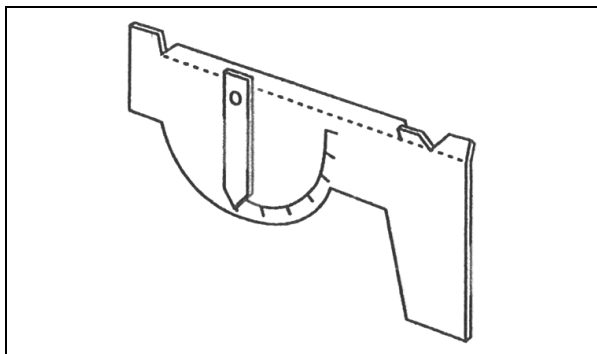
Vernieuwende didactische impulsen komen ook uit de raakvlakken tussen rekenen-wiskunde en natuur-techniek.



Leo Prinsen, Fokke Munk, Monica Wijers, Vincent Jonker en Frans van Galen schetsen een aantal mogelijkheden. Het gaat om meten en het oplossen problemen, construeren, representeren, contextgebruik, begripsvorming en gecijferdheid in combinatie met schattend en verhoudingsgewijs rekenen. De bezoekers van de werkgroep krijgen praktische voorbeelden te zien, zoals het redeneren over variabelen bij de ‘grafiekenmaker’, het maken van een schatting waar de haren dichter op elkaar zitten: in een borstel of op je hoofd? En het concreet ervaring opdoen met spiegelen van kleuters. Er wordt gezocht naar raakvlakken waarbij je tegelijk aan de twee vakgebieden werkt. Dus natuurkunde niet alleen als context en wiskunde niet alleen in de toegepaste vorm van rekenen. Men is benieuwd naar ervaringen in het opleidingsonderwijs op dit terrein.

Dat er op het gebied van techniek inspirerende activiteiten met kinderen gedaan kunnen worden, laat Harry Valkenier zien in de werkgroep ‘staafgrafieken met kleuters en de tangens in groep 6’. Valkenier geeft een *guided tour* door zijn website.⁷ Deze website bevat een leerlijn techniek voor het PO. Een ander belangrijk onderdeel van de website is de ‘Encyclopedie Doe’: een databank van links naar activiteiten voor het basisonderwijs op het gebied van techniek. Je kunt bijvoorbeeld klikken op de w van Wiskunde en daar instructiemateriaal *downloaden* over wiskunde geïnte-

greerd met techniek. De 'tangens in groep 6' is geïnspireerd op Valkeniers ervaringen in Afrika. Hij liet er kinderen raketten bouwen die hij vervolgens lanceerde. De kinderen konden meten hoe hoog de raket kwam, met de 'tangens': een hoogtemeter (fig.2). Als je op tien meter afstand van de lanceerplek van de raket gaat staan, en je richt de hoogtemeter naar de raket, dan kun je bij het wijzertje aflezen hoeveel graden de hoek is en op welke hoogte de raket dan is.



figuur 2

Vanuit het 'science'-onderwijs komt het idee om concepten van kinderen als uitgangspunt te nemen voor het leren. Jeanine van Maanen en Albert Oving van de IJsselgroep onderzoeken of deze werkwijze ook kansen biedt voor het reken-wiskundeonderwijs. De werkwijze is als volgt. Op een opdrachtkaart wordt er een onderzoeksprobleem voor leerlingen gepresenteerd, met daarbij vier verschillende plausibele antwoorden van vier kinderen, in de vorm 'ik denk ...', met daaraan de vraag 'wat denk jij?' toegevoegd. Kinderen kiezen dan op intuïtie een van de gepresenteerde antwoorden en gaan daarna aan het werk om het uit te zoeken. Het voordeel van de gegeven antwoorden is dat er in de groepjes leerlingen een gesprek ontstaat, waardoor het probleem van verschillende kanten belicht wordt. De voorbeelden voor natuuronderwijs zien er goed uit, maar voor rekenen-wiskunde is de vraag of dit wel echt anders is dan sommige opdrachten in de methode. Een voorbeeld van een dergelijk probleem is: hoeveel water spoel je per keer door het toilet? 'Ik denk 8 liter', 'Ik denk ongeveer 80 liter', 'Ik denk ongeveer 80 cl', 'Ik denk meer dan 8000 milliliter'. Interessant is dat hier antwoorden bij zitten die kinderen zelf niet gauw bedenken, waardoor ze worden aangezet tot het omrekenen van liters naar milliliters en centiliters. Van Maanen en Oving besluiten de werkgroep met de opmerking 'we zijn er nog niet uit, maar denken dat dit kan bijdragen aan actiever reken-wiskundeonderwijs.'

Een idee dat uit het natuuronderwijs komt is het ‘voorbeeldgestuurd onderwijs’⁸ van Elise Boltjes. Voorbeeldgestuurd onderwijs gaat uit van een inductieve denktrant. De leerling krijgt bij een nieuw probleem de hele uitwerking inclusief het antwoord gepresenteerd, waarmee wordt beoogd te voorkomen dat de leerling zich onzeker voelt. De leerling kan zich beter richten op het analyseren van de grote lijn van de oplossing. Door middel van een ‘verduidelijkingsdialoog’ vergelijkt de leerling de grote lijn van de oplossing van het nieuwe probleem met eerder opgedane ervaringen. Deze aanpak geeft leerlingen zelfvertrouwen om iets nieuws te willen leren. Een verrassend idee, waarvan de toehoorders zich afvragen of deze didactiek echt wel geschikt is om leerstof aan te leren, of dat het meer geschikt is om weggezakte oplossingswijzen op te frissen. Boltjes geeft aan dat haar eerste onderzoeksresultaten de haalbaarheid van haar idee ondersteunen.

Zwemles is vooral een zaak van ouders. De hoofdtaken van het primair onderwijs zijn rekenen en taal. Bij alles wat daar bovenop komt, moet je je afvragen of het op een school thuishoort.

(Marc Mathies, Algemene Vereniging voor Schoolleiders)

6 doorgaande leerlijnen

Het bevorderen van doorgaande leerlijnen staat al enige jaren op de agenda. Vanuit het MBO komen verontrustende berichten over te geringe rekenvaardigheid van leerlingen. Binnen het basisonderwijs wordt gewerkt aan een verheldering van de leerlijnen, mede in het perspectief van de referentieniveaus 1F en 1S. Vanuit het SBO klinkt evenwel een waarschuwing, dat je niet te eenvoudig over doorgaande leerlijnen moet denken. In dit verslag kijken we naar de doorgaande lijn van het primair naar het voortgezet onderwijs, in het licht van een inventarisatie van vakinhoudelijke onderwerpen, die beter op elkaar zouden kunnen worden afgestemd, en een nieuw opleidingsprogramma voor leraren voor de leeftijdscategorie van tien tot veertien jaar.

Het MBO zit min of meer achteraan in de rekenketen. In termen van de ‘Expertgroep Doorgaande Leerlijnen’ (commissie Meijerink, 2008)⁹: referentieniveau 2F voor MBO-niveau 2 en 3 en referentieniveau 3F voor MBO-niveau 4. Kees Corbet van het ROC Mondriaan is daar niet blij mee. Corbet is beleidsmedewerker en projectleider rekenen en heeft meegewerkt aan het ‘Raamwerk Rekenen Wiskunde’. Dit Raamwerk kwam in 2007 gereed en was afgestemd op het gehele MBO met inkleuring naar de diverse sectoren. Dat is dus heel iets anders dan de referentieniveaus van de ‘Expertgroep Doorgaande Leerlijnen’, die van ‘hogerhand’ ontwikkeld zijn om de

grote doorgaande lijnen voor taal en rekenen te beschrijven. Corbet is van mening dat de commissie Meijerink onvoldoende gebruik gemaakt heeft van het Raamwerk, dat vanuit het MBO zelf ontwikkeld is. Invoering van de referentieniveaus 2F en 3F zal veel problemen geven, voorziet Corbet. De rekenvaardigheid van docenten is beperkt en hun didactische kennis is zwaar verouderd. Bovendien staat er geen vak 'rekenen' in de lessentabel van het MBO en is de instroom van leerlingen uit het VMBO uitermate zwak. Over een jaar moet een toets voor 3F gereed zijn en wordt daar ervaring mee opgedaan. Menigeen zal nog achter zijn of haar oren krabben, als de resultaten bekend zijn, meent Corbet.

Voor het basisonderwijs worden bestaande leerlijnen, tussendoelen en de nieuwe referentieniveaus 1F en 1S van de commissie Meijerink met elkaar verbonden en digitaal toegankelijk gemaakt in het project 'Rekenlijn' van Fisme en SLO. De eerste voorbeelden voor getallen en verhoudingen zijn uitgewerkt voor de leeftijd van tien tot veertien jaar, dus met de nadruk op de overgang van primair naar voortgezet onderwijs. Elk voorbeeld toont vijf onderwerpen: de kern, een kernopgave, leerlingenwerk, achtergrond en gerelateerde items. Het geheel vormt een inhoudelijk en overzichtelijk pakket, maar het is meer een beschrijving dan een visualisering. Eerste ervaringen met basisschoolleraars lijken er op te duiden dat het materiaal voor hen nog niet voldoende toegankelijk is, terwijl vo-docenten heel positief zijn over de achtergrondinformatie. Sommige werkgroepbezoekers hadden graag meer onderscheid gezien tussen 1F en 1S. In een reactie zeggen de ontwikkelaars de balans tussen detaillering en overzicht te willen zoeken.

Dat leerlijnen voldoende gespecificeerd moeten zijn, volgt ook uit het betoog van Jean-Marie Kraemer (Cito). Hij richt zich op kwaliteitsverbetering in het speciaal basisonderwijs. Het sbo is een interessante schoolsoort, stelt Kraemer, omdat kinderen er laten zien wat er in het reguliere basisonderwijs niet goed gaat. De oplossingen van kinderen in het sbo komen overeen met die van de zwakste leerlingen in het reguliere basisonderwijs, grofweg 20 tot 25 procent van de basisschoolpopulatie. 'Wat doet het kind? En waarom staat dat niet in de methode?', vraagt Kraemer zich af. Met het project speciaal rekenen stelt hij vast dat de invoering van realistische methoden in het sbo niet zonder problemen is, omdat de niveauverschillen tussen leerlingen groot zijn. Kraemer toont werk van leerlingen bij de opgave: 'Vader heeft 36 foto's gemaakt. Er zijn 29 foto's gelukt. Hoeveel foto's zijn er niet gelukt?' Daar lijken veel meer niveaus te onderscheiden dan de bekende drie: informeel - semi-formeel - formeel. Want ook binnen het informele en binnen het schematische niveau zijn verschillende oplossingen, die geordend kunnen worden van 'omslachtig' tot 'verkort'. Vaak geven de oplossingen blijk van 'creatieve kracht', 'rekenkracht' en

‘uitbeeldkracht’ van de kinderen. Leraren moeten veel beter kijken naar oplossingen van leerlingen. ‘Wij willen het niveau te snel verhogen’, is de conclusie van Kraemer.

Nisa Figueiredo en Jean-Marie Kraemer gaan in een andere bijdrage verder in op de verfijning van de drie niveaus die we regelmatig tegenkomen: informeel, semi-formeel en formeel. Zij komen tot een trappenschema met negen niveaus van rekenvormen en acht daarmee corresponderende drempelinhouden. Bij oplossingen van kinderen bij een contextopgave als ‘vijfentwintig rijen van tweeëntwintig stoelen’, kan gelet worden op: ‘Hoe wordt de ordening in rijen getalsmatig geschematiseerd? Hoe worden de getallen bewerkt? Wat is de volgorde in mathematisering?’ Het idee erachter is dat leraren beter moeten kijken en luisteren naar kinderen om te achterhalen wat die doen en denken. Dit mag een vorm van ‘ontwikkelingsgericht diagnosticeren’ worden genoemd. Dan pas kunnen leraren kinderen helpen en hen op een hoger niveau brengen. Het gaat onder meer om de juiste afstemming van het wiskundig denken en de rekenvaardigheid. Als een leerling aantoon wiskundig te denken, maar de rekenvaardigheid die daarbij aansluit mist, dan is dit een teken dat het onderwijs niet goed aansluit bij het niveau van de leerling. De tijdens de conferentie aanwezige deskundigen vinden zo’n nauwkeurige analyse van oplossingen van leerlingen lastig. Enerzijds is de analyse van hoe een leerling gedacht heeft complex en men moet waken voor al te subjectieve interpretaties, anderzijds zal een nauwkeurige analyse de kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs zeker ten goede komen. Men vraagt zich af of een en ander wel haalbaar is en of we van leraren een analyse, zoals bedoeld, wel mogen verwachten.

Rekenen-wiskunde op de basisschool bereidt onder meer voor op het vervolgonderwijs. Carolien van Waveren en Joke Daemen (IVLOS, Universiteit Utrecht) vragen aandacht voor doorgaande leerlijnen van het basisonderwijs naar voortgezet onderwijs. Hoe lopen die leerlijnen eigenlijk door na de basisschool? Van Waveren en Daemen kaarten enkele onderwerpen aan, waarmee primair en voortgezet onderwijs beter op elkaar aan zouden kunnen sluiten.

Een betere aansluiting zou sterk bevorderd kunnen worden door leraren en docenten die zijn opgeleid voor onderwijs aan leerlingen in de leeftijd van tien tot veertien jaar. Het Ruud de Moor Centrum, ELWIER, Fisme, de Hogeschool Arnhem Nijmegen en de Hogeschool Windesheim ontwikkelen gezamenlijk de ‘Minor rekenen-wiskunde 10-14’.¹⁰ Een programma ligt al klaar. Zowel studenten van de tweedegraads lerarenopleiding als van de pabo kunnen eraan deelnemen. Het idee is dat pabo- en wiskundestudenten in koppels stages lopen in zowel de bovenbouw van de basis-

school als de onderbouw van het voortgezet onderwijs. Naast ‘actieonderzoek, visieontwikkeling en stage’ biedt het programma ‘vakinhoud’ en ‘ontwerpen van reken-wiskundeonderwijs rondom oefenen en zorg’.

Frank van Merwijk en Nathalie de Weerd geven voorbeelden van mogelijkheden tot wiskundige verdieping, die uit rekenproblemen kunnen voortkomen. Zoals de opdracht om bijvoorbeeld alle getallenparen (a,b) te zoeken waarvoor geldt dat $ab = a + b$. Vooralsnog blijken pabo-studenten niet veel belangstelling voor de ontwikkelde minor te hebben.

Basisonderwijs is meer dan taal en rekenen. Met die stelling ben ik het van harte eens. Kinderen moeten een brede basis krijgen. Die basis kunnen we maar één keer goed leggen.

(Marja van Bijsterveldt, staatsecretaris van OCW)

7 het perspectief van de leerling

Ook de behoeften van kinderen zelf komen aan bod. Met welke opdrachten kun je ze motiveren? Welke vragen stimuleren de ontwikkeling van talent? Het observeren van kinderen en met ze praten, is een essentieel onderdeel van goed reken-wiskundeonderwijs. En wat denken kinderen eigenlijk zelf van het reken-wiskundeonderwijs? Twee jonge onderzoekers vroegen het aan ze: er mag wel wat meer plezier en uitdaging komen!

Marlies van der Burg en Marianne Espeldoorn-Finke onderzochten wat leraren en leerlingen zelf van hun reken-wiskundeonderwijs vinden. Ruim vijfhonderd leraren en ruim vijfhonderd leerlingen vulden een digitale enquête in. De leraren zijn tevreden over hun eigen bekwaamheid voor rekenen. Ervaren leraren hebben weinig interesse in nascholing. Ze hebben wel behoefte aan meer formatie om daarmee kleinere klassen te formeren. Zij vragen ook om ondersteuning in de klas tijdens lessen in rekenen-wiskunde. Leerlingen waarderen het reken-wiskundeonderwijs met het rapportcijfer 7. Belangrijk vinden ze hulp te krijgen als ze daarom vragen, maar ook wensen zij een goede uitleg, genoeg tijd om de taken uit te werken, een sfeer in de klas om geconcentreerd te kunnen werken en ‘als ik er veel van leer’. Opvallend is dat de leerlingen vinden dat rekenopdrachten zelden of nooit moeilijk zijn en dat ze zich slechts ‘soms’ uitgedaagd voelen. Ook het plezier tijdens de reken-wiskundeles laat te wensen over. Leerlingen formuleren de volgende wensen voor de toekomst: meer rekenopdrachten met behulp van de rekenmachine, meer rekenspelletjes, meer praktische rekenopdrachten, de instructie van de leraar moet beter en duidelijker en de leraar moet meer hulp bieden, vooral aan zwakke rekenaars en hij moet bovendien enthousiast zijn. De onderzoekers con-

cluderen dat de leraar in zijn didactisch handelen systematischer werk kan maken van het motiveren van leerlingen, waarmee het plezier in het reken-wiskundeonderwijs positief beïnvloed wordt. Ontwikkelaars van methoden kunnen in het ontwikkelproces meningen en ideeën van leerlingen benutten bij het ontwerpen en samenstellen van leer- en werkboeken. Nader onderzoek naar de relatie tussen ondersteuning door de leraar en de mate waarin leerlingen de rekenopdrachten beleven en uitvoeren is gewenst, menen Van der Burg en Espeldoorn.

Ik heb wel een tip: Ik zou wel willen dat de rekenles wat leeft. Het moet niet te saai worden! (een leerling)

Natuurlijke differentiatie en de motivatie van leerlingen staan centraal in de plenaire lezing van Petra Scherer (Universiteit Bielefeld).



In het internationale onderzoeksproject 'Natural differentiation in mathematics' wordt onderzocht hoe in heterogene groepen aan wiskundige taken gewerkt kan worden. Men ontwikkelt wiskundige problemen, die leerlingen een dieper wiskundig inzicht en een hogere motivatie moeten opleveren. Leerlingen wordt bijvoorbeeld gevraagd getallenreeksen en getaldriehoeken te bedenken, waarin steeds drie getallen en de som van alle getalparen genoteerd worden. Deze opdrachten lokken uit tot actief oplossen van problemen, zoals we zien in het voorbeeld van een leerling John, die uitzoekt of het waar kan zijn dat er nooit oneven getallen aan de buitenkant komen en letters noteert voor 'even' en 'oneven' in plaats van te blij-

ven rekenen met concrete getallen. De resultaten van het project zijn bemoedigend. De kinderen voelen zich meer uitgedaagd dan in de gewone reken-wiskundeles en ontwikkelen voor problemen op een heel natuurlijke manier verschillende oplossingsstrategieën. Voor de leraar betekent dit dat hij zelf de wiskunde moet verkennen, moet anticiperen op oplossingen van leerlingen, leerlingwerk moet kunnen analyseren en groepsdiscussies moet kunnen leiden. In dit opzicht sluiten deze resultaten aan bij het werk dat Garssen tijdens de conferentie naar voren bracht.

De ontwikkeling van het talent van kinderen staat ook centraal in het project 'Talentenkracht', waarin het adagium geldt dat elk kind potentieel talentvol is.



De ontwikkeling van talent is te vergelijken met de ontwikkeling van planten in een tuin: zij groeien uit zichzelf, maar zijn ook sterk afhankelijk van de zorgen van de tuinder. Onderwijzers en onderzoekers moeten dan ook gezien worden als tuinders. Alleen met aandacht voor wat er met kinderen gebeurt en door voortdurend bij te sturen, kan de tuin tot volle bloei komen. In 'Talentenkracht' zijn onder begeleiding van Willem Uittenbogaard, Els Feijs, en Fokke Munk filmpjes gemaakt, waarin te zien is hoe jonge kinderen spelenderwijs situaties verkennen die worden aangeduid met 'bètataakjes'. De kinderen worden door het gebruikte materiaal en door de vragen van de interviewer aan het denken gezet. Wat is geschikt materiaal en wat zijn goede vragen?

Munk en Uittenbogaard laten in een werkgroep twee filmfragmenten zien. Het ene fragment toont een jonge kleuter die uitgedaagd wordt in een houten sjabloon zoveel mogelijk verschillende figuurtjes te maken met twee broeken, twee lijfjes en twee hoofdjes. Het tweede fragment toont een oudere kleuter die gezichtjes maakt met drie verschillende oogjes en drie verschillende mondjes. Bij de vraag van de onderzoeker naar 'een ander poppetje' gooit de eerste kleuter alle drie puzzelstukjes er steeds uit en

pakt dan weer de andere stukjes, en maakt zo steeds weer hetzelfde poppetje. De andere kleuter komt tot alle negen combinaties van ogen en mondes. Interessant is de vraag welke factor hier het meest bepalend is. Is het een kwestie van leeftijd: vijf jaar versus drie jaar? Of is 't het materiaal dat 't 'm doet: één sjabloon versus een hele tafel met meer dan voldoende ogen en monden, zodat de leerling ook meer keren hetzelfde gezichtje kan leggen, die ze daarna weer weghaalt? Of zijn het de vragen en de inbreng van de onderzoeker die de oudere kleuter naar een hoger niveau tillen? Er is een nascholingsmodule ontwikkeld, waarin leraren aan het denken worden gezet over hun onderwijs en over hun omgang met de kinderen. Dit met het oog op het ontwikkelen en stimuleren van het bètadenken en de talenten die, zo menen Uittenbogaard en Munk, alle kinderen bezitten.

'Wat kinderen ons vertellen' is de titel van een parallellezing door Belinda Terlouw, waarin zij vertelt over haar gesprekken met kinderen, leraren en toekomstige leraren. Daaruit spreekt compassie met de situatie in de basisschool, waar leraren door de bomen van de methode het bos veelal niet meer zien. Een veelheid aan suggesties en voorbeelden versluiert wat kinderen in de eigen klas willen en nodig hebben. Daar kun je zorgen over hebben, want zo komen opbrengstgericht onderwijs en ontwikkelingsgericht onderwijs op gespannen voet met elkaar te staan. Terlouw vraagt nadrukkelijk aandacht voor het laatste. Goed reken-wiskundeonderwijs voldoet naar haar mening aan enkele aspecten. Ze noemt: de leraar heeft zicht op zijn leerlingen en op hoe zij leren rekenen. De leraar heeft bovendien zicht op hoe kinderen rekenen. Zo kan hij inspelen op verschillen tussen leerlingen en kan hij doelgericht en diagnosticerend onderwijs geven. Leraren en studenten moeten verschillen tussen kinderen (leren) zien en interpreteren. Zelf maakt Terlouw in opleiding en nascholing gebruik van reflectieverslagen, verslagen van gesprekken en interviews. Zij doet dit om leraren vooral te leren kinderen te observeren.

In het project 'Ernstige reken-wiskundeproblemen en dyscalculie' (ERWD) pleiten Mieke van Groenestijn, Ceciel Borghouts en Christien Janssen voor denken in onderwijsbehoeften in plaats van in beperkingen. Om die onderwijsbehoeften voldoende in beeld te krijgen, ligt het accent op observeren, analyseren van werk en gesprekken met kinderen. Loopt de leerling vast in het informele of in het formele handelen? In de lijn van context naar bewerking, in de lijn van bewerking naar oplossing of in de lijn van oplossing naar context? De drie lijnen die hier genoemd worden, zijn af te beelden met een driehoek ofwel het 'drieslagmodel'. Op alle lijnen kan de leraar de leerling ondersteunen, maar in alle gevallen is de behoefte aan ondersteuning van de leerling anders. Het gaat hier om gebruik van leerlijnen,

rekendidactiek en organisatie tegelijk. Dit vraagt veel van leraren en IB'ers. Het project ERWD vormt een mooie aanleiding om deze integrale aanpak op scholen te bevorderen. Voor begeleidingsdiensten is het een schitterende kans om de samenwerking van leerlingbegeleiders en reken-wiskundeadviseurs te versterken. Het is voor alle partijen een verrijking!

8 de intrinsieke waarde van de wiskunde

In de zoektocht naar goed reken-wiskundeonderwijs mag een beschouwing van het vak zelf niet ontbreken. Wat vraagt het vak rekenen-wiskunde van de leraar, en van het lerende kind? In deze categorie valt ook het enthousiasme waarmee inleiders en toehoorders aan de werkgroepen bijdragen. Rekenen-wiskunde is gewoon een prachtig vak!

Uitgaande van simpele vraagstellingen uit de elementaire rekenkunde laat Aad Goddijn de schoonheid van de wiskunde zien. Uitgangspunt is het getal '1' waarop het hele rekenen berust. De natuurlijke ontwikkeling van ons getalsysteem is gebaseerd op het doortellen met de eenheid, een intuïtieve aanpak, die algemeen in het onderwijs wordt toegepast, maar die ook in de formele wiskunde door grote geleerden wordt omarmd. Er bestaan echter ook strikte formalisten, die menen dat zelfs 1 gedefinieerd moet worden. Goddijn geeft blijk van zijn geloof in de intuïtieve en aanschouwelijke aanpak, die voor het onderwijs zo krachtig werkt.

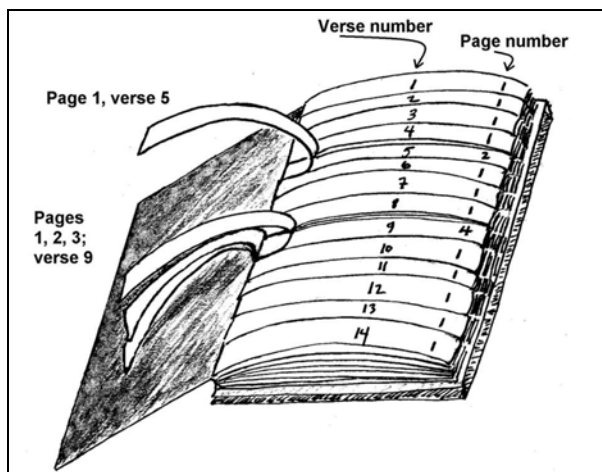


Door de optelling $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1 = 2010$ zo vorm te geven dat dit precies op een A4'tje past, ontstaat een prachtig vraagstuk. En dan de aan-

schouwelijke kracht van de getallenlijn, om te laten zien dat je tussen de veelvouden van 7 en die van 9 altijd een veelvoud van breuken kunt vinden dat daar precies tussen past. Met uitstapjes naar de muziek en de daarbij behorende ritmen levert Goddijn een schitterende presentatie.

Jeanine Daems en Ionica Smeets, bekend van de column 'Wiskundemeisjes' in de 'Volkskrant', vertellen een vermakelijk verhaal over wiskunde in de literatuur. Door schrijvers als Perec en Queneau is de wiskunde gebruikt om een verhaal te construeren. Zo is het boek 'Cent mille milliard de poèmes' ofwel 'honderdduizendmiljard gedichten' van Queneau een boek met tien sonnetten waarvan elke x -de regel op elke andere x -de regel rijmt, zodat je het boek in reepjes zou kunnen knippen en elke combinatie van eerste tot veertiende regel een nieuw sonnet zou vormen (fig.3).

Op deze manier staan in het boek duizendveertien sonnetten. De wiskunde kan ook het onderwerp zijn van een roman. Dat is het geval in boeken waarin de hoofdpersoon erg van wiskunde houdt, zoals in 'The curious incident of the dog in the night-time' van Mark Haddon. Het is een boek over een autistische jongen die probeert te ontdekken hoe de hond van zijn burens is doodgegaan. De wiskunde kan onderdeel uitmaken van het verhaal, zoals in 'Het mysterie van Pythagoras' van Jan Helmer, waar de stelling van Pythagoras aan de orde komt. Er wordt uit een museum een schilderij gestolen. Men vraagt zich af of het schilderij door het raam past. Ten slotte zijn er nog boeken waarin de hoofdpersoon vertelt hoe hij tot een wiskundig inzicht is gekomen. Zo schrijft de auteur Marcus du Sautoy in 'Het symmetriemonster' hoe hijzelf als elfjarige de principes van symmetrie leerde begrijpen.



figuur 3

In hun werkgroep presenteren Ans Veltman en Adri Treffers twee klassieke rekenproblemen, die voor leerlingen van de basisschool onvergetelijke ervaringen opleveren (Treffers, 2010). Het eerste probleem ontstond naar aanleiding van het filmpje 'The powers of ten' van Charles en Ray Eames (1977). In dit filmpje is een zonnende man in het park te zien van één bij één meter, genomen op een afstand van één meter. Vervolgens wordt, voortdurend met 'de macht tien', uitgezoomd tot '10 tot de macht 21', waarbij ver buiten het zonnestelsel wordt getreden. Kinderen uit een bovenbouwgroep krijgen de opdracht om de foto's uit het filmfragment met bijbehorende machten van 10 op volgorde te leggen, zodat ze greep krijgen op de toename. De kinderen stellen voor om zelf een 'machten van 10'-boek te maken. Bij de presentaties van de bladzijden uit dit zelfgemaakte boek blijkt dat kinderen inzicht hebben in de machten van 10. Een bijzonder onderwerp, dat verwondering en interesse wekt bij goede en zwakke leerlingen.

Het tweede rekenprobleem is een probleem uit de persoonlijke geschiedenis van Treffers: een waargebeurde dorpsrel waarbij de schoenmaker overhoop ligt met schoolmeester Versteeg over de vraag hoe kinderen (waaronder Treffers zelf) cijferend zouden moeten aftrekken.

$$\begin{array}{r} 6010 \\ 3847 - \\ \hline \end{array}$$

Deze aftrekopgave wordt uitgerekend door er de volgende optelsom van te maken:

$$\begin{array}{r} 6010 \\ 6152 + \\ \hline 12162 \end{array}$$

Dan wordt de '1' van de 10.000 toegevoegd aan de twee eenheden zodat de uitkomst 2163 wordt. Tot zover de aanpak van de schoenmaker. Schoolmeester Versteeg was het met een dergelijke aanpak niet eens. De onenigheid ging zelfs zo ver dat de schoolmeester de schoenmaker op niet al te vriendelijke wijze vroeg bij zijn leest te blijven. Maar de kinderen genoten van de magie van de getallen! Jammer genoeg was er onvoldoende tijd om dit probleem didactisch te doorgronden en in de huidige discussie te plaatsen.

De maatschappelijke discussie gaat feitelijk over doelstellingen. De notie van gecijferdheid maakt het mogelijk de kern van de discussie aan te duiden: richten we het onderwijs op het verwerven van gecijferdheid of op (traditionele) rekenvaardigheid?

(Ronald Keijzer, lector rekenen-wiskunde)

9 waardevolle doelen

Wie de vraag wil beantwoorden wat waardevol reken-wiskundeonderwijs is, kan niet om de vraag heen wat de doelen voor het reken-wiskundeonderwijs zijn. De 'voorbereidende' waarde krijgt momenteel veel aandacht: wat hebben mensen aan wiskundige kennis en vaardigheden nodig in hun verdere opleiding en beroep?

Jan van Maanen neemt ons mee terug naar het jaar 1621. Een document uit dat jaar, geschreven door Willem Claesz van Assendelft, laat zien wat belangrijke wiskunde was in de zeventiende eeuw. Van Assendelft besteedt aandacht aan de wijze waarop getallen worden uitgesproken, hoe men optelt en aftrekt, vermenigvuldigt en deelt. De deelnemers aan de parallellezing worden door Van Maanen uitgedaagd om berekeningen van Van Assendelft uit te pluizen en te herleiden. Van Assendelft laat ook berekeningen zien met geld. Dat is in zijn tijd geen sinecure omdat het inwisselen niet decimaal was, zoals tegenwoordig, maar, bijvoorbeeld, het pond verdeeld werd in twintig schellingen en elke schelling twaalf grooten waard was. Deze sprong in de tijd laat zien dat de waarde van het reken-wiskundeonderwijs mede wordt bepaald door wat in de maatschappij op een bepaald moment van belang is of geacht wordt.



Willem Vermeulen brengt de jaren tachtig in herinnering. Toen was er een ontwikkelgroep 'ZRM', een afkorting voor ZakRekenMachine, die materiaal, ideeën en een visie voor de rekenmachine in de basisschool ontwikkelde. De ontwikkelgroep heeft zich onder meer gebogen over de gevolgen die de introductie van de rekenmachine zou hebben voor de inhoud en de doelen van het rekenonderwijs, en voor de gevolgen voor de didactiek. Dit heeft ertoe geleid dat in de kerndoelen is aangegeven dat kinderen op school de rekenmachine met inzicht moeten leren gebruiken. Deze visie en het opnemen van de rekenmachine in de kerndoelen heeft tot gevolg gehad dat elke

moderne reken-wiskundemethode activiteiten bevat voor rekenen met de rekenmachine. Niettemin blijven veel leraren huiverig om dit leermiddel ten volle en vanaf de lagere groepen in hun onderwijs in te zetten. De opvatting dat kinderen door in de basisschool de rekenmachine te gebruiken, niet meer leren rekenen, is even hardnekkig als onjuist. Vermeulen pleit ervoor dat leerlingen zelf hun rekenmachine en de eigenaardigheden van de machine onderzoeken. Een rekenmachine kan de volgende antwoorden produceren: $4 \times 5 - 4 \times 5 = 80$ en $1 : 7 \times 7 = 0,9999997$. Door te onderzoeken hoe de rekenmachine rekent, kunnen kinderen hun inzicht in getallen en procedures verdiepen. Vermeulen is van mening dat er een herwaardering van de rekenmachine in het basisonderwijs moet komen, waarbij de rekenmachine beter geïntegreerd wordt in het curriculum van de basisschool dan nu het geval is.

Ons rekenen is door en door ziek: het laboreert aan een aantal kwaaltjes en één grote kwaal: mechanisme, machinalisme, gedachteloosheid.
(een onderwijsinspecteur in 1936).

Wat voor type wiskunde zou onderwezen moeten worden in onze veranderende maatschappij? Deze vraag wordt gesteld in het project 'de toekomst telt' van de 'Stichting Ververs Foundation'. Koeno Gravemeijer en Anita Lek zijn niet zozeer op zoek naar het *hòe* (hoe onderwijzen we vooraf vastgestelde inhouden?) maar naar het *wàt* (wat vormt de inhoud van het curriculum?). Zij vragen zich af wat de wenselijke doelen voor reken-wiskundeonderwijs in het primair en in het voortgezet onderwijs zijn, tegen het licht van de toekomstige maatschappij. Zij onderzoeken wat vervolgstudies vragen, wat mensen nodig hebben in hun beroep, alsmede wat de burger aan wiskunde nodig heeft. Tegenwoordig veranderen mensen vaker van werk. Gedurende zijn leven komt de mens steeds voor nieuwe uitdagingen te staan. Omdat routinematige werkzaamheden in toenemende mate overgenomen zullen worden door computers of door mensen in landen waar de lonen lager liggen, zullen vooral beroepen op MBO-niveau gaan veranderen of verdwijnen. In de uitoefening van een beroep en in het dagelijkse leven zal de nadruk komen te liggen op probleemherkenning, modelleren, denken in termen van variabelen, visualiseren, in het doorzien en gebruiken van doel-middel relaties, in het meten, in het leggen van relaties en verbanden. Het gaat om analytisch denken en het oplossen van problemen, waarbij grafieken en tabellen lezen en interpreteren een belangrijke vaardigheid is. Dit zouden dan ook doelen moeten zijn van het reken-wiskundeonderwijs voor de toekomst.

De toehoorders kunnen niet anders dan instemmen met dit betoog. Het is ook niet helemaal nieuw, want dergelijke ideeën zijn al vaker naar voren gebracht 'Waarom is het niet meer die kant opgegaan?', vraagt men zich

af. Genoemd wordt dat er politiek beter gelobbyd moet worden en dat er veel meer nascholing nodig is. Misschien te beginnen in het MBO, bij leerlingen van veertien tot vijftien jaar, omdat die meer aankunnen? De verwachting is dat er in het basisonderwijs minder hoeft te veranderen.

In haar werkgroep 'Cijferend rekenen. Hoe nu verder?', laat Atie Haverhals de deelnemers kennis nemen van haar onderzoek naar het cijferen. Vanwege haar warme belangstelling voor de traditionele cijferalgoritmen is haar centrale vraag hoe het nu verder moet met cijferend rekenen. In de theoretische inleiding schetst Haverhals kenmerken van realistisch cijferend rekenen en traditioneel cijferend rekenen, met daarbij de doorgaans voor beide methoden genoemde voor- en nadelen. Vervolgens krijgen de deelnemers een vragenlijst voorgelegd, die Haverhals ook heeft afgenomen bij leraren uit de bovenbouw van het basisonderwijs. Ze geeft daarvan enige resultaten weer. In het algemeen blijken leraren in de uitvoering van hun onderwijs dichter bij de visie van het realistische reken-wiskundeonderwijs te komen, dan in hun denken over het rekenonderwijs. Opmerkelijke uitkomsten van haar onderzoek zijn dat 50 procent van de leraren de uitkomsten van een cijfersom niet eerst laat schatten en dat 40 procent van de leraren huiswerk meegeeft om het cijferen te oefenen. Het cijferen roept veel discussie op. Dat was in deze werkgroep niet anders. Lang is gediscussieerd over de vraag of het kolomsgewijs rekenen een doel op zich is, of eerder een tussenvorm op weg naar het traditionele algoritme. In het laatste geval is er geen tegenstelling tussen kolomsgewijs en traditioneel cijferen, maar slechts een verschil in aanpak. Een van de deelnemers brengt naar voren dat studenten van een Technische Universiteit die de staartdeling niet kenden, onder de indruk waren van de eenvoud en schoonheid ervan, toen ze voor het delen van polynomen het algoritme kregen aangereikt. In de slotdiscussie over de vraag over veranderingen of interventies die tot betere leerlingresultaten moeten leiden, blijken de aanwezigen niet aan cijferen te denken, maar eerder aan extra aandacht en meer uitdagingen voor de betere leerlingen.

De ideeën over realistisch reken-wiskundeonderwijs zijn in de loop der tijd, zowel van binnenuit als van buitenaf, voortdurend bijgesteld en dat moet zo blijven, willen we het rekenen van Nederland op peil houden.

(Marja van den Heuvel-Panhuizen, hoogleraar reken-wiskundeonderwijs)

10 terugblikken en vooruitzien

In deze conferentie komen verschillende aspecten van reken-wiskundeonderwijs aan bod, die vanuit heel diverse invalshoeken worden benaderd:

de leraar, de didactiek, doorgaande leerlijnen, de leerling, de wiskunde en de doelen van dit vak voor de toekomst. Onderzoek wijst uit dat het vooral de leraar zelf is, die de reken-wiskundeles maakt of breekt. Steeds meer mensen raken daarvan overtuigd. De gemiddelde leraar krijgt het rapportcijfer 7 van zijn leerlingen: hij kan redelijk tot goed uitleggen en is behulpzaam, maar er is ook wat op hem aan te merken. Hij daagt de leerlingen te weinig uit. Vooral het oefenen kan uitdagender en effectiever. Steeds meer wordt duidelijk hoeveel vakkennis de leraar alleen daarvoor al nodig heeft. Dit is geheel in lijn met de ontwikkeling van en de belangstelling voor de kennisbasis rekenen-wiskunde. Die kennisbasis wordt geïmplementeerd op de opleidingen. De vraag dient zich echter aan hoe het eigenlijk met de vakkennis van zittende leraren gesteld is. Deze vraag komt niet vanuit de leraren zelf, want de meeste van hen voelen zich over het algemeen gesproken voldoende bekwaam voor het geven van reken-wiskundeonderwijs. Dit gegeven correspondeert met de verzuchting van onderwijsadviseurs en opleiders, dat ze leraren moeilijk of niet kunnen motiveren voor nascholing op het gebied van rekenen-wiskunde. Nascholing is dan ook het eerste thema in het gesprek met de staatssecretaris.

Staatssecretaris Marja van Bijsterveldt is uitgenodigd voor een ontbijtsessie op de laatste dag van de conferentie en treft als gesprekspartners opleider Vincent Klabbers, basisschoolleraar Jacqueline van de Ven, student Koen Tuinte en onderwijsadviseur Alette Lanting. Het panel stelt aan de orde dat er meer nascholing nodig is, ook al blijkt dat niet uit de animo voor nascholingscursussen. Het vak rekenen-wiskunde is te complex om het op de pabo in vier jaar te leren. In het basisonderwijs wordt momenteel veel in niveaugroepen gewerkt. Voor rekenen-wiskunde is dat niet optimaal, omdat de goede rekenaars snel individueel aan het werk zijn en de kinderen zo niet van elkaar kunnen leren. Nascholing zou welkom zijn, maar leraren hebben er na schooltijd weinig energie voor over. De staatssecretaris reageert dat dit punt in de CAO voor onderwijzend personeel anders geregeld is en dat besturen meer ruimte voor nascholing moeten maken. Het probleem zou zitten in onvoldoende vervanging.



Dit gespreksonderwerp loopt soepel over in een ander, over de behoefte aan vakspecialisten en over de kwaliteit van afgestudeerde pabo-studenten. Het panel is het erover eens dat leraren basisonderwijs voor rekenen-wiskunde in de volle breedte deskundig moeten zijn. Het actief gebruiken van woorden als 'een half' in de onderbouw vormt bijvoorbeeld al een voorbereiding op breuken in de bovenbouw. Als een hoge kwaliteit van afgestudeerden een doel van de opleidingen is, moet je ook kijken naar het niveau van instromende studenten.

De aanwezigen maken zich zorgen over het niveau van sommige studenten met een MBO-achtergrond. Onderzoek wijst bijvoorbeeld uit dat MBO'ers moeite hebben om vakdidactische theorie in hun praktijk te gebruiken (Oonk, 2009). Van Bijsterveldt deelt deze zorg, maar wijst ook op het tekortschietende niveau van andere studenten, die met een havo-achtergrond. Zij wil nagaan of de kwalificatieprofielen van het MBO verzaamd moeten worden. Pabo's en MBO's zouden in dit opzicht meer moeten samenwerken. Dan vraagt Van Bijsterveldt naar reacties over de kennisbasis en de toetsing daarvan. Uit de zaal spreekt een van de conferentiegangers: 'We mogen blij zijn met de kennisbasis en met centrale toetsing.' Maar hij geeft als advies de betekenis ervan te relativeren. 'Met het toetsen van de kennisbasis ben je nog niet klaar.'

De kennisbasis is op de opleidingen nog lang niet ingevoerd en de toetsing is ook nog niet gerealiseerd. Doorgaande leerlijnen zijn ook nog niet geïmplementeerd. Wanneer we het reken-wiskundeonderwijs in de bovenbouw van de basisschool en de onderbouw van het voortgezet onderwijs naast elkaar zetten, zien we hele grote verschillen. In het MBO, achter aan de keten, ziet men de toetsing van niveau 3F met angst en beven tegemoet, want de docenten zijn niet gewend hun leerlingen te begeleiden in rekenvaardigheid.

Dat roept nogmaals de vraag op welk reken-wiskundeonderwijs het meest waardevol moet worden geacht voor de toekomst. Moet er meer aandacht komen voor het oplossen van probleem en voor het modelleren komen? Moet er meer worden gedacht in termen van variabelen, visualiseren, doelmiddel relaties doorzien en gebruiken, van meten, van het leggen van relaties, het analytisch denken, grafieken en tabellen lezen en interpreteren? Daar ligt een belangrijke taak voor ontwikkelaars en methodeschrijvers, want methoden worden door veel leraren redelijk strikt aangehouden, maar we weten ook hoe lang het duurt voor nieuwe ideeën de onderwijspraktijk bereiken. Neem alleen al de rekenmachine, die nog steeds nauwelijks geïntegreerd is in het curriculum en juist een bijdrage zou kunnen leveren aan modern reken-wiskundeonderwijs. Dat is onderwijs waarin kinderen leren onderzoek te doen naar getallen en procedures. Vernieu-

wende impulsen in de richting van onderzoekend leren komen momenteel vanuit het natuur- en techniekonderwijs, dat op zijn beurt hoopt mee te liften op de huidige belangstelling voor het vak rekenen-wiskunde. Belangrijk wordt het idee geacht om concepten van kinderen als uitgangspunt voor het onderwijs in rekenen-wiskunde of in natuur en techniek te kiezen.

Ook op deze conferentie stond de vraag centraal hoe er een slag geslagen kan worden om het reken-wiskundeonderwijs te verbeteren. Er kwamen ideeën naar voren om de opleiding zwaarder te maken, het niveau van de instroom te verhogen, het onderwijs meer op het oplossen van problemen te richten en meer uitdaging in het onderwijs na te streven. Tijdens de conferentie klonk vooral door dat het belangrijk is deze zaken in samenhang aan te pakken.

noten

- 1 Dit verslag is eveneens verschenen in 'Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk', 29(2).
- 2 Voor meer informatie zie: www.watwerktopschool.nl
- 3 Voor meer informatie zie: www.montessori.nl
- 4 Voor meer informatie zie: www.rekentuin.nl
- 5 Voor meer informatie zie: www.fi.uu.nl/zoefi
- 6 Voor meer informatie zie: www.menne-instituut.nl
- 7 Voor meer informatie zie: www.ontdeklek.nl
- 8 Voor meer informatie zie: www.voorbeeldgestuurdonderwijs.nl
- 9 Voor meer informatie zie: www.taalenrekenen.nl
- 10 Nadere informatie is te vinden in een folder van het Ruud de Moor Centrum (rdm.ou.nl).

literatuur

- Boltjes, E.G. (2009). Lesgeven vanuit de onzekerheid. Voorbeeldgestuurde natuurkunde werkt leuker en beter. *Nvox. Tijdschrift voor natuurwetenschap op school*, 34(7), 304-306.
- Hill, H.C., S.G. Schilling & D.L. Ball (2004). Developing Measures of Teachers' Mathematics Knowledge for Teaching. *The Elementary School Journal* 105(1), 11-30.
- Buijs, K. (2010). Beter met Rekenen - werken aan kwaliteitsverbetering van reken-wiskundeonderwijs. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 29(2), 39-49.
- Burg, M. van der & M. Espeldoorn (2010). Beeld van het rekenonderwijs. Rekenonderwijs door de ogen van leerkrachten en leerlingen. In: M. van Zanten (ed.). *Waardevol reken-wiskundeonderwijs - kenmerken van kwaliteit*. Utrecht: Freudenthal Instituut, 85-101.
- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen taal en rekenen (2008). *Over de drempels met rekenen. Consolideren, onderhouden, gebruiken en verdiepen*. Enschede: Ex-

- pertgroep Doorlopende Leerlijnen.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in Reform mathematics education. In: Douglas H. Clements & Julie Sarama. *Hypothetical Learning Trajectories: A Special Issue of Mathematical Thinking and Learning*. Routledge, 105-128.
- Haddon, M. (2007). *The curious incident of the dog in the night-time*. Amsterdam: Contact.
- Helmer, J. (2007). *Het mysterie van Pythagoras*. Pythagoras project.
- Imbo, I. & J.A. LeFevre (2009). Cultural differences in complex addition: Efficient Chinese versus adaptive Belgians and Canadians. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 35, 1465-1476.
- Keijzer, R. & J. ter Heege (2010). Verder zoeken naar de kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs - interview met de voorzitter van de KNAW-commissie. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk* 29(1), 28-31.
- KNAW-Commissie rekenonderwijs basisschool (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool, analyse en sleutels tot verbetering*. (gratis te bestellen of als pdf te downloaden via de website van de KNAW bij 'publicaties'.)
- Marzano, R.J. (2007). *Wat werkt op school?* Middelburg: Bazalt.
- Oonk, W., M. van Zanten & R. Keijzer (2007). Gecijferdheid, vier eeuwen ontwikkeling. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk* 26(3), 3-18.
- Oonk, W. (2009). *Theory-Enriched Practical Knowledge in Mathematics Teacher Education*. Leiden: Iclon (proefschrift).
- Sautoy, M. du (2009). *Het symmetriemonster*. Amsterdam: Nieuwezijds b.v.
- Treffers, A. (2010). *Het reken theater*. Amsterdam: Atlas.
- Steenbrugge, H. van, M. Valcke & A. Desoete (2010). Mathematics learning difficulties in primary education: teachers' professional knowledge and the use of commercially available learning packages. *Educational Studies* 36(1), 59-71.
- Vermeulen, W. (2010). Nog steeds bang voor de zakrekenmachine op de basisschool. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk* 29(1), 59-67.
- Zanten, M. van, F. Barth, J. Faarts, A. van Gool & R. Keijzer (2009). *Kennisbasis Rekenen-Wiskunde voor de lerarenopleiding basisonderwijs*. Den Haag: HBO-raad.

Medewerk(st)ers en organisatoren

- B. van Amerom
 H. Amse
 B. Bank
 J. van den Bergh
 M. Bogaarts
 E. Boltjes
 K. Boon
 C. Borghouts
 N. Boswinkel
 M. van der Burg
 K. Buijs
 K. Corbet
 J. Corvers
 J. Daemen
 J. Daems
 M. Dolk
 S. Eerhart
 M. Espeldoorn
 J. Faarts
 N. Figueiredo
 D. Franken
 F. van Galen
 F. Garssen
 R. Gielen
 A. Goddijn
 A. van Gool
 K. Gravemeijer
 M. van Groenestijn
 J. Haan
 A. Haverhals
 M. Hendrix
 B. Heijman
 S. Huitema
 I. Imbo
 C. Janssen
 V. Jonker
 R. Keijzer
 V. Klabbers
 S. Klinkenberg
 H. van der Kooij
 M. Kool
 J.M. Kraemer
 J. Kruys
 A. Lek
 D. Lefay
 J.K. Lenstra
 H. Littell
 J. van Maanen
 J. van Maanen
 H. van der Maas
 Fisme, Universiteit Utrecht
 Pabo Almere
 Fisme, Universiteit Utrecht
 Avans Hs. Breda
 RPCZ Bazalt, Vlissingen
 Noordelijke Hs Leeuwarden
 Lefay Magic, Den Haag
 Borghouts Rekenadvies
 SLO, Enschede
 Buro Spring, Utrecht
 SLO, Enschede
 ROC Mondriaan
 Fisme, Universiteit Utrecht
 IVLOS, Universiteit Utrecht
 Wiskundemeisjes, Universiteit Leiden
 Fisme, Universiteit Utrecht
 Fisme, Universiteit Utrecht
 Expertis Onderwijsadviseurs, Hengelo
 Hs Zuyd, Maastricht
 Fisme, Universiteit Utrecht
 Rijksuniversiteit Groningen
 Fisme, Universiteit Utrecht
 Stenden Hs. pabo De Eekhorst, Assen
 Hs Zuyd, Maastricht
 Fisme, Universiteit Utrecht
 Panama/Fisme, Universiteit Utrecht
 Technische Universiteit, Eindhoven
 Projectgroep ERWD
 Kennisbases voor de pabo
 BS De Uyleborch, Almkerk
 Hs Zuyd, Maastricht
 Panama/Fisme, Universiteit Utrecht
 Freelance onderwijsontwikkelaar
 Universiteit Gent, vakgroep Experimentele Psychologie, België
 Projectgroep ERWD
 Fisme, Universiteit Utrecht
 Fisme, Universiteit Utrecht/Hs IPABO Amsterdam/Alkmaar
 Hs De Kempel, Helmond
 Universiteit van Amsterdam
 Fisme, Universiteit Utrecht
 Fisme, Universiteit Utrecht/Hs Domstad, Utrecht
 Cito, Arnhem
 CED Groep, Rotterdam
 SLO, Enschede
 Lefay Magic, Den Haag
 CWI/KNAW, Amsterdam
 CED Groep, Rotterdam
 Fisme, Universiteit Utrecht
 IJsselgroep, Apeldoorn
 Universiteit van Amsterdam

J. Menne	Menne Instituut, Baarn
F. van Merwijk	Hs Arnhem en Nijmegen
I. Meijers	Hs Helicon, Zeist
F. Munk	Fisme, Universiteit Utrecht
V. van der Noort	dept. Wiskunde, Universiteit Utrecht/Inst. Archimedes, Hs Utrecht
A. Noteboom	SLO, Enschede
S. van Os	SLO, Enschede
A. Oving	IJsselgroep, Apeldoorn
H. Paus	SLO, Enschede
Tj. Plomp	Universiteit Twente
L. Prinsen	Hs IPABO Amsterdam/Alkmaar
P. Scherer	Universität Bielefeld, Duitsland
A. te Selle	Stenden Hs, Pabo Meppel
I. Smeets	Wiskundemeisjes, Universiteit Leiden
M. Smoors	DOBA/SOM Onderwijsadviseurs, Eindhoven
H. Sormani	Hs Arnhem en Nijmegen
M. Straatemeier	Universiteit van Amsterdam
B. Terlouw	Katholieke Pabo Zwolle/Fisme, Universiteit Utrecht
A. Treffers	Fisme, Universiteit Utrecht
K. Tuinte	Hs Zuyd, Maastricht
W. Uittenbogaard	Fisme, Universiteit Utrecht
M. Uwland	Panama/Fisme, Universiteit Utrecht
H. Van Steenbrugge	Universiteit Gent, vakgroep Onderwijskunde, België
H. Valkenier	Stichting Ontdekplek/Hs InHolland, pabo Alkmaar/obs De Dolfijn
J. Vedder	NVORWO
A. Veltman	Theo Thijssenacademie, Utrecht
K. Verbeeck	KPC groep, Den Bosch
W. Vermeulen	ThiemeMeulenhoff, Utrecht
M. Verschoor	Kenniskring Hs Utrecht/Zwijzen Tilburg
B. Versteeg	Giralís, 's-Hertogenbosch
M. Verschuren	KPC groep, Den Bosch
C. van Waveren Hogervorst	IVLOS, Universiteit Utrecht
N. van de Weerd	Hs Windesheim, Zwolle
E. Westra	CED Groep, Rotterdam
E. Woltjer	Pabo Almere
M. Wijers	Fisme, Universiteit Utrecht
M. van der Wulp	
M. Wijnia	Fisme, Universiteit Utrecht
M. van Zanten	Panama/Fisme, Universiteit Utrecht/Hs Edith Stein, Hengelo