

Opbrengstgericht onderwijs - rekenen! – wiskunde? -

M. van Zanten (red.)



Panama
Fisme, Universiteit Utrecht

Inhoud

Woord vooraf	7
What is Arithmetic? <i>J. Mason</i>	11
Balans van het reken-wiskundeonderwijs halverwege de basisschool 5 <i>M. Hop</i>	25
Wat kunnen we leren van drie jaar rekenverbetertrajecten? <i>G. Gelderblom</i>	35
Opbrengstgericht werken als taak van de lerarenopleiding basisonderwijs <i>R. Keijzer & J. van der Linden</i>	51
Verschillen tussen kinderen in de ontwikkeling van het leren vermenigvuldigen <i>S. van der Ven & E. Kroesbergen</i>	67
Opbrengstgericht werken volgens de PARWO-visie <i>D. van der Straaten & F. Moerlands</i>	81
Het Focus-project <i>M. van Geel & B. Teunis</i>	101
Rekenen in beeld <i>K. Hoogland</i>	111
Op weg naar opbrengstveroorzakend onderwijs? <i>D. Janson</i>	119
RTI: een opbrengstgericht indicatie-instrument <i>L. Jansen, M. Schölvink & H. Logtenberg</i>	127
Oplossingsstrategieën voor deel- en vermenigvuldigopgaven in groep 8 <i>M.F. Fagginger Auer & F. Scheltens</i>	137
Aanpakgedrag bij complexe rekencontexten <i>M. Verschoor</i>	151

Feedback in de rekenles	165
<i>M. Verschuren</i>	
Opbrengstgericht onderwijs - rekenen! – wiskunde? -	179
<i>J. van der Linden</i>	
Medewerk(st)ers en organisatoren	205

Woord vooraf

De term ‘opbrengstgericht werken’ is in korte tijd in het Nederlandse onderwijs in zwang geraakt. Overal waar gewerkt wordt aan verbetering van het reken-wiskundeonderwijs komt men de term tegen, van rekenverbetertraject tot opleiding, van ministerie tot inspectie.

Nu is werken aan opbrengsten in het onderwijs niet nieuw. Sterker, onderwijs kan per definitie niet anders zijn dan opbrengstgericht. Onderwijs is immers geen vrijblijvende bezigheid, maar is gericht op leren en ontwikkeling. Leeropbrengsten en het stimuleren van ontwikkelingsprocessen zijn altijd al van belang geweest bij het realiseren van (reken-wiskunde)onderwijs.

Toch lijkt het er op dat de actuele aandacht voor opbrengsten wel degelijk verschil maakt. Leerkrachten en scholen werken met hernieuwd elan aan doelgericht reken-wiskundeonderwijs en het monitoren van vorderingen van hun leerlingen. Metingen op meso- en macroniveau laten verhoging van opbrengsten zien. De overheid vraagt ook hogere opbrengsten, getuige het invoeren van het Referentiekader en centrale toetsen voor rekenen.

Echter, als de aandacht voor toetsen en metingen ten koste gaat van de aandacht voor het vormgeven van onderwijs, raakt de balans verstoord. Dan treden spanningsvelden op als: verwordt opbrengstgericht werken niet tot toetsgericht onderwijs of: blijft er voldoende aandacht voor minder eenvoudig toetsbare aandachtsgebieden van reken-wiskundeonderwijs?

Op de 30^e Panama-conferentie stonden we stil bij de vraag wat en hoe opbrengstgericht werken bij kan dragen aan verdere ontwikkeling en verbetering van reken-wiskundeonderwijs. Er werd dan ook nadrukkelijk van opbrengstgericht *onderwijs* gesproken. In de voorliggende conferentiebundel hebben verschillende inleiders hun bijdrage aan de conferentie uitgewerkt tot een artikel. Tezamen geven de artikelen een goed beeld van de opbrengsten van deze 30^e conferentie.

Dat rekenen zich niet beperkt tot eenvoudig toetsbare sommetjes wordt duidelijk in het openingsartikel van John Mason. Hij benadert rekenen als *the study of actions on numbers with numbers*. Mason laat zien dat redeneren de kern is van rekenen, en dat uitrekenen daar een bijproduct van is. Hij illustreert dit met voorbeelden van rekenopgaven en de wijze van omgaan met die opgaven.

Opbrengsten van onderwijs staan centraal in de bijdragen van Michel Hop en Gert Gelderblom. Hop geeft in zijn bijdrage een samenvatting van de meest recente resultaten van de ‘Periodieke Peiling van het Onderwijs’ (PPON): de vijfde Balans van het reken-wiskundeonderwijs halverwege de

basisschool. Gelderblom blikt in zijn bijdrage terug op drie jaar ervaring met rekenverbetertrajecten in Nederland. Zo'n zevenhonderd scholen werk(t)en aan het versterken van hun rekenonderwijs. Hij verhaalt over de opbrengsten ervan, waaronder wat er is geleerd van de ervaringen in de vorm van lessen voor de toekomst.

Het realiseren van opbrengstgericht reken-wiskundeonderwijs is onderwerp van de bijdragen van Ronald Keijzer, Josje van der Linden, Dolf Janson, Dirk van der Straaten en Frans Moerlands. Bij hen allen komt het belang van een onderzoekende houding naar voren.

Keijzer en Van der Linden doen verslag van hun zoektocht naar een manier om opbrengstgericht werken en een onderzoeksmatige aanpak met elkaar te verbinden. Zij gaan daarbij in op zowel de verbetering van de onderwijspraktijk als op het voorbereiden van aanstaande leerkrachten op die onderwijspraktijk. Ook Janson wijst op het belang van een onderzoekende houding bij rekenen-wiskunde, waarbij hij erop wijst dat dit zowel geldt voor de leerkracht als voor de leerling. Van der Straaten en Moerlands laten zien hoe zo'n onderzoekende houding bij leerlingen eruit kan zien en wat dit vraagt van de leerkracht. Zij verhalen van een *try-out* omtrent leren vermenigvuldigen, waarbij nadrukkelijk aandacht is voor de verschillende leerrollen, waaronder die van onderzoeker, die leerlingen in de loop van het leerproces aannemen.

De bewerking vermenigvuldigen staat ook centraal in de artikelen van Sanne van der Ven, Evelyn Kroesbergen, Marije Fagginger Auer en Floor Scheltens. Aan de hand van de ontwikkeling in strategiegebruik maken Van der Ven en Kroesbergen verschillen zichtbaar tussen goede en zwakke rekenaars. Fagginger Auer en Scheltens gaan in hun artikel in op de relatie tussen gehanteerde strategie en de goedscore.

Kees Hoogland en Marike Verschoor gaan in op kenmerken van contexten. In het kader van toetsen van opbrengsten, onderzocht Hoogland in hoe verre contexten met taal en contexten met beeld verschil maken. Verschoor schrijft over de ontwikkeling van materiaal waarbij het gaat om complexe rekenproblemen in *real-life* contexten. Zij gaat daarbij in op het aanpakgedrag bij zulke problemen aan de hand van het drieslagmodel.

Ten slotte zijn er nog drie artikelen die handelen over interactie tussen leerkracht en leerlingen. Marieke van Geel en Bernard Teunis gaan in op het Focus-project. In dit project worden leerkrachten geschoold in opbrengstgericht werken op basis van prestatiefeedback. De kerncomponenten van het project zijn het vaststellen van onderwijsbehoeften, het stellen van doelen en stimuleren van doelgericht handelen en het afstemmen van het onderwijs door het aanpassen van de instructiebenadering. Onderwijsbehoeften staan ook centraal in de bijdrage van Leanne Jansen, Machteld Schölvinck en Henk Logtenberg. Zij geven een doorkijkje in 'Res-

ponsiveness to Intervention'. Deze methodiek laat zien in hoeverre leerlingen profiteren van het onderwijsaanbod en het leerkrachten helpt bij het leren omgaan met verschillen. Maaïke Verschuren tenslotte, gaat nader in op feedback in de rekenles.

De bundel besluit met het verslag van de 30^e conferentie waaraan, geheel in stijl, is bijgedragen door ruim dertig conferentiedeelnemers.

Deze conferentiebundel laat zien dat het Panama-netwerk weer een rijke oogst heeft opgeleverd. Want zoals gebruikelijk was ook deze 30^e Panama-conferentie niet mogelijk geweest zonder de belangeloze bijdragen en medewerking van vele collega's. Hetzelfde geldt voor het ontstaan van de voorliggende bundel. Bij dezen een woord van dank aan al diegenen die hieraan een bijdrage hebben geleverd.

Marc van Zanten
Panama

What is Arithmetic?

J. Mason

Open University, Milton Keynes Buckinghamshire, UK

1 introduction

What arithmetic is or is about, depends on who asks and why they are asking!

What do students think arithmetic is?

This is an empirical question to be answered by asking them, though they may try to guess what you expect or want them to say, rather than revealing their idiosyncratic concept images (Tall & Vinner, 1981).

What do teachers think arithmetic is?

This is also empirical, but teachers are more likely to respond with the answer you think they are looking for, and not necessarily with their concept images or what impressions their teaching makes available to students.

What do researchers think arithmetic is?

Many psychologists treat arithmetic as a relatively unproblematic domain of right and wrong answers, factual knowledge retained or not, in which to test theories.

What do politicians think arithmetic is?

Again this is an empirical question, which can be addressed by looking at their public statements. They are not always as well informed as one would hope, considering the power that they wield.

What do mathematicians think arithmetic is?

You might get multiple responses under different conditions. A plausible conjecture is that answers to these questions would differ widely, both within, and especially between groups. The lecture at the 30th Panama-conference forming the basis of this article was about how one mathematician-mathematics educator sees arithmetic.

2 method of enquiry

My method of enquiry is to examine closely my own experience in order to sensitise myself to what learners may be experiencing. The ‘data’ being offered here are two-fold: what the reader notices when engaging in the tasks presented, and what comes-to-mind, resonated from the past with triggered associations. What actually matters is not what you have known, what has come-to-mind in the past, but what comes-to-mind in the future, in new situations as well as in familiar one. Thus effectiveness resides in the freshness and enrichment of awareness when engaging with learners in the future, rather than statistical evidence about learners in the past. This approach follows the ‘Discipline of Noticing’ (Mason, 2002).

3 claims

My aim in the lecture was to try to justify experientially two claims:

that in order to be sensitive to students’ mathematical development it is essential to engage in mathematical thinking yourself, in some manner that parallels the sorts of challenges that students are meeting;

that arithmetic is the study of actions, usually on numbers, with numbers. It is about the structural relations amongst numbers, seen as instantiated properties, and on the basis of which one can reason about numbers. Calculations are a by-product, and not part of *arithmetic* in its fullest form.

4 a selection of tasks

What follows is a selection of tasks, most of which were in the talk, but without the luxury of time to get audience comment and reflection. I see tasks given to learners as intended to generate activity (Christiansen & Walther, 1986). Activity provides experience (of the use of mathematical powers, of encounters with mathematical themes, of getting stuck and getting unstuck, of meeting challenges, exercising skills, etc.). Rarely is experience sufficient. Indeed one thing we don’t seem to learn from experience is that we don’t often learn from experience alone. Some sort of reflexive stance is also required, withdrawing from the action constituting the activity, and considering what was effective and what could be improved in the future, and what connections with past experience emerged, whether at the time or in retrospect. Teaching takes place (as acts) *in* time, while

learning, takes place *over* time (during sleep!) as a maturation process, like bread, beer and wine making. With each task, pause before reading on and consider what you noticed happening inside you, how you used yourself, and perhaps how you might want to improve 'next time'.

pre-counting and counting

These initial tasks were intended for the audience, not for children, and aimed to provide some insight into what children might be experiencing when they struggle to count or to skip count.

Imagine an animation in which various objects are moving around the screen. Counting the objects can be quite difficult because they keep moving. It is possible that for some children, although the objects are stationary, their attention is darting about somewhat analogously to the animation. One-to-one correspondence, pointing and arranging the objects to be counted are ways to steady attention and make counting possible.

task 1: counting

How many rectangles make up figure 1?



figure 1

Of course it is not possible to count until you have discerned the things you are to count ... and in this case there are different answers according to how the shape is decomposed (all vertical slices, all horizontal slices, or a mixture of both). It is well known that secondary students struggle with such tasks. One way to lay the groundwork is to get them to construct shapes from a specified number of rectangles. Once they become familiar with construction, they can be challenged, or challenge themselves to find shapes that can be decomposed in different ways with different numbers of rectangles. One thing to emerge will be the notion of 'efficient' decompositions, expressed in some way or other, capturing the idea that none of the decomposition rectangles form a larger rectangle within the figure. This illustrates an important pedagogical strategy: if students are

expected to ‘work on’ or transform expressions (for example, a sequence of arithmetic calculations, equations, or an algebraic expression; factoring numbers or algebraic expressions, etc.), then providing experience of constructing the objects first, offers learners a sense of where these objects may have come from as well as insight into structural relationships. Another important pedagogical strategy is to ponder different approaches in order to seek a maximally efficient approach that works in as many varied situations as possible. Finding the areas of rectilinear figures is a case in point.

The next task really requires a group of people all chanting together.

task 2: skip counting

Try counting forwards in blocks of 4, thus, 1, 2, 3, 4 then 2, 3, 4, 5 then 3, 4, 5, 6 etc.

Now do it to a rhythm of threes (strong, weak, weak; strong, weak, weak; ... perhaps by someone clapping the rhythm).

Starting at 101, count down in steps of $1\frac{1}{10}$.

If done in a group, you may find that you can lose the thread but pick it up again from the on-going chant. Children almost certainly move ‘in and out’ of lessons mentally in a similar manner. The important thing is to trap what you do mentally in order to do this counting, and what obstructs your facility ... there may be analogues for children who struggle with skip counting. For the third one, counting down in steps of $1\frac{1}{10}$, everyone prepares the first number, and can ‘see’ or ‘feel’ or ‘sense’ how the next ones will go. The rhythm develops nicely until you get to $91\frac{1}{10}$ and you realise that there is going to be trouble ahead! Constructing and experiencing your own skip counting task deepens appreciation of what makes such a task valuable or trivial.

tasks exploring arithmetic as the study of actions

The remaining tasks can be and have been used with children of various ages. My aim is to draw your attention to tasks that expose arithmetical structure.

task 3: what’s the difference?

You are about to subtract one number from another, but before you do, someone adds one to both of them. How has the difference changed (what is the difference in the difference)?

Instead, add one to the first number and subtract one from the second number ... now what is the difference in the differences? Extend and generalise.

Of course there is no change in the first case, something that quite young children appreciate intuitively. It is the basis for subtracting through equal addition. The point is that you don't need to know the actual numbers in order to check what happens.

Drawing on 'variation theory' (Marton & Booth, 1997), an important question to ask is: 'What can be changed so that still the task is done in much the same way?' For example, the two numbers themselves can be any numbers at all; the one and the two can be any number, and the add and subtract can be either add or subtract. What happens if instead the first number is doubled and so is the second? The first number doubled but the second left alone ...?

These variations illustrate the point that in order to learn *arithmetic* in its full and proper sense, it is actually necessary to think algebraically (Hewitt, 1998); that thinking arithmetically actually involves generality, which can be expressed in algebraic symbols (but does not need to be). If the original 'subtraction' is changed to multiplication, then analogues to the original task emerge, suggesting analogues between adding and multiplying.

task 4: think of a number (THOANs)

I am thinking of a number; I add 8 and the answer is 13; what is my number?

I am thinking of a number; I add 8, then multiply by 2 and the answer is 26; what is my number?

I am thinking of a number; I add 8, then multiply by 2 then subtract 5 and the answer is 21; what is my number?

I am thinking of a number; I add 8, then multiply by 2 then subtract 5, then divide by 3, and the answer is 7; what is my number?

What do you do to the sequence $+ 8, \times 2, - 5, : 3, 7$ in order to recover my number?

What role does 7 play? What role do the actions play?

This is a reversal of the usual 'Think Of A Number' puzzles, popular since Fibonacci introduced them from unknown sources in the 12th century. You can ask people to think of a number, then lead them through some computations and end either by eliminating their original number and telling them the answer, or, given their answer, you can tell them what they started with. Young children are amazed, and want to know how it is done. The answer of course is by algebra, which can be accessed by young children initially through 'tracking arithmetic', a didactic tactic which will be illustrated in task 7.

The next task offers an introduction to solving equations with one instance of an as-yet-unknown number to be ‘de-coded’ through appreciation of the doing and undoing relationships between adding and subtracting and between multiplying and dividing. Use is being made of the ‘construct before de-constructing’ pedagogic strategy mentioned earlier. This task exploits the same principles as task 4.

task 5a: doing & undoing

What operation (or action) undoes ‘adding 5’?

What action undoes ‘subtracting 3’?

What action undoes ‘adding 5 then subtracting 3’?

There are two answers to the last part: ‘adding 3 and then subtracting 5’, or ‘subtracting 2’. This dual approach supports the notion of flexibility ... there are different ways to carry out some sequences of actions, and some ways are more efficient than others.

Now, as an extra, what action undoes ‘subtracting from 7’?

This is a bit of a mind-stopper at first. Suppose someone has a number, and they tell you the result of subtracting it from 7. How are you to reconstruct their number?

Try an example: if they (secretly) chose 5, then they would announce ‘2’ as the result of the action. Your job is to reconstruct their original number knowing only the action (‘subtract from 7’) and the result (2).

Now, what are the analogues for multiplication and division?

task 5b: doing & undoing

What action undoes ‘multiplying by 3’?

What action undoes ‘dividing by 4’?

What action undoes ‘multiplying by $\frac{3}{4}$ ’?

Again there are two answers to the last: ‘dividing by $\frac{3}{4}$ ’, and ‘multiplying by 4 and then dividing by 3’. The playground ‘rule of thumb’ to ‘invert and multiply’ arises from exploiting awareness of undoing arithmetical actions. Corresponding to the surprising ‘undoing subtracting from 7’, there is the slightly ambiguous action of ‘dividing into 12’. Here the intended meaning is not to divide something into 12 equal parts, but rather to divide 12 by the specified number.

What action undoes ‘dividing into 12’?

As with subtracting from 7, suppose someone (secretly) chooses 6. They

then announce ‘2’ as the result of the action of dividing their number into 12 (that is, $12 : 6$). Your job is to reconstruct their starting number knowing only the action (‘dividing into 12’) and the result (2).

Arithmetical operations as actions are usefully presented on a number line.

task 6a: actions on the number line

Imagine a number line with the integers marked on it (fig.2).

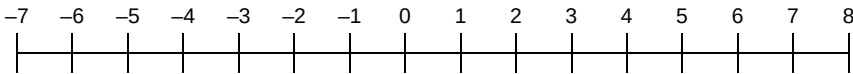


figure 2

Imagine an transparent copy of the number line, sitting exactly on top of it.

There are several actions we can perform. We can for example, shift or translate the number line a specified number of steps to the right or left. If you shift the (copy of) the number line 3 places to the right, then shift the result 4 places to the left, what is the overall effect? Denote the shift by the amount a by T_a . What then is the effect on the point x ? What happens if you perform first T_a and then T_b ?

We can scale the number line. If you scale the number line by a factor of 3, where does 2 end up? I am thinking of a number; where does it end up? Now scale that by a further factor of $\frac{2}{3}$; where does 2 end up now? I am thinking of a number; where does it end up under the composite action?

We can also rotate the (copy of) the number line through 180° about the 0. Where does 3 end up? Where does -2 end up? I am thinking of a number; where does it end up?

Notice that translations can be composed without ambiguity, and scalings can as well, as long as it is understood that they are all carried out relative to the fixed original origin, not with respect to where the origin might be now!

There are several descriptions of where some as-yet-unknown number ends up under the rotation, using words like ‘same distance the other side’, or ‘minus your number’ or ‘change the sign of your number’, and it is learners’ flexibility in discourse that is of interest, so as to be confident that the language actually has meaning.

In each case, asking what can vary opens up possibilities for generalisation, underlining the role of algebraic thinking in the learning of arithmetic. In particular the next task is perhaps the most intriguing of this type, and challenges most teachers who have not previously thought about it.

task 6b: rotations of the number line

Again imagine a number line with an exact copy on top of it. Let R_a denote the action ‘rotate the number line through 180° about the point a . Where does 5 end up if a is 3? Where does -2 end up? I am thinking of a number: where does it end up under this action? Generalise to $R_a(b)$.
Start again, and this time the action is ‘first rotate the number line through 180° about the original point 3; then rotate it through 180° about the original point 4’. Where does 5 end up now? What about -2? What about x ?

Exploring compound actions on the number line reinforces the sense of arithmetic as the study of actions with and on numbers, as well as laying the foundations for geometric transformations (and indeed linear algebra!). Composing rotations through 180° about different points is easiest to think about if they are always specified with respect to the original point, rather than the place that that point currently occupies. Exploring a different set of actions, where U_a denotes the action ‘rotate the number line through 180° about the point where a currently is’ leads to a different ‘algebra’. But algebraic notation is not necessary for experiencing the transformations, using transparent copies on an actual number line. Another task that illustrates a general approach to arithmetic, what I call a ‘didactic tactic’ is called ‘tracking arithmetic’ (Mason, Johnston-Wilder & Graham, 2005).

task 7a: doing differing products

Write down four numbers in the cells of a two by two array. An example is shown below (fig.3).
Now for each row, multiply the numbers in that row. Then add the results. Now for each column, multiply the numbers in each column, and then add the results.
Now subtract the second from the first. That is the ‘measure’ of your starting array.

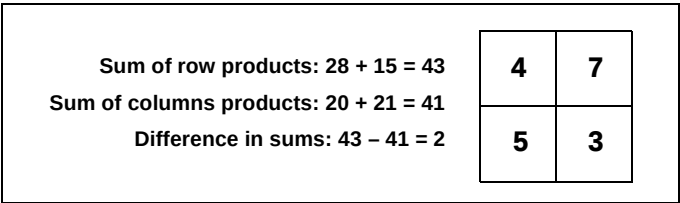


figure 3

The measure of my array is 2, but there is nothing particularly interesting so far. It is simply a calculation, typical of many situations such as *arith-*

mogons (MacIntosh & Quadling, 1975, Mason & Houssart, 2000), *pyramids* (Russell, 1997). However, treating that as a ‘doing’, what is the ‘undoing’?

task 7b: undoing differing products

The measure of my grid was 2. Can you construct a grid for which the measure is 11? Or any other specified number?

The usual approach is to start trying numbers, hoping to alight on a solution. This ‘guess and check’ is a useful strategy if you take Pólya’s advice (1945) and treat it as specialising. But the point of specialising (Mason, Burton & Stacey, 1982/2010) is to get-a-sense-of underlying structure, to detect possible structural patterns. ‘Trial and improvement’, is a better strategy than simply ‘guess and check’ because it implies trying to learn from the examples rather than simply accumulating them. But in this case it may not be clear how to adjust one example so as to force the final ‘measure’ to change the way you want it to. ‘Tracking Arithmetic’ comes to your aid:

Repeat the calculations but don’t actually do them!

For my initial grid, the calculations come out as

$$\begin{aligned}
 &4 \times 7 + 5 \times 3 \\
 &\quad \underline{4 \times 5 + 7 \times 3} \\
 &4 \times (7 - 5) + (5 - 7) \times 3 \\
 &= 4 \times (7 - 5) - (7 - 5) \times 3 \\
 &= (4 - 3) \times (7 - 5)
 \end{aligned}$$

Now you can see exactly how the ‘measure’ of a grid relates to the entries, and you can construct lots of examples with any specified answer, but only if you treat the ‘answer’ as an indicator of structure, of providing an instance of a general property of these calculations. What you are doing is treating the initial grid numbers as place holders, so that you can see how they influence or are involved in the result. This same strategy applies to many different situations where using arithmetic to encounter algebraic thinking can precede the use of letters.

My own preference is for using a cloud (signifying an as-yet-unknown number that someone is thinking of), and making use of insights of Mary Boole (Tahta, 1972). Here there are four numbers to track, but in THOANS (see task 4) there is only one number to track ... all the others can be calculated with as long as you leave the initial number alone (and don’t calculate with that number). Replacing a particular starting number with a cloud is a clerical task but makes the thinking clearer, and provides learn-

ers with encounters with as-yet-unknown numbers, the very heart of algebra (and arithmetic).

The only difference between calculations in arithmetic and in algebra is that in arithmetic you are always proceeding from the known (data) towards the as-yet-unknown answer, whereas in algebra you begin with the as-yet-unknown number (as Mary Boole said, “acknowledge your ignorance”), denote it in some way, and then proceed to treat it as a number, expressing the various calculations in which it is involved. You end up with one or more constraints in your initial as-yet-unknown number, which you then proceed to try to satisfy.

The theme of arithmetic as the study of actions on and with numbers, has been described slightly differently as studying the relations among and between numbers by a wide range of authors. See for example Nunes, Bryant & Watson (2009). One way to expose children’s thinking is with tasks along the following lines.

task 8: relational or structural thinking

What is $37 + 48 - 37$?

True or false: $57 + 93 = 93 + 57$?

Of course the ‘difficulty’ of the numbers can be adjusted to the experience of the children involved. Some children start calculating and (if they do it correctly) get an answer; some children start calculating and then say ‘Oh’, and get the result more quickly than those who calculate everything; some children quickly get the result.

The latter children are processing before doing the first action that comes to mind. They can be said to be thinking relationally. Others are at various stages along the way to relational thinking. The first are liable to develop a habit of ‘doing the first thing that comes to mind’, whereas once one possible action comes to mind it is useful to ‘park’ it and look for something more efficient.

There are all sorts of variants of this task, exploiting children’s awareness of properties of particular numbers such as 0 and 1, 9, 99 and 999, and so on, as well as exploiting general properties (rules of arithmetic) such as commutativity, associativity and distributivity. You can also explore awareness of place value with something like:

True or false: $37 + 48 = 38 + 47$

True or false: $14 + 26 = 7 + 26 + 7$

Again some students may start calculating. They are among the ‘eager beavers’ who carry out the first possible action that comes to mind, whereas the effective thinker is pleased that something possible has come

to mind, but parks that and pauses in order to see if there is an alternative, perhaps more subtle or efficient action to undertake.

task 9: fractional actions

In the first diagram, can you see something that is $\frac{2}{5}$ of something else? $\frac{3}{5}$ of something else? $\frac{2}{3}$ of something else? $\frac{5}{2}$ of something else? $\frac{1}{3}$ of something else? What other fractional actions can you ‘see’?

In the second diagram, can you see something that is $\frac{1}{4}$ of something else? Something that is $\frac{1}{5}$ of something else? Something that is $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ of something else (fig.4)?

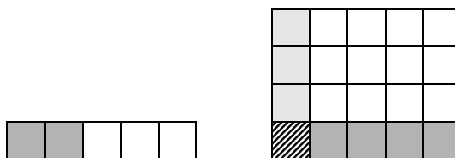


figure 4

Pat Thompson, from whom this idea comes (Thompson, 2002) offers the pedagogic strategy in a session by asking people to ‘put your hand up when you can see ...’ That way he can choose whether to get people to describe or point to their choices, or whether virtually everyone is confident that they can indeed see what is being sought. An extended version of this strategy is the use of small whiteboards or slates on which children make a response to hold up for the teacher to see.

Many teachers and many more children find it unusual to shift from one perceived whole to another. They are used to assuming that the whole of what they discern is ‘the whole’. But it is essential to develop flexibility as to what constitutes the whole (actually, the unit) and what constitutes ‘part’ of that unit. The language of ‘whole’ is misleading because it presents an obstacle to seeing something as $\frac{5}{3}$ of something else, for example.

The second part of the task generalises. For example, you can ‘see’ a rectangle divided into $\frac{1}{n}$ and $\frac{1}{(n+1)}$ parts horizontally and vertically, respectively, and the difference has to be $\frac{1}{n(n+1)}$ of the whole rectangle taken as the unit.

5 reflection

It is not the task that is rich; it is not the activity that is rich; it is the way that the task is used that is rich, and this is what influences whether the

experience is rich, setting up the possibility to learn from that experience. But even a rich experience may not guarantee learning, as teachers who engage students in physical activities and games discover: children may participate fully, but may not appear to influence their future behaviour as a result. The same applies to novice teachers and in-service teachers encountering some professional development activities.

When learners are given the chance to make significant (mathematical and behaviours) choices, when they are stimulated to make use of (and develop) their natural powers of sense-making, such as imagining and expressing, specialising and generalising, conjecturing and convincing, they experience a taste of the pleasure that can come from thinking mathematically, and that is what will encourage them to continue thinking mathematically.

In order to be sensitive to what learners are experiencing, it is at least helpful and perhaps even necessary to have recent parallel experiences oneself. Consequently any group of teachers in a school will benefit from jointly working on mathematics themselves, in a mathematical atmosphere of mutual respect, in which everything said is treated as a conjecture that needs to be tested in experience (if it is pedagogical in nature) or tested structurally (if it is mathematical in nature). Only when people are moved to 'modify my conjecture' can it be said that mathematics, or at least mathematical thinking, is being supported and stimulated.

references

- Christiansen, B. & G. Walther (1986). Task and Activity. In: B. Christiansen, G. Howson & M. Otte (eds.) *Perspectives in Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel, 243-307.
- Hewitt, D. (1998). Approaching Arithmetic Algebraically. *Mathematics Teaching* 163, 19-29.
- Macintosh, A. & D. Quadling (1975). Arithmogons. *Mathematics Teaching*, 70, 18-23.
- Marton, F. & S. Booth (1997). *Learning and Awareness*. Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum.
- Mason, J., L. Burton & K. Stacey (1982/2010). *Thinking Mathematically*. London: Addison Wesley.
- Mason, J., S. Johnston-Wilder & A. Graham (2005). *Developing Thinking in Algebra*. London: Sage (Paul Chapman).
- Mason, J. & J. Houssart (2000). Arithmogons: a case study in locating the mathematics in tasks. *Primary Teaching Studies*, 11(2), 34-42.
- Mason J. (2002). *Researching Your Own Practice: the discipline of noticing*. London: RoutledgeFalmer.
- Nunes, T., P. Bryant & A. Watson, A. (2009). *Key Understandings in Mathematics Learning: a report to the Nuffield Foundation*. London: Nuffield Foundation.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.
- Russell, J. (1997). Pyramid Numbers. *Mathematics Teaching*, 158, 43.

- Tall, D. & S. Vinner (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 151-169.
- Tahta, D. (1972). *A Boolean Anthology: selected writings of Mary Boole on mathematics education*. Derby: Association of Teachers of Mathematics.
- Thompson, P. (2002). Didactic objects and didactic models in radical constructivism. In: K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel (eds.) *Symbolizing, Modeling, and Tool Use in Mathematics Education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 191-212.

Balans van het reken-wiskunde-onderwijs halverwege de basisschool 5

- samenvatting van de uitkomsten van de vijfde peiling in 2010 -

M. Hop
Cito, Arnhem

1 inleiding

In januari en februari 2010 is het vijfde peilingsonderzoek voor rekenen-wiskunde halverwege de basisschool uitgevoerd in opdracht van het ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap.

De doelstelling van het peilingsonderzoek is het periodiek verzamelen van gegevens over het onderwijsaanbod en de -resultaten in het (speciaal) basisonderwijs om daarmee een empirische basis te leggen voor een algemene maatschappelijke discussie over de inhoud en het niveau van het onderwijs.

De onderzoeksvragen van het peilingsonderzoek zijn:

- Waaruit bestaat het onderwijsaanbod in een bepaald leer- en vormingsgebied?
- Welke resultaten in termen van kennis, inzicht en vaardigheden zijn er gerealiseerd?
- Welke veranderingen of ontwikkelingen in aanbod en opbrengst zijn er in de loop van de tijd te traceren?

Het vijfde peilingsonderzoek voor rekenen-wiskunde halverwege de basisschool omvatte een inventarisatie van enkele aspecten van het onderwijsaanbod in de jaargroepen 4 en 5 en een gedetailleerd onderzoek naar de rekenvaardigheid van leerlingen in jaargroep 5. In dit hoofdstuk wordt een samenvatting gepresenteerd van de belangrijkste resultaten van het onderzoek. De tekst van het gehele onderzoek is te vinden op de website van Cito.¹

2 resultaten van het onderwijsaanbod

leeftijd van leraren

Het reken-wiskundeonderwijs in groep 4 en 5 wordt ongeveer even vaak door een oudere als door een jongere leraar gegeven. De leeftijdsopbouw van de leraren is vrij evenwichtig. Er is geen sprake van een duidelijke vergrijzing of verjonging van het onderwijzend personeel in de steekproef van scholen.

onderwijservaring van leraren

Het merendeel van de leraren die reken-wiskundeonderwijs geven in groep 4 of 5 heeft meer dan tien jaar ervaring. Het aantal leraren dat slechts een beperkte hoeveelheid ervaring heeft (nul tot tien jaar) is echter ook aanzienlijk (41 procent). Dit wijst op een zekere mate van verloop.

opleidingsniveau van leraren

Er staan bij de scholen die deelnamen aan het onderzoek geen onbevoegde leraren voor de klas. Iets meer dan de helft van de respondenten gaf aan de pabo te hebben afgerond, terwijl ongeveer eenderde een diploma op zak had van de Pedagogische Academie, de kweekschool of kleuteropleiding. Het aantal zij-instromers was in dit onderzoek beperkt.

bijscholing

De meest populaire cursussen zijn cursussen over pedagogisch-didactisch handelen, zorgverbreding (omgaan met verschillen) en schoolzelfevaluatie. In de categorie 'Overig' werd de cursus 'Met sprongen vooruit' genoemd.

methodegebruik

Er zijn vier methodes die door scholen in de steekproef voornamelijk gebruikt worden in het reken-wiskundeonderwijs halverwege de basisschool. Dat zijn: 'Pluspunt', 'De wereld in getallen', 'Rekenrijk' en 'Alles telt'. Het grootste marktaandeel is in handen van de makers van 'Pluspunt', gevolgd door 'De wereld in getallen'. Aangezien beide methodes door Malmberg worden uitgegeven, houdt dit in dat ongeveer drie op de vier leraren werkt met een methode van deze uitgever. De methodes van Noordhoff ('Rekenrijk') en Thieme-Meulenhoff ('Alles telt') worden elk slechts door zo'n één op de tien leraren gebruikt.

aanvullende materialen

Ondanks de verscheidenheid aan materialen lijkt de markt slechts in handen te zijn van een beperkt aantal uitgevers: Ambrasoft, Malmberg, Menne Instituut en Abimo.

computerprogramma's

Bij methodegebonden computerprogramma's bij reguliere reken-wiskundemethodes komt het gebruik ongeveer overeen met het gebruik van de methode. Leraren die een computerprogramma gebruiken dat losstaat van een methode lijken voor het merendeel te kiezen voor materiaal van 'Ambrasoft', maar ook 'Maatwerk' wordt veel gebruikt. Een kwart tot een derde van de leraren geeft aan meerdere digitale leermiddelen naast elkaar te gebruiken.

tijd voor reken- en wiskundeonderwijs

De ondervraagde leraren ruimen elke schooldag bijna een uur in voor rekenen-wiskunde. In totaal komt het neer op vier uur en bijna veertig minuten reken-wiskundeonderwijs per week. Dat is minder dan in de peiling van 2003. Toen werd er per week gemiddeld vijf uur besteed aan rekenen-wiskunde in groep 4 en 5.

organisatievorm

De meest populaire organisatievorm is gelijke instructie voor alle leerlingen met aan de capaciteiten van de individuele leerling aangepaste oefenstof. Ongeveer 14 tot 20 procent van de leraren kiest voor een organisatievorm die nog een stap verder gaat: het aanbieden van zowel de instructie als de oefenstof per tempogroep. Maken we de vergelijking met de peiling van 2003, dan zien we een verschuiving optreden naar organisatievormen die differentiatie mogelijk maken. De gezamenlijke instructie met gedifferentieerde oefenstof is onverminderd populair gebleven, maar we constateren een afname van het aantal leraren dat kiest voor centrale instructie en oefenstof ten gunste van instructie en oefenstof per tempogroep.

3 resultaten van vaardigheden, kennis en inzicht van de leerlingen medio groep 5

In totaal worden opgaven aangeboden over tien verschillende domeinen:

- 1 Getallen en getalrelaties.
- 2 Basisautomatismen optellen en aftrekken.
- 3 Basisautomatismen vermenigvuldigen en delen.
- 4 Bewerkingen optellen en aftrekken.
- 5 Bewerkingen vermenigvuldigen en delen.
- 6 Bewerkingen complexe toepassingen.
- 7 Meten en meetkunde.
- 8 Tijd.

9 Geld.

10 Verhoudingen.

Hieronder worden de resultaten per domein samengevat.

getallen en getalrelaties

De gemiddelde leerling is goed in staat om verder en terug te tellen met sprongen van 1, 5 (vanaf een vijfvoud) en 10 in het getalgebied tot 1000 en kan ook getallen tot 1000 analyseren in honderdtallen en tientallen. De gemiddelde leerling beheerst opgaven waarbij moet worden aangevuld, zoals $872 + \dots = 1000$ en opgaven waarbij het midden moet worden bepaald, zoals van bijvoorbeeld 90 en 130, nog onvoldoende.

Het gemiddelde niveau in 2010 is nagenoeg gelijk aan het gemiddelde niveau in 2003.

basisautomatismen: optellen en aftrekken

De gemiddelde leerling is goed in staat om opgaven te maken zoals $68 + 7$ of $73 - 5$ waarbij van een getal onder de 100 een getal onder de 10 moet worden opgeteld of afgetrokken. Ook beheerst de gemiddelde leerling opgaven goed zoals $480 + 30$ of $300 - 20$ waarbij een veelvoud van 10 moet worden opgeteld bij of afgetrokken van een rond getal onder de 1000. Opgaven zoals $30 - 11$ en $600 - 7$ worden door de gemiddelde leerling redelijk beheerst.

Het gemiddelde niveau in 2010 is iets lager dan het gemiddelde niveau in 2003. Het verschil is significant maar in termen van effectgrootte (zie figuur 3) is er sprake van geen effect.

basisautomatismen: vermenigvuldigen en delen

De gemiddelde leerling heeft een goede beheersing van de tafels van vermenigvuldiging onder de 10. Opgaven zoals 8×9 en 9×5 worden goed beheerst. Ook deelopgaven zoals $16 : 4$ en $12 : 2$ worden door de gemiddelde leerling goed beheerst.

Het gemiddelde niveau in 2010 is nagenoeg gelijk aan het gemiddelde niveau in 2003.

bewerkingen: optellen en aftrekken

De gemiddelde leerling heeft een goede beheersing van opgaven in context zoals $80 - 6$, $39 + 39$ en $45 + 19$. Ook opgaven in context buiten het getalgebied tot 100, zoals $70 + 80$ en $115 - 16$, worden door de gemiddelde leerling goed beheerst. De gemiddelde leerling beheerst opgaven in context zoals $81 - 58$ en $56 + 27$ onvoldoende tot redelijk. Opgaven in het getalgebied tot 1000 in context, zoals $700 - 395$ en $44 + 88$, worden nog onvoldoende beheerst door de gemiddelde leerling.

Het gemiddelde niveau in 2010 is nagenoeg gelijk aan het gemiddelde niveau in 2003.

bewerkingen: vermenigvuldigen en delen

De gemiddelde leerling heeft een goede beheersing van vermenigvuldigopgaven in context, zoals 8×3 en 6×5 . Ook van deelopgaven in context, zoals $24 : 4$ en $35 : 7$, heeft de gemiddelde leerling een goede beheersing. Opgaven in context, zoals 8×8 , $4 \times 12,50$ en $100 : 25$, worden door de gemiddelde leerling nog onvoldoende beheerst.

Het gemiddelde niveau in 2010 is iets hoger dan het gemiddelde niveau in 2003. Er is sprake van een significant verschil. In termen van effectgrootte is er sprake van een effect in de richting van klein.

bewerkingen: complexe toepassingen

De gemiddelde leerling kan een complexere opgave in context waarbij meerdere bewerkingen moet worden uitgevoerd goed oplossen, zoals bijvoorbeeld $2 \times 4 + 20$ en $50 + 18 - 17$. Complexere opgaven in context, zoals bijvoorbeeld $(3 \times 10) : 6$ en $100 - (5 \times 10)$, worden door de gemiddelde leerling nog onvoldoende beheerst.

Het gemiddelde niveau in 2010 is iets hoger dan het gemiddelde niveau in 2003. Er is sprake van een significant verschil. In termen van effectgrootte is er sprake van geen effect.

meten en meetkunde

De gemiddelde leerling is goed in staat om aan te geven welke maat hoort bij bijvoorbeeld een pak stroopwafels (gram, liter, kilo of centimeter) en het tanken van benzine (liter, centimeter, kilometer of euro). De gemiddelde leerling heeft nog onvoldoende beheersing van het omzetten van meters naar centimeters, zoals bijvoorbeeld 3 meter en 5 centimeter naar 305 centimeter. De gemiddelde leerling heeft nog onvoldoende beheersing van het bepalen van het verschil tussen 1 kg en 350 gram.

Het gemiddelde niveau in 2010 is iets hoger dan het gemiddelde niveau in 2003. Er is sprake van een significant verschil. In termen van effectgrootte is er sprake van een effect in de richting van klein.

tijd

De gemiddelde leerling is goed in staat de juiste analoge tijd te selecteren bij een digitale tijdweergave, zoals bijvoorbeeld 8:10. De gemiddelde leerling is goed in staat aan te geven hoeveel minuten het nog duurt voordat het uur vol is, bijvoorbeeld bij een tijd van 15:40 uur. De gemiddelde leerling is nog onvoldoende in staat om te rekenen met tijd, zoals bijvoorbeeld bepalen hoe laat het is over één uur en tien minuten als het nu elf uur en

vijftig minuten is. Ook het omzetten van minuten naar uren en minuten, zoals bijvoorbeeld 85 minuten naar één uur en een aantal minuten, wordt nog onvoldoende beheerst.

Het gemiddelde niveau in 2010 is nagenoeg gelijk aan het gemiddelde niveau in 2003.

geld

De gemiddelde leerling is goed in staat om een geldbriefje om te zetten naar munten zoals bijvoorbeeld een briefje van vijf euro naar muntstukken van vijftig cent. Ook kan de gemiddelde leerling bepalen hoeveel moet worden teruggekregen wanneer er twee keer vijftig cent en één euro moet worden betaald en er betaald wordt met een briefje van vijf euro. De gemiddelde leerling beheerst een opgave nog onvoldoende waarbij een verschil in centen moet worden bepaald tussen het geld van twee personen, zoals bijvoorbeeld een briefje van tien en een briefje van vijf euro van een persoon en een briefje van tien, een munt van twee euro, een munt van één euro, een munt van vijftig cent en een munt van twintig cent van een ander persoon. Het gemiddelde niveau in 2010 is nagenoeg gelijk aan het gemiddelde niveau in 2003.

verhoudingen

De gemiddelde leerling is goed in staat om verhoudingenopgaven op te lossen, waarbij bepaald moet worden hoeveel schepjes cacao er nodig zijn voor acht bekers, wanneer voor één beker twee schepjes nodig zijn. De gemiddelde leerling beheerst een opgave waarbij bepaald moet worden hoeveel drie kilo vis kost wanneer gegeven is dat twee kilo vis twaalf euro kost, nog onvoldoende.

Het gemiddelde niveau in 2010 is iets hoger dan het gemiddelde niveau in 2003. Er is sprake van een significant verschil. In termen van effectgrootte is er sprake van een effect in de richting van een klein effect.

4 resultaten over veranderingen of ontwikkelingen in aanbod en opbrengst in de loop van de tijd

effect van formatiegewicht en stratum

De meeste onderwerpen laten een klein tot matig effect zien van de 0.00 leerlingen in vergelijking met de 0.30-leerlingen en de 1.20-leerlingen. De effecten tussen de 0.30-leerlingen en de 1.20-leerlingen zijn wisselend in het voordeel van de 0.30-leerlingen en 1.20-leerlingen en op een enkele uitzondering na zijn de effecten tussen deze groepen leerlingen verwaar-

loosbaar klein. De meeste onderwerpen laten een klein effect zien ten gunste van de stratum 1-leerlingen ten opzichte van de stratum 2-leerlingen en een klein tot matig effect van de stratum 1-leerlingen met de stratum 3-leerlingen. De effectgroottes van de stratum 3-leerlingen in vergelijking met de stratum 2-leerlingen zijn, op een enkele uitzondering na, in het voordeel van de stratum 2-leerlingen en lopen uiteen van verwaarloosbaar klein tot klein.

effect van geslacht

Voor de meeste onderwerpen geldt dat er een klein tot matig negatief effect wordt gevonden voor de rekenvaardigheid van meisjes in vergelijking met die van de jongens. Dit wijkt niet af van het resultaat in de vorige peilingen.

effect van leertijd

Leerlingen die vertraging hebben opgelopen in hun schoolloopbaan hebben gemiddeld een duidelijke achterstand ten opzichte van hun jongere klasgenoten. Er is onveranderlijk sprake van een matig negatief effect.

effect van methode

Op basis van het gegevensbestand van de peiling medio basisonderwijs is een vergelijking gemaakt tussen methodes voor het reken-wiskundeonderwijs. 'Rekenrijk' scoort gemiddeld het hoogst, gevolgd door 'Pluspunt'. Anderen methodes scoren in een enkel geval op specifieke onderdelen hoger. Zo scoort de methode 'De wereld in getallen' het best op het onderdeel 'Rekentictee': optellen en aftrekken en het onderdeel 'Bewerkingen': optellen en aftrekken.

effect van afnamejaar

In de effectgroottes over de perioden 2003-2010 vinden we over het algemeen een nultendens (figuur 1, 2 en 3).

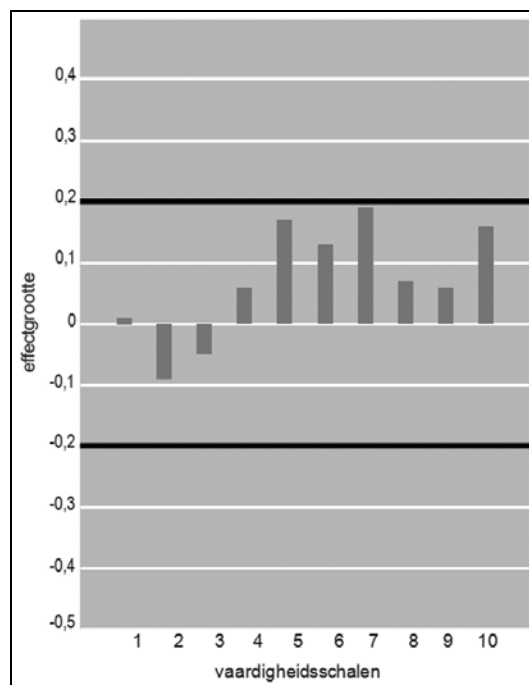
Voor de rekentictees ('Basisautomatismen: optellen en aftrekken' en 'Basisautomatismen: vermenigvuldigen en delen') vinden we een respectievelijk significant en niet-significant verschil. Er is sprake van een effect dat eerder in de buurt van 0 ligt dan dat het in de richting van een klein effect gaat. Alleen op deze onderdelen scoort het jaar 2003 iets hoger dan 2010. Bij de overige onderwerpen zijn de verschillen in het voordeel van 2010. Voor de onderwerpen 'Getallen en getalrelaties', 'Bewerkingen: optellen en aftrekken', 'Tijd' en 'Geld' vinden we een niet-significant verschil. Het effect ligt dicht bij 0 dan dat het in de richting van een klein effect gaat. Bij de onderwerpen 'Bewerkingen: vermenigvuldigen en delen', 'Bewerkingen: complexere toepassingen', 'Meten en meetkunde' en 'Verhoudingen' vinden we een effect dat in de richting van een klein effect gaat.

De verschillen zijn hierbij significant.

Vaardigheidsschalen	Effectgrootte
1 getallen en getalrelaties	0,01
2 basisautomatismen optellen en aftrekken	– 0,09*
3 basisautomatismen vermenigvuldigen en delen	– 0,05
4 bewerkingen optellen en aftrekken	0,06
5 bewerkingen vermenigvuldigen en delen	0,17*
6 bewerkingen complexere toepassingen	0,13*
7 meten en meetkunde	0,19*
8 tijd	0,07
9 geld	0,06
10 verhoudingen	0,16*

*) significant verschil

figuur 1: effectgroottes voor afnamejaar (2010 ten opzichte van 2003)



figuur 2: effectgroottes voor afnamejaar (2010 ten opzichte van 2003)

Effectgrootte	Kwalificatie
0.8	Groot positief effect
0.5	Matig positief effect
0.2	Klein positief effect
0.0	Geen effect
- 0.2	Klein negatief effect
- 0.5	Matig negatief effect
- 0.8	Groot negatief effect

figuur 3: kwalificatie van effectgroottes

De gemiddelde effectgrootte voor de afnamejaren 2003-2010 is 0,07. De conclusie is dat er, aldus gecorrigeerd voor geslacht, leertijd, herkomst en formatiegewicht, nauwelijks verschillen in leerlingprestaties tussen de verschillende afnamejaren worden gevonden.

noot

- 1 Zie: http://www.cito.nl/onderzoek%20en%20wetenschap/onderzoek/ppon/ppon_balansen.aspx

Wat kunnen we leren van drie jaar rekenverbetertrajecten?

G. Gelderblom
PO-Raad/Projectbureau Kwaliteit, Utrecht

1 inleiding

In de periode 2008 tot 2011 gaan ruim tweeduizend basisscholen in Nederland met een verbetertraject aan de slag om hun taal- en rekenonderwijs te versterken. Zo'n zevenhonderd van deze scholen nemen deel aan een rekenverbetertraject. Deze scholen krijgen gedurende een periode van maximaal drie jaar een extra subsidie van het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap (OCW) om via een gerichte aanpak hun opbrengsten aantoonbaar te verbeteren. De PO-Raad/Projectbureau Kwaliteit coördineert deze verbetertrajecten. Naast het verbeteren van de opbrengsten van de scholen, is het doel van de trajecten om scherper in beeld te krijgen welke aanpakken werken bij schoolverbetering.

Nu de trajecten formeel zijn afgerond, is het moment gekomen om de balans op te maken en terug te blikken. Hebben de participerende scholen hun opbrengsten daadwerkelijk verbeterd? En welke lessen met betrekking tot schoolverbetering kunnen we trekken uit de verbetertrajecten?

2 aanleiding en context

De Nederlandse regering heeft de ambitie om tot de internationale top-5 van kenniseconomieën te behoren. Bezien vanuit internationaal perspectief doen Nederlandse leerlingen het niet slecht. Uitkomsten van het 'Programme for International Student Assessment' (OECD, 2010) op het gebied van leesvaardigheid, wiskunde en natuurwetenschappen, gehouden in 2009, laten zien dat Nederlandse leerlingen in elk van de drie onderzoeksgebieden ruim boven het gemiddelde van de deelnemende landen eindigen. Toch ontstaat er in het eerste decennium van deze eeuw toenemende maatschappelijke onrust over de kwaliteit en opbrengst van het Nederlandse onderwijs. De uitkomsten van nationale en internationale onderzoeken (PIRLS, 2006; TIMSS, 2007; PISA, 2003, 2006; Cito, 2008) sporen niet

met eerder geformuleerde ambities en voeden de onrust. Er zijn zorgen over een dalende trend bij rekenen en het uitblijven van verbetering bij lezen (fig.1).

	PISA 2003	PISA 2006	PISA 2009	PISA 2009 OESO gemiddelde
leesvaardigheid	513	507	508	494
wiskunde	538	531	526	496

figuur 1: gemiddelde scores leesvaardigheid en wiskunde
Nederlandse vijftienjarigen bij PISA 2003, 2006, 2009

De Onderwijsraad (2007) signaleert dat er veel onbenut talent is bij leerlingen. Volgens de raad presteert 10 procent van de leerlingen op de basisschool minder dan verwacht zou mogen worden. De Inspectie van het Onderwijs wijst met enige regelmaat op het grote aantal zeer zwakke scholen (in 2007: honderd) en risicoscholen (in 2007: duizend). Daarnaast wijst ze op de grote verschillen tussen scholen qua schoolprestaties, ook wanneer er gecorrigeerd wordt voor kenmerken in de leerlingenpopulatie.

Tegelijk is er sprake van een breed gedeeld besef dat goed taal- en rekenonderwijs zeer bepalend is voor het succes in de schoolloopbaan en het latere maatschappelijke functioneren (OCW, 2007; PO-Raad, 2010). Dit leidt ertoe dat de overheid in de kwaliteitsagenda Scholen voor Morgen (OCW, 2007) maatregelen ontvouwt om te investeren in beter taal- en rekenonderwijs. Projectbureau Kwaliteit van de PO-Raad wordt gevraagd om als motor achter de voorgestelde ambities te fungeren.

3 centrale elementen in de landelijke aanpak

plan van aanpak

In de periode 2008-2011 nemen zo'n zevenhonderd scholen en hun besturen deel aan een rekenverbetertraject. Het gaat hierbij in de meeste gevallen om drie- of tweejarige trajecten. Deze scholen en besturen schrijven een plan van aanpak waarin ze aangeven wat de stand van zaken is met betrekking tot de opbrengsten van hun rekenonderwijs en wat de positie moet zijn over twee of drie jaar. In dit plan van aanpak beschrijven de scholen op welke domeinen van het rekenonderwijs ze zich extra gaan richten en op welke leerjaren. Ook geven ze aan hoe de school gaat werken aan het versterken van de leerkrachtvaardigheden en wat er ondernomen wordt om de kwaliteit van de instructie te verbeteren. Ook de onderscheiden rollen van bestuur en school krijgen aandacht in de plannen.

De projectplannen zijn bedoeld om scholen en hun besturen te helpen om op een planmatige manier hun schoolverbetering ter hand te nemen. Tevens zijn het de onderleggers voor het verkrijgen van een jaarlijkse subsidie van zesduizend euro gedurende drie jaren, waarbij het bestuur toezegt ook zelf jaarlijks zesduizend euro per school vrij te maken voor het rekentraject op de school. De plannen worden op hoofdlijnen meegelezen en van feedback voorzien door een expertcommissie vanuit Projectbureau Kwaliteit. In een aantal gevallen passen besturen en scholen naar aanleiding van deze feedback hun plannen aan en worden doelstellingen ambitieuzer geformuleerd of meer geconcretiseerd. Hoewel scholen en besturen gevraagd wordt een plan van aanpak te schrijven en zij ook feedback krijgen op hun plannen, is het niet de bedoeling dat het Projectbureau Kwaliteit de verantwoordelijkheid van de scholen of besturen overneemt. Zij zijn zelf verantwoordelijk voor de kwaliteit en opbrengsten van de scholen, en daarmee ook voor activiteiten om de opbrengsten te verbeteren.

netwerken

Om te stimuleren gebruik te maken van elkaars expertise worden scholen en besturen gevraagd om samen met andere scholen van het bestuur of van het samenwerkingsverband een rekenverbeterplan in te richten. De meeste rekenverbetertrajecten bestaan uit groepen van vijf tot tien scholen die gezamenlijk optrekken. Dit maakt het mogelijk om rekensterke en rekenzwakke scholen aan elkaar te koppelen waardoor risicoscholen maximaal kunnen profiteren van de expertise en ervaring van rekensterke scholen.

expert als kritische vriend

Een keer per jaar bezoeken twee rekenexperts van Projectbureau Kwaliteit de scholen. Dit zijn experts die werken bij verschillende instellingen en die voor een aantal dagen per jaar werkzaamheden uitvoeren voor PO-Raad/Projectbureau Kwaliteit. De betrokken experts geven de scholen op hoofdlijnen feedback op de (bijgestelde) projectplannen en de uitgevoerde activiteiten. De experts functioneren als kritische vriend, wat inhoudt dat zij vragen stellen over de koers van het traject, de uitgevoerde activiteiten en ontwikkelingen in de leerlingresultaten. Zij nemen het werk niet over van adviseurs of schoolbegeleiders die de scholen voor de uitvoering van het rekentraject hebben ingehuurd. Daarnaast voeren bestuurlijke adviseurs vanuit Projectbureau Kwaliteit gesprekken met de aanvragende besturen. Ten slotte zijn zij eindverantwoordelijk voor de kwaliteit en opbrengsten van het onderwijs op de scholen. Deze gesprekken zijn minder rekeninhoudelijk van aard, maar gaan meer over zaken als opbrengstgericht besturen en leiding geven aan professionals.

intensief eenjarig rekenverbetertraject

De veronderstelling is, dat het een periode van twee tot drie jaar in beslag neemt om een school tot aantoonbaar beter rekenonderwijs te brengen. Om te onderzoeken of het mogelijk is om door aangepaste interventies in kortere tijd een kwaliteitsslag te maken, hebben zestig basisscholen die door de Inspectie van het Onderwijs aangeduid werden als rekenzwak, deelgenomen aan een intensief eenjarig rekenaject. Deze scholen ontvangen geen subsidie maar worden gedurende een jaar intensief ondersteund. De ondersteuning vindt plaats tijdens drie coachingsgesprekken met een expertduo dat bestaat uit een rekenexpert en een expert op het terrein van schoolontwikkeling en opbrengstgericht werken.

flankerende activiteiten

Naast extra subsidiemiddelen en expertgesprekken stelt Projectbureau Kwaliteit aanvullende middelen beschikbaar voor scholen en hun besturen die deelnemen aan een rekenverbetertraject. Zo ontvangen alle scholen bij de start van het project 'Iedereen kan leren rekenen' (Gelderblom, 2009), een beknopte brochure waarin de belangrijkste aandachtspunten voor goed rekenonderwijs op een rij staan. Van negen scholen die opvallen vanwege hun doeltreffende aanpak worden portretten geschreven die zijn gebundeld in de publicatie 'Opbrengstgericht werken doe je zo!' (Meijer, 2009). Alle scholen die participeren in een verbetertraject ontvangen een exemplaar van deze uitgave. Daarnaast worden kwaliteitskaarten met praktische tips over goed rekenonderwijs ontwikkeld en ontvangen scholen dvd's met goede voorbeelden.

Ook organiseert Projectbureau Kwaliteit zes rekenconferenties om te dienen als katalysator van de rekenajecten. Ruim tweeduizend leraren, intern begeleiders en schoolleiders bezoeken één of meerdere van deze bijeenkomsten. Daarnaast bieden masterclasses bestuurders, schoolleiders, rekencoördinatoren en ondersteuners de mogelijkheid om meer verdiepend en studerend aan de slag te gaan. Overigens maken ook scholen die niet deelnemen aan een rekenverbetertraject volop gebruik van de kwaliteitskaarten, conferenties en masterclasses. Dit is in overeenstemming met het oogmerk van de kwaliteitsagenda 'Scholen voor Morgen': een landelijke beweging van scholen die aan de slag zijn hun onderwijs in de basisvaardigheden te versterken.

monitoring

De kwaliteit van het rekenonderwijs moet blijken uit de opbrengsten. Tenslotte is een belangrijke doelstelling van de verbetertrajecten het aantoonbaar verbeteren van de rekenopbrengsten van de scholen. Om ontwikkelingen in de opbrengsten vast te stellen heeft de Inspectie van het Onder-

wijs alle scholen van de taal- en reken*pilots* gemonitord. Daarbij gaat het zowel om het monitoren van ontwikkelingen in de leerlingresultaten als om het monitoren van ontwikkelingen binnen de scholen. Daarnaast verrichten de onderzoeksbureaus ITS en IVA aanvullend kwalitatief onderzoek op een beperkt aantal scholen om zo een vollediger en nauwkeuriger beeld te krijgen van ontwikkelingen binnen de scholen en hun besturen. De rapporten die dit oplevert (Inspectie van het Onderwijs, 2012a; 2012b; Smeets, 2012), vormen samen met de bevindingen van de bezoekende experts, materiaal op basis waarvan de *lessons to learn* kunnen worden geformuleerd (Heegsma, 2011).

4 resultaten

Het belangrijkste doel van de verbetertrajecten is het aantoonbaar verbeteren van de leerprestaties. Doordat de deelnemende scholen gedurende de periode van het rekenverbetertraject deelnemen aan een monitor van de Inspectie van het Onderwijs, is het mogelijk om vast te stellen of dit doel is bereikt.

	2008-2009	2010-2011
leerjaar 4	23	9
leerjaar 5	21	9
leerjaar 6	16	9
leerjaar 7	22	10

figuur 2: percentage scholen dat onder de inspectie-norm voor rekenen-wiskunde presteert

	2008-2009	2010-2011
leerjaar 4	77	91
leerjaar 5	79	91
leerjaar 6	84	91
leerjaar 7	78	90

figuur 3: percentage scholen dat boven de inspectie-norm voor rekenen-wiskunde presteert

De figuren 2 en 3 laten zien dat over de schooljaren heen het percentage scholen dat deelneemt aan een rekenverbetertraject en boven de inspectienorm presteert toeneemt en het percentage scholen dat onder de inspectienorm presteert afneemt.

Ook is gekeken of de gemiddelde toetsscore van de scholen die gedurende het rekentraject dezelfde toets afnemen, verbetert. Als uitgangspunt is de Citotoets Rekenen-Wiskunde genomen, nieuwe versie - afname eindperiode.

	2008-2009	2010-2011
leerjaar 4 (toets E4)	57,9	62,2
leerjaar 5 (toets E5)	76,1	79,2
leerjaar 6 (toets E6)	87,5	91,3
leerjaar 7 (toets E7)	99,9	101,5

figuur 4: vergelijking gemiddelde toetsscores rekenen-wiskunde van scholen in 2008-2009 en 2010-2011

Figuur 4 laat zien dat in alle onderzochte leerjaren de toetsscores in schooljaar 2010-2011 (het laatste jaar van het rekenverbetertraject) verbeterd zijn ten opzichte van schooljaar 2008-2009 (het eerste jaar van het rekenverbetertraject). Het verschil tussen de toetsscores in de verschillende schooljaren in leerjaar 7 is overigens niet significant.

De Cito Eindtoetsscore (totaalscore) van de scholen die deelnemen aan de rekenverbetertrajecten is in de loop van het rekenverbetertraject gestegen van 534,1 in 2008-2009 naar 534,7 in 2010-2011 (fig.5). Daarmee is het verschil in Cito Eindtoetsscore met de niet-deelnemende scholen in de loop van het rekentraject kleiner geworden. Toch ligt de Cito Eindtoetsscore van de scholen van de rekenverbetertrajecten aan het einde van het rekenverbetertraject nog altijd 0,7 onder die van de niet-deelnemende scholen. Dit heeft waarschijnlijk te maken met de relatief ongunstige start-situatie bij de scholen van de rekenverbetertrajecten. Onder scholen die deelnemen aan de rekenverbetertrajecten bevinden zich bij de start van de trajecten namelijk relatief veel rekenzwakke scholen. In 2008-2009 was 57 procent van de scholen die participeren in een rekenverbetertraject rekenzwak. Bij de niet-deelnemende scholen was dit percentage 23 procent.

	2008-2009	2010-2011
Cito Eindtoets totaalscore	534,1	534,7

figuur 5: vergelijking Cito Eindtoetsresultaten tussen schooljaren 2008-2009 en 2010-2011

De ontwikkeling van de gemiddelde toetsresultaten rekenen van de scholen die deelnemen aan de rekenverbetertrajecten, uitgesplitst naar rekenzwakke, gemiddelde en rekensterke scholen, laat zien dat de rekenzwakke

scholen zich sterker verbeteren dan gemiddelde en rekensterke scholen. Rekensterke scholen lijken moeite te hebben hun niveau vast te houden. Misschien speelt het 'plafondeffect' hierin een rol. Het kan voor scholen die hoog presteren lastig zijn om een nog hogere toetsscore te halen. Bovendien hadden rekenzwakke scholen bij aanvang van het rekenverbetertraject nu eenmaal meer te verbeteren dan rekensterke scholen.

5 lessons to learn

De verbetertrajecten zijn niet alleen bedoeld om de opbrengsten van de scholen te verbeteren, maar ook om te leren van aanpakken die worden toegepast in de trajecten. De monitor van de Inspectie van het Onderwijs en het aanvullend onderzoek van de onafhankelijke onderzoeksbureaus maken het mogelijk om lessen te trekken uit de verbetertrajecten, deze kennis en ervaring te delen met scholen en besturen en breder te verspreiden. De 'geleerde lessen' van de verbetertrajecten lijken, oppervlakkig bezien, open deuren. Aan de andere kant maken scholen en besturen, als ook onderwijsadviseurs en experts, lang niet altijd gebruik van deze inzichten. De verbetertrajecten hebben ons geleerd dat wanneer deze inzichten daadwerkelijk, in samenhang met elkaar en consequent worden toegepast, de opbrengsten van een school in korte tijd aantoonbaar kunnen verbeteren (Gelderblom, 2010).

les 1: besturen en hun scholen zijn zelf verantwoordelijk voor de kwaliteit en opbrengsten van het onderwijs - en mogen daar dus op worden aangesproken

Kenmerkend voor het Nederlandse onderwijs is dat de eigen verantwoordelijkheid van de school centraal staat. Schoolbesturen zijn zelf verantwoordelijk voor de kwaliteit van het onderwijs op hun scholen. Die zelfverantwoordelijkheid van scholen gaat ver. Sommigen (Scheerens Luyten & Ravens, 2010) stellen op basis van internationale gegevens zelfs dat Nederlandse scholen wereldkampioen schoolautonomie zijn. Hoewel besturen zelf verantwoordelijk zijn voor de kwaliteit van het onderwijs besteden ze daar volgens gegevens van de Inspectie van het Onderwijs weinig tijd aan. Het accent ligt vooral op personele en financiële aspecten. Bestuurders stellen vaak geen eigen normen aan de hand waarvan ze informatie over het onderwijs beoordelen. Daarmee laten ze kansen voor onderwijsverbetering liggen (Inspectie van het Onderwijs, 2011). In het kader van de verbetertrajecten bezoeken bestuursadviseurs de bestuurders van de aanvragende besturen één keer per jaar om met hen te praten over de opbreng-

sten van de scholen en de bestuurlijke initiatieven om de kwaliteit van het onderwijs te versterken. In deze gesprekken is - vaak aan de hand van een datamuur - besproken hoe de resultaten moesten worden gelezen, welke scholen rekensterk of rekenzwak zijn, welke scholen of schoolleiders extra aandacht of faciliteiten nodig hebben en hoe scholen van elkaar kunnen leren. In dit verband moet opgemerkt worden dat ook de Inspectie van het Onderwijs de afgelopen jaren besturen nadrukkelijker aanspreekt op de kwaliteit en opbrengsten van het onderwijs. De verbetertrajecten hebben opnieuw duidelijk gemaakt hoe groot de invloed van besturen en schoolleiders is op de kwaliteit en de resultaten van het onderwijs op hun school. Een goed gecoördineerde aanpak van het onderwijskundig beleid en het personeelsbeleid zorgt in korte tijd voor betere prestaties van de school (ocw, 2008).

les 2: er is een verband tussen de rekenopbrengsten van een school en het functioneren van de schoolleiding

Wanneer we succesvolle rekentrajecten vergelijken met minder succesvolle trajecten dan valt vooral de rol van de schoolleiding op. Op scholen waar veel in gang gezet is en de leerlingresultaten verbeteren, zien we schoolleiders die we kunnen karakteriseren als onderwijskundig leiders. Onderzoek (Earl & Katz, 2006; Essink, 2007; Kooijman, Gelderblom & Vernooij, 2007; Imants, 2010) laat zien dat deze schoolleiders een voortdurende *drive* hebben om het onderwijs te verbeteren. Ook al doen ze het goed, toch blijven deze schoolleiders op zoek naar aspecten van het onderwijs die nog beter kunnen. Zij analyseren de opbrengsten van de school, bewaken de tijd voor de basisvaardigheden, en nemen initiatieven om het leerkrachthandelen te versterken (Vernooij, 2008).

les 3: urgentiebesef (of een sterke ambitie) is het begin van elke verandering

Wanneer scholen (of besturen) geen probleem hebben of geen probleem ervaren - of wanneer er geen sprake is van een zeer sterke ambitie - zal er ook niets gebeuren. Daarom is het onderzoeken van de opbrengsten van het onderwijs zo belangrijk. Dit kan namelijk leiden tot een beter inzicht. Wanneer een schoolteam tevreden is als de leerlingen elk jaar weer gemiddelde resultaten halen op de Cito Eindtoets, is het de vraag of die tevredenheid echt wel op zijn plaats is. In dit verband kan het ook geen kwaad wanneer scholen de opbrengsten van hun onderwijs eens leggen naast de opbrengsten die andere scholen realiseren. En wanneer een school mooie gemiddelde opbrengsten realiseert, hoe zit het dan met leerlingen die wat meer in hun mars hebben? Worden zij ook echt uitgedaagd zodat ze kunnen excelleren? Toetsdata bevatten niet alleen informatie over leerlingen,

maar ook over de kwaliteit van het onderwijs. Daarom is het zaak dat schoolleiders en bestuurders in staat zijn hun data te analyseren en daar conclusies uit te trekken.

les 4: opbrengstgericht werken leidt tot betere opbrengsten

Een centraal element in de verbetertrajecten was opbrengstgericht werken. Opbrengstgericht werken is het doelgericht en systematisch werken aan het maximaliseren van leerlingprestaties. Het heeft alles te maken met het stellen van doelen en het analyseren van de opbrengsten, om vast te stellen waar initiatieven nodig zijn om de opbrengsten te verbeteren. Het heeft alles te maken met de bereidheid te leren van de opbrengsten en de ambitie om onderwijs te realiseren dat maximaal effect heeft. Scholen die opbrengstgericht werken, halen betere onderwijsresultaten en zijn minder vaak zwak of zeer zwak, stelt de Inspectie van het Onderwijs vast (2011). Het proces van opbrengstgericht werken kenmerkt zich door een cyclus van opeenvolgende stappen:

- stellen van doelen voor leerprestaties;
- specifiek inrichten van het onderwijsprogramma en -proces;
- meten van de opbrengsten;
- analyseren van de gegevens;
- bijstellen van de instructie, het programma en (soms) de doelen.

Concreet betekent het dat leraren, intern begeleiders en schoolleiders trendanalyses maken om na te gaan hoe de opbrengsten zich in de loop der jaren ontwikkelen, en dat er categorieënanalyses worden gemaakt om uit te zoeken welke aspecten van de leerstof extra aandacht behoeven. Maar het betekent vooral dat leraren, intern begeleiders en schoolleiders zich de vraag stellen wat de opbrengsten hen voor informatie geeft over hun onderwijs. Het betekent ook dat schoolleiders en bestuurders zich afvragen waar op dit moment de scholen staan, waar ze over twee of drie jaar willen zijn en welke stappen ze gaan zetten om de voorgenomen doelen ook daadwerkelijk te halen. Er wordt veel over opbrengstgericht werken gesproken en geschreven, maar het is nog lang geen gemeengoed in het onderwijs. De Inspectie van het Onderwijs (2011) meldt dat zo'n 30 procent van de scholen opbrengstgericht werkt.

les 5: een ketenbenadering waarbij feedback een hoofdrol speelt is essentieel om tot duurzame verbetering te komen

Een effectieve aanpak om het rekenonderwijs te versterken, heeft aandacht voor alle lagen in de organisatie: de leraar, de intern begeleider en rekencoördinator, de schoolleider en de bestuurder. Wanneer een van deze genoemde functionarissen vergeten wordt, is de kans reëel dat de geboekte successen van korte duur zullen zijn. Maar ook de communicatie tussen

de verschillende lagen in de organisatie en de wijze waarop deze elkaar feedback geven, zijn cruciaal. Wanneer een school verbetering van het rekenonderwijs prioriteit geeft omdat daar een bepaalde noodzaak toe is, maar het bestuur steunt de school hierin niet, dan is de kans groot dat prioriteiten van het bestuur de activiteiten van de school zullen doorkruisen of dat het bestuur niet de extra middelen en aandacht beschikbaar stelt die de school (tijdelijk) nodig heeft.

les 6: iedereen kan leren rekenen, maar het is vooral de leraar die bepaalt of iedereen zal leren rekenen

De belangrijkste sleutel tot goede leerlingresultaten is de leraar. Onderzoek (Darling-Hammond, 2005; Darling-Hammond & Bransford, 2005) laat zien dat de kennis en vaardigheden van leraren meer verschil maken voor het leren van leerlingen dan welke andere factor dan ook. Ook de KNAW (2009) concludeert in haar rapport 'Rekenonderwijs op de basisschool' dat de kwaliteit van de leraar direct effect heeft op de leerprestaties van de leerlingen. Dit betekent dat initiatieven die gericht zijn op het verbeteren van de kwaliteit van het rekenonderwijs vooral zinvol en effectief zijn wanneer ze zich richten op het sterker maken van leraren. Als de resultaten tegenvallen, moet allereerst gekeken worden naar de rol van leraren. Dit lijkt een open deur, maar scholen, rekenexperts en onderwijsadviseurs neigen er bij de start van de verbetertrajecten toe om de methode de schuld te geven van de tegenvallende resultaten. Het aanschaffen en implementeren van een nieuwe rekenmethode zou dan de oplossing zijn van de misère. Anderen zoeken de oorzaak in het hanteren van de verkeerde didactiek. Wanneer er uit een ander didactisch vaatje zou worden getapt (meer koopmansrekenen of juist het consequenter toepassen van de realistische rekenprincipes) zou dit de school in beter vaarwater brengen. Weer andere experts signaleren leerlingen met ernstige rekenstoornissen zoals dyscalculie. Wanneer deze (vermeende) stoornissen beter behandeld zouden worden, zou dit de resultaten van deze leerlingen ten goede komen. Hoewel de keuze van een methode, het volgen van een bepaalde didactiek en het omgaan met leerlingen met rekenproblemen zeker relevante topics zijn, wijst veel wetenschappelijk onderzoek in een andere richting: de leraar.

De maatregelen waarvoor scholen uiteindelijk hebben gekozen om het rekenonderwijs te verbeteren, hebben zich vooral gericht op het beter gebruiken van de aanwezige methode, het effectiever benutten van de geplande lestijd en het inplannen van structurele tijd voor oefenen en automatiseren, het verbeteren van de didactische competenties van leraren en het effectiever omgaan met verschillen tussen leerlingen. Om dit te

bereiken kiezen scholen vooral voor studiebijeenkomsten voor het hele team, klassenbezoeken, (collegiale) consultatie of coaching en individuele scholing.

Een rekentraject dat niet met kracht inzet op het sterker maken van leraren is verspilde moeite en zal slechts schijnresultaten boeken. Het is vooral de man of vrouw voor de klas die bepalend is voor het leren rekenen van de leerlingen. Interventies gericht op versterking van het rekenonderwijs moeten zich daarom op leerkrachtvaardigheden richten.

In dit verband moet ook gewezen worden op de verwachtingen die leraren hebben ten aanzien van het rekenen van hun leerlingen. Die verwachtingen beïnvloeden namelijk de leerprestaties. Bekend is het onderzoek van Rosenthal & Jacobson (1968), dat laat zien dat leraren met hogere verwachtingen van hun leerlingen ook tot betere leerresultaten met hun leerlingen komen. In de literatuur spreekt men in dit verband over het Pygmalion-effect. Ook uit recentere studies (Levine & Lezotte, 1990) blijkt dat scholen en leraren die hoge verwachtingen hebben van hun leerlingen, doorgaans betere resultaten laten zien dan scholen en leraren die deze verwachtingen niet hebben. Scholen die deelnemen aan de rekenverbetertrajecten moeten hun verwachtingen soms bijstellen. Wanneer ze de opbrengsten analyseren ontdekken ze soms dat scholen met een vergelijkbare leerlingenpopulatie veel betere resultaten realiseren dan hun eigen school. En scholen die de oorzaak van tegenvallende resultaten in de achtergrond van leerlingen zoeken, zoals het lage opleidingsniveau of de etniciteit van de ouders, ontdekken soms dat er andere scholen zijn met een vergelijkbare leerlingenpopulatie, maar met betere resultaten (dvd 'Kijken naar opbrengsten', PO-Raad, 2009).

les 7: effectieve rekeninstructie is het hart van het rekenonderwijs

Goed rekenonderwijs heeft alles te maken met een rijke leeromgeving en rijke problemen, maar er is meer. Het gaat allereerst en vooral om de leraar die elke dag weer voldoende tijd vrijmaakt voor instructie. Onder instructie verstaan we het doelgericht handelen van een leraar in een onderwijsleersituatie gericht op het duidelijk maken van een begrip, handeling of inzicht waardoor het leren van leerlingen op gang gebracht of in stand gehouden wordt (Creemers, 1991). Vooral risicoleerlingen, maar niet alleen zij, zijn erg afhankelijk van de leraar die uitlegt, voordoet, visualiseert, vragen stelt en uitdaagt, en die weet in welke situatie en bij welke leerlingen hij of zij welke instructietechniek moet gebruiken.

les 8: tijd is een belangrijke factor om tot betere resultaten te komen

Uit het rapport 'Balans (32) van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4' (Janssen, e.a., 2005) blijkt dat de hoeveelheid

tijd die scholen aan rekenen-wiskunde besteden uiteenloopt van drie tot zeven-en-een-half uur per week. Het inspectierapport 'Basisvaardigheden rekenen-wiskunde in het basisonderwijs' (Inspectie van het Onderwijs, 2008) stelt vast dat sterke rekenscholen simpelweg ook meer tijd aan rekenen besteden. Er staat meer tijd voor rekenen op het rooster. Onderwijskundig leiderschap en visie betekenen dat ook dit punt binnen het team besproken wordt.

Maar het gaat om meer dan alleen de vraag hoeveel tijd er voor een vak op het rooster staat. Het gaat ook om het efficiënt gebruiken van de tijd in de les, weten wat de cruciale onderdelen in een rekenlijn zijn en de tijd die we aan zwakke rekenaars besteden. Zwakke rekenaars zijn in veel gevallen helemaal niet dom, maar hebben wel meer tijd nodig om dezelfde doelen te kunnen halen als hun leeftijdgenoten.

De ingeroosterde tijd voor rekenen, effectief omgaan met de beschikbare rekentijd en het verdelen van de tijd in de les over verschillende groepen leerlingen, zijn zaken die er zeer toe doen bij het realiseren van effectief rekenonderwijs. Daarom hebben veel scholen in de rekenverbetertrajecten hier ook kritisch naar gekeken en in veel gevallen hebben ze de tijd voor rekenen uitgebreid.

Het Inspectierapport 'Basisvaardigheden rekenen-wiskunde in het basisonderwijs' besteedt ook aandacht aan een ander aspect van tijd; de (tot voor kort) geringe hoeveelheid tijd die scholen besteden aan professionalisering op rekenen. Ook het KNAW-rapport doet hier stevige uitspraken over. Werken aan versterking van het rekenonderwijs betekent dat er tijd vrij gemaakt wordt om te werken aan de eigen professionele ontwikkeling.

les 9: leren van en met elkaar is een succesvolle schoolverbeteringsaanpak

Voor veel problemen waar leraren in hun alledaagse praktijk tegenaan lopen bestaan geen standaardoplossingen. Dit komt doordat elke school, elke klas en elke leraar weer anders is. Daarom is het van belang dat in schoolverbeteringstrajecten leraren de ruimte krijgen om deze alledaagse praktijkvraagstukken te bespreken met collega's.

Verlengde instructie is een effectief middel om risicorekenaars extra aandacht te geven, maar ik heb een combinatieklas. Hoe kan ik dit nu organiseren?

Ik neem de toets Rekenen voor kleuters af. De resultaten vallen me erg tegen. Hoe kan dat? Hoe zit dat op andere scholen? En als de resultaten daar beter zijn, wat doen zij dan anders?

Veel vragen van leraren laten zich niet beantwoorden in een cursus, maar vragen om concrete doordenking en uitwisseling van ervaringen door erva-

ringsdeskundigen. Leren van elkaar behoort daarom een vast onderdeel te zijn van schoolverbeteringstrajecten.

les 10: initiatieven om het rekenonderwijs te versterken hebben van meet af aan aandacht voor borging

Het gevaar van een rekenverbetertraject is dat de resultaten slechts van tijdelijke aard zijn. Zodra het verbeterproject is afgelopen, gaat de aandacht van de school weer uit naar andere zaken. Het gevolg kan zijn dat eenmaal bereikte successen snel verdwijnen en dat de leerlingresultaten langzaam naar het oude niveau terugvallen. Om het rekenonderwijs duurzaam te versterken, is het zaak dat er van meet af aan aandacht is voor het borgen van nieuwe werkwijzen. Daarbij kan gedacht worden aan verschillende factoren.

monitoren van de opbrengsten

Een toenemend aantal scholen is gedurende het rekenverbetertraject aan de slag gegaan met het monitoren en analyseren van de opbrengsten. Daardoor is het mogelijk het effect van verbetermaatregelen vast te stellen en op tijd maatregelen te nemen ingeval de resultaten terug dreigen te lopen.

aanspreken van besturen op hun rol en verantwoordelijkheid

Wanneer ook besturen zich op de hoogte stellen van de kwaliteit en opbrengsten van de scholen en daarover het gesprek met de scholen voeren, is het beter mogelijk bereikte resultaten te borgen.

rekenbeleidsplan

Het versterken van het onderwijs in de basisvaardigheden dient voortdurende aandacht van de school te krijgen. Taal en rekenen worden tenslotte niet zonder reden gerekend tot de basisvaardigheden van het onderwijs. Scholen doen er daarom goed aan steeds te werken aan kwaliteitsversterking van hun onderwijs in deze vakgebieden; en niet pas wanneer de resultaten tegenvallen of de Onderwijsinspectie aan de bel trekt. Een rekenbeleidsplan (gekoppeld aan het school- en jaarplan) met doelen voor de korte en lange termijn kan helpen om versterking van het rekenonderwijs op de agenda van de school te houden.

versterken handelen leraren

De sleutel tot betere resultaten is gelegen in het handelen van leraren. Investeren in leraren moet daarom voorrang krijgen boven het aanschaffen van nieuwe methoden of materialen. Door te investeren in leraren investeren scholen heel direct in de kwaliteit van hun onderwijs op de langere termijn.

onderwijskundig leiderschap

Sterkere leraren, daar gaat het om. Maar dat heeft ook te maken met de wijze waarop leraren, intern begeleiders en schoolleiders als team functioneren. En dat heeft weer alles te maken met de rol van de schoolleider als onderwijskundig leider van de school. Schoolleiders die de opbrengsten van het onderwijs monitoren en analyseren, die de tijd voor de basisvaardigheden bewaken, die het rekenonderwijs op de agenda van de school houden, die zich op de hoogte houden van het reilen en zeilen in de klas door klassenbezoeken te brengen, die investeren in de professionalisering van leraren, zorgen voor het borgen van zaken die bereikt zijn in een verbetertraject.

rekencoördinator

Een rekencoördinator kan eraan bijdragen dat er blijvend aandacht is voor het versterken van het rekenonderwijs en dat de kwaliteit van het rekenonderwijs op de agenda van de school blijft. Het is daarbij belangrijk afspraken te maken welke taken bij de rekencoördinator, welke bij de intern begeleider en welke bij de schoolleiding komen te liggen. Eindverantwoordelijk voor de kwaliteit en de opbrengsten van het rekenonderwijs zijn en blijven de schoolleiding en het bevoegd gezag van de school (bestuur).

jaarkalender effectief rekenonderwijs

Wat gebeurt er op welk moment in het jaar om het rekenonderwijs de nodige aandacht te geven? Een jaarkalender waarin alle activiteiten, variërend van klassenbezoeken en begeleiden van (nieuwe) leraren tot en met besprekingen tussen intern begeleider en schoolleider zijn opgenomen, kan helpen om op een gestructureerde, planmatige wijze het rekenonderwijs de aandacht te geven die nodig is, ook nadat een rekenverbetertraject is afgelopen.

6 opbrengstgericht werken werkt

De scholen die hebben deelgenomen aan de rekenverbetertrajecten hebben hun opbrengsten aantoonbaar verbeterd. Scholen en hun besturen hebben dit gedaan door doelen te stellen op het gebied van de leerprestaties van de leerlingen, door de opbrengsten nauwgezet te volgen en te analyseren. Waar nodig stelden ze hun onderwijsaanbod bij en op bijna alle scholen is er werk gemaakt van het versterken van de instructiekwaliteiten van leraren.

De belangrijkste les die we kunnen leren uit de verbetertrajecten, is dat

opbrengstgericht werken - mits dit op de juiste manier wordt vormgegeven - snel kan leiden tot betere resultaten. Resultaten die we eerder niet voor mogelijk hielden.

literatuur

- Cito (2008). *Onderwijs op peil? Een samenvattend overzicht van 20 jaar PPON*. Arnhem: Cito.
- Creemers, B.P.M. (1991). *Effectieve instructie*. Den Haag: Instituut voor onderzoek van het onderwijs (SVO).
- Darling-Hammond, L. (2005). Teaching as a profession: Lessons in teacher preparation and professional development. *Phi Delta Kappan*, 87(3), 237-240.
- Darling-Hammond, L. & J. Bransford (eds.). (2005). *Preparing teachers for a changing world: What teachers should learn and be able to do*. San Francisco: Jossey-Bass.
- Earl, L.M. & S. Katz (2006). *Leading schools in a data-rich world*. Thousand Oaks: Corwin Press.
- Essink, M. (2007). *Excellente scholen in het basisonderwijs*. Enschede: Universiteit Twente.
- Gelderblom, G. (2009). *Iedereen kan leren rekenen*. Utrecht: PO-Raad/Projectbureau Kwaliteit
- Gelderblom, G. (2010). *Waarom zijn opbrengstgerichte scholen succesvol? Basis-schoolmanagement, 08*.
- Heegsma, P. (2011). *Leren van projecten. Tien 'lessons to learn' van het project Intensief eenjarig rekenverbetertraject Projectbureau Kwaliteit*. Utrecht: PO-Raad/Projectbureau Kwaliteit.
- IEA (2007). *PIRLS 2006 International Report*. Chestnut Hill: International Association for the Evaluation of Educational Achievement.
- IEA (2008). *Timss 2007 International Mathematics Report*. Chestnut Hill: International Association for the Evaluation of Educational Achievement.
- Imants, J. (2010). *Beter leren door leiderschap*. Hengelo: Hogeschool Edith Stein/Onderwijscentrum Twente.
- Inspectie van het Onderwijs (2008). *Basisvaardigheden rekenen-wiskunde in het basisonderwijs*. Utrecht: Inspectie van het Onderwijs.
- Inspectie van het Onderwijs (2010). *De staat van het onderwijs, Onderwijsverslag 2008/2009*. Utrecht: Inspectie van het Onderwijs.
- Inspectie van het Onderwijs (2011) *De staat van het onderwijs, Onderwijsverslag 2009/2010*. Utrecht: Inspectie van het Onderwijs.
- Inspectie van het Onderwijs (2012a). *Monitor verbetertrajecten taal en rekenen 2008/2009, 2009/2010 en 2010/2011*. Utrecht: Inspectie van het Onderwijs.
- Inspectie van het Onderwijs (2012b). *Monitor verbetertrajecten taal en rekenen 2009/2010 en 2010/2011, speciaal basisonderwijs*. Utrecht: Inspectie van het Onderwijs.
- Janssen, J., e.a. (2005). *Balans [32] van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4. Uitkomsten van de vierde peiling in 2004*. Arnhem: Cito.
- KNAW (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool*. Amsterdam: KNAW.
- Kooijman, H., G. Gelderblom & K. Vernooy (2007). *Onderwijskundig leiderschap in het primair onderwijs*. Amersfoort: CPS.
- Levine, D.U. & L.W. Lezotte (1990). *Unusually Effective Schools: A Review and Ana-*

- lysis of Research and Practice*. Madison, Wisconsin: The National Center for Effective Schools Research & Development.
- Meijer, R. (2009). *Opbrengstgericht werken doe je zo!* Utrecht: PO-Raad.
- OCW (2007). *Scholen voor morgen. Samen op weg naar duurzame kwaliteit in het primair onderwijs*. Den Haag: Ministerie van OCW.
- OCW (2008). *Aanpak opbrengstgericht leiderschap*. Den Haag: Ministerie van OCW.
- OECD (2004). *Learning for Tomorrow's World - First Results from PISA 2003*. Paris: Organisation of Economic Co-operation and Development.
- OECD (2004). *Problem Solving for Tomorrow's World - First Measures of Cross-Curricular Competencies from PISA 2003*. Paris: Organisation of Economic Co-operation and Development.
- OECD (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A framework for PISA 2006*. Paris: OECD.
- OECD (2007). *PISA 2006: Science Competencies for Tomorrow's World*. Paris, OECD.
- OECD (2010). *PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do: Student Performance in Reading, Mathematics and Science*. Paris: Organisation of Economic Co-operation and Development.
- Onderwijsraad (2007). *Presteren naar vermogen*. Den Haag: Onderwijsraad.
- PIRLS (2006). *Progress in International Reading Literacy Study, internationale test van vaardigheden van 9-jarigen op gebied van lezen en taalvaardigheid*.
- PO-Raad (2009). *Kijken naar opbrengsten*. Utrecht: PO-Raad (dvd).
- PO-Raad (2010). *In tien jaar naar de top! Pleidooi voor 10-jarenplan voor het primair onderwijs*. Utrecht: PO-Raad
- Rosenthal, R. & L. Jacobson (1968). *Pygmalion in the classroom: Teacher expectation and pupil's intellectual development*. New York: Holt, Rinehart & Wilston.
- Scheerens, J., H. Luyten & J. van Ravens (2010). *Visies op onderwijskwaliteit met illustratieve gegevens over de kwaliteit van het Nederlandse primair en secundair onderwijs*. Enschede: Universiteit Twente
- Smeets, E., e.a. (2012). *Rekenverbetertrajecten in het basisonderwijs. Stand van zaken na drie jaar*. Nijmegen: ITS, Radboud Universiteit Nijmegen
- Vernooy, K. (2008). *De schoolleiding en het verbeteren van het lesgeven en leren bij de basisvaardigheden*. Basisschool Management, 07.

Opbrengstgericht werken als taak van de lerarenopleiding basisonderwijs

R. Keijzer & J. van der Linden
Hogeschool iPabo, Amsterdam/Alkmaar

1 inleiding

Studenten aan de lerarenopleiding basisonderwijs moeten tijdens hun opleiding op een of andere manier kennismaken met het doen van praktijkgericht onderzoek. Opleidingen zoeken naar manieren om dit zo vorm te geven dat het studentenonderzoek past bij het opleidingsniveau en hen voorbereidt op de taak als leraar (Bakx, Breteler, Diepstraten & Copic, 2009; HBO-raad, 2006; Leeman & Wardekker, 2010). Ook op de Hs. iPabo wordt geacht naar manieren voor het opzetten van zinvol studentenonderzoek en ziet daarvoor een mogelijkheid in het opbrengstgericht werken. Opbrengstgericht werken vraagt immers om een onderzoekende leraar en vormt daarom een geschikte aanleiding om studenten op onderzoek te laten gaan (PO-raad, 2010; Boersma & Keijzer, 2011). Daarnaast staat opbrengstgericht werken bij veel basisscholen hoog op de agenda. Studenten die met opbrengstgericht werken aan de slag gaan kunnen daardoor redelijk gemakkelijk aansluiten bij vragen in het veld. Door aan de slag te gaan met deze vragen, sluit het onderzoekswerk aan op wat een leraar in de dagelijkse praktijk doet. Daarnaast ondersteunt het basisscholen, die vorm geven aan opbrengstgericht werken. Met andere woorden: opbrengstgericht werken biedt kansen om het studentenonderzoek te laten aansluiten bij dat wat in de beroepsuitoefening gebruik is en ondersteunt scholen die verder met opbrengstgericht werken aan de slag zijn.

Dergelijke overwegingen vormden het startpunt voor de zoektocht die we in dit artikel beschrijven. Het gaat daarbij om een zoektocht naar een passende manier om opbrengstgericht werken in het vierde jaar van de opleiding in te bouwen als onderzoeksanpak, waarbij studenten aan de slag gaan met vragen van scholen die gekozen hebben voor het verhogen van de onderwijsopbrengst voor het vak rekenen-wiskunde.

Het te ontwikkelen opleidingsonderwijs beoogt studenten te leren om onderzoek te doen, namelijk als een systematische manier van werken om het onderwijs te verbeteren. Wij willen in het opleidingsonderwijs het leren onderzoeken niet alleen tot leerstof maken, maar het systematisch en onderzoeksmatig werken ook tonen als werkwijze die we zelf hanteren. We realiseren dit door ons ontwikkelwerk expliciet te benoemen als ontwerp-onderzoek, en stappen die dit onderzoek vraagt voor onszelf en studenten te expliciteren (Van den Akker, e.a., 2006; Keijzer & Zwaneveld, 2012).

In dit artikel beschrijven wij hoe we in eerste instantie een invulling vonden voor het opleidingsonderwijs dat studenten leert opbrengstgericht te werken. We kozen daarbij voor de systematische aanpak van ontwerp-onderzoek om het onderwijs te verbeteren. Een aanpak die ontwerpers noodzaakt ontwerpprincipes vast te leggen en nauwkeurig na te gaan of een ontwerp wel tot de gewenste resultaten leidt. We kozen ook voor een dergelijke aanpak, omdat het ontwerp ging over een leeromgeving om studenten onderzoek te leren doen, want zo beschouwden we opbrengstgericht werken van meet af aan.

Het systematische onderzoek van ontwerpers en onderwijsgeveenden kon op die manier ook model staan voor de aanpak die we voor studenten beoogden. Op deze manier ontstond een dubbele laag. Zowel wij als opleiders als studenten waren met onderzoek bezig, dat zich bovendien bij beiden richtte op het verbeteren van het onderwijs. Het opleidersonderzoek werd zo een middel om aan studenten duidelijk te maken welke overwegingen passend zijn in dergelijk onderzoek.

2 ontwerp-onderzoek

Ontwerp-onderzoek start in het algemeen met het formuleren van een educatief probleem. Dat was in ons geval niet moeilijk. Het onderwijsveld vraagt leraren die opbrengstgericht kunnen werken en dat roept de vraag op hoe je dit aanstaande leraren leert. Dit educatieve probleem vroeg om een analyse vooraf, die als basis zou kunnen dienen voor een prototype van opleidingsonderwijs dat voorziet in een mogelijke oplossing voor het probleem waarvoor wij gesteld waren. Dit prototype is omgeven met verschillende veronderstellingen over het leren en ontwikkelen van studenten. Met deze ideeën in de hand ontwikkelen we een prototype van opleidingsonderwijs. Binnen dit prototype gaan we nauwkeurig na hoe studenten zich ontwikkelen. Deze observaties gebruiken we vervolgens om na te gaan in hoeverre het prototype voldoet en - daar waar dit niet voldoet - aanwijzingen te verkrijgen hoe dit kan worden verbeterd.

3 analyse vooraf

Opbrengstgericht werken is een invulling van wat in de internationale literatuur wel wordt aangeduid als *data driven teaching*. Het oogmerk is dat leraren beter gebruik maken van data die het onderwijs genereert, om het onderwijs systematisch te verbeteren. Er zijn aanwijzingen dat leraren niet altijd voldoende gebruik maken van data uit het eigen onderwijs (Ledoux, Blok & Boogaard, 2009; Milo & Baltussen, 2011).

Het gebruiken van data is ook kenmerkend voor het doen van onderzoek. Na het stellen van een onderzoekbare vraag, formuleert een onderzoeker in het algemeen een werkwijze om de vraag te beantwoorden en deze werkwijze voorziet in het verkrijgen van gegevens (data) om via analyse een antwoord te formuleren op de gestelde vraag. Met andere woorden, onderzoek doen is een cyclische werkwijze met het oogmerk om op een systematische wijze antwoord te krijgen op een gestelde vraag. Daarbij verzamelt de onderzoeker op een gegeven ogenblik data. Leraren gebruiken bij het verbeteren van het onderwijs in het ideale geval ook een dergelijke onderzoekscyclus en zullen daarbij op een bepaald moment ook data genereren om vervolgens na te gaan of de beoogde verbetering gerealiseerd is.

Vanuit deze overweging stelden we dat het bij opbrengstgericht werken door (aanstaande) leraren feitelijk gaat om onderzoek doen in de eigen praktijk. Het voordeel van deze vaststelling was dat we op de iPabo behoorlijk wat ervaring hadden met dergelijk studentenonderzoek. Studenten leren werken binnen een cyclus van praktijkonderzoek om een bijdrage te leveren aan de schoolontwikkeling van de school waar zij in het vierde jaar stage lopen. Ze leren ook de cyclus van handelingsgericht werken kennen, bij het opstellen van een groepsplan voor de stagegroep. Deze twee cycli sluiten goed aan bij het opbrengstgericht werken. Immers, in de twee cycli worden door het onderwijs gegenereerde data gebruikt om datzelfde onderwijs te verbeteren. Echter, het benadrukken van het genereren van data suggereert dat het toetsen zelf het onderwijs verbetert. Dat is niet het geval. Toetsresultaten geven hoogstens een signaal dat er wat aan de hand is en toetsanalyseprogramma's ondersteunen bij het vaststellen waar verder gezocht moet gaan worden. Het verbeteren van onderwijs gebeurt door het ontwikkelen en uitproberen van alternatieven. Studenten moeten leren de alternatieven zo te ontwerpen, dat ze kunnen beargumenteren dat verwacht mag worden dat deze alternatieven betere resultaten opleveren. Ze moeten ook leren in dit opzicht de proef op de som te nemen, via toetsen, observaties en/of het analyseren van leerlingwerk.

Onze ervaring is dat studenten graag een bijdrage leveren aan het verbeteren van de praktijk en dat geldt zeker voor de studenten die in de afstu-

deerfase rekenen-wiskunde als specialisme kiezen. Ze laten zich daarbij leiden door wat zij in de praktijk zien of denken te zien (Dolk, 1997). Studenten zijn pas dan voldoende in staat praktijksituaties adequaat te beoordelen als zij al voldoende weten van het vak en de vakdidactiek (Bereiter, 1985; Von Glasersfeld, 1998). Studenten hebben een gedegen kennisbasis nodig om op onderzoek te gaan, zo is onze ervaring. De opleiding nodigt studenten overigens expliciet uit om te reflecteren op praktijkervaringen (Keijzer, e.a., in druk; Oonk, e.a., 1994; vgl. Schön, 1983). Dat vormt een belangrijke opstap naar het onderzoeken, maar is wel iets anders. Onderzoeken leer je waarschijnlijk ook door de kunst van een expert af te kijken, via *scaffolding* (Anghileri, 2006). *Scaffolding* betekent dat er als het ware een steiger geplaatst wordt ter ondersteuning. De expert vormt deze steiger, die de lerende ondersteuning biedt wanneer hij of zij die nodig heeft.

Ondanks het gegeven dat studenten graag bijdragen aan de praktijk, leren ze ook voor hun toets. Om te slagen voor het studieonderdeel, zullen ze zich richten op de door de opleiding bedachte toetsing. Die zal daarom zo moeten worden vormgegeven dat dit bij studenten het door ons beoogde gedrag uitlokt. Hier ligt echter een uitdaging. Deze toetsing is opleidingsbreed afgesproken en dat beperkt de bewegingsvrijheid van de ontwerpers.

4 prototype

Het uitgangspunt bij het ontwikkelen van een prototype van opleidingsonderwijs was dat het studentenonderzoek zich binnen dit prototype moest richten op schoolontwikkelvragen, die te maken hebben het verhogen van de onderwijsopbrengst. Studenten gaan met een dergelijke schoolontwikkelvraag aan de slag en proberen daarmee zowel de stageschool verder te helpen als te voldoen aan de eisen van de opleiding. In zekere zin is hier sprake van toetsing van de student vanuit twee perspectieven. We stelden vast dat dit maakt dat studenten zich vooral boodschapper tonen tussen opleiding en praktijk. We kozen er daarom voor de dialoog tussen student en praktijk over de contouren van het onderzoek ook op de opleiding te laten plaatsvinden, zodat aldaar een dialoog zou ontstaan tussen student, onderwijspraktijk en opleiding (vgl. Panama Kerngroep opleiders, 2007). Bij een verdere doordenking hiervan realiseerden we ons dat het naar de opleiding halen van stagebegeleiders niet alleen de dialoog tussen veld en opleiding faciliteert, maar dat zo ook een mogelijkheid ontstaat om mensen uit het veld te scholen met betrekking tot opbrengstgericht werken als onderzoeksaanpak en, meer algemeen, het doen van praktijkonderzoek.

Onze analyse van essenties van opbrengstgericht werken, samen met de begrenzing die de opleiding aan het ontwikkelwerk stelt, hielpen bij het zoeken en vinden van een invulling voor de bijeenkomsten met studenten en voor die met leraren en studenten. We bedachten studenten te informeren over het doen van onderzoek. We kozen er daarbij voor om de onderzoekscyclus, die alle studenten van de iPabo moeten leren hanteren, specifiek in te vullen voor opbrengstgericht werken. Dat maakte dat we elementen toevoegden van handelingsgericht werken en de cyclus van opbrengstgericht werken (Keijzer, e.a., 2012). Dit resulteerde in een opzet waarbij de focus voor studenten ligt bij leeropbrengsten. Verder is gekozen voor een didactische aanpak gebaseerd op een analyse van onderwijsleerbehoeften. Daarbij laten we studenten zien dat het doen van onderzoek maakt dat je een beginsituatie moet vaststellen en dat toetsen daarbij een effectief middel kunnen zijn. Studenten krijgen informatie over het leerlingvolgsysteem van het Cito en de opdracht analyses van toetsen van de eigen stagegroep te bekijken.

We kiezen hiervoor omdat we aannemen dat, wanneer we studenten meenemen in het analyseren van toetsen en het gedegen vaststellen van de beginsituatie, zij data als uitgangspunt voor hun onderzoek nemen. Door de aandacht te richten op de vakinhoud, vormt deze een aangrijpingspunt voor de te formuleren onderzoeksvraag en de te ontwikkelen alternatieven. Daarbij wisten we uit ervaring dat de vragen uit het veld studenten nogal eens een andere kant op wijzen. Door binnen de opleiding de dialoog met de scholen aan te gaan, verwachten we dat studenten niet langer de boodschappers zijn tussen opleiding en veld. We bedachten de momenten waarop de mentoren naar de opleiding komen daarom zowel te gebruiken om hen te wijzen op een didactische doordenking van de ontwikkelvraag als om hen te leren wat onderzoek verrichten is. Daarmee realiseren we dat de dialoog op de opleiding plaatsvindt en het onderhandelen over invulling en aanpak van het onderzoek onder onze ogen zou plaatsvinden. Daarnaast kunnen de aanwezige leraren meegroeien in de rol van onderzoeker, die tamelijk nieuw voor ze is en die ook helpt bij het vormgeven van opbrengstgericht werken in de school.

Dit resulteerde in de volgende aanpak voor studenten voor het actieonderzoek, op een voor de opleiding gebruikelijke manier:

- de te formuleren onderzoeksvraag moet gaan over het verhogen van onderwijsopbrengsten voor rekenen-wiskunde;
- studenten krijgen middelen in handen om hiermee effectief aan de slag te gaan, zoals middelen om toetsen te analyseren;
- studenten sluiten met hun onderzoek aan bij een schoolontwikkelvraag van de eigen stageschool;

- in het vooronderzoek bepaalt de student de beginsituatie van de school; daarbij moet onder meer een analyse zitten van de onderwijsopbrengsten van de groep of enkele groepen, aangevuld met observaties, gesprekken met leerlingen en analyse van leerlingenwerk;
- studenten moeten in de onderzoeksvraag ook nadrukkelijk aandacht schenken aan de vakdidactiek rekenen-wiskunde; de vraag mag zich niet (louter) richten op de organisatie van het onderwijs of de pedagogische opdracht van het onderwijs.

Dit laatste, zo weten we uit het verleden, kan behoorlijk problematisch zijn. Begeleidende leraren sturen studenten vaak in de richting van organisatorische antwoorden en verder kan de vakdidactiek op de opleiding niet diepgaand aan de orde gesteld worden, omdat de studenten werken aan verschillende onderzoeksvragen. We proberen te voorzien in een vakdidactische doordenking door de studenten hier op de opleiding telkens op te wijzen en door ze met enige regelmaat in groepjes te laten samenwerken. In de groepjes zitten dan studenten met onderzoeksvragen die inhoudelijk verbonden zijn.

5 ervaringen

De door ons gekozen opzet leidde tot enthousiaste reacties van studenten en stagebegeleiders. De studenten grepen de bijeenkomsten aan om gedegen onderzoeksvragen te formuleren en deelnemende begeleiders ontdekten zo welke eisen de opleiding aan de studenten stelt en - wellicht belangrijker - aan onderzoek door studenten. We vertelden in de bijeenkomsten over opbrengstgericht werken en lieten zien hoe dit aansloot bij maatschappelijke zorgen over de onderwijsopbrengst. We presenteerden hoe opbrengstgericht werken in een van de *pilotscholen* op een onderzoeksmatige wijze was vormgegeven. We wezen in het verlengde van dit voorbeeld op de noodzaak van een vakdidactische doordenking van het educatieve probleem op de school en het vakdidactisch doordenken van mogelijke oplossingen.

De studenten kozen via de onderzoeksvraag een focus voor hun onderzoek. We zagen dat het door ons ontwikkelde opleidingsonderwijs ertoe leidde dat zij dit wisten uit te werken in gedegen analyses van het aanpalende leerstofonderdeel. Deze theoretische analyse van de leerstof verrijkten de studenten met gegevens rond het leren van leerlingen in hun groep of groepen. We zagen in het werk van de studenten dat zij daadwerkelijk nieuwsgierig waren geworden naar de onderwijsopbrengst en naar de leerprocessen van leerlingen die daar onder liggen.

Het onderzoek naar de beginsituatie en de leerstof vormde een opstap naar het formuleren van alternatieve aanpakken. En juist op dit punt verliep de *pilot* anders dan we verwachtten. Een gedegen analyse van de beginsituatie en de aanpalende vakdidactiek, leidde niet zozeer tot alternatieve aanpakken in het onderwijs, maar in het algemeen tot organisatorische oplossingen voor gesignaleerde problemen. Zo maakte een van de studenten een gedegen analyse van wat er mis was met het klokkijken in haar stagegroep. Ze bekeek hiervoor literatuur rond het klokkijken, analyseerde toetsgegevens, observeerde kinderen en analyseerde leerlingenwerk. Terwijl de student zo precies achterhaalde wat er aan de hand was, was haar oplossing voor het door haar gesignaleerde probleem tijd vrij te maken om op speelse wijze aandacht te besteden aan het klokkijken.

Van de opbrengsten van al de analyses was in dit ‘onderwijsontwerp’ nauwelijks iets terug te vinden. Verder zagen we dat studenten wel redenen hadden om tevreden te zijn over hun interventies. Een natoets liet in vrijwel alle gevallen zien dat leerlingen gegroeid waren. Echter, omdat het ontwerp niet didactisch doordacht was, konden studenten de groei niet vanuit het gekozen ontwerp verklaren. Ze zagen eigenlijk ook geen reden om met een dergelijke verklaring te komen.

6 reflectie

We waren toch wel wat verrast door deze observatie. Het betrekken van de praktijk en studenten bij een onderzoeksmatige manier van werken aan de onderwijsopbrengst leverde wel wat op, maar leidde vaak niet tot didactisch overdachte interventies. We formuleerden hypothesen over hoe dit gedrag, van overigens zeer gemotiveerde studenten, ontstaan zou kunnen zijn. We herformuleerden deze hypothesen tot stellingen voor bezoekers aan de 30^e Panama-conferentie. Via deze expertpeiling probeerden we na te gaan hoe de conferentiedeelnemers dachten over de hypothesen. Figuur 1 geeft een overzicht van stellingen. We vertelden de conferentiedeelnemers bij hun reactie op de stellingen de geschetste context als achtergrond te gebruiken. Dat neemt niet weg dat we ons realiseren dat de aanwezigen hun eigen interpretatie kozen van de door ons geschetste situatie en de door ons geformuleerde stellingen.

Figuur 1 geeft reacties, waarbij de getallen het percentage conferentiegangers aangeven dat voor het aangegeven alternatief koos. De conferentiegangers konden via een stemkastje kiezen uit ‘helemaal mee oneens’, ‘mee oneens’, ‘neutraal’, ‘mee eens’ en ‘helemaal mee eens’. Het zoeken naar verklaringen voor het vergroten van de onderwijsopbrengst naar aanlei-

ding van goed gekozen interventies is in onze ogen kenmerkend voor een onderzoekende leraar. Een dergelijke leraar is namelijk nieuwsgierig naar de ontwikkeling van leerlingen en doet moeite te achterhalen waarom leerlingen zich zo ontwikkelen als zij doen.

helemaal mee oneens	mee oneens	neutraal	mee eens	helemaal mee eens
<i>Stelling 1: Studenten leren onderzoeken leidt tot onderzoekende leraren</i>				
2,7	35	27,3	31,7	3,3
<i>Stelling 2: Studenten leren onderzoeken leidt tot hogere onderwijsopbrengsten</i>				
10,9	26,2	19,7	37,7	5,5
<i>Stelling 3: Alleen leraren met onderzoekservaring kunnen studenten effectief begeleiden bij hun praktijkonderzoek in het kader van opbrengstgericht werken</i>				
10,1	19,7	10,7	42,1	17,4
<i>Stelling 4: Alleen leraren die ervaring hebben met opbrengstgericht werken kunnen studenten effectief begeleiden bij hun praktijkonderzoek in het kader van opbrengstgericht werken</i>				
9,4	22,2	16,1	33,9	18,3
<i>Stelling 5: Leraren zijn geen onderzoekers. Zet in op ambachtelijke vaardigheden. Als ze dat goed doen, zouden we tevreden moeten zijn</i>				
19,2	25,4	15,8	30,5	9
<i>Stelling 6: Het vak rekenen-wiskunde is voor leraren moeilijk om te onderwijzen. Het leent zich daarom slecht als onderwerp voor praktijkonderzoek door studenten</i>				
61	29,9	4,5	4,5	0
<i>Stelling 7: We moeten – als het gaat om begeleiden van studentenonderzoek in het veld rond opbrengstgericht werken – niet praten over de leraar maar praten met de leraar</i>				
5,1	5,1	7,9	31,1	50,8

figuur 1: reactie op stellingen van deelnemers
Panama-conferentie in procenten

We stelden vast dat studenten zich niet in deze zin tot onderzoekende leraren ontwikkelden door het opleidingsonderwijs dat wij ontwierpen. We formuleerden daarom in het verlengde van de door ons geschetste opleidingscontext de stelling: 'Studenten leren onderzoeken leidt tot onderzoekende leraren.'

We zien in figuur 1 dat de conferentiebezoekers hier wisselend over denken. Bij de verschillende onderzoeken die studenten uitvoerden zagen we dat de interventie vaak leidde tot een hogere onderwijsopbrengst. We stelden evenwel vast dat dit effect ontstond, terwijl studenten de interventie in het algemeen alleen organisatorisch doordachten. We vragen de confe-

rentiegangers door middel van stelling 2 hoe hun ideeën zijn rond de relatie tussen studentenonderzoeken, zoals in de *pilot* ontstonden, en de onderwijsopbrengst in de groep waarin de student de interventie pleegt. Ook bij deze stelling zien we sterk wisselende meningen. Ongeveer een vijfde deel van de deelnemers aan de conferentie spreekt zich niet uit voor 'eens' of 'oneens'. Van de rest zijn er ongeveer evenveel voor als tegen deze stelling.

Leraren zijn enthousiast over de bijeenkomsten met studenten op de opleiding. Verschillende leraren laten ons weten veel te leren van deze bijeenkomsten. We stelden evenwel vast dat dit enthousiasme niet betekende dat de leraren zich gingen gedragen als medeonderzoeker. Zij kozen er veel meer voor om de studenten - op grond van de informatie die op de opleiding gegeven werd - te faciliteren het onderzoek uit te voeren. Dit had tot gevolg dat studenten bij hun uiteindelijke verbeteracties voornamelijk organisatorische oplossingen kiezen, omdat - zo vermoeden wij - zij de opdracht de praktijk te ondersteunen en aan te sluiten bij de gebruiken aldaar verkiezen boven het volgen van de opleiding.

Met dit in het achterhoofd leggen we de conferentiedeelnemers drie stellingen voor rond het effectief begeleiden van studenten, namelijk:

- Alleen leraren met onderzoekservaring kunnen studenten effectief begeleiden bij hun praktijkonderzoek in het kader van opbrengstgericht werken.
- Alleen leraren die ervaring hebben met opbrengstgericht werken kunnen studenten effectief begeleiden bij hun praktijkonderzoek in het kader van opbrengstgericht werken.
- Leraren zijn geen onderzoekers. *Zet in op ambachtelijke vaardigheden.* Als ze dat goed doen, zouden we tevreden moeten zijn.

Bij de laatste stelling kiezen we ervoor om het middendeel cursief te maken, om zo aan te geven dat het ons daar in de stelling om gaat. De rest van de tekst schetst de context. De reacties van de conferentiedeelnemers sluiten aan bij onze ideeën dat studenten het type onderzoek waar het hier om gaat - praktijkonderzoek met trekken van ontwerponderzoek - vooral leren via een vorm van *scaffolding*, waarbij een expert aanvankelijk het leren ondersteunt met aanwijzingen en tips, maar wat meer uit het zicht verdwijnt, wanneer de lerende op eigen benen kan staan (vgl. Anghileri, 2006). Dergelijke experts zijn evenwel schaars en de noodzaak van hun aanwezigheid zou betekenen dat dit soort studentenonderzoek feitelijk niet adequaat begeleid kan worden. Dit zou vervolgens betekenen dat de opleiding moet inzetten op ambachtelijke vaardigheden. We vroegen ook hoe de conferentiedeelnemers dit zien (stelling 5). Iets minder dan de helft

van de deelnemers ziet blijkbaar weinig in het studenten laten onderzoeken en zou kiezen voor het inzetten op ambachtelijke vaardigheden.

De uitslag van de eerste vijf stellingen typeert voor een deel de vragen die ook bij onszelf leven. Er zijn allerlei redenen om studenten aan de slag te laten gaan met onderzoek. Het is bijvoorbeeld een eis die in meer algemene zin gesteld wordt aan het bachelorniveau dat studenten bereiken bij het met diploma verlaten van de opleiding. Daarnaast vraagt de beroepspraktijk dat studenten in staat zijn overdacht opbrengstgericht te werken, dat uiteindelijk vraagt om onderzoekende leraren, die nieuwsgierig zijn naar het leren van rekenen-wiskunde van hun leerlingen.

We dagen de conferentiedeelnemers uit met een zesde stelling, waarin is aangegeven dat rekenen-wiskunde domweg te moeilijk is als onderwerp van het praktijkonderzoek van studenten. We merken dat een overgrote meerderheid van de conferentiedeelnemers van mening is dat rekenen-wiskunde zich expliciet wel leent voor praktijkonderzoek. Dat roept de vraag op hoe om te gaan met de discrepantie tussen de geschiktheid van rekenen-wiskunde voor praktijkonderzoek en de mogelijkheden van leraren om dergelijk onderzoek te begeleiden op de werkvloer. We vragen ons af met wie we de dialoog moeten aangaan om hier meer greep op te krijgen. We leggen dit als zevende stelling voor aan de bezoekers van de Panama-conferentie. Een overgrote meerderheid van de deelnemers aan de conferentie geeft aan in deze situatie met leraren in gesprek te gaan. Deze mening sluit ook aan bij wat wij een logische vervolgstap vonden. We gingen met de betrokkenen in gesprek.

7 in gesprek met betrokkenen

Om zicht te krijgen op de opbrengsten van de *pilot* spraken we met verschillende betrokkenen: studenten, leraren, een directeur en twee opleiders. We leggen hen stellingen voor rond de Kennisbasis, rond de kloof tussen theorie en praktijk en kwaliteiten van leraren die studentenonderzoek begeleiden. We vragen naar de Kennisbasis, omdat het ontbreken daarvan wellicht maakt dat studenten in hun onderwijsontwerpen vooral kiezen voor organisatorische oplossingen. Een opleider rekenen-wiskunde die we daarover spreken denkt dat het vergroten van de Kennisbasis op de manier zoals dat nu gebeurt weinig oplevert. Het opleidingsonderwijs richt zich nu namelijk vooral op de komende toetsing (Keijzer, 2011; Kool, 2001; Lit, 2010; 2011). Studenten laten ons weten dat de kennisbasis er wel is, maar is weggezakt. Ze geven ook aan dat ze goed inzien dat de kennisbasis

nodig is om opbrengstgericht werken. Een leraar denkt dat het ontbreken van de kennisbasis ligt in de vooropleiding van studenten. Studenten die van het mbo komen - zo ervaart zij - hebben in het vierde jaar nog altijd een achterstand in kennis. Verder ziet de directeur die we hierover bevragen dat hierin vooral een opdracht voor opleiding en veld ligt.

De kloof tussen de theorie van de opleiding en de actualiteit van de alledaagse praktijk is wellicht zo oud als het opleidingsonderwijs. Samenwerken tussen veld en opleiding is een middel om deze kloof te overbruggen (Panama Kerngroep opleiders, 2007). Dit gaat echter - zo is onze perceptie - niet vanzelf. Wanneer we betrokkenen daarover bevragen, laat een opleider weten dat het probleem erin zit in dat je in verloren uurtjes geen diepgang bereikt. Studenten en mensen uit het veld zien overigens minder problemen dan opleiders; zeker in ons geval waar opleiding en veld samen werken aan het opleiden van studenten.

We leggen mensen die binnen de *pilot* aan de slag zijn ook onze observatie voor dat het onderzoek niet begeleid wordt door onderzoekers en dat de school zich niet altijd voordoet als lerende organisatie. Een opleider en een leraar herkennen dit probleem. Ze zien vooral dat de actualiteit maakt dat er geen of weinig tijd voor reflectie is. Tijd voor reflectie is nodig voor onderzoek, maar een leraar heeft deze tijd vaak niet. Een door ons bevroegde directeur herkent hierin zijn eigen school niet. Hij adviseert om in dit opzicht eisen te stellen aan stagescholen. Studenten sluiten zich hierbij aan. Ze zien hierin een taak voor de opleiding om stagebegeleiders voor te bereiden op hun taak.

We leggen ook een observatie rond het traject van schoolontwikkelvragen naar onderzoeksvragen bij de betrokkenen neer. Scholen brengen zeer brede ontwikkelvragen in. Het onderzoek kan zich echter maar richten op een klein aspect. De school is niet direct geholpen met de uitwerking van een gekozen deelaspect. De directeur die reageert stelt dat dit op zijn school niet aan de orde is. Een leraar sluit aan: 'Kleine bijdragen aan de schoolontwikkeling zijn ook welkom.' Studenten zien dit niet werkelijk als een probleem en daar waar dit wel ontstaat gaat het in hun ogen om een probleem in de afstemming tussen opleiding en veld.

De meningen van betrokkenen geven ons aanwijzingen om een nieuwe *pilot* te starten. Daarin proberen we recht te doen aan de reacties van betrokkenen.

8 nieuwe pilot

Hoewel de hier verwoorde zelfkritische toon wellicht anders suggereert,

beschouwden we de *pilot* als een succes. We zagen mooie studentenonderzoeken ontstaan en constateerden dat ze veel geleerd hadden. De studenten lieten zien hoe zij greep kregen op een aspect van het reken-wiskunde-onderwijs binnen de stageschool. Ook de deelnemende leraren leerden over onderzoek doen. Verder maakte de dialoog met leraren die het opleidingsonderwijs voor een deel meemaakten, dat schoolontwikkelvragen onderwerp van gesprek werden tussen studenten, leraren en opleiders. Dit maakte vervolgens dat de student minder in de rol van boodschapper tussen opleiding en stageschool terecht kwam.

Een en ander neemt niet weg dat de *pilot* ons aan het denken zette. Leraren zagen we toch vooral kiezen voor het faciliteren van het studentenonderzoek. Zij kozen niet de rol van medeonderzoeker. Verder kregen we de indruk dat studenten niet voldoende tijd namen om een nadere studie te maken van vakdidactische aspecten rond de schoolontwikkelvraag en de afgeleide onderzoeksvraag. We zagen dat oplossingen voor gesignaleerde problemen vooral organisatorisch werden opgelost en vermoedden dat dit het gevolg is van de geringe vakdidactische oriëntatie en van wat gebruikelijk is bij het door de scholen zelf aanpakken van problemen in het reken-wiskundeonderwijs.

We kozen er daarom voor de opzet in een nieuwe *pilot* aan te passen. Met de aanpassingen probeerden we aan deze punten tegemoet te komen. We bedachten daarvoor onder meer dat we leraren werkelijk als onderzoekers zouden laten meedraaien. Leraren en studenten zouden samen een onderzoeksvraag formuleren en samen onderzoek doen binnen de school. Echter, al snel bleek dit onhaalbaar, omdat leraren hiervoor geen tijd konden vrijmaken. We kozen er daarom voor:

- deelnemende leraren tijdens de bijeenkomsten nadrukkelijker dan voorheen aan te spreken als medeonderzoekers,
- de studenten veel nadrukkelijker en bij aanvang van de nieuwe *pilot* te wijzen op de vakliteratuur,
- tijdens verschillende reflectieve momenten met studenten en leraren het ontwikkelen van een prototype, als gebruikelijk bij ontwerponderzoek, naar voren te brengen als taak na het maken van een analyse van de situatie.

Bij het schrijven van deze bijdrage is deze tweede *pilot* nog in volle gang. We kunnen daarom niet anders dan eerste indrukken noteren. We zien dat verschillende leraren zich aangetrokken voelen door de onderzoekersrol die wij voor hen in gedachten hebben. We merken dat het hier om leraren gaat met enige onderzoekservaring, bijvoorbeeld opgedaan bij het volgen van een post-hbo opleiding rekencoördinator of een hbo-master. Deze lera-

ren vervullen een goede rol bij het ondersteunen van studenten bij het formuleren van een onderzoeksvraag en het doordenken van een methode om de vraag te beantwoorden. Meer algemene beschouwingen over onderzoek doen zijn aan deze leraren echter niet besteed; dit is voor hen bekende stof. Dergelijke beschouwingen zijn wel geschikt voor leraren met veel minder onderzoekservaring. Met andere woorden, ons idee om leraren aan te spreken als onderzoekers maakt dat wij met een (extra) differentiatieprobleem geconfronteerd worden, namelijk dat tussen deelnemende leraren. Dit is een van de punten die we meenemen bij het verder bijstellen en optimaliseren van het opleidingsonderwijs.

Daarin nemen we ook mee dat we nog altijd merken dat studenten worstelen met het inzetten van vakdidactische kennis bij het formuleren van onderzoeksvragen en het uitwerken hiervan tot een onderwijsarrangement voor leerlingen. Blijkbaar leent de hectiek van een vierde studiejaar, waar de nadruk ligt op het leveren van een bijdrage aan de schoolontwikkeling van de stageschool, zich hiervoor niet. We experimenteren daarom inmiddels met een voortraject voor deze studenten in het derde jaar, waar zij expliciet gericht worden op het vakinhoudelijk en vakdidactisch doordenken van een schoolontwikkelvraag.

9 conclusie

Ontwikkelingen in het onderwijsveld vragen soms om aanpassingen in het opleidingsonderwijs. Dit is in onze ogen zeker het geval als scholen kiezen voor opbrengstgericht werken en als van aanstaande leraren verwacht wordt daarin een zekere vaardigheid verworven te hebben. We gebruikten ontwerponderzoek als onderzoeksaanpak om de ontwikkelvraag die deze aanpassing van het opleidingsonderwijs opriep te beantwoorden. We vonden dat opbrengstgericht werken bij rekenen-wiskunde bezien als te verwerven onderzoeksaanpak door studenten, goed gerealiseerd kan worden door in het opleidingsonderwijs samen met het veld op te trekken. Dat betekent dat we hierover positiever zijn dan een deel van de bezoekers van de Panama-conferentie, die vraagtekens plaatsen bij de opbrengst en effectiviteit van deze samenwerking. Wij denken wel dat we studenten kunnen leren onderzoek te doen, ook wanneer dat gebeurt in een onderwijsveld waar dit niet gebruikelijk is.

Wij baseren ons optimisme op de kwaliteit van het studentenwerk en de reacties van betrokkenen in het veld. Maar er is meer. Omdat we ook zelf voor een onderzoeksmatige werkwijze kozen, hebben we een middel in

handen om veld en opleiding gedurig verder te ontwikkelen. Onze werkwijze voorziet namelijk in een analyse van de opbrengst van onze *pilot* en in aanpassingen in ons ontwerp op grond van deze analyses. Verder voorziet de door ons gekozen werkwijze in een middel om onszelf tot voorbeeld te maken. We creëerden daarin met opzet deze tweede laag. We houden, door onze eigen worstelingen als voorbeeld te nemen, de studenten en leraren een spiegel voor; we functioneren op die manier als *scaffold* of steiger voor studenten en leraren. We denken dat deze ondersteuning een extra bijdrage levert aan de groei van studenten en leraren.

Dat neemt niet weg dat er nog een weg te gaan is. Leraren doen mee in de *pilot* en kiezen, zoals wij beoogden, zelfs af en toe voor de rol als medeonderzoeker. Maar juist omdat zij dit doen creëren we zelf een tweede differentiatieprobleem binnen het opleidingsonderwijs. We moeten het opleidingsonderwijs nu namelijk niet alleen richten op studenten met verschillende ideeën, verschillen in kennis en voorkeuren, maar ook op leraren die ieder op een geheel eigen manier in het praktijkonderzoek staan. Efficiënt gebruikmaken van deze differentiatie in de groep is een ontwerpopdracht voor een volgende bijstelling van het hier beschreven ontwerp. We zijn vastbesloten de komende tijd al met deze puzzel aan de slag te gaan.

literatuur

- Akker, J. van den, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (red.). (2006). *Educational design research*. London: Routledge.
- Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(1), 33–52.
- Bakx, A., H. Breteler, I. Diepstraten & J. Copic (2009). Onderzoek pabo-studenten verankerd in het curriculum – succesfactoren en keerzijden. *Tijdschrift voor Lerarenopleiders*, 30(1), 28–35.
- Bereiter, C. (1985). Toward a solution of the learning paradox. *Review of Educational Research*, 55(2), 201–226.
- Boersma, G. & R. Keijzer (2011). Opbrengstgericht werken voor rekenen-wiskunde op de pabo. In: M. van Zanten (red.). *Reken-wiskundeonderwijs - aanpassen, inpassen, toepassen -*. Utrecht, Panama/Flsme, Universiteit Utrecht. 125–136.
- Dolk, M.L.A.M. (1997). *Onmiddellijk onderwijsgedrag: over denken en handelen van leraren in onmiddellijke onderwijssituaties*. Utrecht: W.C.C.
- Glaserfeld, E. von (1998). *Scheme Theory as key to the learning paradox*. Paper presented at the 15th Advanced Courses, Archives Jean Piaget, Geneva.
- HBO-raad (2006). *Kwaliteit vraagt keuzes. Bestuurscharter Lerarenopleidingen*. Den Haag: HBO-raad.
- Keijzer, R. (2011). Toetsing kennisbasis. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk* 30(1). 16–27.
- Keijzer, R., V. Duman, M. Heeremans & A. Smit (in druk). Kennisbasis als opleidingsdidactische uitdaging. *Tijdschrift voor lerarenopleiders*.
- Keijzer, R., J. van der Linden, J. Vos-Bos & L. Verbeek-Pleune (2012). Leraren basisonderwijs leren opbrengstgericht werken. *Tijdschrift voor lerarenopleiders*.

- 33(2). 39-45.
- Keijzer, R. & B. Zwaneveld (2012). Hoe ontwerpen lerarenopleiders hun onderwijs? *Tijdschrift voor lerarenopleiders*, 33(1), 43-49.
- Kool, M. (2011). Borging van de kennisbasis rekenen-wiskunde op de pabo. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 30(1), 28-32.
- Ledoux, G., H. Blok & M. Boogaard (2009). *Opbrengstgericht werken; over de waarde van meetgestuurd onderwijs*. Amsterdam: SCO-Kohnstamm Instituut.
- Leeman, Y. & W. Wardekker (2010). Verbetert onderzoek het onderwijs? *Tijdschrift voor Lerarenopleiders*, 30(1), 19-22.
- Lit, S.A. (2010). Kennis en kwaliteit: een kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 29(1), 32-35.
- Lit, S.A. (2011). Kennisbasis en kwaliteitsverhoging. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 30(1), 33-35.
- Milo, B. & M. Baltussen (2011). Automatiseren bij rekenen-wiskunde – een inspectieonderzoek. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 30(3), 39-45.
- Oonk, W., R. Keijzer, K. Olofsen, C.A.J. de Vet, K. Tjon Soei Sjoel, N. Blom, P.F.J. Ale & A. Markusse (1994). Reflecteren als gereedschap. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 12(4), 3-16.
- Panama Kerngroep opleiders (2007). *Opleiden in geuren en kleuren*. Utrecht: Panama/Freudenthal Instituut.
- PO-Raad (2010). *Opbrengstgericht werken met en in de pabo*. Utrecht: PO-Raad.
- Schön, D.A. (1983). *The Reflective Practitioner: How professionals think in action*. London: Temple Smith.

Verschillen tussen kinderen in de ontwikkeling van het leren vermenigvuldigen

S. van der Ven & E. Kroesbergen¹
Universiteit van Amsterdam/Universiteit Utrecht

1 inleiding

Het leren van een nieuwe vaardigheid, zoals rekenen, is een proces dat geen rechte lijn volgt. Kinderen lijken zich sprongsgewijs te ontwikkelen: tot frustratie van de moderne leerkracht, gericht op opbrengstgericht werken, valt een kind steeds maar terug op oude, ingesleten gewoontes, zoals tellen op de vingers, en lijkt het soms of het niets in de les heeft opgestoken. Een tijdje later verloopt de ontwikkeling ineens razendsnel en gebruikt het kind veel slimme, nieuw geleerde strategieën, hoewel nog steeds af en toe een terugval zichtbaar is. Het lijkt erop dat kinderen over een repertoire aan strategieën beschikken, waaruit ze soms, maar lang niet altijd, de handigste strategie kiezen die ze tot hun beschikking hebben. Dit is niet uniek voor kinderen: zelfs op volwassen leeftijd blijken veel mensen sommen die ze eigenlijk al lang geautomatiseerd hebben, zoals $8 + 7$, in de praktijk toch regelmatig nog even na te rekenen.

2 overlappende golven

Ruim vijftien jaar geleden zag Robert Siegler (1996) een patroon in deze ogenschijnlijke chaos. Het gebruik van een strategie komt geleidelijk op als het kind ermee kennis maakt: eerst langzaam, dan steeds sneller. Het gebruik daalt vervolgens weer langzaam wanneer het kind betere alternatieven ontdekt. Dit patroon lijkt op het stijgen en dalen van golven in de branding. Siegler noemde dit dan ook *Overlapping Waves*. Op ieder moment in de ontwikkeling heeft het kind de keuze uit meerdere strategieën: de golven lopen door elkaar heen. Welke strategieën een kind precies gebruikt, en welke het meest gekozen worden, verschuift in de loop

van de ontwikkeling geleidelijk naar steeds slimmere strategieën.

Er is inderdaad enige ondersteuning gevonden voor deze hypothese. Zo bleek dat in het begin van groep 4, Franse kinderen bij het uitrekenen van vermenigvuldigsummen een mix aan strategieën gebruikten, maar vooral veel gebruikmaakten van optelstrategieën. Halverwege en aan het eind van het jaar was dit een stuk minder geworden, maar nog niet verdwenen (Lemaire & Siegler, 1995). Deze resultaten tonen overlap aan tussen de strategieën, maar nog niet dat deze ook echt een patroon van golven vormen. Met slechts drie metingen is dit ook niet te achterhalen. Uitgebreider onderzoek is dus noodzakelijk.

3 ons eigen onderzoek

In ons onderzoek hebben we daarom gedetailleerder gekeken hoe de ontwikkeling van het leren vermenigvuldigen verloopt. Daartoe hebben 98 kinderen uit groep 4 in februari en maart elke week, in totaal acht keer, een korte vermenigvuldigtaak gemaakt. Deze taak bestond uit een aantal kale sommen en een aantal contextsommen met een kort verhaaltje en een plaatje (fig.1).



figuur 1: een van de contextopgaven

De specifieke context was elke week verschillend, om herkenningseffecten te voorkomen. De sommen varieerden van vrij gemakkelijk (7×2) tot behoorlijk pittig (6×8). We keken niet alleen naar de juistheid van de gegeven antwoorden, maar vooral naar de strategieën die de kinderen gebruikten. Daarom zat er steeds een proefleider naast het kind, die observeerde en navroeg hoe het kind elke som had aangepakt. Aan de hand van deze wekelijkse metingen hebben we gekeken of het model van de overlappende golven van Siegler inderdaad een goede omschrijving vormt van het leerproces.

4 verschillende strategieën

De sommen werden door de kinderen op allerlei manieren uitgerekend. In totaal konden we maar liefst 34 verschillende strategieën en combinaties ervan identificeren. Dat was te veel voor de statistische methoden die we wilden gebruiken, maar we konden dit aantal terugbrengen tot vijf categorieën, zoals ook toegepast in eerder onderzoek (Mabbott & Bisanz, 2003).

1 *Foute strategieën*

Foute strategieën geven aan dat het kind niet goed weet wat te doen met een som. Voorbeelden zijn gokken, zeggen 'ik weet het niet' en optellen ($7 \times 4 = 11$).

2 *Telstrategieën*

Het kind lost de som tellend op. Dit kan op de vingers of hardop gebeuren, of het kind maakt een tekening van de situatie. Een voorbeeld van zo'n tekening staat in figuur 2. Een telstrategie is een correcte strategie, maar de uitvoering is bewerkelijk. Het duurt lang en de kans op het maken van een fout is groot.

3 *Herhaald optellen*

Het kind gebruikt het al goed ingesleten optellen om tot een antwoord te komen: $5 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4$. Dit is een efficiëntere strategie dan de telstrategieën. Het aantal tussenstappen is immers flink gereduceerd. Ook hiervan is een voorbeeld te zien in figuur 2.

4 *Handige strategieën*

Bij de handige strategieën maakt het kind gebruik van bestaande kennis om via een kortere route dan herhaald optellen tot een antwoord te komen. Voorbeelden zijn verdubbelen, zoals in figuur 2 voor het oplossen van 6×8 : $8 + 8 + 8 = 24$; $24 + 24 = 48$, of het gebruiken van kapstokken, zoals de relatief gemakkelijke tafels van 10 en 5 (bijvoorbeeld $6 \times 4 = 5 \times 4 + 4 = 20 + 4 = 24$).

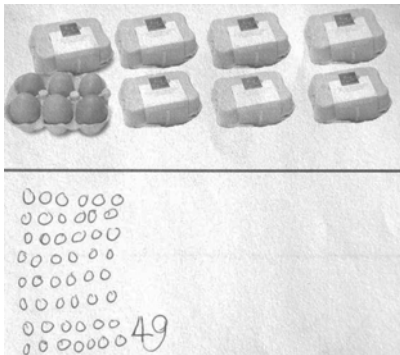
5 *Geautomatiseerd*

Het kind heeft het juiste antwoord paraat, zonder dat er nog een berekening hoeft te worden uitgevoerd. In het huidige onderwijs is het streven nog steeds dat het kind de tafels onder de 10 leert te automatiseren. Dit stadium hoeft echter ten tijde van ons onderzoek, halverwege groep 4, nog niet bereikt te zijn.

Duidelijk is dat er in het algemeen een stijgende lijn zit in de mate van geavanceerdheid van deze strategieën. De statistische analyses die we hebben uitgevoerd, werken dan ook onder de aanname dat je een bepaald niveau van strategiegebruik alleen kunt bereiken na beheersing van de eerdere niveaus.

opgave 13

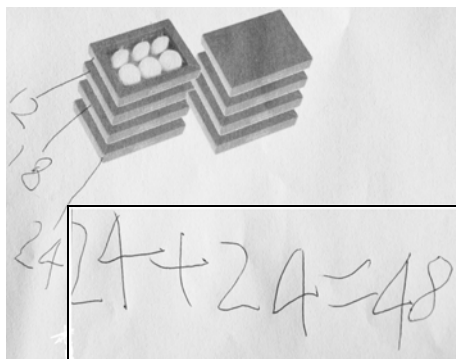
De supermarkt heeft 8 doosjes eieren.
In elk doosje zitten 6 eieren. Hoeveel
eieren zijn er in de supermarkt?



telstrategie

opgave 12

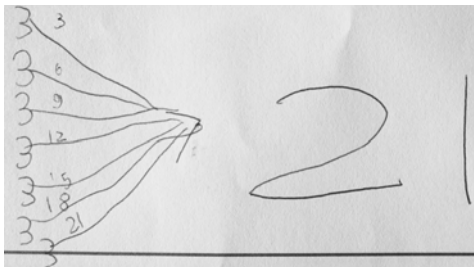
Rens koopt 8 dozen met bonbons.
Hoeveel bonbons koopt Rens?



handige strategie (verdubbelen)

opgave 4

$$7 \times 3 =$$



herhaald optellen

figuur 2: voorbeelden van verschillende strategieën

Voor de eerste vier strategieën lijkt het vrij duidelijk dat deze aanname geldig is. Je kunt bijvoorbeeld niet herhaald optellen als je niet kunt tellen. Er is meer discussie over de vraag of het vijfde niveau, 'geautomatiseerd', inderdaad het meest geavanceerde niveau van strategiegebruik is. Door 'stampen', bijvoorbeeld door het herhaaldelijk opdreunen van de tafels zonder daarbij aandacht te besteden aan onderliggend begrip, is het immers mogelijk om sommen te memoriseren zonder de voorgaande

niveaus te beheersen. Toch gaan wij er in dit onderzoek vanuit dat dit niveau inderdaad het meest geavanceerd is. In de huidige reken-wiskundemethoden wordt immers vrijwel zonder uitzondering gebruikgemaakt van realistische methodes. Hierin worden, in tegenstelling tot vroeger, de tafels niet of nauwelijks nog gememoriseerd door herhaaldelijk opdreunen. In plaats daarvan wordt er veel meer aandacht besteed aan een goed conceptueel begrip van de bewerking en het kunnen toepassen van eigen oplossingsmethodes, zoals beschreven in de overige categorieën van strategiegebruik. Het memoriseren van rekenfeiten is nog steeds een doel, maar ingebed in het gebruik van andere strategieën wordt dit doel pas bereikt als het kind ook tot het gebruik van andere strategieën in staat is. Wanneer deze aanname echt verkeerd blijkt, zal dit zijn weerslag hebben op de resultaten. Dit was gelukkig niet het geval. Bovendien zat er eenzelfde stijgende lijn in de mate waarin het gebruik van elke strategie tot een goed antwoord leidde. Wanneer er een foute strategie werd gekozen, was het antwoord slechts in 2 procent van de gevallen goed. Tellen ging vaker goed: in 55 procent van de gevallen. Bij herhaald optellen ging 62 procent goed, bij de handige strategieën 68 procent en de geautomatiseerde sommen waren in 85 procent van de gevallen correct.

5 globaal beeld van de resultaten: groepsgemiddelden

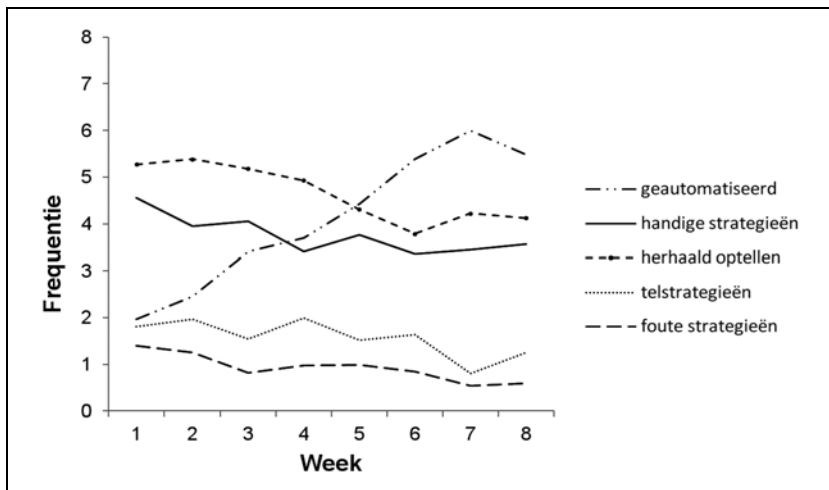
Bij een eerste, globale analyse bleek dat kinderen, zoals we verwachtten, inderdaad variabiliteit in strategiegebruik lieten zien. Per sessie maakten vrijwel alle kinderen gebruik van strategieën uit meerdere van de hiervoor genoemde categorieën: meestal waren dat er twee tot vier van de vijf.

Ook vonden we, in overeenstemming met de theorie van overlappende golven, aanwijzingen voor een globale vooruitgang in strategiegebruik: er zit een stijgende lijn in de mate waarin sommen geautomatiseerd waren (fig.3). Ook bleek er sprake te zijn van regelmatig terugvallen.

Ter illustratie: vaak lieten kinderen zien dat ze een som in principe hadden geautomatiseerd, door zonder gebruik van een rekenstrategie direct het correcte antwoord te geven. Ze beheersten dus het hoogste niveau. Toch vielen ze in 22 procent van de gevallen terug op een lagere strategie, wanneer dezelfde som in een latere week opnieuw werd aangeboden.

Wel is duidelijk dat er geen patroon van golven zichtbaar is in figuur 3.

Toch is dit niet verbazingwekkend. De figuur is immers een gemiddelde van zo'n honderd kinderen, die weliswaar allen in groep 4 zitten, maar zeker niet allemaal even ver in hun ontwikkeling zijn. Dit kan het patroon van de golven sterk verstoren.



figuur 3: gemiddeld verloop van strategiegebruik

Wanneer de lijn van een bepaalde strategie horizontaal loopt, kan het in theorie betekenen dat er geen enkele ontwikkeling is in het gebruik van deze strategie, maar het is even goed mogelijk dat sommige kinderen een daling in die strategie laten zien en anderen een stijging. In dat laatste geval kan er op individueel niveau wel degelijk sprake zijn van overlappende golven, maar het gemiddelde van al die golven levert geen duidelijk herkenbare golven meer op. Kortom: het volstaat niet om slechts te kijken naar gemiddeldes op groepsniveau. In plaats daarvan moet er een onderscheid gemaakt worden waarbij wordt gekeken hoe ver kinderen gevorderd zijn in hun ontwikkeling.

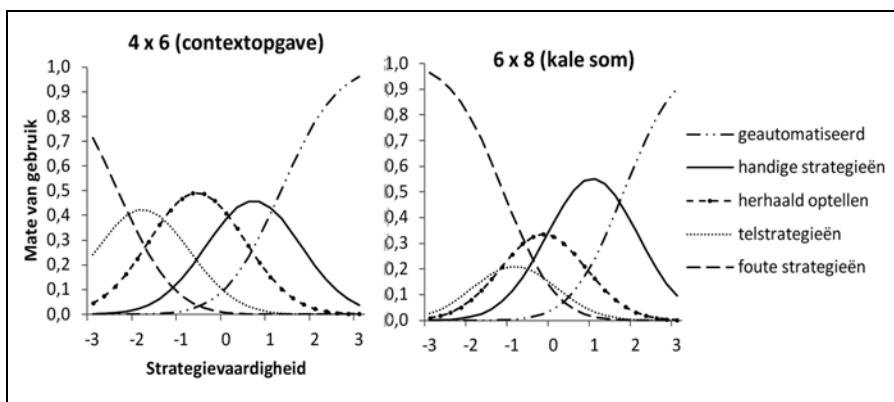
6 toetsing van de theorie van de overlappende golven

Daarom hebben we verder gekeken met behulp van geavanceerde statistische technieken: een combinatie van de itemresponstheorie en het gebruik van latente groeicurven. Met deze combinatie van technieken kan gekeken worden of het patroon van strategieën die kinderen gebruiken lijkt op een golfpatroon (het *Graded Response Model* van Samejima, 1969, uit de itemresponstheorie) en of dat patroon in de loop van de tijd voor-

spelbaar verandert naar het gebruik van steeds geavanceerdere strategieën (latente groeicurven).

Het *Graded Response Model* definieert de globale vorm en positie van de curves: uiterst links komt altijd de foute strategie, en elke volgende strategie komt een stukje meer naar rechts. Bij het uitvoeren van de analyses wordt er gekeken hoe de curves er precies uitzien om het best te kloppen bij de gegevens van de kinderen. Er wordt bepaald wat de precieze hoogte is van de curve van elke strategie, en ook hoe ver de curves precies uit elkaar liggen. Daarna wordt gekeken hoe precies de oorspronkelijke data passen bij deze curves; is het golfmodel een goede beschrijving van alle gegevens, of zijn er veel kinderen of sommen die juist helemaal niet in het model passen en zich heel anders ontwikkelen? Dit wordt aangeduid met *fit indices*. De fit van ons model was, zeker gezien de uitzonderlijk hoge complexiteit, redelijk tot goed.² Gemiddeld genomen ontwikkelen kinderen zich dus inderdaad volgens de theorie van de overlappende golven.

Er is in de analyses rekening gehouden met het feit dat de ene som de andere niet is: het is immers aannemelijk dat kinderen met gemakkelijke sommen al verder in hun ontwikkeling zijn dan met moeilijke sommen. Bovendien zullen sommige sommen zich meer dan andere lenen voor het gebruik van handige strategieën. Ook kan het uitmaken of een som kaal of in een context wordt aangeboden. Daarom zijn de curves voor elke som apart bepaald.



figuur 4: de overlappende golven van twee sommen

Het model in figuur 4 toont de uiteindelijke curves voor twee van de sommen. Uit de figuur blijkt dat het patroon van overlappende golven goed te herkennen is. Vooral bij de som 4×6 is dit het geval. Langs de horizontale as staat de strategievaardigheid van het kind: hoe hoger de vaardigheid,

hoe meer naar rechts het kind zich bevindt en hoe meer het gebruikmaakt van de geavanceerdere strategieën. De sommen zijn aan elkaar gekoppeld: de strategievaardigheidsscore van een kind is hetzelfde voor alle sommen. Langs de verticale as staat de mate van gebruik weergegeven, oftewel de waarschijnlijkheid dat een kind met een bepaalde vaardigheid elke strategie zal gebruiken. Een waarschijnlijkheid van 0,5 betekent dat er 50 procent kans is dat het kind deze strategie zal kiezen. Een kind met een vaardigheid van 0 heeft bijvoorbeeld een kans van ongeveer 40 procent om de som 4×6 op te lossen met herhaald optellen, en nog eens 40 procent om een handige strategie te kiezen.

De kans op een telstrategie is zo'n 10 procent, evenals de kans dat het kind gebruik maakt van geautomatiseerde kennis, en de kans op een foute strategie is vrijwel 0. Helemaal links, bij een lage vaardigheid, is het juist vrij zeker dat het kind een foute strategie zal gebruiken. In de loop van de ontwikkeling schuift het kind langzaam maar zeker naar rechts in de figuur. De getallen op de horizontale as zijn arbitrair: in ons geval zijn ze zo gekozen dat het nulpunt halverwege de studie ligt. Een precies gemiddeld kind had dus halverwege de studie een vaardigheid van 0, maar dat verschilde uiteraard tussen kinderen.³ In de loop van de acht weken van de studie verschoven de kinderen gemiddeld 0,97 punt naar rechts, maar ook hiervoor gold dat het ene kind zich veel sneller ontwikkelde dan het andere.⁴

7 verschillende soorten sommen

Wat verder in het oog springt, is dat de golven voor beide voorbeeldsommen verschillend zijn. Voornamelijk opvallend is dat de curve van de telstrategieën bij de som 6×8 nauwelijks van de grond komt. Dit patroon bleek ook bij andere kale sommen terug te vinden. Bij contextsommen zoals 6×4 is er wel een mooie 'telgolf'. Dit betekent dat het voor kinderen met een lage vaardigheid veel verschil maakt hoe een som wordt aangeboden. Wellicht begrijpen ze de notatie van een kale som als 7×3 nog niet. Als ze deze interpreteren als '7 kruisje 3', kunnen ze dit logischerwijs niet uitrekenen. Wordt deze som echter in een verhaaltje aangeboden, dan begrijpen ze dit wel, en kunnen ze tellend tot een antwoord komen. Op dit niveau is het begrip van vermenigvuldigen dus alleen nog impliciet. Wanneer kinderen de notatie van een kale som wel begrijpen, is hun vaardigheid ook ver genoeg gevorderd om nauwelijks nog van telstrategieën gebruik te maken.

Wat niet in de figuur te zien is, maar wel duidelijk uit onze gegevens bleek, is dat de gekozen strategie ook samenhang met de juistheid van het gege-

ven antwoord: hoe slimmer de strategie, des te vaker was het gegeven antwoord correct. Dit is logisch: slimmere strategieën vereisen minder tussenstappen, dus bieden minder gelegenheid om rekenfouten te maken. Bovendien zijn alleen de kinderen die al verder gevorderd zijn in staat om slimmere strategieën toe te passen. Strategiegebruik en accuratesse gaan zo hand in hand.

8 goede en zwakke rekenaars: de verschillen

Naast het bevestigen van de overlappende golven hadden we nog een tweede vraag: Hoe kunnen we verklaren dat sommige kinderen snel alle golven doorlopen terwijl andere kinderen daar meer tijd voor nodig hebben? Als we weten over welke vaardigheden goede rekenaars beschikken, biedt dat immers aanknopingspunten voor het ondersteunen van zwakke rekenaars. Ons vermoeden was dat het vermogen om informatie kort vast te houden, oftewel het werkgeheugen, hier wel eens een sleutelrol in zou kunnen spelen. Uit eerder onderzoek is immers al bekend dat kinderen met een goed werkgeheugen doorgaans ook betere rekenaars zijn, terwijl kinderen met rekenproblemen vaak een lage werkgeheugencapaciteit hebben.⁵ Ons vermoeden was dat dit verband tussen werkgeheugen en rekenprestaties wel eens te maken zou kunnen hebben met het strategiegebruik van de kinderen. Dit is te verklaren aan de hand van de zogenaamde netwerktheorie (Geary, Brown, & Samarayanake, 1991; Siegler, 1996).

Tijdens de ontwikkeling van de hersenen is het van cruciaal belang dat de juiste verbindingen tussen hersencellen aangelegd en versterkt worden. Bij het leren rekenen moeten er verbindingen gelegd worden tussen verschillende getallen, bijvoorbeeld tussen 6, 3 en 18. Als een som geautomatiseerd is, zal het getal 18 als vanzelf bovenkomen wanneer 6×3 wordt getoond. Er is dus een sterke verbinding tussen de getallen. Door de som vaak uit te rekenen, kan een beginnend rekenaar deze verbinding vormen. Wanneer een kind echter een zwak werkgeheugen heeft, zal het moeite hebben om de som goed uit te rekenen. Zeker in de eerste stadia van het leerproces, wanneer er veel tellend wordt gerekend, wordt er immers een groot beroep op het werkgeheugen gedaan. Het kind moet de som onthouden, goed opletten dat het steeds precies drie verder telt (en niet per ongeluk twee of vier) en bovendien goed bijhouden hoeveel drieën er al zijn opgeteld en hoeveel er dus nog opgeteld moeten worden. De kans is reëel dat een kind met een zwak werkgeheugen hier ergens een foutje maakt en niet op 18 uitkomt. Of de kans bestaat dat het kind wel op 18 uitkomt, maar niet meer goed weet dat de som 6×3 was. In beide gevallen wordt de

verbinding tussen som en uitkomst niet versterkt, heeft het kind weinig geleerd en kan het de volgende keer ook geen slimmere strategie toepassen.

Kortom: we verwachtten een dubbel verband tussen werkgeheugen en rekenen. We verwachtten dat kinderen met een goed werkgeheugen beter grip hebben op de handelingen die ze uitvoeren, en daardoor minder procedurele fouten zouden maken. Bovendien verwachtten we dat deze kinderen beter in staat zijn om een rijk rekennetwerk op te bouwen, dat ze in staat stelt steeds slimmere strategieën te gebruiken, waardoor ze nog weer minder fouten zouden maken. Alle kinderen hebben daarom naast de rekentaken ook eenmalig een aantal werkgeheugentaken gemaakt, waarin ze onder andere een steeds langer wordende reeks cijfers achterstevoren moesten nazeggen. Deze werkgeheugenscore hebben we gerelateerd aan de strategievaardigheid en accuratesse van de gemaakte sommen.⁶

Onze verwachtingen kwamen inderdaad uit. Hoe hoger de kinderen hadden gescoord op de werkgeheugentaken, des te meer maakten zij gebruik van geavanceerde strategieën: ze scoorden verder naar rechts in de grafieken in figuur 4. Kinderen met een zwak werkgeheugen bevonden zich veel meer links in de figuur. Bovendien was er ook een duidelijk verband met accuratesse: hoe beter het werkgeheugen, des te lager het aantal gemaakte fouten. Dit geeft aan dat kinderen met een zwak werkgeheugen daar op twee wijzen last van hebben bij het rekenen: ze zijn vanwege een onvoldoende opgebouwd rekennetwerk niet in staat om slimmere strategieën te gebruiken, en ze maken ook nog eens meer rekenfouten dan je al zou verwachten op basis van de strategieën die ze kiezen. Er is sprake van de paradoxale situatie dat kinderen met een zwak werkgeheugen noodgedwongen blijven hangen in het gebruik van strategieën die juist een groot beroep op het werkgeheugen doen, gezien het grote aantal stappen dat gezet moet worden om de som uit te rekenen.

9 sekseverschillen

Ten slotte hebben we gekeken of er verschillen waren tussen jongens en meisjes. Die bleken er niet te zijn in het totale aantal goede antwoorden, en ook niet in het werkgeheugen. Toch bleken er twee paradoxale andere verschillen: jongens kozen meer geavanceerde strategieën, maar juist de meisjes gingen in de loop van het onderzoek meer vooruit in het totale aantal goede antwoorden. Dit werd veroorzaakt door een verschil in gebruik van slechts een van de strategieën: memoriseerd antwoord geven. Hierin waren de jongens duidelijk overmoediger dan de meisjes. Bijna twee keer

zo vaak als de meisjes gaven zij aan dat ze het antwoord op een som gememoriseerd hadden. In 81 procent van de gevallen gaven de jongens dan ook inderdaad het correcte antwoord, terwijl dit bij de meisjes maar liefst 89 procent was: de jongens maakten bijna dubbel zoveel fouten! Een fout antwoord ophalen versterkt juist de verkeerde verbindingen, en dat bevordert het leerproces natuurlijk niet. Bij de overige strategieën deden de jongens het juist iets beter: ze maakten minder gebruik van telstrategieën en ze maakten bovendien minder fouten in de handige strategieën. Mogelijk zou er dus een duidelijker voordeel voor de jongens ontstaan als zij hun overmoed leren beteugelen.

10 praktische relevantie

Wat betekent dit nu in de dagelijkse onderwijspraktijk? Hoe kunnen zwakke rekenaars het best geholpen worden? Ons onderzoek was niet specifiek op deze vragen gericht, maar het biedt wel enkele aanknopingspunten.

Allereerst bleek een duidelijk verband tussen strategiegebruik en accuratesse. Hoe slimmer de strategie, des te vaker werd er een correct antwoord gegeven. Er bleek bovendien ook een samenhang te zijn tussen het geven van goede antwoorden en vooruitgang in strategiegebruik: het geven van goede antwoorden gaat samen met een snellere ontwikkeling van de gebruikte strategieën. Mogelijk is het dus zinvol om kinderen te stimuleren vaker slimmere strategieën te gebruiken. Die leiden immers vaker tot een goed antwoord. Voor sommige kinderen zal dit een goede methode zijn. Maar het kan heel goed zijn dat dit bij andere kinderen, met name de kinderen met een zwak werkgeheugen, tot averechtse resultaten leidt. Het kind moet immers wel in staat zijn om die slimmere strategieën te gebruiken, anders zal het alleen maar op nog meer foute antwoorden uitkomen. Wellicht is het voor deze kinderen beter om ervoor te zorgen dat het kind op een goed antwoord komt - desnoods wat langzamer. Door concrete hulpmiddelen aan te bieden, wordt het zwakke werkgeheugen van het kind ontlast. Ook kan het helpen om terug te kijken naar wat de som ook alweer was. Op deze wijzen krijgt het kind de mogelijkheid om de verbinding tussen som en het antwoord alsnog te versterken. Het kind zal dan waarschijnlijk ook slimmere strategieën gaan gebruiken wanneer het daartoe in staat is. Verder onderzoek zal moeten uitwijzen wat uiteindelijk de beste methode is.

11 trainen van het werkgeheugen

Daarnaast zou het natuurlijk het allermooist zijn als het werkgeheugen van zwakke kinderen verbeterd kan worden door het te trainen. Dit zou vervolgens positieve effecten moeten hebben op de rekenprestaties van de kinderen. De vraag is of dit mogelijk is. Het onderzoek hiernaar staat in de kinderschoenen, maar komt al wel steeds meer op gang. De eerste resultaten leveren een gemengd beeld op. Vaak wordt er gevonden dat mensen wel beter worden op de getrainde taken, maar niet op vergelijkbare onge-trainde taken.

Toch zijn er voorzichtig hoopvolle resultaten dat flexibele, jonge kinderher-senen wel degelijk getraind kunnen worden. Een leerkracht die daar oog voor heeft, kan zo'n training in gewone lessen verwerken zonder dat het veel moeite kost. Bijvoorbeeld door voorwerpen op een tafel af te dekken en kinderen te laten opschrijven wat eronder lag. Ook bekende spelletjes als memory, kwartet en 'ik ga op reis en ik neem mee...' doen een beroep op het werkgeheugen.

12 conclusies

Samenvattend zijn uit dit onderzoek drie conclusies te trekken. De eerste is dat strategieën zich, zoals Robert Siegler al voorspelde, ontwikkelen als overlappende golven. Variabiliteit in strategiegebruik is een normaal aspect in de ontwikkeling van rekenvaardigheid: na het kennismaken met een nieuwe strategie zal het een tijdje duren tot een kind deze ook echt veelvuldig zal gebruiken. Ten tweede bleek, niet onverwacht, dat het gebruik van slimmere strategieën vaker tot een goed antwoord leidt. Ten slotte bleek dat een beter werkgeheugen zorgt voor het gebruik van slim-mere strategieën, en bovendien tot het maken van weinig fouten.

noten

- 1 Inmiddels is er een uitgebreidere, internationale versie verschenen (Van der Ven, Boom, Kroesbergen & Leseman, 2012).
- 2 De exacte fit indices zijn: $X^2(2214) = 3117.02$, $p < .001$, $NC = 1.41$, $CFI = .89$, $RMSEA = .065$.
- 3 $SD = 1,02$.
- 4 $SD = 0,90$.
- 5 Een uitgebreide review is te vinden in Raghubar, Barnes, & Hecht, 2010.
- 6 Accuratesse werd gemodelleerd met een Raschmodel: een van de standaardmo-dellen in de itemresponsstheorie.

literatuur

- Geary, D.C., S.C. Brown & V.A. Samaranayake. (1991). Cognitive addition: A short longitudinal study of strategy choice and speed-of-processing differences in normal and mathematically disabled children. *Developmental Psychology*, 27, 787-797.
- Lemaire, P. & R.S. Siegler (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General*, 124, 83-97.
- Mabbott, D.J. & J. Bisanz (2003). Developmental change and individual differences in children's multiplication. *Child Development*, 74, 1091-1107. doi: 10.1111/1467-8624.00594
- Raghubar, K.P., M.A. Barnes & S.A. Hecht (2010). Working memory and mathematics: A review of developmental, individual difference, and cognitive approaches. *Learning and Individual Differences*, 20, 110-122. doi:10.1016/j.lindif.2009.10.005
- Samejima, F. (1969). Estimation of latent ability using a response pattern of graded scores. *Psychometrika Monograph Supplement*, 34, 100-114.
- Siegler, R.S. (1996). *Emerging minds, the process of change in children's thinking*. New York: Oxford University Press.
- Ven, S.H.G. van der, J. Boom, E.H. Kroesbergen & P.P.M. Leseman (2012). Micro-genetic patterns of children's multiplication learning: Confirming the overlapping waves model by latent growth modeling. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113, 1-19. doi: 10.1016/j.jecp.2012.02.001.

Opbrengstgericht werken volgens de PARWO-visie

- de tafels gekeerd -

D. van der Straaten & F. Moerlands
PARWO, Tilburg/SSOT, Tilburg

1 inleiding

Iedereen die onderwijs een warm hart toedraagt is erop gericht het leerrendement van kinderen zo optimaal mogelijk te benutten. Toch lijken resultaten op (inter)nationale toetsingen niet het gewenste effect te geven. Dit is voor (met name) de PO-raad aanleiding om extra focus te richten op het leerrendement. Ze doen dat onder andere door van scholen die gericht hun opbrengsten weten te verhogen de aanpak te analyseren (Gelderblom, 2011). Hoewel we het initiatief om zoveel mogelijk rendement uit de kinderen te halen toejuichen, zijn we ook kritisch ten aanzien van de aandacht voor opbrengsten. We zien namelijk dat dit door leerkrachten opgepakt wordt als ‘de opbrengsten moeten omhoog’. Ze lijken daardoor niet breder naar de ontwikkeling van kinderen te kijken, maar juist smaller, door de aandacht te richten op wat er in de toetsen gevraagd wordt. Het te eenzijdig richten op opbrengsten is vergelijkbaar met alsmaar lagen verf aanbrengen op een kozijn dat onderhoud vraagt. Wij denken dat kwaliteitsverbetering vooral plaatsvindt vanuit een inhoudelijke focus. Niemand heeft baat bij een glimmende laag lak die er na verloop van tijd weer afbladdert. Zoals in deze verfmetafoor het schuren, ontvetten en gronden bepalend zijn voor het resultaat, zo geldt dat in het onderwijs vooral de funderende activiteiten zorgen dat kennis ‘hecht’ en goed wordt opgebouwd.

In dit artikel bespreken we als alternatieve benadering een *try-out* van een lessencyclus vanuit de PARWO-visie en de bijzondere resultaten daarvan.

2 visie

Binnen de ‘Stichting Speciaal Onderwijs Tilburg’ (SSOT) en het project ‘Pas-send Reken-Wiskunde Onderwijs’ (PARWO), werken we aan ontwikkelingsgericht reken-wiskundeonderwijs. We hanteren daarbij de ijsbergmetafoor

(Boswinkel & Moerlands, 2003; Moerlands & Van der Straaten, 2009). Dit beeld past - ons inziens - erg goed bij de grondbeginselen van realistisch rekenonderwijs. Freudenthal (1991) benadrukt met de term *mathematization* dat het bij het leren van de wiskunde gaat om een proces van abstraheren en hij typeert dat wiskundige (leer)proces in twee richtingen:

Horizontal mathematization leads from the world of life to the world of symbols. In the world of life one lives, acts (and suffers); in the other one symbols are shaped, reshaped, and manipulated, mechanically, comprehendingly, reflectingly: this is vertical mathematization. The world of life is what is experienced as reality (...), as is a symbolworld with regard to abstraction. To be sure the frontiers of these worlds are vaguely marked. The worlds can expand and shrink – also at one another's expense. (pag.41-42)

In de ijsbergmetafoor is de horizontale 'mathematisering' de interactie tussen de omgeving (de werkelijkheid) en de ijsberg (de wiskunde). Het uitkristalliseren van de omgeving vormt de ijsberg. Door het groeien en krimpen van de ijsberg zal ook meer of minder van het topje (de uiteindelijke algemeen aanvaarde wiskunde) boven komen drijven (verticale mathematisering). Zo 'ontstaat' de wiskunde als uitgekristalliseerde werkelijkheid (fig.1) en gebruiken we de ontstaansgeschiedenis van de wiskunde als didactisch principe.



figuur 1: wiskunde als uitgekristalliseerde werkelijkheid

Freudenthal gebruikte de term *guided reinvention* om te onderstrepen dat het leren van wiskunde gaat volgens het herontdekken van de wiskundige principes zoals deze door wiskundigen zijn bedacht. Zo is voor elk wiskundig domein een didactische ijsberg voor te stellen. Het belangrijkste dat we met de ijsbergmetafoor echter duidelijk willen maken is, dat kinderen wiskunde leren begrijpen door wiskundig actief te zijn en vanuit de bonte werkelijkheid steeds abstracter leren redeneren.

3 kritiek

Op de realistische benadering is ook veel kritiek (Keune, 1998; Van de Craats, 2007). Met name Keune (1998) verwoordt dat scherp:

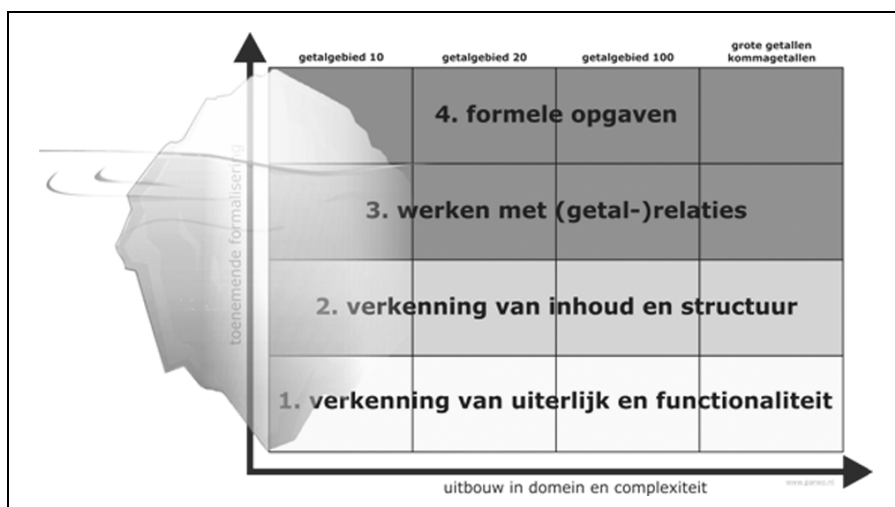
Wat is er volgens mij nu echt mis met veel van ons wiskundeonderwijs? De meest diepgaande fout is het verwarren van abstractie en realiteit. Abstractie is ontstaan uit de behoefte tot helderheid. In de hersenspinsels van de wiskunde is er sprake van absolute helderheid. In ons onderwijs wordt dat mistig gemaakt en dat is zonde. Het is een gemiste kans voor het leren van exact denken. (par.4)

Daarmee is hij niet kritisch op de grondbeginselen van de realistische didactiek, maar eerder op de uitwerking daarvan. De uitwerking van de realistische didactiek heeft onder andere plaatsgevonden door de invoering van zogenoemde 'realistische rekenmethodes'. Men kan zich daarbij afvragen in hoeverre het de uitgevers en schrijvers van deze methodes is gelukt het wiskundig denk- en leerproces - het beoogde abstractieproces - bij kinderen op gang te brengen.

Dolk (2004; 2007) waarschuwt dat door de invoering van deze methodes (en vooral de uitgewerkte beschrijvingen in de handleidingen) het lijkt dat het didactische denkwerk niet meer door leerkrachten gedaan hoeft te worden. Bovendien is het de vraag of de achterliggende didactische structuur helder is (Van der Straaten, Moerlands & Den Ouden, 2011) en of het deze leerkrachten echt helpt om kinderen wiskundig actief te krijgen. Goed onderwijs ontstaat niet door alleen een mooie methode te schrijven die de problemen voor de leerkracht oplost. Er moet ook naar het lerende kind worden gekeken. Verder zijn ook de realiteit en de wiskundige processen lastig in boekjes te vangen en zullen deze ook los van de methode recht gedaan moeten worden. Al deze aandachtsgebieden (het onderwijs, het lerende kind, de inhoud en/of de wiskunde en de realiteit) moeten in balans zijn om goed onderwijs te realiseren (Van der Straaten, e.a., 2011).

4 didactisch kader

In een poging om goed reken-wiskundeonderwijs te ontwikkelen, proberen wij leerkrachten houvast te geven met een compact didactisch kader. We leggen daarbij een groot deel van het didactisch denkwerk nadrukkelijk bij de leerkracht en streven ernaar de kinderen wiskundig actief te krijgen. Daarvoor hebben we een aantal wiskundige domeinen geanalyseerd en didactisch uitgewerkt. Deze 'ijsbergen' hebben we op basis van de wiskundige samenhang samen laten smelten tot een matrix (fig.2). De matrix toont dat wiskundige groei in twee richtingen mogelijk is, waarbij de ene richting het proces van abstrahering weergeeft - van verkennen van uiterlijk en functionaliteit naar verkennen van inhoud en structuur, naar werken met getalrelaties tot formele sommen, congruent aan het principe van *emergent modeling* (Gravemeijer, 2002; Van der Straaten & Moerlands, 2010) en de andere richting de uitbouw in domein en complexiteit.



figuur 2: de matrix als didactische uitkristallisering van de ijsbergmetafoor

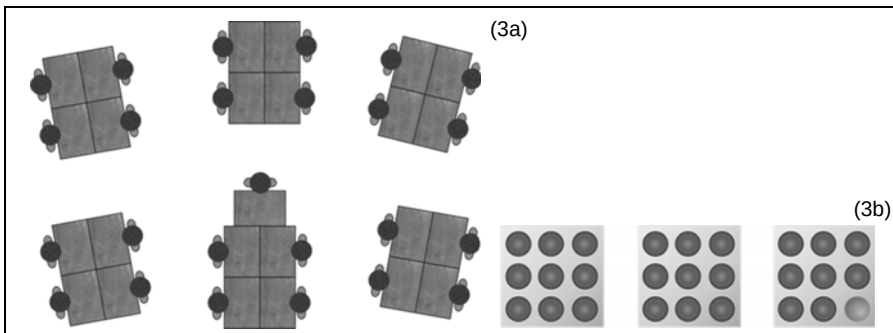
De uitbouw in domein en complexiteit geeft ook aan welke domeinen wiskundig gezien sterk aan elkaar gerelateerd zijn. De bundeling in de eerste matrix beslaat de domeinen optellen en aftrekken tot 10, 20, 100 en met grote getallen en kommagetallen. Getalbegrip, meten en geld zijn daarbij integraal verwerkt. Met dit artikel geven we een meer concrete invulling van een tweede matrix. De wiskundige samenhang die we daarvoor als bundeling gebruiken gaat over verhoudingsaspecten en beslaat de domeinen 'vermenigvuldigen', 'delen', 'breuken', 'procenten en verhoudingen'.

5 vermenigvuldigen als herstructureren

In het hedendaagse onderwijs wordt vermenigvuldigen vaak snel op som-niveau aangeleerd. Kinderen blijven daarbij vaak lang hangen in primitieve strategieën als herhaald optellen (vgl. Devlin, 2008a; 2008b; 2008c; 2011). Grondig investeren in drijfvermogen kan effectiever werken. We laten kinderen daarom eerst vooral de verschijningsvormen van vermenigvuldigen bestuderen op basis waarvan inzichten en strategieën opgebouwd worden.

Hoe komen we vermenigvuldigingen in het dagelijkse leven tegen? De wereld zit vol met structuren; in ordeningen, verpakkingen, stapelingen, ritmes en patronen. Een vermenigvuldiging is niet meer dan een beschrijving van zo'n structuur: 4×6 als de beschrijving van het aantal stickers op een stickervelletje, 3×5 als beschrijving van het aantal koeken in een verpakking, $3 \times 5 \times 7$ als beschrijving van het aantal waxinelichtjes in een doos en 4×7 als beschrijving van het aantal dagen in vier weken. Op zich is deze beschrijving helder, maar vanuit praktisch oogpunt zou het wenselijk zijn om deze dagelijkse structuren in elkaar over te kunnen zetten. Stel daarbij de volgende situatie voor:

De leerkracht wil trakteren op soesjes. In de klas zitten de kinderen in vijf groepen van vier en in één groep van vijf. De soesjes zitten verpakt in dozen van negen stuks. Ze heeft drie dozen met soesjes, maar uit één doos is al één soesje opgegeten. Beide structuren (zowel de manier waarop de kinderen in de klas zitten als de soesjes in de dozen) zijn in sommentaal te beschrijven. De kinderen in de klas als ' $5 \times 4 + 1 \times 5$ ' (fig. 3a) en de soesjes als ' $2 \times 9 + 8$ ' of ' 2×9 rest 8' (fig.3b). De vraag is dan of er voldoende soesjes zijn voor elk kind. Om vergelijking mogelijk te maken zou de ene structuur omgezet moeten worden in de andere. Dus de kinderen in groepjes van negen zetten of de soesjes in groepen van vier en vijf. Dat is geen werk-bare oplossing, maar hoe dan wel?



figuur 3a en 3b: kinderen in de klas ' $5 \times 4 + 1 \times 5$ '; soesjes in dozen ' 2×9 rest 8'

We zijn gewend om van beide structuren ‘het totaal’ te bepalen. Dat totaal is een getal; een decimaal getal met een decimale structuur. Het getal 25 staat voor twee groepen van tien en vijf lossen; in een binair getalstelsel zou dat heel anders beschreven worden. We gebruiken dus het decimale ‘totaal’ als intermediair om alledaagse structuren met elkaar te kunnen vergelijken. In dit voorbeeld vormen de kinderen twee groepen van tien en vijf lossen samen ‘25’ en de soesjes twee groepen van 10 en zes lossen ‘26’.

In wezen is vermenigvuldigen ‘herstructureren’ van structuren uit de werkelijkheid naar een decimale getalstructuur. Daardoor is het niet verwonderlijk dat kinderen de tafel van vijf snel de baas zijn. De vijfstructuur is immers erg verwant aan de tienstructuur. Zulke structuurverwantschappen zijn er meer, zoals bij de tafel van twee, vier en acht. Hoe beter kinderen deze verwantschappen doorzien, des te beter zullen ze deze ook als strategieën kunnen inzetten op somniveau.

6 relatie met delen

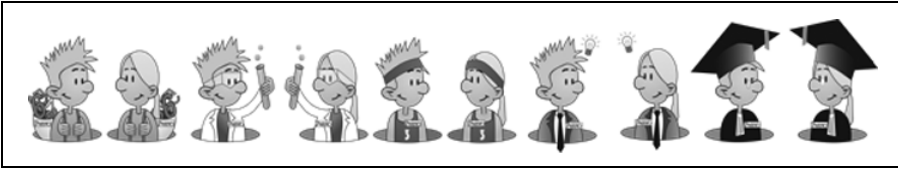
Delen en vermenigvuldigen hebben veel verwantschap. Een vermenigvuldiging is een transformatie van een ‘informele’ structuur naar een decimale structuur en delen is de transformatie van een decimale structuur naar een ‘informele’ structuur. Ze zijn dus elkaars inverse. In de *try-out* hebben we kinderen veelvuldig structuren laten verkennen. Daarmee hebben ze zowel inzichten voor vermenigvuldigen als voor delen ontwikkeld.

7 karakters

In het proces van herontdekking en geleide abstrahering zijn voor lerende kinderen verschillende leerrollen weggelegd. Leren is immers meer dan luisteren en nadoen. Er is een aantal algemene fasen in leerprocessen te typeren. Deze fasen zijn gebaseerd op de leercurve (Vermeulen, Moerlands & De Wert, 2008), onze persoonlijke reflecties en jaren aan ervaring met kinderen in het speciaal onderwijs. Om recht te doen aan deze leerfasen hebben we een vijftal karakters¹ uitgewerkt. Dit zijn: de verzamelaar, de onderzoeker, de atleet, de ondernemer en de professor (fig.4).

Kinderen zie je in het begin van een leerproces vaak eerst verzamelen. Als ‘verzamelaar’ stoppen jonge kinderen hun zakken vol met eikels, steentjes, enzovoort. In de loop van de tijd neemt dat ook abstractere vormen aan doordat kinderen ook ervaringen, indrukken en gedachten verzamelen. Al

snel wordt een verzameling onderwerp van onderzoek. Dan komt het kind in de rol van 'onderzoeker' die fenomenen bestudeert, verschillen en overeenkomsten ontdekt en gedragingen probeert te doorgronden. Vooral deze rol is van belang voor het ontwikkelen van inzichten die voorwaardelijk zijn voor het formeel denken en opereren.



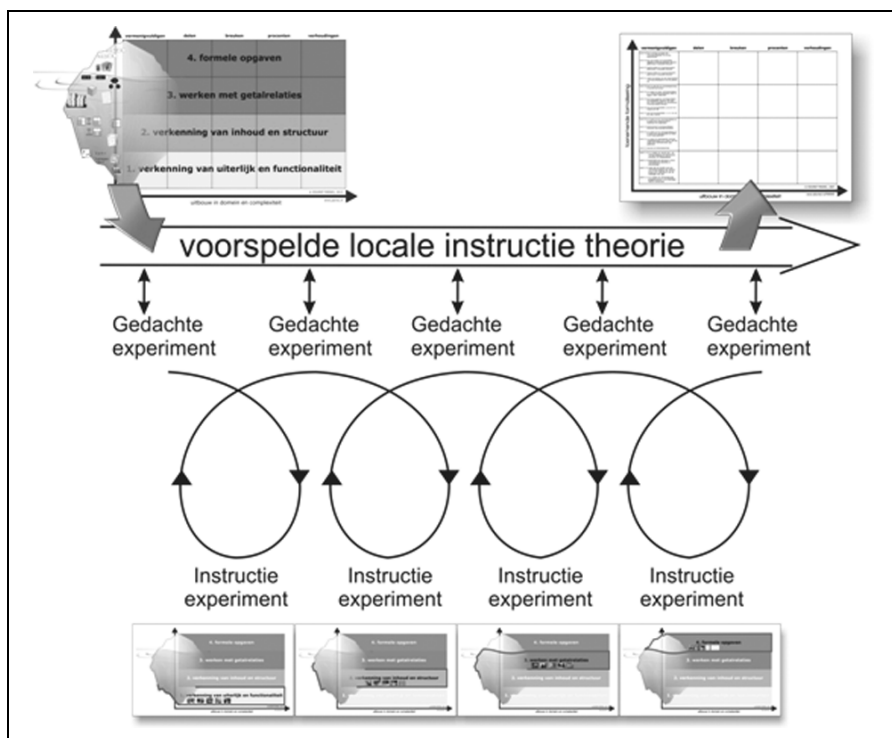
figuur 4: de vijf karakters: de verzamelaar, de onderzoeker, de atleet, de ondernemer en de professor

Door dingen vaker te doen, worden er min of meer bewust al vaardigheden getraind. Op het moment dat het oefenen expliciet wordt, is de leerling in de rol van 'atleet'. Als atleet oefent het kind vaardigheden en inzichten, zodat deze steeds sneller en efficiënter uitgevoerd en gebruikt kunnen worden. Met de ontwikkelde inzichten en vaardigheden kan het kind in de rol van 'ondernemer' vervolgens verbanden leggen en inzichten en vaardigheden op een nieuwe manier combineren. Het kind onderneemt dus iets met kennis die het in eerdere rollen heeft opgedaan. Als de leerervaringen eenmaal voldoende verdiept zijn en een kind in staat is om het geleerde te overzien, dan kan deze 'kennis' met anderen worden gedeeld. Het kind komt dan in een rol van 'professor', die informatie uitlijnt en presenteert. Deze karakters zijn ontwikkeld om de dynamiek van het leren een gezicht te geven. In het huidige onderwijs zien we vooral veel aandacht voor de atleet. In deze *try-out* plaatsen we de kinderen bewust ook in de andere karakterrollen om te zorgen dat het leerproces evenwichtig en volwaardig is. Voor ons gevoel is deze insteek breed inzetbaar.

8 *try-out* rondom vermenigvuldigen

Omdat we niet geloven in het *top-down* overdragen van theorie kiezen we ervoor theorie in een reflexieve relatie met de praktijk te ontwikkelen. We volgen daarbij de opzet die Gravemeijer in eerste instantie betitelt als *developmental research* (Gravemeijer, 1994) en waarvoor hij later de meer gangbare term *design research* (Gravemeijer, 2004; Edelson, 2002) hanteert. We hebben een lestraject opgezet waarbij we de didactische opbouw van de eerste matrix (fig.2) als uitgangspunt hebben genomen. We wilden

daarbij ook de hiervoor beschreven ideeën over vermenigvuldigen en karakterrollen van leren toepassen met als doel om de tweede matrix voor het onderdeel vermenigvuldigen specifiek in te vullen (fig.5).



figuur 5: onderzoeksopzet *try-out* vermenigvuldigen

We gingen in gesprek met Jikke van der Sluijs, een leerkracht van groep 5 van sbo Westerwel, een van de scholen van de SSOT. Jikke was door middel van PARWO-kadertrainingen al goed op de hoogte van de gehanteerde visie betreffende de ijsbergdidactiek. We bespraken daarom in de voorbereiding op de *try-out* vooral de ideeën over vermenigvuldigen en karakterrollen van leren.

We besloten om de lessen in blokken van twee lessen per week op video op te nemen, na elk blok een nabespreking met Jikke te houden en ook die op te nemen. Vooraf werd een hypothetisch leertraject (vgl. Simon, 1995) in kaart gebracht. Doordat we alle lessen op video opnamen, konden we samen met Jikke reflecteren op haar onderwijsgedrag (vgl. Dolk, 1997), maar ook op onze eigen interventies. Bovendien bood het videomateriaal een schat aan inzichten in de denkprocessen van kinderen.

9 verkennen van uiterlijk en functionaliteit

We begonnen door de kinderen, in de rol van verzamelaars, in school op zoek te laten gaan naar vermenigvuldigingen. Gewapend met een digitaal fototoestel moesten ze zoveel mogelijk ‘tafeltjes’ op de foto zetten. Dat het niet ging om de houten tafels waar ze normaal aan werken, was snel duidelijk. De echte verwarring werd duidelijk toen de batterijen van een van de camera’s leeg bleken te zijn. Toen de batterijen in een groepje van vier en een groepje van twee op tafel kwamen te liggen, zagen de kinderen daar wel een vermenigvuldiging in: ‘ 4×2 ’ (fig.6a). Deze misinterpretatie kwam veel voor. Zo werden de tafels en stoelen in de aula gezien als 39×7 (stoelen) keer 7 (tafels) (fig.6b) en twee stapels van drie boeken als 3×3 (fig.6c).



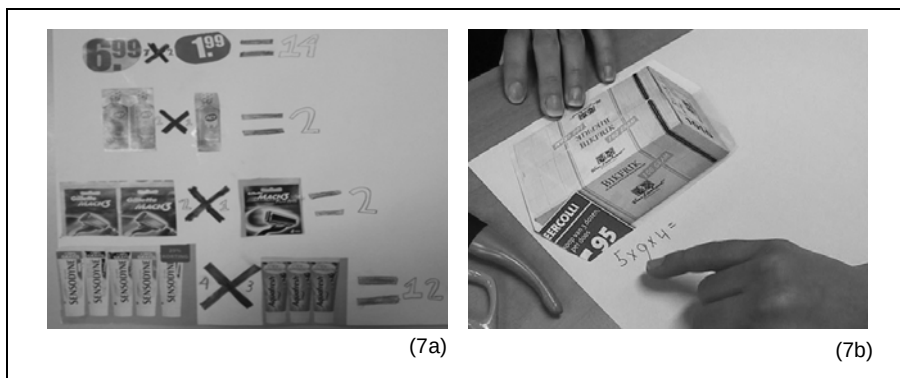
figuur 6a, 6b en 6c: ‘ 4×2 ’; ‘ 39×7 ’; ‘ 3×3 ’

Ondanks dat kinderen ook veel mooie en correcte voorbeelden gaven, werd in de nabespreking duidelijk dat de verwarring nog niet weg was. Een verklaring lijkt te zijn dat deze kinderen weliswaar al met de tafels hadden gewerkt, maar vooral op formuleniveau. We zagen de kinderen (wellicht onbegrepen) formules op de werkelijkheid leggen in plaats van de werkelijkheid in een formule te beschrijven.

Dit was aanleiding om de kinderen extra tijd te geven om te verzamelen. We deden dat door ze tijdens een volgende les in folders of op internetpagina’s van winkels nog meer vermenigvuldigingen te laten zoeken. Deze keer met de opmerking dat ze de vermenigvuldiging die ze er in zagen er bij moesten schrijven. Ook nu zagen we sommige kinderen weer ‘sommen’ maken met realistische beelden zonder dat ze echt vermenigvuldigbegrip lieten zien (fig.7a). Aan de andere kant was er ook een jongen die zelfs buiten het platte vlak ging en een 3D-beschrijving maakte van een doos suikerklorntjes (fig.7b).

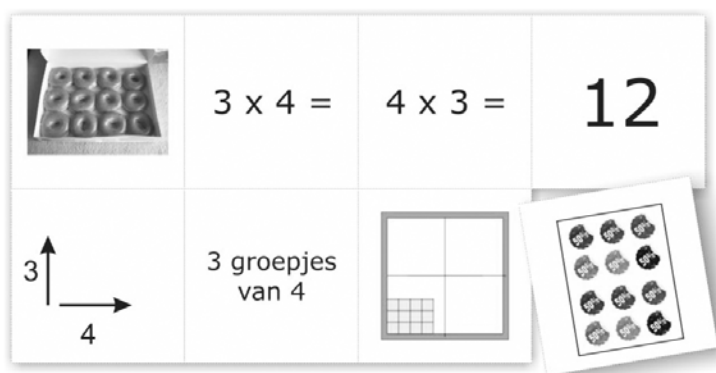
Door de foto’s op het digibord te tonen en te bespreken werd voor alle kinderen duidelijk, dat een vermenigvuldiging een beschrijving is van een structuur en niet ‘een hoeveelheid en een andere hoeveelheid met een vermenigvuldigingssteken ertussen’.

In deze fase gaat het vooral om die beschrijving van de structuur. Het daadwerkelijk uitrekenen van de som is nog niet direct aan de orde en kan met een rekenmachine opgevangen worden. Na de verzamelfase lieten we de kinderen onderzoek doen naar verschillende structuurbeschrijvingen en -vormen.



figuur 7a en 7b: formele sommen 'echt(?)' gemaakt en 3D-beschrijving

We ontwikkelden daarvoor een soort puzzel op voorgeperforeerd papier.² De opdracht was om acht verschillende beschrijvingen van eenzelfde structuur bij elkaar te zoeken (fig.8).

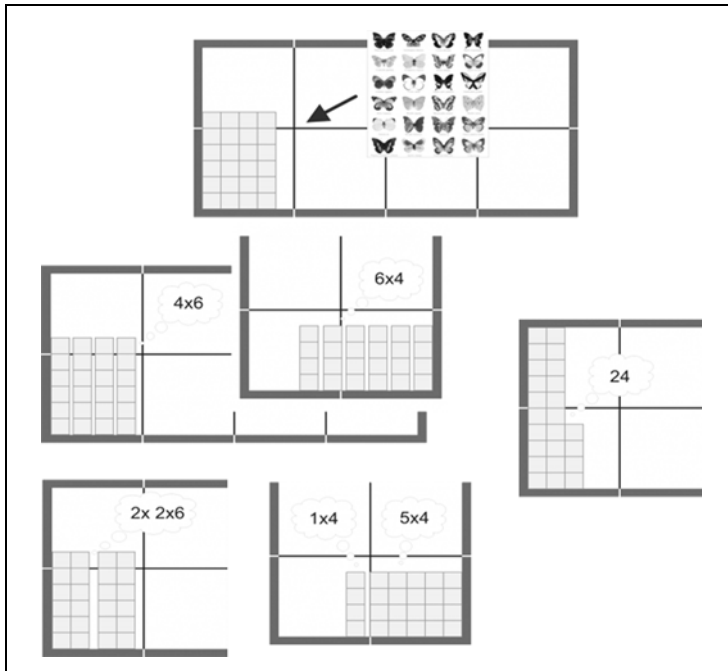


figuur 8: deel van de puzzel met structuurbeschrijvingen

Omdat deze puzzel vrij uitgebreid is (het zijn twaalf sets van acht structuurbeschrijvingen) konden we deze op verschillende manieren en momenten inzetten. Zo plaatsten we de leerlingen regelmatig al in de rol van atleet door bijvoorbeeld met een selectie uit de sets memorie te laten spelen.

10 verkennen van inhoud en structuur

Een belangrijke vervolgstap was dat we kinderen wilden laten manipuleren met een structuur uit de werkelijkheid. Hiervoor zetten we de rekentafel³ en rekenkistjes⁴ (leerlingversie van de rekentafel) als dynamisch modelmateriaal in. Op de rekentafel kunnen structuren uit de werkelijkheid overgenomen worden, bijvoorbeeld door een stickervel na te leggen met de blokken in de rekentafel. Daarna kan er mee gemanipuleerd worden. De omkeereigenschap kan worden verkend, substructuren kunnen worden uitgesplitst en uiteindelijk kunnen de blokken simpelweg in de decimale structuur van de rekentafel worden gelegd zodat ook het (decimale) antwoord op de vermenigvuldiging gevonden wordt (fig.9).

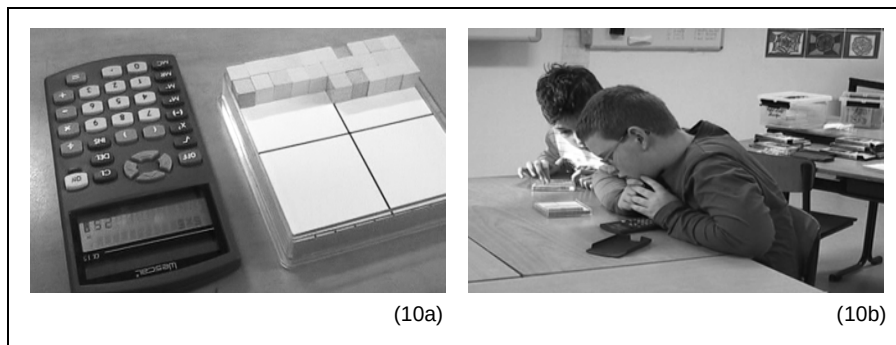


figuur 9: structuur kopiëren in de rekentafel, substructuren onderzoeken en herstructureren

We introduceerden de rekentafel als een materiaal dat inzichtelijk maakt wat een rekenmachine doet. Je voert immers de beschrijving van een structuur '6 × 4' in en de rekenmachine geeft als resultaat: '24'. Dit is de symbolische beschrijving van twee keer tien en vier lossen. De rekentafel maakt de bewerking inzichtelijk. Daarom zetten we de kinderen daarmee aan het werk. We gaven de kinderen in tweetallen een goudbordje en een

rekenmachine. Jikke gaf een vermenigvuldiging (bijvoorbeeld 7×8) die de kinderen in het goudbord moesten leggen. Daarna mochten ze de som uitrekenen op de rekenmachine om vervolgens met behulp van het goudbord te bewijzen dat het antwoord klopte (fig.10).

Als vervolg hierop hadden we uit de puzzel (zie figuur 8) alle plaatjes met foto's van structuren uit de werkelijkheid gehaald en ook aan de kinderen gegeven. De opdracht was eenvoudig. Maak de structuur na op het goudbord en laat zien hoe je snel kunt zien hoeveel het er zijn. Controleer daarna met je rekenmachine of het klopt. Hierbij werd duidelijk dat de kinderen het herstructureren goed begrepen. Ze konden de uitkomst van de rekenmachine beter interpreteren. We zagen hier een duidelijke omslag ten opzichte van de verzamel fase. Door het herstructureren inzichtelijk te maken met dynamisch modelmateriaal werden niet de formules, maar de structuur leidend.



figuur 10a en 10b: herstructureren in het goudbord en controleren met de rekenmachine

Op basis daarvan lieten we kinderen de omkeereigenschap en substructuren verkennen, wat geleidelijk overging in oefenen (zie figuur 9). Deze inzichten en vaardigheden vormen de basis voor de oplossingsstrategieën die op hogere niveaus worden gebruikt. Waar voorheen werd gepoogd om de strategieën op somniveau inzichtelijker te maken, laten we hier strategieën ontstaan vanuit de basis van structuurverkenningen en herstructureringen.

Om een en ander nog sterker te verankeren lieten we kinderen ook de omgekeerde weg bewandelen: bij een gegeven getal (bijvoorbeeld 72) werd hen gevraagd te zoeken naar mogelijke vermenigvuldigingen die daarbij horen. Zo vonden ze 2×36 , 3×24 , 4×18 , $2 \times 6 \times 6$, enzovoort. In informele zin legden we hier al een verband met delen, wat we echter niet al als zodanig benoemden. We hebben kinderen hier wel veelvuldig mee laten oefenen om het herstructureren goed te verankeren om zo ook getalrelaties op te

bouwen die op een hoger niveau een belangrijke rol spelen. Opvallend was om te zien dat kinderen gedurende deze opdrachten veelvuldig voorspellingen deden, inschattingen maakten en volop redeneerden over mogelijke aanpakken om hoeveelheden anders te structureren, kortom: wiskundig redeneerden.

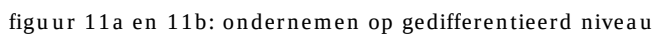
In aanvulling hierop ontwikkelden we een set 'bladgoud' of 'vierkantjes'⁵ waarbij we vellen maakten van steeds vijftien vierkantjes lang en van één tot en met tien vierkantjes breed. Een eenvoudige opdracht om snel substructuren te verkennen was de volgende: kinderen zaten in tweetallen en gaven elkaar om de beurt een som op. De ander moest dan snel, door een bepaalde strook te pakken, deze som visualiseren. Bijvoorbeeld bij 9×5 werd een strook gepakt van 15×5 , waarvan een stuk van 6×5 naar achteren werd gevouwen, zodat 9×5 zichtbaar werd.⁶ Zodoende werd geoeft met het maken en gebruiken van steunpunten.

11 werken met getalrelaties

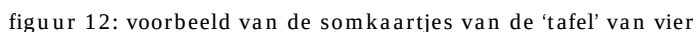
Om een volgende stap te zetten introduceerden we de pizzadozen. Jikke liet de kinderen een stapel van vijftien dozen zien en vroeg hoeveel het er waren. Door de onoverzichtelijke stapel waren kinderen veroordeeld tot tellen. Toen Jikke een stapel van vijf dozen van de grote stapel ernaast legde zagen de kinderen vrij snel dat het om tien en vijf dozen ging. Op zich vormde dat geen probleem. 'Maar', zo stelde Jikke, 'wat als er nou zes stukken pizza in elke doos zouden zitten, hoeveel stukken heb je dan in totaal? Want 15×6 kunnen jullie toch niet uitrekenen?' Door de simpele ingreep van Jikke eerder, bleek het voor de kinderen toch niet meer zo moeilijk. Want 10×6 kenden ze al wel en 5×6 ook.

Hiermee tilde Jikke op subtiële wijze de structuurverkenning naar bouwsteenniveau. De structuur (tien en vijf) die aangebracht werd in de stapel pizzadozen was al duidelijk door de eerdere verkenningen in het goudbord, en nu werd de tweede dimensie (het aantal pizzastukken) aan het oog onttrokken. De kinderen werden vervolgens - in de rol van ondernemers - uitgedaagd om een zo hoog mogelijke stapel te maken (of te bedenken) en uit te rekenen hoeveel pizzastukken daarin zouden kunnen.

Al snel verscheen er bij een groepje een stapel tot aan het plafond, wat de enorme som 43×6 opleverde. Een van de jongens van dat groepje loste het probleem met een voornamelijk tellende aanpak op en kwam tot een antwoord⁷ (wat met de rekenmachine werd gecontroleerd). Zijn enthousiasme stak hij niet onder stoelen of banken en hij wilde zijn succes delen met de leerkracht. Zij was op dat moment ook al prijzen van pizza's aan



Dankzij het gebruik van de pizzadozen kwamen kinderen op een natuurlijke manier tot een regelgewijze notatie, namelijk door elke denkstap die ze maakten op te schrijven. Op basis van deze ervaringen, ontwierpen we kaartjes met tafelsommen. We beperkten ons daarbij niet tot één tot en met tien keer, maar namen ook elf, twaalf, dertien, veertien en vijftien keer en de tienvouden tot en met honderd op (fig.12).



De kinderen kregen bijvoorbeeld de opdracht om een set (bijvoorbeeld de tafel van vier) voor zich neer te leggen en dan om de beurt twee kaarten te pakken waarvan ze dachten het gecombineerde antwoord te kunnen berekenen. Een kind kon bijvoorbeeld 100×4 en 3×4 pakken als het weet dat dit 400 en 12 is en dus samen 412 oplevert. De som en de deelstappen werden genoteerd en de andere leerling controleerde het antwoord met behulp van de rekenmachine of door op de achterkant van de kaarten de antwoorden van de aparte opgaven te controleren. Zodoende sloegen we in feite een brug naar het meest formele niveau.

12 formele sommen

Tot besluit van de lessenserie hadden we een laatste uitdaging voor de kinderen. We lieten ze een doos ‘negerzoenen’⁸ zien met in die doos twaalf negerzoenen. Daarnaast hadden we een hele stapel lege dozen. De uitdaging voor de kinderen was om - zonder te weten hoeveel dozen het precies waren - zich voor te bereiden op het berekenen van het precieze aantal. We vertelden ze dus niet direct hoeveel dozen het waren, maar gaven ze even tijd om alvast mogelijke steunsommen op te schrijven. Daarna vertelden we hen dat het ging om een stapel van 79 dozen. Iedereen die kon berekenen hoeveel negerzoenen er in totaal in de dozen had gezeten, kreeg er een-tje om op te eten. Uiteindelijk heeft elk kind, soms met wat aanwijzingen, 79×12 opgelost en gingen ze allemaal met een negerzoen naar buiten.

We denken dat hier ongeveer de grens ligt voor wat deze kinderen nu vlot maar vooral inzichtelijk zouden moeten kunnen oplossen. Het drijfvermogen is inmiddels goed opgebouwd. De kinderen begrijpen wat een vermenigvuldiging inhoudt en hebben vaardigheden opgebouwd en inzichten ontwikkeld om ook al complexere vermenigvuldigingen tot een goed eind te brengen.

Iets wat zich hierbij wel wreekt is het feit, dat een aantal kinderen in een eerder stadium onvoldoende drijfvermogen had ontwikkeld in de getalgebieden tot twintig en honderd. Veel kinderen bleven basaal rekenwerk tellend oplossen. Dat was niet alleen tijdrovend, maar is ook foutgevoelig. Omdat ze op het gebied van het vermenigvuldigbegrip een hogere denk-snelheid hebben ontwikkeld, struikelden ze over hun voortvarendheid en maakten fouten in de voor hen tijdrovende (want tellend uitgevoerde) deelstappen. De zakrekenmachine bleek hierbij vooralsnog een uitkomst. Door daarmee tussenantwoorden te controleren konden deze kinderen toch hun inzichtelijke aanpak tot een goed einde brengen. Door een duidelijke stapsgewijze manier van uitwerken te hanteren, met de directe feedback-

mogelijkheden die het gebruik van een rekenmachine bood, zagen we ook een behoefte ontstaan bij de betreffende kinderen om ook basale optel- en aftrekvaardigheden beter te leren beheersen.

13 conclusie

Terugkijkend kunnen we concluderen dat alle mogelijke opgaven, zoals die in methodes vrij sterk verspreid door het basisonderwijs te vinden zijn, in de *try-out* allemaal aan bod zijn gekomen. We boekten dus winst door niet te wachten tot de tafels van tien geautomatiseerd waren. Net zo min hebben we kinderen opgehouden die een aantal basisvaardigheden bij het optellen en aftrekken nog misten. Dus het hebben van hoge verwachtingen van kinderen werkt, mits ondersteund met goed materiaal en goede didactische inbedding. Dat houdt in dat recht wordt gedaan aan alle aandachtsgebieden: realiteit, wiskunde, leerling en onderwijs.

de realiteit

Omdat de realiteit bron en toepassingsgebied is, zorgden we ervoor dat deze steeds in de les betrokken werd. De confrontatie daarmee leidde tot de behoefte aan abstractie. Door de kinderen de werkelijkheid te laten verkennen en hen ruimte te bieden om te mathematiseren, zagen we ze greep krijgen op formele somnotaties. Het werd voor de kinderen gaandeweg steeds duidelijker wat een vermenigvuldiging inhoudt en dat leren vermenigvuldigen niet alleen een kwestie is van het op formeel niveau leren van de tafelsommen.

de wiskunde

We beschouwen wiskunde als méér dan alleen sommen maken. Ook het proces dat leidt tot algemene toepasbare wiskundige principes zien wij als wiskunde. Bovendien kozen we voor de benadering om vermenigvuldigen breder te zien dan herhaald optellen. Omdat een vermenigvuldiging zich in de werkelijkheid vooral manifesteert als een beschrijving van een structuur (het aantal koekjes in een pak staat op de verpakking vaak als een 'keersom') hebben we kinderen dat zelf laten herontdekken door hen structuren te laten beschrijven. Zodoende verkenden ze het 'uiterlijk en de functionaliteit' van vermenigvuldigen. Dat een beschrijving als 6×4 van het aantal stickers op een vel ook een antwoord oplevert, was in eerste instantie nog niet aan de orde. Met modelmateriaal hebben we afstand genomen van de werkelijkheid en dynamiek ingevoegd. Door het gebruik van het modelmateriaal werden ook verschillende andere structuurverkenningen ontdekt en geoefend, zoals het omkeerprincipe, halveren, ver-

dubbelen, een keer meer, een keer minder. Vanuit deze verkenningen ontstonden getalrelaties die - ook letterlijk - werden opgebouwd met behulp van pizzadozen. Door aanpakken stapsgewijs te noteren kwam ook het meest formele niveau in zicht. De tafels hadden de kinderen aan het eind van de *try-out* nog niet gememoriseerd, maar wel was een fundamentele inzichtelijke basis gelegd, waardoor zelfs al opgaven als 79×12 tot een goed eind gebracht konden worden.

de leerling

De winst die wij boekten betreffende inzicht in vermenigvuldigen en de vaardigheid om ook grote vermenigvuldigingen al systematisch op te lossen is bijzonder te noemen, zeker aangezien deze *try-out* in een tijdsbestek van vijf weken heeft plaatsgevonden bij een klas uit het speciaal basisonderwijs. Blijkbaar kunnen leerlingen - als ze op de juiste manier uitgedaagd en gefaciliteerd worden - tot grote hoogte stijgen. De rijkdom van de leerrollen zoals we die hebben neergezet in de karakters heeft aan dit resultaat zeker bijgedragen. Vanuit deze ervaringen zijn vraagtekens te plaatsen bij de huidige inrichting van het onderwijs en de tijd die feitelijk nodig is om zo'n basis te leggen.

toenemende formalisering	vermenigvuldigen	delen	breuken	procenten	verhoudingen
	verm 4.3 kan in principe op papier alle vermenigvuldigingen met succes beantwoorden	delen 4.5 kan in principe op papier alle delingen met succes beantwoorden			
	verm 4.4 Kan eenvoudige van de basistafels afgeleide vermenigvuldigingen oplossen; geeft binnen 5 seconden antwoord	delen 4.4 Kan eenvoudige van de basistafels afgeleide delingen oplossen; geeft binnen 5 seconden antwoord			
	verm 4.3 heeft de tafels tot 10 gememoriseerd; geeft binnen 5 seconden antwoord	delen 4.3 heeft de tafels tot 10 gememoriseerd; geeft binnen 5 seconden antwoord			
	verm 4.2 heeft de tafels tot 10 geïmplementeerd; geeft binnen 5 seconden antwoord	delen 4.2 heeft de tafels tot 10 geïmplementeerd; geeft binnen 5 seconden antwoord			
	verm 4.1 rekent met behulp van een rekenmachine vermenigvuldigingen met alle getallen uit	delen 4.1 rekent met behulp van een rekenmachine delingen met alle getallen uit			
	verm 3.3 kent en gebruikt de vermenigvuldiging in termen als 545×2	delen 3.3 kan deelnamen met 10-multiples als deler afleiden uit $500 \times 20 = 500 \times 10 \times 2$; meer van $50 \times 2 = 500 \times 2$			
	verm 3.4 is in staat om 'grote' vermenigvuldigingen en delingen op te lossen; $1345 \times 1045 = 545$	delen 3.4 doet dit de meeste reken $2 \times 4 \times 8$ maar ook basen $15, 15, 15$			
	verm 3.3 kan bij een gegeven vermenigvuldiging van verdelenden, haken, etc. meer een minder strategieën een geschikte vermenigvuldiging selecteren	delen 3.3 kan vermenigvuldigen met m.b. externe structuren			
	verm 3.2 kent de bouwstenen 1, 2, 3, 10 x 10-waarden t/m 100	delen 3.2 kan van alle getallen tot 100 de mogelijke delers benoemen			
uitbouw in domein en complexiteit	verm 3.1 kent de bouwstenen 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 x t/m 100	delen 3.1 kan elk getal haken			
	verm 2.4 is in staat om een vermenigvuldiging op te lossen door substructuren te herkennen en te gebruiken	delen 2.5 maakt bij delingen op concreet niveau gebruik van verhoudingen			
	verm 2.3 herstructureert vermenigvuldigingen-structuren naar decimale structuren	delen 2.4 kan een decimaal getal herstructuren naar een verdeling (ook met rest)			
	verm 2.2 is in staat om een vermenigvuldiging op te lossen door sprongrekenen te maken op een lege getallijn	delen 2.3 kan de sprongrekenen bepalen bij een vermenigvuldiging			
	verm 2.1 is in staat om uiteenlopende vermenigvuldigingsstructuren om te zetten naar een model, bijvoorbeeld met tegels, getalrijen	delen 2.2 kan materiaal met een eigen structuur (chouderende, kaart met klapper-keetjes) vertalen in h.v. deze structuur			
	verm 2.0 doet dit de omkeersomslag	delen 2.1 kan vormen, lengtes en hoeveelheden haken			
	verm 1.4 is in staat om vanuit een vermenigvuldiging de beschreven structuur te interpreteren	delen 1.5 kan een deelsoort matchen met een situatie			
	verm 1.3 beschrijft een structuur uit de verscheidenheid (20/30) in sommentaal	delen 1.4 is in staat om een deelsoort te vertalen naar een deelsoort			
	verm 1.2 weet dat de functie van een vermenigvuldiging een beschrijving van ordening of van afmetingen kan zijn	delen 1.3 kan hoeveelheden handelend verdelen			
	verm 1.1 is in staat om vermenigvuldigingsstructuren in de werkelijkheid te herkennen	delen 1.2 kan basisvormen (cirkel, streek, vierkant, etc.) eenzelfde delen			

© EDUMAT-PARWO, 2007

www.edumat.nl/PARWO

figuur 13: het didactisch kader ingevuld voor vermenigvuldigen

het onderwijs

De nieuwe aanpak die we in dit artikel schetsen, veronderstelt dat het onderwijs op verschillende manieren gefaciliteerd wordt en niet te eenzijdig op toetsresultaten leunt. Daarbij moeten leerkrachten tijd en ruimte krijgen om zichzelf verder te professionaliseren om nog beter greep te krijgen op de ontwikkeling van kinderen. We denken dat er voldoende kansen liggen om de opbrengsten in het onderwijs stevig te verhogen. Naar aanleiding van eerdere ervaringen en deze *try-out* hebben we daarom een didactisch kader ontwikkeld dat hier aan bijdraagt (fig.13). We focussen op groeien en proberen de essenties van het groeiproces te beschrijven. Op termijn zal bovendien gewerkt worden aan een toetsinstrument om de verschillende fasen in het leerproces te kunnen peilen, zoals dat ook voor de eerste matrix is gebeurd (Moerlands, Van der Straaten & Van der Straaten, 2008).

Met de invulling van deze tweede matrix (die later aangevuld wordt met toetsen en passend oefenmateriaal) voor het onderdeel vermenigvuldigen hopen we leerkrachten de nodige houvast te kunnen bieden om de vertaalslag te maken van de inzichten uit de beschreven *try-out* naar hun eigen klassensituatie. In hoeverre die transfer mogelijk is (en wat daar verder precies voor nodig is), is onderwerp van vervolgonderzoek.

noten

- 1 Zie: www.parwo.nl/parwoposter/karakters voor meer informatie.
- 2 Zie: www.edumat.nl/pom/ voor meer informatie.
- 3 Zie: www.edumat.nl/007-207-Rekentafel/ voor meer informatie.
- 4 Omdat de rekenkistjes nog in productie waren ten tijde van de *try-out* hebben we gebruik gemaakt van de leerlingversie van het goudbord.
Zie: www.edumat.nl/007-206-Schubi/Goudbord.
- 5 Zie: www.edumat.nl/007-204-Perfodidac/Vierkantjes voor meer info.
- 6 Zie: www.youtube.com/watch?v=3MNZ5X_LBJI voor een voorbeeld waar kinderen met dit materiaal aan de slag zijn.
- 7 Kijk op: www.youtube.com/watch?v=inoSbWhSpnc om te zien hoe deze jongen dit probleem oplost.
- 8 Tegenwoordig wordt voor negerzoenen de minder 'gekleurde' term zoenen gebruikt, maar omdat dit in de tekst mogelijk verwarring teweeg brengt kiezen we voor de - in de volksmond nog steeds veel gebruikte - term negerzoenen.

literatuur

- Boswinkel, N. & F.J. Moerlands (2003). Het topje van de ijsberg. In: K. Groenewegen (ed.). *Nationale Rekendagen 2002 - een praktische terugblik*. Utrecht: Freudenthal Instituut, 103-114.
- Craats, J. van de (2007). Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5-8(2), 132-136.

- Devlin, K. (2008a). *It ain't no repeated addition* [Web log post]. Ontleend aan: http://www.maa.org/devlin/devlin_06_08.html
- Devlin, K. (2008b). *It's still not repeated addition* [Web log post]. Ontleend aan: http://www.maa.org/devlin/devlin_0708_08.html
- Devlin, K. (2008c). *Multiplication and Those Pesky British Spellings* [Web log post]. Ontleend aan: http://www.maa.org/devlin/devlin_09_08.html
- Devlin, K. (2011). *What Exactly is Multiplication?* [Web log post] Ontleend aan: http://www.maa.org/devlin/devlin_01_11.html
- Dolk, M. (1997). *Onmiddellijk onderwijsgedrag. Over denken en handelen van leraren in onmiddellijke onderwijssituaties*. Culemborg: Technipress (proefschrift).
- Dolk, M. (2004). De volgende stap: op weg naar beter onderwijs. In: R. Keijzer & E. de Goeij (eds.). *Rekenen-wiskunde als rijke bron*. Utrecht: Freudenthal Instituut, 25-32.
- Dolk, M. (2007). Inspiratie als kerndoel. *Alternatieven voor de school*. Den Haag: Onderwijsraad, 31-50.
- Edelson, D.C. (2002). Design research: what we learn when we engage in design. *Journal of the learning sciences*, 11(1), 105-121.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gelderblom, G. (2011). Waarom zijn opbrengstgerichte scholen succesvol? *Basis-schoolmanagement*, 24 (8), 4-7.
- Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Gravemeijer, K.P.E. (2002). Preamble: From Models to Modeling. In: K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel (eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 7-22.
- Gravemeijer, K.P.E. (2004). Local Instruction Theories as Means of Support for Teachers in Reform Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 105-28.
- Keune, F. (1998). *Naar de knoppen*. Ontleend aan: <http://www.math.ru.nl/~keune/oratie/oratie.html>.
- Moerlands, F. & H. van der Straaten (2009). *Passend rekenwiskunde onderwijs voor alle leerlingen*. Ontleend aan: [http://www.rekenpilots.nl/attachments/2023001/Passend_rekenwiskundeonderwijs_voor_alle_leerlingen_lv_\(210909\).pdf](http://www.rekenpilots.nl/attachments/2023001/Passend_rekenwiskundeonderwijs_voor_alle_leerlingen_lv_(210909).pdf)
- Moerlands, F., D. van der Straaten & H. van der Straaten (2008). Quickscans met de PARWO-matrix. *Volgens Bartjens* 28(2), 25-27.
- Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Straaten, D. van der, F. Moerlands & J. den Ouden (2011). Klimgaas, houvast bij het zoeken naar een nieuwe methode. *Volgens Bartjens*, 31(2), 28-30.
- Straaten, D. van der & F. Moerlands (2010). Evi en de rekentafel. *Reken-wiskunde-onderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 29(4), 58-66.
- Vermeulen, W., F. Moerlands & P. de Wert (2008). Faseren bij het leren van rekenen en wiskunde. *Jeugd in School en Wereld*, 92, 1-6.

Het Focus-project¹

- een teamtraining in opbrengstgericht werken op basis van prestatiefeedback -

M. van Geel & B. Teunis
Universiteit Twente, Enschede

1 inleiding

De Inspectie van het Onderwijs kwalificeert 'opbrengstgericht werken' (OGW) als dé sleutel tot onderwijsverbetering (Inspectie van het Onderwijs, 2011). Op scholen waar 'opbrengstgericht' wordt gewerkt zijn de leerling-prestaties hoger (Inspectie van het Onderwijs, 2010). OGW wordt door de Inspectie van het Onderwijs gedefinieerd als: 'het systematisch en doelgericht werken aan het realiseren van maximale leeropbrengsten voor alle leerlingen'.

In 2007 bracht de Onderwijsraad het adviesrapport 'Presteren naar vermogen' uit. In dit rapport werd gesteld dat er veel onbenut talent is bij leerlingen en dat de prestaties van Nederlandse leerlingen in internationaal vergelijkingsonderzoek als PIRLS 2006 (Mullis, Martin & Foy, 2007) en TIMSS 2007 (Mulis, e.a., 2008) relatief achterbleven. Vervolgens verscheen de 'Kwaliteitsagenda PO - Scholen voor morgen' (Ministerie van OCW, 2007). Een van de doelstellingen hierin was het verhogen van de leerlingprestaties op de kernvakken taal en rekenen.

Volgens de Inspectie van het Onderwijs voldeed in 2010 ongeveer 30 procent van de scholen aan alle vijf² de kwaliteitsindicatoren van OGW (Inspectie van het Onderwijs, 2011). De ambitie van het ministerie van Onderwijs in het actieplan 'Basis voor presteren' is dat in 2018 maar liefst 90 procent van de scholen opbrengstgericht werkt.

Uit de Onderwijsverslagen van de Onderwijsinspectie (2009, 2010) blijkt dat in bijna tweederde van de 7200 basisscholen de leerlingresultaten niet systematisch geëvalueerd worden. De meerderheid van Nederlandse basisscholen kan daardoor geen gefundeerde sturing geven aan de verbetering van haar onderwijskwaliteit en -opbrengsten. Uit dezelfde onderwijsverslagen blijkt dat scholen hun kwaliteit aanzienlijk kunnen verhogen wanneer er binnen de school wordt gewerkt volgens een systematische aanpak, waarbij groot belang wordt gehecht aan het gebruik van instrumenten waarmee de vorderingen van leerlingen nauwkeurig kunnen wor-

den gevolgd. Hierdoor kunnen scholen voor primair onderwijs beschikken over een schat aan valide prestatiefeedback die men kan benutten voor schoolverbetering: feedback over de prestaties van leerlingen, leerlinggroepen, en de school als geheel in vergelijking met eerdere eigen prestaties, en/of met de prestaties van de landelijke referentiegroep (de gemiddelde Nederlandse leerling/basisschool). Dergelijke informatie kan een goed uitgangspunt vormen voor reflectie op onderwijsresultaten en dient beter inzicht te geven in de (veelal) uiteenlopende onderwijsbehoeften van leerlingen.

Uit Nederlandse studies naar het gebruik van het leerlingvolgsysteem (LVS) blijkt duidelijk dat er in Nederlandse basisscholen sprake is van een sterke onderbenutting en zelfs van het foutief gebruik van deze vorm van prestatiefeedback (Visscher, 1996; Blok, Otter & Roeleveld, 2002; Bulder, 2008). Deze onderbenutting is met name jammer omdat tegenvallende leerprestaties, zelfs in zeer zwakke scholen, relatief snel blijken te kunnen worden omgebogen (Onderwijsinspectie, 2010) en dus talloze leerlingen beter onderwijs kunnen krijgen dan nu feitelijk het geval is.

Het opbrengstgericht werken heeft deze systematische benadering van leerlingresultaten voor ogen, waardoor het onderwijs op diverse onderwijsbehoeften beter wordt afgestemd. Op basis van het inzicht in de onderwijsbehoeften en andere informatie (onder andere kennis over de gemiddelde groei van leerlingen in een bepaalde schoolperiode) zouden bovendien expliciete, heldere prestatiedoelen moeten worden geformuleerd, nagestreefd en geëvalueerd (Visscher & Ehren, 2011).

2 ontwikkeling training

In schooljaar 2009-2010 is door de Universiteit Twente een training ontwikkeld waarin basisschoolleerkrachten leerden om te gaan met het leerlingvolgsysteem (LVS): welke analyses zijn mogelijk en hoe interpreteer ik deze gegevens? Een *pilotstudie* vond plaats met acht scholen uit de regio van de Universiteit Twente. Deze scholen ervoeren de nieuwe kennis en vaardigheden over het LVS als dusdanig relevant, dat op verzoek van deze scholen een vertaalslag is gemaakt van kennis over het LVS, naar het gebruik van deze analyses ten behoeve van de dagelijkse onderwijspraktijk.

Het succes van de *pilot* resulteerde in het uitzetten van een uitgebreide training op 43 scholen, opnieuw voornamelijk in Twente. In het Focus I-project volgt het schoolteam de training gesplitst: in het eerste schooljaar (2010-2011) zijn de leerkrachten van groep 1 tot en met 5 getraind, plus

de schoolleider en interne begeleider(s), in het tweede schooljaar (2011-2012) doorlopen de leerkrachten van groep 6 tot en met 8 ditzelfde traject. De scholen in Focus I werken aan OGW voor het vak rekenen.

In het schooljaar 2011-2012 is Focus II van start gegaan. Het voornaamste verschil tussen beide trajecten ligt in het feit dat binnen Focus II het volledige team deelneemt aan de tweejarige opzet.

Inhoudelijk is het eerste jaar gelijk aan de inhoud van Focus I, het tweede jaar wordt er echter gewerkt aan verdieping van de werkwijze voor rekenen en het integreren van nieuwe vakgebieden binnen het opbrengstgericht werken. Daarnaast is het spreidingsgebied aanzienlijk vergroot met in totaal zeventig participerende scholen in Friesland, Drenthe, Flevoland, Noord-Holland, Zuid-Holland, Gelderland en Overijssel.

3 achtergrond

OGW, zoals gedefinieerd in het Focus-project, is gebaseerd op drie kerncomponenten:

- a Feedback gebruiken. Het bepalen van de *beginsituatie* van de leerlingen, leerlinggroepen en de school als geheel in termen van prestatieniveaus en de mate waarin de leerlingen alle onderdelen van de leerstof wel/niet beheersen (bepaling van de onderwijsbehoeften van leerlingen waarbij het gebruik van het leerlingvolgsystemen van belang is).
- b Doelen stellen. Het definiëren van de *gewenste situatie* (expliciete, heldere doelen die aangeven wat het onderwijs op een bepaald toekomstig moment dient op te leveren) moet doelgericht in plaats van activiteiten-gericht handelen stimuleren.
- c Instructie aanpassen. Het op basis van kennis van de beginsituatie en de beoogde situatie weloverwogen bepalen van de *instructiebenadering* (zowel qua leerstofinhoud, didactiek als klassenmanagement) die tot de gewenste situatie moet leiden (afgestemd onderwijs).

Voor elk van deze drie componenten is sterke empirische evidentie.

feedback

Van slechts weinig fenomenen zijn we zo zeker dat ze prestatieverhogend werken als van feedback. Het onderzoek naar feedback kent een lange traditie. In de afgelopen honderd jaar zijn diverse meta-analyses, met duizenden studies naar feedback, uitgevoerd. Deze tonen de kracht van feedback als prestatieverhogend instrument ondubbelzinnig aan (Black & William, 1998; Fuchs & Fuchs, 1986; Hattie & Timperley, 2007; Kluger & DeNisi, 1996). Er is dan ook reden om, in het kader van het streven naar de ver-

betering van de rekenprestaties van leerlingen, te investeren in het benutten van de prestatiefeedback die het leerlingvolgsysteem biedt. Deze prestatiefeedback vormt de basis voor opbrengstgericht werken.

doelen stellen

De Goal Setting Theory van Locke en Latham (1979; 2002) stelt dat expliciete, bewuste, uitdagende leer- en/of prestatiedoelen leiden tot doelgericht gedrag en daarmee tot hogere prestaties dan wanneer vage en makkelijk te behalen doelen worden gesteld. Daarnaast kan het gericht werken aan de realisatie van de gestelde doelen de inspanning meer richten op het behalen van deze doelen (en daarmee het mijden van bijzaken en vergroten van effectieve tijdsbesteding aan het werken van deze doelen) en daarmee ook tot betere prestaties leiden.

In het huidige onderwijs is echter voornamelijk activiteitengericht onderwijs te zien, in plaats van doelgericht onderwijs. In activiteitengericht onderwijs ligt de nadruk op de vormgeving van de les; de activiteit *an sich* heeft een hogere prioriteit dan het achterliggende doel. De les moet 'leuk' zijn, leerlingen moeten zich vermaken. Het gevaar dreigt dat door activiteitengericht onderwijs meer wordt gewerkt aan het beheersen van korte, losstaande feiten, die door gebrek aan samenhang ook snel worden vergeten, en minder wordt gewerkt aan conceptuele kennis, inzichten en relaties tussen verschillende elementen (Ros, Vermeulen, Van der Hoeven & Timmermans, 2009). Doelgericht werken stelt leerkrachten in staat om, op basis van de doorgaande leerlijn, op een doordachte manier te werken aan de ontwikkeling van conceptuele rekenkennis van leerlingen.

Het doelgericht werken door het stellen van SMART-doelen (Specifiek, Meetbaar, Acceptabel, Realistisch, Tijdsgebonden) die daarnaast ambitieus zijn is daarom een van de speerpunten in OGW.

instructie aanpassen

Verschillen in prestaties tussen leerlingen worden voornamelijk verklaard (50 procent) door verschillen tussen leerlingen; de leerkracht (30 procent) is de grootste beïnvloedbare verklaring voor deze prestatieverschillen (Hattie, 2009). Het is daarom van belang dat de leerkrachten hun onderwijs en instructie zó vormgeven dat zij hun doelen behalen met hun leerlingen.

rationele benadering

Opbrengstgericht werken veronderstelt een rationale houding ten opzichte van het gebruik van analysegegevens, het stellen van doelen en het aanpassen van de instructie. Er zijn echter heel wat aanwijzingen die suggereren dat scholen niet altijd even rationeel te werk gaan (DiMaggio & Powell, 1983; Marc & Simon, 1956; Visscher, 1996; Weick, 1976). School-

leiders blijken zich in hun beslissingen vaak te laten leiden door informele, subjectieve informatie in plaats van door objectieve kwantitatieve gegevens (Visscher, 1996). Volgens Weick (1976) worden scholen voornamelijk gekenmerkt door *loose coupling* tussen beslissingen en de uitvoering hiervan, en tussen de verschillende 'subsystemen', zoals de leerkrachten van verschillende groepen. In de Focus-training wordt daarom ook gewerkt aan het vergroten van de samenwerking en besluitvorming met betrekking tot OGW binnen de deelnemende teams.

4 praktische uitwerking

Het iteratieve proces op basis van deze drie kerncomponenten vormt het frame voor een praktische toepassing in de klas. De overgang van analyseren naar een praktische vormgeving in de klas leidt echter niet zelden tot problemen. Binnen het Focus-project worden leerkrachten daarom stapsgewijs aan de hand genomen met behulp van een analyseprotocol. Het doorlopen van dit protocol verschaft de leerkracht informatie om een groepsplan op adequate wijze vorm te geven.

Het groepsplan wordt binnen het project gezien als een werkdocument voor de alledaagse praktijk. Zaken als instructiegroepen, onderwijsbehoeftes, leerstofdoelen, normdoelen en werkwijzen worden alle benoemd in dit document.

Daarnaast biedt het Focus-groepsplan plaats aan subgroepen die samengesteld worden op inhoudelijke uitval en/of onderwijsbehoeftes. Het totaalplan verschaft een zorgdocument waarin dagelijkse lespraktijk en individuele zorgplannen samenkomen in een werkbaar plan. Dit alles draagt bij aan de optimalisering van het onderwijs.

OGW stuurt op structurele veranderingen binnen de school. Dit doet een beroep op de kennis, vaardigheden en attitude van iedereen die binnen de school betrokken is bij het onderwijs. Tijdens de bijeenkomst wordt er dan ook op een interactieve manier gewerkt aan deze drie kenmerken.

- 1 *Kennisinput* door middel van het aanbieden van leerstof en materialen die geënt zijn op theoretische gronden.
- 2 *Het aanleren en oefenen van vaardigheden* door deelnemers te laten oefenen in de trainingscomponenten en hier feedback op te geven.
- 3 *Attitudeverandering* door middel van enthousiasmerende bijeenkomsten waarin theorie altijd in dienst staat van de praktijk. Samenwerking en onderlinge kennisoverdracht spelen hierin een grote rol.

Uiteindelijk moet OGW een systematiek worden binnen de school. Er ont-

staat op deze wijze een professionele leergemeenschap waarin er sprake is van een doorgaande lijn in: onderwijsinhoud, werkwijzen, klassenmanagement en inhoudelijke besprekingen. Daarbij is een stimulerende en faciliterende schoolleider onontbeerlijk (Wayman & Stringfield, 2006; Young 2006). Hij/zij functioneert (in samenwerking met de interne begeleider) idealiter als gangmaker en bewaker van het proces van opbrengstgericht werken door ervoor te zorgen dat de opbrengstanalyses tijdig beschikbaar zijn, dat het teamoverleg daarover tijdig plaatsvindt en dat schoolbrede afspraken worden gemaakt over de verbeterpunten van de school voor de komende periode. Een schoolleider die de kwaliteit van leeropbrengsten van belang acht zal de daadwerkelijke uitvoering van de gemaakte school- en groepsplannen ook monitoren.

Om bovenstaande kenmerken ook daadwerkelijk te bewerkstellingen dienen trainingen overeen te stemmen met de algemene principes van effectieve professionalisering, zoals bijvoorbeeld recentelijk beschreven door Van Veen, Zwart, Meirink & Verloop (2010) op basis van hun review van het onderzoek naar professionalisering. Zij concluderen onder andere dat professionaliseringsactiviteiten nauw moeten aansluiten bij het dagelijkse werk in de klas, de actieve inbreng van deelnemers moeten faciliteren, dat trainingen qua duur overeen moeten stemmen met de tijd die het kost om een vaardigheid te ontwikkelen, gebaseerd moeten zijn op samenwerking en gezamenlijke verantwoordelijkheid binnen het team, en ingebed moeten zijn in de schoolorganisatie (bijvoorbeeld trainingen passend bij de visie van de school). Bovendien moet de professionalisering volgens hen zo overtuigend mogelijk zijn qua *theory of improvement* (veronderstellingen over wie wat moet leren en hoe dat leidt tot beter onderwijs en tot betere leerprestaties), *theory of change* (assumpties over hoe de interventie tot beter lesgedrag zal leiden) en *theory of instruction* (aannames aangaande hoe de interventie tot het beter leren door leerlingen zal leiden).

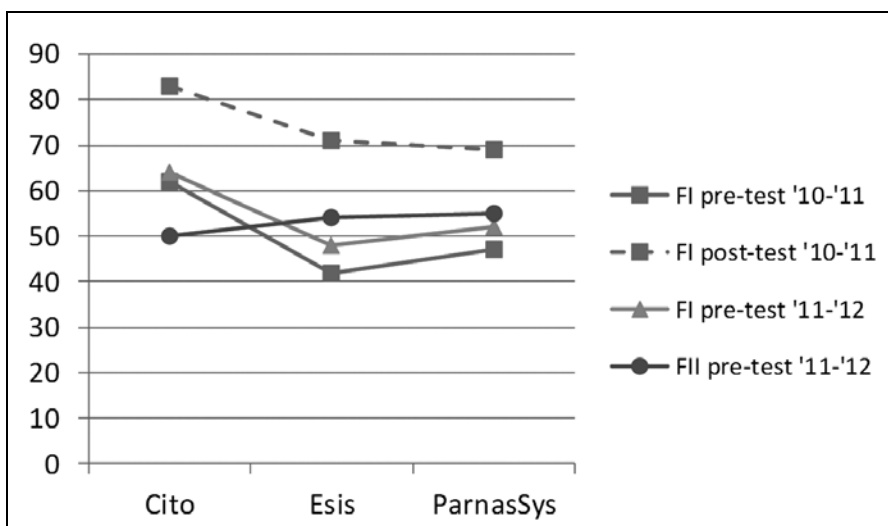
Het Focus-project beoogt om aan deze criteria te voldoen en daarmee op adequate wijze te werken aan de optimalisering van het onderwijs.

5 voorlopige onderzoeksresultaten

Het onderzoek naar de effecten van de training heeft betrekking op kennis, attitude en vaardigheden van leerkrachten, de leerlingprestaties, de waardering van het onderwijs (door leerkrachten en leerlingen) en de mate van opbrengstgericht werken in de scholen. Daarnaast wordt onderzocht onder welke condities OGW het grootste effect sorteert.

Op dit moment zijn gegevens bekend van het eerste jaar Focus I, en de voormeting van Focus II. Figuur 1 geeft een grafische weergave van de scores op de 'kennistoets leerlingvolgsysteem' bij aanvang van het project (FI pre-test '10-'11, FI pre-test '11-'12, en FII pre-test '11-'12) en de eerste nameting van de eerste groep (FI post-test '10-'11). De toename van kennis van het leerlingvolgsysteem is voor de leerkrachten die in 2010-2011 de Focus I-training volgden significant. In augustus 2012 worden de resultaten van de leerkrachten die in 2011-2012 zijn gestart verwacht.

Opvallend is het grote verschil tussen de aanvangsscores van leerkrachten in Focus I (FI pre-test '10-'11 en '11-'12) en Focus II (FII pre-test '11-'12) voor de verschillende systemen. Een mogelijke verklaring is te vinden in het introductiemoment van het LVS: veel scholen in Focus II zijn recentelijk overgestapt naar 'Esis' of 'ParnasSys' en hebben hier mogelijk aanvullende scholing in gevolgd, in tegenstelling tot scholen die met Cito-LOVS werken. Dit is echter nog niet onderzocht.



figuur 1: scores (percentage goed) op kennistoets Leerlingvolgsysteem

De leerlingprestaties van het eerste schooljaar van Focus I (2010-2011) zijn nog niet volledig onderzocht waardoor hierover nog geen uitspraken kunnen worden gedaan.

De leerlingwaardering van het onderwijs is in Focus II onderzocht in de periode rondom de herfstvakantie van het eerste trainingsjaar. Met behulp van een vragenlijst voor leerlingen van groep 4 tot en met 8 is in kaart gebracht hoe leerlingen verschillende elementen van het onderwijs waar-

deren. De waardering is gescoord op een vijfpuntsschaal, waarbij 1 de laagste score is en 5 de maximale waarde. Zoals te zien in figuur 2 wordt in alle leerjaren het pedagogisch klimaat en het stimuleren van leerlingen als hoog (>4) gewaardeerd. Taakgerichtheid en uitleg scoren met >3.5 voldoende. Op doelgerichtheid wordt voor groep 4-5 matig (>3) en voor groep 6-7-8 zelfs laag (<3) gescoord. Dit is echter een essentieel onderdeel van opbrengstgericht werken en is daarom een van de Focus-componenten. De leerkrachten hebben een individuele feedbackrapportage ontvangen, en kunnen deze gebruiken om hun onderwijs aan te passen. In juni/juli 2012 wordt deze vragenlijst opnieuw afgenomen en zullen verschilscores worden berekend.

	Pedagogisch klimaat	Taakgerichtheid	Uitleg en afstemming	Stimuleren	Doelgerichtheid
Groep 4	4,26	3,75	3,66	4,35	3,29
Groep 5	4,24	3,79	3,66	4,36	3,06
Groep 6	4,17	3,75	3,63	4,32	2,92
Groep 7	4,21	3,71	3,72	4,31	2,92
Groep 8	4,28	3,79	3,83	4,36	2,90

figuur 2: gemiddelde scores op subschalen leerlingvragenlijst

6 vooruitblik

In 2011 is een OnderwijsBewijs-aanvraag toegekend voor het onderzoeksproject Focus III. Hierin ligt de nadruk op scholen met relatief veel gewichtenleerlingen. In september 2012 zal deze training van start gaan.

noten

- 1 Meer informatie over het Focus-project vindt u op:
<http://project-focus.gw.utwente.nl/>
- 2 (1) De school gebruikt een samenhangend systeem van instrumenten en procedures voor het volgen van prestaties en de ontwikkeling van de leerlingen; (2) de leraren volgen en analyseren de vorderingen van hun leerlingen systematisch; (3) de school gaat de effecten van de zorg na; (4) de school evalueert jaarlijks systematisch de kwaliteit van haar opbrengsten; (5) de school evalueert regelmatig het onderwijsleerproces (Inspectie van het Onderwijs, 2011).

literatuur

Black, P. & D. Wiliam (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 5(1), 7-74.

- Blok, H., M. Otter & J. Roeleveld (2002). *Leerlingvolgsystemen: Praktische lessen uit onderzoek*. Amsterdam: SCO Kohnstamm Instituut van de Faculteit der Maatschappij- en Gedragswetenschappen, Universiteit van Amsterdam.
- Bulder, J.C. (2008). *Interpretatie en gebruik van feedback uit het CITO-LOVS leerlingvolgsysteem*. Enschede: Onderwijskunde.
- DiMaggio, P.J. & W.W. Powell (1983). The Iron Cage Revisited: Institutional Isomorphism and Collective Rationality in Organizational Fields. *American Sociological Review*, 48(1), 147-160.
- Fuchs, L.S. & D. Fuchs (1986). Effects of systematic formative evaluation: A meta-analysis. *Exceptional Children*, 53(3), 199-208.
- Hattie, J.A.C. & H. Timperley (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81-112.
- Hattie, J.A.C. (2009). *Visible learning; a synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. Abingdon: Routledge.
- Inspectie van het Onderwijs (2010). *Opbrengstgericht werken in het basisonderwijs. Een onderzoek naar opbrengstgericht werken bij rekenen-wiskunde in het basisonderwijs*. Utrecht: Inspectie van het Onderwijs.
- Inspectie van het Onderwijs (2011). *De Staat van het onderwijs. Onderwijsverslag 2009/2010*. Utrecht: Inspectie van het Onderwijs.
- Kluger, A.N. & A. DeNisi (1996). The effects of feedback interventions on performance: A historical review, a meta-analysis, and a preliminary feedback intervention theory. *Psychological Bulletin*, 119(2), 254.
- Marc, J. & H. Simon (1956). *Organizations*. New York: Wiley.
- Ministerie voor Onderwijs, Cultuur & Wetenschap (2007). *'Scholen voor Morgen'*. Den Haag: Ministerie voor Onderwijs, Cultuur & Wetenschap.
- Mullis, I.V.S., M.O. Martin, E.J. González & A.M. Kennedy (2007). *PIRLS 2006 international report: IEA's Progress in International Reading Literacy Study in Primary School in 40 Countries*. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- Mullis, I.V.S., M.O. Martin & P. Foy (with J.F. Olson, C. Preuschoff, E. Erberber, A. Arora & J. Galia) (2008). *TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grade*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
- Locke, E.A. & G. Latham (1979). Goal setting - A motivational technique that works. *Organizational Dynamics*, 1979.
- Locke, E.A. & G. Latham (2002). Building a Practically Useful Theory of Goal Setting and Task Motivation. *The American Psychologist*, 57(9), 705-17.
- Onderwijsraad (2007). *Presteren naar vermogen*. Den Haag: Onderwijsraad.
- Ros, A., M. Vermeulen, J. van der Hoeven & R. Timmermans, R. (2009). *Leren en laten leren*, 1st edition. Deventer; Kluwer B.V.
- Veen, K. van, R. Zwart, J. Meirink & N. Verloop (2010). *Professionele ontwikkeling van leraren. Een reviewstudie naar effectieve kenmerken van professionaliseringsinterventies van leraren*. Leiden: ICLON/Expertisecentrum Leren van Docenten.
- Visscher, A.J. (1996). The implications of how school staff handle information for the usage of school information systems. *International Journal of Educational Research*, 25(4), 323-334.
- Visscher, A.J. & M. Ehren (2011). *De eenvoud en complexiteit van Opbrengstgericht werken*. Analyse op verzoek van de Kenniskamer van het Ministerie van OC&W van de voorwaarden voor effectief Opbrengstgericht werken in de onderwij-

- spraktijk. Enschede: Universiteit Twente.
- Wayman, J.C. & S. Stringfield (2006). Technology-supported involvement of entire faculties in examination of student data for instructional improvement. *American Journal of Education*, 112(4), 549-571.
- Weick, K.E. (1976). Educational Organizations as loosely coupled systems. *Administrative Science Quarterly*, 21, 1-19.
- Young, V.M. (2006). Teachers' use of data: Loose coupling, agenda setting, and team norms. *American Journal of Education*, 112(4), 521-548.

Rekenen in beeld

- effect van beeld in opgaven voor functioneel rekenen -

K. Hoogland
APS, Utrecht

1 inleiding

Functioneel rekenen wordt internationaal meer en meer gezien als een belangrijk doel van reken-wiskundeonderwijs (Bessot & Ridgway, 2000; Fitzsimons, 2002). Functioneel rekenen staat international vooral bekend als *mathematical literacy* (Jablonka, 2003), *numeracy* (Coben, 2003) of *quantitative reasoning* (Steen, 2001). In Nederland wordt het ook wel 'gecijferdheid' genoemd (Hoogland & Jablonka, 2003; Hoogland & Meeder, 2007).

Met het invoeren van de referentieniveaus $1F$, $2F$ en $3F$ en de bijbehorende verplichte toetsing vanaf 2014 (Hoogland, 2011) is het van toenemend belang om kennis op te doen op welke wijze dat functioneel rekenen zo goed mogelijk onderwezen en getoetst kan worden. In het onderzoeksproject Rekenen in Beeld¹ is onderzocht wat het effect is van het gebruik van beeldende contexten in plaats van de veelgebruikte talige contexten. Uit het onderzoek blijkt dat leerlingen in basisonderwijs (groep 7 en 8), in voortgezet onderwijs en mbo beter scoren op opgaven voor functioneel rekenen waarbij de situatie vooral met beeld wordt gepresenteerd, dan op opgaven waarbij dat vooral met taal gebeurt.

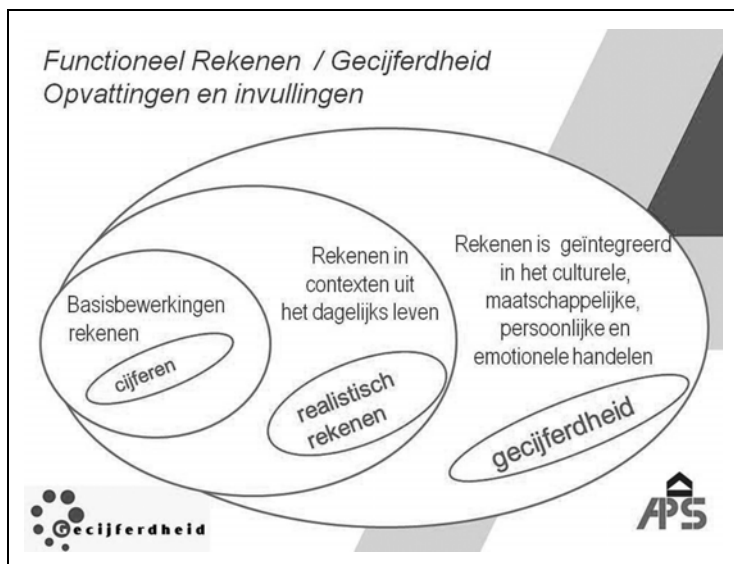
2 functioneel rekenen

De wereld om ons heen is doordrenkt met getallen, patronen en structuren. De kwantitatieve kant van de wereld ziet er tegenwoordig heel anders uit dan pakweg dertig jaar geleden. Veel berekeningen zijn tegenwoordig gedeeltelijk of geheel verborgen in apparaten. Nauwkeurig rekenen en het doen van bewerkingen met grote getallen is bijna volledig door computers en rekenmachines overgenomen.

Met computers kunnen ook eindeloze stromen getallen, diagrammen en grafiekjes gemaakt worden die hun weg weer vinden naar media, studietoelaten en handboeken. Die getallen, grafieken en diagrammen moeten vervolgens

weer geïnterpreteerd worden door de lezer. Je kunt vrijwel geen maatschappelijke activiteit ondernemen zonder op een of andere manier geconfronteerd te worden met kwantitatieve aspecten.

Jongeren moeten leren op een adequate manier om te gaan met kwantitatieve problemen uit het dagelijkse leven, daarover is vrijwel iedereen het wel eens. Maar bij het beantwoorden van de vraag wat ze dan precies moeten leren, lopen de opvattingen sterk uiteen. Die verschillende opvattingen zijn zichtbaar in het model in figuur 1.



figuur 1: opvattingen over functioneel rekenen

cijferen

Een nog steeds vrij veelgehoorde opvatting is dat leerlingen, om ze voor te bereiden op het oplossen van kwantitatieve problemen in het dagelijkse leven, vooral zouden moeten leren cijferen. Dat is het kunnen uitvoeren van bewerkingen op kale getallen volgens vaste procedures met de hand en op papier: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. De staartdeling is het icoon van deze opvatting. Is cijferen een relevante bezigheid? In een land dat dreef op handel, scheepvaart en industrie was deze ambachtelijke vaardigheid van het grootste belang. Zonder cijferen geen fabrieken, geen handel, geen zeereizen. Het rekenboek 'De Cijfferringhe' van Willem Bartjens haalde tussen 1600 en 1700 met gemak de honderdste druk. Maar de kwantitatieve kant van de wereld ziet er vandaag heel anders uit en het kale cijferen heeft daarin zijn relevantie vrijwel volledig verloren.

realistisch rekenen

Een andere opvatting luidt dat het bij rekenen vooral gaat om het oplossen van rekenkundige problemen die gepresenteerd worden in contexten. Deze benadering is op dit moment gemeengoed in het onderwijs in Nederland. De huidige schoolboeken staan er vol mee. Ook daar zitten wat haken en ogen aan. In schoolboeken omschreven situaties zijn wezenlijk anders dan echte situaties en leerlingen kijken daar soms ook op een heel speciale manier naar. De contexten zijn te vaak vooral zeer talig, wat met name voor zwakkere leerlingen een groot probleem vormt.

gecijferdheid

Wereldwijd wint een derde opvatting snel aan populariteit. Die zegt dat studenten gecijferd moeten worden om met de kwantitatieve kant van de wereld om te gaan. Gecijferdheid neemt, meer nog dan realistisch rekenen, de wereld om ons heen als uitgangspunt. Die is zo rijk, zo gevarieerd en soms zo complex, dat studenten een zeer uitgebreid repertoire nodig hebben om zich daarin te redden. Bij vermenigvuldigen gaat het niet om een som en een goed antwoord, maar om het herkennen van vermenigvuldigstructuren in de bouw, de landbouw of bij ontwerpen. Bij delen gaat het niet om de staartdeling maar om verdeel- en uitdeelproblemen.

Maar het gaat bij gecijferdheid bovendien en vooral om het trekken van conclusies uit getalsmatige informatie. Interpreteren, analyseren, ordenen, (in)schatten, structureren en selecteren van kwantitatieve informatie zijn vaardigheden die horen bij gecijferdheid.

Kwantitatieve problemen worden op dit moment in schoolboeken en in toetsen veelal gepresenteerd als woordproblemen: de werkelijkheid wordt beschreven in taal. Deze taligheid levert voor veel leerlingen problemen op (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000; Verschaffel, Greer, Van Dooren & Mukhopadhyay, 2009), waardoor zij minder goed in staat zijn om hun wiskundige kennis en vaardigheid in te zetten en te tonen bij het oplossen van dergelijke kwantitatieve problemen. In het onderzoek *Rekenen in Beeld* is de hypothese dat het vervangen van woordproblemen door equivalente beeldrijke problemen een positief effect heeft op de resultaten van de leerlingen bij het oplossen van zulke problemen. Tevens schuiven de opgaven dan ook wat meer op in de richting van gecijferdheid. Ze ogen in ieder geval authentiek en staan dichterbij de echte problemen uit het dagelijkse leven.

3 methode van onderzoek

In dit onderzoek is het effect gemeten van het veranderen van een opga-

venkenmerk op de prestaties van de leerling. In dit onderzoek wordt gewerkt met twee varianten van opgaven. Een variant waarbij de context vooral gepresenteerd door middel van een talige omschrijving en een variant waarbij de context vooral wordt gepresenteerd door middel van beeld. In figuur 2 staat een voorbeeld.

Je koopt boodschappen voor € 21,30.
 Je betaalt met een biljet van 50 euro en twee munten van een euro.

Hoeveel krijg je terug?

€

Je moet betalen

SUPERMARKT
 Deliastraat 4
 5707 SJ Helmond
 0492-527384

15	blik cola 330ml	0.90	13.50
13	chips flav. pnt. light	0.60	7.80
aantal art. 28		subtotaal	21,30
TOTAAL			21.30

Je betaalt met



Hoeveel krijg je terug?

€

figuur 2: twee varianten van één opgave

De hypothese dat het vervangen van woordproblemen door equivalente beeldrijke problemen een positief effect heeft op de resultaten van de leerlingen is onderzocht in een onderzoekspopulatie die bestaat uit leerlingen uit het basisonderwijs (groep 7 en 8), voortgezet onderwijs (vmbo, havo, vwo) en mbo. In figuur 3 is weergegeven welke aantallen leerlingen in de hoofdafname van het onderzoek hebben meegedaan.

	basisonderwijs groep 7 en 8	vmbo	havo/vwo	mbo	overig/onbekend	totaal
Aantal leerlingen	969	12.459	16.588	1.146	680	31.842

figuur 3: aantal deelnemers hoofdafname Rekenen in Beeld

Gerelateerd aan de rekendomeinen uit het referentieniveau 2_F rekenen (ocw, 2009), zijn 21 koppels van opgaven geconstrueerd. Elk koppel bestaat uit twee varianten (A en B) van hetzelfde probleem. In variant A wordt de context vooral gepresenteerd door middel van een talige omschrijving. In variant B wordt de context vooral gepresenteerd door middel van beeld. De inhoudelijke equivalentie van beide varianten van een opgave is vastgesteld door een deskundigenpanel. De equivalentie betreft of beide problemen dezelfde rekenkundige of wiskundige kennis en vaardigheid toetsen en, zo ja, of ze van hetzelfde reken- of wiskundig niveau zijn.

Door middel van een activeringscode startten leerlingen *webbased* een toets op die bestond uit 24 opgaven functioneel rekenen: 21 opgaven in koppels A-B en drie controlevragen. Geheel random wordt bij iedere activering bepaald welke van de 21 vragen met een A-variant worden voorgelegd en welke met een B-variant. Op deze wijze is de groep zelf zijn controlegroep en voldoet het onderzoeksdesign aan de eisen voor een *randomized controlled trial*.

Bij het oplossen van de opgaven was het gebruik van een *on-screen* rekenmachine toegestaan. De tijdsduur bedroeg maximaal zestig minuten. De antwoorden worden als numerieke waarde door de leerlingen ingegeven en door de computer gescoord. In geval van mogelijke afrondingen bij antwoorden is de controlewaarde niet een getal maar een klein interval.

4 resultaten

De gevonden resultaten ondersteunen de hypothese dat het vervangen van woordproblemen door equivalente beeldrijke problemen een positief effect heeft op de resultaten van de leerlingen bij het oplossen van dergelijke problemen.

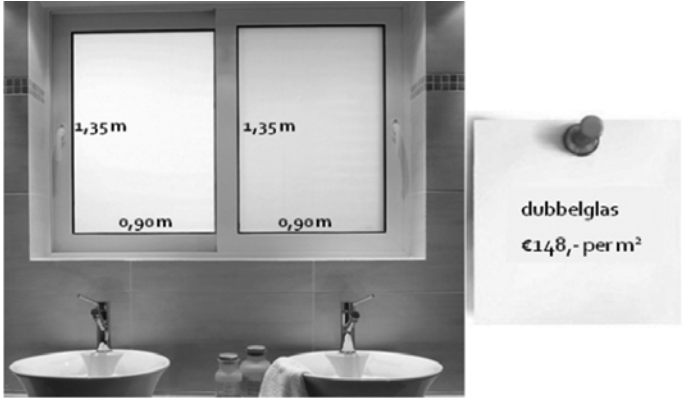
Op de toets als geheel is de gemiddelde score van de leerlingen op de opgaven met de beeldende context (B) (45,5 procent) significant hoger dan de gemiddelde score van de leerlingen op de opgaven met de talige variant (A) (43,5 procent).

Voor de afzonderlijke vragen werd gevonden dat bij tien van de 21 opgaven leerlingen significant beter scoren op de beeldende variant (B). Bij vier van de 21 opgaven scoren leerlingen significant hoger op de talige variant (A). Bij zeven van de opgaven is er geen significant verschil. In figuur 4 staat een voorbeeld van een koppel opgaven waarbij leerlingen op de B-variant gemiddeld ruim 16 procent hoger scoorden dan op de A-variant.

In de badkamer zitten twee ramen. Ze zijn 0,90 m breed en 1,35 m hoog
 Je wilt hier dubbelglas in laten zetten.
 Dubbelglas kost € 148,- per m².

Hoeveel kost het om in deze ramen dubbelglas te laten zetten?

€



Hoeveel kost het om in deze ramen dubbelglas te laten zetten?

€

figuur 4: een koppel opgaven waarbij leerlingen op de B-variant gemiddeld ruim 16 procent hoger scoorden dan op de A-variant

5 conclusie

Uit het onderzoek blijkt dat het vervangen van talige contexten door beeldende contexten een positief effect heeft op de resultaten van leerlingen. Dit treedt op bij een meerderheid van de voorgelegde problemen.

Een van de meest plausibele verklaringen is dat de problemen die leerlingen hebben met woordproblemen voor een groot deel worden weggenomen door taal te vervangen door beeld.

In vervolgonderzoek wordt op dit moment onderzocht of er een verfijning mogelijk is van het onderscheidende opgavenkenmerk, die een preciezere voorspelling mogelijk maakt van het geconstateerde effect.

Voorliggend onderzoek heeft vooral een vaststellend karakter gehad. Wat nu precies de verklaring is voor het optredende effect is hiermee niet aangetoond. In vervolgonderzoek gaan we op zoek naar mogelijke verklaringen. Die kunnen bijvoorbeeld te maken hebben met de manier waarop leerlingen dit soort opgaven (moeten) modelleren in hun hoofd. Maar er zal ook nader bekeken worden of vanuit *cognitive load theory* (Sweller, 2009) of theorieën rond multimodaal leren (Mayer, 2003) aannemelijke verklaringen voor dit fenomeen gevonden kunnen worden.

6 ten slotte

In 2009 is door het ministerie van OCW (2009) het referentiekader taal en rekenen in de wet vastgelegd. Op grote schaal worden op dit moment door allerlei partijen lesmateriaal voor functioneel rekenen en toetsmateriaal voor de referentieniveaus rekenen 1F, 2F en 3F ontwikkeld en in de praktijk ingezet. De resultaten van dit onderzoek zouden door ontwikkelaars van lesmateriaal en toetsen ter harte genomen moeten worden. Als de taligheid van de contexten minder een rol spelen voor de leerlingen, is men zuiverder in staat de kennis en vaardigheden van leerlingen op het gebied van functioneel rekenen te meten.

noot

1 Zie: www.rekeneninbeeld.nl

literatuur

- Bessot, A. & J. Ridgway (eds.) (2000). *Education for Mathematics in the Workplace*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Coben, D. (2003). *Adult numeracy: review of research and related literature* (pp. 170). London: NRDC.
- Fitzsimons, G.E. (2002). *What counts as mathematics? Technologies of power in adult and vocational education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Hoogland, K. & E. Jablonka (2003). Wiskundige geletterdheid en gecijferdheid. *Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, 23(1), 31-37.
- Hoogland, K. & M. Meeder (2007). *Gecijferdheid in beeld*. Utrecht: APS.
- Hoogland, K. (2011). Rekentoetsen in vo en mbo. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk* 30(4), 29-31.
- Jablonka, E. (2003). Mathematical literacy. In: A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F.K.S. Leung (eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 75-102.
- Mayer, R. E. (2003). The promise of multimedia learning: using the same instructional design methods across different media. *Learning and Instruction*, 13(2), 125-139.
- OCW (2009). *Referentiekader taal en rekenen*. Enschede: SLO

- Steen, L. A. (ed.) (2001). *Mathematics and democracy, the case for quantitative literacy*. USA: NCED, The Woodrow Wilson National Fellowship Foundation.
- Sweller, J. (2009). The Many Faces of Cognitive Load Theory. *T+D*, 63(8), 22-22 (article).
- Verschaffel, L., B. Greer, & E. De Corte (eds.) (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger Publishers.
- Verschaffel, L., B. Greer, W. van Dooren & S. Mukhopadhyay (eds.) (2009). *Words and Worlds - Modelling Verbal Descriptions of Situations*. Rotterdam/Boston/Taipei: SensePublishers.

Op weg naar opbrengstveroorzakend onderwijs?

- de onderzoekende leraar in een opbrengstgerichte cultuur -

D. Janson
APS, Utrecht

1 inleiding

Laten we het maar direct vaststellen: elke leraar wil opbrengsten. Niet omdat daarvan sprake is in beleidsnota's of omdat iemand heeft bedacht dat er datamuren moeten verschijnen. Maar gewoon omdat opbrengsten het vanzelfsprekende resultaat van het samenspel tussen onderwijs en leren zijn. Wat kunnen dingen soms simpel zijn... Helaas is de werkelijkheid dikwijls minder simpel en vanzelfsprekend. Dat is reden om in deze bijdrage die werkelijkheid eens te verkennen en een perspectief te schetsen dat die gewenste praktijk dichterbij kan brengen.

2 vervorming

Vraag aan willekeurige basisscholen naar de opbrengsten van hun rekenonderwijs en de kans is groot dat men aankomt met lijstjes met toetsscores. Dat is niet vreemd in een land waar het beleid erop is gericht alle scholen boven het landelijke gemiddelde (sic!) te laten uitkomen. Toetsscores zijn voor velen in het onderwijs synoniem geworden voor opbrengsten.

Nu is er niets mis met het gebruik van toetsen als middel om bepaalde resultaten vast te stellen. Ook het vergelijken van de eigen resultaten met die van anderen, zoals via de toetsen van het Cito-LOVS mogelijk is, kan nuttig zijn. Maar die toetsscore is niet de opbrengst van het rekenonderwijs. Ook zijn hoge Cito-scores niet het doel van de rekenlessen. In de dagelijkse werkelijkheid spreken leraren en schoolmanagers inmiddels wel zo over opbrengsten. Je zou dat een vervorming kunnen noemen: een middel wordt doel. Het Cito is de eerste die zal beamen dat die vervorming niet de bedoeling is.

3 opbrengst

Het voorgaande is niet iets nieuws natuurlijk. Toch kom ik met grote regelmaat leraren tegen die niet durven te vertrouwen op hun ogen en oren. Ook al zien ze leerlingen vooruitgang boeken en horen dat ze hun inzichten en vaardigheden goed verwoorden; het is pas echt als ook de toetsuitslag het laat zien. Toch durf ik te stellen dat de echte opbrengst van rekenonderwijs merkbaar is vóór de toets. Als het goed is ervaren kinderen in elke rekenles dat zij door de activiteiten die zij daar doen, beter herkennen welke rol getallen en bewerkingen spelen in de wereld buiten de school, meer snappen van getallen en hun onderlinge relaties, bewerkingen op een kortere en slimmere manier kunnen uitvoeren, en nog veel meer.

Om misverstanden te voorkomen: de opbrengst van een rekenles is niet het af hebben van de opgegeven bladzijden, en zelfs niet het goed hebben van alle antwoorden. Helaas ervaren nog heel veel kinderen dat wel als het doel dat zij moeten nastreven. Dat hebben zij niet van een vreemde; dikwijls laten hun leraren merken dat het hen juist daarom is te doen.

4 onderwerp of doel?

Het is in reken-wiskundemethodes steeds gebruikelijker om ‘het doel’ te vermelden bij de blokken. Dat is lofwaardig, maar gelukkig maken zij dat zelden waar. Meestal staat slechts het onderwerp vermeld. Nogmaals, dat is maar goed ook, want het is een illusie te denken dat al die leerlingen die toevallig bij elkaar in de klas zitten op precies hetzelfde moment precies dezelfde stap zetten in hun rekenontwikkeling. Kinderen zullen binnen zo’n rekenthema hun eigen doel moeten herkennen, willen ze bewust hun opbrengst kunnen ervaren.

Een klassikale rekenles waarin een probleem centraal staat, biedt volop ruimte voor verschillen. Verschillen in interpretatie van het probleem, verschillen in handelingsniveau, verschillen in mate van verkorting, en dus verschillen in doelen en beoogde opbrengsten. Door de kinderen actief met het probleem aan de gang te laten gaan, te laten samenwerken en het naar elkaar onder woorden te laten brengen, leren ze met en van elkaar, ieder vanuit de eigen beginsituatie. De leraar neemt die verschillen waar en is zo in staat passende interventies te plegen, zoals een vraag stellen, feedback geven, een model inbrengen, een notatiewijze suggereren. De nabespreking is het moment waarop al die ervaringen samenkomen, de kwartjes vallen en inzichten worden aangescherpt.

Een klassikale rekenles waarin het maken van een aantal rekenopgaven

wordt voorbereid, biedt die ruimte veel minder. Daardoor is de verleiding groot om het alleen over het uitrekenen te hebben. Geen wonder dat dan gedacht wordt in de driedeling 'basisinstructie', 'instructieafhankelijk' (dus verlengde instructie) en 'instructieonafhankelijk' (dus alleen taakinstructie). Alle leerlingen lijken dan hetzelfde doel te hebben. Als de resultaten op de LOVS-toets later dat beeld niet laten zien, klinkt regelmatig het verwijt dat die toets te talig was. Ligt dat echt aan die toets?

5 onderzoek

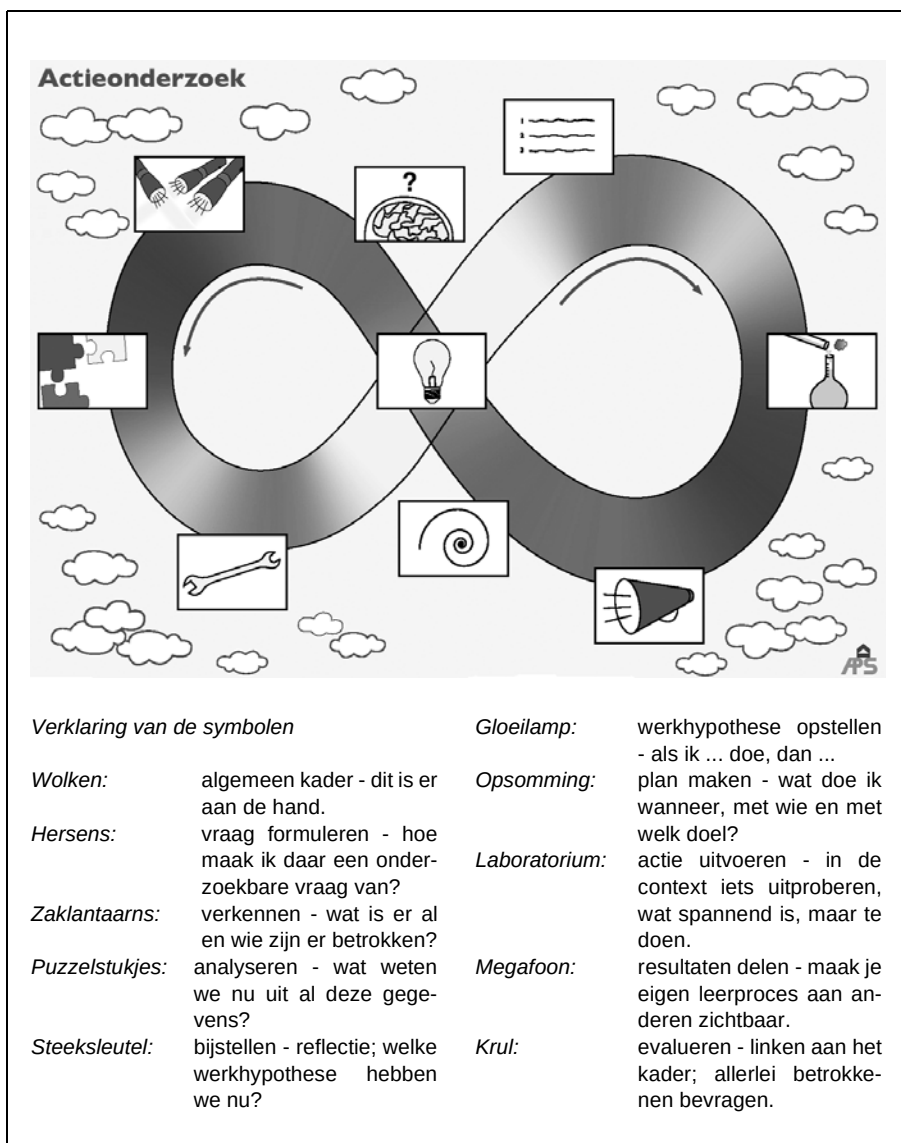
Gelukkig zien steeds meer leraren dat zij baas in eigen rekenles zijn. Niet door de methode te negeren en de kinderen te leren hoe zij het vroeger zelf als leerling geleerd hebben. Dat is slechts een ander soort afhankelijkheid. Nee, leraren die zich echt de baas voelen, vragen zich af of zij, door braaf de methode te volgen, hun leerlingen wel bieden wat zij nodig hebben. Zij merken bijvoorbeeld dat er kinderen zijn die veel goede antwoorden produceren, maar er vreselijk lang over doen. Vroeger zouden zij gedacht hebben: 'Ze kunnen het wel, dus laat ik ze gewoon wat minder maken'. Nu vragen zij zich af, waardoor die kinderen er zo lang over doen. Dat betekent dat zij niet gelijk klaar staan met een interpretatie en een bijbehorende oplossing, maar eerst eens onderzoeken hoe die kinderen eigenlijk rekenen als ze met deze opgaven bezig zijn. Leraren die dat doen merken bijvoorbeeld dat hun methode veel te snel doorschakelt naar een hoger handelingsniveau, of nauwelijks gerichte oefening biedt om van het tellen af te komen. Ook ontdekken zij regelmatig dat stil en alleen opgaven maken in een schrift, helemaal niet past bij het doel waaraan bepaalde kinderen zouden moeten werken. Hoe leer je redeneren of de juiste aanpak kiezen als je dat nooit zelf hardop met een ander mag uitwisselen, afwegen en bespreken?

Nu op de pabo een onderzoekende houding tot de basiscompetenties gerekend wordt, lijkt het hoog tijd dit ook bij zittende leraren te stimuleren en te faciliteren (Boog, 2005).

6 onderzoekbare vragen

In scholen die meedoen aan het APS-praktijkonderzoek rond 'de onderzoekende leraar', merken we hoe lastig leraren het vinden om niet direct al met interpretaties, antwoorden en oplossingen te komen. Een onderzoekende houding begint er echter mee dat leraren zich dingen gaan afvragen

in plaats van door te gaan alsof alles wat zij in de klas doen en meemaken vanzelfsprekend is en niet anders kan. Dat betekent dat leraren vragen leren stellen bij wat gewoon lijkt, eerst even stilstaan bij wat zich voordoet en de tijd nemen om na te gaan of hun eerste gedachte wel klopt.



figuur 1: het Lemniscatamodel

Hieruit kan dan een onderzoekbare vraag voortkomen. Nadrukkelijk staat hier niet ‘onderzoeksvraag’. Dat leidt namelijk te vaak tot vragen die of niet of nauwelijks te beantwoorden zijn of tot vragen die zo algemeen zijn (‘Waardoor zijn kinderen gemotiveerd?’) dat ze alleen met algemene theorieën of principes zijn te beantwoorden. Een onderzoekbare vraag is specifiek (dit probleem), situatiegebonden (deze kinderen in deze les) en te vertalen in concreet handelen (wat kan ik doen om daar achter te komen). Dit voorkomt dat leraren alles direct in vaste oorzaak-gevolgketens plaatsen en eigenlijk het antwoord al weten voor het onderzoek is begonnen.

De valkuil kan zijn dat zulke vragen alleen maar leiden tot experimenten in de praktijk. De kunst is om een evenwicht te vinden tussen kennis over het te onderzoeken onderwerp en het doen van onderzoek in de eigen praktijk. Die twee elementen vormen een elkaar voortdurend beïnvloedend en opvolgend proces, zoals blijkt uit het Lemniscaatmodel (fig.1).

7 op zoek naar opbrengsten

In het kader van opbrengstgericht werken zal een onderzoekende leraar zich dagelijks afvragen of de geplande les zal veroorzaken dat alle leerlingen actief deelnemen en een volgende stap in hun rekenontwikkeling kunnen zetten. Vervolgens zal diezelfde leraar zich tijdens en na de les de vraag stellen welke kinderen (blijkbaar) behoefte hebben aan andere interventies en op basis van welke behoefte dat dan is. Tijdens een volgend instructie- of begeleidingsmoment kan die vraag dan leiden tot een kort rekenonderzoek om in samenspraak met de leerling een antwoord te vinden.

Opbrengstveroorzakend onderwijs is de vertaling van het streven naar opbrengsten in een manier van lesgeven, die inderdaad leidt tot een dagelijks merkbaar effect. Dat komt niet tot uiting door dagelijks te gaan toetsen, maar wel in de manier waarop kinderen aan het werk zijn. Daarin speelt als het goed is door wat de school belangrijk vindt. Biesta (2012) stelt de prikkelende vraag of we in het onderwijs waarderen wat we meten of juist meten wat we waarderen. Op schoolniveau zou dat laatste het geval moeten zijn, waarbij ‘meten’ heel ruim opgevat mag worden. De missie van de school of het perspectief op zoiets als *21st Century Skills* (Boswinkel & Schram, 2011) kan daarvoor richtinggevend zijn. Dit soort keuzes op schoolniveau bepalen wat als ‘goed’ wordt gewaardeerd en daarmee dus ook wat als ‘opbrengst’ gezien kan worden. Voor leraren en ouders van de school zijn dat de opbrengsten die ertoe doen. Het zijn de kwaliteiten waarvoor men heeft gekozen. Daarnaast, maar zeker niet in plaats daarvan,

kan er via een gestandaardiseerd instrument iets van opbrengsten zichtbaar gemaakt worden. Dat zijn de opbrengsten die onder andere de inspectie gebruikt bij haar werk.

Aan de andere kant van het spectrum van opbrengsten zijn er de leerlingen, die in de les ervaren dat zij wat van de rekenles geleerd hebben. Deze indeling wordt wel aangeduid als 'Triband verantwoord' (Zwart, 2009). De wijze van opbrengst bepalen en daarmee van je verantwoord daarover verschilt per doelgroep. Verantwoording via gestandaardiseerde toetsen is slechts een van de vormen en voor de dagelijkse lessen niet de belangrijkste.

8 onderzoekende kinderen

Na al het voorgaande zal het niet verbazen dat die onderzoekende houding van leraren ook doorwerkt naar de kinderen. Wanneer je als leraar je nieuwsgierigheid hebt herontdekt en gewend bent vragen te stellen, zal je ook aan de leerlingen vragen stellen. Daarmee lok je uit dat zij er steeds meer aan wennen eerst na te denken, precies te kijken, uit te proberen en met anderen te overleggen. Zo gaat deze houding van leraren dienen als voorbeeldgedrag. Daardoor wordt het gemakkelijker om kinderen aan te sporen zichzelf ook vragen te stellen en op onderzoek uit te gaan. Dat kan variëren van eerst eens goed kijken en lezen wat er eigenlijk wordt gevraagd tot nagaan of het gevonden antwoord inderdaad antwoord geeft op de gestelde vraag. Het kan ook gaan om het bewust worden van de eigen subjectieve concepten (wat zie ik voor me als ik 'kilo' hoor?) of om het onderzoeken van relaties ('netwerken') tussen getallen. Die houding van vragen stellen ('wat is dit?', 'klopt dit?', 'wat weet ik hier al van?', 'zou dat altijd zo gaan?', enzovoort) speelt naarmate dit meer routine wordt een steeds grotere rol in de rekenlessen (en zal niet tot dat vak beperkt blijven). Kinderen die bewust bezig zijn met het ontwikkelen van hun rekenvaardigheid, hun kennis van getallen en bewerkingen en het steeds beter begrijpen van wat daar allemaal mee samenhangt, begrijpen ook wat 'opbrengst' is.

Het is (daardoor) ook merkbaar aan de manier waarop kinderen (kunnen) vertellen over de stap die ze aan het zetten zijn of net bereikt hebben. Daarmee raken we een essentieel aspect van opbrengstveroorzakend onderwijs. Opbrengsten ontstaan niet buiten de kinderen om. Als zij niet weten of merken dat hun activiteiten tot iets (zinvol) leiden, kunnen er geen echte opbrengsten zijn. Net zoals oefenen niet kan plaatsvinden als degene die oefent niet weet wat er geoefend moet worden en wanneer het

doel bereikt is. Dat betekent dat de kinderen vertrouwd moeten zijn met wat wel *the big picture* wordt genoemd. Vanuit welke kwestie ga ik aan het werk en wat is er tenslotte te bereiken: onderzoeken, weten, kunnen en begrijpen. Een *mindmap* of een poster zou hierbij heel behulpzaam zijn: daarop kunnen de leerlingen zelf bijhouden wat ze te weten komen, wat ze kunnen en wat de samenhang is tussen alle aspecten die bij dat onderwerp horen. Ook de vragen die ze nog hebben, of nieuwe vragen die al werkend zijn opgeroepen, krijgen hierop een plek.

9 tot slot

In het voorgaande heb ik geprobeerd het begrip ‘opbrengst’ in een ander perspectief te zetten dan de laatste tijd gebruikelijk is. Enerzijds vraagt dat om relativering van de plek van (gestandaardiseerde) toetsscores, anderzijds om een andere rol en houding van leraren. Het ontwikkelen van een onderzoekende cultuur op school helpt om het begrip opbrengst niet tot een abstractie te maken. Daardoor veroorzaken onderzoekende leraren steeds meer opbrengsten in hun groep, omdat zij hun leerlingen elke dag in staat stellen opbrengst te herkennen in wat ze doen in de rekenles. Dat ‘in staat stellen’ betekent ook op een kritische manier met de inhoud van de rekenlessen bezig zijn. ‘Afstemmen op onderwijsbehoeften’ krijgt dan een heel concrete invulling: het gaat om de dagelijkse keuzes die leraren maken omdat hun leerlingen bezig zijn met leren rekenen.

Zo maken leraren de omslag van ‘binnenschoolse opvang’ (sommen laten maken) naar ‘opbrengstveroorzakend (reken)onderwijs’ (leren rekenen).

In de 21^e eeuw is dat geen overbodige luxe.

literatuur

- Biesta, G. (2012). *Goed onderwijs en de cultuur van het meten - ethiek, politiek en democratie*. Meppel: Boom-Lemma.
- Boog, G.J., D.J. Janson & D.J. Memelink (2012). *Leren kun je observeren - je onderwijs afstemmen op de leerlingen*. Amersfoort: Thieme-Meulenhoff.
- Boswinkel, N. & E. Schram (2011). *De toekomst telt*. Enschede: SLO
- Zwart, A. (2009). *De opbrengst dat ben ik... Een pedagogisch evaluatieprogramma voor het basisonderwijs*. Valthe: Netwerk SOVO.

RTI: een opbrengstgericht indicatie-instrument

- de onderwijsbehoeften van de leerling in kaart -

L. Jansen, M. Schölvinck & H. Logtenberg
CPS, Amersfoort

1 inleiding

Responsiveness to Intervention (RTI) is een methodiek die de onderwijsbehoeften van de leerling in kaart brengt én leraren professionaliseert in het omgaan met verschillen tussen leerlingen. In de Verenigde Staten is RTI al jaren een effectieve manier om vast te stellen in hoeverre leerlingen profiteren van het onderwijsaanbod (in lezen en rekenen). Het geeft inzicht in bepaalde hardnekkige leerproblemen en leerstoornissen bij kinderen en zou als zodanig een rol kunnen spelen bij het toewijzen van zorgbudgetten. In het kader van het R&D-project 'Passend Onderwijs, anders beschikken' is CPS in 2009 begonnen met een onderzoek naar de waarde en toepasbaarheid van RTI in het Nederlands onderwijs. Dit artikel beschrijft de eerste ervaringen met RTI 'rekenen en wiskunde' in Nederland.

2 de methodiek RTI

Met RTI kan de interne begeleider de leerkracht begeleiden om leerlingen optimaal te laten profiteren van het onderwijsaanbod op het gebied van lezen of rekenen. RTI bestaat uit drie ronden. In ronde 1 krijgen alle leerlingen kwalitatief hoogwaardig (wetenschappelijk bewezen) onderwijs. Leerlingen die daarvan onvoldoende profiteren krijgen in ronde 2 extra tijd en instructie. Leerlingen die ook daar onvoldoende van profiteren krijgen in ronde 3, naast het aanbod van ronde 1 en 2, nog eens extra tijd en instructie op maat.

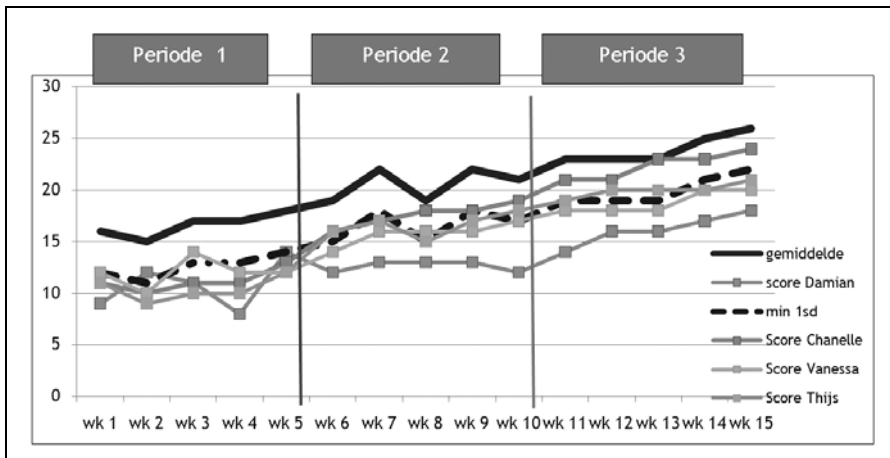
RTI-onderzoek (Riccomini & Witzel, 2010) in de Verenigde Staten toont:

- 1 De meeste leerlingen (ongeveer 85 procent) zijn gebaat bij gewoon goed onderwijs, dat in ronde 1 wordt geboden.
- 2 Leerlingen die onvoldoende vooruitgaan (ongeveer 15 procent), krijgen

in de tweede ronde extra tijd en aandacht in het betreffende vakgebied waar de leerling problemen ondervindt (lezen en/of rekenen).

- 3 Leerlingen die na deze ronde onvoldoende vooruit zijn gegaan en niet op het niveau zijn van de reguliere groep, zijn leerlingen met hardnekkige leerproblemen (ongeveer 5 procent, één à twee leerlingen in een groep). Doordat de leervorderingen heel precies bijgehouden worden, is uit deze informatie af te leiden welke op maat gemaakte instructie en aanpak de leerling nodig heeft om het reguliere aanbod van klas te kunnen blijven volgen. Dit is de derde ronde.

De selectie van leerlingen voor het aanbod van ronde 2 of 3 wordt gebaseerd op basis van wekelijkse, op het curriculum afgestemde toetsen, de zogenoemde *Curriculum Based Measurement* (CBM) toetsen (in plaats van twee keer per jaar op basis van Cito-toetsen). CBM-toetsen zijn toetsen die de leerstof meten die tijdens het gehele RTI-traject aan de orde is geweest. Omdat iedere week hetzelfde wordt gemeten, wordt door middel van de toetsresultaten zichtbaar hoe de leerlingen de stof oppikken, oftewel profiteren van het aanbod (ronde 1, ronde 2 of ronde 3) van de leerkracht (fig.1).



figuur 1: data in beeld

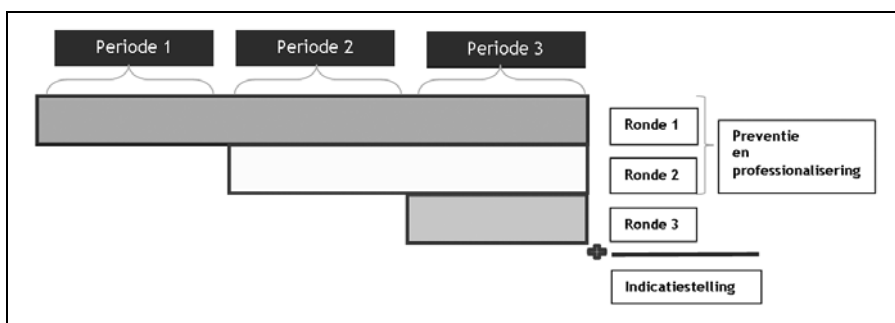
RTI als indicatieinstrument

In de Verenigde Staten wordt de methodiek gebruikt om hardnekkige leerproblemen en leerstoornissen bij leerlingen te diagnosticeren. Leerlingen die overblijven in ronde 3, hebben in ronde 1 en 2 kwalitatief hoogwaardig onderwijs gekregen. Deze leerlingen zijn gebaat bij extra tijd en aanbod. Het instrument dat gebruikt wordt bij RTI brengt het leerrendement in

kaart. Op basis van deze gegevens kunnen zorgbudgetten worden verdeeld op grond waarvan kan worden vastgesteld dat een leerling hardnekkige leerproblemen of een leerstoornis (zoals dyslexie, ADHD, autisme of ODD) heeft. Niet een stoornis bij de leerling is het uitgangspunt bij RTI, maar wat leerlingen nodig hebben om optimaal tot leren te komen. Daarbij moet éérst sprake zijn van kwalitatief hoogwaardig onderwijs, voordat gekeken wordt naar wat individuele leerlingen nodig hebben.

Om RTI te kunnen gebruiken als indicatie-instrument zijn twee voorwaarden noodzakelijk:

- 1 Professionalisering van de leerkracht. Door deze methodiek leert de leerkracht bij welke stap in zijn aanbod hoeveel extra tijd en welke vorm van instructie het beste is om leerlingen daarvan voldoende te laten profiteren. De leerkracht heeft immers eerst uitgetoetst wat uit wetenschappelijk onderzoek is gebleken dat het beste werkt voor de meeste zwakke rekenaars of lezers en heeft daarna, als dat onvoldoende effect heeft gesorteerd, aanbod op maat gemaakt. Dit alles naar aanleiding van de interpretatie van de CBM-toetsen, die meten welk effect zijn instructie en aanbod te weeg hebben gebracht.¹
- 2 Preventie van leerachterstanden. Doordat leerkrachten en docenten door middel van de drie ronden alle leerlingen op hun niveau instructie en aanbod bieden en zij bovendien iedere week meten wat het effect is van hun instructie bij leerlingen (dit betekent dat sprake is van een hele korte reactietijd), wordt de kans op het ontstaan van leerachterstanden als gevolg van gebrekkige leerkrachtvaardigheden geminimaliseerd.



figuur 2: RTI-traject in schema

Het gehele RTI-traject varieert van 18 tot 24 weken en is altijd verdeeld over drie periodes. Na elke periode wordt op basis van de toetsscores bekeken welke leerlingen in aanmerking komen voor ronde 1, 2 of 3 aanbod (fig.2). De leerkracht doorloopt met zijn leerlingen dus drie rondes, waarin hij steeds goed monitort wat zijn instructie bij leerlingen teweeg brengt,

waarop hij vervolgens zijn onderwijs aanpast. De interne begeleider begeleidt de leerkracht bij de stappen die hij in die drie rondes neemt. Doordat in iedere ronde wordt vastgesteld wat het leerrendement is van individuele leerlingen, kunnen met behulp van deze methodiek uitspraken worden gedaan over de vorm van instructie waarmee de leerling het meest gebaat is.

3 RTI in de Nederlandse reken- en wiskundepraktijk

Er is gedurende een traject van vijftien weken ervaring met RTI opgedaan in zowel po als vo. In de *po-pilot* is ervoor gekozen om leerkrachten van groep 4 te benaderen, aangezien dit een belangrijk leerjaar is met betrekking tot het rekenonderwijs: veel basisvaardigheden komen dit leerjaar aan de orde. De leerkrachten werden in deze *pilot* begeleid door de eigen IB'ers. De professionalisering of scholing is dus *on the job*. In de *vo-pilot* is een docent van klas 1 BBK/KBL benaderd om deel te nemen. Deze werd begeleid vanuit CPS. In dit artikel wordt de *po-pilot* verder uitgewerkt.

periode 1 (week 1 tot en met week 5)

Alvorens het traject te starten zijn de Cito-scores gebruikt om leerlingen te screenen en in te delen in drie groepen. Leerlingen die meer aan kunnen dan het reguliere programma ($A + B$), leerlingen die het meest gebaat zijn bij het reguliere programma (C) en leerlingen die verlengde instructie nodig hebben ($D + E$). Na deze screening is het traject van start gegaan. Tijdens de eerste periode geven leerkrachten goed onderwijs volgens de volgende principes:

- men gebruikt een lees- of rekenmethode waar in de kerndoelen verwerkt zijn in het leerstofaanbod;
- men bereidt de les grondig voor;
- men geeft instructie volgens het 'Interactieve Gedifferentieerde Directe Instructie (IGDI) model' (Houtveen, 2006). Het IGDI-model verschilt van het 'Directe Instructiemodel' (DI-model) door de toevoeging van de elementen 'interactie' en 'differentiatie'. Voor rekenen is er later een element aan toegevoegd, namelijk dat elke les start met een automatiseringsoefening (Brandt & Kaskens, 2012). Dit instructiemodel wordt gedurende het hele RTI-traject gehanteerd (fig.3).

Automatiseringsoefening 5 minuten	
Groepsinstructie 10 minuten	
Zelfstandig werken 15 minuten	Verlengde instructie + Begeleide verwerking 10 - 15 minuten
Servicerondje 5 - 10 minuten	Zelfstandig werken 10 minuten
Zelfstandig werken Feedback 5 - 10 minuten	
Afsluiting 5 minuten	

figuur 3: interactieve gedifferentieerde directe instructie

CBM-toetsen tijdens de pilots

Alle leerlingen maken elke week een CBM-toets. De resultaten worden in een grafiek bijgehouden, waardoor de leerkracht in staat is om op statistische wijze de vooruitgang te beoordelen. Leerlingen die één standaarddeviatie onder het gemiddelde van de klas scoorden én onvoldoende groei lieten zien op de wekelijkse toetsen, werden er uitgelicht.

Naam: _____ Groep: _____ Score _____		
Maak de sommen!		
Som 1	Hoeveel kinderen 	Antwoord
Som 2	Maak de som $9 - 6 =$	Antwoord

figuur 4: voorbeeldopgaven uit toets voor po

De leerlingen maakten vijftien weken lang iedere week een rekentoets van vijf minuten. De toetsen bestonden uit twintig opgaven die een beroep doen op verschillende rekenvaardigheden. De vragen in de toetsen werden steeds in een verschillende volgorde aangeboden en vielen onder de categorieën: 'getalbegrip' (vijf opgaven), 'optellen en aftrekken' (zeven opgaven), 'vermenigvuldigen' (twee opgaven), 'meten' (vijf opgaven) en 'meetkunde' (één opgave). In figuur 4 worden twee voorbeeldopgaven getoond.

De toetsen werden afgenomen en gescoord door de leerkracht. De opgaven in de toetsen werden niet toegelicht, maar de leraar mocht wel, waar nodig, talige ondersteuning en aanwijzingen geven wat een leerling bij een opgave moest opschrijven.

De toetsen werden steeds op hetzelfde tijdstip op dezelfde dag in de week afgenomen. De scores zijn bepaald door punten toe te kennen aan goede antwoorden, waarbij leerlingen per CBM-rekentoets maximaal twintig punten konden behalen.

periode 2 (week 6 tot en met week 10)

Aan het eind van de eerste periode vond er een selectiemoment plaats waarbij IB'er en leerkracht de data van alle leerlingen bekeken en interpreterden. Daarbij werd gebruikgemaakt van een speciaal voor de *pilot* ontwikkeld RT-instrument. Het is een statistisch instrument, dat een dubbel discrepantie criterium hanteert. Dit betekent dat er zowel gekeken is naar het aantal goed gemaakte opgaven als naar de groeicurve van het kind. Op basis van deze gegevens is bekeken welke leerling onvoldoende heeft geprofiteerd van het aanbod in ronde 1 en dus in aanmerking kwam voor het aanbod van ronde 2.

In ronde 2 werd de leerlingen extra instructie- en oefentijd geboden. Dit was tussen de twintig en veertig minuten bovenop het reguliere programma (ronde 1 aanbod) per dag. Het aanbod werd afgeleid van wat uit wetenschappelijk onderzoek is gebleken dat voor de meeste lees- of rekenzwakke leerlingen het meest effectief is (Riccomini & Witzel, 2010). Alle leerlingen maakten weer elke week een CBM-toets en de leerkracht maakte een foutenanalyse van de gemaakte fouten op grond waarvan de leerkracht (al dan niet in overleg met de IB'er) vervolgens de instructie aanpaste.

periode 3 (week 11 tot en met week 15)

Aan het eind van de tweede periode vond weer een selectiemoment plaats waarbij IB'er en leerkracht de data van alle leerlingen bekeken en interpreterden. Met behulp van het statistische instrument werd nagegaan welke leerling voldoende heeft gehad aan aanbod ronde 1, welke leerling voldoende heeft gehad aan aanbod ronde 2 en welke leerling er in aanmerking

kwam voor ronde 3, oftewel welke leerling onvoldoende heeft geprofiteerd van het aanbod in ronde 2. In ronde 3 werd tijdens de (veelal individuele) instructie gezocht naar een vorm van instructie waarbij de betreffende leerling wél vooruitgang boekt. Deze instructie is bovenop het aanbod van ronde 1 en 2 en kan worden geboden door de ambulant begeleider, remedial teacher of andere specialist. Aan het eind van het RTI-traject volgde weer een screeningsmoment op basis waarvan werd bekeken hoe de leerlingen vooruit zijn gegaan dankzij de instructie van de leerkracht. Er is ook inzichtelijk gemaakt welke groep zorgleerlingen moeite heeft met de betreffende lesstof en met welk didactisch aanbod en welke vorm van instructie deze leerlingen het meest gebaat zijn. Hiermee is duidelijk geworden welke leerling welk(e) (extra) zorg(budget) nodig heeft, zonder dat verdere diagnostiek nodig is. Alleen bij leerlingen waarbij ronde 3 onvoldoende aanwijzingen heeft opgeleverd met welk aanbod de leerling toch tot leren komt, kan extra diagnostisch onderzoek gewenst zijn.

4 een andere benadering van zorgbudgetten toedelen

Momenteel worden zorgbudgetten veelal toebedeeld op basis van door individuele psychodiagnostiek vastgestelde kindkenmerken. Op basis hiervan krijgt een leerling budget om met extra hulp het reguliere onderwijsprogramma te volgen, of om speciaal onderwijs te krijgen. Door de voorgestelde wet 'Passend Onderwijs', gaat dit op termijn veranderen. Een van de streefdoelen van Passend Onderwijs is, dat men minder gaat werken met labels (ADHD, ASS, enzovoort) en men meer uitgaat van onderwijsbehoeften bij leerlingen. Door middel van RTI kan onderzocht worden met welke vorm van instructie en didactisch aanbod de leerling het meeste leerrendement behaalt. Duidelijk is dan ook hoeveel extra tijd en inspanning dit van school vraagt en daarmee, of dat voor de school haalbaar is. In plaats van kindkenmerken vast te stellen en die vervolgens te vertalen naar een didactische aanpak, wordt rechtstreeks in de klassenpraktijk onderzocht wat het betreffende kind nodig heeft. Er is sprake van zogenoemd dynamisch onderzoek (Pameijer, 2011), omdat door de wekelijkse CBM-toetsen gemeten wordt wat het effect is van de aangeboden instructie.

5 extra tijd is een investering voor leerkracht én leerlingen

Uit de in de *pilots* opgedane ervaringen bleek dat RTI een zeer intensieve methodiek is. Een RTI-traject kost de school, in het bijzonder de leerkracht

en de IB'er, veel tijd. Deze tijd wordt besteed aan het afnemen van toetsen, analyseren van de toetsgegevens, extra voorbereiding voor het aanbod aan zwakke leerlingen, extra instructie- en oefentijd, tijd inplannen en uitvoeren voor ronde 2 (en 3). De investering lijkt echter veel op te leveren. Docenten en leerkrachten leren door de methodiek beter vast te stellen welke leerlingen extra instructie en aanpassing van de lesstof nodig hebben, leren hun handelen beter te evalueren en hun aanpak direct weer aan te passen. Mogelijke opbrengsten zijn, dat minder leerlingen met leerachterstanden en gedragsproblemen kampen vanwege leerachterstanden, minder verwijzingen naar het speciaal onderwijs én het levert professionalisering van de leerkracht *on the job* op.

6 ervaringen van deelnemers aan de pilot

Deelname aan RTI blijkt, zoals hiervoor beschreven, een heel intensief traject. Maar daar staat tegenover dat het merendeel van de deelnemende leerkrachten aangeeft dat zij door RTI al na een heel korte tijd gericht actie konden ondernemen. Door de wekelijkse toetsen kregen zij de leerlingen eerder in beeld en konden zij sneller reageren en bijsturen. Andere ervaringen zijn:

- een aantal leerkrachten geeft aan dat zij door de foutenanalyses veel beter zicht hadden op waar leerlingen moeite mee hadden en wat voor de desbetreffende leerlingen de juiste aanpak was;
- door RTI werd heel duidelijk dat leerlingen vooruitgingen en dat de leerkrachten heel bewust op zoek gingen naar informatie die paste bij dát moment in het leerproces. Er is bij de meeste kinderen dan ook vooruitgang te zien;
- leerkrachten verwachtten dat zwakke rekenaars extra instructie en extra oefenen vervelend zouden vinden. Maar de kinderen waren juist enthousiast met het extra rekenen of lezen bezig.
- De IB'ers die hun leerkrachten begeleidden bij het uitvoeren van RTI, vertelden dat ze merkten dat leerkrachten zich heel bewust werden van de effecten van hun eigen handelen. RTI maakt leerkrachten actiever, zo gaven zij aan.

7 ontwikkelingen en verder onderzoek

Tijdens onderzoek, dat samen met prof. dr. Christine Espin en dr. Marian Verhallen van de Rijksuniversiteit Leiden is uitgevoerd, zijn met betrek-

king tot de CBM-toetsen voor vo de volgende aspecten onderzocht (Verhal-
len, 2012a; 2012b; 2012c):

- Als eerste is gekeken of de betrouwbaarheid van de CBM-rekentoetsen voldoende is. De interne consistentie van de CBM-rekentoetsen gemeten met Cronbachs alpha was voor de CBM-rekentoetsen redelijk tot goed. Daarnaast is ook de paralleltestbetrouwbaarheid van de CBM-reken-
toetsen berekend. Deze was voldoende voor alle CBM-rekentoetsen.
- Ten tweede is de validiteit van de CBM-rekentoetsen nagegaan. De con-
currente validiteit van de CBM-rekentoetsen met de Cito-toetsen en de
ABC-toets is hiervoor berekend. De Cito-wiskunde hangt samen met alle
CBM-toetsgemiddelden. De ruwe scores van de ABC-toets hangen samen
met alle CBM-toetsgemiddelden. De CBM-rekentoetsen laten hiermee
een significante samenhang zien met andere toetsen die rekenvaardig-
heden meten. Ze blijken echter niet significant samen te hangen met
toetsen die taalvaardigheid meten. De concurrente validiteit van de
CBM-rekentoetsen lijkt dus redelijk tot goed.
- Ten slotte is gekeken of vooruitgang met de CBM-rekentoetsen vast te
stellen is. De CBM-gemiddeldes van de eerste weken zijn hiervoor verge-
leken met de CBM-gemiddeldes van de laatste weken. De leerlingen
gaan significant vooruit op de CBM-toetsen. Er bleek geen verschil tus-
sen de twee klassen te zijn. Kinderen uit beide klassen scoorden op de
toetsen gelijk. Ook was er geen verschil in vooruitgang tussen de twee
klassen.

Op basis van deze resultaten lijken de CBM-rekentoetsen een geschikt
instrument om vorderingen op het gebied van rekenen in het voortgezet
onderwijs in kaart te brengen.

noot

- 1 Inmiddels wordt steeds meer duidelijk (Visscher & Ehren, 2011) dat op basis
van Cito-toetsen leerkrachten en docenten hun instructie niet aanpassen,
hooguit leerlingen meer indelen in niveaus. De resultaten en analyse van de
CBM-toetsen geven leraren veel meer feedback over hun instructie en aanbod
dan Cito doet.

literatuur

- Brandt, R. & J. Kaskens (2012). *Grijp de rekenkansen*. Amersfoort: CPS.
- Houtveen, T. (2006). *Succesvolle aanpakken van risicoleerlingen. Wat kan een
school doen?* Antwerpen/Apeldoorn: Garant.
- Pameijer, N. (2011). Waarom een ontwikkelingsperspectief meer is dan IQ en leer-
rendement. *Tijdschrift voor Orthopedagogiek: Onderzoek en Praktijk*, 50, 461-
472.

- Riccomini, P. J. & B.S. Witzel (2010). *Response to intervention in math*. Thousands Oaks, California: Corwin Press.
- Verhallen, M. (2012a). *CBM toetsen in het vo*. Intern rapport. RUL
- Verhallen, M. (2012b). *CBM toetsen lezen in het po*. Intern rapport. RUL
- Verhallen, M. (2012c). *CBM toetsen rekenen in het po*. Intern rapport. RUL
- Visscher, A. & M. Ehren (2011). *De eenvoud en complexiteit van Opbrengstgericht Werken. Analyse in opdracht van de Kenniskamer van het ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap*. Enschede: Universiteit Twente, Vakgroep Onderwijsorganisatie en -management.

Oplossingsstrategieën voor deel- en vermenigvuldig-opgaven in groep 8

M.F. Fagginger Auer & F. Scheltens
Universiteit Leiden / Cito, Arnhem

1 inleiding

Een leerling probeert uit te rekenen hoeveel minuten een telefoongesprek duurde dat € 4,20 kostte bij een tarief van € 0,15 per minuut. Hoe pakt hij dit aan? Rekent hij de opgave uit zijn hoofd uit, gebruikt hij een staartdeling of ziet hij misschien dat hij de opgave handig uit kan rekenen via $0,15 \times 30 = 4,50$? En wat betekent de aanpak die hij kiest voor de kans die hij heeft om het goede antwoord te vinden?

Het bestuderen van de strategieën die leerlingen gebruiken om opgaven op te lossen kan ons veel vertellen over hoe hun rekenprestaties tot stand komen. Eerder onderzoek van Universiteit Leiden liet zien dat bij de 'Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau Rekenen-Wiskunde' (PPON) een verandering in de oplossingsstrategieën die groep 8-leerlingen gebruikten om complexe deelopgaven op te lossen gepaard ging met veranderingen in hun prestaties (Hickendorff, Heiser, Van Putten, & Verhelst, 2009; Janssen, Van der Schoot, & Hemker, 2005). Van 1997 tot 2004 daalde het aantal opgaven dat werd opgelost met een staartdeling van 35 naar 13 procent, terwijl het aantal opgaven dat werd opgelost zonder dat daarbij een uitwerking werd genoteerd steeg van 26 tot 44 procent. Deze laatste aanpak, die in 2004 dus voor bijna de helft van de deelopgaven werd gebruikt, was een stuk minder accuraat dan geschreven strategieën: opgaven met uitwerking werden ongeveer twee keer zo vaak goed beantwoord als opgaven zonder uitwerking (meer dan 60 versus 32 procent goede antwoorden). Deze verschuiving in strategiegebruik lijkt daarmee een belangrijke rol te kunnen hebben gespeeld in de sterke dalingen in prestaties bij complexe deelopgaven tussen PPON 1997 en PPON 2004.

Het onderzoek dat in dit artikel wordt besproken, werd gestart om nog meer te weten te komen over oplossingsstrategieën en hoe deze samenhangen met rekenprestaties. In dit onderzoek worden niet alleen de uit-

werkingen bestudeerd die leerlingen uit groep 8 noteerden bij het oplossen van deel- en vermenigvuldigopgaven, maar ook de toelichting die ze mondeling gaven over hoe ze deze opgaven hadden opgelost. Deze toelichting biedt inzicht in hoe leerlingen rekenen wanneer zij geen uitwerking noteren (wat in eerder onderzoek tot zo weinig goede antwoorden leidde). De leerlingen die meededen aan het onderzoek zijn afkomstig van meer dan honderd scholen door heel Nederland en variëren in rekenvaardigheid van sterk tot zwak. Daarmee geven zij een goed beeld van hoe leerlingen uit groep 8 rekenen. Het onderzoek heeft als doel twee vragen te beantwoorden: 'Welke strategieën gebruiken leerlingen uit groep 8 bij het oplossen van een set deel- en vermenigvuldigopgaven?' en 'Wat is het percentage goede antwoorden bij de verschillende strategieën?' Bij het beantwoorden van deze vragen wordt ook gekeken naar verschillen tussen opgaven die met en zonder het noteren van een uitwerking werden opgelost en naar verschillen tussen jongens en meisjes en tussen leerlingen die doorstromen naar verschillende niveaus van voortgezet onderwijs.

2 methode

Van een nationaal representatieve steekproef van 104 scholen deden 329 leerlingen uit groep 8 mee (waarvan honderd zestig jongens). Leerlingen van drie verschillende rekenniveaus werden geselecteerd aan de hand van het oordeel van hun leerkracht welke leerling een benedengemiddelde, gemiddelde of bovengemiddelde rekenvaardigheid had. De leerlingen losten in individuele sessies met een toetsleider elk drie deel- en twee vermenigvuldigopgaven op (fig1).

Deelopgaven		
24 tennisballen voor € 36,- Hoeveel euro is dat per tennisbal? € _____	(Afbeelding telefoon met op scherm: 'kosten laatste gesprek € 4,20') Jozien belt voor € 0,15 per minuut met haar mobiele telefoon. Hoeveel minuten heeft ze gebeld? _____ minuten	Drie kinderen verdelen € 23,70 eerlijk. Hoeveel euro krijgt ieder? € _____
Vermenigvuldigopgaven		
24 x 19 = _____	(Afbeelding poster laptop met prijs € 749,50) Juf Miriam koopt voor school 5 laptops. Hoeveel moet ze betalen? € _____	

figuur 1: de drie deel- en de twee vermenigvuldigopgaven die de 329 leerlingen uit groep 8 maakten.

Ook maakten zij één opgave waarbij meerdere bewerkingen toegepast moesten worden; deze opgave is in dit onderzoek buiten beschouwing gelaten. De opgaven werden aangeboden op een blad waar naast elke opgave ruimte was om uitwerkingen te noteren. Na het oplossen van elke opgave werd door de toetsleider aan de leerling gevraagd hoe hij of zij dat had gedaan, wat genoteerd werd op een apart blad. Deze individuele afnamen vonden plaats als aanvullend onderdeel van PPON rekenen-wiskunde 2011.

Vervolgens werden de strategieën die leerlingen gebruikten bij het oplossen van de opgaven gecodeerd aan de hand van de genoteerde uitwerkingen en de uitleg van de leerlingen, zoals opgetekend door de toetsleider. De twee auteurs codeerden elk de opgaven van de helft van de leerlingen volgens het codeerschema in figuur 2. Voor zowel delen als vermenigvuldigen werden vier hoofdcategorieën van strategieën onderscheiden. Een van deze vier hoofdcategorieën geeft een veelgebruikte strategie die specifiek is voor de bewerking: voor delen het opvermenigvuldigen en voor vermenigvuldigen het splitsen van de te vermenigvuldigen getallen zonder dat daarbij de notatie van het cijferalgoritme of het kolomsgewijze algoritme wordt gebruikt. Deze beide strategieën kenmerken zich doordat ze, wat betreft de handeling, lijken op de bijbehorende cijfer- en kolomsgewijze algoritmes (voor delen het combineren van groepjes van meerdere malen de deler en voor vermenigvuldigen het splitsen van de te vermenigvuldigen getallen), maar ze missen de ondersteuning van een vaste, systematische notatie en hebben geen vooraf vaststaande stappen die moeten worden uitgevoerd. Daarom wordt deze categorie hierna verkort aangeduid met 'zonder algoritmisch schema'. De andere drie hoofdcategorieën van strategieën zijn hetzelfde voor beide bewerkingen: het cijferalgoritme; het kolomsgewijze algoritme; en gevarieerd (zie figuur 2 voor voorbeelden). Binnen de hoofdcategorie 'gevarieerd' worden verschillende subcategorieën onderscheiden: compenseren; herhaald optellen; halveren/verdubbelen; verkeerde bewerking (bijvoorbeeld vermenigvuldigen bij een deelopgave); en voor delen ook nog het fout splitsen (deler splitsen of deeltal op positiewaarde splitsen, bijvoorbeeld $23,70 : 3$ splitsen in $20 : 3 + 3 : 3 + 0,70 : 3$, wat voor de huidige set opgaven de berekeningen haast onoverkomelijk moeilijk maakte). Wanneer leerlingen gebruikmaken van de strategie compenseren, bijvoorbeeld door 24×19 op te lossen als $24 \times 20 - 24$, voeren zij naast het compenseren ook nog een andere berekening uit: 24×20 uitrekenen, bijvoorbeeld door te cijferen. Er is voor gekozen in deze gevallen de codering 'compenseren' voorrang te geven boven de codering voor de rest van berekening, ook omdat de rest van de berekening vaak, juist door het compenseren, triviaal is.

Strategiecategorie	Voorbeelden	
	Delen	Vermenigvuldigen
Cijferalgoritme	$\begin{array}{r} 3 \overline{) 2370} \mid 7,90 \\ \underline{21} \\ 27 \\ \underline{27} \\ 00 \end{array}$	$\begin{array}{r} 24 \\ 19 \times \\ \hline 216 \\ 240 + \\ \hline 456 \end{array}$
Kolomsgewijs algoritme	$\begin{array}{r} 3 \overline{) 2370} \mid 500 \\ \underline{1500} \\ 870 \mid 40 \\ \underline{120} \\ 750 \mid 200 \\ \underline{600} \\ 150 \mid 50 \\ \underline{150} \end{array}$	$\begin{array}{r} 24 \\ 19 \times \\ \hline 36 \\ 180 \\ 40 \\ 200 + \\ \hline 456 \end{array}$
Zonder algoritmisch schema (opvermenigvuldigen (:) en splitsen (x))	$\begin{array}{r} 0,15 \times 675 \\ 12150 \\ 24300 \\ 30375 \\ 33420 \end{array}$	$240 + 180 + 36 = 456$
Gevarieerd		
Compenseren	$24, - : 3 = 8, -$ $7,90$	$\begin{array}{r} 240 \\ 24, - \\ \hline 456 \end{array}$
Herhaald optellen	$\begin{array}{r} 8 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \\ 15 \\ 18 \end{array} \quad \begin{array}{r} 21 \\ 24 \end{array}$	$\begin{array}{r} 243,50 \\ 749,50 \\ 749,50 \\ 749,50 \\ 749,50 + \\ \hline 3747,50 \end{array}$

Halveren/verdubbelen	$\begin{array}{r} 12 \text{ voor } 18 \\ 6 \text{ voor } 9 \\ 3 \text{ voor } 4,50 \\ 1 \text{ voor } 1,50 \end{array}$	$\begin{array}{r} 10 \times 7495 \\ 5 \times 3747,50 \end{array}$
Verkeerde bewerking	$\begin{array}{r} 2 \\ 24 \\ 36 \times \\ \hline 84 \end{array}$	niet waargenomen
Fout splitsen	$\begin{array}{r} 23,70 : 2 = \\ \hline 11,85 \\ 11,75 : 1 = \\ 11,25 \end{array}$	niet van toepassing

figuur 2: categorieën gebruikt voor strategiecoderingen van oplossingswijzen

3 resultaten

Op 3,9 procent van de opgaven werd geen antwoord gegeven en voor 4,3 procent van de opgaven waren de uitwerking en uitleg van de leerling over de oplossingswijze niet duidelijk. Deze opgaven werden niet meegenomen in de analyses die hierna volgen.

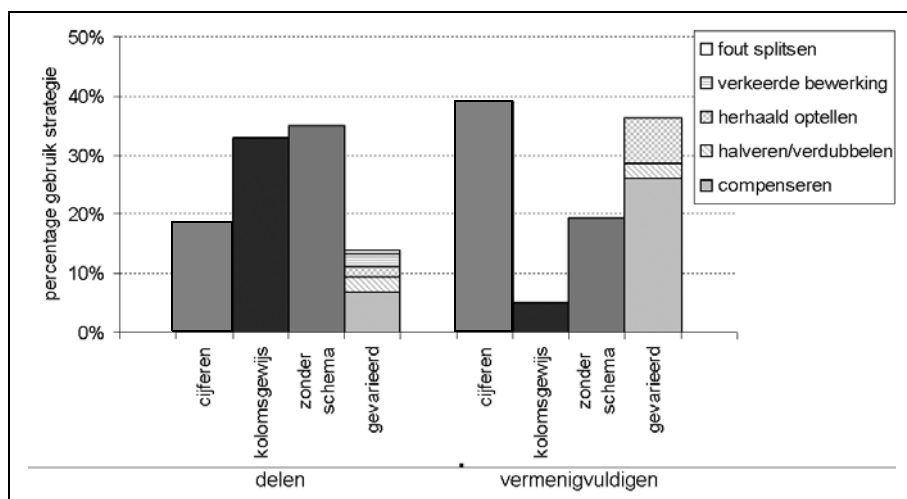
gebruik van strategieën

Welke strategieën gebruiken leerlingen uit groep 8 bij het oplossen van de deel- en vermenigvuldigopgaven? Figuur 3 geeft voor elk van de opgaven en voor de bewerking delen en vermenigvuldigen als totaal weer hoe vaak elke strategie werd gebruikt (zie ook figuur 4). Bij delen werd het vaakst (voor 35,1 procent van de opgaven) gekozen voor opvermenigvuldigen. Bijna even vaak kozen leerlingen voor het kolomsgewijze algoritme (32,9 procent). Het cijferalgoritme, de staartdeling, werd ook regelmatig gebruikt (18,3 procent). De overige 13,8 procent van de opgaven werd opgelost met gevarieerde strategieën, waarvan compenseren (6,8 procent) het meest gebruikt werd. Hoewel de drie deelopgaven inhoudelijk niet erg op elkaar

leken, weken de percentages gebruik van elke strategie voor elke opgave slechts enkele procentpunten af van de hiervoor genoemde gemiddeldes voor alle deelopgaven samen (behalve dat er bij 36 : 24 niet werd gecompenseerd).

Strategiecategorie		opgaven					bewerking	
		36: 24	4,20: 0,15	23,70: 3	24 x 19	5 x 749,50	delen	vermenigvuldigen
Cijferalgoritme		19,0	15,1	21,1	38,0	40,1	18,3	39,1
Kolomsgewijs algoritme		34,0	31,8	33,1	5,5	4,9	32,9	5,2
Zonder algoritmisch schema		34,8	37,0	33,4	32,2	6,7	35,1	19,4
Gevarieerd	<i>Compenseren</i>	-	7,9	11,4	23,9	28,1	6,8	26,0
	<i>Halveren/ verdubbelen</i>	7,9	0,7	-	0,3	4,9	2,6	2,6
	<i>Herhaald optellen</i>	-	4,6	0,3	-	15,3	1,8	7,7
	<i>Verkeerde bewerking</i>	3,6	2,6	-	-	-	2,0	-
	<i>Fout splitsen</i>	0,8	0,3	0,7	n.v.t.	n.v.t.	0,6	n.v.t.

figuur 3: percentage gebruik van strategieën binnen elke opgave en binnen de bewerkingen delen en vermenigvuldigen als totaal



figuur 4: percentages gebruik van de verschillende strategieën voor de deel- (links) en vermenigvuldigopgaven (rechts)

Bij vermenigvuldigen werd het cijferalgoritme verreweg het meest gebruikt (voor 39,1 procent van de opgaven). Ook werd er veel gecompenseerd (26,0 procent), waar de opgaven zich goed voor leenden (24×19 en $5 \times 749,50$). Verder werden de te vermenigvuldigen getallen regelmatig gesplitst zonder dat daarbij de systematische schematische notatie van het cijferalgoritme of het kolomsgewijze algoritme werd gebruikt (19,4 procent).

Het kolomsgewijze algoritme kwam niet zo vaak voor (5,2 procent) en gevarieerde aanpakken anders dan compenseren ook niet (10,3 procent). Net als bij delen, week bij vermenigvuldigen ook het strategiegebruik op de twee individuele opgaven op de meeste punten niet erg af van het hiervoor genoemde gemiddelde strategiegebruik voor de twee vermenigvuldigopgaven samen. Er was echter één groot verschil: waar bij 24×19 vaak gesplitst werd zonder algoritmisch schema (32,2 procent), gebeurde dat maar weinig bij $5 \times 749,50$ (4,9 procent). Bij de laatste opgave werd in plaats daarvan vaker herhaald opgeteld (15,3 procent) terwijl bij de eerste opgave deze strategie door geen enkele leerling werd toegepast.

Als we het strategiegebruik bij de deel- en vermenigvuldigopgaven in deze set vergelijken, zien we dat bij vermenigvuldigen veel vaker het cijferalgoritme werd gebruikt dan bij delen (39,1 procent versus 18,3 procent) en veel minder vaak het kolomsgewijze algoritme (5,2 procent versus 32,9 procent). Ook werd bij delen vaker voor een aanpak zonder algoritmisch schema gekozen dan bij vermenigvuldigen (35,1 procent versus 19,4 procent), terwijl de vermenigvuldigopgaven veel vaker werden opgelost met behulp van compenseren (26,0 versus 6,8 procent). Ten slotte werd alleen bij deelopgaven door sommige leerlingen de verkeerde bewerking gekozen (2,0 procent) en niet bij vermenigvuldigopgaven.

Strategiegebruik en notatie van uitwerkingen en geslacht en doorstroomniveau

Het strategiegebruik werd verder uitgesplitst op basis van drie variabelen: het wel of niet noteren van een uitwerking, en de leerlingkenmerken geslacht en doorstroomniveau (fig.5). Leerlingen noteerden voor 17,9 procent van de deelopgaven en 11,6 procent van de vermenigvuldigopgaven geen uitwerking. Wanneer leerlingen geen uitwerking noteerden, rapporteerden zij slechts in enkele gevallen gebruik te hebben gemaakt van het cijferalgoritme of het kolomsgewijze algoritme (voor 0 tot 3,6 procent van de opgaven). Daarentegen gaven zij veel vaker aan dat zij in hun hoofd hadden opvermenigvuldigd of gesplitst zonder expliciet een algoritme te gebruiken (36,5 procentpunt vaker dan bij geschreven uitwerkingen voor delen en 6,3 procentpunt vaker dan bij geschreven uitwerkingen voor vermenigvuldigen). Wanneer geen uitwerking genoteerd werd vond compenseren veel vaker plaats (11,3 procentpunt vaker voor delen en 45,0 pro-

centpunt vaker voor vermenigvuldigen) dan wanneer wel een uitwerking genoteerd werd.

Strategiecategorie		met of zonder uitwerking				geslacht		doorstroom-niveau	
		delen		vermenig-vuldigen					
		met	zonder	met	zonder	jongens	meisjes	vmbo	havo/vwo
Cijferalgoritme		21,4	3,6	43,8	2,6	24,5	30,3	29,0	26,5
Kolomsgewijs algoritme		39,6	1,8	5,9	-	17,5	23,7	20,6	20,8
Zonder algoritmisch schema		27,7	64,2	18,7	25,0	30,6	26,2	27,3	28,4
Gevarieerd	Compenseren	4,5	15,8	20,8	65,8	20,0	10,8	11,5	19,9
	Halveren/ verdubbelen	2,0	4,8	2,3	5,3	3,5	1,6	2,3	2,8
	Herhaald optellen	1,8	1,2	8,5	1,3	3,0	5,5	6,9	1,2
	Verkeerde bewerking	2,4	-	-	-	0,7	1,4	1,8	0,1
	Fout splitsen	0,6	0,6	n.v.t.	n.v.t.	0,3	0,4	0,5	0,1
Percentage zonder uitwerking		17,9		11,6		18,8	12,2	10,6	20,5

figuur 5: percentage gebruik van strategieën binnen oplossingen met en zonder uitwerking (uitgesplitst naar bewerking) en voor jongens en meisjes en voor leerlingen met verschillende doorstroomniveaus (vmbo en havo/vwo)

Als we kijken naar verschillen tussen jongens en meisjes, zien we dat jongens vaker geen uitwerking noteerden dan meisjes (jongens noteerden bij 18,8 procent van de opgaven geen uitwerking en meisjes bij 12,2 procent). Ook maakten jongens wat minder vaak gebruik van het cijferalgoritme en het kolomsgewijze algoritme (respectievelijk 5,8 en 6,2 procentpunt minder dan meisjes), en compenseerden ze juist vaker (9,2 procentpunt vaker).

Leerlingen die na groep 8 doorstroomden naar het vmbo noteerden bij 10,6 procent van de opgaven geen uitwerking, terwijl leerlingen die doorstroomden naar havo/vwo dat twee keer zo vaak niet deden (20,5 procent). De leerlingen van de verschillende doorstroomniveaus verschilden weinig in hoe vaak ze het cijferalgoritme, het kolomsgewijze algoritme of het rekenen zonder algoritmisch schema toepasten, maar wel in de gevarieerde strategieën die ze gebruikten. De toekomstige vmbo'ers maakten vaker gebruik van herhaald optellen (5,7 procentpunt vaker), terwijl de toekomstige havo/vwo'ers vaker compenseerden (8,4 procentpunt vaker).

percentage goede antwoorden per strategie

Deze resultaten roepen de volgende vraag op: wat is het percentage goede antwoorden bij de verschillende strategieën? Figuur 6 geeft deze percentages apart voor de deel- en vermenigvuldigopgaven (zie figuur 7 voor een grafiek), en ook apart voor oplossingen waarbij wel en geen uitwerking werd genoteerd.

Strategiecategorie		bewerking		met of zonder uitwerking			
		delen	vermenigvuldigen	delen		vermenigvuldigen	
				met	zonder	met	zonder
Cijferalgoritme		81,5	87,8	80,8	100*	87,7	100*
Kolomsgewijs algoritme		83,0	79,4	82,8	100*	79,4	-
Zonder algoritmisch schema		85,7	66,9	80,0	96,2	69,4	52,6
Gevarieerd	<i>Compenseren</i>	81,0	71,2	78,1*	84,6	71,7	70,0
	<i>Halveren/ verdubbelen</i>	77,3*	70,6*	71,4*	87,5*	69,2*	75,0
	<i>Herhaald optellen</i>	26,7*	78,0	30,8*	0,0*	77,6	100*
	<i>Verkeerde bewerking</i>	0,0*	-	0,0*	-	-	-
	<i>Fout splitsen</i>	0,0*	n.v.t.	0,0*	0,0*	n.v.t.	n.v.t.

*) gebaseerd op een zeer klein aantal waarnemingen (< 5 procent; zie fig.3 en 5)

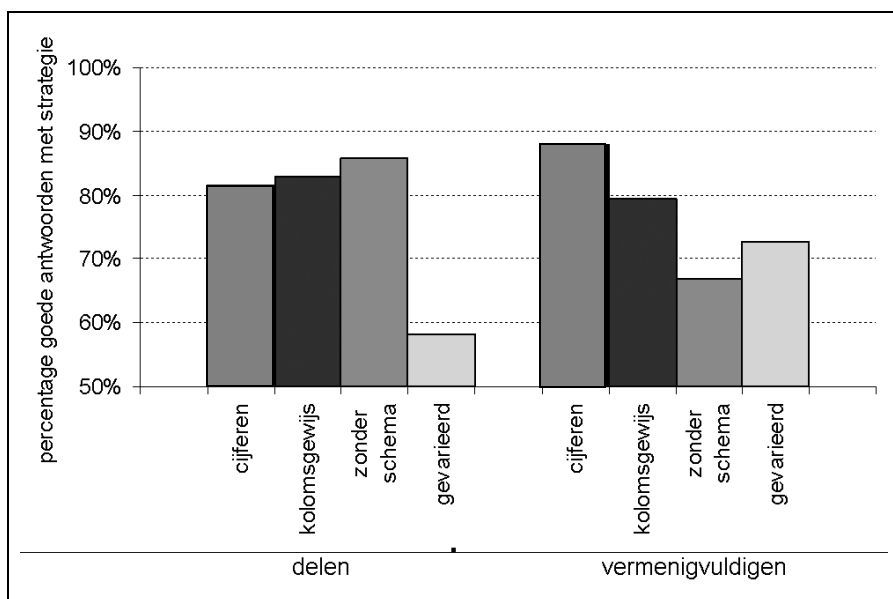
figuur 6: percentages goede antwoorden met elke strategie per bewerking, zowel in totaal als uitgesplitst naar met en zonder genoteerde uitwerking.

Deelopgaven werden het vaakst goed beantwoord wanneer zij waren opgelost door middel van opvermenigvuldigen (85,7 procent correct), op korte afstand gevolgd door oplossingen met het kolomsgewijze algoritme (83,0 procent), het cijferalgoritme (81,5 procent) en compenseren (81,0 procent). Herhaald optellen leidde in maar een kwart van de gevallen tot een goed antwoord (26,7 procent) en het uitvoeren van een verkeerde bewerking of een foute splitsing uiteraard nooit.

Bij vermenigvuldigopgaven was er een groter verschil tussen de meest gebruikte strategieën: het cijferalgoritme leidde het vaakst tot het goede antwoord (87,8 procent correct), terwijl het kolomsgewijze algoritme (79,4 procent), compenseren (71,2 procent) en het splitsen zonder algoritmisch schema (66,9 procent) een stuk minder succesvol waren. Bij de laatstgenoemde strategie werden veel incorrecte splitsingen geobserveerd, bijvoorbeeld 24×19 uitrekenen als $20 \times 10 + 4 \times 9$. De andere aanpakken uit de

gevarieerde categorie, halveren/verdubbelen (70,6 procent) en herhaald optellen (78 procent), bleven ook achter bij het cijferalgoritme.

Het verschil in het percentage goede antwoorden tussen oplossingen met en zonder uitwerking was niet eenduidig. Over het cijferalgoritme en het kolomsgewijze algoritme kan weinig worden gezegd, omdat gebruik van deze algoritmes zonder uitwerking bijna nooit werd gerapporteerd. Leerlingen maakten wel vaak gebruik van opvermenigvuldigen en splitsen zonder algoritmisch schema wanneer zij geen uitwerking noteerden. Bij opvermenigvuldigen waren de antwoorden vaker goed wanneer er geen uitwerking werd genoteerd (16,2 procentpunt meer correct), terwijl bij het vermenigvuldigen door splitsen zonder algoritmisch schema antwoorden juist vaker goed waren wanneer bij deze strategie wél een uitwerking werd genoteerd (16,8 procentpunt meer correct). Bij compenseren waren de verschillen tussen oplossingen met en zonder uitwerking kleiner en bij delen weer in het voordeel van geen uitwerking (6,5 procentpunt meer correct) en bij vermenigvuldigen in het voordeel van wel een uitwerking (1,7 procentpunt meer correct).



figuur 7: percentages goede antwoorden bij gebruik van de verschillende strategieën voor de deel- (links) en vermenigvuldigopgaven (rechts) (zie figuur 6 voor de percentages goede antwoorden voor de strategieën waaruit de groep 'gevarieerd' is opgebouwd)

4 discussie

In dit onderzoek werden de oplossingsstrategieën van 329 leerlingen uit groep 8 voor drie deel- en twee vermenigvuldigopgaven bestudeerd om de volgende twee vragen te beantwoorden: ‘Welke strategieën gebruiken deze leerlingen bij het oplossen van een set deel- en vermenigvuldigopgaven?’ en ‘Wat is het percentage goede antwoorden bij de verschillende strategieën?’

Gevonden werd dat leerlingen zowel bij delen als vermenigvuldigen regelmatig het cijferalgoritme gebruikten, maar veel vaker bij vermenigvuldigen. Bij delen werd juist vaak het kolomsgewijze algoritme gebruikt, wat bij vermenigvuldigen nog maar weinig voorkwam. Dit is in overeenstemming met de methodes voor rekenonderwijs op de basisschool, waar voor vermenigvuldigen het cijferalgoritme het eindpunt is en voor delen in veel gevallen het kolomsgewijze algoritme. Opvallend is wel hoeveel deelopgaven desalniettemin met het cijferalgoritme (de staartdeling) werden opgelost: 18,3 procent (tegen 32,9 procent oplossingen met een kolomsgewijze deling). Bij delen en vermenigvuldigen werd ook regelmatig gewerkt met de minder vast gestructureerde aanpakken van delen door opvermenigvuldigen en vermenigvuldigen door splitsen zonder dat daarbij een algoritmisch schema werd genoteerd, en werd er regelmatig gecompenseerd wanneer de opgave zich daar voor leende. Meisjes noteerden vaker een uitwerking dan jongens en kozen vaker voor een van de algoritmes. Leerlingen met vmbo-doorstroomniveau noteerden vaker uitwerkingen dan leerlingen met havo/vwo-doorstroomniveau en maakten minder vaak gebruik van compenseren.

Bij vermenigvuldigen werd er met het cijferalgoritme vaker het goede antwoord gevonden dan met andere strategieën, terwijl bij delen de verschillen tussen het cijferalgoritme en andere veelgebruikte strategieën beperkt waren (al bleek herhaald optellen bij deze deelopgaven tot erg weinig goede antwoorden te leiden). Het effect van het noteren van uitwerkingen op het percentage goede antwoorden was niet eenduidig: bij vermenigvuldigen waren oplossingen met uitwerking over het algemeen vaker goed dan oplossingen zonder uitwerking, terwijl bij delen het algemene effect juist in het voordeel van oplossingen zonder uitwerking was.

beperkingen

Bij deze bevindingen moeten twee kanttekeningen geplaatst worden. Ten eerste over de aard van de gebruikte opgaven. Deze waren beperkt in aantal en daarnaast speciaal ontwikkeld om gevarieerde oplossingswijzen uit te lokken. Daarmee zijn ze niet representatief voor deel- en vermenigvuldigopgaven in het algemeen. Met deze beperking in het achterhoofd, kun-

nen de opgaven echter wel inzicht bieden in wat een grote groep leerlingen uit groep 8 uit heel Nederland in huis heeft aan oplossingsstrategieën. Een andere beperking betreft de gevonden percentages goede antwoorden bij elke strategie. Bij interpreteren van deze percentages moet worden bedacht dat deze geen absolute maat zijn voor hoe goed de strategieën presteren: het percentage hangt namelijk niet alleen af van de strategie zelf, maar ook van de opgaven waarvoor de strategie is gekozen en de leerlingen die de strategie hebben gekozen. Wanneer bijvoorbeeld het cijferalgoritme alleen gebruikt zou worden bij erg lastige opgaven kan het percentage goede antwoorden voor deze strategie heel laag zijn, terwijl dat percentage veel hoger zou zijn wanneer het cijferalgoritme ook voor eenvoudigere opgaven zou worden ingezet. Evenzo zouden bijvoorbeeld alleen leerlingen met een hoge rekenvaardigheid compenseren kunnen gebruiken, waardoor deze strategie heel accuraat lijkt, terwijl het percentage goede antwoorden veel lager zou liggen wanneer leerlingen met een lage rekenvaardigheid deze strategie ook zouden gebruiken. Deze effecten op de gemeten prestaties van strategieën van de moeilijkheidsgraad van de opgaven waarvoor een strategie geselecteerd wordt en de vaardigheid van de leerlingen die de strategie selecteren, worden ook wel selectie-effecten genoemd (Siegler & Lemaire, 1997).

5 tot besluit

Dit onderzoek naar deel- en vermenigvuldigstrategieën kwam voort uit een eerder onderzoek van Hickendorff, Heiser, Van Putten & Verhelst (2009). Uit dat onderzoek bleek dat het oplossen van deelopgaven zonder het noteren van een uitwerking geassocieerd was met een laag percentage goede antwoorden, terwijl deze strategie wel steeds vaker werd gebruikt, zoals beschreven in de inleiding van dit artikel. Het huidige onderzoek biedt meer inzicht in wat leerlingen doen wanneer zij geen uitwerking noteren - vooral vaker compenseren en opvermenigvuldigen of op niet-algoritmische wijze splitsen - maar roept vragen op over het effect van het noteren van uitwerkingen op het percentage goede antwoorden. Waar in het eerdere onderzoek oplossingen met uitwerking twee keer zo vaak goed waren als oplossingen zonder uitwerking, werd hier bij vermenigvuldigen een veel kleiner negatief effect gevonden van rekenen zonder uitwerking en bij delen zelfs een omgekeerd effect, in het voordeel van rekenen zonder uitwerking. Wat kan dit verschil verklaren? Een belangrijk verschil tussen het eerdere en het huidige onderzoek is de setting waarin de leerlingen de opgaven oplosten: in het eerdere onderzoek in klassikale afnamen en in

het huidige onderzoek in individuele afnamen, met een toetsleider die de leerlingen bevroeg over hun oplossingen. Wellicht noteerden de leerlingen in het huidige onderzoek alleen geen uitwerking wanneer ze erg zeker waren van hun zaak tegenover de toetsleider, terwijl de leerlingen in de klassikale afnamen minder snel de moeite namen een berekening uit te schrijven. We zijn van plan om in de toekomst deze verklaring te onderzoeken door de huidige resultaten uit de individuele afnamen van PPON 2011 te relateren aan de strategiekeuzes van dezelfde leerlingen in de klassikale afnamen van dezelfde peiling. Op deze wijze hopen we meer inzicht te krijgen in hoe prestaties en oplossingswijzen in een één-op-één-situaties en in klassikale toetsafnamen zich tot elkaar verhouden, om zo uiteindelijk beter te begrijpen waar de sterke daling in prestaties bij complexe deel- en vermenigvuldigopgaven bij de klassikale afnamen van de periodieke peilingen vandaan komt.

literatuur

- Hickendorff, M., W.J. Heiser, C.M. van Putten & N.D. Verhelst (2009). Solution strategies and achievement in Dutch complex arithmetic: Latent variable modeling of change. *Psychometrika*, 74, 331-350.
- Janssen, J., F. van der Schoot & B. Hemker (2005). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4*. Arnhem: Cito.
- Siegler, R.S. & P. Lemaire. (1997). Older and younger adults' strategy choices in multiplication: Testing predictions of ASCM using the choice/no-choice method. *Journal of Experimental Psychology: General*, 126, 71-92.

Aanpakgedrag bij complexe rekencontexten

M. Verschoor
(Hs. Utrecht/Zwijssen, Tilburg)

1 inleiding

In Nederland is er veel zorg over de kwaliteit van het rekenonderwijs, en het instroomniveau vanuit het basisonderwijs naar het voortgezet onderwijs. Veel aandacht gaat op dit moment uit naar de doorgaande leerlijnen, zoals omschreven in het rapport 'Over de drempels met taal en rekenen' van de 'Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen' (2008). Naar aanleiding van het verschijnen van dit rapport zijn er - al dan niet in opdracht van het ministerie van OC&W - veel onderzoeken gestart naar het uitwerken, expliciteren en implementeren van deze leerlijnen. Ook is er inmiddels een aantal dissertatieonderzoeken verschenen, die manco's in het huidige aanbod van doorgaande leerlijnen belichten (Bruin-Muurling, 2010; Stiphout, 2011).

PO (domeingericht)	VO (toepassingsgericht)
Getallen en Bewerkingen	Talen
Verhoudingen	Maatschappij vakken
Meten en Meetkunde	Exact
Verbanden	Kunst/LO

figuur 1: van domeinspecifiek naar toepassingsgericht

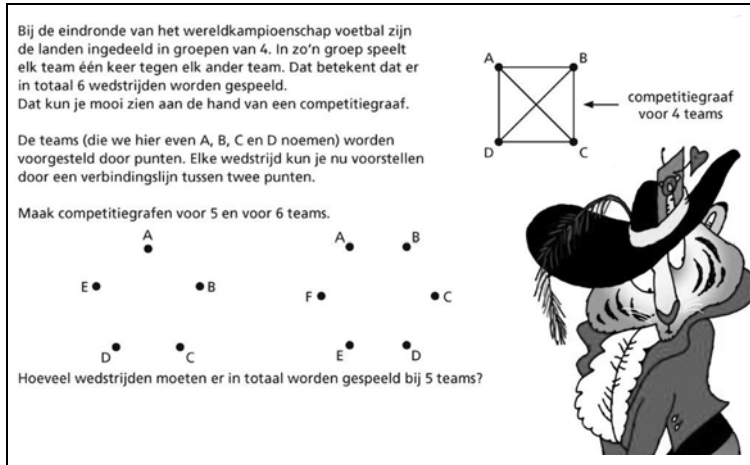
Hoewel in de nabije toekomst in het voortgezet onderwijs het vak rekenen geïntroduceerd gaat worden, en ook daar specifiek aandacht besteed gaat worden aan de doorgaande leerlijnen van de verschillende domeinen, is dat nu nog niet het geval. Er wordt voornamelijk gerekend binnen de verschillende vakgebieden, waarbij het verwerven van nieuwe rekenkennis en het toepassen ervan om zich vakspecifieke leerstof eigen te maken door elkaar lopen. In het basisonderwijs wordt het rekenonderwijs georganiseerd rond de vier domeinen 'getallen en bewerkingen', 'verhoudingen', 'meten en meetkunde' en 'verbanden' (fig.1). Leerstof is naar deze domeinen geordend. Alhoewel de domeinen in de reken-wiskundemethodes wel in samenhang geoefend worden, is er veelal sprake van een ordening van lessen naar domeintype. Dit vergemakkelijkt het doelgericht werken door leerlingen. De combinatie van rekenen als specifiek vak, en een helder, domeinspecifiek aanbod van de leerstof zorgt ervoor dat de leerlingen echter niet gestimuleerd worden om de vraag te stellen: 'Waar reken ik eigenlijk voor?' Het rekenen is doel op zich, geen middel tot iets anders. In het voortgezet onderwijs wordt de rekenkennis toegepast binnen zeer diverse thema's in de vakken. Vakspecifieke rekenkennis wordt daarbij uitgebreid. Dit is mooi te illustreren aan de hand van gebruikte contexten.

2 contexten

Zowel in het basis- als in het voortgezet onderwijs wordt er gerekend met en binnen contexten. De contexten die in de rekenboeken van het basisonderwijs worden gebruikt zijn weliswaar afkomstig uit praktijksituaties, maar zijn zodanig geconstrueerd dat zij specifiek het maken van een bepaalde rekenleerstap ondersteunen. Het zijn daarnaast ook 'perfecte' contexten. De opgaven, met tekst, afbeeldingen, grafieken en tabellen, zijn zodanig geconstrueerd dat zij alle informatie bevatten die nodig is om een leerstap in de doorgaande lijn van het specifieke rekendomein te maken. Er ontbreekt geen informatie, de getallen zijn zodanig gekozen dat de leerstap ondersteund wordt en de illustraties zijn volledig functioneel. Eventuele voorkennis wordt òf door voorgaande opdrachten òf door tips bij de opdrachten geactiveerd.

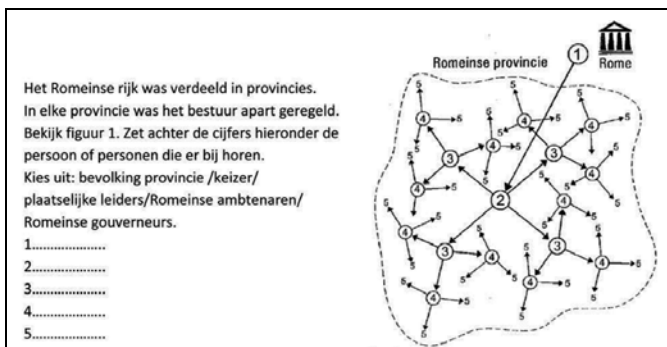
Ook binnen het voortgezet onderwijs wordt binnen contexten gerekend. Los van eventuele specifieke rekenlijnen binnen de wiskundemethodes, zijn dit over het algemeen contexten binnen de vakken, waarbij sprake is van een functionele toepassing van de rekenkennis. Soms is daar tevens sprake van impliciete vakspecifieke uitbreiding van de leerstof. De contexten die hier worden aangeboden zijn niet specifiek geconstrueerd rond de

te zetten leerstap in de doorgaande rekenlijn. De voorbeelden (figuren 2 en 3) illustreren dit duidelijk. In beide opdrachten wordt gewerkt met een graaf. Deze behoort niet tot de referentieniveaus 1F en 1S, en wordt dus niet standaard in de methodes in het basisonderwijs aangeboden.



figuur 2 (bron: Kindt, 2008)

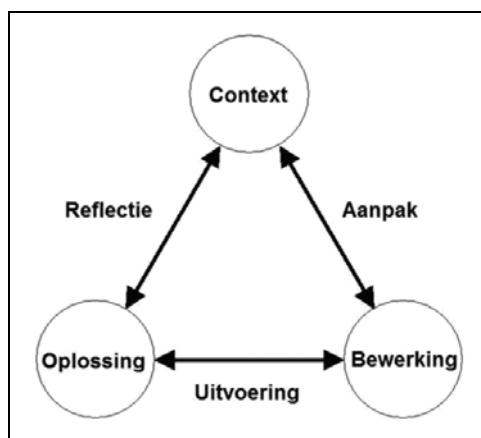
De basisschoolopgave (fig.2) komt uit het verrijkingswerkboekje 'Rekentijger' voor groep 7. In deze context staat uitgelegd wat een graaf is en waarom het gebruik van een graaf handig is. Er staat een voorbeeld bij, en vervolgens kunnen de leerlingen aan de slag. De vo-opgave (fig.3) is afkomstig uit de geschiedenismethode 'Bronnen' voor de eerste klas van het vmbo-t. In deze context wordt de graaf onmiddellijk toegepast. Het is echter de vraag of leerlingen uit vmbo-t klas 1 al in aanraking zijn geweest met de graaf. Toch worden ze hier wel geacht kennis van de graaf toe te passen om iets te leren over de hiërarchische structuur van het Romeinse Rijk.



figuur 3 (bron: Van den Berg, e.a., 2004)

3 de transfer van rekenkennis

Om functioneel gecijferd de maatschappij in te stappen, zullen leerlingen natuurlijk over efficiënte reken-wiskundige procedures moeten beschikken. Maar dat alleen is niet voldoende. Strategisch denken en handelen van leerlingen is hiervoor ook cruciaal. Dit is nodig om situaties, waarin toepassing van rekenvaardigheden nodig is, te kunnen herkennen en te analyseren, zodat op juiste wijze reken-wiskundig wordt gehandeld (Borghouts, Van Groenestijn & Janssen, 2011). Het drieslagmodel, dat wordt gebruikt voor het analyseren van het probleemoplossend handelen van leerlingen (Van Groenestijn, 2002), biedt hierbij ondersteuning (fig.4). Doet zich in werkelijkheidssituaties een probleem voor, dan worden idealiter de volgende stappen doorlopen: op basis van analyse van de situatie wordt een plan van aanpak gemaakt, wat vervolgens wordt uitgevoerd. Na uitvoering wordt nagegaan of de actie juist was.



figuur 4: het drieslagmodel 1 (bron: Van Groenestijn, 2002; Borghouts, Van Groenestijn & Janssen, 2011)

Het drieslagmodel kan worden doorlopen vanuit een wat-vraag: 'Wat is het probleem?', 'Wat ga je doen om het probleem op te lossen?', 'Wat ga je uitrekenen?', 'Wat doe je eerst?', 'Welke bewerking kies je?', 'Wat heb je gedaan?' (Van Groenestijn, 2002; Borghouts, Van Groenestijn & Janssen, 2011). Het maakt in wezen niet uit bij welke stap de leerlingen starten. De didactische ondersteuning door de leerkracht vindt vervolgens plaats door het stellen van een hoe-vraag: 'Hoe ga je het probleem oplossen?', 'Hoe reken je het uit?', 'Hoe heb je het gedaan?' Daarnaast is het voor de leerkracht van belang om te observeren of de leerling in staat is om de overstap te maken van analyse naar bewerking naar reflectie.

4 context met visualisering drieslagmodel

Op basis van het drieslagmodel zijn in het project Real Life Rekenen complexe rekenopdrachten ontwikkeld, die ondersteund worden door een sterk tekstuele en visuele sturing op de drie te zetten denkstappen. Voor leerlingen is een praktische vertaalslag ontwikkeld voor het theoretische model (fig.5).



figuur 5: ontwerp weergave van drieslagmodel op leerlingniveau ten behoeve van Real Life Rekenen

Deze uitgebreide tekstomschrijving, ondersteund met iconen, van de stappen die horen bij de wat-vraag uit het drieslagmodel, kan naast de opdrachtbladen worden gehouden. In het *pilot*onderzoek gebeurde dit met een los blad. Bij de uitgave die in ontwikkeling is, is een flap gemaakt, die uitgeklapt kan worden vanuit het kapt van het werkboek.

- Stap 1, de fase van het plannen en analyseren, heeft als kopje: 'Denk eerst na!' Deze stap wijst de leerlingen op het goed lezen van de vraag, het bedenken welke getallen en bewerkingen ze kunnen kiezen en of ze wel alle benodigde informatie hebben.
- Stap 2, de bewerking, heeft als kopje: 'Reken uit'.
- Stap 3, reflectie, is een tip die leerlingen zelf bedenken. Zij bedenken

deze voor zichzelf, als zij nogmaals een vergelijkbare opdracht gaan doen, of voor medeleerlingen die de opdracht nog moeten maken.

Op de werkbladen wordt het model visueel en tekstueel ondersteund met iconen en een vaste paginaopbouw. Elke stap in het drieslagmodel heeft een eigen invulkader. De koppen van de kaders noemen de belangrijkste drieslagmodelstappen (Denk eerst na!, Reken uit, Tip). Pijlen van opdracht naar kader en tussen de kaders onderling geven de werkrichting aan. In de kaders staan dezelfde iconen als op de flap. Deze helpen de leerlingen eraan te denken dat ze zichzelf tussenvragen kunnen stellen.

5 opdrachten die toepassing van het drieslagmodel stimuleren

In tegenstelling tot de rekencontexten die de leerlingen vanuit de reken-wiskundemethodes gewend zijn, worden hier ‘imperfecte’ contexten aangeboden. Zulke contexten zullen de leerlingen ook in het dagelijks leven en in het voortgezet onderwijs tegenkomen. Dat betekent bijvoorbeeld dat getallen niet altijd zo gekozen zijn, dat zij de keuze van een bepaald type bewerking uitlokken, of tot handig te verifiëren uitkomsten leiden. Ook de wijze van aanbieden en de vindplaats van de noodzakelijke informatie zal van rekenprobleem tot rekenprobleem verschillen. De rekenproblemen die worden aangeboden zijn in drie of meer stappen op te lossen, en vereisen reken-wiskundekennis op referentieniveaus 1F en 1S. Dit komt overeen met het verwachte instroomniveau op vmbo-t niveau.

6 pilot

In de zomer van 2011 heeft een *pilot* van het project plaatsgevonden. Doel van deze *pilot* was om een generiek beeld te krijgen van de gekozen opzet, aan de hand van vragen als: ‘Is de opbouw van de werkbladen helder voor de kinderen?’ ‘Krijgen zij met de gekozen visuele en tekstuele ondersteuning voldoende aanknopingspunten om de systematiek te begrijpen?’ Bij de *pilot* werden drie werkbladen getest: ‘Mummies’, ‘Zonnen’ en ‘Sprint’. Bij het werkblad ‘Mummies’ (fig.6) moeten leerlingen zes stappen zetten om tot een antwoord te komen.

- Stap 1: jezelf opmeten.
- Stap 2: lengte één omwikkeling meten.
- Stap 3: aantal omwikkelingen voor één laag bepalen.
- Stap 4: totale strooklengte per laag bepalen.

- Stap 5: totale strooklengte per laag maal 20.
- Stap 6: omzetten aantal cm. naar aantal m.

Stappen 1 en 2 kunnen omgedraaid worden. Dit geldt ook voor stap 5 en 6. Bij dit werkblad moeten de leerlingen uit het domein getallen en bewerkingen het volgende toepassen:

- kennis van de hoeveelheid en de structuur van getallen tot 10.000 (1F);
- vermenigvuldigen tot 10.000 (1F);
- afronden kommagetallen met twee cijfers achter de komma (1F);
- vermenigvuldigen met twee cijfers achter de komma (1F) (afhankelijk van de gekozen aanpak).

Daarnaast gebruiken ze uit het domein meten en meetkunde:

- handelend meten in meters en centimeters (cm. tot 200, m. tot 2) (1F);
- het omzetten van centimeters naar meters (1F).

Bij het werkblad 'Zonnen' (fig.7) moeten leerlingen vier stappen zetten om tot een antwoord te komen.

- Stap 1: zoeken en bepalen huidtype.
- Stap 2: zoeken en bepalen maximale tijd in de zon.
- Stap 3: zoeken en bepalen zonkracht op betreffende dag.
- Stap 4: uitvoeren deling.

Stap 1, 2 en 3 kunnen in willekeurige volgorde worden uitgevoerd. Alle stappen moeten vier keer uitgevoerd worden.

Bij dit werkblad moeten de leerlingen uit het domein getallen en bewerkingen het volgende toepassen:

- het delen van een getal tot 1000 met een getal tot 10, met rest (1F).

Daarnaast gebruiken ze uit het domein meten en meetkunde:

- het rekenen met minuten (1F).

En uit het domein verbanden:

- het aflezen van een eenvoudige tabel (1F).

Bij het werkblad 'Sprint' (fig.8) moeten leerlingen vijf stappen zetten om tot een antwoord te komen. Dat kan op twee manieren.

Oplossingsmanier 1

- Stap 1: 100 m. in 9,8 sec.
- Stap 2: 1000 m. in 98 sec.
- Stap 3: 1000 m. = 1 km.
- Stap 4: $3600 : 98 = 36,73$ km./u.

Oplossingsmanier 2

- Stap 1: 36 km. in 1 uur.
- Stap 2: 36.000 m. in 1 uur.
- Stap 3: (1 uur = 3600 sec.).

- Stap 4: $36.000 : 3600 = 10 \text{ m./s.}$
- Stap 5: uitkomsten vergelijken.



figuur 6: try-out werkblad 'Mummies'



figuur 7: try-out werkblad 'Zonnen'



figuur 8: try-out werkblad 'Sprint'

Bij dit werkblad moeten de leerlingen uit het domein getallen en bewerkingen het volgende toepassen:

- het delen van een getal tot 10.000 met een getal tot 100, met uitkomst in twee cijfers achter de komma (1F)

Daarnaast gebruiken ze uit het domein meten en meetkunde:

- het omzetten van uren in seconden (of andersom) (1F);
- het omzetten van meters in kilometers (of andersom) (1F).

deelnemers

Aan de *pilot* deden 43 leerlingen mee, verdeeld over twee scholen. Bij school 1 waren dit 27 leerlingen, met doorverwijzing vmbo-t/H/V op basis van de Cito Entreetoets 2010 en de Cito Eindtoets 2011. Bij school 2 waren dit zestien leerlingen, met doorverwijzing vmbo-k, vmbo-t/H/V op basis van de Cito Entreetoets 2010 en de Cito Eindtoets 2011. De leerlingen maakten allemaal bovenstaande werkbladen, waarbij alle antwoorden op de werkbladen genoteerd werden.

De flap met het stappenplan, iconen en uitleg kregen zij als los blad, dat zij naast de werkbladen mochten leggen. De leerlingen maakten binnen een tijdsbestek van twee weken de drie opdrachten.

Evaluatie vond plaats aan de hand van de ingevulde werkbladen, een klas-sengesprek met open vragen op beide scholen en individuele gesprekken met de betrokken leerkrachten.

7 bevindingen

De bevindingen van de *pilot* waren als volgt.

plaatsing van de opdrachten

De plaatsing van de opdrachten leverde voor het merendeel van de leerlingen bij aanvang problemen op. Het was onduidelijk waar ze moesten beginnen en wat de opdracht precies was. Nadat ze een eerste werkblad hadden gemaakt, en aan de opmaak waren gewend, vonden ze de werkrichting bij de vervolgbladen eenvoudiger te herkennen. Leerlingen gaven aan een indicator op prijs te stellen ('Begin hier'). Dit gold vooral voor de meisjes. De jongens vonden dat niet nodig. Leerkrachten gaven aan extra indicatoren ongewenst te vinden. Zij gaven aan dat ook het vinden van de werkrichting iets is wat de leerlingen moeten leren.

schrijfruimtes

Niet voor alle leerlingen was de overstap van het lezen van de opdracht naar het invulkader 'Denk eerst na!' helder. Voor circa 30 procent van de leerlingen was dit vanzelfsprekend ('zo lees je ook'). De overige leerlingen gaven aan graag een duidelijkere indicator op prijs te stellen (de grijze pijl die op het oorspronkelijke ontwerpblad stond, werd slechts door een enkeling gezien). Eén leerlinge gaf aan zelf de grijze pijlen ingekleurd te hebben, zodat ze duidelijker werden.

In de onderzoeksbladen waren witte schrijfvakken opgenomen en schrijfvakken waarin de beeldvullende illustratie zwak doorheen te zien was. Schrijfvakken waarbij dit het geval was, werden als te klein ervaren ('wel mooi, niet handig'). Er was onvoldoende schrijfruimte voor alle leerlingen. De plaats van het kader 'Reken uit' leverde minder problemen op. Ook hier vonden de leerlingen de beschikbare ruimte te beperkt. Slechts één leerling gaf aan de ruimte voldoende te vinden. Hij constateerde dat het meeste schrijfwerk en tussenberekeningen al in stap 1 gedaan werden. Overige leerlingen herkenden dit niet. Hoewel het startpunt moeilijk te bepalen leek, leverde de overstap van 'Denk eerst na!' naar 'Reken uit' geen vragen op. De 'Tip' werd weinig ingevuld. In het algemeen gaven de leerlingen aan liever extra schrijfruimte in het werkboek te willen hebben, en liever niet op losse bladen te schrijven.

gebruikt font

Het gebruikte lettertype voor de opdrachten vonden de leerlingen leesbaar, maar wel klein. Zowel leerlingen als leerkrachten wilden een groter lettertype.

plaatsing noodzakelijke informatie voor de opdrachten

De leerlingen ondervonden geen problemen met het vinden van de informatie die nodig was om de opdrachten te maken (tabellen en dergelijke). Het ontwerp van de tabellen (vrij klein in vergelijking met reguliere rekenwiskundemethodes, en met veel kleurgebruik) leverde geen problemen op.

extra opdrachten

De leerlingen waren positief over de extra losse rekenopdrachten. Deze werden als leuk, en niet als storend ervaren.

ondersteuning van het drieslagmodel

Hoewel in deze test de flap als A3-vel half onder het testblad gelegd moest worden, begrepen de leerlingen de functionaliteit. Ze vonden de informatie op de flap zinvol en ondersteunend. Vooral bij het maken van het eerste werkblad werd de flap gebruikt. De informatie op de flap werd door de leerlingen als voldoende ervaren. Het laten terugkomen van de iconen op de flap in de schrijfruimten werd door alle leerlingen herkend. Op beide scholen gaf één leerling expliciet aan de iconen op de pagina erg handig te vinden. Zij gebruikte ze tijdens het werken als sturing op de stappen die ze wilde zetten ('dan kon ik kijken wat ik moest doen').

beleving van de werkbladen

De uitstraling van de werkbladen werd door de leerlingen als zeer aantrekkelijk ervaren. Bij navraag of het werkblad 'Sprint' als een typische jongenspagina werd ervaren, werd door de meisjes ontkennend geantwoord. Er werden geen specifieke jongens- of meisjesbladen ervaren.

Het werkblad 'Mummies' vonden sommigen wel wat somber en donker, maar een aantal jongens vond dat er juist wel leuk. Een suggestie van de leerlingen was om er in ieder geval voor te zorgen dat er in de diversiteit van een werkboek genoeg vrolijk gekleurde werkbladen zitten. De toevoeging van de characters (de poppetjes) op de pagina's vonden de leerlingen erg leuk. Aangegeven werd dat de characters best groot mochten zijn. Ze leidden de aandacht niet af.

Op school 1 hebben de leerlingen de werkbladen vooral zelfstandig gemaakt. Het werkblad 'Zonnen' werd als het makkelijkst ervaren. Op school 2 werd meer samengewerkt. Het werkblad 'Mummies' was weliswaar moeilijk, maar de leerlingen hadden veel plezier met het gebruik van wc-papier om te bepalen hoeveel meter stof er nodig was voor één omwikkeling van een mummie.

8 conclusie

De vormgeving van de werkbladen was aansprekend en de gekozen contexten spraken de leerlingen aan. De vertaalslag van het drieslagmodel naar een stappenplan voor de leerlingen was helder voor de kinderen en bood ondersteuning op het aanpakgedrag. Zowel de stappen als het werken met de flap en de weergave van de iconen vonden de leerlingen plezierig. Leerlingen hadden behoefte aan meer structuurondersteuning op de werkbladen zelf. Dit betrof het ontbreken van indicatoren waar te beginnen, de eerste aanzet voor een werkroute door de werkbladen en de benodigde schrijfruimte. Ook een iets groter lettertype was gewenst.

Hoewel de leerkrachten aangaven dat het zinvol was voor de leerlingen om ook zonder de additionele structuurelementen (beginindicator, pijlen) hun weg door het werkblad te zoeken, is er voor gekozen om in de definitieve werkbladen deze wel toe te voegen. Belangrijke reden hiervoor is dat de leerlingen van alle niveaus aangeven deze ondersteuning op prijs te stellen. Onze inschatting is dat de stap anders te groot wordt voor de leerlingen om zelfstandig door de werkbladen te kunnen gaan.

Een en ander heeft geleid tot een aantal wijzigingen in de opzet van de werkbladen (fig.9).

1. FRISDRANK MET KLONTJES

Friskind en vruchtensap smaken zoet. Dat komt om dat er meer suiker in zit. Hoeveel klontjes kun je gooien en eigenlijk in een groot glas friskind? Reken maar deze uit!

In een groot glas gaat 750 ml friskind.

merk	gram suiker per 100 ml
cola	11,7
caiso	12,0
sprite	10,1
lucht	8,0
apfelsap	8,0
apelsap	10,5

2. ZOETER DAN SUIKER

In lichtmachin is de suiker verspreid door zoetstoffen. De zoetstoffen smaken veel zoeter dan suiker. De suiker wordt gewolven aan hoewel het zoeter is. Hoeveel suiker moet je gooien in een groot glas friskind? Reken maar deze uit!

In een groot glas gaat 750 ml friskind.

DENK EERST NA!

REKEN UIT!

merk	gram suiker per 100 ml
cola	11,7
caiso	12,0
sprite	10,1
lucht	8,0
apfelsap	8,0
apelsap	10,5

ZOETE KRACHT!

figuur 9 (bron: Real Life Rekenen. Exact, groep 8 (Bruin-Muurling, 2012))

In de nieuwe opzet is het font vergroot, is extra schrijfruimte aangebracht en zijn de foto's niet meer zichtbaar onder de schrijfruimte. De opdrachten

zijn genummerd. Vanuit de opdrachttekst wordt met een pijl het startpunt bij het kader 'denk eerst na' aangegeven. De pijlen tussen de verschillende invulvakken zijn vergroot en hebben een rode in plaats van een grijze kleur gekregen. De tabellen zijn groter afgebeeld. Vanaf het voorjaar van 2012 zullen de werkbladen van Real Life Rekenen verschijnen in een reeks werkboeken voor groep 6, 7 en 8.

vervolgonderzoek

Op dit moment wordt overwogen om, op basis van de door de *pilot* aangepaste werkbladen, vervolgonderzoek te doen. Hierbij zullen leerlingen uit groep 8 van het basisonderwijs en de eerste klas van het voortgezet onderwijs (vmbo-t, H/v) een drietal werkbladen voorgelegd krijgen conform de opzet van bovenstaande werkbladen, maar dan 'uitgekleed' naar één opdracht. Zij maken deze werkbladen zelfstandig, met ondersteuning van de flap.

Een controlegroep krijgt vergelijkbare opdrachten, zonder de ondersteuning van de structuur op de pagina en de flap. Doel van het onderzoek is om hardere gegevens te genereren over de effectiviteit van de aanpak.

literatuur

- Berg, J. van den e. a. (2004). *Bronnen, 1 vmbo t/havo, werkboek*. Houten: EPN.
- Borghouts, C., M. van Groenestijn & C. Janssen. (2011). *Protocol Ernstige Rekenproblemen en Dyscalculie*. Assen: Van Gorcum.
- Bruin-Muurling, G. (2010). *The Development of Proficiency in the Fraction Domain. Affordances and constraints in the curriculum*. Eindhoven: Technische Universiteit (proefschrift).
- Bruin-Muurling, G., e.a. (2012). *Real Life Rekenen. Exact, jaargroep 8*. Tilburg: Uitgeverij Zwijssen.
- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen (2008). *Over de drempels met taal en rekenen: Hoofdrapportage van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen*. Enschede: SLO.
- Groenestijn, M. van (2002). *A Gateway to Numeracy. A Study of Numeracy in Adult Basic Education*. Utrecht: CD-beta Press (proefschrift).
- Kindt, M. (2008). *Rekentijger, werkboek 7B*. Tilburg: Uitgeverij Zwijssen.
- Stiphout, I. van (2011). *The development of algebraic proficiency*. Eindhoven: Technische Universiteit (proefschrift).

Feedback in de rekenles

M. Verschuren
Katholieke Pabo, Zwolle

1 inleiding

Opbrengstgericht werken is een actueel thema in het onderwijs. Schoolteams brengen daartoe de leerresultaten in kaart. Leerkrachten maken gebruik van resultaten van methodegebonden en methodeonafhankelijke toetsen en van informatie uit gerichte leerlingobservaties en (diagnostische) gesprekken met kinderen. Ze analyseren deze leerresultaten en proberen vervolgens invloed uit te oefenen op het leerproces van kinderen, zodat de leerresultaten worden verhoogd. Welke invloed leerkrachten uitoefenen op het leerproces en welk effect dit heeft, is al jaren onderwerp van studie. Soms worden nieuwe inzichten opgedaan, soms ook worden zaken bevestigd in de onderwijspraktijk. Dit artikel gaat over leerkrachtgedrag dat volgens internationale studies een groot effect heeft op leerprestaties: feedback geven. In het theoretisch kader wordt het onderzoek 'De kracht van feedback' van John Hattie uit 2007 beschreven. Vervolgens leest u in welke mate feedback geven voorkomt in het Nederlandse reken-wiskunde-onderwijs en op welke wijze het geven van feedback kan worden ingepast of versterkt in de onderwijspraktijk en in de opleiding.

2 theoretisch kader

Uit het bestuursakkoord 'Primair Onderwijs' (17 januari 2012) tussen het Ministerie van OCW en de PO-Raad blijkt dat de verhoging van de kwaliteit van het onderwijs een actueel onderwerp is. Het streven is de opbrengsten te verhogen door prioriteit te geven aan de basisvaardigheden rekenen en taal, als randvoorwaardelijke vakken voor de bredere vorming van leerlingen. Hoe kunnen leerkrachten bijdragen aan hogere opbrengsten? Op basis van het onderzoek van de Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen (2009) naar een vermeend verschil in het effect van de realistische rekendidactiek en van de mechanistische rekendidactiek constateerde de onderzoekscommissie geen overtuigend verschil. Wel kreeg de onderzoekscommissie een duidelijk beeld over de wijze waarop de leer-

kracht uitvoering geeft aan de didactiek en de interactie tussen leerkracht en leerling. Binnen beide rekendidactieken kunnen grote verschillen optreden. Meer onderwijstijd en aandacht voor rekenen leidt tot betere resultaten. Verder constateerde de onderzoekscommissie dat rekenzwakke kinderen behoefte hebben aan meer instructiemomenten en aan een sturende rol van de leerkracht. Zij blijken minder baat te hebben bij een vrije vorm van instructie. Deze studie wijst nadrukkelijk op het belang van de leerkracht; deze maakt het verschil, meer dan veel andere factoren.

effecten van leerkrachtgedrag

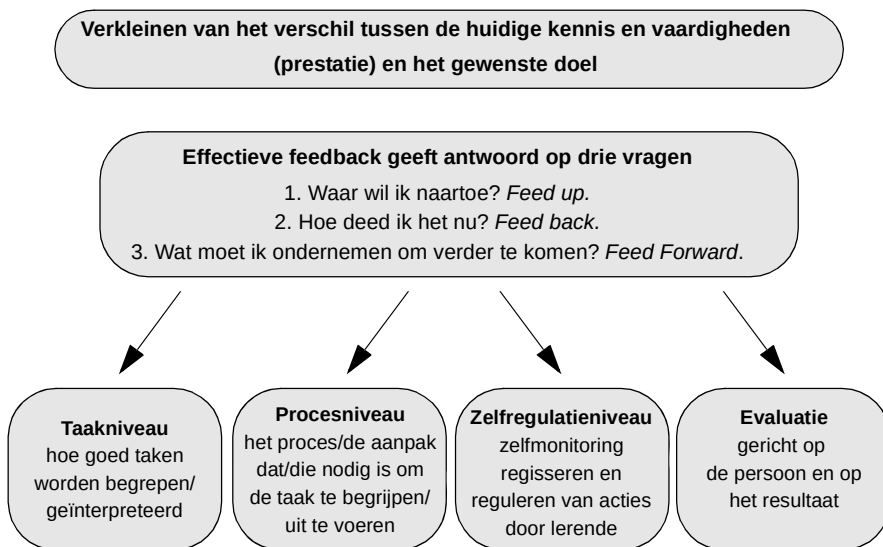
Om het gedrag van leerkrachten en het effect op leerprestaties nader te bekijken, is gekeken naar de uitkomsten van een meta-analyse van zo'n vijftigduizend onderzoeken naar de effecten van diverse factoren in het onderwijs. De onderzoeker, John Hattie (2009), stelde vast welke zaken een groot effect hebben op het leren en welke zaken minder invloed, of zelfs een negatieve invloed. Een grote positieve invloed hebben:

- Versnellen in de leerstof, leerlingen uitdagen en het formuleren van doelen in de leersituaties. Hoge verwachtingen hebben en doelen stellen is effectief in het onderwijsleerproces. Het blijkt dat leerkrachten regelmatig de lat te laag leggen, omdat zij bang zijn leerlingen te overvragen.
- Geven van feedback gericht op zowel het resultaat als op de wijze van totstandkomen van het resultaat. In de praktijk krijgt een leerling per dag slechts luttele seconden feedback van een leerkracht. Wanneer een leerkracht praat met een hele groep dan wordt dit niet als feedback ervaren. Feedback gericht op het leerproces komt minder vaak voor dan feedback op het resultaat.
- Geven van succescriteria. Het gaat erom dat leerlingen weten wanneer het goed gaat. Het tonen van goede voorbeelden verhoogt het leereffect enorm.

Hattie en Timperley (2007) onderzochten eerder de betekenis van feedback. Zij stelden vast dat feedback zowel een positieve als een negatieve invloed kan hebben op het leerproces, afhankelijk van het soort feedback en de wijze waarop deze gegeven wordt. Om de impact van feedback te bepalen, dient te worden gekeken naar de eigenschappen en omstandigheden waaronder feedback gegeven wordt. Zij noemen feedback effectief als het voorziet in informatie over de taak of over het leerproces om de kloof te overbruggen tussen wat al begrepen wordt en wat nodig is om nieuwe leerstof te begrijpen (Sadler, aangehaald door Hattie & Timperley, 2007). Feedback kan gezien worden als informatie die verkregen wordt van een leerkracht, een klasgenoot, een taak of opdracht, een computer, een boek

of de context waarin de lerende zich bevindt. In een onderwijsleersituatie volgt feedback in de meeste gevallen na een instructiemoment. Voor de leerkracht die de instructie geeft, betekent dit dat hij kijkt en luistert naar de leerling en begrijpt wat de leerling weet, kan en nog nodig heeft om de taak te volbrengen of het lesdoel te halen. Een belangrijk doel van het onderwijsleerproces is om leerlingen te helpen bij het identificeren van eventuele hiaten en om oplossingen aan te bieden in de vorm van alternatieve stappen.

Effectieve feedback geeft antwoord op drie relevante vragen gesteld door de leerkracht en/of door de leerling: 'Wat wil ik bereiken?' 'Hoe doe ik het?' en 'Hoe moet ik verder?' Deze vragen refereren aan de drie begrippen *feed up* (Wat zijn mijn leerdoelen?), *feedback* (Welke vooruitgang wordt geboekt richting het lesdoel?) en *feed forward* (Wat moet ik doen om verder te komen?) (fig.1). Het effect van feedback varieert afhankelijk van de hoeveelheid informatie die wordt verkregen om de kloof tussen de huidige kennis en vaardigheden (beginsituatie) en de verwachte kennis en vaardigheden (lesdoel) te overbruggen.



figuur 1: een model van feedback (Hattie & Timperley, 2007)

Figuur 1 toont een kader waarin feedback kan worden beschouwd. Welke feedback verkleint nu het verschil tussen de huidige kennis en vaardigheden en het doel, oftewel de gewenste kennis en vaardigheden? Leerlingen verhogen hun inzet wanneer zij voor een uitdagende taak staan, die bovendien een beroep doet op al verworven kwaliteiten en ervaringen. Natuurlijk

dient de uitdaging ook weer niet zo groot te zijn dat die ontmoedigend werkt. De inzet van leerlingen blijkt ook hoger zodra een duidelijk doel gesteld is en wanneer leerlingen weten hoe succes binnen hun bereik ligt. Wanneer leerlingen vaardigheden leren om fouten op te sporen, groeit hun zelfregulatie om doelgericht te werken. Een zekere mate van begrip en kennis over de taak helpt leerlingen hun strategie te bepalen.

niveaus van feedback

Feedback kan gegeven worden op een aantal niveaus:

- 1 Het niveau van de taak.
- 2 Het niveau van de aanpak.
- 3 Het niveau van zelfregulatie.
- 4 Het persoonsniveau.

Het eerste niveau richt zich op de taak of de opdracht. Heeft de leerling de taak begrepen? De leerling krijgt dan feedback in de vorm van het aantal opgaven dat goed en fout gemaakt is. Bijvoorbeeld: 'Je hebt zeventien van de twintig opgaven goed gemaakt'.

Feedback van de leerkracht tijdens het leerproces in de vorm van aanwijzingen bij bijvoorbeeld een foutieve interpretatie of tips om de taak te interpreteren zijn op dit niveau gewenst. Indien leerlingen te veel feedback op alleen taakniveau ontvangen, moedigt dit hen aan om korte termijn doelen te leren, waardoor minder focus ligt op de strategieën om doelen te bereiken. Wanneer de leerling geen tot weinig begrip heeft van de taak, heeft feedback op alleen taakniveau onvoldoende effect.

Het tweede niveau van feedback richt zich op het leerproces, de aanpak. Op welke wijze heeft de leerling de taak of opdracht uitgevoerd, welke strategie is ingezet? Bijvoorbeeld: 'Kijk nog eens naar het voorbeeld op het bord, daar staat hoe je die opgave kunt oplossen op de getallenlijn', of: 'Kun je bij het oplossen van de opgaven een verhoudingstabel inzetten?'

De leerkracht geeft aanwijzingen in de vorm van alternatieve oplossingen, bevraagt, spiegelt of verwoordt de aanpak van de leerling, waardoor bewustwording plaats vindt. De leerkracht geeft gerichte feedback in de vorm van aanwijzingen en informatie om de taak of opdracht anders te benaderen, zodat tijdens het leerproces strategievorming plaatsvindt. Feedback op dit niveau leidt tot dieper leren. Onderzoek van Black & William (1998) laat zien dat het werk beoordelen met een geschreven commentaar meer effect heeft dan het werk beoordelen met een cijfer.

Op het derde niveau, feedback gericht op de zelfwerkzaamheid, leren leerlingen vertrouwen krijgen in zichzelf en controle uit te oefenen op hun eigen leerproces. Wat regisseert de leerling en welke acties heeft het

gedaan om de taak of opdracht te volbrengen? Leerlingen worden door feedback aangemoedigd zelfwerkzaam te zijn, zodat ze hun taak beter en makkelijker kunnen volbrengen. Zij leren plannen, terugkijken, bewuste keuzes te maken tussen strategieën en cognitieve routines tijdens het leren. Bijvoorbeeld: 'Je weet nu hoe je 14×8 kunt uitrekenen. Hoe kun je deze kennis gebruiken bij het maken van deze verhaaltjessom?' Leerlingen die over minder zelfwerkzaamheid beschikken, kunnen dit leren door aan zelfevaluatie te doen. Zij leren door hun taken zelf na te kijken en hun strategieën met die van anderen te vergelijken. Hierdoor blijft hun aandacht op de taak gericht en wordt hun inzet en betrokkenheid verhoogd. Een positief effect heeft de feedback als instrumentele hulp, oftewel tips en aanwijzingen tijdens het leerproces over de aanpak. Feedback als uitvoerende hulp, zoals het geven van het antwoord op een gesteld probleem, of als directe ondersteuning waarbij de leerling zelf minder actief wordt, heeft minder positieve invloed.

Op het vierde niveau ten slotte, is feedback persoonlijk gericht. Feedback heeft dan betrekking op de persoon van de leerling. Deze feedback staat vaak niet in relatie tot de taak of het taakgedrag, waardoor deze vorm van feedback het minst effectief is als het gaat om het verkleinen van de kloof tussen gewenst en actueel gedrag. Bijvoorbeeld: 'Je bent een goede leerling' of 'Goed gedaan'. Beloning, lof of straf komen vaak in deze vorm voor en hebben eerder effect op het competitiegevoel in de groep dan op het leerproces. Lof als bekrachtiging kan echter wel bijdragen aan een positief zelfbeeld, wat vervolgens weer kan bijdragen tot de taak en het taakgedrag. Dit kan echter alleen indien de feedback zicht ook richt op de inzet, betrokkenheid of leerproces van de leerling. Bijvoorbeeld: 'Je bent echt goed, want je hebt de taak volbracht door deze strategie in te zetten'. Het zou beter zijn indien de leerkracht alleen op taakniveau en op het niveau van de aanpak feedback geeft. Het grootste effect wordt bereikt door een combinatie van feedback op het niveau van de aanpak en op het niveau van zelfregulatie.

Leerkrachten kunnen op verschillende manieren leerlingen ondersteunen om de kloof te overbruggen tussen huidige en gewenste kennis en vaardigheden. Door de lesdoelen specifiek te maken worden ze effectiever dan algemene doelen. Belangrijk is of de leerkracht in staat is om de lesdoelen op het niveau van de leerling te benoemen en/of te visualiseren. De aandacht van de leerling en de feedback kan dan namelijk meer gericht worden. Zeker wanneer de doelstelling en de daarbij behorende feedback informatie bevat met criteria voor succes. Naast het geven van instructie en informatie dienen leerkrachten ook het begrip van de leerling te beoordelen en te evalueren, zodat de volgende instructie aansluit bij deze al aan-

wezige kennis. Het vervolg is de eigenlijke feedback en heeft betrekking op de vraag 'hoe nu verder?' De toetsen die leerkrachten periodiek afnemen, laten zien hoe zij zelf presteren. Het geeft hen aanwijzingen voor vervolgstappen met de leerlingen. Zodra de vervolgstappen leerlingen uitdagen en mogelijkheden bieden tot zelfsturing, zullen leerlingen leren. Een leeromgeving waarin leerlingen zelfwerkzaamheid ontwikkelen blijkt effectief. Feedback draagt daartoe bij wanneer het zich richt op het niveau van de zelfregulatie.

Naast het niveau waarop de feedback plaatsvindt, is ook het moment waarop deze gegeven wordt van invloed. Directe feedback op taakniveau levert namelijk een snellere verwerving van feitenkennis. Directe feedback op het niveau van de aanpak verstoort het leerproces en leidt af van het leren. Een vertraagde feedback is effectiever op het niveau van aanpak en strategievorming. Het moment van feedback op het niveau van de persoon heeft minder invloed; of de leerlingen betrokken zijn bij de doelstellingen van het leerproces en aan zelfevaluatie doen, heeft meer invloed.

3 de onderwijspraktijk in het reken-wiskundeonderwijs in Nederland

Hattie (2009, 2010) laat zien dat leerkrachten internationaal gezien weinig andere feedback geven dan correcties in aantal fout en goed. Nederlands onderzoek van Van de Grift (2011) geeft een vergelijkbaar beeld. De verschillende vormen van feedback worden ook in Nederland nog maar weinig benut. Het door Hattie beschreven leerkrachtgedrag met positieve invloed op leerprestaties, zoals leerstof versneld aanbieden, leerlingen uitdagen en het formuleren van doelen in de leersituaties is geen gangbare praktijk. Veel leerkrachten leggen de lat te laag, omdat ze bang zijn leerlingen te overvragen. Uit het onderzoek van wat leerlingen zelf vinden van het reken-wiskundeonderwijs (Finke, 2010) valt op dat leerlingen de rekenopdrachten zelden of nooit moeilijk vinden en zich slechts 'soms' uitgedaagd voelen. Ook blijkt dat de leerkracht in zijn didactisch handelen systematisch werk kan maken van het motiveren van leerlingen waarmee het plezier in het reken-wiskundeonderwijs positief wordt beïnvloed.

Het blijkt dat het stellen van eigen leerdoelen door leerlingen enorm motiverend werkt. Leerlingen dienen hier echter wel in begeleid te worden. Ook het geven van goede feedback op zowel het resultaat als op de wijze van tot stand komen van het resultaat komt weinig voor in de praktijk. In de praktijk krijgt een leerling per dag slechts luttele seconden feedback van een leerkracht. Wanneer een leerkracht praat met een hele groep dan wordt dit

niet als feedback ervaren. Om goede feedback te geven is het echt kennen van de leerling nodig. En dat kost tijd. Leerkrachten kunnen meer feedback geven in het reken-wiskundeonderwijs volgens Van de Grift.

Het didactisch handelen van leerkrachten is door de Onderwijsinspectie (2010) bij 191 respectievelijk 166 scholen in een representatieve steekproef geobserveerd. Zij concludeert dat opbrengstgericht werken kan worden bevorderd door een aantal verbeteringen door te voeren. Didactische verbeterpunten zijn het benoemen van de lesdoelen bij aanvang van de rekenles en het na afloop controleren of deze behaald zijn. Andere verbeterpunten die de Inspectie noemt zijn het tijdens de rekenles aandacht geven aan denk- en leerstrategieën en het geven van procesgerichte feedback. Ook kunnen leerkrachten meer bewust gebruikmaken van voor-, verlengde- en/of verkorte rekeninstructie. Ten slotte zouden leerkrachten meer analyses moeten maken van de leervorderingen op basis van leerdoelen en/of foutencategorieën.

Het recente onderzoek van de Onderwijsinspectie (2010) laat zien dat leerkrachten nauwelijks meer (schriftelijke) feedback geven dan het aanstrepen van fouten in de door leerlingen gemaakte opdrachten (18 procent). Feedback is veelal gericht op het resultaat (96 procent) en minder gericht op het proces (60 procent). Na afloop van de les checkt slechts 40 procent van de leerkrachten of de doelen zijn behaald.

Collega-consultants Janson (2011), Logtenberg (Logtenberg, 2012; De Weerd & Logtenberg, 2011), Terlouw (2012) en Bergh, Ros & Beijaard (2012) benoemen vanuit hun ervaringen bij lesobservaties dat de huidige generatie leerkrachten weinig vakgerichte interventies uitvoert. Ook constateren zij dat leerkrachten de impliciete lesdoelen uit de gehanteerde reken-wiskundemethode niet in duidelijke lesdoelen omzetten. Bovendien voldoet de geobserveerde feedback niet aan de criteria, zoals geformuleerd in het theoretisch kader van dit artikel. Verbeterpunten die hieruit volgen zijn het expliciet stellen van leerdoelen, het communiceren van de leerdoelen met de leerlingen en het relateren van feedback aan het leerdoel.

Leerkrachten en schoolleiders benoemen als maatregelen die bijdragen aan effectief onderwijs vaak zichtbare en tastbare maatregelen als kleinere klassen, homogene groepen, een andere rekenmethode of de wijze van toetsen. Volgens het onderzoek van Hattie (2009, 2010) hebben deze maatregelen echter een beperkt effect. Zelden praten leerkrachten en schoolleiders gezamenlijk over het lesgeven zélf als effectieve maatregel. Het proces van onderwijzen blijft als het ware onzichtbaar.

4 wat te doen met deze informatie?

In het kader van opbrengstgericht werken om het reken-wiskundeniveau van leerlingen te verhogen, zullen de vaardigheden van de leerkracht (zoals feedback geven) meer zichtbaar en geoptimaliseerd dienen te worden. De huidige onderwijspraktijk laat zien dat verbetering mogelijk en gewenst is. Leerkrachten moeten zich bewust worden van de mogelijkheden van feedback geven, de verschillende niveaus en het effect ervan tijdens de rekenles. Gezien het positieve effect van feedback in vergelijking met andere factoren zouden deze inzichten een aanmerkelijke aanzet tot verbetering kunnen geven.



figuur 2: leerkrachten in de werkgroep Feedback in de rekenles tijdens de School aan Zet-conferentie 2012.

In figuur 2 zien we leerkrachten met elkaar in gesprek over de verschillende typen feedback. Zij sorteren voorbeelden van feedback naar niveau en naar positieve of negatieve feedback. Door deze opdracht verkennen zij eerst hun eigen werkconcept over feedback geven en leren, daarna vervolgens van elkaar en met elkaar. De dialoog met reflectie en een theoretische verdieping dragen bij aan de bewustwording en een mogelijke groei in de vaardigheden van leerkrachten.

De nieuwe generatie reken-wiskundemethodes heeft een didactische lesopbouw volgens het directe instructiemodel. De rekenles start met een *warming-up* waarbij leerlingen het vlot rekenen oefenen. Na de *warming-up* volgt een inhoudelijke of werkinstructie waarin leerlingen nieuwe kennis en vaardigheden opdoen. De leerkracht vertelt bij een werkinstructie wat bij een bepaalde opgave de bedoeling is. Er is meer aandacht voor het

‘wat’. Het ‘hoe’ is meer onderwerp van de inhoudelijke instructie waarbij leerlingen rekenstrategieën leren, rekentaal verwerven en contexten leren herkennen. De leerkracht doet voor, waarna samen met de leerlingen wordt geoefend. Na de instructie volgt de verwerkingsfase, waarbij een deel van de leerlingen een verlengde instructie krijgt en andere leerlingen de opdrachten zelfstandig verwerken. Zij leren de vaardigheden toepassen in opgaven en contexten. Na een periode van zelfwerkzaamheid wordt de rekenles gezamenlijk afgesloten.

Leerkrachten bewust maken welke feedback effectief is bij welk lesonderdeel zal de rekenles versterken. Ook het stellen van de vragen bij elk lesonderdeel als: ‘Wat gaan we leren?’ ‘Wat weten we al?’ ‘Hoe doen we het?’ en ‘Hoe gaan we verder?’, zal leerlingen meer focus geven en meer betrekken bij de les. De leerkracht benoemt het lesdoel, visualiseert dit op het digibord en start de oefening of de instructie. Bij de warming-up staat het vlot rekenen centraal. Aangenomen wordt dat de leerlingen een bepaald kennisniveau en begrip hebben. Feedback in deze fase is meer gericht op de taak. Hoeveel opgaven heb je goed gemaakt binnen een bepaalde tijd? Bij de instructie staat meer de strategievorming centraal en dienen leerlingen bepaalde inzichten en kennis op te doen. De leerkracht doet voor hoe een bepaalde opgave opgelost kan worden en geeft ze daarna de mogelijkheid om zelf een opgave op te lossen. Hij bespreekt samen met leerlingen de opgaven, luistert naar de aanpak en trekt conclusies uit de informatie van leerlingen. Tijdens de begeleide inoefening komen diverse strategieën aan de orde en worden voordelen van een aanpak besproken. Feedback op de aanpak is dan aan de orde: de leerkracht geeft feedback op de wijze waarop leerlingen opgaven oplossen (het oplossingsproces). Leerlingen leren meer via informatie verkregen door feedback als deze wordt aangeboden tijdens het inoefenen. Dit betekent dat de leerkracht zowel bij de *warming-up*, de instructie, als tijdens de verwerkingsperiode oog dient te hebben voor de wijze waarop leerlingen aan het werk gaan en problemen en opgaven oplossen. Hierbij komt feedback op de zelfwerkzaamheid en zelfregulatie aan de orde.

5 in de opleiding en de praktijk

Studenten in de opleiding voor leerkracht basisonderwijs, maar ook huidige leerkrachten die een opfrustraining volgen in rekendidactiek, dienen, naast het leren van theoretische achtergronden, ook gezamenlijk effectieve didactische vaardigheden te oefenen. Samen praten over lesopbouw en doelen, samen voorbereiden van lesinhouden en verkennen van de wis-

kunde in opgaven helpt leerkrachten te switchen tussen een meer gesloten sturende didactiek en een meer open, uitdagende didactiek (open opgave met meerdere antwoordmogelijkheden).

Leerkrachten leren dan beide instructievarianten toe te passen, afhankelijk van de instructiebehoeften van leerlingen en van de verschillende leerprocessen die optreden in de reken-wiskundeles, zoals betekenisconstructie en begripsvorming, probleem oplossen, verwoorden, notaties ontwikkelen, wiskundig redeneren, oefenen, toepassen, memoriseren en automatiseren. Zwakke rekenaars hebben bijvoorbeeld meer behoefte aan eenduidige contexten die helpen bij betekenisverlening en aan het gebruik van modellen en schema's bij het leren van procedures. Ook hebben zij meer ondersteuning nodig bij het verwoorden van hun handelen en hun reflectie.



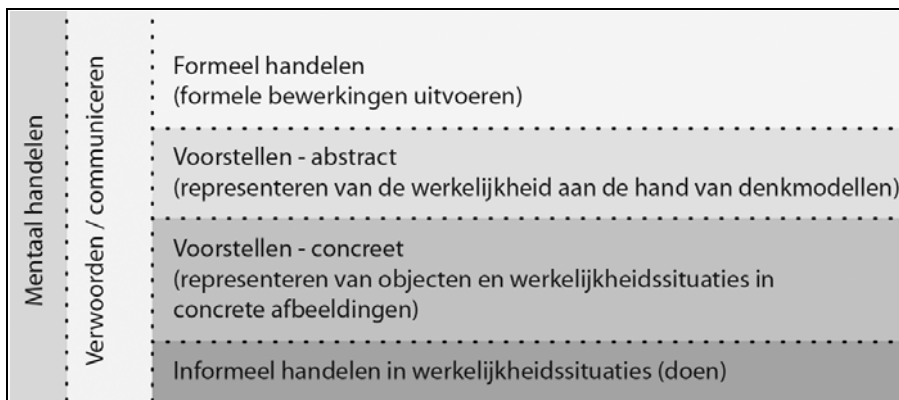
figuur 3: instructietafel (Beatrixschool Papendrecht)

Het samen bespreken van video-opnamen van lessen en observaties van leerlingen leert leerkrachten meer aandacht te hebben voor het proces: de wijze waarop leerlingen opgaven aanpakken. Relevante vaardigheden daarvoor zijn het stellen van vragen, het luisteren naar de gevolgde strategie en deze mee tekenen (fig.3) en verwoorden. Zodoende kunnen de verschillende oplossingsmanieren in de groep vergeleken worden. Het verwoorden van oplossingswijzen ondersteunt het verinnerlijken van handelingen. Daarom is het expliciet en consequent aandacht geven aan

wiskundetaal en wiskundige begrippen in de les, en door de hele school heen, zo belangrijk, zowel voor de instructie van de leerkrachten als voor het leren van leerlingen om hun aanpakken te verwoorden.

Ook het stimuleren van leerlingen om hun gedachten en tussenstappen op kladpapier te noteren helpt om, naast aandacht voor uitkomsten (het product), ook aandacht te geven aan het proces. Leerlingen moeten weten wanneer hun aanpak goed is. Omdat het tonen van goede voorbeelden sterk verhogend is voor het leereffect, moeten leerkrachten de oplossingen en aanpakken van leerlingen kunnen relateren aan de gegeven rekenopdracht. Dan geeft de leerkracht gerichte feedback op de wijze waarop een berekening tot stand komt in plaats van alleen aanstrepen van foutieve antwoorden. Zulke gerichte feedback kan de vorm aannemen van het benoemen van mogelijke oorzaken van de fouten, het toevoegen van denkstappen of het aangeven van verkortingen.

De leerkracht kan alleen gerichte feedback geven als hij weet hoe de leerling denkt en op welk handelingsniveau de leerlingen rekenen. Van contextgebonden en met materiaal (werkelijkheidssituaties) naar schematisch voorstellen en modelondersteunend redeneren tot formeel en abstract rekenen en redeneren.



figuur 4: het handelingsmodel (Van Groenestijn, Borghouts & Janssen, 2011)

Op basis van interpretaties van leerlingobservaties kunnen leerkrachten met het handelingsmodel (fig.4) het rekenaanbod afstemmen op het handelingsniveau van de leerling. Veel leerlingen maken niet vanzelf de stap naar een hoger niveau van handelen. Leerkrachten die via het geven van feedback, het stellen van vragen en het (laten) verwoorden van handelingen verbindingen weten te leggen tussen de verschillende niveaus, sturen de leerprocessen aan en begeleiden hun leerlingen van het ene naar het volgende niveau.

6 tot besluit

Tijdens een rekenverbetertraject of nascholingsstraining gericht op vakdidactiek is feedback geven een onderdeel van de vakgerichte vakinterventies. Het gezamenlijk bespreken van een praktijkfragment op video is daartoe een succesvolle werkwijze. Het lesgeven wordt daarmee als het ware zichtbaar gemaakt. Teams vinden hierin aanleiding om samen te verwoorden wat zij sterk vinden in het geven van feedback. Vragen die daarbij aan de orde kunnen worden gesteld zijn bijvoorbeeld: 'Wat vinden wij succesvol en waar zit onze uitdaging als het gaat om feedback geven?' 'Wat zien we concreet aan leerkrachtgedrag?' 'Wat doen leerlingen?' Door dit concreet te benoemen en vervolgens op te nemen in een kijkwijzer kunnen leerkrachten elkaar systematisch volgen bij collegiale consultaties tijdens de rekenles.

Schoolteams dienen oog te krijgen voor de wijze waarop zij leren. Hoe krijgen zij zelf feedback? Op welke wijze reflecteren de leerkrachten op hun eigen wijze van feedback geven? Belangrijk is dat leerkrachten bij elkaar kijken in de groep, collegiale consultaties uitvoeren en resultaten samen bespreken. Observeren en nabespreken stimuleren de reflectie op het handelen. Ook de intern begeleider, de schoolleider of extern adviseur hebben een rol in het met de leerkrachten praten over hun lesgeven met als doel hen daarin te laten excelleren.

literatuur

- Bergh, L. van den, A.A. Ros & D. Beijaard (in voorbereiding). Teacher feedback during active learning: Current practices in primary schools. *British Journal of Educational Psychology*.
- Black, P. & D. William (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education*, 5(1), 7-75.
- Finke, M. (2010). *Rekenonderwijs door de ogen van leerlingen, beeld van het rekenonderwijs bij leerlingen van groep 7 en 8 van de basisschool*. Utrecht: Universiteit Utrecht (doctoraal scriptie).
- Grift, W. van de (2011). *Ontwikkeling in de beroepsvaardigheden van leerkrachten*. Groningen: University Centre for Learning and Teaching.
- Groenestijn, M. C. van, Borghouts & C. Janssen (2011). *Protocol Ernstige Reken-Wiskunde Problemen en Dyscalculie*. Assen: Koninklijke Van Gorcum.
- Hattie, J. (2009). *Visible learning: a synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. Verenigd Koninkrijk: Taylor & Francis.
- Hattie, J. (2010). *Visible Learning, Visible Teaching*, hand-out workshop. Melbourne: VASSP Conference 2010.
- Hattie, J. & H. Timperley (2007). The Power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81-112.
- Inspectie van het Onderwijs (2008). *Basisvaardigheden rekenen-wiskunde in het basisonderwijs*. Utrecht: Inspectie van het Onderwijs.
- Inspectie van het Onderwijs (2010). *Opbrengstgericht werken in het basisonderwijs*,

- een onderzoek naar opbrengstgericht werken bij rekenen-wiskunde in het basis-onderwijs*. Utrecht: Inspectie van het Onderwijs.
- Janson, D. (2011). Is 'instructie geven' leren mogelijk maken? In: M. van Zanten (red). *Reken-wiskundeonderwijs - aanpassen, inpassen, toepassen*. Utrecht: Panama / FIsme, Universiteit Utrecht.
- Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool - Analyse en sleutels tot verbetering*, Amsterdam: KNAW.
- Logtenberg, H. (2012). Een les is als een snelstromende rivier. *Volgens Bartjens*, 31(4), 22-25.
- Terlouw, B. (2012). *Nieuwsbrief Kijken Naar Kinderen nr. 6*. Zwolle: KPZ.
- Weerd, N.T.E. de & H. Logtenberg (2011). Lesson Study - No teacher left behind. In: M. van Zanten (red). *Reken-wiskundeonderwijs - aanpassen, inpassen, toepassen*. Utrecht: Panama / FIsme, Universiteit Utrecht.

Opbrengstgericht onderwijs - rekenen! – wiskunde? -

- verslag 30^e Panama-conferentie 2012 -

J. van der Linden
Hs iPabo Amsterdam/Alkmaar

1 inleiding

Het programmaboekje van de dertigste Panama-conferentie meldt dat de term ‘opbrengstgericht werken’ overal opduikt waar gewerkt wordt aan verbetering van het reken-wiskundeonderwijs. De centrale vraag voor deze conferentie, die plaatsvond van 18 tot en met 20 januari 2012, was wat en hoe opbrengstgericht werken bij kan dragen aan de verbetering van reken-wiskundeonderwijs. In deze zin is gekozen voor ‘opbrengstgericht onderwijs’ als overkoepelend thema voor de conferentie. Dit verslag is een reflectie van vijf plenaire lezingen, acht parallellezingen, vier categoriale bijeenkomsten en 36 werkgroepen met bijna driehonderd deelnemers. Door 31 conferentiedeelnemers¹ is bijgedragen aan dit verslag door aantekeningen te maken tijdens de diverse programmaonderdelen. Daarnaast waren er natuurlijk de informatiemarkt, allerlei randactiviteiten en vele waardevolle gesprekken en observaties in de wandelgangen, die onmogelijk allemaal in een verslag voldoende aandacht kunnen krijgen en die een goede reden vormen om de conferentie zelf te bezoeken.

Dit verslag is opgezet aan de hand van drie subthema’s:

- 1 Het vormgeven van opbrengstgericht onderwijs met betrekking tot rekenen-wiskunde. Dit omvat het rekenen van leerlingen en beproefde en minder beproefde interventies om tot niveauverhoging te komen in zowel basis- als voortgezet onderwijs.
- 2 Het opleiden van (aanstaande) leerkrachten voor het vormgeven van opbrengstgericht onderwijs met betrekking tot rekenen-wiskunde. Dit omvat zowel opleidingsstrategieën in het opleidingsonderwijs als professionaliseringsstrategieën in nascholing en in rekenverbetertrajecten.
- 3 Rekenen! Wiskunde? Dit heeft betrekking op het tweede deel van de titel van de conferentie. Goed rekenonderwijs ondersteunt kinderen om

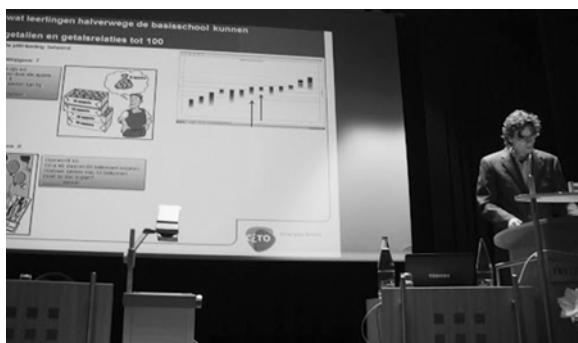
te mathematiseren, dat wil zeggen de wereld met een wiskundige blik te bekijken. Onder dit subthema vallen die programmaonderdelen waarin de conferentiedeelnemers zelf uitgedaagd werden om te mathematiseren.

In vergelijking met de voorgaande Panama-conferentie valt op dat de aandacht voor het opbrengstgerichte karakter van het onderwijs explicieter is en dat er steeds meer aandacht is voor doorlopende leerlijnen en referentieniveaus tot in het voortgezet onderwijs. We zullen de activiteiten met betrekking tot de drie subthema's bespreken, waarbij het eerste subthema de meeste ruimte in beslag zal nemen. Elk subthema wordt afgesloten met een reflectie, gebaseerd op de observaties van de verslag schrijvende deelnemers en gericht op de hiervoor beschreven centrale vraag. Vervolgens zullen we in de afsluitende reflectie terugkomen op de centrale vraag van de conferentie en de stand opmaken ten aanzien van de beantwoording van die vraag.

2 opbrengstgericht onderwijs

rekenen van kinderen

Opbrengstgericht onderwijs begint bij zicht op het rekenen van kinderen. De toetsresultaten die bij opbrengstgericht werken een belangrijke signaalfunctie hebben, kwamen aan de orde in de plenaire lezing van Michel Hop van het Cito. Het door Hop voorzichtig gepresenteerde nieuws dat de uitkomsten van het 'Periodieke Peilingsonderzoek' (PPON) medio groep 5 gestegen zijn, had hem al ingehaald in de 'Volkskrant' van die ochtend (Bakker & Gerrits, 2012). In 2010 scoorden de leerlingen van groep 5 hoger dan bij de eerdere meting in 2003 op vermenigvuldigen, delen, complexe toepassingen (opgaven als $2 \times 4 + 20$), meten, meetkunde en verhoudingen. Op enkele basisautomatismen scoorden ze echter iets lager.



Michel Hop laat in zijn lezing zien hoe deze metingen tot stand komen en vertelt dat behalve de kinderen ook het onderwijs de maat wordt genomen. Daaruit blijkt bijvoorbeeld dat er in toenemende mate aandacht is voor differentiatie in instructie en oefenstof.

Wat ons interesseert, zijn echter niet alleen de toetsresultaten, maar ook de processen die eraan vooraf gaan. Die processen beginnen bij het rekenen van de kinderen. De bijdragen in de conferentie die hierop betrekking hebben, besteden aandacht aan typische rekenonderwerpen als aftrek- en vermenigvuldigstrategieën, maar bekijken het leren rekenen ook vanuit andere disciplines, zoals hersenonderzoek en onderzoek naar taalontwikkeling.

De Vlaamse onderzoekers Greet Peters en Joke Torbeyns (Katholieke Universiteit Leuven) presenteren de resultaten van hun onderzoek naar het flexibel gebruik van eraf-methoden in relatie tot opgavekenmerken binnen het rekenen tot 100. De resultaten van de verbale zelfrapportages zijn verrassend: leerlingen van groep 4, 5 en 6 blijken niet of nauwelijks rekening te houden met opgavekenmerken. Alle eraf-opgaven lossen zij op via sequentieel rijgen waarbij het aftrektal heel wordt gelaten en de aftrekker wordt gesplitst in tientallen en eenheden. De onderzoekers schrijven dit toe aan het Vlaamse onderwijs waarin een groeps cultuur heerst waarin slechts beperkte aandacht is voor flexibel leren rekenen en al snel op een cijferende standaardaanpak wordt overgestapt. Wanneer bij een tweede toets wordt afgestapt van de verbale zelfrapportages en de reactietijden worden gemeten bij het oplossen van de opgaven, blijken de leerlingen wél rekening te houden met het opgavekenmerk 'grootte van het verschil' en passen zij de indirecte aftrekmethode via aanvullen wel toe.

Ook Marije Fagginger Auer (Universiteit Leiden) en Floor Scheltens (Cito) deden onderzoek naar strategiegebruik door kinderen. Zij onderzochten de strategieën die kinderen in groep 8 gebruiken voor vermenigvuldigen en delen met en zonder gebruik van kladpapier. Zij zetten de deelnemers aan het werk met een aantal uitwerkingen van kinderen. Het coderen daarvan met de aangereikte begrippen roept veel discussie op. Het verschijnsel dat kinderen die hun uitwerking noteren, meer opgaven goed hebben dan kinderen die dat niet doen, roept daarentegen herkenning op.

Sanne van der Ven (Universiteit van Amsterdam) bestudeerde de cognitieve processen, die van kinderen gevraagd worden als zij realistische rekenopgaven maken. *Inhibitie* betreft het onderdrukken van irrelevante informatie, *shifting* maakt het mogelijk om van strategie te wisselen en *updating* is nodig om tussenstappen te onthouden. Met behulp van korte opdrachtjes voor de deelnemers illustreert Van der Ven de aanpak van

haar onderzoek. Ze vond dat kinderen, die goed in staat waren om te *updaten*, meer geavanceerde oplossingsstrategieën gebruikten voor vermenigvuldigopgaven. Haar voorzichtige conclusie luidt dat *inhibitie*, *shifting* en *updating*, vervangen kunnen worden door twee essentiële basisvermogens: (1) het vermogen informatie in het werkgeheugen te activeren en deze activatie in stand te houden en (2) het vermogen om irrelevante informatie uit het werkgeheugen juist niet te activeren, door deze activatie te voorkomen of de aandacht op iets anders te richten (Van der Ven, 2011). Verder onderzoek zou uit kunnen wijzen of het trainen van deze vermogens kinderen kan helpen om hun strategiegebruik verder te ontwikkelen (vgl. Van der Ven en Kroesbergen, 2012).

Net als Sanne van der Ven presenteert Elena Tribushinina (Universiteit Utrecht) onderzoek vanuit een, voor de meeste aanwezigen, nieuw perspectief. Tribushinina doet onderzoek naar taalontwikkeling bij jonge kinderen. Zij vond dat kinderen al op jonge leeftijd bijvoeglijke naamwoorden als 'groot' en 'laag' gebruiken. Echter, uit verschillend onderzoek blijkt dat dit niet automatisch betekent dat het begrip van de maat (wat groot of laag is) ook goed ontwikkeld is (Tribushinina, 2012). Hiervoor is het namelijk nodig dat kinderen begrip hebben van dimensie, contrast (tegenstellingen), gradeerbaarheid (denk aan: 'groot groter' versus 'jarig jariger') en relativiteit (maatbegrip is altijd relatief). Interessant is de reactie van Tribushinina op een vraag naar de ontwikkeling van het maatbegrip. Ze geeft aan dat zowel de ontwikkeling van de hersenen als de mate waarin een kind met maten geconfronteerd wordt, van belang is. De combinatie maakt dat een kind op een gegeven moment het maatbegrip ontwikkelt.

interventies ter ondersteuning van het leerproces van kinderen

Welke interventies ondersteunen het leerproces van kinderen ten aanzien van rekenen en kunnen zo de leeropbrengsten vergroten? Op de conferentie zijn deze vragen besproken aan de hand van onderwerpen uit het leergebied rekenen-wiskunde, verbinding met de realiteit, taalontwikkeling en pedagogische benaderingen. Ook is er aandacht voor goede rekenaars en voor (de overgang naar) rekenen in het voortgezet onderwijs.

Dat kijken naar kinderen, peilen en interveniëren dichtbij elkaar kunnen liggen, laten Marije Bakker en Aafke Bouwman (CPS) zien in hun werkgroep speelse peilingsactiviteiten over meten en meetkunde voor kleuters. Achtergrond van de werkgroep is de publicatie van de uitgave 'Als kleuters leren meten' (Bouwman, Kaskens & Noteboom, 2011). De peilingsactiviteiten zijn ontwikkeld om zicht te krijgen op de vaardigheden op het gebied van meten. Aan de hand van gerichte interventies en vragen kan bepaald worden op welk niveau een leerling zit. Als dit bekend is, kan het aanbod

beter afgestemd worden op de leerling (Klep & Noteboom, 2010). De deelnemers aan de werkgroep krijgen inzage in de werkwijze van de peilingsactiviteiten, door zelf de activiteiten te doen en na te denken over gerichte vragen en mogelijke interventies. Hoewel de term 'opbrengstgericht werken' eerder aan 'leervakken' gekoppeld wordt en in groep 1 en 2 nauwelijks van toepassing lijkt te zijn, gebeurt er in groep 1 en 2 juist heel veel op zowel ontwikkelingsvlak als in de leervakken. De peilingsactiviteiten kunnen de leerkracht ondersteunen bij het ontwikkelen van een opbrengstbewuste houding.

Frans Moerlands en Dirk van der Straaten (Parwo, Stichting Speciaal Onderwijs Tilburg en De Roode Kikker, Eindhoven) delen hun ervaringen met opbrengstgericht werken in het speciaal basisonderwijs (sbo). Volgens Moerlands en Van der Straaten zijn er vier belangrijke factoren die van invloed zijn op het onderwijsproces: de realiteit, het lerende kind, de wiskunde en het onderwijs. Zij lichten dit toe aan de hand van de tafels. De leerlijn start bij wiskundige wereldoriëntatie, met het zoeken naar voorbeelden van 'keersommen' in de werkelijkheid. Dit is essentieel voor de begripsvorming. De volgende fase betreft het werken met modelmaterialen. Deze materialen ondersteunen de herstructurering van een keersom tot een decimale structuur. Dan volgt reconstructie op bouwsteenniveau. De laatste fase ten slotte is het formele niveau. Videobeelden tonen hoe leerlingen in de verschillende fasen aan het werk zijn. De beelden laten zien dat de leerlingen op hoog niveau kunnen rekenen, zo lang de opgave herkenbaar is en aansluit bij wat ze willen weten. Uiteindelijk concluderen de inleiders dat we de realiteit in moeten om op zoek te gaan naar echte voorbeelden die aanspreken. Voor wat betreft de wiskunde dienen we op alle niveaus op zoek te gaan naar de wiskundige essentie.

Ook onderzoekers van de Universiteit Utrecht (Sylvia van Borkulo, Marja van den Heuvel-Panhuizen, Marjoke Bakker en Hanneke Loomans) bogen zich over het onderwerp 'vermenigvuldigen'. Zij onderzochten de leerzame kenmerken van populaire rekencomputerspelletjes voor het leren vermenigvuldigen in groep 4/5. Om het kaf van het koren te kunnen scheiden in het snel veranderende spelletjesaanbod ontwikkelden zij een instrument om deze spelletjes te analyseren op algemene en domeinspecifieke leerzame kenmerken (Dempsey, Haynes, Lucassen & Casey, 2002)

Waar de hiervoor besproken bijdragen zich min of meer direct op rekenvaardigheden als meten en vermenigvuldigen richten, kiezen andere bijdragen de realiteit als uitgangspunt. Zowel rekenen als taal dienen ertoe om greep te krijgen op deze realiteit, zoals Moerlands en Van der Straaten al laten zien. De werkgroep 'Nieuwsrekenen'² buigt zich onder leiding van

Ine van de Sluis en Ruud Janssen (CED-Groep) over rekenen en realiteit. Nieuwsrekenen ondersteunt leraren die de actualiteit de klas in willen halen en helpt leerlingen om de vertaling te maken van situatie naar som. Nieuwsrekenen is het jongere zusje van 'Nieuwsbegrip'³, dat de CED-Groep ook ontwikkelde en door vijfduizend scholen wordt gebruikt. Wekelijks komen dezelfde nieuwsonderwerpen in zowel Nieuwsrekenen als Nieuwsbegrip aan de orde. De belangstellenden waren enthousiast over Nieuwsrekenen. Wel stelden ze vast dat het grondig bespreken van een nieuwsbericht en hieraan rekenen al snel veel tijd kost en die is er niet altijd.

Marieke Verschoor (Hogeschool Utrecht, Kenniskring 'gecijferdheid' / Uitgeverij Zwijsen, Tilburg) presenteert een aanpak voor complexe rekenproblemen. Ondanks de contextrijke reken-wiskundemethodes, blijkt de transfer van rekenkennis naar toepassing in het dagelijks leven vaak problematisch.

Om rekenen functioneel te kunnen toepassen in werkelijkheidssituaties moeten leerlingen drie stappen zetten: aan de hand van het probleem dat zich voordoet moeten zij analyseren wat precies de vraag is en bepalen welke aanpak gevolgd gaat worden. Vervolgens moeten zij de correcte bewerkingen uitvoeren en ten slotte moeten zij reflecteren op juistheid van uitkomst en aanpak. Deze stappen komen overeen met de stappen van het drieslagmodel, zoals opgenomen in het protocol Ernstige Reken-wiskundeproblemen en dyscalculie (Van Groenestijn, Borghouts & Janssen, 2011). De kenniskring van het Lectoraat Gecijferdheid ging op zoek naar de effectiviteit van het drieslagmodel tijdens zelfstandig werken in groep 8. Verschoor presenteert dit onderzoek en zet de deelnemers aan het werk. Die gaan in groepen aan de slag met een zelfgekozen werkblad, gemaakt voor groep 8, met wat men verwacht wat kinderen moeten kunnen op het vmbo. De werkbladen gaan over atleten, mummies en donder en bliksem. Het drieslagmodel, waarbij plannen, uitvoeren en reflecteren in samenhang in plaats van als chronologie bekeken worden, blijkt hierbij nuttige ondersteuning te bieden. Of het bij zelfstandig werken werkt, is nog een onbeantwoorde vraag.



Paul Leseman (Universiteit Utrecht) legt de relatie tussen taalontwikkeling en leren rekenen. Volgens de *embodied cognition*-benadering is het maken van situatiemodellen een belangrijk element waar rekenen en (begrijpend) lezen samen komen. Ruimtelijke cognitie is bij het maken van deze modellen van belang, maar een nog sterkere relatie is gevonden voor verbale vaardigheden. In de ontwikkeling van het kind is het verbinden van belichaamde kennis en intuïties aan taal een cruciale opdracht om tot rekenkennis te komen. Praatjes maken over rekenen-wiskunde in het gezin en op school, bij alledaagse activiteiten en spel, draagt diensengevolge bij aan het maken van situatiemodellen en dus aan de vroege ontwikkeling van rekenen-wiskunde.

Ook Jantien Smit en Dolly van Eerde (Universiteit Utrecht) laten zien hoe taalontwikkeling inzicht in rekenen-wiskunde kan bevorderen. In meertalige klassen zijn leerkrachten soms geneigd om de taal te versimpelen. Leerlingen zijn echter juist gebaat bij specifieke aandacht voor taalontwikkeling door middel van doelgerichte interactie. Smit en Van Eerde illustreren dit aan de hand van de specifieke taal die nodig is om lijngrafieken te kunnen interpreteren en te beschrijven (groep 7/8).

De bijdrage van Anita Lek en Agnes Ritfeld (Stichting Projecten Suriname) ondersteunt de roep om aandacht voor taal en kritisch gebruik van contexten op geheel eigen wijze. Voor bijna alle kinderen in Suriname is Nederlands een tweede taal, maar het is wel de officiële voertaal. Bij de rekenactiviteiten is de taal als intermediair toegevoegd. De woorden en begrippen die op dat moment nodig zijn om te leren rekenen, krijgen speciale aandacht. Bij ieder thema wordt daarom een lijst met taal-denkwor- den gepresenteerd. Vaak zijn dit woorden die in de moedertaal (wel tien talen, naast nog talrijke inlandse talen) van de kinderen niet bestaan. Behalve de taal is culturele achtergrond en de diversiteit daarin een belangrijk gegeven voor een eigen ontwikkeling. Zomaar een vertaling van goed materiaal uit Nederland is dus niet aan de orde. Een mooi voorbeeld van hoe anders dat gaat zijn de 'bussommen' die in de Surinaamse context 'bootsommen' zijn.

Succesvolle interventies kunnen niet zonder een pedagogische benadering, waardoor kinderen succeservaringen kunnen opdoen en hun prestaties kunnen verbeteren aan de hand van ondersteunende feedback. Op basis van 35 jaar ervaring met kinderen binnen het speciaal basisonderwijs (sbo) ontwikkelden Douwe Sikkes & Loe van der Leeuw (BS Het Palet, Arnhem/Nijmegen) de methodiek 'Zo leer je kinderen rekenen'. Dit is een systematische stap-voor-stap opgebouwde aanpak om de rekenbasisvaardigheden aan te leren en te automatiseren (Van der Leeuw & Bosman,

2011). Een van de uitgangspunten is het volgen van een opbouw waarbij de leerkracht elk rekenonderdeel volgens een vast omschreven strategie met de leerlingen inoefent. Bij het oefenen moeten de kinderen een bal vangen. Hierdoor zijn ze alert en geconcentreerd. Dit versnelt het automatiseringsproject, waardoor leerlingen succeservaringen opdoen en hun zelfvertrouwen toeneemt.

Ook de bijdrage van Maaïke Verschuren en Nanda van Oorschot (KPC Groep) bevindt zich op het snijvlak van rekenen en pedagogiek. Verschuren en Van Oorschot laten de deelnemers via een oefening kennismaken met verschillende niveaus van feedback geven: op de taak, op het proces, op de aanpak, op de persoon. Met meer begrip van de wijze waarop feedback werkt, kan de leerkracht effectievere feedback geven (Hattie & Timperley, 2007).

Er is steeds meer aandacht voor de doorgaande leerlijn van primair naar voortgezet onderwijs wat rekenen betreft. De invoering van de referentieniveaus weerspiegelt dit. Victor Schmidt (SLO) bespreekt het referentiekader rekenen in het voortgezet onderwijs. Met ingang van het schooljaar 2013-2014 moeten alle leerlingen in het voortgezet onderwijs een reken-toets afleggen. Zoals bekend omvatten de referentieniveaus voor rekenen twee sporen: het *F*-spoor (fundamenteel niveau) en het *S*-spoor (streefniveau). Leerlingen van het vmbo moeten ten minste niveau *2F* behalen en leerlingen van mbo, havo en vwo tenminste niveau *3F*. Dit betekent dat ze functioneel kunnen rekenen binnen situaties. Het *S*-spoor is meer gericht op abstractie, generalisatie en formalisatie. Tot nu toe staan de plannen op papier en zijn ze nog niet uitgevoerd. In de werkgroep zijn veel ongeruste geluiden te horen uit de praktijk. De aanwezigen brengen naar voren dat er geen aparte lessen zijn om de leerlingen te helpen aan dit niveau te voldoen, dat er geen methodes zijn die hier gestructureerd aan werken, dat op het vmbo de leerlingen binnenkomen met een niveau dat lager is dan *1F* en dat *2F* onhaalbaar lijkt voor deze leerlingen.

De bijdrage van Kees Buijs (SLO) sluit hierbij aan. Hij vertelt over een project om de problematiek van leerlingen in de basisberoepsgerichte leerweg (vmbo-bbl) nader in kaart te brengen en om een doorgaande leerlijn richting het beoogde eindniveau van *2F* te ontwikkelen. In het kader daarvan heeft de afgelopen maanden onder meer een onderzoek plaatsgevonden naar het vaardigheidsniveau van vmbo-bbl-leerlingen in klas 1 en 2. Buijs doet verslag van dit verkennende onderzoek, onder andere aan de hand van videobeelden van leerlingen die enkele tamelijk onverwachte redeneringen en uitkomsten laten zien. Tegen de verwachting van de meeste toehoorders in, bij een peiling door handopsteken, heeft bijvoorbeeld een

opgave over tijd een goedscore van 90 procent en een meetopgave een goedscore van nog geen 10 procent (fig.1). Een verklaring is dat deze kinderen dagelijks werken met digitale tijden. Velen zijn op de basisschool niet toegekomen aan onderwerpen als kommagetallen of het metriek stelsel en komen naar het vmbo met een forse rekenachterstand. Ze scoren lager dan het 1F-niveau.

Tijd	Meten
Hoeveel minuten nog? Het is 17:48 uur. De trein gaat om 18:06 uur.	Een balk is $6\frac{1}{2}$ cm dik. Hoeveel mm is dat?

figuur 1: opgaven 2F

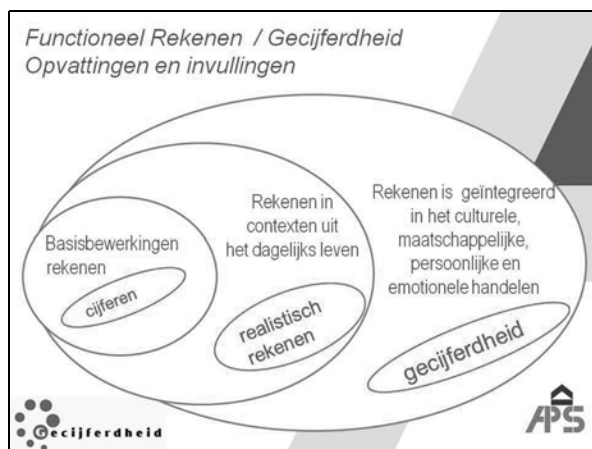
Diagnostische interviews met leerlingen in klas 1 en daarna klas 2 op drie vmbo-scholen laten echter zien dat er perspectief is voor deze leerlingen. Ze zijn weliswaar trager in hun denk- en rekenwerk dan gemiddeld, maar komen vaak tot goede redeneringen, vooral als ze enige ruggensteuntjes krijgen.

Opbrengstgericht werken betekent ook meer uitdaging voor snelle rekenaars. Voor de 10 procent van de leerlingen in het primair onderwijs, die bij het vak rekenen niet voldoende uitgedaagd wordt door (streef)referentieniveau 1s ontwierp het 'Algemeen Pedagogische Studiecentrum' (APS) het x-niveau. Dit x-niveau is verbeeld in posters: 1x-poster voor primair onderwijs en 2x-poster voor het voortgezet onderwijs.⁴ Suzanne Sjoers presenteert de posters en laat zien dat ze ontworpen zijn om aan de leerbehoeften van excellente rekenaars te voldoen. Deze leerlingen zijn onder andere goed in het leggen van verbanden, goed in analyseren, ze maken grote denksprongen, hebben interesse in rekenen en wiskunde en geven blijk oog te hebben voor structuren en patronen.

Ook de 'Wereld Wijde Wiskunde Wedstrijd w4 Kangoeroe' is in eerste instantie ontwikkeld voor snelle rekenaars. Lonneke Boels en Leon van den Broek (w4kangoeroe, wizkid, wizsmart) laten echter zien dat het beoogde wiskundig denken door het werken in duo's ook voor rekenzwakke leerlingen bereikbaar is (Van den Broek, 2010).

Kees Hoogland (APS) laat de deelnemers kennismaken met de resultaten van zijn onderzoek naar het beeldmateriaal, dat bij rekenen gebruikt wordt, met name in het voortgezet onderwijs. Hij ontwikkelde daarvoor een continuüm van basisbewerkingen rekenen naar realistisch rekenen naar gecijferdheid (fig.2). Binnen de schoolwereld vormt de structuur van de subdomeinen rekenen het uitgangspunt. De operationalisering vindt ver-

volgens plaats met behulp van pen-en-papieropgaven. Dat heeft niet zoveel te maken met de echte maatschappelijke werkelijkheid, waar niet de rekenvaardigheid, maar functionele situaties in beroep en maatschappij het startpunt zijn. In die situaties kan de burger al dan niet met vrucht de eenmaal verworven kennis en vaardigheden mobiliseren en zinvol inzetten om een situatie te verhelderen, te structureren of in goede banen te leiden.



figuur 2: gecijferdheid en functioneel rekenen⁵

Volgens Hoogland besteedt het reguliere onderwijs daar amper aandacht aan, terwijl termen als ‘maatschappelijk niveau’ en ‘burgerschap’, waarnaar de referentieniveaus 2F en 3F verwijzen, dat wel impliceren. De uitdaging waar we voor staan is het verbeteren van de ‘gebruikelijke’ contexten om een brug te slaan naar gecijferdheid zoals figuur 2 aangeeft.

Al enkele keren is het knelpunt van de overgang van primair naar voortgezet onderwijs benoemd. Harm van Son en Kris Verbeeck (KPC-Groep) presenteren een project waarin scholen voor primair onderwijs en voortgezet onderwijs samenwerken op het terrein van meten en meetkunde. De scholen informeren elkaar over wat er binnen dat domein gebeurt, de opbouw van de leerlijn en hoe effectief te leren binnen dit domein. Op basis hiervan is een overdrachtsmodel ontwikkeld voor contact en uitwisseling tussen primair en voortgezet onderwijs (Willems & Verbeeck, 2011).

Meer aandacht voor rekenen in het voortgezet onderwijs is er in de werkgroep van Ria Brandt (CPS) over ‘opbrengstgericht rekenen in het voortgezet onderwijs’. En ten slotte laten de presentaties van rekenmethodes voor voortgezet onderwijs en mbo zien dat de uitgevers niet stilgezeten hebben sinds de invoering van de referentieniveaus.

reflectie op het vormgeven van opbrengstgericht onderwijs

Wat kunnen we leren van het brede aanbod op het terrein van de vormgeving van opbrengstgericht reken-wiskundeonderwijs? Terugblikkend op alle verschillende bijdragen, vallen de volgende punten op:

Uit de bijdragen spreekt een eigenzinnige invulling van het idee 'opbrengstgericht werken'. Dit idee richt weliswaar de aandacht op de opbrengsten en dus bijna automatisch op de toetsresultaten, maar dat betekent niet dat het lerende kind achter deze resultaten uit beeld verdwijnt. Wat brengt dit kind mee aan interesses, behoeften en strategieën, waarbij aangesloten kan worden? Binnen welke (talige) context ontwikkelt het kind zich? Onderzoek hiernaar was altijd van belang en blijft dat ook. In die zin is opbrengstgericht werken geen grote koerswijziging.

De relatie tussen rekenen en realiteit, die altijd al bestond in realistisch rekenen, krijgt een nieuwe impuls door de referentieniveaus en de twee sporen daarbinnen. Aan de ene kant is er het fundamentele spoor, dat het functionele rekenen omvat dat elke burger moet beheersen om zich staande te houden. In dit spoor gaat het om de basisgecijferdheid die minimaal nodig is om zinvol te participeren in de samenleving. Aan de andere kant is er het s-spoor, waarin de realiteit aanleiding is om te mathematiseren en om het wiskundig denken te ontwikkelen. Hoe de sporen elkaar kunnen verrijken, lijkt een aandachtspunt van maatschappelijk belang te zijn. Er is toenemende aandacht voor doorlopende leerlijnen tussen primair en voortgezet onderwijs en mbo. Er is grote bezorgdheid ten aanzien van de zwakke leerling, die met een lager dan 1F-niveau van het basisonderwijs komt. Er zijn veel plannen op papier. Het lijkt van belang de implementatie ervan goed te begeleiden en te doordenken. Door concrete samenwerkingsprojecten ontstaat meer inzicht en waardering voor elkaars werkwijze. Deze ontwikkelingen die op de conferentie zichtbaar werden, waren natuurlijk al langer aan de gang. Ze roepen dan ook de vraag op naar de toerusting en ondersteuning van leerkrachten op de opleiding en in het veld. Het volgende hoofdstuk bespreekt de bijdragen op dit terrein.

3 het opleiden van (aanstaande) leerkrachten

Opbrengstgericht onderwijs kan niet zonder opbrengstgericht werkende leerkrachten. Bakker en Bouwman spraken in het voorgaande zelfs van een 'opbrengstbewuste houding' van de leerkracht. Leerkrachten maken tijdens de initiële opleiding, maar ook tijdens de nascholing kennis met opbrengstgericht werken en ontwikkelen hun visie en vaardigheden met betrekking tot het verhogen van de leeropbrengsten.

opleidingsonderwijs voor opbrengstgericht werken

Ronald Keijzer vertelt in zijn lezing hoe op de iPabo in Amsterdam / Alkmaar opbrengstgericht werken als *pilot* in het vierde jaar aan de orde wordt gesteld. Hij sluit in zijn lectoraatsonderzoek aan bij reeds bestaande programma's met betrekking tot actieonderzoek en handelingsgericht werken.



Deze programma's kunnen zonder veel aanpassing gericht worden op het verhogen van leeropbrengsten. Om dat zo effectief mogelijk te kunnen doen, is extra aandacht besteed aan de afstemming met het veld, zodat opleiding, (stage)school en student zoveel mogelijk samen optrekken om opbrengstgericht werken in de school zo verantwoord mogelijk vorm te geven (Keijzer, Van der Linden, Vos-Bos & Verbeek-Pleune, 2012). De aanpassingen in het opleidingsprogramma worden begeleid door onderzoek om tot een zo adequaat mogelijk ontwerp te komen.

Ook Monique van Bueren (Hs. InHolland) heeft onderzoek gedaan naar opbrengstgericht werken op de pabo. De deelnemers aan haar werkgroep hebben zich gebogen over de vraag hoe de pabo zelf meer gebruik zou kunnen maken van toetsresultaten om opbrengstgericht te werken. Dit leidde tot een uitwisseling van de resultaten van de zogenoemde 'Wiscattoets' (de instaptoets voor de pabo) en hoe die sturend kunnen zijn voor de lessen die erop volgen. Omdat het om het gebruik van door het onderwijs gegenereerde gegevens gaat die gebruikt worden om opbrengsten te verhogen, zou je over een bescheiden toepassing van opbrengstgericht werken in het hbo kunnen spreken.

Andere bijdragen zijn gericht op het meer in algemene zin verhogen van het niveau van de opleiding en dus van afgestudeerde leerkrachten. Nina Boswinkel, Kees Buijs en Martin Klein Tank (SLO) presenteren 'De digilijn', een webgebaseerd ontwerp met betrekking tot leerlijnen rekenen-wiskunde in het basisonderwijs.⁶ Het ontwerp is een vervolg op het nascho-

lingsproject 'Beter met rekenen'. Aangezien kennis van de leerlijnen van belang wordt geacht voor (aankomende) leerkrachten, hebben Boswinkel, Buijs en Klein Tank het ontwerp besproken en geëvalueerd met derdejaars pabo-studenten. Dit heeft tot enkele aanpassingen geleid. Deelnemers aan de werkgroep merken op dat 'De digilijn' geen naslagwerk voor studenten moet worden. Uiteindelijk gaat het erom dat ze een instrument krijgen dat ze kunnen gebruiken om beslissingen te nemen over de invulling van hun lessen en de begeleiding van leerlingen.

Op verschillende momenten wordt de 'Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo' besproken. Deze Kennisbasis (Van Zanten, Barth, Faarts, Van Gool & Keijzer) is in 2009 opgesteld en zal in 2013-2014 voor het eerst landelijk getoetst worden. Op de conferentie is enerzijds aandacht besteed aan de voorbereiding van studenten op de landelijke toets en anderzijds aan de inhoud en vorm van de toets zelf. Marjolein Kool (Hogeschool Utrecht) doet onderzoek naar het zogenoemde AVE-format (A = analyseren; V = verklaren; E = evalueren). Dit format kan studenten helpen zich voor te bereiden op een specifiek element uit de Kennisbasis: *Specialized Content Knowledge* (SCK) (Ball, Thames & Phelps, 2008). Dit is specifieke reken-wiskundige kennis van de basisschoolleerkracht. Een leerkracht met voldoende SCK kan onder andere:

- meerdere oplossingsmanieren op meerdere niveaus van handelen en redeneren produceren;
- oplossingsmanieren van anderen analyseren, beoordelen, parafraseren, verbeteren en met elkaar in verband brengen;
- een oplossingsmanier wiskundig correct noteren en verwoorden;
- een passend (non-)voorbeeld of vraagstuk bedenken;
- de 'kale' opgave uit een context halen en een context bij een 'kale' opgave bedenken.

SCK zal in de landelijke Kennisbasistoets getoetst worden, maar in de beschrijving van de Kennisbasis is hierover weinig opgenomen. Aan de hand van het AVE-format kunnen studenten systematisch reflecteren op leerlingenwerk en zichzelf bekwamen in voornoemde onderwerpen. Kool is van plan om op verschillende pabo's te experimenteren met dit format.

Omdat er in de aanloop naar de landelijke Kennisbasistoets veel ontwikkeld moet worden, is de roep om samenwerking en kennisdelen tussen de pabo's groot. Het onderzoek dat op verschillende pabo's uitgevoerd zal worden, is al een voorbeeld van kennisdelen.

Anneke van Gool (Panama, Universiteit Utrecht) peilt de interesse om een omgeving in te richten om ideeën uit te wisselen. Marianne Konings en Marjolein Kool (Hs. Utrecht, Kenniskring 'Gecijferdheid') ontwikkelen een kader voor toetsdoelen en toetsvormen als basis voor een landelijke digi-

tale database van didactische toetsvragen en leggen dit voor aan deelnemers van hun werkgroep. De op basis van dit kader ontwikkelde toetsvragen roepen veel discussie op over inhoud en vorm van de vragen.



Dat toetsvragen voor de Kennisbasis discussie oproepen onder docenten is een vaker voorkomend verschijnsel. Een panel, bestaande uit Gerard Boersma, Kees van Putten en Ronald Keijzer, pakt onder leiding van Anneke van Gool plenair de handschoen op en bediscussieert voorbeelden van toetsopgaven. Boersma, lid van de vakcommissie van pabo-docenten, die commentaar geeft op de items, geeft de aftrap. Hij hanteert de volgende criteria: de opgave moet gaan over wat in de Kennisbasis beschreven staat, de wijze waarop de vraag gesteld is mag geen ruis bevatten, de opgave moet wiskundig correct gesteld zijn en de opgave moet de juiste moeilijkheidsgraad hebben. Van Putten, *critical friend* van de landelijke toetscommissie, gebruikt zijn psychometrische kennis bij het beoordelen van concept-toetsitems. Keijzer ten slotte, die zelf mede de toetsitems construeert, let erop dat elk toetsitem naar een specifiek onderdeel van de Kennisbasis verwijst en dat het hbo-niveau gewaarborgd is. Dat eerste is niet gemakkelijk, want het woord 'bijvoorbeeld' komt heel vaak voor in de Kennisbasis. Na de bespreking van enkele voorbeeldopgaven sluit Keijzer af met de opmerking dat we niet alleen naar de toets moeten kijken. Het gaat erom of we in staat zijn om het opleidingsonderwijs zo vorm te geven dat studenten enthousiast worden voor wiskunde op eigen niveau. Studenten die de verantwoordelijkheid krijgen voor kinderen in de bovenbouw ontkomen hier niet aan en kunnen zich anders afvragen of ze wel geschikt zijn voor het beroep. Als de toets doet wat hij moet doen, zuivert hij de laatste studenten eruit. De implementatie van de Kennisbasis moet meer omvatten dan voorbereiding op de verplichte toets.

Lectoren, lectoraten en kenniskringen zijn sinds enkele jaren binnen het hoger beroepsonderwijs geëigende personen en vormen om bestaande

praktijken te ontwikkelen met behulp van onderzoek. Sinds kort zijn er vier lectoren op het gebied van rekenen-wiskunde. Dit zijn: Diny van der Aalsvoort (Hs. Saxion), Sui Lin Goei (Hs. Windesheim), Mieke van Groenestijn (Hs. Utrecht) en Ronald Keijzer (Hs. iPabo). Van Groenestijn en Goei richten zich op de preventie van rekenproblemen in de praktijk van de basisschool. Van der Aalsvoort en Keijzer richten zich op het opleidingsonderwijs (Lit, 2011). Deelnemers aan de door de lectoren georganiseerde werkgroep zijn blij met de onderzoeksmatige aandacht voor hun vakgebied. Ze adviseren de lectoren om ervoor te zorgen dat hun onderzoek betekenis heeft voor de leerkracht en docent op de werkvloer door de voortgang ervan ook tussentijds met het veld op de opleiding en in de basisschoolpraktijk te delen. Anders is het gevaar groot dat er ‘onderzoekseilandjes’ ontstaan zonder verbinding met de onderwijspraktijk.

professionalisering van leerkrachten met betrekking tot rekenen-wiskunde

De leerkracht heeft een centrale rol in de vormgeving en verbetering van het reken-wiskundeonderwijs (KNAW, 2009). De leerkracht wordt op deze rol voorbereid in de opleiding, maar zal hieraan, ook als hij werkzaam is in de praktijk, moeten blijven werken. Opbrengstgericht werken geeft hieraan een nieuwe impuls. Het is dan ook niet verwonderlijk dat veel bijdragen op deze conferentie met als thema opbrengstgericht werken zich richten op de professionalisering van de leerkracht. Achtereenvolgens bespreken we de bijdragen over de behoefte aan professionalisering, de ervaringen in grootschalige en kleinschalige professionaliseringsprojecten en het onderzoeks- en ontwikkelingswerk op dit terrein. Omdat professionalisering van leerkrachten aan moet sluiten bij de behoefte van leerkrachten, bespreken we hier eerst de bijdrage van Monique Turkenburg (Sociaal en Cultureel Planbureau). Zij heeft onderzoek gedaan naar het draagvlak voor het verbeteren van de basisvaardigheden in alle sectoren van het onderwijs, door gericht meer aandacht te besteden aan taal en rekenen-wiskunde en meer opbrengstgericht te werken. Haar onderzoek was kwalitatief van aard met een schriftelijke ronde en diverse groeps gesprekken. De deelnemers waren allen betrokken actoren in en rond primair en voortgezet onderwijs: schoolbestuurders, interne toezichthouders, schooldirecties, leerkrachten po en docenten vo, ouders (leden van de MR), ambtenaren en wethouders (onderwijs-jeugdzaken). Het onderzoek levert een breed beeld op hoe men in het onderwijsveld vanuit verschillende posities tegen dit thema aankijkt. Aan de ene kant is er tegenstand tegen te veel en te vaak testen en toetsen en aan de andere kant is er bijval voor een cultuurverandering met meer openheid over doelen en resultaten en vertrouwen in de deskundigheid van de leerkracht. Vooral in het voortge-

zet onderwijs lijkt een knelpunt te bestaan, omdat leerkrachten het aandacht besteden aan basale taal- en rekenvaardigheden zien als extra belasting (Turkenburg, 2011).

Yvonne van der Eerden (OBD Noord-West, Hoorn) en Ronald Keijzer (Hs. iPabo) gebruiken de conferentie om de behoefte aan ondersteuning onder rekencoördinatoren te peilen. Met de hernieuwde aandacht voor rekenen-wiskunde en het verhogen van de opbrengsten op dat terrein, komen de coördinatoren weer in beeld. Aan de ene kant is er behoefte aan een duidelijke positionering van de rekencoördinator in de school. Zijn activiteiten richten zich op leerkrachten, leerlingen en hun onderwijs, maar ook op het beleid van de school. Aan de andere kant zouden rekencoördinatoren graag gevoed worden door een netwerk met andere rekencoördinatoren en experts buiten de school. Thema's om in het netwerk te bespreken, zijn: de referentieniveaus, nieuwe methodes en omgaan met weerstanden.

Op de conferentie zijn de ervaringen besproken van verschillende grotere en kleinere professionaliseringsprojecten op het terrein van rekenen-wiskunde. Het grootste project betreft de door de PO-Raad ('Projectbureau Kwaliteit') ingezette rekenverbetertrajecten op meer dan zeshonderdvijftig scholen. Op kleinere schaal loopt het 'Focusproject' van de Universiteit Twente op ruim honderd scholen. Verder zijn er waardevolle ervaringen opgedaan door de Pabo Almere, het CPS en het Menne Instituut. Ook is er op beperkte schaal ervaring opgedaan met de nascholing van docenten in het mbo door de Hs InHolland in samenwerking met het ROC Leiden.

Projectleider Gert Gelderblom deelt zijn ervaringen in de rekenverbetertrajecten, die inmiddels bijna allemaal afgerond zijn. De *lessons to learn* betreffen het functioneren van de schoolleiding, de kwaliteit van de leerkracht, het veranderingstraject en de invulling van opbrengstgericht werken (Gelderblom, 2009).

Marieke van Geel en Bernard Teunis (Universiteit Twente) presenteren het Focusproject. Vanuit dit project worden schoolteams twee jaar lang begeleid bij het duurzaam ontwikkelen van een opbrengstgerichte schoolorganisatie. Doel is het optimaliseren van het onderwijs en de leerresultaten. In de werkgroep wordt uitgebreid ingegaan op de benutting van het Cito-leerlingvolgsysteem. Projectmedewerkers trainen leerkrachten in het analyseren en interpreteren van resultaten, het stellen van doelen en het ontwikkelen van handelingsplannen (Hattie & Timperley, 2007). De schoolleiding heeft de rol om de leerkracht duurzaam op dit spoor te houden. Scholen volgen binnen het Focusproject een min of meer vaststaand traject binnen vaste kaders. Parallel aan het trainingstraject doen Van Geel en Teunis onderzoek naar de effecten ervan.

Onder de intrigerende titel 'IJsberg in de polder' presenteren Francis Meester, Hilde Amse en Jan van Stralen (Pabo Almere) het rekenverbetertraject van negen basisscholen in de omgeving van Pabo Almere (Meester, Blok, Amse & Van Stralen, 2012).

Het aantal betrokken scholen is een stuk kleiner dan dat van de hiervoor beschreven trajecten, maar de nascholing bereikte alle leerkrachten, de interne begeleiders, de rekencoördinatoren en directeurs van scholen. De nascholing werd vormgegeven volgens het principe van het congruent professionaliseren, dat wil zeggen dat de wijze van werken tijdens de nascholing model stond voor de wijze van werken in de basisschool. Het resultaat is dat in de scholen weer gesproken wordt over rekenen-wiskunde, omdat het rekenplezier terug is. Het plezier van de leerkracht werkt door naar de kinderen. De resultaten van de kinderen laten een positief effect zien.



Julie Menne (Menne Instituut) toont de aanwezigen verschillende oefeningen die zij ontworpen en uitgetest heeft voor oefenen in de rekenles. De kinderen oefenen niet reproductief, maar productief, in die zin dat zij hun eigen oefeningen produceren. De voordelen van het werken met eigen producties zijn: de leerkracht krijgt inzicht in wat kinderen kunnen, hij sluit aan bij de zone van de naaste ontwikkeling, hij heeft mogelijkheden tot differentiëren, leerlingen gaan sneller door de leerstof, het schrappen in de methode wordt eenvoudiger.

Eigen producties zijn stimulerend en motiverend voor de kinderen en voor het genereren van weer nieuwe eigen producties. Deze werkwijze stelt eisen aan de kennis, inzicht, vaardigheden en attitude van de leerkracht, die zich creatiever en actiever moet opstellen dan bij het reproductieve oefenen. De nascholingen van het Menne Instituut trekken leerkrachten over de streep door het plezier dat zij ervaren in de oefeningen.

Leanne Jansen, Henk Logtenberg en Machteld Schölvink (CPS) combineren preventie van leerachterstanden en professionalisering van leerkrachten.

Groepen en hun leerkrachten worden intensief begeleid volgens de rondes van *responsiveness to intervention* (Schölvink, Jansen & Minnaert, 2011). De eerste ronde is het goede onderwijs dat de leerkracht geeft. Niet alle leerlingen profiteren hier echter van. De leerlingen die op een toets niet genoeg presteren, krijgen in de tweede ronde extra aanbod. Hiervoor worden aan de leerkracht wetenschappelijk onderbouwde interventies aangeleerd en daar leert de leerkracht van. Leerlingen die bij een volgende toets nog niet meekomen, krijgen een indicatie voor meer tijd en extra interventies en hebben waarschijnlijk structureel meer begeleiding nodig. De methode is eerst voor taal uitgetoetst en nu ook op kleine schaal voor rekenen in het basisonderwijs en mbo. De deelnemers aan de werkgroep vragen zich af of er op deze manier niet te veel getoetst wordt. Dit is niet aan de kinderen gevraagd, maar er is wel contact gezocht met de Universiteit Leiden om de hoeveelheid en resultaten van de toetsen kritisch tegen het licht te houden.

Nu rekenen in het mbo ook op het programma staat, is het van belang om mbo-docenten te laten profiteren van de inzichten die zijn opgedaan in rekenen-wiskunde in het basisonderwijs. Jan Bodrij (ROC Leiden) en Monique van Bueren (Hs. InHolland) deden hier al ervaring mee op. Een belangrijk aandachtspunt was dat er grote verschillen bestaan tussen de opleidingen in het mbo, terwijl er maar één toets is, waar alle studenten aan moeten voldoen. Denk hierbij aan de verschillen tussen een student niveau-4 vliegtuigtechniek of niveau-2 zorg. Ook de docenten hebben verschillende achtergronden. Bodrij en Van Bueren hebben in de nascholing ingezet op cijfers en getallen in de omgeving van leerlingen, oplossingsstrategieën en het redigeren van bestaande (basisschool)rekenproblemen naar de belevingswereld van de mbo-leerling.

Ten slotte presenteren we enkele werkgroepen die gezien kunnen worden als bijdragend aan onderzoek en ontwikkeling ten behoeve van professionalisering.

Dolf Janson en Jenneken van der Mark (APS) presenteren de eerste ervaringen van twee onderzoek- en ontwikkelingsprojecten over de parallel tussen opbrengstgericht en onderzoeksmatig werken. Omdat opbrengstgericht werken (onder andere) inhoudt dat er systematisch met data gewerkt wordt, wat ook het geval is bij onderzoek doen, omvatten beide activiteiten vergelijkbare processen, die om dezelfde houding vragen van leerkrachten. Het gaat bijvoorbeeld om herkennen dat er een probleem is, vragen stellen, samenwerken met collega's en bronnen raadplegen. Hierbij moet overigens ook expliciet gedacht worden aan het raadplegen van kinderen, ouders en tijdschriften. Janson en Van der Mark raden adviseurs aan om aan te sluiten bij de drijfveren van leerkrachten, namelijk het wer-

ken met kinderen in hun klas. Een leerkracht stimuleren om een onderzoekende houding aan te nemen zal wellicht beter werken dan als deskundige vertellen hoe het moet. Een onderzoekende houding kan bij leerkrachten worden gestimuleerd door aan te sluiten bij de nieuwsgierigheid van leerkrachten en hen bijvoorbeeld te laten voorspellen hoe het zit bij 'hun' kinderen. Als leerkrachten onderzoeken welke strategieën hun kinderen gebruiken, bedenken ze zelf wat ze anders kunnen doen als kinderen weinig perspectiefvolle strategieën gebruiken en draagt dat bij aan opbrengstgericht onderwijs.

Onder leiding van Anneke Noteboom (SLO) en Bronja Versteeg (Giralis Groep) buigen de onderwijsadviseurs zich in hun eigen bijeenkomst eerst over het 'Protocol Ernstige Reken-Wiskundeproblemen en Dyscalculie' (ERWD) (Van Groenestijn, Borghouts, Janssen, 2011) en vervolgens over uiteenlopende thema's als werken met groepsplannen, aan de slag met referentieniveaus, implementeren van nieuwe methodes en nogmaals het protocol ERWD. Daarna gaat de groep in twee rondes aan de slag met verschillende thema's. De formule hierbij is dat elke adviseur kan aangeven bij welk onderwerp hij informatie en ervaring kan 'brengen' en bij welk onderwerp hij komt 'halen'. Op die manier ontstaan groepjes waarin zowel 'halers' als 'brengers' zitten.

Een nieuwe ontwikkeling is het fenomeen van de 'Cloudschool'. Dit is een persoonlijke leeromgeving, waarbinnen leerlingen volgens hun eigen leerstrategie, leerlingprofiel en leerstatus lesmateriaal aangeboden krijgen. Het systeem maakt en koppelt een elektronische leeromgeving in Cloudschool, maar de leerkracht heeft een belangrijke rol. Als het niet goed gaat, dan krijgt de leerkracht een signaal en kan hij op maat een 'pakket' samenstellen. Astrid van den Hurk (KPC Groep, Den Bosch) denkt dat de leerkracht met behulp van Cloudschool vrijer met de methode om kan gaan. De leerkracht stuurt het systeem aan en kan alles aan elkaar koppelen. De koppelingen vanuit Cloudschool kunnen overal vandaan komen. Ze kunnen van een methode als 'Alles Telt' komen, maar ook vanuit sites uit Amerika. De deelnemers aan de werkgroep vragen zich af hoe de kwaliteit gegarandeerd wordt. Vooralsnog zien ze meer zorgen dan mogelijkheden.

Geeke Bruin-Muurling en Maaike Koopman (Technische Universiteit Eindhoven) hebben onderzoek gedaan naar de kennis die nodig is om breuken te onderwijzen, het zogenoemde *Mathematical Knowledge for Teaching* (Ball, Thames & Phelps, 2008). Leerkrachten moeten kunnen schakelen tussen de dagelijkse kennis die iedereen moet hebben en de meer wiskundige benadering. Het doel van het project waarbinnen Bruin-Muurling en Koopman werken, is te komen tot interventies bij leerkrach-

ten met het doel het vaardigheidsniveau van hun leerlingen te verbeteren en dit dan te meten.

reflectie: het opleiden van (aanstaande) leerkrachten voor het vormgeven van opbrengstgericht onderwijs

De bijeenkomsten en discussies over opleiding en professionalisering overziend, valt op dat opbrengstgericht werken voor een nieuw elan zorgt binnen het opleidingsonderwijs. Deze vernieuwingen worden mede ondersteund door de Kennisbasis, die de bagage van elke aanstaande leerkracht versterkt. Diverse initiatieven om te komen tot platforms om de ervaringen met de invoering van de Kennisbasis door te spreken, laten zien dat de ontwikkelingen op dat terrein nog nauwelijks vaste vorm hebben gekregen. Een gevolg van de promotie van opbrengstgericht werken is te zien in de gestegen vraag op het terrein van professionalisering. Hierbij moet opgemerkt worden, dat de vraag soms eerder van schoolbesturen en directies komt dan van leerkrachten. Leerkrachten verzetten zich tegen de (vermeende) grote hoeveelheid toetsen en testen, waarmee zij opbrengstgericht werken gepaard zien gaan. Openheid van zaken geven over de leerresultaten van de groepen vraagt om een cultuurverandering in de basisschool. Anderzijds spreekt de onderzoeksmatige wijze van werken, waarbij de professionaliteit van de leerkracht uitgangspunt is, aan. Langlopende samenwerkingsverbanden met verschillende actoren lijken de duurzaamheid van verbetertrajecten te vergroten.

4 rekenen! wiskunde?

Last but not least is er aandacht voor rekenen verbonden met wiskunde, niet voor niets onderdeel van de titel van de conferentie. Mathematiseren met kinderen als vorm van niveauverhoging was al aan de orde. Deze paragraaf gaat over het mathematiseren van de conferentiegangers. De wiskunde dient als inspiratiebron voor leren en onderwijzen.

De lezing van John Mason (Open University, United Kingdom) is een goed gerichte aftrap. Hij wijst erop dat bij rekenen niet zozeer de getallen belangrijk zijn als wel de bewerkingen ermee. Met dat inzicht is de stap niet zover meer naar het ontdekken van eigenschappen van bewerkingen, waarmee we in de wiskunde zijn beland. Mason activeert de luisteraars met allerlei oefeningen en laat ze daarmee zelf ervaren hoe eenvoudig ogende rekensommetjes tot spannende wiskundige ontdekkingen kunnen leiden. ‘Het is niet de opgave die rijk is, maar de manier waarop ermee gewerkt wordt’, is een van de typerende uitspraken van Mason.

Jan de Lange (FIsmc, Universiteit Utrecht) snijdt, bijna letterlijk, de meetkunde aan. In navolging van Freudenthal werkt hij voorbeelden uit van meetkunde als *grasping space*. Aan de hand van een doorsnede van de 'Nautilusschelp' bespreekt hij de meetkunde die in de natuur is verwerkt (fig.3). Het natekenen van de spiraal geeft aanleiding tot meetkundige constructies, waarbij de 'Rij van Fibonacci' als vanzelf ontstaat uit de lengtes van de zijden van de vierkanten van de tekening. Dit is een van de vele voorbeelden aan de hand waarvan De Lange een pleidooi houdt voor meetkundig redeneren om greep te krijgen op de omgeving.



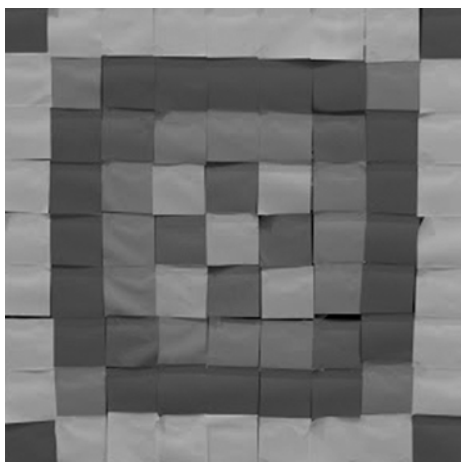
figuur 3: doorsnede van de Nautilusschelp⁷

Ook in de werkgroep van Ed de Moor staat meetkunde centraal, ditmaal in de vorm van bewijzen van de 'Stelling van Pythagoras'. De deelnemers hebben (opnieuw) kennis kunnen maken met de schoonheid van wiskunde. De Moor laat onder andere een door hem - jaren geleden - zelf ontwikkelde 'legpuzzel' zien, waarmee de stelling van Pythagoras kan worden aangetoond op basis van omstructureren van oppervlakten van driehoeken en vierkanten. Hij illustreert op deze manier mooi de paradoxale overeenkomst tussen algebra en meetkunde. Hoewel De Moor aan het begin van de werkgroep aangeeft dat het opleidingsonderwijs geen onderwerp van de werkgroep is, werd aan het eind toch de vraag gesteld op welke manier de stelling van Pythagoras aan pabo-studenten zou kunnen worden aangeboden, zonder dat ze deze stelling slechts als hobby van wiskundigen zouden zien. De oplossing moet vooral gezocht worden in het handelend werken met meetkundige vormen waarbij omstructureren van oppervlakten de weg lijkt om studenten de schoonheid van meetkunde in

het algemeen en de stelling van Pythagoras in het bijzonder te laten zien (Kindt & De Moor, 2008; De Moor, 2012).

Aldine Aaten en Tom Goris (Hs. Rotterdam, Fontys, Universiteit Utrecht, Stichting Zayandeh) nemen de deelnemers aan hun werkgroep mee naar Isfahan in Iran. In samenwerking met Sarah Abdellahi (Isfahan House of Mathematics) ontwikkelden zij lesmateriaal, geïnspireerd op de prachtige blauwe, florale mozaïeken in de Jameh-moskee. Dit gaf aanleiding tot een heerlijk avondje patronen ontdekken, leggen en spiegelen. Wiskundig gezien ging het daarbij om periodieke vlakvullingen, die door verschuiving op zichzelf terugkomen en a -periodieke vlakvullingen, waarbij dat niet kan. Het intrigerende is nu dat deze a -periodieke vlakvullingen al voorkomen op gebouwen uit de vijftiende eeuw, terwijl altijd gedacht werd dat het principe ervan pas in de vorige eeuw is ontdekt.⁸

Naast de natuur en de kunst als aanleiding en motivering om te mathematiseren, kwam het spel aan de orde. Leo Prinsen, Fokke Munk en Jan Willem van Slijpe (Hs. iPabo, SOL) zetten de deelnemers aan het werk met het 'Latijns rekenpotje' en 'Schipper mag ik overvaren'. Omdat samenwerken bij deze twee spelen belangrijk is, ontstaat er verdieping door overleg, argumenten en redeneren. Dit verhoogt de betrokkenheid en het enthousiasme. Ook wordt een voor de aanwezigen nieuw spel, Mozaik, geïntroduceerd. De activiteiten vallen samen onder een paraplubegrip 'Speels en onderzoekend leren (SOL)'.⁹



figuur 4

Een telkens terugkomend onderdeel in de conferentie zijn activiteiten met een titel waarin op de een of andere manier het woord *math* in voorkomt.

Marjolein Kool (Hs. Utrecht) geeft hiervoor na de lezing van John Mason het startschot. Onder de titel *So you think you can math* presenteert zij het materiaal dat door het ZOEFI-project¹⁰ is ontwikkeld voor dagelijkse oefenactiviteiten van ongeveer tien minuten in de basisschool. Er zijn allerlei spelletjes ontwikkeld voor het automatiseren van de rekenbasis. De conferentiedeelnemers nemen enthousiast deel en leren zo het materiaal kennen. Verder zijn er wandelgangen-activiteiten onder de titel *What is the mather?*, waarvoor de ramen worden beplakt met post-its in mooie patronen (fig.4).

Er is een wedstrijd onder het motto 'Maak getallen zichtbaar!'. Misschien mogen we hieronder ook de introductie van het thema van de 'Grote Rekendag' over dieren rekenen. Deelnemers krijgen een bewerking van het bekende spel 'Wie is het?' voorgeschoteld onder de titel: 'Welk dier is het?' Ten slotte krijgen de deelnemers de verzamelde ideeën en activiteiten mee in de bundel *Let's go math*.

reflectie: Rekenen! Wiskunde?

Al met al is het belangrijk en inspirerend om in de Panama-conferentie de link met de wiskunde levend te houden, al dan niet op een speelse manier. Sommigen vragen zich af of dit hobbyisme is van de wiskundig georiënteerde deelnemers en zijn beschroomd om hiermee aan de gang te gaan met kinderen, studenten en leerkrachten. De lezingen en werkgroepen laten echter zien dat mathematiseren ook mooie didactische mogelijkheden biedt die ook de minder wiskundig georiënteerde medemens op het spoor van niveauverhoging kunnen zetten.

5 afsluitende reflectie

Laten we terugkeren naar de vraag waar dit artikel mee startte en die de centrale vraag voor de conferentie vormde: wat en hoe kan opbrengstgericht werken bijdragen aan de verbetering van reken-wiskundeonderwijs? Op de conferentie is hierover via diverse invalshoeken gesproken: van het rekenen van kinderen via de ondersteuning daarvan in het basisonderwijs tot de opleiding en professionalisering van leerkrachten en de schoonheid van de wiskunde aan toe. Dit geeft enerzijds de sterkte van opbrengstgericht werken als algemene stimulering van het werken aan onderwijsverbetering op diverse niveaus aan. Anderzijds kan het ook een zwakte zijn, dat de onderwerpen en hun uitwerking zo breed zijn dat er nauwelijks een eenduidige agenda voor de toekomst uit af te leiden valt. De meer uitgesproken aandacht voor opbrengstgericht werken is dan wel nieuw tijdens

deze conferentie, maar de invulling lijkt nog zo breed dat hierdoor nauwelijks richting is gegeven aan de invulling van de diverse onderwerpen. Het lijkt er bijna op of we een nieuwe term hebben gevonden voor activiteiten die toch al liepen. Dat hoeft op zichzelf niet ongunstig te zijn. Een hogere onderwijsopbrengst, daar zijn we allemaal voor.

Toch mag dat geen reden zijn om niet met elkaar in discussie te blijven over de gewenste inhoud van de onderwijsopbrengsten (denk aan de referentieniveaus), de geschikte wegen om daar te komen (denk aan professionalisering en onderzoeksmatig werken van leerkrachten), de leerprocessen van kinderen (denk aan de noodzaak van interdisciplinaire onderzoeken) en vele andere onderwerpen.

noten

- 1 Dit verslag kwam tot stand door bijdragen van: Peter Ale, Hilde Amse, Eric Ansems, Nico den Besten, Conny Bodin, Anton Boonen, Nina Boswinkel, José Faarts, Arie Fase, Atie Haverhals, Frits Hof, Jarise Kaskens, Ronald Keijzer, Petra Lambrichs, Anita Lek, Francis Meester, Frans Van Mulken, Fokke Munk, Wil Oonk, Bas Oprins, Albert Oving, Ingrid Samson, Floor Scheltens, Jan Willem van Slijpe, Harrie Sormani, Iris Verbruggen, Bronja Versteeg, Caroliene van Waveren Hogervorst, Nathalie de Weerd, Marijn van Wensen en Erica Woltjer. Jo Nelissen las kritisch mee en maakte waardevolle opmerkingen om het verslag in wording te verbeteren.
- 2 Zie: www.nieuwsrekenen.nl
- 3 Zie: www.nieuwsbegrip.nl
- 4 Zie: www.aps.nl/APSite/Publicaties/Rekenposter+1X+eXcellent+rekenen.htm
- 5 Zie: www.gecijferdheid.nl
- 6 Zie: www.digilijn.nl
- 7 Zie: www.jdlang.nl
- 8 Zie: www.zayandeh.nl
- 9 Zie: www.speleon.nl
- 10 Zie: www.fi.uu.nl/zoefi

literatuur

- Bakker, M. & R. Gerrits (2012) PPON-onderzoek Groep 5 is iets beter gaan rekenen. *De Volkskrant*, 19 januari, 11.
- Ball, D., Thames, M. & G. Phelps (2008). Content Knowledge for Teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Bouwman, A., J. Kaskens & A. Noteboom (2011). *Als kleuters leren meten: De ontwikkeling van meten en meetkunde bij jonge kinderen*. Amersfoort: CPS.
- Broek, L. van den (2010). Kangoeroe in duo's. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 30(4), 32-35.
- Dempsey, J.V., L.L. Haynes, B.A. Lucassen & M.S. Casey (2002). Forty simple computer games and what they could mean to educators. *Simulation and gaming*, 33(2), 157.

- Gelderblom, G. (2009). *Iedereen kan leren rekenen*. Utrecht: PO-raad/Projectbureau Kwaliteit.
- Groenestijn, M. van, C. Borghouts & C. Janssen (2011). *Protocol Ernstige Reken-Wiskundeproblemen en Dyscalculie*. Assen: Koninklijke Van Gorcum B.V.
- Hattie, J. & H. Timperley (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1) 81-112.
- Keijzer, R., J. van der Linden, J. Vos-Bos & L. Verbeek-Pleune (2012). Leraren basisonderwijs leren opbrengstgericht werken. *Tijdschrift voor Leraren-opleiders*, 33(2), 39-45.
- Kindt, M. & E. de Moor, (2008). *Wiskunde in een notendop*. Amsterdam: Bert Bakker.
- Klep, J. & A. Noteboom (2010). *Als kleuters leren tellen. Peilen en stimuleren van getalbegrip bij jonge kinderen* Amersfoort: CPS.
- KNAW (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering*. Amsterdam: Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen.
- Leeuw, L. van der & A. Bosman (2011). Zo leer je kinderen rekenen. Verslag van een praktijkonderzoek. *Orthopedagogiek: Onderzoek en Praktijk*, 50, 32-41.
- Lit, S.A. (2011). Vier lectoren voor rekenen-wiskunde. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 30(4), 19-24.
- Meester, F., H. Blok, H. Amse & J. van Stralen (2012). Onderwijsverbetering via nascholing - ervaringen uit de polder -. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 31(2), 10-19.
- Moor, E. de (2012). $a^2 + b^2 = c^2$. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 31(2), 42-44.
- Schölvinc, M., L. Jansen & A. Minnaert (red.) (2011). *Passend onderwijs, anders beschikken. Budgetverdeling op basis van goed onderwijs en effectief leerkrachtgedrag*. Amersfoort: CPS Onderwijsontwikkeling en advies.
- Tribushinina, E. (2012). Adjective Semantics, World Knowledge and Visual Context: Comprehension of Size Terms by 2- to 7-Year-Old Dutch-Speaking Children. *Journal of Psycholinguistic Research*. <http://www.springerlink.com/content/3465185260q02r7p/>, opgevraagd op 10 juni 2012.
- Turkenburg, M. (2011). *De basis meester, Onderwijskwaliteit en basisvaardigheden*. Den Haag: Sociaal en Cultureel Planbureau.
- Ven, S. van der (2011). *The structure of executive functions and relations with early math learning*. Utrecht: Labor Grafimedia B.V.
- Ven, S. van der & E. Kroesbergen (2012). De ontwikkeling van strategiegebruik. *Leren vermenigvuldigen. Volgens Bartjens*, 31(5) 4-7.
- Willems, W. & K. Verbeek (2011). *Opbrengstgericht rekenonderwijs bij de invoering van de referentieniveaus in PO en VO*. Den Bosch: KPC Groep.
- Zanten, M. van, F. Barth, J. Faarts, A. van Gool & R. Keijzer (2009). *Kennisbasis Rekenen-Wiskunde voor de Lerarenopleiding Basisonderwijs*. Den Haag: HBO-raad.

Medewerk(st)ers en organisatoren

D. van der Aalsvoort	Hs. Saxion, Deveter
A. Aaten	Hs. Rotterdam
S. Abdellahi	Isafan House of Mathematics, Iran
M. Bakker	CPS, Amersfoort
M. Bakker	Flsme, Universiteit Utrecht
N. Boswinkel	SLO, Enschede
A. Bouwman	CPS, Amersfoort
H. Amse	Pabo Almere
J. Bodrij	ROC, Leiden
L. Boels	W4kangoeroe
N. Boswinkel	SLO, Enschede
R. Brandt-Bosman	CPS, Amersfoort
L. van den Broek	W4kangoeroe
G. Bruin-Muurling	Technische Universiteit, Eindhoven
M. van Bueren	Hs. Inholland, pabo Den Haag
K. Buijs	SLO, Enschede
D. van Eerde	Flsme, Universiteit Utrecht
Y. van der Eerden	OBD Noordwest, Hoorn
S. Eerhart	Flsme, Universiteit Utrecht
M.F. Fagginger Auer	Universiteit Leiden
M. van Geel	Universiteit Twente, Enschede
G. Gelderblom	Projectbureau Kwaliteit/PO-raad, Utrecht
S.L. Goei	Hs. Windesheim, Zwolle
A. van Gool	Panama/Flsme, Universiteit Utrecht
T. Goris	Fontys Lerarenopleiding, Tilburg/Flsme, Universiteit Utrecht
M. van Groenestijn	uitgeverij Zwijsen, Tilburg
B. Heijman	Panama/Flsme, Universiteit Utrecht
E. van Herpen	uitgeverij Zwijsen, Tilburg
M. van den Heuvel-Panhuizen	Flsme, Universiteit Utrecht
E. Hoogenberg	Hs. InHolland, Den Haag
K. Hoogland	APS, Utrecht
M. Hop	Cito, Arnhem
A. van den Hurk	CPS, Amersfoort
L. Jansen	CPS, Amersfoort
D. Janson	APS, Utrecht
R. Janssen	CED-Groep, Rotterdam
R. Keijzer	Flsme, Universiteit Utrecht/Hs. iPabo Amsterdam/Alkmaar
M. Klein Tank	SLO, Enschede
R. Kloppenburg	Flsme, Universiteit Utrecht
M. Konings	Hs. Utrecht
M. Koopman	Technische Universiteit, Eindhoven
M. Kool	Hs. Utrecht
A. Lek	SLO, Enschede
L. van der Leeuw	Bs. Het Palet, Arnhem
P. Leseman	Fac. Sociale Wetenschappen, Universiteit Utrecht

H. Logtenberg	CPS, Amersfoort
H. Loomans	Flsme, Universiteit Utrecht
J. van der Mark	APS, Utrecht
J. Mason	The Open University, United Kingdom
F. Meester	Pabo Almere
J. Menne	Menne Instituut, Baarn
F. Moerlands	Stichting Speciaal Onderwijs Tilburg/PARWO-project
E. de Moor	Panama
F. Munk	Hs. iPabo, Amsterdam / Alkmaar
A. Noteboom	SLO, Enschede
G. Peters	Kath. Universiteit Leuven, België
L. Prinsen	
C. Rauws	Flsme, Universiteit Utrecht
A. Ritfeld	Stichting Projecten Suriname
F. Scheltens	Universiteit Leiden
V. Schmidt	SLO, Enschede
M. Schölvink	CPS, Amersfoort
D. Sikkes	Bs. Het Palet, Nijmegen
S. Sjoers	APS, Utrecht
I. van der Sluis	CED-Groep, Rotterdam
J.W. Slijpe	Hs. iPabo Amsterdam / Alkmaar
J. Smit	Flsme, Universiteit Utrecht
H. van Son	KPC-Groep, Den Bosch
D. van der Straaten	PARWO-project
J. van Stralen	pabo Almere
B. Teunis	Universiteit Twente, Enschede
J. Torbeyns	Kath. Universiteit Leuven, België
E. Tribushinina	Dept. Nederlandse Taal en Cultuur, Universiteit Utrecht
M. Turkenburg	Sociaal en Cultureel Planbureau, Den Haag
M. Uwland	Panama/Flsme, Universiteit Utrecht
J. Vedder	NVORWO
H. Veltman	KPC-Groep, Den Bosch
S. van der Ven	Universiteit van Amsterdam
K. Verbeeck	KPC-Groep, Den Bosch
C. Verschure	Flsme, Universiteit Utrecht
M. Verschuren	KPC-Groep, Den Bosch
M. Verschoor	Hs. Utrecht/Zwijzen, Tilburg
B. Versteeg	Giralis Groep, Den Bosch
M. van Zanten	Panama/Flsme, Universiteit Utrecht/ Hs. Edith Stein, Hengelo