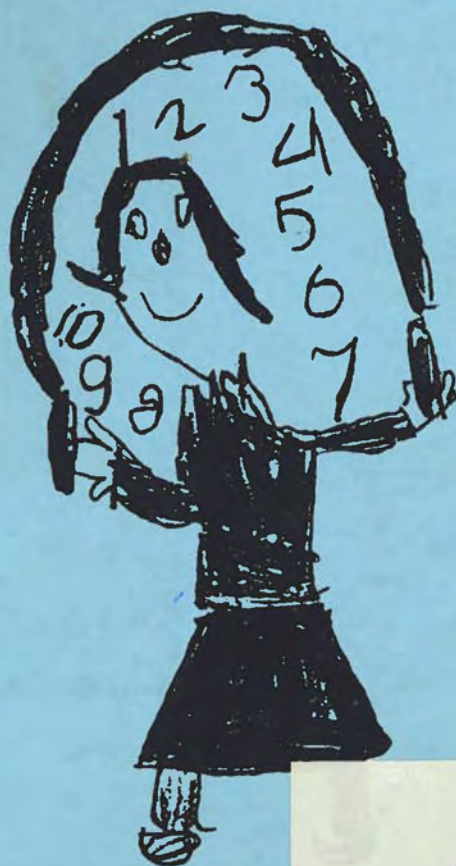


**realistisch
rekenonderwijs
aan jonge kinderen**



Freudenthal instituut
Archief

F.J. van den Brink

**realistisch
rekenonderwijs
aan jonge kinderen**

Rijksuniversiteit Groningen

realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen

**realistic arithmetic instruction
for young children**

(with a summary in English)

Proefschrift
ter verkrijging van het doctoraat in de
Psychologische, Pedagogische en
Sociologische Wetenschappen
aan de Rijksuniversiteit Groningen
op gezag van de
Rector Magnificus Dr. L. J. Engels
in het openbaar te verdedigen op
donderdag 23 november 1989
des namiddags te 1.15 uur precies

door

Frederik Jan van den Brink
geboren op 9 oktober 1942
te Amsterdam

Eerste promotor: Prof. dr. K.B. Koster
Tweede promotor: Prof. dr. A. Treffers

voor
Nelleke
Kikkienanje
en Ikos

© 1989 vakgroep onderzoek wiskundeonderwijs en onderwijscomputercentrum,
rijksuniversiteit utrecht

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door
middel van druk, fotokopie, microfilm of op welke andere wijze ook zonder
voorafgaande schriftelijke toestemming van de houder van het copyright.

Inhoud

Voorwoord

1	Inleiding	1
1.1	Aanleiding.....	1
1.2	Probleemstellingen.....	3
1.3	Onderzoek en afperkingen	4
1.4	Leeswijzer	5
2	Geschiedenis	6
2.1	Inleiding.....	6
2.1.1	Wiskobas en de Dreesschool klas 1.....	6
2.1.2	Integratieplan	6
2.1.3	Organisatie	6
2.2	Het onderwijsleerpakket 'Autobussen'.....	8
2.2.1	Van toneel naar kale pijlen.....	8
2.2.2	In de school uitgeprobeerd.....	8
2.2.3	Het pakket	10
2.2.4	In hoeverre werd het pakket geïntegreerd in het Dreesschoolonderwijs?	18
2.3	Hoe ging het verder?	19
2.3.1	Auteurs	19
2.3.2	Conferenties.....	19
2.3.3	Dreesschool (1975/1980).....	19
2.3.4	Problemen en evaluaties rondom de Autobussen.....	20
2.4	Noten	21
3	Leren rekenen.....	22
3.1	Inleiding.....	22
3.2	Contexten.....	22
3.2.1	Wat verstaan we onder 'context'?	22
3.2.2	Over de invloed van contexten op het leren rekenen.....	23
3.2.3	Soorten contexten en hun functie bij het leren rekenen	24
3.2.4	Menscontexten	24
3.2.5	Rekentoneel - leren als acteur en toeschouwer	25
3.2.6	Verschillen van mening over contexten, noties, misvattingen, begripsvorming, toepassen en modellen	25
3.3	Pijlentaal als voorbeeld van rekentaal.....	28
3.3.1	Wiskundige symbolen en wiskundige objecten.....	28
3.3.2	Refererende pijlentaal.....	30
3.3.3	De traditionele is-taal	32
3.3.4	Pijlentaal versus is-taal	34

3.3.5	Problemen oplossen	35
3.4	Oefenen.....	35
3.4.1	Redenen voor het oefenen en wijzen van oefenen.....	35
3.4.2	De vrije rekenkunst, een andere invulling van oefenen	35
3.5	Standpuntbepaling.....	36
3.5.1	Contexten.....	36
3.5.2	Pijlentaal.....	37
3.5.3	Oefenen.....	37
3.6	Noten	38
4	Rekenen onderwijzen.....	39
4.1	Opvattingen over leren rekenen en rekenonderwijs	39
4.2	Realistisch tegenover mechanistisch onderwijs.....	39
4.2.1	Zich realiseren en vakstructuren leren.....	39
4.2.2	Conflictsituaties en geleidelijkheid	41
4.2.3	Pijlentaal en is-taal.....	41
4.2.4	Oefenen: zelfstandig sommen maken en bedenken.....	42
4.2.5	Toepassen.....	42
4.3	Zich realiseren.....	42
4.3.1	'Zich realiseren' in ontwikkeling	42
4.3.2	Vier maal 'zich realiseren'	43
4.3.3	'Zich realiseren' in het onderwijs: construeren en confronteren.....	45
4.3.4	Realistische opvattingen in het buitenland	46
4.4	Contexten.....	47
4.4.1	Conflictsituaties	47
4.4.2	Zingevende en zin ontnemende contexten	48
4.4.3	Voorstellingen.....	49
4.4.4	Beeldende contexten.....	49
4.4.5	Rekencontext	51
4.4.6	Rekenlessituatie.....	51
4.4.7	Dynamische en statische contexten.....	52
4.5	Pijlentaal.....	52
4.5.1	Prototypische onderwijsleergang voor het optellen en aftrekken	52
4.5.2	Pijlentaal en mathematiseren.....	55
4.6	Oefenen.....	57
4.7	Samenvatting.....	57
4.8	Noten	58
5	Onderwijs onderzoeken.....	59
5.1	Inleiding.....	59
5.2	Onderzoekersperspectief.....	59
5.2.1	Andere manieren van kennen, andere kennis.....	59

5.2.2	'Actors perspective' en 'observers perspective' bij het leren tellen.....	60
5.2.3	Rechtvaardiging van dit onderzoek: objectiviteit.....	61
5.3	Leerlingperspectief	62
5.3.1	Wederzijdse observatie.....	62
5.3.2	Onderwijs als bron van onderzoeksmethoden en -technieken	64
5.4	Onderwijzersperspectief	65
5.4.1	Aanbevelingen voor onderwijs.....	65
5.4.2	Gebruikswaarde van het onderzoeksobject.....	66
5.4.3	Controleschool of gelijkwaardige partner?	67
5.4.4	Herhaalbaar of reconstrueerbaar	67
5.5	Leerstof in de praktijk van het onderwijs: methodegebruik en taken tellen	68
5.6	Samenvatting.....	68
5.7	Noten	68
6	Drie projecten van ontwikkelingsonderzoek	71
6.1	Inleiding.....	71
6.1.1	Veelvormig onderzoek en onderzoeksvragen.....	71
6.1.2	Het onderwijsleerpakket in ontwikkeling	72
6.2	Cito-project	73
6.2.1	Toetsconstructie.....	73
6.2.2	Toetsafname.....	77
6.2.3	Toetsresultaten	78
6.2.4	Discussie.....	78
6.2.5	Conclusies.....	81
6.2.6	Onderzoeksvraag	81
6.3	Onderwijsevaluatie op de Dreesschool	81
6.3.1	Evaluatiebesprekingen.....	81
6.3.2	Drie onderwijzeressen (1974/1975)	82
6.3.3	Twee onderwijzeressen (1976/1977).....	85
6.3.4	Eén onderwijzeres (1977/1978)	86
6.3.5	Onderzoeksvraag	86
6.4	Hypothesenvormend onderzoek	86
6.4.1	Noties van één kind en één notie van meerdere kinderen	86
6.4.2	Noties van individuele kleuters	87
6.4.3	Noties bij meerdere eersteklassers.....	89
6.4.4	Onderzoeksvraag	91
6.5	Conclusies uit de drie onderzoeksprojecten	91
6.5.1	Cito-project	91
6.5.2	Onderwijsevaluatie op de Dreesschool	92
6.5.3	Hypothesenvormend onderzoek	93
6.5.4	Samenvatting: de onderzoeksvragen beantwoord	94
6.6	Noten	95

7	Vergelijkend onderzoek	
	Dreesschool / Nieuwlandschool	98
7.1	Inleiding en onderzoeksopzet	98
7.1.1	Onderzoeksvragen	98
7.1.2	Onderzoeksopzet	99
7.2	Onderzoeksonderdeel onderwijspraktijk	102
7.2.1	Inleiding	102
7.2.2	De onderwijzeressen	102
7.2.3	De rekenonderwerpen	109
7.2.4	De rekentaken geteld	118
7.2.5	Samenvattende conclusies	121
7.3	Noten	123
8	Onderzoeksonderdeel	
	leren met contexten en pijlentaal	124
8.1	Contexten	124
8.1.1	Mens-diercontext en voorwerpcontext	124
8.1.2	Eenzijdigheden bij de introductie van het optellen en aftrekken	129
8.2	Conflictsituaties	131
8.3	Pijlentaal	133
8.3.1	Bewegingen en pijlen in plaatjes	133
8.3.2	Attenderende pijlentaal in redactie-opgaven	137
8.3.3	Misvattingen bij pijlen	143
8.4	Oefenen en de vrije rekenkunst	152
8.4.1	Oefenen: eindonderwijs?	152
8.4.2	Onderzoek	152
8.4.3	Conclusies en aanbevelingen	161
8.5	Toepassen	161
8.5.1	Rekenkennis wordt niet vanzelf toegepast	161
8.5.2	Kale en versierde pijlen zijn gelijkwaardig	162
8.5.3	Toepassen van het cijferen in contexten van vroeger	163
8.6	Noten	164
9	Onderzoeksonderdeel	
	de kinderen als rekenboekauteur	165
9.1	Onderwijsverschillen en onderzoeksvraag	165
9.2	Opzet van de twee klasserekenboeken (Dr en Nr)	165
9.3	Specificering van de onderzoeksvraag	167
9.4	Kenmerken van de klasserekenboeken Dr en Nr	168
9.4.1	Contexten	168
9.4.2	Rekentalen	172
9.4.3	Oefenen	173

9.5	Samenvattende conclusies in het licht van het gegeven onderwijs.....	177
9.6	Noten	179
10	Onderzoeksonderdeel	
	algemene rekenvaardigheden en stipsommen.....	180
10.1	Inleiding.....	180
10.2	Onderzoeksvragen.....	180
10.3	Opzet: dezelfde rekenopgaven door het jaar heen	181
10.4	Getoetste onderwerpen.....	181
	10.4.1 Akoestisch tellen	183
	10.4.2 Afzien van het natuurlijke tellen	183
	10.4.3 Getallendictees.....	185
	10.4.4 Tellen van hoeveelheden	187
	10.4.5 Kale directe sommen in de is-taal	189
	10.4.6 Kale stipsommen (gewone en omgekeerde) in de is-taal en in de pijlentaal.....	189
	10.4.7 Vlekkensommen in de is-taal.....	192
	10.4.8 Complexe stipsommen in de is-taal en in de pijlentaal	194
10.5	Samenvattende conclusies.....	197
10.6	Noot	198
11	Conclusies en aanbevelingen.....	199
11.1	Inleiding.....	199
11.2	Onze leertheoretische opvattingen getoetst	199
	11.2.1 Leren met contexten	199
	11.2.2 Leren met pijlentaal.....	201
	11.2.3 Leren door te oefenen	202
11.3	De onderzoeksvragen beantwoord.....	202
	11.3.1 Beeldende contexten en/of specifiek rekenmateriaal.....	203
	11.3.2 Conflictsituaties en/of geleidelijke voortgang	203
	11.3.3 Pijlentaal en/of is-taal	204
	11.3.4 Vrije rekenkunst en/of sommen maken.....	205
	11.3.5 Toepassen - ja of nee	207
	11.3.6 Samenvattende conclusies.....	208
11.4	Slotwoord.....	208
12	Summary	210
13	Literatuur	214
	Curriculum vitae	222

Voorwoord

Onderzoek van het leren rekenen van jonge kinderen en van het rekenonderwijs aan hen staat in de gevarieerde belangstelling van psychologen, onderwijskundigen en vakdidactici.

Het onderzoek dat in dit boek beschreven wordt, is vanuit het praktische onderwijsveld tot stand gekomen en is daardoor niet eenvoudig geweest. Jonge kinderen immers schieten met hun antwoorden en reacties allerlei kanten op die vaak niet te voorspellen zijn, maar waaruit tegelijk aanzetten tot een nieuw soort rekenonderwijs kunnen worden geput.

In dit kader heb ik veel te danken aan de kinderen van de Wiskobas-ontwerpschool (de Dr.W.Dreesschool) en de kleuterschool (De Iris), beide in Arnhem. Ook mijn eigen kinderen Kikkienanje en Ikos en hun vrienden en vriendinnen noem ik hier.

Zij waren het vooral die me op talrijke ideeën voor onderwijs en onderzoek brachten. Bedankt daarvoor.

Naast het verzamelen van onderwijssuggesties op grond van de impulsieve ideeën van kinderen ging het in dit onderzoek om deze suggesties hanteerbaar te maken voor de onderwijsgevende.

Om dit doel te bereiken ben ik veel dank verschuldigd aan de leerkrachten van de Dreesschool: aan Lydie Wind, Tineke Wijma en wijlen Cathrien de Jonge, aan Jannie Bijl, mevrouw Gerretsen, Marjan Buenk, Abbes Dekker en in het bijzonder aan Trudy van Schadewijk. Tevens noem ik hier: Gradie Broens en Sonja Reineman, de kleuterleidsters van De Iris. Van hen leerde ik veel over speels onderwijs aan jonge kinderen. Ook Henriëtte Buenk van de Nieuwlandschool in Dieren die zo intens met het vergelijkend onderzoek meewerkte, wil ik bedanken.

Dan was er 'thuis' in Utrecht het Wiskobasteam zonder welk dit werk nooit tot stand was gekomen.

Allereerst professor Freudenthal die mij in de ontwerpperiode met allerlei ideeën stimuleerde in het praktisch werk op de scholen. Ook bedank ik Adri Treffers voor het vertrouwen dat hij in mijn ontwerpwerk stelde, Fred Goffree voor zijn vindingrijke ideeën en Edu Wijdeveld voor zijn frappante gelijkgestemdheid in het ontwerpen.

Ik roep ook het ontwerpersteam in herinnering bestaande uit Johan van Bruggen, Leen Streefland en Hans ter Heege met wie ik nauw samenwerkte op de Dreesschool. Ik weet wel: het is vergane glorie, maar het is gebeurd en ik kijk met voldoening en dankbaarheid op die samenwerking terug.

Veel dank ben ik schuldig aan mijn promotor K.B.Koster voor zijn stimulerende overdenkingen betreffende de onderzoekssituaties en zijn talrijke suggesties daaromtrent. Mijn tweede promotor A.Treffers wil ik bedanken voor het doornemen van het manuscript en de inhoudelijke opmerkingen die hij daarbij maakte.

In dit kader moet ik ook Nanda Querelle en Nelleke van den Brink-van den Boom noemen met wie ik vaak van gedachten wisselde over verschillende onderwerpen die in het onderwijs en onderzoek aan bod kwamen. En de vrienden en bekenden die mij terloops op ideeën hebben gebracht.

Tenslotte degene die de ondankbare taak had om als eerste de geschreven teksten te verwerken tot leesbare gehelen: Gonne van den Bogaard.

Verder in het bijzonder Sylvia Pieters die in korte tijd en onder grote werkdruk de tekst doornam en verwerkte.

Zij die aan de totstandkoming van dit boek bijdroegen, allemaal bedankt voor het werk.

Jan van den Brink
Utrecht, oktober 1989

1 Inleiding

1.1 Aanleiding

Aanleiding tot deze studie was de vraag of een nieuw ontwikkeld rekenprogramma voor klas 1 'beter', in ieder geval: 'niet slechter', was dan het bestaande traditionele rekenprogramma.

In groep 3 van de basisschool (de voormalige klas 1 van de lagere school) had het rekenonderwijs tot voor kort een overwegend formeel mechanistisch karakter gehad. Het optellen en aftrekken werden geïntroduceerd met voorwerpen zoals blokjes, staafjes en fiches, die de sommen illustreerden; de kinderen leerden het materiaal volgens vaste regels gebruiken en elk type som had zijn eigen hanteringsregel. De gebruikte rekentaal waarin de sommen werden geschreven, was overwegend de 'is-taal', de rekentaal met het is-gelijk-teken:

$3 + 2 =$, $5 - 4 =$, $10 + . = 12$. Vooral het herhaald oefenen met rijtjes sommen was kenmerkend voor het mechanistische rekenonderwijs. Het oefenen nam over het schooljaar bekeken de meeste rekentijd in beslag. Het was bijvoorbeeld gebruikelijk, dat een leerling gemiddeld ruim 2000 sommen maakte in de laatste drie maanden van het schooljaar. Maar ondanks het vele oefenen namen de rekenprestaties niet toe.

Door de auteur is in het kader van het Wiskobas-project voor klas 1 onder meer een prototypische onderwijsleergang voor het optellen en aftrekken ontwikkeld, die we om redenen die straks duidelijk worden, 'realistisch' noemen.

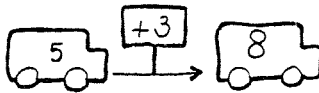
Er zijn vijf ingrijpende verschillen tussen de mechanistische en de prototypische realistische leergang.

1. In het prototype van een realistisch programma worden vakstructuren aangeleerd met behulp van contexten, die door kinderen kunnen worden gespeeld (de zogenaamde menscontexten en speelgoedcontexten). In het mechanistische onderwijs worden de vakstructuren aangeleerd met behulp van rekenmateriaal, zoals rekenstaafjes en identieke plaatjes.

In de realistische leergang willen we het optellen en aftrekken introduceren met het in- en uitstappen bij een autobushalte, omdat we daarmee menen bij de noties van kinderen aan te sluiten en sommige daarvan door toneelspel te kunnen uitbreiden tot gemeenschappelijke opvattingen onder alle kinderen van de klas. Het gaat ons erom, dat kinderen zich de situatie zullen 'realiseren'; vandaar de naam 'realistisch' rekenonderwijs.

2. We willen conflictsituaties uitlokken om wiskundige begrippen beter bewust te laten worden, tegenover de mechanistische geleidelijkheid: de voortgang door rijtjes sommen, die in kleine stapjes steeds moeilijker worden.
3. Het gebruik van de pijlentaal om de gebeurtenissen in de gespeelde contexten vast te leggen tegenover de is-taal waarvan de symbolen gedetailleerd worden gekoppeld aan handelingen met het rekenmateriaal.
De pijlentaal dient in onze leergang als voorbereiding op de is-taal.

Van



via $5 \xrightarrow{+3} = 8$

naar $5 + 3 = 8$.

4. Tegenover het mechanistische oefenen als het zelfstandig en mechanisch maken van talrijke sommen, stellen wij de vrije rekenkunst: het op eigen initiatief bedenken en ontwerpen van rekenopdrachten.
5. In het mechanistische onderwijs is het toepassen een extra oefening voor het cijferen. Het toepassingsgebied moet daarom stroken met het cijferen. Wij stellen daartegenover, dat bij toepassen primair de specifieke (on)hebbelijkheden van het toepassingsgebied in het geding zijn waaraan het cijferen zich dient te onderwerpen en niet andersom.

De kerngedachten achter de realistische onderwijsleergang zijn, dat het rekenonderwijs zal aansluiten bij de noties die kinderen al bezitten, dat de gebruikte pijlentaal qua vorm niet alleen naar allerlei zinvolle beeldende contexten refereert, maar bovendien naar de is-taal kan verwijzen, dat leren rekenen deels via conflicten kan verlopen, dat het oefenen met rijtjes sommen beperkt zal kunnen worden zonder verlies aan rekenvaardigheid en dat het cijferen dienstbaar zal worden aangepast aan de eisen van toepassingsgebieden.

1.2 Probleemstellingen

We veronderstellen met onze onderwijsleergang de leerprocessen van de kinderen te verbeteren. Maar we zijn daar niet echt zeker van. Bij elk van de vijf verschillen kunnen vraagtekens worden geplaatst.

* *contexten of rekenmateriaal?*

- Zal de introductie van het optellen en aftrekken met gespeelde contexten sneller gaan, dan met het traditionele rekenmateriaal?
- Blijven de gespeelde contexten in herinnering, zodat we er later bij de toepassingen op terug kunnen komen?

* *conflicten of geleidelijkheid?*

- Zullen we de fouten van kinderen kunnen gebruiken om verbanden bewust te maken in plaats van fouten koste wat kost proberen te vermijden? En met welke onderwerpen kunnen we dit in de leergang arrangeren?
- Of is de stapsgewijze geleidelijke voortgang toch een betere keuze dan een schoksgewijze?

* *pijlentaal of is-taal?*

- Welke sterke en zwakke kanten heeft de realistische pijlentaal in vergelijking met de mechanistische is-taal?
- Wordt het verband tussen autobus en pijlentaal gezien door de kinderen? En kan de pijlentaal duidelijkheid verschaffen in ingewikkelde autobusopgaven?
- Zullen de kinderen anderzijds niet blijvend vasthouden aan de autobus-context door de pijlentaal?
- Is het eigenlijk wel mogelijk om van de pijlentaal op de is-taal te komen?

* *vrije rekenkunst of sommen maken?*

- Als kinderen de vrijheid krijgen tot vrije rekenkunst bedenken ze dan slechts eenvoudige, te gemakkelijke sommetjes?
- Zal die vrijheid leiden tot een vermindering van de cijfervaardigheden? Is met andere woorden de verplichting om een bepaalde hoeveelheid oefensommen te maken toch nodig?

* *toepassen - ja of nee?*

- Zal formele rekenkennis die is opgedaan met kaal rekenmateriaal spontaan worden toegepast in andere contexten?
- Moet er aandacht worden besteed aan verschillende toepassingsvormen van het cijferen (in het redenerend rekenen, in beeldende contexten, in eigen producties, in typen sommen)?

1.3 Onderzoek en afperkingen

Het waren gewetensvragen van de ontwerper waarop niet direct een antwoord gegeven kon worden, maar die in vier onderzoeksprojecten aan de orde worden gesteld.

De eerste drie projecten hebben betrekking op het leren rekenen van jonge kinderen en hoe het onderwijs daarop zou moeten inspelen. Ze werden uitgevoerd op één school, de Dr. Willem Dreesschool, de Wiskobasontwerpschool in Arnhem.

Maar om de bovengenoemde vragen over de verschilpunten tussen de realistische en de mechanistische onderwijsleergang te beantwoorden waren bijpassende onderwijsomgevingen nodig. Daarom is voor een langlopend onderzoek gekozen, dat gedurende één jaar werd verricht op twee scholen: de voornoemde Dreesschool (D) en de Nieuwlandschool (N) te Dieren die met een traditionele mechanistische rekenmethode (Niveaucursus Rekenen) werkte. Het leren van jonge kinderen en het daarop inspeliende onderwijs konden we nu vergelijkenderwijs onderzoeken.

Object van onderzoek waren de contexten, de materialen en de rekentalen die in de door ons ontworpen realistische onderwijsleergang op de D en in de mechanistische onderwijsleergang op de N werden gebruikt om het optellen en aftrekken aan te leren.

Als criteriummaten hanteerden we de vrije produkties van opgaven, de algemene rekenvaardigheden en de stipsommen. Zij werden gebruikt om de leerprestaties van de kinderen op de twee scholen te vergelijken.

Tenslotte: waarover gaat deze studie niet?

- * Ze gaat niet over een strikte en exclusieve vergelijking van de pijlentaal en de is-taal, maar over een afweging van de pijlentaal met de is-taal: waarin kunnen ze elkaar aanvullen? De pijlentaal wordt beschouwd als exemplarisch voorbeeld van een refererende rekentaal, niet als universeel model voor het optellen en aftrekken.
- * We willen zeker niet de pijlentaal onderzoeken als vervanging van of als voorbereiding op kale complexe stipsommen in de is-taal.
- * De studie gaat niet over rekenmanieren van kinderen op zich, maar staat altijd in relatie met het gegeven onderwijs. Het is de rekenvaardigheid van leerlingen die als criteriummaat is gekozen om de twee soorten onderwijs te vergelijken.

1.4 Leeswijzer

In hoofdstuk 2 schetsen we kort de geschiedenis van het ontwikkel- en onderzoekswerk.

Hoofdstuk 3 behandelt opvattingen over het leren rekenen van jonge kinderen.

Hoofdstuk 4 geeft een didactische realisering van onze ideeën over het leren rekenen.

Onderzoeksopvattingen en -methodologie komen in hoofdstuk 5 aan bod.

Hoofdstuk 6 toont de consequenties van deze onderzoeksopvattingen, aangevuld met een exposé van drie soorten onderzoek rond autobus en pijlen.

In hoofdstuk 7 wordt het vergelijkend onderzoek op de Dreesschool en de Nieuwlandschool ingeleid en wordt het onderzoek van het gegeven onderwijs op de beide scholen beschreven.

In de daarop volgende hoofdstukken worden steeds onderdelen van het vergelijkend onderzoek besproken. De hoofdstukken 8, 9 en 10 geven de leerlingprestaties weer bij opgaven gesteld in respectievelijk de contexten en de rekentalen, de vrije produkties van opgaven, de algemene rekenvaardigheden en de stipsommen.

Tenslotte volgen in hoofdstuk 11 de conclusies en aanbevelingen voor het onderwijs naar aanleiding van dit onderzoek.

2 Geschiedenis

2.1 Inleiding

2.1.1 *Wiskobas en de Dreesschool klas 1*

Voor een gedetailleerde geschiedbeschrijving van het IOWO en met name Wiskobas - de afdeling voor de lagere school en kleuterschool - verwijzen we naar De Jong (1986, p. 11-42). Hier wordt volstaan met de beschrijving van de ontwikkeling van het reken- en wiskundeonderwijs in de eerste klassen van de Dr. Willem Dreesschool te Arnhem, gedurende de jaren 1971 t/m 1983. We richten ons daarbij vooral op het pakket 'Autobussen', de prototypische onderwijsleergang voor het optellen en aftrekken.

2.1.2 *Integratieplan*

Globaal kunnen in de periode van 1971 t/m 1983 vier fasen in de onderwijs-ontwikkeling op de Dreesschool aangegeven worden. De exploratiefase, waarin losse wiskundige onderwerpen werden uitgetoetst; de integratiefase, waarin een onderwijsleergang voor de hele school - het integratieplan - werd ontwikkeld, en de afwikkelings- en onderzoeksfase waarin dat plan nader bekritiseerd en onderzocht werd (zie fig. 2.1).

De fasen overlappen elkaar. Met name het onderzoek kwam in feite gedurende de hele periode voor: bij het ontwerpen, ontwikkelen en evalueren van het integratieplan.

2.1.3 *Organisatie*

In augustus 1973 startte het werk. Er waren raamplannen gemaakt voor alle klassen, die een globaal overzicht gaven van wat er gedurende het schooljaar aan bod zou komen. Het raamplan verdeelde het schooljaar in vijf perioden van elk zes weken.

In het jaar 1973/1974 ontwikkelden de klassen 1, 3 en 5 met behulp van het raamplan het integratieplan en in 1974/1975 kwamen de klassen 2, 4 en 6 aan de beurt.

Om de zes weken was één van de drie eerste klassen 'voorloper' in deze ontwikkeling. Ongeveer twee weken later werd de voorloper gevolgd door de twee andere klassen.

Het wisselen van voorloper werd mogelijk gemaakt door een vier-weekse rustfase. In die fase vonden nabesprekingen plaats van de voorgaande periode en werden voorbereidingen getroffen voor de komende zes weken. Deze besprekingen werden gehouden op de Dreesschool met het voltallige Dreesschool- en Wiskobasteam.

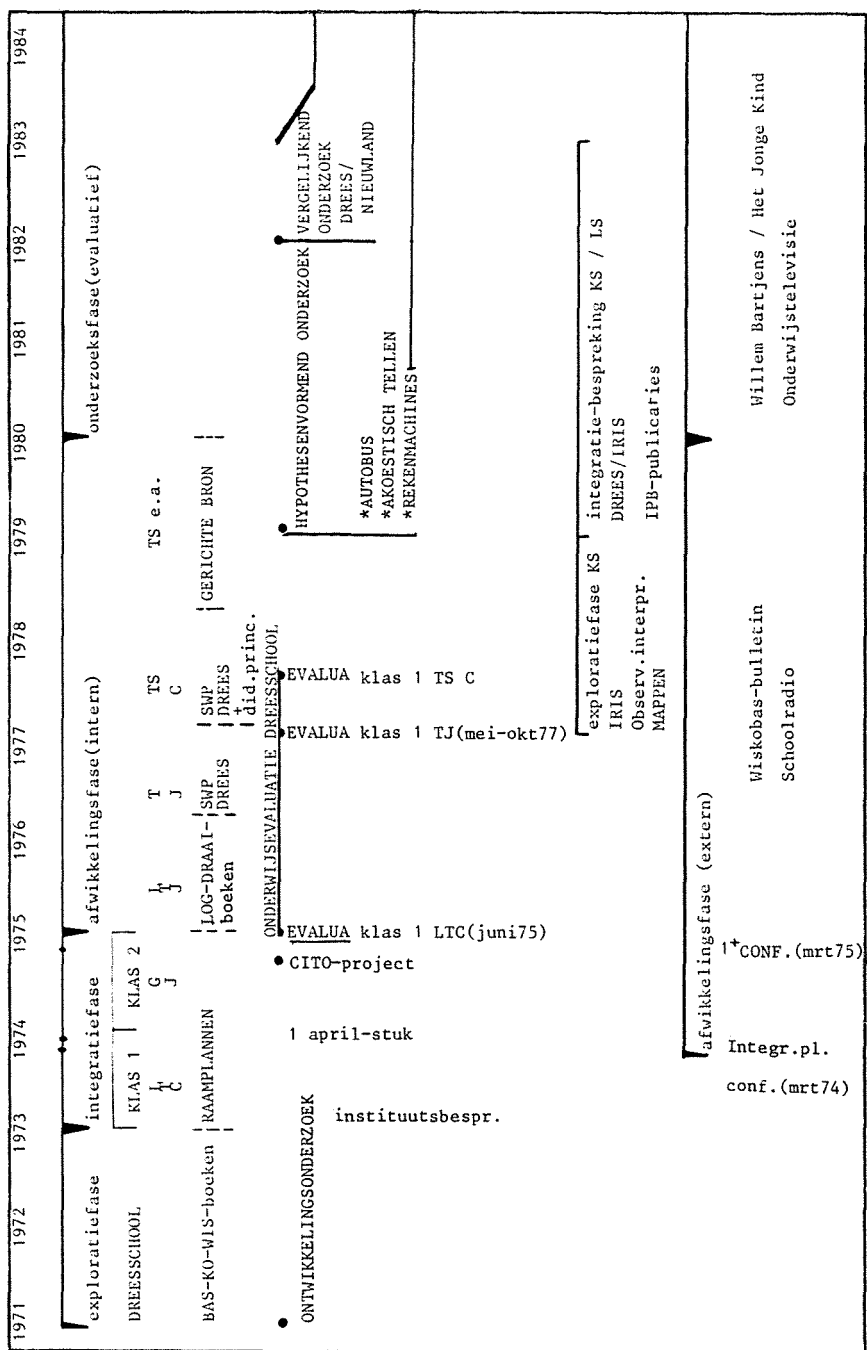


fig. 2.1 tijdlijn van 1971 tot 1984

De ontwerpers kregen de zorg voor de voortgang van het wiskundeonderwijs op de Dreesschool. Zij voorzagen de school van ideeën en materialen en brachten in het Wiskobasteam regelmatig verslag uit van hun ervaringen met kinderen over werkbladen en over geobserveerd onderwijs. Het team leverde hierop commentaar, gaf kritiek en deed suggesties (1).

2.2 Het onderwijsleerpakket 'Autobussen'

2.2.1 Van toneel naar kale pijlen

Op bovengenoemde wijze werd ook het pakket Autobussen ontworpen, het belangrijkste onderdeel van het ontwikkelde integratieplan voor klas 1. Het bevatte een onderwijsleergang voor het optellen en aftrekken, dat met toneelspel begon en circa drie maanden later met kale pijlsommen eindigde. Het pakket gold als een speelse voorbereiding op de traditionele sommen met het is-gelijk-teken.

Rondom Kerst werden in de klas autobusritjes gespeeld die in zogenaamde autobuspijlen werden vastgelegd (zie fig. 2.2 en 2.3).

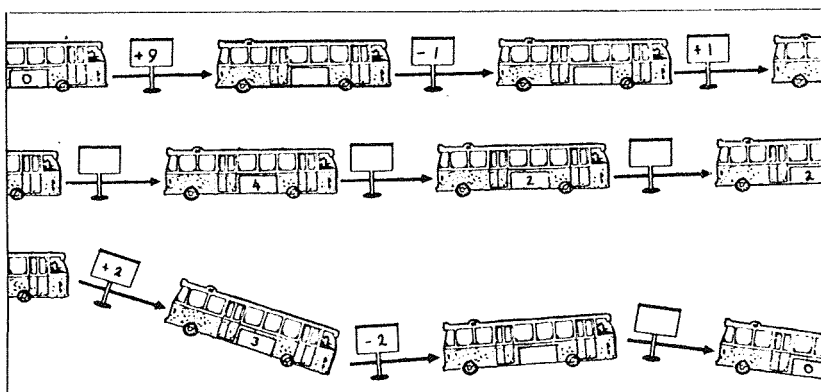


fig. 2.2 werkblad autobuspijlen

Door ook andere toneelspelen uit te voeren en in pijlentaal te noteren, kwamen de pijlen los van de autobuscontext te staan. Drie maanden later werden ze gebruikt voor kale oefensommen.

2.2.2 In de school uitgetoetst

Het ontwerpen van het pakket verliep in een aantal stappen.

1. de geboorte van de kerngedachte

Het didactisch probleem waarvoor de ontwerper zich bij het onderwijs in het optellen en aftrekken gesteld zag, was om 'iets in de wereld van kinderen' te vinden dat aan twee eisen zou voldoen: het optellen en aftrekken zou gelijktijdig moeten worden gedemonstreerd en de kinderen zouden direct

de bedoelde hoofdbewerkingen moeten herkennen; ze zouden de operaties dus niet zelf hoeven te bedenken of arbitrair af te spreken.

De gedachte aan een autobus kwam onverwachts 's nachts in 1973.

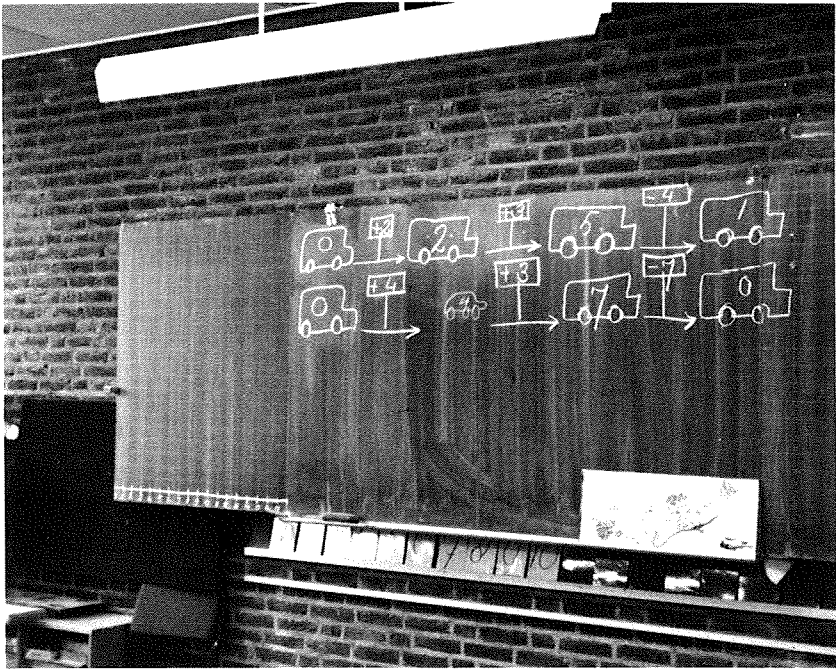


fig. 2.3 schoolbord met autobuspijlen

2. materiaal en werkvormen ontwerpen tezamen met enkele kinderen
Het idee werd verwezenlijkt in een aantal werkbladen en in de onderwijs-suggestie om kinderen busritten in de klas te laten maken. De ontworpen bladen werden voortdurend getoetst in gesprekken met één of twee kinderen om na te gaan hoe het autobus-idee werkte.
Het ging daarbij om de vraag of kinderen wel direct het optellen en aftrekken in deze context zouden herkennen en welke problemen er bij de pijlennotatie zouden ontstaan.
3. de voorloopklas
Het resultaat - een pakket suggesties en werkbladen - werd uitgetoetst in de voorloopklas. Het ging nu om de daadwerkelijke uitvoering in klasverband: er werd door een groepje kinderen een autobusrit gespeeld, de werkbladen werden gemaakt.

Via observaties in de klas stelde de ontwerper allerlei discussiepunten vast die hij in bijeenkomsten met medewerkers op het IOWO besprak. Hier volgen enkele van de allereerste opmerkingen die over het pakket Autobussen zijn gemaakt:

'Essentieel is dat de passagiers in de bus wel concreet, maar niet manipuleerbaar zijn. Je kunt ze alleen mentaal manipuleren'.
'Het rekenen is meer zien van dingen dan hanteren van de dingen'.
'Er moeten verhalen bij het rekenen komen'.
'Zou het niet verstandig zijn ook de echte wereld erbij te betrekken?'
'Je moet alles in één 'wereldje' plaatsen omdat de gedachtenwerelden van kinderen zo verschillend zijn en omdat één 'wereldje' vlot te veranderen is.'

4. de twee vervolklassen

Observaties tijdens het onderwijs in de voorloopklas, gesprekken met enkele leerlingen en de besprekingen op het IOWO leidden tot het herschrijven van de eerste versie. Het gereviseerde pakket werd met kanttekeningen aan de twee andere klassen gegeven om het op hun beurt uit te proberen.

Observaties in de klassen maakten duidelijk, dat er bij de drie onderwijzeressen (Cathrien, Lydie en Tineke) verschillen in onderwijsopvatting bestonden.

T. begon inderdaad met het autobustoneelspel. Maar C. vond dat de kinderen de opgaven eerst met de vingers moesten oplossen. En L. startte met een autobusverhaal en liet daarbij fiches leggen.

Deze en andere opmerkelijke verschillen werden verwerkt in het pakket of toegevoegd als voetnoten en zo kreeg het zijn uiteindelijke vorm.

2.2.3 *Het pakket*

Achtereenvolgens kwamen de volgende ideeën tot stand die uiteindelijk aan de inhoud en vorm van het pakket ten grondslag werden gelegd.

1. rekentoneel

Bij gespeelde autobusritjes in de klas was het een vanzelfsprekendheid, dat er naast 'instappen', ook weer eens moest worden 'uitgestapt'. Optellen en aftrekken werden dus in de autobuscontext tegelijk aangeboden (zie fig. 2.4 en 2.5).



fig. 2.4 chauffeur met pet

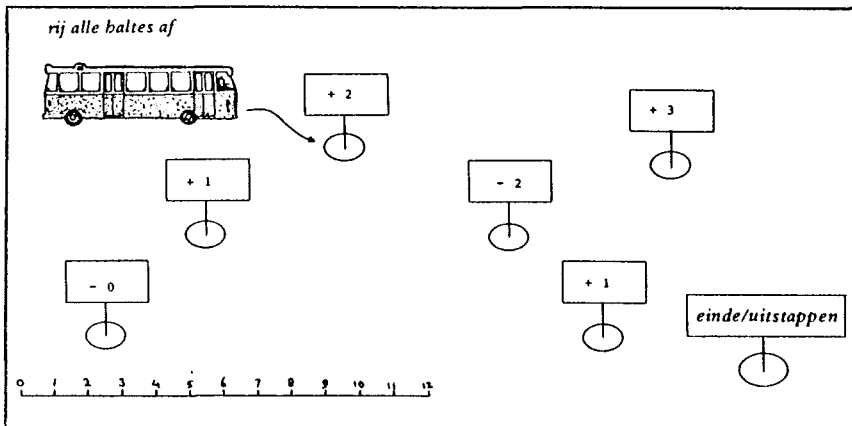


fig. 2.5 werkblad Rij alle haltes af

2. meerdere dynamische situaties

De beide hoofdbewerkingen werden niet alleen met de autobuscontext ontwikkeld, maar ook met andere situaties waarin sprake was van veranderingen: de wachtkamer van de tandarts, het postkantoor, een winkel in de buurt. Er werd een spelletje kegelen gespeeld, gesjoeld (zie fig. 2.6, 2.7 en 2.8).



fig. 2.6 Trudy en kegelen



fig. 2.7 sjoelen

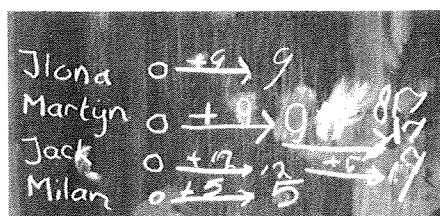


fig. 2.8 puntentelling op bord

Kaarsen op een taart werden aangestoken en uitgeblazen (fig. 2.9), enzo-voorts.

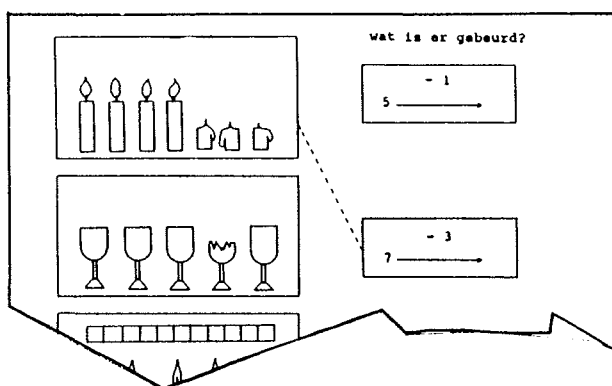


fig. 2.9 werkblad kaarsen

En bij al deze dynamische situaties werd getracht de veranderingen in de pijlentaal vast te leggen.

3. zich voorstellen

Met een aantal didactische handgrepen probeerden we de kinderen ertoe te brengen om zich bij elke context een voorstelling te maken van de activiteiten die ons inziens de twee hoofdbewerkingen inleidden.

Toneelvoorstellingen werden geënceneerd; door gebrek aan fiches werd met onzichtbare hoeveelheden gewerkt; passagiers die aan de andere kant van de bus zaten, waren niet te zien, maar wel voor te stellen (fig. 2.10).

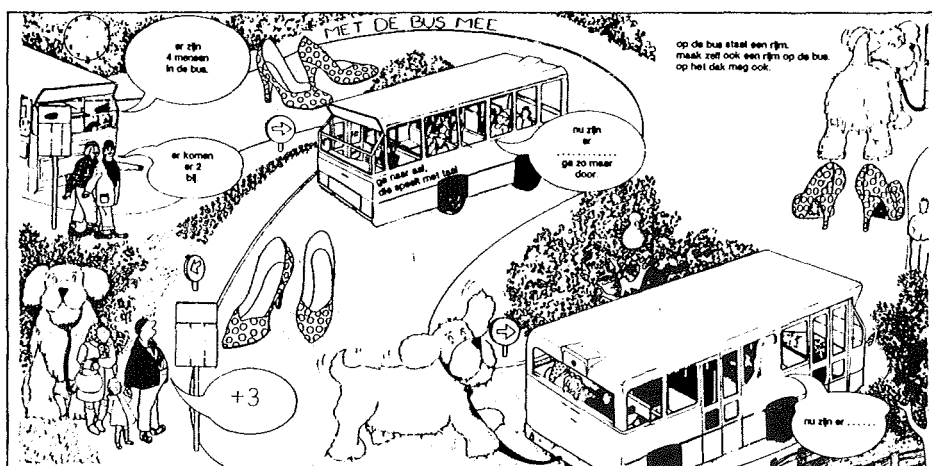


fig. 2.10 autobuswerkblad uit tv-serie Tel-taalverhaal 2

4. beeldstrips

Beeldstrips werden ontworpen, die om een bijbehorend verhaal vroegen (fig. 2.11 en 2.12).

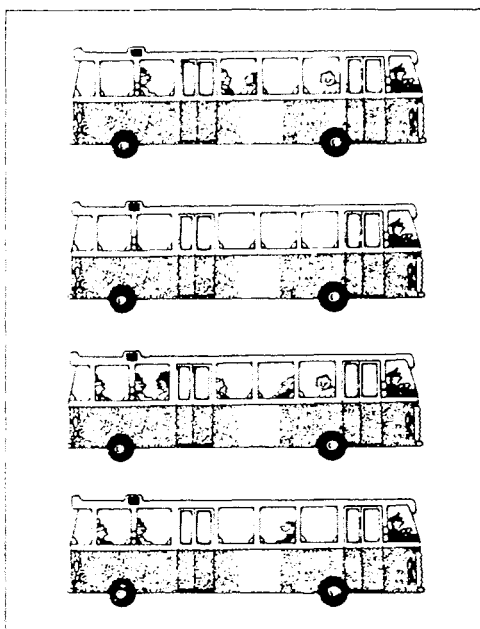


fig. 2.11 werkblad, serie van vier bussen met passagiers

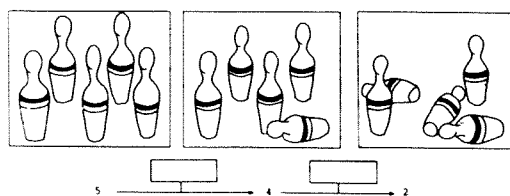


fig. 2.12 werkblad, serie van drie tekeningen met kegels

5. plaatje, praatje en de pijlentaal

Verbanden tussen plaatjes en pijlensommen moesten worden gezocht en besproken (fig. 2.13 en 2.14).

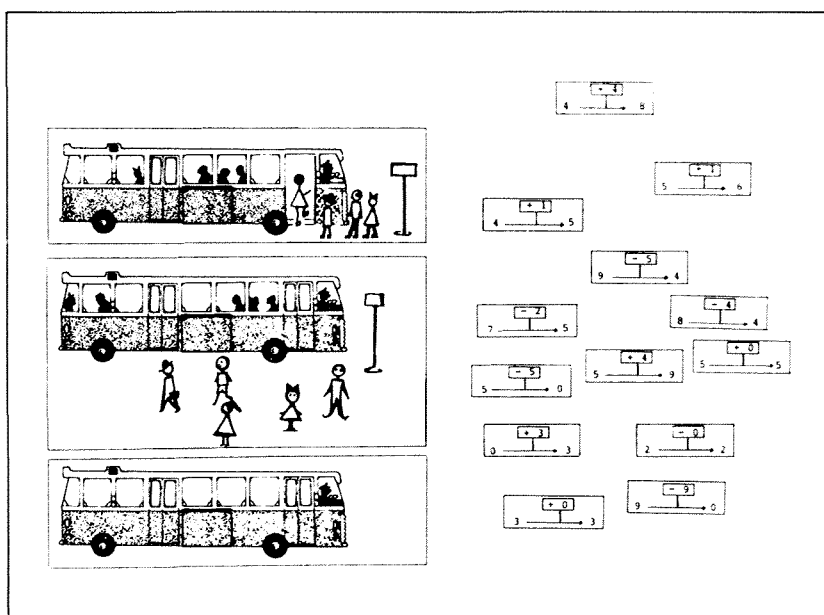


fig. 2.13 bus met passagiers en pijlensommen: zoek bij elk plaatje één of meer pijlensommen en bedenk een verhaal

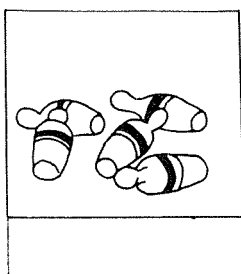


fig. 2.14 plaatje van omgevallen kegels: wat kan er zijn gebeurd?

6. aansluiting met de kleuterschool (2)

In het spelen en in het gebruikte speelgoed werd aansluiting gezocht met de kleuterschool.

Op het speelplein was een doolhof van gekleurde lijnen getekend. Kleuters liepen als bussen langs die lijnen om passagiers te vervoeren (autobus-lijnenspel).

Er waren verschillende soorten bussen op school: de kar, waarmee kleuters op het speelplein reden en de dubbeldekker in de speelgoedkist.

7. contextgebonden getallen

Het idee ontstond, dat getallen niet contextvrij werden gebruikt door kinderen. Zelfs kale getallen waren aan een context gebonden: de rekencontext met zijn regels en handelingen.

8. sommen van kinderen

Kinderen bedachten zelf aparte soorten sommen. Daarop werd ook in het pakket Autobussen gewezen. Bij een autobusstipsom, bijvoorbeeld:

$$5 \text{ -----} \rightarrow 8$$

werden door kinderen verschillende 'haltesommen' bedacht, zoals: + 3, maar ook - 5 + 8 , - 2 + 5 en + 5 - 2.

9. van pijl naar is-teken

Er werden verschillende koppelingen gevonden om van de pijlen naar de is-notatie te komen. Bijvoorbeeld (fig. 2.15):

pijlentaal	9	$\xrightarrow{+2}$	11	$\xrightarrow{-3}$	8	$\xrightarrow{-5}$	3
pijl & is	9	$\xrightarrow{+2}$	11	$\xrightarrow{-3}$	8	$\xrightarrow{-5}$	= 3
	('=' als eindresultaat van een busrit)						
is-taal	(: pijl weg)			8	-5		= 3

fig. 2.15 van pijlentaal naar is-taal

10. pijlendiagrammen als gevarieerde oefenvormen
Op het bord staat een pijlendiagram (fig. 2.16):

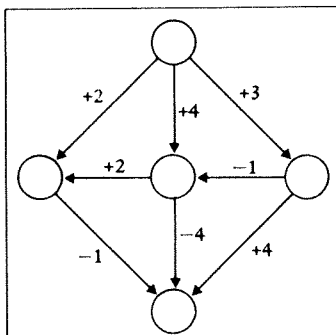


fig. 2.16 pijlendiagram

Een bus rijdt in de richting van de pijlen de haltes af.

Een leerling geeft een mogelijke busrit aan. Maar het kan ook anders. Zoek de rit waarbij de bus de meeste mensen meeneemt naar het eindpunt.

Invuloefeningen worden gebruikt (fig. 2.17):

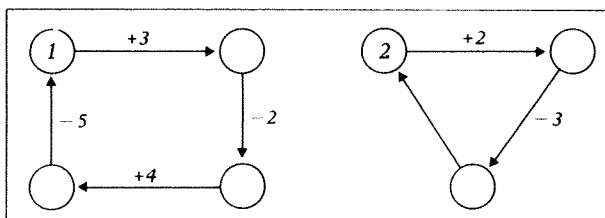


fig. 2.17 twee pijlendiagrammen

11. de bus als drager van allerlei modellen

De bus als veranderingsmodel, maar ook als vergelijkingsmodel

Tijdens het autobuslijnenspel stelt juf, dat als twee bussen elkaar ontmoeten bij een halte, zij alle passagiers eerlijk moeten verdelen...

De bus als deellgeheelmodel

Voor de klas staat een dubbeldekker: een aantal tafels tegen elkaar, met zitplaatsen beneden (op de grond) en boven (op de tafel). Vijf kinderen mogen een plaatsje zoeken...

Kan het ook anders?

De bus als dozenmodel

Juf komt met een moeilijke opdracht: 'Er staan vijf autobusjes. In elk zitten 10 kinderen. Hoeveel kinderen zijn dat?...'.

Uit deze ideeën en onderwerpen ontstond uiteindelijk het pakket Autobussen.

2.2.4 In hoeverre werd het pakket geïntegreerd in het Drees-schoolonderwijs?

Karakteristiek voor de ontwerpperiode in de onderbouw was een gevoel van onzekerheid.

We wisten in het begin niet waaraan we begonnen en aan het einde van het schooljaar wisten we niet of de kinderen wel genoeg geleerd hadden in vergelijking met vorige jaren.

Deze onzekerheden hadden gevolgen voor de integratie.

Ofschoon de vertrouwde rekenboekjes op de Dreesschool niet meer werden gebruikt (zoals aan het begin van de integratieperiode was afgesproken) bleek achteraf, dat de rekenkaarten, die door een onderwijzeres (C.) zelf ontworpen waren, toch steeds naast de Autobussen in zwang waren gebleven.

Vanwege de grote ervaring die de onderwijzeressen met het onderwijs in klas 1 hadden en die de ontwerper miste, waren de onderwijzeressen uiteraard vrij in keuze en gebruik van het aangeboden materiaal. Daardoor traden er wezenlijke verschillen op in bijvoorbeeld de introductie van het pakket Autobussen. Het pakket breidde zich steeds verder uit tot een rijk gevulde bron van materialen en ideeën.

2.3 Hoe ging het verder?

2.3.1 Auteurs

In de afwikkelingsfase na de integratieperiode zijn twee vormen van afwikkeling te onderscheiden: een interne afwikkeling binnen de Dreesschool en een externe afwikkeling ter informatie van het onderwijsveld.

De laatste kreeg vooral zijn beslag via de beïnvloeding van de auteurs van rekenmethoden. In gesprekken met hen en via beoordelingen van hun methoden is met succes getracht de realistische stroming te implementeren.

De autobussen zijn in vrijwel alle rekenmethoden een essentieel onderdeel gaan vormen.

2.3.2 Conferenties

Een belangrijke functie in de externe afwikkeling hadden de jaarlijks georganiseerde conferenties over rekendidactiek.

In 1975 werd 'Het grote 1+ boek' op zo'n conferentie gepresenteerd. Het was een boek waarin de werkbladen uit het Integratieplan werden weergegeven. Ze waren voorzien van steekwoorden, van een beschrijving van classesituaties en van op- en aanmerkingen over functie en bedoeling van de bladen.

De Autobussen waren daarin een hoofdonderwerp.

Op de conferentie werden vragen gesteld, als:

'Waarmee zijn de kinderen wat de autobussen aangaat wel en waarmee niet in contact gekomen?'

'Wat zijn de nieuwe elementen in het programma van de eerste klas?'

Men plaatste opmerkingen als:

'In een besprekversie van het integratieplan moet je een lijn geven, een verantwoording afleggen, een onderwijsleertheorie verkondigen en de lezers uitnodigen tot zoeken'.

'De Autobussen slaan goed aan; de bedoeling en de didactische waarde zijn overtuigend'.

2.3.3 Dreesschool (1975/1980)

Vanaf de zomer van 1975 begon op de Dreesschool een afbouwfase: Wiskobas zou zich geleidelijk aan uit de school terugtrekken. Er werden afspraken gemaakt over onder meer de werkbladenvoorziening. Er werden echter ook evaluatiebesprekingen gepland om het verschillende gebruik van het pakket Autobussen door verschillende onderwijzeressen te onderzoeken.

In dit kader waren drie besprekingen van belang:

1. de evaluatiebespreking aan het einde van de integratiefase tussen de drie onderwijzeressen-van-het-eerste-uur (in juni 1975)
2. de evaluatiebesprekingen aan het einde van de afwikkelingsfase tussen de twee onderwijzeressen Tinke (T.) en Jannie (J.) (in mei en oktober 1977) en

3. de evaluatiebespreking met één nieuwe onderwijzeres Trudy (T.S.) die de bovengenoemde ontwikkeling niet had meegemaakt (schooljaar 1977/1978).

In het schooljaar 1976/1977 werd met de twee onderwijzeressen begonnen om uit de chaotische bron van ideeën en materialen een minimum-programma samen te stellen. Dit mondde uit in het Schoolwerkplan Dreesschool (1977/1978), waarin de keuzes van de twee onderwijzeressen werden beschreven. Voor een algemeen verslag verwijzen we naar een interne publikatie (Van den Brink, 1978). Hier richten we onze aandacht vooral op de keuzes die de onderwijzeressen maakten met betrekking tot de Autobussen (zie hoofdstuk 6).

In het schooljaar 1977/1978 werd het schoolwerkplan voor het eerst gebruikt door anderen dan de samenstellers. Op de eerste vergadering bleek, dat er te weinig aandacht was besteed aan de registratie van de principes die achter de onderwijsactiviteiten van het werkplan lagen.

Het schoolwerkplan werd daarom met deze principes uitgebreid.

2.3.4 Problemen en evaluaties rondom de Autobussen

Na de ontwikkelingsfase bleef de ontwerper met een aantal vragen zitten over het integratieplan en meer in het bijzonder over het pakket Autobussen daarbinnen.

Het pakket was op één school uitgetoetst met weliswaar drie onderwijzeressen en met circa 3 x 25 kinderen, maar toch bleef er twijfel bestaan over de generaliseerbaarheid en de verdieping ervan.

Goffree spreekt in dit verband over de 'gewetensvragen van de ontwerper' (Goffree, 1985).

De vragen betroffen de vaak onderling afwijkende reacties van de leerlingen en de onderwijzeressen, de leerstofverbanden, maar bovenal bestond de behoefte om te bewijzen, dat de ideeën die aanleiding tot het pakket waren, terecht waren geweest.

Waren de ideeën die we hadden over de rol van:

- de contexten
 - de pijlentaal en
 - de vrije rekenkunst (het vrij bedenken van opgaven bij het oefenen)
- in het plan verwerkt?

En bovenal: werd voldoende rekenvaardigheid verworven?

Het antwoord op deze vragen is gezocht in onderzoek van verschillende snit (zie hoofdstuk 5). Van 1979 tot 1983 werd het evaluatie-onderzoek op verschillende fronten geopend (zie de hoofdstukken 6 en 7).

2.4 Noten

- (1) Naast het pakket Autobussen zijn in de integratiefase allerlei onderwerpen ontworpen:
- in de onderbouw: Waterland, Strokenaanpak, Wiskundige Wereldoriëntatie
 - in de middenbouw: het Algoritmeprogramma, Kavelland, Baljoekameer (Ter Heege)
 - in de bovenbouw: Ralph de Zeerover, Gulliver, Afstand, Tijd en Aarde (Streefland).
- (2) Het wiskundeonderwijs aan kleuters stond nog in de kinderschoenen. We zouden op zoek moeten naar *kinderlijke noties bij kleuters* om enig idee te krijgen hoe we het wiskunde *kleuter*onderwijs zouden inrichten. In Bussum werd door Jeanne de Gooijer kleutermateriaal ontwikkeld (De Gooijer-Quint, 1978).

Van 1977 tot 1979 werd door ons geobserveerd en geëxploreerd in kleuterscholen. De Iris in Arnhem en de Kindertuin te Amstelveen.

Dit resulteerde in 'Observatie interpretaties' (interne publikatie), ideeën naar aanleiding van de observaties over wat we onder 'kleuterwiskunde' zouden kunnen verstaan, en mappen met wiskundige kleuteractiviteiten (Huttendorp, Papieren tovenaarsfeest, en dergelijke).

Daarna zijn (van 1979 tot 1982) integratiebesprekingen gevoerd tussen de Dreesschool en De Iris onder leiding van de ontwerper. De besprekingen gingen over gezamenlijke projecten (Autobuslijnenspel), advisering (bijvoorbeeld ten aanzien van een documentatiecentrum voor de kleuterschool), informatie (bijvoorbeeld over kleuterwiskunde). Het één en ander werd gepubliceerd (Van den Brink, 1981).

3 Leren rekenen

3.1 Inleiding

In de prototypische onderwijsleergang voor het optellen en aftrekken, zoals in het vorige hoofdstuk geschetst, zijn drie onderdelen van belang: de autobus-context, de (autobus)pijlentaal en het gevarieerde oefenen (de vrije rekenkunst). Over de invloed van deze drie op het leren rekenen van jonge kinderen bestaan verschillende opvattingen.

Binnen de cognitieve psychologie en de vakdidactiek:

1. worden bijvoorbeeld de specifieke eigenaardigheden van contexten en modellen al of niet in de leertheorie betrokken;
2. dient de gebruikte rekentaal volgens sommigen zonder betekenis te zijn, terwijl anderen juist vinden dat de rekentaal vele, verschillende betekenissen moet dragen en
3. bestaan over de zin en de kwaliteit van het oefenen uiteenlopende meningen. De één eist langdurige oefening, de ander meer variatie.

Deze drie controversiële punten lichten we nader toe en geven daarbij ons eigen standpunt weer. Daarbij zullen we een strikte scheiding tussen leren en onderwijzen niet overal kunnen handhaven. Het gaat immers om leren rekenen binnen de onderwijssituatie.

3.2 Contexten

3.2.1 Wat verstaan we onder 'context'?

Door sommige onderzoekers wordt een sterk verband gelegd tussen contexten en noties van kinderen.

Voor Cobb (1987) is een context het geheel van persoonlijke ervaringen, ideeën en fantasieën, dat elk individueel kind heeft en dat van andere kinderen in principe verschilt. Dit standpunt is karakteristiek voor het radicaal constructivisme. Wij vinden die omschrijving echter te algemeen en willen bedoelde noties van kinderen specificeren. Zo dienen we een plaats toe te kennen aan rekenmodellen, die we willen aanleren en aan rekensituaties, waarin dat leren plaats kan vinden. We zijn van mening, dat wiskundige begrippen zich in allerlei verschijningsvormen manifesteren (Freudenthal, 1984) en dus ook in de noties van kinderen en dat bedoelde kennis slechts gewekt of ontdekt (herontdekt) moet worden binnen de reeds bestaande noties.

Cobb's omschrijving accentueert voornamelijk de feitelijke ontwikkeling van individuele kinderen en niet wat erop moet volgen. Vygotsky (1964) benadrukt daarentegen, dat het onderwijs ook vooruit moet lopen op de feitelijke ontwikkeling, ofschoon ze niet van die feitelijke ontwikkeling mag vervreemden.

Daarom vragen wij ons af, startend vanuit een 'conglomeraat' van vage, individuele ideeën, ervaringen en fantasieën (die we de kinderlijke noties zullen noemen), welke van die noties we als 'versierde' rekenmodellen kunnen opvatten.

De autobuscontext kan als voorbeeld dienen. De context bestaat uit alle noties die de individuele kinderen over autobussituaties in de rekensituatie aan de orde stellen en waarvan sommige een rekenmodel representeren. Voorbeelden:

- een veranderingsmodel: de autobus die herhaald stopt en waarbij in- en/of uitgestapt wordt;
- een deel-geheel-model: de dubbeldekker; de rijen stoelen, links en rechts;
- een vergelijkingsmodel: de 'haltesommen', waarbij per halte zowel in-, als uitgestapt wordt;
- het dozenmodel: het getal dat de collectie van gedeeltelijk onzichtbare mensen in de bus aangeeft;
- het pijlenmodel dat aanvankelijk als autobuspijlentaal geldt, waarin autobusritten worden geregistreerd, maar dat later een eigen leven gaat leiden;
- de overgangsnotaties van autobuspijlen, via refererende en kale pijlentaal naar de notaties met het is-teken.

Onder rekenmodel verstaan we dus dat onderdeel van de context dat we in het onderwijs kunnen gebruiken om de kinderen op een bepaalde rekenactiviteit te richten. Het rekenmodel is niet kaal, maar via de noties gebonden aan de context en als zodanig 'versierd' bij kinderen aanwezig.

Niet alleen de modellen, ook de rekensituatie (dat wil zeggen de praktische uitvoering van de rekenles in de klas) is op die wijze gebonden aan de context. Om de invloed van noties op modellen en rekensituaties te bewaren, stellen we binnen het rekenonderwijs van klas 1 de volgende omschrijving van context voor:

de context is een conglomeraat van rekenmodellen die in een rekensituatie bestaan als versierde noties van kinderen.

Met 'conglomeraat' bedoelen we een geheel waarvan de verbanden tussen delen nog diffuus zijn (1).

De versiering noemen we contextfranje: de noties die de modellen en de rekensituatie contextgebonden maken. We spreken van menscontext, speelgoedcontext, voorwerpcontext en dergelijke. De franje kan bestaan uit allerlei denkbeelden, maar ook uit beeldende versieringen.

3.2.2 Over de invloed van contexten op het leren rekenen

Carpenter & Moser (1981) schreven naar aanleiding van hun onderzoeksresultaten met redactie-opgaven, dat sommige woorden de problemen transparanter maakten dan andere termen dit deden. Maar omdat het onderwijs in hun onderzoek niet als variabele grootheid was opgenomen, werd het helaas niet mogelijk de herkomst van de geschikte woorden en daarmee samenhangende

contexten na te trekken. Het vermoeden rees dat sommige contexten meer duidelijkheid konden verschaffen bij het verwerven van wiskundige begrippen dan andere.

Donaldson (1978) heeft bijvoorbeeld aangetoond dat een kaal en onoplosbaar probleem voor zeer jonge kinderen goed op te lossen was binnen een 'speelgoedcontext'. En Bell (1983) merkte, dat eenzelfde bewerking gebruikt in verschillende contexten niet meer precies dezelfde bewerking was voor kinderen (2). Jonge kinderen hebben blijkbaar de neiging om getallen en bewerkingen aan contexten te binden, die hen vertrouwd zijn (Vergnaud, 1982; Von Glasersfeld, 1983; Van den Brink, 1984; Monbill & Sonyung, 1983; Cobb, 1987). Met sommige contexten verloopt dat vlot, met andere traag, omdat nieuwe kennis al dan niet past bij hetgeen de leerling al weet (Von Glasersfeld). Passende kennis is ons inziens in de eerste plaats kennis die voor de leerling zinvol is.

3.2.3 Soorten contexten en hun functie bij het leren rekenen

In ons onderzoek hebben we de functie van de contexten bij het leren rekenen onderzocht aan de hand van een typering van contexten die we vonden in de rekenboeken, die kinderen maakten voor andere leerlingen.

Naast soorten contexten zochten we naar het antwoord op de vragen:

1. Welke contexten zijn geschikt om het optellen en aftrekken vlot aan te leren?
2. Hoe kan zo'n context tot stand komen bij jonge kinderen?

Theoretisch kan het antwoord op deze vragen kort zijn.

1. Het gaat om contexten die ruimte laten voor noties van kinderen en waarin de te leren rekenmodellen al zijn verstoppt.
2. Zo'n context komt tot stand via zinvolle, gemeenschappelijke activiteiten waaraan de kinderen op school op verschillende manieren kunnen deelnemen.

Zoals bijvoorbeeld aan een rekentoneelspel, waarin de noties worden kenbaar gemaakt en de rekenmodellen zin hebben, omdat ze binnen de noties van kinderen passen.

3.2.4 Menscontexten

Contexten die ruimte laten voor noties van kinderen zochten we niet in de traditionele rekenstaafjes en andere voorwerpcontexten, maar in de menscontexten, zoals de autobuscontext, waarin de kinderen zelf als objecten participeerden.

Bauersfeld, Balacheff en Bell hebben gewezen op het belang van menscontexten voor het verwerven van wiskundig inzicht. Het zijn namelijk contexten en situaties waarvan de kinderen zelf deel uitmaken en die ze met persoonlijke

bijdragen gezamenlijk scheppen. De menscontext is open en steeds verder uit te breiden. De sociale wetten en de rekenwetten die er gelden, zijn van meet af aan aan elk kind bekend.

In dergelijke situaties van onderhandeling en overleg (Bauersfeld, 1983) ontwikkelen de leerlingen eigenmachtig een gezamenlijke overeenstemming, een eerste aanzet van intersubjectieve origine tot een mentaal object of activiteit. De individuele noties steunen hem/haar daarbij.

Bell (1983) en Balacheff (1985) wijzen in dit kader op het leereffect van respectievelijk de 'conflict discussion' en het 'socio-cognitieve conflict', dus van de cognitieve conflicten die kunnen ontstaan indien in een groepsactiviteit verschillende conflictuerende oplossingen naar voren worden gebracht.

3.2.5 Rekentoneel - leren als acteur en toeschouwer

De sensomotorische activiteiten (hetzij actuele, hetzij door kinderen voor de geest gehaalde activiteiten) zoals bijvoorbeeld een autobusrit door de klas, worden door veel onderzoekers als beginactiviteiten voor het leren rekenen beschouwd.

Van Hiele (1957), Piaget (1980), Freudenthal (1973), Gal'perin (1976), Lakatos (1976), Ginsburg (1977), Nesher (1978), Davis en Hersch (1981), Vergnaud (1982), Von Glasersfeld (1983) - zij allen laten het leren rekenen beginnen vanuit het 'actor's perspective' oftewel vanuit het gezichtspunt van de uitvoerder, de actor, met een daadwerkelijke uitvoering of voorstelling daarvan.

Ook wordt door onderzoekers erkend dat in de ontwikkeling van de leerling beschouwingen van het eigen handelen eveneens van cruciaal belang zijn. Reflectieve abstractie (Piaget), reflectie en blikwisseling (Freudenthal) en Van Hiele's derde niveau zijn voorbeelden waarin de leerling een 'observer's perspective' inneemt, dus leert vanuit het gezichtspunt van een beschouwer.

Eén en ander impliceert tevens de veronderstelling dat de 'actor' de wereld anders kent dan de 'observer'; met andere zintuigen (Cobb & Von Glasersfeld, 1984).

Het rekentoneel omvat beide gezichtspunten: nu eens is de leerling uitvoerend acteur, dan weer beschouwend toeschouwer (3).

3.2.6 Verschillen van mening over contexten, noties, misvattingen, begripsvorming, toepassen en modellen

1. Contexten

In plaats van de menscontexten worden vanouds in het rekenonderwijs rekenstaafjes gebruikt om het optellen en aftrekken met getallen aan te leren.

De twee gebieden (de staafjes en de getallen) worden gekoppeld ('matching') door de overeenkomst tussen de rekenhandelingen in de beide gebieden tot in detail aan de kinderen op te leggen. Stapjes worden geëxpliciteerd om zeker te zijn, dat de leerling zich precies realiseert welke onderdelen van elk gebied overeenkomen met onderdelen van het andere (Greeno, 1983).

Deze gedetailleerde koppeling tussen beide representaties zorgt ervoor, dat de geschreven rekensymbolen betekenis krijgen (Resnick, 1983). De materiële representatie met behulp van de staafjes functioneert daarbij als betekenis gevende laag voor de andere, symbolische laag.

Fuson (1984) vindt in haar onderzoek dat illustratieve voorwerpcontexten (rekenstaafjes en ander materiaal met een opgelegde structuur) grote moeilijkheden opleveren.

Ook anderen twijfelen aan de waarde van dit introducerend materiaal. Cobb (1987) vindt de betekenisgevende representatie van staafjes even kunstmatig en geheimzinnig voor de kinderen als de symbolische representatie met getallen. Holt (1982) twijfelt eraan of de kinderen wel de getallen met dit model hadden geleerd, als ze zelf al niet de getallen hadden gekend.

In feite is er slechts sprake van verschillende representaties. Maar de belangrijkste 'cognitive representations', dat wil zeggen de noties, blijven volgens Cobb buiten beschouwing.

Het gaat slechts om kunstmatige koppelingen ('matching') en niet om activiteiten die passen ('fitting') in dat wat de leerling al weet (Von Glasersfeld & Cobb, 1983).

Door nieuwe kennis te laten passen in hetgeen de kinderen al weten, wordt het leren rekenen zinvol, ook voor de kinderen zelf, zo veronderstellen Whitney (1985), Hoyle en Sutherland (1986).

2. Noties

Kinderen scheppen in het rekenen allerlei noties. Wij maken er gebruik van bij het ontstaan van contexten in de klas.

Maar niet elke onderzoeker is van noties gediend. Anderson (1983) vindt dat formele precisie een essentiële karaktertrek van een leertheorie hoort te zijn.

Door de eis van formele afleidbaarheid via gedragsregels te stellen, kunnen begrippen zoals 'meaning', 'encoderingsprocessen' en 'subjectieve ervaringsgegevens' niet centraal staan in zijn theorie.

Ook Olsen (1972) liet de noties van kinderen slechts een marginale rol spelen - zij het om een andere reden. Hij wees op de zogenaamde 'learning paradox' (Koster, 1974; Bereiter, 1985). Hoe weet de leerling waarop hij zijn aandacht moet vestigen, zonder reeds de kennis te bezitten die aangeeft wat van belang is? Maar als hij weet waarop hij moet letten, dan weet hij het bedoelde al en hoeft dus niets meer te leren. De noties worden dus uitgesloten als onderdeel van de theorie. Alleen de vakanalyse van structuren en modellen die de kinderen moeten leren staat centraal.

Het is echter ook mogelijk een theorie op te stellen, waarin wel plaats is voor noties. Lakatos, Ginsburg en Van Hiele bijvoorbeeld hebben theorieën ontworpen, waarin de noties zelfs een cruciale plaats innemen.

Deze onderzoekers ondernemen echter geen pogingen om hun modellen op formele wijze via gedragsregels te beschrijven, zoals Anderson eiste.

Lakatos (1976) tracht de subjectieve en vaak onverwachte manieren van oplossen in het wiskundebedrijf via gedachtenexperimenten te begrijpen. Hij gaat ervan uit, dat het uiteindelijk de kinderen zelf zijn die zich de kennis verwerven. De onderwijzer is slechts begeleider.

Ook Ginsburg (1981) stelt de noties in zijn werk centraal. Informele strategieën van kinderen en het buitenschoolse rekenen onderzoekt hij met klinische interviews en breidt daarmee onze kennis over rekengedrag uit met verrassende en inspirerende voorbeelden.

In Van Hieles niveautheorie (1957) vormen de noties van kinderen het nulde niveau. Het zijn de ervaringen met de natuurlijke, alledaagse, fysische en verbeelde wereld. Ze vormen een context waarin een op structurerende gerichte activiteit kan worden uitgelokt.

3. Misvattingen

Net als bij de noties zijn er ook onderzoekers die misvattingen uitsluiten. Voor Anderson zijn ze te grillig om te kunnen worden geformaliseerd. Gal'perin gaat ervanuit, dat bij het leren van bepaalde modellen en opgavetypen niet doelbewust fouten mogen worden uitgelokt, omdat de kans bestaat dat ze worden ingeslepen. Maar fouten blijven onderzoekers intrigeren. Schema-theoretici, als Rumelhart en Norman (1981) ontdekken dat fouten van kinderen niet zomaar tot stand komen: ze zijn immers niet random. Carpenter, Hiebert en Moser (1981) menen, dat de gemaakte fouten afhangen van contexten die de kinderen al bekend zijn.

Tamelijk nieuw is het om misvattingen niet te mijden, maar ze juist te gebruiken of bewust op te roepen in het wiskundeonderwijs. Balacheff (1985) spreekt van het socio-cognitief conflict dat hij in het meetkundeonderwijs opwekt door misvattingen van kinderen in meetkundeopgaven te verwerken. Bell (1983) laat oplossingen van kinderen bediscussiëren aan het einde van de wiskundelessen. Van den Brink (1973) roept bewust conflicten op. Om wiskundige activiteiten en begrippen duidelijk tot hun recht te laten komen, kunnen eigenschappen van die activiteiten en begrippen handig tegen noties worden uitgespeeld.

4. Begripsvorming en toepassen

Contexten worden door onderzoekers uit de cognitieve psychologie en uit de handelingspsychologie (Anderson, Gagné, Gal'perin, Resnick, Greeno) alleen in enge zin beschouwd als het toepassingsgebied van reeds aangeleerde rekenkennis: eerst kale sommen en modellen leren en die dan toepassen.

Wiskundigen vinden dit standpunt discutabel. De betekenis van kale getallen is slechts een exclusieve betekenis, die pas laat in de geschiedenis van het getal is ontstaan (Whitehead, 1925). Men is er in ieder geval niet mee begonnen.

Bovendien is het onderscheid tussen zuivere en toegepaste wiskunde niet gebaseerd op de inhoud, maar op de houding en motivatie van de wiskundige zelf.

Daarom moet een verschil tussen het kale rekenen en het toegepaste rekenen niet worden benadrukt (Hilton, 1977 en 1984). Ze moeten elkaar aanvullen en ondersteunen; ze zijn gelijkwaardig (Sawyer, 1962; Freudenthal, 1982 en 1987; Whitney, 1985).

5. Modellen

Opvallend is, dat de onderzoekers van het kale, formele rekenen vaak het primaat geven aan een enkel model of schema om de kinderen foutloos te leren rekenen.

Resnick (1983) prefereert bijvoorbeeld het deel-geheelmodel, omdat dit bij allerlei moeilijke typen stipsommen kan worden gebruikt. Ze vindt bovendien, dat het deel-geheelmodel bijdraagt tot het hoeveelheidsgetal, zoals Piaget dat voor ogen stond. Het model sluit aan op het 'subitizing' (het direct aflezen van een configuratie) en bereidt voor op het positiestelsel.

Voorts zijn er allerlei 'real life'-situaties die het model kunnen illustreren. Kortom, er zijn voor haar allerlei redenen om het deel-geheelschema universeel toepasbaar te verklaren.

Maar naar de mening van anderen zijn de 'real life'-situaties van kinderen veel complexer dan men met het deel-geheelmodel veronderstelt.

Ter illustratie een voorbeeld.

Jim heeft 2 knikkers. Connie heeft 5 knikkers.

Hoeveel knikkers moet Connie verliezen om net zoveel knikkers te hebben als Jim?

Deze opgave wordt door Carpenter, Hiebert en Moser (1981) als voorbeeld van een echte deel-geheelopgave genoemd. Maar de oplossing is lang niet eenvoudig indien men aan de (on)hebbelijkheden van de knikkerwereld denkt met zijn verschillende waarden van knikkers, het lenen onderling van stuivers, de afhankelijke relatie tussen winnaar en verliezer en zo meer.

3.3 Pijlentaal als voorbeeld van rekentaal

3.3.1 Wiskundige symbolen en wiskundige objecten

1. Symbolen en rekenregels

De opvatting dat een onderwijsleertheorie rekenschap aflegt over zowel de symbolen (signifiers) als de objecten waarnaar de symbolen verwijzen (signifieds), wordt niet door ieder gedeeld.

Rumelhart en Norman geven in hun discussies over het leren volgens analogieën (1981) het belang van wiskundige objecten slechts impliciet weer.

Anderson (1982, 1983) heeft voor het meetkundig denken een theorie van alleen symbolen zonder referenties ontwikkeld.

Lewis (1981) suggereert, dat een leerling in een algebra-opdracht slechts gevraagd wordt een gegeven rij symbolen te transformeren met toegestane operatieregels.

En in dezelfde geest observeert Gagné dat de operaties bij berekeningen volledig concreet zijn. De objecten waarmee de kinderen omgaan, zijn de getallen en bewerkingstekens die geschreven of gedrukt op papier staan (Gagné, 1983).

Gagné vindt dat het gebruik van blokjes uit den boze is.

Deze onderzoekers zien als kern van het wiskundig bedrijf het werken met kale symbolen volgens afgesproken afleidingsregels of schema's.

2. Wiskundig formalisme

Misschien is Hilberts formalisme aanleiding geweest tot deze streng formele opvatting over wiskunde. Maar dat zou ten onrechte zijn.

Eén van Hilberts bedoelingen was immers om wiskundige objecten en systemen te ontwerpen teneinde daarmee de inconsistentie van formele systemen te weerleggen (Hilbert, 1964).

De formele systemen die hij voorhanden had, waren het rekensysteem en de analyse, die hij voor zijn doel axiomatisch modelleerde. Maar het ging hem in eerste instantie om het ontwerpen van wiskundige objecten en systemen en niet zozeer om de strengheid.

3. Wel objecten, maar hoe verder?

Voor het onderwijs in de wiskunde heeft dit consequenties. Thom (1973), de ontwerper van de catastrofetheorie, zegt dat het werkelijke probleem waar het onderwijs voor staat niet dat van de strengheid is, maar dat van de ontwikkeling van de betekenis en het bestaan van wiskundige objecten. In vakdidactisch georiënteerde onderzoekingen is van meet af aan het belang van betekenisvolle objecten geaccentueerd. Freudenthal's mentale objecten, de idea-analyses van Lesh, contextgebonden getallen (Van den Brink) - het zijn allemaal termen waarmee men onder meer wil zeggen dat niet de symbolen op het papier, maar de denkbeelden achter die symbolen de wiskunde vormen.

Maar hoe kunnen we de kinderen vanuit hun grillige noties op de bedoelde ideeën achter de rekensymbolen attenderen? En hoe kan men ervoor zorgen, dat kinderen niet aan één context zullen blijven hangen?

4. Onze oplossing: 'versierbare' rekentaal

De oplossing die wij voor deze problemen proberen aan te dragen, is om naast de eerder genoemde bewustmakende conflictsituaties van onderhandeling en overleg, het kunstzinnig ontwerpen en versieren van wiskundige symbolen te stellen. Een sprekend voorbeeld is de pijlentaal die refererend naar verschillende betekenissen dienovereenkomstig kan worden versierd.

3.3.2 Refererende pijlentaal

1. Rekentalen ontwerpen en versieren

Rekentalen worden door sommige onderzoekers (Gagné, Dienes, Gal'perin, Resnick) eenvoudigweg aan kinderen opgelegd.

De symbolen (+, -, =) worden niet 'versierd', maar onveranderd tussen getallen en tussen voorwerpen geplaatst. Het gebruik van schema's en notaties staat voorop, niet het ontwerpen daarvan.

Maar anderzijds zijn er pogingen ondernomen (Bednarez & Belanger, 1983) om te zien of kinderen er toe te bewegen zijn zelf een rekentaal te ontwikkelen vanuit het tekenen van situaties. Afgezien van het nut dat de tekeningen voor elke leerling afzonderlijk hebben, zijn de ervaringen teleurstellend voor de onderzoekers: leerlingen schenken veel tijd en moeite aan onbelangrijke aspecten en de tekeningen zijn veelal niet geschikt voor algemeen gebruik.

Tussen deze beide uitersten stellen wij een compromis voor: de pijlentaal.

De pijl wordt door ons ingevoerd als het symbool dat de voortgang van een bus aangeeft, maar die verder door de kinderen zelfstandig kan worden versierd, afhankelijk van de situatie of context. Daarmee is de pijlentaal refererend geworden en niet meer gebonden aan slechts één autobuscontext.

2. Functies van de pijlentaal

Twee functies van de pijlentaal vallen bij het versieren op: de attenderende en de intermediaire functie.

Met de pijlentaal is de aandacht te sturen: de taal attendeert de leerlingen op het veranderingsmodel binnen contexten.

In de autobuscontext worden de kinderen op het in- en uitstapmodel gericht, maar bij het kegelen bijvoorbeeld krijgen de kinderen door de pijlentaal oog voor het model van de puntentelling. Door het versieren van de pijlen zijn we bij machte binnen vrijwel elke context waarin iets gebeurt, de aandacht op het veranderingsmodel te richten. Vooral Sovjetpsychologen (Vygotsky, Gal'perin) hebben de taal als stuurmiddel bij het denken beklemtoond (Vygotsky, 1964, 99-100; Van Parreren & Carpay, 1973).

3. Intermediaire pijlentaal

De pijlentaal kan door de pijlen te versieren als intermediair tussen verschillende contexten gebruikt worden.

Cognitief-psychologen en vakdidactici leggen vaak een zwaar accent op het abstraheren, dus op het loskomen van bijzonderheden en het aanscherpen van algemene overeenkomsten.

Ze doen dat vaak op verschillende manieren. Bijvoorbeeld via analogie-redenering op het niveau van instrumentele vaardigheden (Anderson, Gagné) of door gewoonweg veel te laten oefenen met opgelegde schema's (Resnick, Greeno, Dienes); via reflectieve abstractie (Piaget) of met 'metaforen' (Pimm,

Van Dormolen) en 'carry-over' (Lehrer). Of door middel van conflicten (Balacheff, Bell) ofwel via de bekende indeling van 'enactive-iconic-symbolic' representaties te gebruiken (Bruner).

De door ons voorgestelde wijze van abstraheren via conflicten en refererende pijlentaal komt met verschillende van deze opvattingen overeen. De pijlentaal is een voorbeeld van hoe activiteiten kunnen worden vertaald in symbolen en hoe door versiering de pijlentaal tot intermediair tussen verschillende contexten gemaakt kan worden.

4. Vier taalkenmerken

In de literatuur vonden we vier taalkenmerken waarmee we het abstraheren door de intermediaire pijlentaal treffend kunnen beschrijven:

- a. het vervagen van de oorspronkelijke betekenis van symbolen
- b. de doorzichtigheid van symbolen
- c. het nieuwe, gezegd in oude termen
- d. het wisselend gebruik van leefwereld en symbolenwereld

a. vervagen van betekenissen

Het is een bekend taalfenomeen, dat van betekenisvolle symbolen na enige tijd de oorspronkelijke betekenis vervaagt. Men moet in het onderwijs op dit taalverschijnsel bedacht zijn. De volwassene doet in het taalgebruik alsof de betekenissen al aanwezig zijn of dat de symbolen zelfs in het geheel geen betekenis hebben (Cobb, 1987). Bij het verzoek om bijvoorbeeld een boodschap te doen in de winkel om de hoek zal geen mens zich meer de precieze uitvoering voor de geest halen (Von Glasersfeld & Steffe, 1986). De gebruikte symbolen staan in de plaats van de voorgestelde uitvoering. Een gedetailleerde voorstelling van hoe men zal lopen, is niet nodig. Die kan indien vereist, toch wel vanuit het geheugen worden opgeroepen.

Dit geleidelijk vervagen van de betekenissen van symbolen schraagt het idee van de verticale mathematisering, dat wil zeggen de overdracht van de beeldende contexten naar de kale rekencontext, via de kale pijlen die reeds in het materiaal (als contextgebonden pijlen) verborgen waren.

b. doorzichtigheid van symbolen

Naast het vervagen van de betekenis van symbolen ziet Polanyi (1962) een ander taalverschijnsel: de 'transparency of symbols'. In een gesprek of tekst zijn we ons van de woorden slechts op een ondergeschikte manier bewust. We laten de betekenis af en toe door de symbolen heen schemeren, zegt Polanyi.

Onze ideeën over de refererende pijlentaal passen heel goed in deze visie.

c. oud en nieuw

Mensen trachten bij voortduring het nieuwe te begrijpen in termen van wat ze al weten (Glaser, 1984). Hij sluit daarmee aan op hetgeen Vygotsky (1964) als 'shift' omschreef: bekende, vertrouwde kennis naar nieuwe rekenonderwerpen

overdragen, waardoor de leerling zich van het bestaan van een nieuwere, algemenere kennis bewust wordt.

Lehrer (1974) ontdekte, dat deze 'carry-over of terms' door kinderen niet tot een enkel woord beperkt bleef, maar dat de hele vertrouwde structurering die een term in de oude context bezat, werd overgedragen naar de nieuwe context (4).

d. leefwereld en symbolenwereld

Freudenthal (1987) beschouwt het mathematiseren van kinderen als activiteiten waarmee kinderen zich bewegen tussen leefwereld en symbolenwereld waarbij de ene wereld ten koste van de andere kan uitdijen en zich ook weer ten gunste van de andere kan vernauwen. Freudenthal spreekt van anontologisering (1973): de banden met de oorspronkelijke situatie zullen moeten worden doorgesneden, maar niet onbeheerst. De refererende pijlentaal die met contextfranje te versieren is, past geheel in deze visie.

3.3.3 De traditionele is-taal

1. Resultatief is-teken

Sommige onderzoekers menen, dat de oorzaak van de rekenproblematiek voornamelijk in het is-gelijk-teken ligt, dat niet naar behoren door de kinderen wordt beheerst (Van Erp, 1983).

Uit verschillende observaties blijkt, dat kinderen voor omgekeerde of complexe stipssommen geplaagd, andere betekenissen aan het is-teken toekennen dan bedoeld was (De Corte & Verschaffel, 1980; Van Eerde, 1981).

Algemeen wordt erkend (Davis, 1975; Ginsberg, 1977; Van Eerde, 1981; Vergnaud, 1982; Van Erp, 1983) dat kinderen het is-teken allereerst gebruiken als resultatief (operatief) teken en niet als relatieteken.

Het is-teken wordt door de kinderen niet geïsoleerd beschouwd, maar verbonden met één of andere bewerking (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen).

Sommige kinderen begrijpen de bewerkingen goed, maar weten zich geen raad zodra het is-teken verschijnt (Grazer, 1933). Het is-teken koppelt in de resultatieve opvatting een bewerking (bijvoorbeeld $3 + 5$ of $11 - 3$) met een getal (8) als resultaat van de bewerking, en niet een getal met een getal, zoals bij het is-teken als relatieteken het geval is (Davis 1975).

Het is-teken is overigens constant voor alle bewerkingen, maar toch weet men niet of het is-teken bij het optellen wel dezelfde betekenis heeft als het is-teken na bijvoorbeeld een vermenigvuldiging. Het resultatieve is-teken heeft in ieder geval specifieke eigenschappen die afwijken van die van het is-teken als relatieteken: het is niet symmetrisch, het is sequentieel (kinderen zijn geneigd met deze tekens rijen te maken) en het is subreflectief (de reflectie heeft slechts betrekking op onderdelen).

2. Het is-teken als relatieteken

Temidden van de tekens '>' en '<' is het is-teken als relatieteken te gebruiken om twee collecties of twee grootheden te vergelijken op een bepaalde kwantitatieve eigenschap (aantal, lengte, gewicht, e.d.).

Van Erp (1983) gebruikt, geïnspireerd door Davydov, de balans bij het vergelijken en liet de tekens $>$, $<$ en $=$ tussen zowel getallen, letters, collecties en grootheden noteren.

Het is-teken wordt door haar opgevat als equivalentierelatie, die voldoet aan drie eigenschappen:

= is reflectief ($a = a$)

= is symmetrisch (als $a = b$ dan $b = a$)

= is transitief (als $a = b$ en $b = c$ dan is $a = c$)

(a , b en c zijn getallen).

Van Erp (1983) en De Corte & Verschaffel (1983), Mevarech (1983) stellen vast, dat kinderen deze betekenis van het is-teken (als relatieteken) in stip-sommen niet beheersen.

Bovendien meent Van Erp dat de resultatieve opvatting van het is-teken de drie essentiële eigenschappen van het is-teken als relatieteken blokkeert.

3. Kritiek op beperkende definiëringen

De opvatting van Van Erp lokt de volgende punten van kritiek uit:

- a. Het is-teken in de conceptie van Van Erp is niet-reflectief.

In het vergelijkingsmodel van Van Erp worden tenminste twee verschillende collecties vergeleken.

Omdat het is-teken onder andere tussen collecties voorwerpen wordt geplaatst, kan het niet tussen eenzelfde collectie staan en kan er niets over de reflectie worden besloten.

Het is dus strikt genomen geen equivalentierelatie, ofschoon Van Erp dit op het oog had.

- b. Het symmetrische is-teken past niet in de didactiek van klas 1.

Vanuit didactisch standpunt is het niet verstandig om te doen alsof $9 = 7 + .$ hetzelfde is als $7 + . = 9$ vanuit de overweging dat '=' symmetrisch is. Er worden namelijk verschillende activiteiten mee bedoeld.

De eerste opgave is een splitsing van 9, de tweede een aanvulling tot 9.

- c. Het is-teken wordt door Van Erp geplaatst tussen collecties, grootheden, getallen en letters.

Gewoonlijk wordt het teken alleen tussen getallen en variabelen gebruikt.

- d. De is-taal en pijltaal zijn beide notatiesystemen.

Het is-teken is echter voor kinderen dubbelzinnig (nu eens als resultatief teken, dan weer als relatieteken te gebruiken).

De pijlentaal refereert naar beeldende contexten, waardoor ze met inzicht gebruikt kan worden. De pijlentaal is daardoor ondubbelzinnig.

- e. Door dogmatisch slechts één definiëring van het is-teken, namelijk het relatieteken, als de belangrijkste te stellen, wordt het rekenonderwijs en het onderzoek daarvan beperkt.
Er is een parallel te trekken met het getalbegrip, indien men daarmee voornamelijk het hoeveelheidsgetal bedoelt en niet zozeer het naamgetal, het meetgetal, het rekengetal of het telgetal.
Het is dan ook te verwachten, dat er bij kinderen allerlei andere gebruiken bestaan voor het is-teken dan alleen de relationele.
Te denken valt daarbij aan afwijkende betekenissen zoals in de computerkunde, bij limieten en afschattingen gebruikelijk zijn.
- f. Niet aansluiten bij de verschillende gelijkheidsbegrippen van kinderen betekent, dat het onderwijs wordt belast met allerlei eendagsdefiniëringen (Whitney, 1985).
- g. De opvatting van Van Erp houdt in, dat het is-teken wordt geïsoleerd van de bewerkingen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen, worteltrekken, differentiëren, integreren, enzovoorts) en op zichzelf wordt beschouwd, als relatie.
In de literatuur blijkt echter, dat een deelbewering (bijvoorbeeld in de omgekeerde stipsom $3 = 4 -$. het gedeelte $3 = 4$) direct bewerkingen uitlokt (zoals $3 + 1 = 4$; Koomen, 1982) en dus niet door kinderen als los van bewerkingen wordt gebruikt (5).

3.3.4 Pijlentaal versus is-taal

Er zijn enkele belangrijke verschillen tussen de pijlentaal en de is-taal:

- Sommige constructies uit de pijlentaal

$$\begin{array}{cc} +3 & -2 \\ 5 & \text{---}> 8 & \text{---}> 6 \end{array}$$
 zijn niet mogelijk in de is-taal.
Omgekeerd is wel elke notatie met een is-teken om te zetten in een pijlnotatie. De pijlnotatie is dus breder toepasbaar dan het is-teken.
- De pijlentaal heeft door versiering meer verwantschap met de gespeelde (autobus)context dan de is-taal met de rekenstaafjes.
Er moet met de is-taal en de staafjes zeer intensief geoefend worden alvorens het verband wordt gezien (Resnick, 1983; Greeno, 1983).
- De pijlentaal is een 'rijke kale context' (Treffers, 1986): ze levert stof voor redenerend rekenen en eigen constructies door kinderen.
Stipsommen in de is-taal zijn daarentegen onoverkomelijke hindernissen.

3.3.5 Problemen oplossen

Om de moeilijkheden met het is-teken op te heffen worden verschillende remedies aangedragen. Traditioneel is het intensief inoefenen van typen sommen, bijvoorbeeld stipsommen, en het 'matchen' van handelingen met staafjes en getallen. Maar er zijn ook andere wegen om de moeilijkheden met de is-taal aan te pakken, zoals andere contexten en modellen dan de kale rekencontext, een andere notatie dan de is-taal en andere manieren van oefenen.

3.4 Oefenen

3.4.1 Redenen voor het oefenen en wijzen van oefenen

Het oefenen kunnen we niet missen als we kinderen willen leren rekenen. Maar de wijzen waarop en de redenen waarom geoefend wordt, zijn verschillend.

1. Met een enkel model of een enkel type opgave langdurig oefenen

Allereerst wordt geoefend om kinderen met een enkel teken, model of een enkele bewerking vertrouwd te maken.

Bijvoorbeeld: het is-teken als relatieteken (Van Erp), het deel/geheel-model (Greeno), het tellen van hoeveelheden (Resnick).

Vaak gaat dit gepaard met langdurig oefenen. Resnick (1983) veronderstelt dat door uitgebreid te oefenen met het tellen van hoeveelheden de rij telwoorden geleidelijk wordt omgevormd tot hoeveelheidsaanduidingen.

2. Memoriseren en automatiseren

Een andere reden om te oefenen is om geleerde kennis te laten beklijven of om vaardigheden in het rekenen te behouden (Gagné), door regelmatig op school te memoriseren en te automatiseren.

3. Verbanden

Ook wordt geoefend om de verbanden tussen getallen en bewerkingen van alle kanten te bekijken. Baroody (1982) onderscheidt bijvoorbeeld allerlei 'families': $n+1$, $n-1$, enzovoorts.

Stipsommen zijn vanouds in dit verband een belangrijk onderdeel, ofschoon ze vaak aanleiding geven tot misverstand. Uit onderzoek blijkt dat de notatie met het is-gelijk-teken de kinderen op het verkeerde been zet (Van Eerde, 1981; Koomen, 1982; De Corte & Verschaffel, 1983; Van Erp, 1983; Bloemkolk & Koster, 1984).

3.4.2 De vrije rekenkunst, een andere invulling van oefenen

Ons standpunt ten aanzien van het oefenen is, dat we het langdurige en éénzijdige oefenen willen beperken.

Het oefenen dient gevarieerd en af en toe vrij te zijn. Niet alleen in modellen, manieren van noteren en typen sommen moet gevarieerd worden, maar ook in contexten en noties van kinderen.

Karakteristiek voor het oefenen in een traditionele leergang is (zie paragraaf 3.4.1), dat het bedoeld is om fouten te vermijden, dat het uitsluitend met kale sommen plaatsvindt en dat het met opgegeven opgaven gebeurt. Wij hechten daarentegen ook waarde aan de eigen, vrije produkties, aan foutieve oplossingen van stipssommen, aan pogingen van redenerend rekenen in pijlendiagrammen waarin strategische fouten bewust gemaakt worden, aan toepassingen van het cijferen via refererende rekentalen in vertrouwde contexten en aan het zelf bedenken van opgaven.

Het idee hierachter is, dat het tenslotte de kinderen zelf zijn die het rekenen moeten leren en dat ze ook van hun fouten leren.

3.5 Standpuntbepaling

Leren rekenen beschouwen we niet alleen als een construerende activiteit van de leerling zelf, maar vooral als een reactie op confrontaties.

Naast de confrontaties met abstracties en met kunstmatige rekentalen zijn er de confrontaties met eigen misvattingen, met meningen van medeleerlingen of met sociale wetmatigheden, zijn er de confrontaties met fysische eigenschappen (Van den Brink, 1980). Daarom leggen we in het leren van rekenen door jonge kinderen de nadruk op:

- contexten van en conflicten tussen hun noties,
- attenderende en intermediaire pijlentaal en
- binnen het oefenen op de eigen produkties, toepassingen en het redenerend rekenen. Onze opvattingen over het leren rekenen behelzen elf punten die we in deze drie groepen samennemen.

3.5.1 Contexten

1. Door contexten te laten bestaan uit modellen en noties van kinderen scheppen we situaties, waarin het rekenen geleerd wordt vanuit eigen denkbbeelden om via overleg en onderhandeling tot begripsvorming en toepassingen te komen.
2. Van fouten leert men rekenen: conflicten kunnen modellen en structuren aan het licht brengen die de kinderen moeten leren en die ze eerst niet zien.
De studie van noties en misvattingen van kinderen en de studie van soorten contexten zijn daarom integrerende bestanddelen van ons onderzoek en onze theorie-ontwikkeling.
3. Het gaat om rekenkennis die past of passend te maken is met hetgeen de leerling al weet en daardoor als zinvol zal worden ervaren.
4. De leerling dient niet alleen als toeschouwer, maar ook als 'actor' te leren.

3.5.2 Pijlentaal

Ten aanzien van rekentalen in het algemeen stellen we ons op het standpunt, dat de symbolen van de taal, die uiteindelijk kunstmatig is, kunstzinnig versierd mogen worden met betekenisgevende vormkenmerken. Door verschillende versieringen refereert zo'n rekentaal naar verschillende beeldende contexten en zet op die wijze het abstraheren in gang. De pijlentaal is hiervan een paradigma. Ze heeft de volgende taalkenmerken, die voor het leren rekenen van belang zijn:

5. De pijlentaal richt zicht op het te leren rekenmodel. Men kan allereerst met de pijlentaal de leerling binnen één context op een model richten.
6. De oorspronkelijke autobusbetekenis van de pijlentaal zal, zoals gebruikelijk met taalsymbolen, vervagen.
7. De pijlentaal sluit aan bij de noties van kinderen.
8. De leefwereld en de symbolenwereld worden in de pijlentaal afwisselend beklemtoond door verschillende versieringen.
9. De kale symbolen van de pijlentaal zijn transparant.

3.5.3 Oefenen

10. Langdurig cijferend oefenen van een enkel type kale som schaadt ons inziens het leren rekenen.
11. Het toepassen van het rekenen in allerlei vertrouwde contexten, het redenerend rekenen in verschillende modellen en vooral de eigen produkties zijn voor het leren rekenen van belang.

3.6 Noten

- (1) De gegeven omschrijving van context sluit aan bij ontwikkelingspsychologische ideeën van Vygotsky. Het gaat om noties die kinderen al bezitten en modellen die ze nog moeten leren. Rekenmodellen en -problemen worden tegen deze achtergrond van noties geplaatst en worden daardoor zinvol voor kinderen.
De achtergrondaanname op zich, die bewust of onbewust tot stand komt, wordt door sommigen als context genomen (Hofstädter, 1985).
Weer anderen beschouwen niet expliciet de contexten, maar de contextproblemen (Treffers & De Moor, 1984), in de overtuiging, dat men meer over de aanbodzijde kan zeggen, dan over de context zelf.
- (2) Vergnaud (1979) kwam ertoe om bij stipsommen als $7 + . = 12$ het schatten als een inverse bewerking op te vatten, omdat kinderen bij dergelijke sommen het schatten als zodanig gebruikten.
- (3) Het verschil tussen actors- en observersperspectief is niet alleen te onderscheiden in activiteiten van leerlingen, ook bij onderzoekers zorgen deze standpunten voor ingrijpende verschillen in het onderzoekswerk (zie hoofdstuk 5).
- (4) Zelfs hele contexten worden door kinderen soms in andere contexten gesubstitueerd (Van den Brink, 1981).
- (5) Sommige kinderen geven bijvoorbeeld aan het groter-dan-teken een operatoire betekenis: in $3 < 4$ wordt 3 door het teken $<$ vergroot tot 4.
Een leerling noteerde dit met een pijl eronder $3 < 4$.
--->

4 Rekenen onderwijzen

4.1 Opvattingen over leren rekenen en rekenonderwijs

Na de ontwerpperiode op de Dreesschool bleek, dat er een opvatting was ontstaan over hoe jonge kinderen leren rekenen.

Het leren rekenen rust ons inziens op twee pijlers:

- de ontwikkeling vanuit kinderlijke noties;
- de overdracht naar formele structuren van het rekenen via conflictsituaties en de refererende pijlentaal.

Met het integratieplan van klas 1 van de Dreesschool is onderwijs gevormd dat op deze twee pijlers berust.

Het pakket Autobussen is een antwoord op de algemeen didactische problematiek hoe het onderwijs moet worden ingericht, zodat:

- * kinderen die nog te weinig of geen notie hebben van rekenbegrippen toch kunnen participeren in het onderwijs en
- * kinderen temidden van hun kleurrijke en emotionele noties zich die rekenmodellen realiseren en abstraheren, die wij van belang achten in het rekenen.

Het antwoord op dit didactische vraagstuk is niet éénduidig en hangt onder meer af van de opvattingen die men heeft over het leren rekenen (1).

4.2 Realistisch tegenover mechanistisch onderwijs

Het integratieplan van klas 1 vertoont opvallende verschillen met het traditionele mechanistische rekenprogramma: er liggen andere ideeën over het leren rekenen aan ten grondslag (2). Het volgend overzicht (zie fig. 4.1) geeft die verschillen kort weer.

4.2.1 *Zich realiseren en vakstructuren leren*

Het realistisch rekenonderwijs is gebaseerd op het 'zich realiseren' van de kinderen: bij een rekenopdracht moeten de kinderen wat ze weten, gebruiken om zich een situatie voor de geest te halen. Dit soort construerend onderwijs gaat daarom uit van noties van kinderen.

In menscontexten, uitgebeeld in rekentoneelspel, kunnen de kinderen in een rollenspel hun ideeën uiten.

De autobuscontext, bestaande uit tal van noties, is op die manier steeds verder uit te breiden; de heersende wetmatigheden van sociale aard zijn aan ieder kind bekend. In het autobusspel speelt de leerling nu eens de rol van chauffeur of passagier, dan weer is hij toeschouwer.

De pendant van de realistische menscontexten in het mechanistische aanvangsonderwijs wordt gevormd door getekende plaatjes en hanteerbare houten rekenstaafjes: de voorwerpcontexten.

Geleid door een specifieke visie op de vakstructuur voert men het optellen en aftrekken met getallen in als rekenhandelingen met tekenpotlood of de staafjes. Deze handelingen worden voorgeschreven; ze zijn de kinderen niet van tevoren bekend. Er wordt gezorgd voor een duidelijke uitleg over welke handeling bij welke operatie behoort. Maar er is weinig eigen inbreng van de kinderen: de voorwerptext is nauwelijks vatbaar voor uitbreiding met noties die kinderen al bezitten.

4.2.2 Conflictsituaties en geleidelijkheid

Het realistisch onderwijs bedoelt met 'zich realiseren' niet alleen 'het construeren van gedachten en voorstellingen', maar ook 'de reactie op een confrontatie' van eigen gedachten met de ideeën van anderen. Dan pas realiseert men zich of de eigen constructie goed of fout was. De leerling wordt zich volgens deze opvatting beter bewust van de rekenbegrippen. Daarom scheppen we in het realistisch rekenonderwijs gelegenheid voor conflictsituaties. Van meet af aan zijn in het ontwikkelingswerk op de Dreeschool deze situaties van onderhandeling en overleg (Bauersfeld, 1983; Stake & Easley, 1978) beklemtoond. De leerling moet zich door het conflict mentaal in tijd of ruimte scheiden van het direct waarneembare (Sigel, 1981). Hij of zij moet de individuele noties bijstellen om met de andere leerlingen tot een gezamenlijke overeenstemming te komen. Die overeenstemming vatten wij op als een eerste, sociaal getinte aanzet tot een rekenbegrip.

In het mechanistisch rekenonderwijs laat men stapsgewijs, met steeds moeilijker opgaven langdurig oefenen. Men tracht fouten te vermijden en staat een mechanisch geleide en geleidelijke voortschrijding voor om een rekenbegrip te verwerven.

4.2.3 Pijlentaal en is-taal

Niet alleen in contexten, maar ook in rekentalen verschillen de beide soorten onderwijs.

In het realistisch rekenonderwijs staat in het begin de pijlentaal centraal met als belangrijkste eigenschap dat de symbolen van die taal versierd kunnen worden. Met de versiering wordt de pijlentaal eerst gebonden aan één context, maar door de versiering te veranderen zal de pijlentaal als intermediair tussen meerdere beeldende contexten dienen. De kinderen kunnen met andere woorden 'handelen in betekenissen' door eenzelfde pijlenopgave op verschillende manieren te interpreteren en de pijlen te versieren, zelfs met het is-teken, waardoor een overgang naar sommen in de is-taal mogelijk wordt.

In het mechanistisch onderwijs daarentegen wordt niet gewerkt met de verschillende betekenissen die kinderen kunnen toekennen aan taalsymbolen. Daar worden de twee representaties - de getallen en de rekenstaafjes - minutieus op elkaar afgestemd; daartoe plaatst men zelfs de rekensymbolen uit de is-taal

tussen de plaatjes of staafjes (3). Dit alles gebeurt buiten de leerling om. Als beschouwer staat hij of zij erbij, zijn of haar eigen kennis wordt niet aangesproken.

4.2.4 Oefenen: zelfstandig sommen maken en bedenken

Door langdurig mechanisch te oefenen met typen sommen en bijbehorende handelingen tracht de mechanistische stroming eerst de overeenkomsten tussen de twee representaties te leren, daarna de rekenregels te automatiseren en tenslotte de rekenkennis te memoriseren. De zin van het oefenen ligt in het rekenen zelf. Individueel oefenen van rijtjes sommen is het eindonderwijs waarop men afstuurt.

In het realistisch onderwijs wordt de zin van het oefenen echter ook elders gezocht, namelijk in oefenvormen die passen binnen noties van kinderen. Niet alleen sommen maken, maar ook bedenken, bijvoorbeeld ten behoeve van andere kinderen. Oefenen is dan geen eindonderwijs in klas 1.

4.2.5 Toepassen

In het mechanistisch onderwijs wordt het cijferen toegepast in kale sommen en in contexten die het cijferen gemakkelijk illustreren.

Bij het toepassen grijpt het realistisch rekenonderwijs onder meer terug op contexten die eerder in het leerjaar zijn ontworpen en op het redenerend rekenen in pijlendiagrammen met specifieke eigenschappen, dat wil zeggen op een soort rekenpuzzels.

In het vervolg van dit hoofdstuk gaan we dieper in op de genoemde kernpunten van onze realistische onderwijstheorie voor groep 3 (klas 1).

4.3 Zich realiseren

4.3.1 'Zich realiseren' in ontwikkeling

Realistisch reken- en wiskundeonderwijs heeft niet zozeer iets te maken met min of meer 'reële' onderwerpen of contexten uit de werkelijkheid, alswel met de wijze waarop kinderen zich die onderwerpen of contexten realiseren.

Deze opvatting over zich realiseren stond centraal gedurende de ontwikkeling van het integratieplan op de Dreesschool. Later hebben de bevindingen met rekenmachines in de midden- en bovenbouw van de Dreesschool gezorgd voor een bestending en uitbreiding van die onderwijsopvatting.

Het belang van het 'zich realiseren' voor het leren rekenen en wiskunde bedrijven werd in 1973 genoemd in een artikel over voorwerpen in de ruimte. Getekende bladeren waren in de klas aan touwtjes opgehangen en we vroegen ons af, hoe kinderen zich de oplossing voor het probleem 'Waar hangt jouw blad?' zouden 'realiseren' (Van den Brink, 1973).

Weer later werd geponeerd, dat het 'zich realiseren' een wezenlijk kenmerk is bij het bedrijven van wiskunde in het algemeen. Achter de wiskundesymbolen, en ook achter empirische verschijnselen, moet een gedachtenwereld worden gebouwd (Van den Brink, 1974). Wiskunde is immers 'de studie van mentale objecten met reproduceerbare eigenschappen' (Davies & Hersh, 1981). Die mentale objecten zijn 'gedachte dingen' (Freudenthal 1984), die in het onderwijs moeten worden geconstrueerd of worden opgeroepen en waarvan de eigenschappen in discussie worden gebracht (zie: conflictsituaties).

4.3.2 Vier maal 'zich realiseren'

Met 'zich realiseren' worden verschillende activiteiten bedoeld.

We noemen:

- De activiteit waarbij de leerling zich, om welke reden dan ook, een voorstelling maakt naar aanleiding van een gegeven taaluiting (een woord, zin of teken, een gebaar, een opdracht).
- 'Realiseren' als het daadwerkelijk uitvoeren van een voorstelling, idee of plan. Dat kan ten behoeve van de ontwerper zelf gebeuren (zich realiseren) of juist voor anderen. Het plan kan met allerlei (taal)middelen tot een waarneembare presentatie worden gemaakt: de realisering als eindproduct van een plan (Lyons, 1968).
- Er is nog een betekenis van 'zich realiseren': zich iets tot eigendom maken. Daarbij gaat het niet om zich een situatie voor ogen te stellen, noch om zichzelf te ontplooiën of een idee daadwerkelijk te verwezenlijken, maar om een idee als persoonlijk bezit te beschouwen en dit (en daaruit blijkt het eigendom) ooit eens zelfstandig te gebruiken of toe te passen. Onthullend in dit opzicht is dat een leerling een eigen idee of oplossing als volslagen nieuw opvat, terwijl het hem nog geen minuut geleden verteld is. Meestal in dezelfde bewoordingen herhaalt hij of zij dan het idee. Maar er is toch een verschil met louter reproduceren. Men herhaalt, maar praat niet na: men doet het op dat moment op eigen initiatief! Pas in zo'n geval kunnen we over 'eigen bezit' spreken. De leerling heeft zijn kennis georganiseerd en kan zelfs uit bekende symbolen op eigen initiatief nieuwe combinaties (producties) maken (fig. 4.2).

Vondsten van kinderen uit de eerste klas van de Dreesschool (mei 1983):

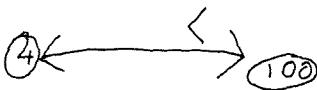


fig. 4.2a Michael

Michael combineert de pijl met het <-teken: 100 kan inkrimpen tot 4.

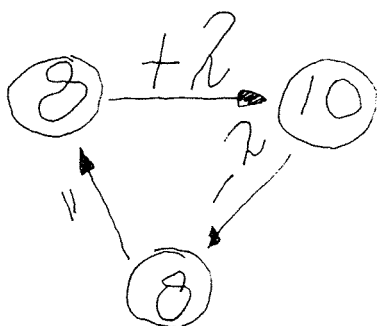


fig. 4.2b Dave

Dave gebruikt de pijl als gericht is-teken.

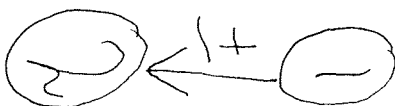


fig. 4.2c Leonie

Leonie maakt eigen combinaties: een pijl onder een is-som en het is-teken als sluitstuk van de pijl.

$$2 \xrightarrow{+1=+1} 3 \rightarrow 4$$

fig. 4.2d Eelco

Eelco maakt de leesrichting duidelijk.

- d. Tenslotte 'zichzelf realiseren' in de betekenis van 'zelfontplooiing': individuele mogelijkheden (ook emotionele) aanboren en tot ontwikkeling brengen. Termen als 'self realisation' (Dewey), 'zelf activering' (Maslow) en 'zichzelf realiseren' (Wijdeveld) verwijzen naar die ontplooiing van het individuele.

Wijdeveld wijst daarbij speciaal op deze mogelijkheden binnen het leren van wiskunde (Wijdeveld, 1980).

Enkele voorbeelden uit de Dreesschool ter illustratie van de vier betekenissen.

Kristel (6;8) bij de omgekeerde stipsom $1 = . - 2$

K.: 'Wat is dit (het 'is'-teken): 'Is'?

O.: 'Ja'.

K.: 'Dan moet hier (op de stip) 4 staan'.

O.: 'Waarom?'

K.: 'Eén (ze steekt de duim op) is 4 (ze kijkt naar de nog omgebogen overige vier vingers van haar hand en vervolgt) eraf 2 (ze leest dat en strekt twee van de gebogen vingers en besluit): dan heb je 2 over'.

Ze realiseerde zich de stipsom dus volgens betekenissen a en b.

Nicole (6;10) bij stipsom $. - 2 = 1$

O.: 'Welk getal moet er op die stip staan?'

N.: 'Twee, en dan eraf 2 is Nee

Wat een stomme som, zeg.

Niet met 2, niet met 1.

Met nul? Nul eraf 2 - gaat ook al niet.'

O.: 'Hoeveel mensen moeten er in de bus hebben gezeten, zodat, als er twee uitgaan, er nog ééntje overblijft?'

N.: 'Wat? Ik heb ... een bus, 2 eruit en dan 1 erin.'

Dan doe je 3 in de bus en 2 eruit en 1 is erin.'

Ze herhaalde het autobusidee voor zichzelf waardoor ze zich het probleem eigen maakt (betekenis c).

Afspraak

Tenzij anders vermeld verstaan we onder het 'zich realiseren' :

zich een voorstelling maken naar aanleiding van een gegeven taaluiting, dus in de zin van betekenis a.

In Engelstalige literatuur spreekt men hier van: 'cognitive representation', een term die onderscheiden moet worden van 'representation'. Met 'representation' wordt een zintuiglijk waarneembare presentatie (overeenkomstig de genoemde betekenis b.) aangeduid.

4.3.3 'Zich realiseren' in het onderwijs: construeren en confronteren

Het 'zich realiseren' beweegt zich tussen construeren en confronteren, dat wil zeggen tussen ontwerpend bezig zijn en beschouwen.

1. Construeren

Naar aanleiding van een opdracht of opgave zal een leerling een eigen voorstelling ontwerpen. Elke onderwijstheorie heeft met dit constructivistische element te maken. Maar het gaat in het onderwijs om meer.

Het 'construeren' betreft niet alleen de rekeninhoud zelf, maar vooral de omstandigheden waaronder de rekeninhoud wordt aangeboden. We zorgden in de Dreesschool voor contexten, waarin het zin had voor kinderen om te construeren.

voorbeelden

- Kale cijferoefeningen krijgen meer zin als kinderen verantwoordelijk worden gesteld om de rekeninhoud voor andere kinderen vast te leggen.
- Om tot het construeren van gedachten, van voorstellingen en uiteindelijk van mentale objecten te komen wordt aan kinderen de vrijheid gegeven om verbanden te leggen met hetgeen ze al weten, ook als die relaties achteraf misschien niet nodig, niet bedoeld of niet juist blijken te zijn.
- De kinderen worden verplicht, genoodzaakt of gestimuleerd om voorstellingen te ontwerpen via didactische handgrepen, zoals onzichtbare hoeveelheden, gebrek-aan-materiaal, rekentoneelstukken.

2. Confronteren

De tweede pool van het zich realiseren is het confronteren. Het accentueert de gebondenheid van noties aan wetmatigheden van allerlei aard.

voorbeelden uit de klas

'Je hebt de schoolbus en je hebt de bus naar oma. Die ene stopt steeds bij de halte en die andere doet dat niet'.

'Hoeveel mensen gaan er in de bus (als je als kind met z'n tweeën op één stoel moet zitten) ?'

'Soms zijn er alleen instappers of uitstappers bij een halte, maar vaak beiden.'

Sociale en fysische regels worden opgeroepen; conflicten komen naar voren, omdat de ideeën van kinderen niet met elkaar overeenstemmen.

Wij beschouwen het leren rekenen als een reactie op deze confrontaties (zie paragraaf 4.3.5), die de wiskundige eigenschappen van de mentale objecten discutabel stellen.

Door die conflicten stellen de kinderen hun individuele noties bij, zodat er een algemene overstemming ontstaat over het hoe en wat er precies uit de context in ogenschouw moet worden genomen. Een intersubjectief gedachteding ontstaat, als de eerste aanzet tot een 'mentaal object'.

Ziehier de betekenis van interactief onderwijs.

4.3.4 Realistische opvattingen in het buitenland

Buiten Nederland worden de realistische opvattingen over het wiskunde-onderwijs door verschillende onderzoekers gedeeld.

In deze paragraaf brengen we slechts hun eerder genoemde namen in herinnering bij de volgende punten:

- contexten: Donaldson, Holt, Bauersfeld, Vergnaud, Cobb, Steffe kennen aan noties een bijzondere plaats toe in het rekenonderwijs;
- conflicten: Balacheff, Bell maken gebruik van conflicten in voortkabbellend onderwijs;
- zinvolheid: Whitney en Von Glasersfeld accentueren het belang van 'passende' rekenkennis;

- pijlentaal: Vygotsky, Von Glasersfeld, Polanyi, Freudenthal zien in reken-talen meer eigenschappen dan alleen het modelmatig invulformulier;
- eigen produkties: Ginsburg, Lakatos, Hadamar toonden dat het onderwijs daaraan niet voorbij kan gaan, met name in zowel de introducerende sfeer, als bij het oefenen en toepassen.

4.4 Contexten

Soorten contexten

Naar aanleiding onder meer van rekenboeken die door kinderen gemaakt werden (zie hoofdstuk 9), vonden we de volgende soorten contexten, die elkaar ten dele overlappen, althans niet uitsluiten.

- conflictsituaties
- zingevende en zin ontnemende contexten
- voorstellingen van kinderen en rekentoneelvoorstellingen
- beeldende contexten: mens-diercontexten, illustrerende voorwerpcontexten, apparaatcontexten en speelgoedcontexten
- rekencontext
- rekensituatie
- dynamische en statische contexten.

4.4.1 Conflictsituaties

Met 'conflictsituaties' worden bedoeld onderwijssituaties, waarin kinderen bewust met het tegengestelde van de eigenschappen van de te leren rekenkundige activiteiten en begrippen in contact worden gebracht. Met verrassende of grappige omstandigheden of veronderstellingen die die eigenschappen storen.

voorbeelden

- Door bij het tellen voorwerpen over te slaan of door te gaan met het tellen ook na het laatste voorwerp, worden de kinderen zich de specifieke eigenschappen van het tellen van hoeveelheden bewust. Dergelijke conflicten werken als 'remmechanismen' op het maar voortdaverende akoestische tellen.
De hoeveelheden voorwerpen remmen die beweging af en leiden aldus het statische hoeveelheidsgetal in.
- 'Voor de halte zitten er acht passagiers in de bus, na de halte drie passagiers. Maar er zijn geen vijf passagiers uitgestapt. Wat kan er gebeurd zijn?'
- Terug van een schoolreisje duiken sommige kinderen weg onder de banken in de bus - hoeveel kinderen zitten erin? ... - een rekenalpje van kinderen (zie voor andere voorbeelden: de apparaatcontexten hieronder, paragraaf 4.4.4).

Door conflicten, verrassingen of rekenalppen is het mogelijk, om dieper dan men op het eerste gezicht zou denken, wiskundige begrippen te laten doorzien.

In de bovengenoemde voorbeelden krijgen de kinderen oog voor één-één-correspondenties, aftelbaarheid, strategieën ontwerpen, eindige hoeveelheden en symbolisering.

Conflictsituaties steunen op het idee, dat begrippen dan pas gevormd worden, indien we ze confronteren met andere omstandigheden of met andere veronderstellingen. Ze vragen van de leerling iets nieuws te ontwerpen: een clou, een oplossing, een verrassing en vormen aldus een kern van het mathematiseren (zie hieronder, paragraaf 4.5.2).

4.4.2 Zingevende en zin ontnemende contexten

Sommige contexten kunnen een zin aan het mathematiseren geven, andere juist een 'tegenzin' oproepen.

Er zijn contexten die er bij uitstek voor zorgen, dat kinderen nut, noodzaak of bedoeling van het mathematiseren ervaren.

Met 'zin' ('het waarom') bedoelen we een bestaansgrond voor de leerling van een rekenhandeling, rekenobject of rekenterm binnen een context.

Het komt erop neer, dat die handeling, dat object of dat woord 'past'. Het in- en uitstapmodel bijvoorbeeld is passende kennis binnen de context van kinderlijke noties over de autobus.

andere voorbeelden

- * Een gespeelde of vertelde autobusrit is gemakkelijker goed na te vertellen, te onthouden of te analyseren met de pijlentaal als steun. Dat maakt die taal zinvol voor kinderen.
- * Bij kegelen in de klas blijkt het moeilijk te zijn om te bepalen wie de winnaar is, als we geen pijlenslierten gebruiken.
- * Bij het zoeken van het totaal aantal verdelingen van vijf passagiers in een dubbeldekker is een systematiek te ontdekken. Een aangepaste notatie, de dubbeldekkernotatie, blijkt daartoe van nut.
Het blijkt, dat een rekentaal in contexten zijn nut aan de kinderen op een persoonlijke wijze bewijst (Van Oers, 1987).
En dat geeft zin en bestaansrecht aan de taal.
- * Rekenmachines en andere apparaatcontexten (zie hieronder, paragraaf 4.4.4) die niet doen wat kinderen verwachten, stellen de kinderen voor de noodzaak om te mathematiseren.
- * Het maken van eigen produkties in de oefenfase werd door kinderen als vanouds gewaardeerd, maar hun inbreng werd zinvoller, toen met de opgaven een rekenboek zou worden samengesteld voor de kinderen die het volgende jaar naar de eerste klas zouden gaan.
Door deze bedoeling kwamen de eigen produkties in een ander licht te staan. De schoolsituatie werkte als een zingevende en daardoor stimulerende context. Kortom, het gaat om contexten die aan kinderen de bestaansgrond van het mathematiseren laten ervaren.

In de voorbeelden spraken we over nut, noodzaak en bedoeling.

De pijlentaal is namelijk 'nuttig', maar niet noodzakelijk om kegelwedstrijden te registreren. Je zou ze ook in een andere taal kunnen weergeven.

Bij 'noodzaak' gaat het om een noodsituatie: de kinderen moesten op de weegschaal een verschil maken tussen gewicht en arbeid (zie onder paragraaf 4.4.4) en zonder een oplossing voor bijvoorbeeld het verschillend reageren van rekenmachines kunnen kinderen niet verder (Van den Brink, 1986).

Een 'bedoeling' voor de eigen produkties werd gevonden in het grotere verband van de echte school.

In deze onderwijssituaties kwamen contexten tot stand die zin gaven aan het mathematiseren.

Kort samengevat zijn de eigenschappen van een zingevende context:

- de context moet 'echt' zijn, dat wil zeggen, hij moet niet louter illustratief zijn, maar eigen wetmatigheden hebben
- en de kinderen moeten er een persoonlijk belang bij hebben.

4.4.3 Voorstellingen

* Met 'voorstellingen van kinderen' bedoelen we de noties: de herinneringen, fantasieën en ervaringen, die een kind zich voor de geest kan halen ('zich realiseren' in betekenis a.).

* Met 'voorstellingen in de klas' zijn de rekentoneelvoorstellingen bedoeld, de min of meer showachtige entourage van het onderwijs. Deze manifestaties hebben zoals gezegd twee zijden: de kinderen zijn toeschouwer en ze zijn toneelspeler.

We stellen ons op het standpunt, dat het daadwerkelijk uitvoeren van theater nodig is.

4.4.4 Beeldende contexten

Met beeldende contexten bedoelen we situaties die buiten het kale rekenen liggen en die bij kinderen gemakkelijk beelden oproepen.

Ervaringen uit de 'bloedeigen wereld van het kind' (Freudenthal, 1982) en vooral uit de buitenschoolse wereld zijn van belang, omdat daarmee gedeelten van de 'echte' wereld binnen de school worden gehaald.

Een onderscheiding tussen ervaringen uit de echte wereld en een door kindere bedachte wereld is op deze leeftijd niet relevant.

In verhalen over een bedachte wereld komen elementen voor die uit ervaringen met de 'echte' wereld stammen, dus de zintuiglijk waarneembare omringende wereld. Anderzijds vertellen kinderen echt gebeurde ervaringen met veel fantasie. De beïnvloeding van 'sprookjeswerelden' en de 'echte' wereld is wederzijds.

We onderscheiden in de beeldende contexten drie soorten, die in het onderwijs verschillende functies hebben: mens-diercontexten, apparaatcontexten en voorwerpcontexten. De voorwerpcontexten bestaan uit illustrerende voorwerpcontexten en speelgoedcontexten.

1. Mens-diercontexten

Menscontexten (autobusrit, winkel) hebben we al besproken.

2. Illustrerende voorwerpcontexten

Deze bestaan uit aan te leren handelingen met voorwerpen waarmee de rekenoperaties geïllustreerd worden (rekenstaafjes, fiches). Dit in tegenstelling met de mens-diercontexten, waarin de kinderen zelf als object fungeren (als passagier, klant, dier en dergelijke).

Ook deze contexten hebben we al besproken. Kern is dat de gebruiksregels voor de rekenstaafjes van buiten af door de onderwijzeres aan de kinderen worden opgelegd.

3. Apparaatcontexten

Het realistisch rekenonderwijs wordt soms ten onrechte beperkt tot de eerder genoemde mens-diercontexten, omdat die uit de werkelijkheid stammen. Maar we dienen niet te vergeten, dat ze meestal kunstmatig, soms kunstzinnig, het onderwijs moeten worden binnengehaald.

Dat is niet het geval met de apparaatcontexten zoals de personenweegschaal, telefoon, rekenmachine en dergelijke.

Die zijn en blijven zelf een stukje van de 'echte wereld' met een eigen specifieke en verborgen structuur. Van die onbekendheid kunnen we in het rekenonderwijs handig gebruik maken.

De vraag bijvoorbeeld 'Maak je zwaarder op deze personenweegschaal' schept een conflictsituatie waarin de grootheden gewicht en arbeid onder andere ter sprake komen.

De apparaten geven de gelegenheid tot het toepassen van het rekenen en wiskunde in (een stukje van) de 'echte wereld', dat nog niet is 'voorbereid' op het onderwijs.

De apparaatcontext (het geheel van modellen en noties dat we erop na houden over een apparaat) is gesloten, in tegenstelling tot de mens-diercontexten: deze is niet vatbaar voor een ongebreidelde uitbreiding met noties van kinderen. Daarin stemt hij met de illustrerende voorwerpcontext overeen. Die is namelijk ook gesloten.

De gebruiksregels en de daarmee samenhangende wiskundige structuren zijn in het apparaat voorhanden, maar dienen nog door de kinderen te worden ontdekt. De context is als zodanig een beeldende context. Hij roept naar aanleiding van de ervaringen ermee, ideeën en suggesties op bij kinderen.

Op dit punt wijkt de apparaatcontext af van de illustrerende voorwerpcontext, waarin de structuur zo gedetailleerd mogelijk gedemonstreerd wordt.

4. Speelgoedcontexten (spel en spelen)

In de speelgoedcontexten kunnen de spelregels willekeurig gekozen worden in het overleg tussen de leerlingen onderling, zoals bij het knikkeren of kegelen.

Per kegelspel moet bijvoorbeeld worden afgesproken of de omgevallen kegels

geteld worden, dan wel de gewonnen punten. Een kwestie van optellen of aftrekken. De context is primair; het rekenen is eraan ondergeschikt.

Andere voorbeelden van speelgoedcontexten zijn de symbolisering van mens-diercontexten (bijvoorbeeld de fiches als buspassagiers), waarbij aan de voorwerpen door de kinderen een betekenis wordt toegekend.

In tegenstelling tot het gebruik van illustrerende voorwerpcontexten ontwikkelt zich in speelgoedcontexten een structuur van binnenuit. De context sluit aan op ideeën van kinderen en is uit te breiden.

4.4.5 Rekencontext

Met het woord 'rekencontext' is het gewone, formele rekenen bedoeld, dat wil zeggen het geheel van contextvrije getallen en bewerkingen, de weetjes en rekenmanieren die niet door beeldende contexten, maar via rekenregels worden gefundeerd (vandaar: 'contextvrije' getallen en bewerkingen).

Het pijlenmodel, voortgekomen uit verschillende beeldende contexten, is een voorbeeld van hoe een model zelf een formele rekencontext kan worden, waarin de kinderen bijvoorbeeld redenerend kunnen rekenen en die ze in tal van situaties kunnen toepassen.

4.4.6 Rekenlessituatie

De situatie in de klas tijdens een rekenles vormt ook een context.

Kinderen herinneren zich sommige situaties immers nog levendig. Ze konden ze bij het leren opnieuw oproepen. In de klasserekenboeken werden bijvoorbeeld veel schetsen van rekensituaties aangetroffen (fig.4.3).



fig. 4.3 Manfred tekent een klassesituatie: juf voor het bord, de leerling met een boek en uitgesproken tekst in de lucht

4.4.7 Dynamische en statische contexten

Van bijzonder belang is de indeling van contexten naar enerzijds de interne of contexteigen activiteiten en anderzijds de externe activiteiten ofwel activiteiten die met de context of het model worden uitgevoerd.

Een veranderingsmodel, zoals het autobusmodel, appelleert aan activiteiten die binnen de autobuscontext gegeven zijn: het in- en uitstappen.

Bij vergelijkingsmodellen (bijvoorbeeld de haltesommen of het balansmodel, en bij deel/geheel-modellen (bijvoorbeeld het dubbeldekkermodel) zijn deze interne activiteiten niet bij voorbaat gegeven. De leerling zelf moet bedenken wat hij met het model gaat doen.

Dit kan tot verschillende interpretaties leiden. Daarom zijn statische contexten als conflictsituaties in het onderwijs te gebruiken.

Ook het drietal mens-dier-, illustrerende voorwerp- en apparaatcontext is hierop te bekijken.

Bij mens-diercontexten en speelgoedcontexten worden interne activiteiten bij de kinderen opgeroepen en sluiten dus goed aan bij hun noties.

Bij illustrerende voorwerpcontexten moeten externe activiteiten eerst worden afgesproken (wat moeten we met de voorwerpen doen?), die vaak niet stroken met wat de kinderen denken.

Bij apparaatcontexten moeten beide soorten activiteiten op elkaar worden afgestemd. Ook die leveren conflicten.

4.5 Pijlentaal

4.5.1 Prototypische onderwijsleergang voor het optellen en aftrekken

We zullen de pijlentaal beschrijven op zes momenten in de onderwijsleergang voor optellen en aftrekken op de Dreesschool.

- Het optellen en aftrekken wordt gestart met allerlei dynamische en beeldende contexten waarin sprake is van interne activiteiten.

De pijlentaal licht één van die activiteiten (als 'modelactiviteit') uit het hele gebeuren: ze maakt binnen de gespeelde contexten de kinderen attent op het optellen en aftrekken.

Echter niet door 'verschraling' van de context zoals met 'abstraheren' veeleer wordt bedoeld, maar juist door binnen een gehele context het model een centrale rol te laten vervullen, bijvoorbeeld bij het instappen van passagiers, het punten tellen en punten bijhouden bij een kegelwedstrijd of tijdens verhalen.

De contextgebonden pijlentaal heeft tot taak om in de autobuscontext de ritten vast te leggen en de puntentelling bij het kegelen bij te houden, enzovoorts. Ze fungeert zodoende voor de kinderen als een onmisbare en dus zinvolle hulp bij het rekenen.

- De contextgebonden pijlen worden per context door de kinderen versierd met franje. De kinderen 'handelen in betekenissen' (zie fig. 4.4 en 4.5).



fig. 4.4 Raymond tekent een verhaal over een poes; Milan een verhaal over een hond

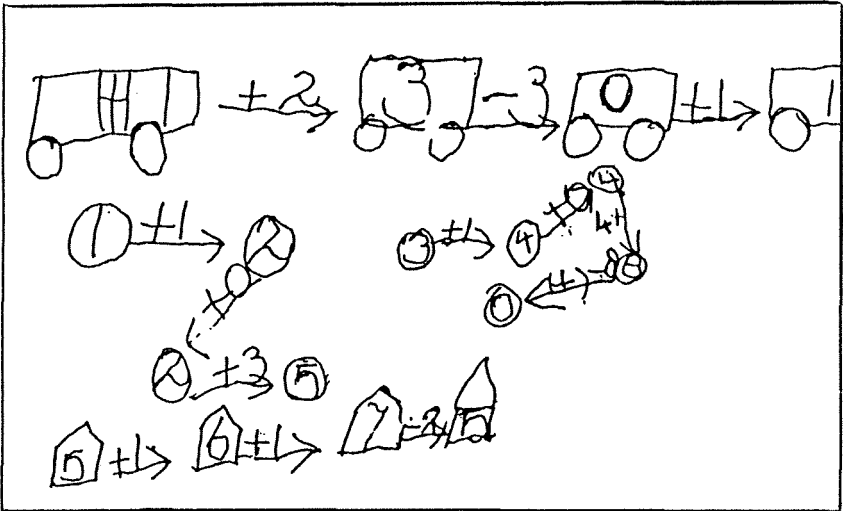


fig. 4.5 Babs tekent autobuspijlen, kale pijlen en een pijlensliert bij een verhaal over klanten in een winkel

- Tussen de beeldende contexten onderling zien kinderen overeenkomsten. Sommige kinderen beschrijven bijvoorbeeld kegelwedstrijden in woorden die ontleend zijn aan het autobusmodel.

De onderzoeker geeft Dave een pijlensliert.

-2	+4	-5
3	----->	1
	----->	5
	----->	0

Dave vertelt de som als een autobusrit: 'Drie in de bus. Twee stappen eruit...'
 O.: 'En als dit nu eens een kegelwedstrijd was, wat dan?'
 D.: 'Drie kegels, eruit twee kegels ...'
 O. valt hem in de rede: 'Eruit twee kegels? Hoe kan dat?'
 D.: 'Ja, bij een bushalte stappen er twee uit'.
 O.: 'Twee kegels stappen uit? Kun je dan niet aan een kegelwedstrijd denken?'
 D.: 'Nee. Ik kan het alleen met een bushalte'.

Door substitutie van contexten via de pijlentaal wordt één van de contexten als model gebruikt in de andere contexten.

Er is sprake van een overdracht van gebruikte taal en procedures. En het is de bedoeling, dat de betekenis van de contextfranje daarbij vervaagt. Door de visuele franje (wieltjes e.d.) weg te laten, ontstaat een nieuw, kaal pijlen-model (veranderingsmodel), ofschoon het beschreven kan worden in termen van het specifiekere autobusmodel.

- De kale pijlensommen gaan een eigen leven leiden, los van de inhoudelijke contexten waaruit ze voortkwamen. De pijlen vormen een kale rekencontext. Dat zal aanleiding tot misvattingen en reflectie geven (zie hoofdstuk 8, paragraaf 8.3.3).

Eerst nu worden de kinderen de relaties tussen de getallen gewaar, die in het autobusmodel als vanzelfsprekende bestanden golden.

De pijlentaal laat dus een 'progressieve schematisering' toe van toneelspel tot kale pijlensom (zie paragraaf 4.5.2).

- De volgende stap is van de kale pijlen naar de formele notatie in de is-taal. Door in de pijlentaal verschillende 'tussen-notaties' te ontwerpen is voor een vloeiende overgang tussen pijlentaal en de notatie in de is-taal gezorgd (zie fig. 4.6).

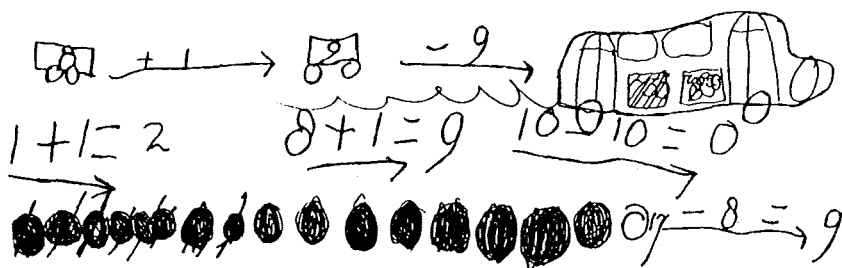


fig. 4.6 Xenia tekent is-sommen met een pijl eronder

Daarmee zijn met name voor rekenzwakke kinderen de wegen naar de bronnen van het inzicht open gehouden. Ook blijft de stap naar het toe-passen van kale sommen voortdurend gehandhaafd.

- Tenslotte worden de pijlendiagrammen zelf een context die indien nodig als één of meer autobusritten zijn te interpreteren (zie fig. 4.7).

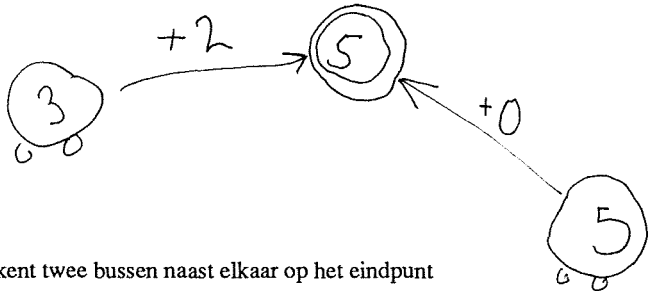


fig 4.7 Dorrie tekent twee bussen naast elkaar op het eindpunt

De pijlendiagrammen zijn als het ware de formalisering van hetgeen in de veranderingscontexten centraal werd gesteld. De pijlendiagrammen vormen een systeem met een eigen wetmatigheid. De kinderen kunnen met deze rekenpuzzels het redenerend rekenen oefenen (zie fig. 4.8).

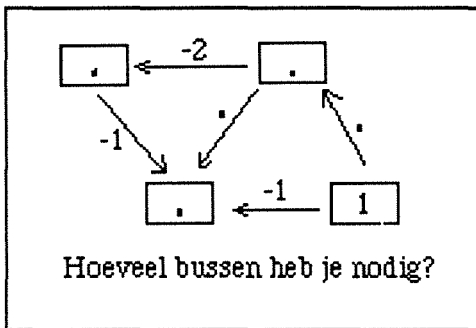


fig. 4.8 een complex pijlendiagram

4.5.2 Pijlentaal en mathematiseren

De pijlentaal heeft verschillende didactische functies.

We noemden al de contextgebondenheid van de taal en de refererende, attenderende en intermediërende functies.

We vullen dit aan met:

- de pijlentaal als oefenmodel van kale pijlendiagrammen, waarvoor echter altijd beeldende contexten zijn op te roepen.
- de persoonsgebondenheid van de taal: geschikt voor notaties van eigen gedachten, om herinnerd te worden aan vroegere contexten, voor reflectie op het eigen rekenen.

Uit deze opsommingen moge blijken, dat de pijlentaal zowel in de horizontale als in de verticale mathematisering een bijdrage levert voor jonge kinderen.

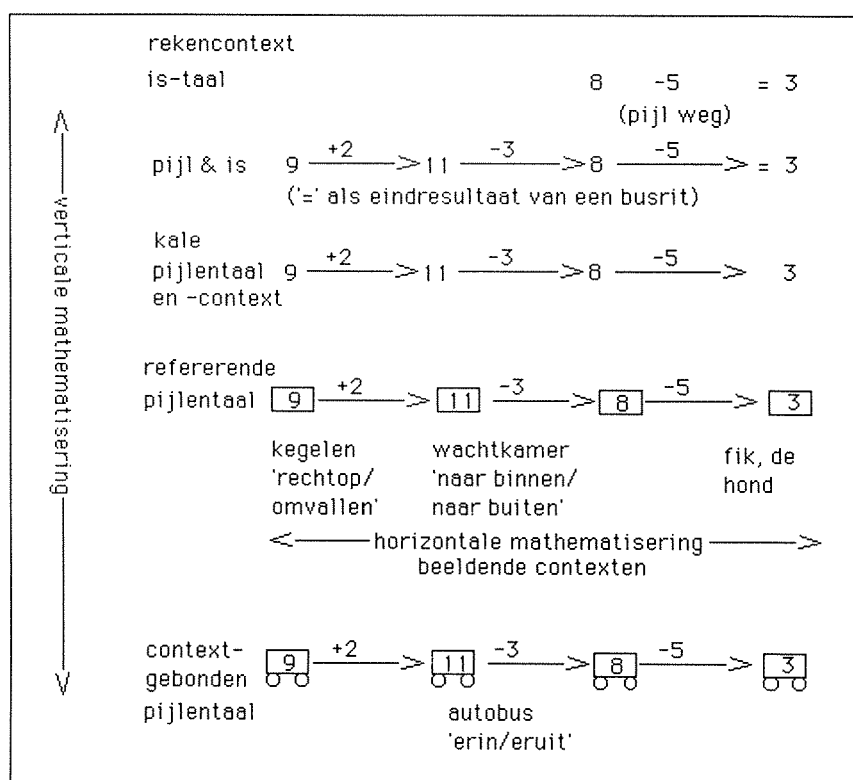


fig. 4.9 pijlentaal en is-taal

4.6 Oefenen

Bij het oefenen werd verwezen naar vertrouwde contexten, die vroeger in het schooljaar aan de orde waren geweest. Stipsommen bijvoorbeeld werden op de Dreesschool via de autobuscontext ingeleid. Pijlenstipsommen waren daardoor doorzichtig voor de kinderen.

De pijlenstipsommen leidden ook in op het redenerend rekenen rondom ingewikkelde kale pijlendiagrammen.

Daarnaast werd de kinderen na elke oefening gevraagd zelf een aantal opgaven van dezelfde soort te bedenken en die op de achterkant van het werkblad te noteren. Dit alles ter oefening en toepassing van het rekenen.

4.7 Samenvatting

We kunnen de realistische onderwijstheorie voor groep 3 in drie punten samenvatten:

1. *Contexten*

- Uitgaand van noties van kinderen in geconstrueerd toneelspel en in eigen produkties. Hiermee worden contexten gevormd als 'reservoirs van kinderlijke noties'.
- Niet alleen het construeren (onderdeel van het zich realiseren), maar vooral het confronteren van noties bepaalt de bewustwording van allerlei noties. Dit is de basis om in het onderwijs conflictsituaties tegenover een te grote mechanische geleidelijkheid te stellen.
- Het construerend toneelspel en de confronterende conflictsituaties zijn contexten voor een interactief onderwijs, waaraan het mathematiseren zin ontleent als nuttige, noodzakelijke of belangrijke activiteit.

2. *Pijlentaal*

- De pijlentaal zorgt dat kinderen op een model binnen de beeldende contexten (zoals autobussen) geattendeerd worden.
- De overdracht van objecten van de ene naar de andere context wordt verzorgd door de conflictsituaties en de refererende, versierbare pijlentaal.
- De pijlentaal functioneert later in het schooljaar als intermediair tussen deze contexten en de traditionele is-taal.

3. *Oefenen*

Zinvol rekenen, waarbij het rekenen zijn bestaansrecht ontleent aan kinderlijke noties, past niet alleen in het introducerend onderwijs, maar ook in het oefenen. Het oefenen moet ingepast worden binnen de noties door geschikte contexten te laten ontwerpen.

We noemen:

- herhaling en verdieping van vroegere contexten zorgen voor het open houden van de 'bronnen van inzicht' en voor toepassingsgebieden;
- een regelmatige, vrije, zelfstandige constructie en produktie van opgaven in de loop van het schooljaar moet het starre oefenen van rijtjes kale sommen beperken;
- het kale pijlenmodel wordt gebruikt voor het redenerend rekenen.

4.8 Noten

- (1) In hoofdstuk 3 zijn verschillende controversen gesignaleerd tussen onderzoekers over het leren rekenen die consequenties hebben voor het rekenonderwijs.

Anderson, Norman en anderen vinden, dat noties te onduidelijk en te complex zijn om te onderzoeken. Zij beschouwen het leren rekenen noodgedwongen als het verzamelen van geëxpliciteerde kennis. Daarom staan ze veel en langdurig oefenen voor en een expliciete informatie over hetgeen moet worden geleerd. Zij pleiten voor een duidelijke uitleg. De leerling moet weten, wat hij of zij moet leren (Anderson, 1982, 1983). Dit is ook de teneur in de oriënteringsfase van Gal'perin, waarin de leerling op allerlei schema's wordt voorbereid (Nelissen, 1987).

Andere onderzoekers zien daarentegen het leren van wiskunde meer als een bewustwordingsproces (Poincaré, 1913; Hadamard, 1945; Polanyi, 1962; Vygotsky, 1964; Freudenthal, 1973; Cobb, 1987).

Freudenthal (1978) wijst daarbij op de rol van een enkel paradigma en accentueert de Socratische methode van de re-invention.

Cobb (1987) somt enkele onderwijsvoorwaarden op waarin het bewustwordingsproces zal optreden: interacties tussen kinderen onderling, met fysische en met abstracte objecten.

- (2) De basisopvattingen van het mechanistische en realistische rekenonderwijs zijn moeilijk te verenigen. Dit moge blijken uit het feit dat, dat de uitgever van de mechanistische rekenmethode op de Nieuwlandschool (NCR) heeft getracht de methode tot een realistische rekenmethode om te werken, maar dat is niet gelukt. Met een totaal andere opzet en andere mensen had hij echter wel succes: De Wereld in Getallen, één van de eerste realistische rekenmethoden in Nederland, werd ontworpen naar Wiskobas' voorbeeld.
- (3) In tegenstelling tot de is-notatie in het mechanistisch onderwijs zijn de in- en uitstappenden in de pijlentaal niet zichtbaar. Dit is met opzet zo gekozen, omdat de kinderen erdoor verplicht worden zich de activiteiten (beleefd in het toneelspel) weer voor de geest te halen.

5 Onderwijs onderzoeken

5.1 Inleiding

Dit hoofdstuk gaat over twee standpunten van methodologische aard, die door het type onderzoek (dichtbij het onderwijsveld en de kinderen) in de aandacht zijn gekomen.

Allereerst blijkt onderwijsonderzoek niet alleen onderzoek van het onderwijs of binnen het onderwijs te zijn, maar het is ook onderzoek dat zich laat inspireren door het onderwijsveld bij het ontwerpen van nieuwe onderzoeksmethoden en -technieken.

Het socio-conflict (Balacheff, 1985), de conflictdiscussies (Bell, 1983), de spel- en speelgoedcontext (Donaldson, 1978), het onderwijzersperspectief (Van den Brink, 1986) en de klasserekenboeken (zie hoofdstuk 9) zijn voorbeelden van nieuwe onderzoeksmethoden die door de onderwijspraktijk zijn geïnspireerd. Een tweede methodologisch standpunt is het wederzijds perspectief. In tegenstelling met bijvoorbeeld natuurkundig onderzoek kan de onderwijsonderzoeker rekening houden met wederzijdse waarnemingssituaties. De onderzoeker neemt de leerling waar, maar wordt ook zelf door de leerling waargenomen.

Beide genoemde benaderingswijzen brengen verschillende methodologische problemen naar voren:

- Hoe betrouwbaar is de waarneming van de onderzoeker?
- Neemt een onderzoeker vanuit een ander gezichtspunt ook hetzelfde waar?
- Welk belang zou de onderzoeker hebben bij bepaalde toetsresultaten?
- Hoe zit het met de herhaalbaarheid, de generaliseerbaarheid en de falsificatie van de resultaten van onderwijsonderzoek?

In dit hoofdstuk zullen we deze problematiek bespreken vanuit verschillend perspectief: vanuit de onderzoeker, de leerling, de onderwijzer en de leerstof.

5.2 Onderzoekersperspectief

5.2.1 *Andere manier van kennen, andere kennis*

Sommige onderzoekers gaan uit van het 'actor's perspective' (Mackay, 1969): onderzoek vanuit het gezichtspunt van de uitvoerder, de daadwerkelijke uitvoering. Anderen vertrekken vanuit een onderzoekssituatie waarin de lerende als beschouwer optreedt.

Dit verschil heeft consequenties voor het kennen en leren. Kennen vanuit het standpunt van de uitvoerder is wezenlijk anders dan vanuit het standpunt van de beschouwer. Van oudsher heeft men getracht het argument te weerleggen, dat er geen geschikte logische manier is om de objectieve waarheid van kennis te toetsen, indien het kennisobject alleen toegankelijk is door juist een andere manier van kennen (Von Glasersfeld & Cobb, 1983).

De 'actor' en de 'observer' kennen elk de wereld anders, via andere zintuigen, via andere handelingen.

De keuze van de onderzoeker voor een van beide standpunten heeft ingrijpende gevolgen voor zijn onderwijsleertheorie.

Neem bijvoorbeeld twee theorieën over het tellen: die van Gelman & Gallistel en die van Steffe c.s.

5.2.2 'Actor perspective' en 'observers perspective' bij het leren tellen

Door Gelman & Gallistel (1978) werden vijf voorwaarden ('principles') genoemd, die nodig zijn alvorens de leerling een correct telresultaat zou kunnen bereiken.

De leerling moet tussen de hoeveelheid en de rij telwoorden een één-één-verbinding kunnen leggen, een vaste volgorde handhaven in de getallenrij, het laatste getal als hoeveelheidsgetal zien, inzien dat het voor elke collectie geldt en dat de voorwerpen door elkaar geteld kunnen worden zonder dat het aantal verandert.

Deze voorwaarden liggen nogal voor de hand. Ook het antwoord op de vraag hoe ze zijn te bereiken, brengt weinig nieuws: door het tellen intensief te oefenen (Resnick, 1983). In het onderzoek van Gelman & Gallistel werd het tellen vanuit het observer's perspectief benaderd.

De vorderingen werden weergegeven in termen van de vijf van te voren bedachte principes en niet als veranderingen in de betekenis van het tellen of het belang van het tellen voor de teller zelf.

Vanuit het actor's standpunt bezien schept het kind het tellen. Het is een eigen (re)productie van een serie akoestische, ritmische telwoorden. Hij of zij kan die activiteit dan nog niet tot object van reflectie maken (Steffe, Von Glasersfeld, Richard & Cobb, 1983).

Daarvoor zou een reorganisatie nodig zijn van de akoestisch, ritmische telactiviteit zoals de leerling zich die aanvankelijk voorstelde.

Van den Brink (1984) trachtte bij het tellen deze reorganisatie met conflicten uit te lokken door het akoestisch ritmische tellen af te remmen met behulp van kleine hoeveelheden voorwerpen.

Door in een kringetje rond te tellen of door voorwerpen opzettelijk over te slaan ontdekten de kinderen binnen het akoestische tellen wat onder het tellen van hoeveelheden moest worden verstaan: elk element één en niet meer dan één keer aanwijzen.

Dit was duidelijk een reorganisatie ten opzichte van wat tellen aanvankelijk voor de actor betekende, namelijk ritmisch akoestisch tellen, los van hoeveelheden voorwerpen.

Beide theorieën over het leren tellen lijken op hetzelfde neer te komen: het gaat om één-één-correspondentie en om volledig uittellen. Maar de weg er heen is een volstrekt andere en het resultaat in zekere zin ook.

Terwijl Gelman & Gallistel hun principes als voorwaarden stelden, vonden Steffe c.s. de middelen (voornamelijk conflictsituaties) om vanuit de bewegingen van de teller tot de ontdekking van het statische hoeveelheidsgetal te besluiten, dus om van actor tot observer te veranderen.

Dit staat in contrast met de arbitraire afspraak van Gelman & Gallistel om het laatst genoemde telwoord tot hoeveelheidsgetal uit te roepen. Deze afspraak is een te zwak criterium om na te gaan of een kind het hoeveelheidsgetal wel kent (Bessot & Comiti, 1981).

5.2.3 Rechtvaardiging van dit onderzoek: objectiviteit

De strijd tegen de eigen vóóroordelen en voorkeuren (1) moet door de onderzoeker fel gestreden worden.

Hoe is met andere woorden het belang uit te bannen dat de onderzoeker zou hebben bij bepaalde resultaten van zijn onderzoek? Bijvoorbeeld resultaten die aangeven dat het onderwijs wat op de Dreesschool is ontwikkeld, zeer geschikt is voor kinderen. En als dit inderdaad het geval zou zijn, hoe kan men zich dan indekken tegen de valse gène, die zo'n positief resultaat zou opwekken?

Kortom: hoe is de objectiviteit te waarborgen?

De objectiviteit - recht doen aan het object, in de zin zoals Smaling (1987) bedoelt - is naar onze mening het meest gediend door het object van vele kanten te onderzoeken. Smaling spreekt in dit verband over het Von Münchhausen-dilemma: 'schotsjes springen' van de ene onderzoeksmethode naar de andere, wetend dat elke afzonderlijke methode op zichzelf niet tot objectiviteit zal kunnen leiden.

De door ons geconstrueerde prototypische leergang voor het optellen en aftrekken in klas 1, en wel in het bijzonder het pakket Autobussen, werd daartoe aan vier verschillende soorten onderzoek onderworpen.

Ten eerste was er een samenwerkingsproject tussen het Cito en het Iowo aangaande een doelstellingenonderzoek rondom het Autobussenpakket.

Ten tweede zijn met de onderwijzeressen die in de afwikkelingsperiode onderwijs gaven evaluatiebijeenkomsten belegd om als neerslag van hun onderwijservaringen een pakket met didactische principes samen te stellen, waarin ieder zich kon vinden.

Ten derde is een hypothesenvormend onderzoek uitgevoerd door in gesprekken met kinderen van één leeftijdsgroep mathematisch-didactische opvattingen uit het pakket te toetsen.

Tenslotte is er een vergelijkend onderzoek verricht tussen het realistische rekenonderwijs op de Dreesschool en het mechanistische rekenonderwijs op de Nieuwlandschool.

De eerste drie projecten worden besproken in hoofdstuk 6; voor het vergelijkend onderzoek verwijzen we naar hoofdstuk 7 en verder.

In een dergelijke onderzoeksopzet houden we rekening met de beoordeling van het pakket Autobussen door verschillende belanghebbenden, te weten:

- * buitenstaanders (in het Cito-Iowo-project, in het vergelijkend onderzoek en bij andere deskundigen (2)),
- * de onderwijzeressen als eerste gebruikers (in de evaluatiebesprekingen (3)),
- * de kinderen (in het hypothesenvormend onderzoek).

De vier onderzoeksprojecten verschilden onderling in type onderzoek, onderzoeksdesign, onderzoeksmethoden en onderzoeksmiddelen, zodat ook in methodologische zin sprake was van wisselend perspectief.

5.3 Leerlingperspectief

5.3.1 *Wederzijdse observatie*

De onderzoekssituatie van toetsgesprekken, dat wil zeggen gesprekken van maximaal 10 minuten met individuele kinderen (zie hoofdstuk 7, paragraaf 7.1.2), leidde in op een nieuwe vorm van observeren: de wederzijdse observatie.

ontstaanswijze

De onderzoeker had de gewoonte om tijdens de toetsgesprekken allerlei zaken (gedrag, uiterlijkheden, handelingen, en dergelijke) nogal precies op te schrijven. Dit vergde veel tijd. De kinderen moesten soms lang wachten. En dat vond hij niet terecht.

Om die wachttijd te doorbreken en een ontspannen sfeer te behouden, las de onderzoeker voor wat hij opschreef. Deze werkwijze had verschillende gevolgen.

- Allereerst werd de bedoelde ontspannen sfeer inderdaad bereikt.
- Maar de kinderen merkten bovendien - voor sommigen tot hun verbazing - dat hetgeen werd opgeschreven over hen ging. Dat was veel kinderen blijkbaar nooit opgevallen. En ze waren er trots op dat alles wat ze zeiden of deden, werd genoteerd.
- Ze corrigeerden de onderzoeker dan ook als hij een fout had gemaakt bij het noteren.
- Om hem te helpen bij het opschrijven, realiseerden ze zich wat ze nu wel en niet hadden gedacht of gedaan.
- Ze reflecteerden dus op hun eigen gedachten en kwamen als het ware als mede-observator naast de onderzoeker staan.
- Op deze wijze kregen ze pas door wat hij eigenlijk van hen wilde weten. Want met vragen als 'Waarom heb je dat gedacht?' en 'Hoe heb je gedacht?' was hen dat niet duidelijk te maken. Ze antwoordden dan vaak met 'Daarom!'. De bedoeling van de onderzoeker om te weten te komen hoe het kind heeft gedacht moet aan het kind blijkbaar zelf bekend zijn.

Door de methode van wederzijdse observatie wordt de proefpersoon betrokken in het eigenlijke onderzoekswerk en vat daardoor beter de bedoeling.

technieken

Tijdens de toetsgesprekken werden, geïnspireerd door het onderwijs, verschillende sociale technieken gevonden die bij het wederzijdse observeren konden worden aangewend.

Ik noem:

- Direct voorlezen van het protocol of in aansluiting op het noteren of na een grote tijdsprek.
- Conflicten en verrassingen gebruiken:
 - de onderzoeker houdt zich van den domme
 - de onderzoeker maakt opzettelijk fouten in zijn registratie en legt die de leerling voor.
- Spelsituaties creëren:
 - de leerling hardop laten voorlezen van wat de onderzoeker over hem opschreef;
 - net doen alsof de onderzoeker weet wat de proefpersoon gedacht heeft door te 'bluffen' of door er een spelletje van te maken: 'Ik weet het - jij mag raden, wat ik over jouw antwoord zal denken';
 - een rolwisseling tussen onderzoeker en onderzochte.

discussie

Kwalitatieve onderzoeksmethoden en in het bijzonder het klinische interview, zijn nauwelijks kritisch onderzocht of verder ontwikkeld (Ginsburg, 1981). Aanvankelijk trachtte men het klinische interview te verbeteren door de zelf-waarneming (introspectie, retrospectie) te versterken (De Corte, Lowyck & Verschaffel, 1986).

De methode van de zelf-observatie was echter niet nieuw. In veel wetenschappen wordt ze toegepast om data te verzamelen en om die met elkaar in verband te brengen.

'Bij de waarneming in de biologie is het object een levend wezen, dat ook zichzelf waarneemt en dus bij kan dragen tot het geven van inzicht in de feiten. De mens - bij ziekte het object van de geneesheer - is (...) de hoogst ontwikkelde zelfwaarnemer wiens observaties een belangrijk onderdeel uitmaken van het medisch onderzoek.' (Wiebenga, 1967)

Dat geldt ook binnen het klinische interview dat de psychiater of de onderwijsonderzoeker afneemt. Om het klinische interview te verbeteren werden technieken bedacht: de patiënt of leerling moest hardop denken, dan kon direct worden gehoord, wat er werd gedacht. Of er werd gekozen voor twee in plaats van één proefpersoon, zodat uit hun onderlinge discussies hun denkbeelden konden blijken.

Ook de actief participerende observatie waarin de onderzoeker zich bewust is van zijn eigen interventies op het gedrag van de proefpersoon past in dit kader: de proefleider helpt de proefpersoon tot zelfobservatie.

Kenmerkend voor al deze verbeteringen van het klinische interview is dat uitsluitend de opvattingen van de proefpersoon in het geding zijn. De interpretaties van de proefleider over die opvattingen blijven buiten schot.

Als waarnemer staat hij buiten het gebeuren, stuurt slechts het gedrag van de proefpersoon met vragen (Giddens, 1979). Hij ziet het aan, maar laat zichzelf niet zien (soms zelfs geheel verscholen achter een 'one-way-mirror').

De waarnemer voelt niet de behoefte om zijn proefpersoon mee te delen wat hij ervan vindt of zelfs niet, wat hij meent gezien of gehoord te hebben.

Maar is het criterium bij de beoordeling van onderzoeksuitkomsten, bij de bepaling van de merites van de interpretaties van de onderzoeker, niet de mate waarin de betrokkenen zich daarin kunnen herkennen? (Stokking, 1984).

De methode van de wederzijdse observatie maakt gebruik van het feit, dat de leerling niet alleen zichzelf waarneemt, maar dat hij of zij ook bij machte is om de interpretaties van de onderzoeker waar te nemen - mits die maar worden meegedeeld. De proefpersoon wordt competent geacht om waarnemingen en interpretaties van de proefleider te beoordelen.

De methode biedt de onderzochte de rol van waarnemer aan, erkent zijn denkbeelden en handelingen als iets eigens dat meestal afwijkt van de ideeën van de onderzoeker en tracht met allerlei sociale technieken (direct voorlezen, hardop laten voorlezen, conflicten en verrassingen gebruiken, grappen maken, spelsituatie creëren) die afwijkingen ter discussie te stellen.

De wederzijdse observatie is objectief in die zin dat zij recht doet aan het object van onderzoek. Ze vormt een nieuw perspectief voor het waarnemen in onderzoek van het onderwijs.

problemen

Er bestaan argumenten die vóór de methode van de wederzijdse observatie pleiten en argumenten die de betrouwbareheid ervan beklemtonen. We verwijzen kortheidshalve naar Smaling (1987) en volstaan hier met het noemen van enkele kwesties die om nader onderzoek vragen:

- niet elke techniek, die eerder genoemd werd, leidde tot het beoogde resultaat;
- hoe werkt de methode en zijn technieken bij kinderen van verschillende leeftijden?
- de afweging van de methode ten opzichte van andere onderzoeksmethoden en -technieken moet worden gemaakt.

5.3.2 Onderwijs als bron voor onderzoeksmethoden en -technieken

De laatste jaren wordt door sommige onderwijsonderzoekers de methode van observeren en bezinnen op protocollen ten behoeve van onderwijsontwikkeling als zinvoller beschouwd dan de informatie die uit statistische significantie-tests wordt verkregen.

Een aantal deskundigen richt zich tegen deze statistische tests (Carver, 1978) en pleit ervoor om terug te keren naar de data binnen hun onderwijscontext, dichtbij de leerling en de onderwijzer.

Dit zou ons inziens niet alleen voor de data moeten gelden, maar evenzeer voor de methoden en technieken van onderzoek.

Zijn er, net als het wederzijdse observeren, binnen het onderwijs nog andere kwalitatieve onderzoeksmethoden te ontdekken of te ontwikkelen?

We menen dat bij uitstek in het onderwijsveld in ieder geval ideeën kunnen worden opgedaan om nieuwe wetenschappelijke onderzoeksmethoden en -technieken te ontwerpen of oude te verbeteren.

Geïnspireerd door het kleuteronderwijs is voor het wederzijdse observeren de onderzoekstechniek bedacht van 'je van den domme houden'. Tevens is het idee ontstaan om spel-, speel- en conflictsituaties als onderzoekssituaties te beschouwen en om te observeren vanuit het standpunt van de onderwijsgevende (Van den Brink, 1984).

In het Dreesschoolonderwijs waren de kinderen gewoon om na elke taak eigen produkties uit te voeren. We hebben deze didactische gewoonte overgenomen door de kinderen bijdragen voor een rekenboek te laten ontwerpen. Dat rekenboek kozen we als criteriummaat om de prestaties op beide scholen te vergelijken (zie hoofdstuk 9).

Kortom, we hebben ervaren (en de voorbeelden hierboven illustreren dit), dat het onderwijsveld voor onderzoekers een scala van nieuwe onderzoeksmethoden en -technieken in petto heeft die dicht bij het onderwijs staan dan de traditionele tests.

5.4 Onderwijzersperspectief

5.4.1 Aanbevelingen voor onderwijs

We noemen drie problemen rondom het geven van aanbevelingen voor de onderwijsgevende naar aanleiding van ons onderzoek.

Het vergelijkend onderzoek werd uitgevoerd op twee scholen (Dreesschool en Nieuwlandschool) met extreme vormen van onderwijs.

We kunnen per school aanbevelingen doen op grond van gevonden leerresultaten en gevonden onderwijs. Die aanbevelingen moeten echter berusten op een vergelijking met de resultaten verkregen op de andere school, anders is een verbetering of verandering niet vanuit ervaring te geven.

Als je bijvoorbeeld vaststelt dat een ongewenst leerlingresultaat op een school toe te schrijven is aan een bepaalde onderwijssituatie, dan kun je niet zomaar aanbevelen om de onderwijssituatie in een bepaalde richting te veranderen tenzij je op de andere school indicaties vond die zo'n verandering rechtvaardigen. De introductie van optellen en aftrekken is er een voorbeeld van in dit onderzoek. Door nu afwisselend vanuit de ene naar de andere school te kijken, zijn manco's en voordelen van beide te registreren en zijn verbeteringsvoorstellen te doen.

Hiermee zal 'het onderwijs in het algemeen', zich plaatsend tussen de beide uiterste vormen van onderwijs, zijn voordeel kunnen doen.

Een ander probleem is dat een leerresultaat niet altijd met zekerheid is toe te schrijven aan een bepaalde onderwijssituatie. Meestal bestaat er slechts een vermoeden.

Door de onderwijssituaties en leerprestaties zeer nauwgezet te volgen op de Dreesschool en de Nieuwlandschool en die met elkaar te vergelijken, zullen we zekerheden, vermoedens en wensen kunnen onderscheiden. Onderzoek van het gegeven onderricht in de klas is daarom een primaire voorwaarde (zie hoofdstuk 7, paragraaf 7.2).

Ten derde moet ook nog nader worden omschreven wat 'beter' onderwijs is. Er zijn verschillende criteria mogelijk.

Als de leerlingen 'betere' resultaten boeken (minder fouten maken, sneller begrip krijgen) zou de ene soort onderwijs 'beter' te noemen zijn dan de andere.

Je kunt echter ook op grond van een onderwijsvisie die je aanhangt besluiten welk onderwijs beter is, ongeacht de leerlingresultaten. Uit de evaluatiebesprekingen met de onderwijzeressen (hoofdstuk 6) bleek bijvoorbeeld, dat iedere onderwijzeres eigen keuzes had gemaakt over hoe en wanneer een rekenonderwerp behandeld moest worden en hoe ze vond beter onderwijs te geven.

De opvattingen op basis waarvan men gekozen had, waren hardnekkig en vrijwel niet te veranderen. Zelfs niet als de leerlingresultaten slecht waren. Het volgende jaar maakte een onderwijzeres toch weer dezelfde keuze met hetzelfde nadelige gevolg voor de leerlingen. Alleen via adviezen van collega's waren die keuzes enigszins te beïnvloeden.

Om aanbevelingen te doen voor het onderwijs is het in ieder geval nodig om de leerlingprestaties te plaatsen in het daadwerkelijk gegeven onderwijs en binnen de daarachter liggende opvattingen en keuzes van de onderwijsgevende.

5.4.2 Gebruikswaarde van het onderzoeksobject

De eis om generaliseerbare gegevens te verzamelen is in ons onderzoek niet gesteld. Het rekenonderwerp is al in alle nieuwe rekenmethoden geïntegreerd (zie onder andere De Jong, 1986). Hieruit blijkt de gebruikswaarde van de pijlentaal in zijn algemeenheid (Smaling, 1987).

In ons onderzoek ging het om andere kwesties dan het verzamelen van generaliseerbare gegevens.

We vroegen ons af waarom het Autobuspakket beschouwd wordt als een betere context om het optellen en aftrekken aan te leren dan de traditioneel mechanistische onderwijsleergang. Daartoe stelden we een vergelijkend onderzoek in, waarin op beide scholen zowel onderwijs als leerprestaties in kaart werden gebracht.

De beide onderwijsvormen waren uitersten. Elk leverde bepaalde leerlingprestaties op. En daarmee krijgt de onderwijsgevende een indicatie van de te verwachten leerlingprestaties indien al dan niet voor het pakket Autobussen wordt gekozen.

5.4.3 Controleschool of gelijkwaardige partner?

De bovengenoemde kwestie van 'generaliseren tussen uitersten' was reden om het mechanistisch onderwijs op de Nieuwlandschool niet slechts als controle-conditie, maar gelijkwaardig aan het Dreesschoolonderwijs te onderzoeken. De scholen vormden elkaars decor. Door deze keuze hebben we niet één, maar beide onderwijssoorten intensief onderzocht op positieve en negatieve resultaten bij kinderen. Het mechanistische rekenonderwijs zou toch ook positieve kanten kennen en het realistische ook negatieve, veronderstelden we.

Daardoor werd het doel van het onderzoek boven de beide scholen uitgetild. Elk van de twee scholen kon bijdragen leveren om toekomstige ontwikkelingen in het onderwijs te versnellen.

5.4.4 Herhaalbaar of reconstrueerbaar

Herhaalbaarheid in de zin van dat onder dezelfde omstandigheden dezelfde resultaten worden bereikt, was en is in dit onderwijsontwikkelingsonderzoek niet als eis te handhaven.

Allereerst zijn onderwijsomstandigheden nooit gelijk. Dat bleek bijvoorbeeld in de evaluatiebesprekingen met de Dreesschool-onderwijzeressen: elke onderwijzeres gaf haar eigen specifieke invulling van hetzelfde Autobusprogramma.

Maar anderzijds bleek dat het Autobusprogramma goed was te reconstrueren door een nieuwe onderwijzeres.

Die reconstructie kwam echter niet zozeer tot stand doordat men gelijke omstandigheden of technieken oplegde, maar veeleer omdat men informatie gaf over achterliggende didactische principes, waardoor de onderwijzeres niet verplicht werd slaafs rekenlessen te herhalen, maar uitgenodigd werd aan het onderwijs eigen bijdragen te leveren.

Deze reconstructie-opvatting sluit nauwer aan op de gangbare onderwijspraktijk dan op het idee dat lessen en resultaten letterlijk herhaalbaar zijn. Ook het leergedrag van de kinderen duidt daarop.

Kinderen in ontwikkeling veranderen per definitie. Toen we kinderen confronteerden met antwoorden van henzelf bleek de tijdsfactor zeer belangrijk voor de herkenning van zichzelf in die antwoorden. Uitspraken die kinderen twee jaar geleden deden, zeiden hen niets meer, net zo min trouwens als een protocol dat slechts één maand oud was! (Daarom ook proclameerden we het voorlezen van protocollen direct na of tijdens het noteren - zie paragraaf 5.3.1: wederzijdse observatie).

Het herhalen van de situatie van eertijds leverde echter wel een gedrag op dat we als bezinning op eigen activiteiten zouden kunnen kenschetsen. In dat opzicht heeft het herhalen ook een belangrijke functie voor de kwalitatieve onderzoeker. Kortom, de herhaalbaarheid vervangen we door de reconstrueerbaarheid waarbij de onderwijzeres, leerling of onderzoeker zich op eigen wijze op de onderwijs- of onderzoekssituatie bezint (4).

5.5 Leerstof in de praktijk van het onderwijs: methodegebruik en taken tellen

Uit de evaluatiebesprekingen bleek, zoals gezegd, dat er van een uniform onderwijs met hetzelfde Autobussenprogramma geen sprake was. Ondanks onderling overleg en begeleiding weken de uitvoeringen sterk af, zelfs op essentiële punten (hoofdstuk 6).

Analyses van rekenmethoden zijn daarom altijd onvolledig. Ze geven slechts een indicatie voor mogelijk gebruik.

Anderzijds is onderzoek naar het werkelijk gebruik van de methode onontbeerlijk om bepaalde leerlingresultaten aan bepaalde onderwijssituaties te kunnen toeschrijven.

Vandaar onze zorg voor nauwkeurige registratie van het onderwijs van dag tot dag op de Dreesschool en de Nieuwlandschool.

Verschijselen uit de praktijk, waarmee men het onderwijs beschrijft (onderwijstijd, volgorde van rekenonderwerpen, gebruikte contexten, rekentalen en oefensommen), blijken bovendien meetbare parameters te zijn om onderwijssoorten te vergelijken en die zelfs direct als onderzoeksresultaten zijn te presenteren. Daarom hielden we onder andere het aantal aangeboden en gemaakte taken en sommen bij, verdeeld in soorten opgaven, met de aantallen goede en foute sommen (zie hoofdstuk 7) in de overtuiging dat het ontbreken van dit soort tellingen in ons onderzoek aanleiding zou kunnen geven tot onderwijsvreemde conclusies.

5.6 Samenvatting

Onderzoek zoals dat ons voor ogen stond, dient vanuit verschillende invalshoeken uitgevoerd te worden: vanuit de leerstof, de leerkracht, de leerling en de onderzoeker. Niet eenzijdig, maar minstens wederzijds.

Daarnaast stelden we dat het onderwijs als bron kan dienen voor nieuwe onderzoeksmethoden en -technieken en dat nauwkeurige registratie van de onderwijspraktijk directe onderzoeksresultaten oplevert.

5.7 Noten

- (1) Er zijn drie onderwerpen die gedurende het vergelijkend onderzoek de onderzoeker hebben gecharmeerd.

- *de rekentoneelspelen*

Trudy (de onderwijzeres van de Dreesschool) toonde met haar voorliefde voor dramatische expressie dat dit niet beperkt hoefde te blijven tot autobusritten door de klas. Tijdens de discussie met Henriëtte (Nieuwland-school) en Trudy, werd voorgesteld om een rekenspelenboek te ontwerpen

waarin de suggesties voor dramatische expressie verzameld zouden kunnen worden. Het voordeel van rekentoneelspel is overigens genoegzaam aangetoond (snelle introductie van + en - ; toepassingsgebied voor later in het jaar), zodat de onderzoeker wat dit onderwerp betreft geen 'partijdigheid' kan worden verweten.

- *de rekenboeken*

Naar aanleiding van de traditie op de Dreesschool om na elke opdracht zelf sommen te bedenken op de achterkant van het werkblad ontstond onder invloed van het vergelijkend onderzoek tussen beide scholen het idee bij de onderzoeker (oktober 1982) om op de Dreesschool een rekenboek te laten maken voor de kinderen van de Nieuwlandschool. En ook omgekeerd: één op de Nieuwlandschool voor de Dreesschool-kinderen.

De rekenboeken zijn in dit onderzoek uiteindelijk gebruikt als criteriummaat om eigen constructies van kinderen te vergelijken, zowel op de D als op de N. Ook hier is van partijdigheid geen sprake.

- *gebruik van opvattingen en misvattingen van kinderen*

Het idee om te leren van eigen produkties (opvattingen en misvattingen) van kinderen was al oud. In het artikel 'Laat ze voor je uitlopen' (Van den Brink, 1973) werd een terughoudendheid bij de onderzoeker/ontwerper bepleit om achter de individuele ideeën van kinderen te komen teneinde er onderwijs van te kunnen maken. De aandacht voor produkties van kinderen van onderzoekerszijde werd later door Treffers (1986) gekenschetst als een onderwijs-aspect.

Deze drie voorkeuren van de onderzoeker zijn wel aan de orde geweest, maar hebben niet tot een partijdige beoordeling kunnen leiden, omdat ze zowel op de D als op de N aan bod kwamen.

(2) Argumenten ter rechtvaardiging van dit onderzoek vonden we bij derden. We noemen:

- het verschijnen van het onderwijsleerpakket Autobussen in alle rekenmethoden in Nederland en in enkele buitenlandse rekenmethoden;
- didactische analyses van het materiaal werden aan verschillende externe deskundigen voorgelegd en ter discussie gesteld (Bbvoorbeeld het idee over contextgebonden getallen);
- de weging door externe deskundigen van kernpunten van het Nationaal Plan voor het reken- en wiskundeonderwijs met name die welke het aanvankelijke wiskundeonderwijs betroffen;
- het voorleggen van interimresultaten van het onderzoek aan een internationaal wetenschappelijk forum (PME; ICME);
- het vergelijken van de resultaten met door ons en anderen uitgevoerd onderzoek (akoestisch tellen en onderzoek rondom rekenmachines);
- bevestiging van onderzoeksresultaten en -theorie in buitenlands onderzoek (Von Glasersfeld, Steffe, Fuson, Cobb).

- (3) We vroegen de onderwijzeressen om commentaar. De onderwijzeres van de Nieuwlandsschool heeft de onderwijsteksten en toetsresultaten doorgelezen en akkoord bevonden.

Tijdens de discussies die we na het onderzoeksjaar hadden, plaatste ze bijvoorbeeld de volgende kanttekeningen bij het onderzoek:

- a. zou ook niet het (voorbereidende) kleuteronderwijs op de N moeten worden bekeken?
- b. de toetswijze is op het Wiskobasprogramma afgestemd;
- c. het onderwijs op de N had meer begeleid moeten worden.

Onze antwoorden waren:

ad a

Nee, omdat ook op de D het klassikale kleuteronderwijs niet bij het onderzoek werd betrokken.

Ze verwierp bovendien zelf de kleuterschoolinvloed door de plak- en knipoefening in de rekenmethode (NCR) over te slaan.

ad b

De toetsgesprekken op de D en de N gingen niet uitsluitend over Wiskobas-onderwerpen. Systematisch werden ook onderwerpen en werkbladen uit de N voorgelegd aan D-kinderen. We wisselden de herkomst van toetsoefeningen af.

ad c

Begeleiding werd op beide scholen uitgesloten. Er werd alleen een registratie gemaakt van het onderwijs via dagboeknotities, video-opnamen, observaties in de klas en registratie van de vorderingen in de rekentaken - zo evenwichtig mogelijk op beide scholen. We vroegen de kinderen wat ze van onze interpretaties dachten (zie het wederzijds observeren) en we zochten naar negatieve en positieve leerresultaten bij zowel D-, als N-kinderen.

- (4) Nog een enkele opmerking over het begrip falsificatie. We menen dat dit begrip tot uiting komt in de verrassingen, die kinderen de onderwijzeres en de onderzoeker bereiden. Kinderen ontwikkelen immers subjectieve 'lokale theorieën', waarmee ze een probleem benaderen en die meestal van de lokale theorie van de onderzoeker afwijkt. Daarmee wordt onze kennis en inzicht over het rekenen van kinderen uitgebreid of veranderd, onze theorieën gefalsificeerd.

6 Drie projecten van ontwikkelingsonderzoek

6.1 Inleiding

6.1.1 *Veelvormig onderzoek en onderzoeksvragen*

Wij staan een veelvormig onderzoek voor in de overtuiging daarmee recht te doen aan het object van onderzoek (zie hoofdstuk 5). Veelvormig in typen en onderzoeksvragen, in designs, methoden en middelen.

1. *Typen en onderzoeksvragen*

Aan het onderwijsleerpakket Autobussen is zowel ontwikkelingsonderzoek (1), als evaluatie-onderzoek (2) verricht.

De scheiding in deze typen onderzoek was slechts chronologisch van aard en tegelijkertijd ook wat kunstmatig, omdat evaluatieresultaten uiteindelijk toch weer ten behoeve van de ontwikkeling van het pakket gebruikt werden.

Vier typen onderzoeken zijn aan het pakket verricht:

- a. een doelstellingenonderzoek(het Cito-project),
- b. een onderwijsevaluatie op de Dreesschool,
- c. een hypothesenvormend onderzoek en
- d. een vergelijkend onderzoek op de Dreesschool en de Nieuwlandschool.

Deze projecten bevatten de volgende vier onderzoeksvragen:

- a. Werden met het pakket de doelstellingen bereikt die de ontwerper voor ogen stonden?
- b. Verliep de praktijk van het onderwijs op de wijze zoals de ontwerper die in het pakket had bedoeld?
- c. Hadden de kinderen ideeën die niet strookten met het autobusmodel?
- d. Welke voor- en nadelen had het pakket ten opzichte van het traditionele rekenonderwijs om kinderen optellen en aftrekken te leren?

2. *Designs*

Met de onderzoekstypen waren verschillende onderzoeksdesigns gemoeid:

ad a

een conventionele onderzoeksopzet met doelstellingformuleringen, itemconstructies, toetsafnamen, p-scores en conclusies.

ad b

(parallel)klassen werden gedurende één jaar gevolgd en besloten met discussies tussen de onderwijzeressen over de gemaakte onderwijskeuzes.

ad c

een serie onderzoekssituaties binnen het onderwijs werd ontworpen om denkbeelden van kinderen over de autobus te verzamelen.

ad d

een opzet werd gekozen waarbij het traditionele onderwijs van de Nieuwland-school met dat van de ontwerpschool werd vergeleken.

3. Methoden

In de vier typen evaluatie-onderzoek werd van verschillende onderzoeksmethoden gebruik gemaakt:

- * klinische en wederzijdse observaties (in c en d)
- * actief participerende observaties (in b, c en d)
- * observaties in de klas (in b, c en d)
- * klasse-, groeps- en individuele gesprekken (in b, c en d)
- * klassikale en individuele toetsafnamen (in a en d).

4. Middelen

Er werden verschillende onderzoeksmiddelen gebruikt:

- * toets- en testbladen ter operationalisering van de leerdoelen (in a en d)
- * dagboeknotities van onderwijzeressen (in b en d)
- * leerlingenwerk (in c en d)
- * proefwerken (in d)
- * registraties van het klassegebeuren (in b en d)
- * schoolrapporten en leerlingenkaarten (beroep ouders) (in b en d)
- * registratie van meningen van de onderwijzeressen over de prestaties van hun leerlingen in het rekenen (in b en d).

6.1.2 Het onderwijsleerpakket in ontwikkeling

Verwant met een veelvormig onderzoek is de vraag wanneer een onderwijsleerpakket als volledig afgerond beschouwd kan worden (3).

Het Autobussenpakket werd vanaf het allereerste ontwerp bijgesteld via gesprekken met leerlingen (Van den Brink, 1973). Eerst werden de kinderen in de gelegenheid gesteld om kritiek te leveren, daarna de onderwijzeressen.

Maar na dit ontwikkelingsonderzoek bleek het pakket nog steeds niet als volledig afgerond beschouwd te kunnen worden.

Vooraf tijdens het latere vergelijkingsonderzoek tussen Dreesschool en Nieuwlandschool, heeft de D-onderwijzeres weer nieuwe bijdragen geleverd (rekentoneel en andere speelse werkvormen) en ook de kinderen voerden nieuwe elementen aan (haltesommen).

Het is geen nieuw, maar wel een belangrijk inzicht, dat een ontwikkeling in feite nooit helemaal is afgesloten. Er blijft altijd enige ruimte over voor een persoonlijke inbreng van de gebruikers.

6.2 Cito-project

6.2.1 Toetsconstructie

Van april tot juni 1975 werd het onderwijsleerpakket 'Autobusproblemen' door het Cito geëvalueerd (Van der Hooft & Oonk, 1975).

Het hoofddoel van dit onderzoek was voor het Cito om concrete ervaringen op te doen bij het evalueren van een lespakket.

De werkzaamheden betroffen het maken van twee toetsen (een klassikaal en een individueel af te nemen toets) en het afnemen van die toetsen op de Drees-school.

Andere voorgenomen activiteiten (doelanalyse en observatie van de interactie tussen leerlingen en leerkracht) konden in verband met de beperkte tijd en het beperkt aantal medewerkers niet worden uitgevoerd, zodat het onderzoek zich in feite concentreerde op de vraag:

'In welke mate bereiken de leerlingen van de Dr. W.Dreesschool de doelen die door de ontwerper van het lespakket 'Autobusproblemen' werden nagestreefd?'

Een lijst met doelstellingen werd samengesteld, besproken en ter beoordeling aan de ontwerper voorgelegd. Het werden tenslotte 11 doelen.

voorbeelden

Doelstelling 1:

'Het kunnen weergeven van een kwantitatieve verandering in twee symbolentalen:

- a. pijlentaal: getallen, pijlennotatie, +, -, '
- b. traditionele rekentaal: getallen, +, -, =, . '

Deze doelstelling werd in de herziene versie van de lijst beperkt tot:

'Het kunnen weergeven van een kwantitatieve verandering in de pijlen-taal: getallen, pijlennotatie, +, -, - '.

Men wilde zich beperken tot de pijlentaal, waardoor de intermediaire functie van die taal tussen contextgebonden pijlen en sommen in de is-taal uit het onderzoek verdween.

Er werden verschillende typen pijlenstipsommen (stipsommen in de pijlentaal) getoetst (doelstellingen 5, 6 en 7).

Doelstelling 7 (zie fig. 6.1):

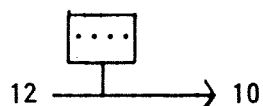


fig. 6.1 pijlenstipsom

'Bij een gegeven begin- en eindtoestand de verandering die is opgetreden, zowel schriftelijk als mondeling kunnen aangeven.'

De dubbeldekkercontext werd in herinnering gebracht met doelstelling 10:
'... de zogenaamde dubbeldekkernotatie kunnen gebruiken om verdeelstudies te beschrijven'

$$12 \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

En in doelstelling 11 werd gevraagd om
'een gegeven hoeveelheid voorwerpen op alle mogelijke manieren (te) verdelen in twee hoeveelheden.

$$12 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 8 & 0 & 7 & 4 & 5 \\ \hline 4 & 12 & 5 & 8 & 7 \\ \hline \end{array} \text{ etc. '}$$

Itemschrijfdag

Tijdens een 'itemschrijfdag' werd een klassikale toets geconstrueerd bestaande uit 17 items verdeeld over negen doelstellingen. Tevens werd een individueel afneembare toets gemaakt, waarvan de vragen doelstellingen dekten die waren overgebleven of die per se mondeling moesten worden uitgevoerd.

De verdeling van de 17 items over de negen doelen, zag er als volgt uit:

Nummers van de doelstelling	Nummers van de items
1	1, 2
2	16
5	3
6	4, 5
7	6
8	-
9	7, 8
10	9, 10, 11, 12
11	13, 14
12	-
13	15, 17

Hier volgen enkele voorbeelden van items met de aanwijzingen voor de afname en, tussen haakjes, verwijzingen naar de bijbehorende doelstellingen.

Item 5 (zie fig. 6.2)

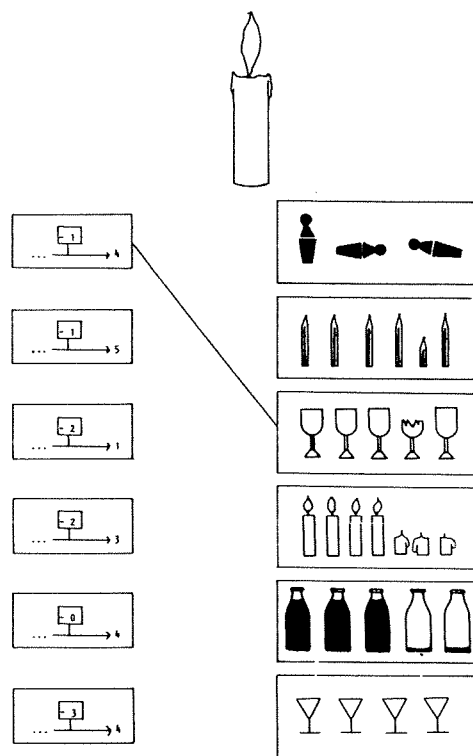


fig. 6.2 kaars

Doel 6 (begintoestand vaststellen bij gegeven verandering en eindtoestand, eventueel met behulp van een zelfbedachte situatie)

De aanwijzingen bij dit item luiden:

- Stap 1. Hebben jullie allemaal de bladzijde met het kaarsje voor je? Daar zie je een rij pijlensommetjes en een rij plaatjes.
- Stap 2. Opdracht 1
Maak eerst de pijlensommetjes, dan vertel ik daarna wat we met de plaatjes gaan doen.
- Stap 3. Als je klaar bent met de pijlensommetjes mag je de plaatjes kleuren.
(...)"

Item 6 (zie fig. 6.3)

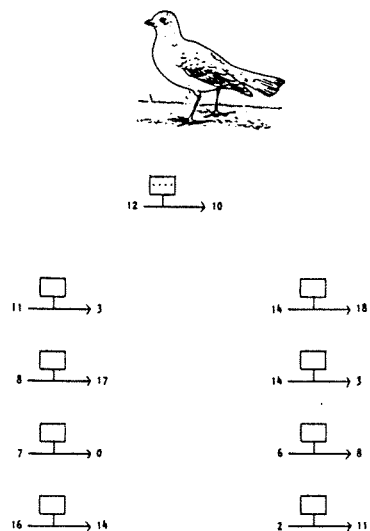


fig. 6.3 vogel

Doel 7 (de verandering aangeven)

"Stap 1. Hebben jullie allemaal de bladzijde met de vogel voor je?

Stap 2. Schrijf op het bord:



Dit pijlensommetje staat ook op jullie bladzijde.
Aanwijzen!

Stap 3. Vraag aan de leerlingen:

Wat is er gebeurd?

Antwoord van een leerling: 2 eraf gegaan

Hoeveel waren er eerst?

Antwoord van een leerling: 12.

Hoeveel zijn er nu?

Antwoord van een leerling: 10.

Dus in het hokje moet - 2 worden ingevuld.

Doe dat allemaal maar.

Stap 4. Nu mogen jullie zelf de andere pijlensommetjes maken.
Denk daarbij maar aan de vogels.

Stap 5. Als je klaar bent, mag je de vogel kleuren."

Item 14 (zie fig. 6.4)

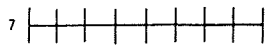
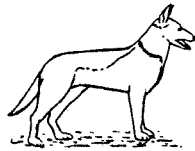


fig. 6.4 hond

Doel 11 (alle mogelijke verdelingen vinden)

"Stap 1. Hebben jullie allemaal de bladzijde met de hond voor je?

Stap 2. Het getal 7 kun je op verschillende manieren verdelen.
Probeer alle manieren te vinden en schrijf ze op.

Stap 3. Resumeren:
Zijn jullie allemaal klaar?
Dan mogen jullie nu de bladzijde omslaan."

6.2.2 Toetsafname

De klassikale toets werd in anderhalf uur in elk van de drie eerste klassen door de onderwijzeressen uitgevoerd. De handleiding was hen een week eerder toege-stuurd. De twee Cito-medewerkers observeerden tijdens de afname in elke klas. De individuele toets werd afgenomen door de Cito-medewerkers zelf met acht aselekt gekozen leerlingen.

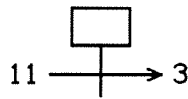
Scoringsvoorschriften ('nakijkregels')

De prestaties van de kinderen op beide toetsen werden beoordeeld op grond van zogenoemde 'nakijkregels' per item, waarmee kon worden bepaald of een item goed was beantwoord.

Enkele voorbeelden van scoringsregels:

Item 6 wordt als goed beoordeeld, indien er zes of meer sommetjes de in de voorschriften genoemde antwoorden geven.

Bijvoorbeeld: - 8 voor



Andere mogelijke antwoorden, zoals $-10 + 2$ zouden dus fout zijn.

Item 14 (een dubbeldekkernotatie voor zeven passagiers) is goed, indien alle mogelijke verdelingen gevonden zijn.

Beoordelingscriterium

Als 95% van alle leerlingen de items die bij een bepaalde doelstelling behoorden, zouden goed maken, dan was die doelstelling bereikt, zo werd afgesproken.

6.2.3 Toetsresultaten

En hoe waren de resultaten?

De uitslag van de toetsafname was 'beneden de maat': bij een beheersingscriterium van 95% werd geen enkele van de doelen bereikt (zie fig. 6.5).

P-waarde per item per klas en over het totaal aantal leerlingen (Hooft & Oonk, 1975, p.27)

item	1a	1b	1c	totaal
1	78	83	73	78
2	87	91	82	87
3	83	91	82	85
4	48	70	41	53
5	83	83	73	79
6	61	83	50	65
7	87	91	59	79
8	65	83	59	69
9	65	100	91	85
10	91	91	59	81
11	65	74	05	49
12	78	70	32	60
13	74	87	77	79
14*	52	09	55	38
15	61	48	77	62
16*	04	04	36	15
17	70	83	59	71

* Deze items zijn in de klas 1b overgeslagen

fig. 6.5 P-waarde tabel

6.2.4 Discussie

Het verslag van het project (Hooft & Oonk, 1975) vermeldt over deze uitslag het volgende:

1. 'Belangrijke doelstellingen hoeven niet per se minimum doelstellingen te zijn' (p. 27).

2. 'Bij de toetsconstructie is niet voldoende gestreefd naar inhoudsvalide items, dat wil zeggen de items die nu in de toets zijn opgenomen geven ons vrijwel geen enkele garantie dat ze meten wat er in de doelstellingen staat' (p.20).
3. 'Het was erg moeilijk om éénduidige scoringsregels vast te stellen' (p. 17).
4. 'De tijd ontbrak om een foutenanalyse te maken' (p.6).
5. 'Het tijdstip van toetsafname lag voor alle klassen geruime tijd na behandeling van het pakket in de klas. Bij het construeren van de items en het samenstellen van de toets is hier geen rekening mee gehouden (doordat dit te laat bij de uitvoeringsgroep bekend was).' (p.20).
6. 'De toetsafnames verschilden nogal per klas: in de ene klas werd er bijvoorbeeld wat meer op doorwerken aangedrongen dan in de andere klas; in twee van de drie klassen werd een pauze ingelast; in de ene klas meer geholpen dan in de andere.'
7. 'Bij de toetsconstructie is gestreefd naar één hooguit twee items per doelstellingen. Of dat een redelijke weerspiegeling is van de inhoud van het pakket is onbekend. Er was van te voren geen 'testgrid' opgesteld.

Commentaar van de ontwerper

ad 1

Het beheersingscriterium van 95% gold volgens afspraak uiteraard voor minimumdoelstellingen.

De verwarring tussen minimumdoelstellingen en streefdoelen bleek bijvoorbeeld uit item 13 en 14 waarin problemen rond de dubbeldekkernotatie werden aangeboden.

In item 13 werden tenminste acht verdelingen van elf passagiers verlangd alvorens de doelstelling bereikt zou worden.

In item 14 werden alle verdelingen van zeven passagiers geëist.

De p-waarde van item 13 is 0.79 en die van item 14 is 0.38.

Item 14 dekte wel een streefdoel, maar zeker geen minimumdoel, dat door elke leerling afzonderlijk zou moeten worden bereikt.

Het vinden van alle verdelingen is in het onderwijspakket niet een individuele, maar een klassikale opdracht die met de hele klas moet worden opgelost. Het ene jaar lukt dit wel, het andere jaar niet (zie hoofdstuk 7).

ad 2

De uitvoering en de bedoeling van de toets spoorden niet altijd met de visie van de ontwerper (het Cito had de eindverantwoordelijkheid).

Item 5, bijvoorbeeld, bestond uit een kolom kale stipsommen die eerst moesten worden gemaakt om daarna gekoppeld te worden aan plaatjes. De realistische visie echter is, dat de plaatjes als contexten hulp kunnen dienen bij het oplossen van de stipsommen, maar niet als de sommen al gemaakt zijn.

Een ander voorbeeld. De kale stipsommen van item 4 werden algemeen moeilijker bevonden (p-waarde .53), dan die van item 5 (p-waarde .79). Volgens

de toetsconstructeurs dekten echter beide items hetzelfde doel 6. Wij twijfelden daaraan, omdat we grote waarde hechten aan beeldende contexten voor het inzichtelijk leren. Item 5 bestond uit plaatjes.

ad 3

Soms was de scoringsregel bij een item niet in overeenstemming met hetgeen bedoeld was. Bijvoorbeeld item 11. De opdracht bij een plaatje van een dubbeldekker met acht mensen boven en zes beneden was:

'Schrijf hoeveel mensen er boven en hoeveel er beneden zitten. Je weet wel hoe je dat moet doen'.

Het antwoord op het item werd als 'goed' beoordeeld als de leerling één van de twee notaties zou geven:

$$14 \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \quad \text{of} \quad 14 \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline 8 \\ \hline \end{array} .$$

Andere oplossingen waren fout.

Maar de dubbeldekkernotatie zoals die in de klas was gebruikt, zag er zó uit:

$$14 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 8 & & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array} .$$

Die is echter fout gerekend.

ad 4

Helaas is in het onderzoek nooit een foutenanalyse gemaakt.

Voor item 6, bijvoorbeeld, over stipsommen van het type:

$$\begin{array}{c} \square \\ | \\ 11 \longrightarrow 3 \end{array}$$

gold alleen de uitkomst: - 8 als goede uitkomst; $-11 + 3$ werd 'fout' gerekend, terwijl deze juiste oplossing, de zogenaamde 'haltesom', vaak door de kinderen werd gegeven.

ad 5

Op de datum van de toetsafname beschikten de kinderen over de is-taal. Maar volgens de scoringsvoorschriften van item 11 is de notatie $8 + 6 = 14$ fout.

Met het actuele onderwijs in de periode van afname werd geen rekening gehouden.

ad 6

De scores op de items 4, 11, 14 en 16 (zie fig. 6.5) wijzen uit, dat van een uniforme afname in de drie klassen geen sprake kan zijn geweest. Ze wijken te sterk van elkaar af.

6.2.5 Conclusies

De slechte resultaten waren mede te wijten aan de opzet van het onderzoek:

- minimumdoelen en streefdoelen werden niet onderscheiden,
- items en bijbehorende doelstellingen stonden soms haaks op elkaar,
- scoringsregels waren niet in overeenstemming met de doelstellingen,
- er werden geen foutenanalyses gemaakt,
- er werd geen rekening gehouden met het actuele onderwijs op de dag van toetsafname,
- de afname in de klassen was niet uniform.

6.2.6 Onderzoeksvraag

Onze onderzoeksvraag bij het Cito-project ('werden de doelen die de ontwerper voor ogen stonden door de kinderen bereikt?') was door deze onvolkomenheden in het onderzoek niet te beantwoorden.

Wel werd door het project de aanzet gegeven tot onderzoek van het pakket Autobussen in richtingen waarin juist wel rekening werd gehouden met het gegeven onderwijs in de klas (onderwijsevaluatie op de Dreesschool) en met opvattingen van kinderen (hypothesenvormend onderzoek).

6.3 Onderwijsevaluatie op de Dreesschool

We stelden een onderzoek in naar verschillen in uitvoering van het onderwijsleerpakket Autobussen door verschillende onderwijzeressen van de Dreesschool in verschillende jaren na de integratieperiode.

6.3.1 Evaluatiebesprekingen

Tussen de onderwijzeressen en de ontwerper werden gedurende de afwikkelingsperiode gesprekken gehouden om verschillen van mening ten aanzien van het gegeven onderwijs aan de orde te stellen.

De uitvoering van hetzelfde autobusprogramma door verschillende onderwijsgevenden week van elkaar af in het verwerpen, veranderen, accentueren en toevoegen van bepaalde onderdelen. Het resultaat was een herziene versie van het pakket gecombineerd met een serie didactische principes.

Drie (soorten) evaluatiebesprekingen zijn gevoerd:

- de evaluatiebespreking aan het einde van het schooljaar 1974/1975 tussen de drie onderwijzeressen-van-het-eerste-uur,
- de evaluatiebesprekingen aan het einde van het schooljaar 1976/1977 tussen twee onderwijzeressen en
- de evaluatiebesprekingen in het schooljaar 1977/1978 met één onderwijzeres die de integratieperiode niet had meegemaakt.

In feite beperkten we ons tijdens deze evaluatiegesprekken niet alleen tot het pakket Autobussen, maar kwam het hele onderwijs per onderwijzeres aan de orde. In het volgende zullen we ons echter alleen richten op hetgeen over de Autobussen is gezegd.

6.3.2 Drie onderwijzeressen (1974/1975)

Op 9 juni 1975 werd de uitvoering van het integratieplan door de drie onderwijzeressen Cathrien, Lydie en Tineke (in het vervolg respectievelijk aan te duiden als C., L. en T.) ter discussie gesteld. De uitvoering bleek nogal divers te zijn.

Er waren overeenstemmingen, maar ook verschillen in didactische aanpak en in de volgorde van de werkbladen.

1. Overeenstemmingen

De drie onderwijzeressen waren het eens over de volgende punten binnen contexten, pijlentaal en oefenen.

contexten

Ze zochten combinaties tussen verschillende contexten en wisselden bijvoorbeeld het rekenkundige pakket Autobussen af met meetkundige activiteiten op het denkbeeldige eiland Waterland. De onderwijzeressen gaven de leerlingen om de dag een onderwerp uit Waterland en een onderwerp uit het Autobuspakket. Zo werd bijvoorbeeld Waterland als maquette gebouwd, afgebroken en herbouwd, terwijl tussen deze activiteiten door in de maquette busritten werden uitgevoerd (L.; 19/2).

Ook andere onderwerpen (de dubbeldekker, de getallenlijn) kwamen in combinatie met de autobus aan de orde. Dit combineren werd door alle onderwijzeressen gedaan.

pijentaal

In februari werd voornamelijk geoefend met één type pijlensommen, namelijk de gewone autobussom. Bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{ccc} +2 & & -3 \\ 5 \text{ -----} > & . & \text{-----} > . \end{array}$$

oefenen

- * De onderwijzeressen toonden allen een grote interesse voor de ideeën en eigen produkties van hun leerlingen.
T. was bijvoorbeeld gecharmeerd door antwoorden van haar kinderen en liet daarom vroegtijdig 'plaatjes vertellen' (februari).
L. en C. hadden een taak ontdekt die het goed deed: 'Klaar? Dan ga je vrij pijlensommen bedenken in je schrift'.

- * Een ander punt van overeenstemming betrof het aantal werkbladen, die door de kinderen werden gemaakt.
Van de 36 geleverde autobuswerkbladen gebruikte L. er 31, T. 26 en C. deed 25 werkbladen met haar klas.
Vrijwel alle (namelijk 34 van de 36) werkbladen uit het pakket werden uiteindelijk door de onderwijzeressen gehandhaafd.
De onderwijzeressen zorgden ervoor, dat elke activiteit in de pijlenwerkbladen ooit eens in hun lessen aan bod kwam.
- * Maar één blad werd unaniem verworpen. Er stonden teveel verschillende typen autobus(stip)sommen op en volgens de onderwijzeressen werkte dit storend op het leren rekenen. Ze lokten onnodige vergissingen uit.
- * De werkbladen werden als het ware over het hele schooljaar uitgesmeerd. De start vond plaats op 16/12, en het laatste blad werd op 14/5 gemaakt.
Het complexe kale pijlendiagram kwam pas laat in het jaar (in april) aan de orde.
Toch leverde het Autobuspakket naar de mening van de onderwijzeressen niet genoeg oefenmogelijkheden op. Naast de autobussen bleven de rekenkaarten gehandhaafd. Dit trouwens tegen de gemaakte afspraak in om het oude rekenprogramma niet meer te gebruiken. De kaarten waren vroeger door C. ontworpen en bestonden uit rijtjes sommen in de is-taal, die door de kinderen zelfstandig moesten worden gemaakt.
De drie onderwijzeressen gebruikten daarnaast nog het honderdveld, getallenlijnkaartjes en tekenopdrachten.

2. Verschillen

Er bestonden echter ook verschillen in de realisering van het onderwijs met het pakket tussen de drie onderwijzeressen met betrekking tot contexten, pijlentaal en oefenen.

contexten

L. leidde de pijlen in met een verhaal, C. met een toneelspel over de autobus en T. met een winkelsituatie.

pijlentaal

- * T. had de neiging om vroeger met onderwerpen uit het pakket te beginnen dan bedoeld was.
Ze introduceerde bijvoorbeeld na het winkelspel direct de kale pijlensommen en liet ermee oefenen. Een blad (K-1-3-18) met de kale pijlensommen werd door T. al gebruikt op 30/1, terwijl C. en L. het blad pas drie maanden later aan de kinderen gaven (resp. op 24/4 en 1/5) (4).
De gevolgen bleven niet uit. Het bleek T. op 30/1, dat de kale pijlensommen op deze wijze geleerd, te moeilijk waren.
C. en L. hadden geen enkel probleem.

* is-teken

Een onopgelost probleem: in 1976 was nog geen oplossing gevonden voor de overgang van de pijlen naar sommen in de is-taal.

De onderwijzeressen grepen daardoor op verschillende manieren terug naar middelen, die nog stamden uit de periode van voor Wiskobas. L. en T. gebruikten de 'oliebollen'-serie waarmee het is-teken vanouds werd ingevoerd (zie fig. 6.6).

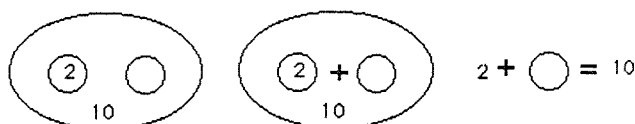


fig. 6.6 olieballen

C. poneerde de is-notatie als een afspraak (17/2) die ze nodig had, om de kinderen zelfstandig de sommen van haar rekenkaarten te laten maken.

Later heeft de onderwijzeres Trudy (in vervolg aan te duiden met T.S.) een oplossing gevonden om de overgang van de pijlentaal naar de is-taal inzichtelijk te laten plaats vinden (hoofdstuk 7).

oefenen en toepassen

De onderwijzeressen waren het erover eens, dat er flink geoefend moest worden met de pijlen. Maar ze deden het niet op dezelfde manier.

* De pijlennotatie moest bijvoorbeeld langdurig worden geleerd aan één type som, vond C., en verwierp een werkblad met verschillende typen opgaven. Ze gebruikte intensief haar rekenkaarten en richtte zich meer en meer op het kale cijferen. L. en T. gebruikten bijvoorbeeld een blad met kale pijlen twee maal, C. gaf het blad zelfs vier keer aan haar kinderen (4).

* L. en T. oefenden ook, maar herhaalden daarnaast nog vaak de autobusproblemen van vroeger, waardoor meer variatie in hun lessen kwam dan bij C. Een nieuw onderwerp of nieuw werkblad (bijvoorbeeld 'Rijd alle haltes af') was altijd aanleiding voor L. en T. om weer eens toneel te spelen, terwijl de periode van het toneelspelen al lang achter de rug was (op 11/3 en in mei); C. liet het herhalen van toneelstukjes achterwege.

T. gebruikte ook de lege pijlensliert



maar liet er wieltjes onder tekenen om de kinderen nog aan de autobuscontext te herinneren.

6.3.3 Twee onderwijzeressen (1976/1977)

Het ontwerp van de drie onderwijzeressen en de Wiskobas-ontwerper werd na de integratieperiode gebruikt door Tineke en Jannie (T.en J.). Van mei tot oktober 1977 zijn zes gesprekken gevoerd over hun ervaringen. T. had het onderwerp vanaf de integratiefase al voor de vierde keer uitgevoerd, J. voor de tweede keer. Terwijl over het materiaal tot aan het pakket Autobussen volslagen overeenstemming bestond, was dat met dit pakket niet het geval.

Het verschil in aanpak openbaarde zich precies op het cruciale moment van de introductie van autobusproblemen.

Schematisch kunnen we de verschillen in aanpak aldus weergeven.

J. stelde voor:

1. Rijen kinderen lopend (rijdend) door de klas als autobus.
Mondelinge instructies.

2. Idem, maar nu met kaartjes als haltes + 2, - 4.

3. Herhaling.

4. Herhalen waarbij het gebeuren tijdens de rit op bord wordt genoteerd in pijlen.

5. Een busverhaal, dat in pijlen op bord komt en daarna door de klas wordt gereden.

T. stelde voor:

1. Eerst de pijlentaal leren aan de hand van een verhaal over een winkel: erin-eruit genoteerd in pijlentaal; fiches worden erbij gebruikt om de stand bij te houden.

2. Herhaling en terugvertellen.

3. Autobusritjes door de klas worden in pijlentaal op bord genoteerd.

4. Een autobusverhaal wordt nagespeeld waarbij de pijlentaal hulp biedt bij het onthouden.

Dit verschil in aanpak tussen J. en T. zou men thans respectievelijk 'realistisch' en 'structuralistisch' noemen (Treffers, 1986).

We zagen al eerder, dat T. geneigd was snel door te stoten naar rekenonderwerpen die eigenlijk pas later in het jaar aan de orde zouden komen. Ondanks het slechte resultaat, leerde ze de pijlen als een notatiemiddel aan om het middel daarna in allerlei situaties toe te passen, onder andere bij de autobussen.

J. hield zich daarentegen meer aan hetgeen in het integratieplan bedoeld was, namelijk door de pijlentaal vanuit de autobussen te laten voortkomen.

Niet een methode, maar het gebruik van de methode bepaalt blijkbaar of men met realistisch of mechanistisch onderwijs van doen heeft.

In de uiteindelijke versie van het schoolwerkplan zijn beide voorgestelde introducties opgenomen, omdat het schoolwerkplan een afwikkeling betrof binnen de Dreesschool zelf en de ontwerper niet voorschrijvend, maar beschrijvend werk wilde afleveren.

Op deze manier ontstond tenslotte het Schoolwerkplan van de Dreesschool 1977/1978 klas 1, met 36 weken onderwijsbeschrijving.

6.3.4 *Eén onderwijzeres (1977/1978)*

In het schooljaar 1977/1978 werd het schoolwerkplan door de onderwijzeres T.S. gebruikt. Ze was niet bij de ontwikkeling van het integratieplan betrokken geweest.

Al snel bleek, dat er in het schoolwerkplan van de Dreesschool te weinig aandacht was besteed aan de principes die achter het plan lagen.

Besloten werd om deze achtergronden aan het materiaal toe te voegen als 'didactische principes' en aanwijzingen voor het gebruik.

De bijdragen die T.S. zelf aan het werkplan toevoegde, waren van wezenlijk belang, want:

- * in haar rekenonderwijs legde ze een zwaar accent op rekentoneelspel en dramatiek
- * de notatie-overgang van pijl naar het is-teken voerde zij in als een bijzondere versiering van de pijlen
- * net als L. en T. was ze gewoon om na elke oefening op de achterkant van een werkblad opgaven te laten schrijven die de kinderen zelf bedachten.

6.3.5 *Onderzoeksvraag*

De vraag van dit hoofdstuk was of de praktijk van het onderwijs verliep zoals door de ontwerper in het pakket Autobussen was neergelegd.

Uit de evaluatiebesprekingen kwam naar voren, dat essentiële verschillen in de uitvoering van één en hetzelfde onderwijsleerpakket als onafwendbaar moeten worden opgevat.

Beginnende onderwijzeressen houden zich nog het meest aan de richtlijnen. Een ervaren onderwijzeres verlaat een éénmaal ingeslagen weg niet gemakkelijk.

6.4 Hypothesenvormend onderzoek

6.4.1 *Noties van één kind en één notie van meerdere kinderen*

We wisten aanvankelijk niet hoe kleuters over 'autobussen' dachten; we wisten evenmin welke fouten eersteklassers in de pijlentaal maakten en hoe vaak die optraden.

Deze leemten aan kennis waren vervolgens aanleiding tot twee soorten onderzoek: het verzamelen van 'afwijkende' ideeën bij individuele kleuters en het

registreren van het algemeen voorkomen van bepaalde 'misvattingen' bij eerste-klassers. Het onderzoek zou in een aantal hypothesen uitmonden.

De gesprekken daartoe met de kleuters werden onder allerlei omstandigheden gevoerd: aan het tafeltje van het kind midden in een drukke klas, maar ook apart op de gang, in kringgesprekken of op het speelplein.

Met de eersteklassers voerden we alle gesprekken aan een tafeltje in een apart lokaal. We spraken meestal met zes tot twaalf kinderen uit één klas, gedurende 10 tot 20 minuten per kind, over een onderwerp of probleem.

De gesprekken zijn gedurende het hele schooljaar gehouden.

6.4.2 Noties van individuele kleuters

We laten enkele fragmenten volgen uit de gesprekken die wat meer licht werpen over hoe kleuters over 'autobussen' en aanverwante contexten denken.

Stoppen bij haltes onderweg

Ik heb een gesprekje met Natali (5) en Erik (5) over de bus. We zitten apart aan een tafeltje. De bandrecorder staat aan.

'Waar kun je allemaal naar toe met de bus?', vraag ik.

Natali: 'Naar school. Naar het bos.' Ze denkt aan het laatste schoolreisje.

Erik: 'We zijn ook wel een keer naar het station geweest'.

en Natali: 'Wij zo vaak naar oma.'

Bij het gesprek komen allerlei reisdoelen aan de orde. Voor de tussenliggende haltes is geen belangstelling. Soms zijn die er ook in werkelijkheid niet, zoals bij een schoolreisje per bus.

Maar ook bij de stadsbus, waarmee de kinderen naar het station of naar oma gingen, kwam dat voortdurend stoppen bij haltes niet vanzelf naar voren.

'Stopt de bus wel eens?', vraag ik.

Erik: 'Ja, de bus stopt als het rood is' (hij bedoelt het rode verkeerslicht waarvoor de autobus stopt).

'Alleen bij de stoplichten?'

Natali: 'Nee, ook als ie bij het station is.'

'En daartussen stopt hij helemaal niet?', dring ik weer aan en: 'Dus als de bus hier voorbij komt, voor de school, stopt ie alleen bij het station.'

'Ja, of bij de stoplichten', houdt Erik stug vol.

Deze kleuters houden er kennelijk een ander beeld van de autobus op na dan die welke wij nastreven voor het rekenonderwijs: het herhaalde stoppen.

Ik probeer het nog eens: 'Maar als je nu met de bus mee wilt, moet je dan helemaal naar het station of naar de stoplichten lopen?'

Erik: 'Nee, dan staat er zo'n bord (hij bedoelt het bord bij de halte) daar moet je bij staan en dan komt de bus daar naar toe.'

Blijkbaar zijn de haltes onderweg voor kleuters van veel minder belang dan het uiteindelijke reisdoel.

De kar

In de gesprekken bleken er allerlei verschillende ideeën te bestaan over de 'autobus'. Ik laat Walter (4) en Patrick (4) een foto van de kar zien. Ze staan beiden op de foto. De 'kar' is een stuk speelgoed waarmee de kleuters op het speelplein rondrijden. Om beurten mogen ze sturen of duwen.

Walter: 'Dat is de kar. Dat ben ik. Dat is Sven en Patrick' (hij wijst op de foto).

Ik: 'Het lijkt wel een autobus.'

Patrick: 'Het is een autobus.'

Walter: 'Het is geen echte. Er zit geen motor in. Je moet duwen. Alleen maar twee en drie erin.' Walter bedoelt, dat op de foto twee kleuters duwen en drie kleuters op de kar zitten.

En dan gaat hij spontaan combinaties maken:

'Als één op de kar zit en twee duwen er, dan ga je keihard.'

Patrick: 'Als je op de kar zit en geen één duwt, blijft de kar gewoon staan.'

Walter: 'Als twee duwen en geen één op de kar ... Dat kan niet.'

Allerlei verdelingen worden gemaakt tussen inzittende en duwende kleuters en de gevolgen daarvan halen de kinderen zich voor de geest.

Er zijn tal van verschillen tussen de kar en de autobus. De functie van de chauffeur op de 'kar' is anders dan die van de autobuschauffeur. De autobuschauffeur stuurt de bus, knipt de kaartjes, wijst de weg aan passagiers, blijft steeds op zijn plaats. De karchauffeur maakt slechts één rit rond het schoolplein en moet daar- na opschuiven voor een andere leerling. Hier geldt dus een ander systeem.

Kringgesprekken

Tijdens kringgesprekken werden allerlei beelden en ervaringen vertolkt die soms zijdelings wel iets met de bus te maken hadden.

Marc vertelt, dat de chauffeur aan het einde van de rit altijd de krant gaat lezen.

Sommigen vertellen van de spanning die ze voelen bij het overstappen of kiezen van de juiste bus.

Ook 'vreemde bussen' komen ter sprake.

'Heb je wel eens twee aan elkaar gezien?', vraag ik.

Pascal (5): 'Een dubbeldekker.' 'Wat is dat voor een ding?'

'Die heeft twee van die kanten, kan je boven zitten en onder', legt Pascal uit.

'Heb je hem wel eens gezien?'

Pascal: 'In het echt heb ik hem nooit gezien, maar we hebben hem wel in speelgoed.'

Niet alleen uit de 'volwassen-wereld', maar vooral uit hun omgaan met speelgoed duiken kinderen blijkbaar allerlei geschikte noties op.

'Ik heb thuis een trein', zei Pascal. Die zitten inderdaad ook aan elkaar, net als bij de dubbeldekker, maar op een andere manier.

Speelplein

Bij het autobuslijnenspel op het speelplein spelen enkele kleuters voor buschauffeur die met slierten kinderen als passagiers achter zich aan langs gekleurde lijnen loopt. Die lijnen zijn op het plein getekend met krijt.

Als de kleuters voor het eerst moeten instappen, stappen alle 'passagiers' tegelijk de bus in. En bij de eerstvolgende halte stappen ze ook weer als één man uit. Ze moeten blijkbaar nog leren om zelf in te stappen en niet als onafscheidelijke groep.

Buschauffeur Marieke staat stil bij een gymnastiekpaaltje, dat als halte dient. Ik vraag haar, hoeveel mensen er in haar bus zitten, maar ze schenkt geen aandacht aan mijn vraag, ook niet na enig aandringen. Ze is hevig in beslag genomen door het afstempelen van kaartjes en het dirigeren van uitstappende passagiers naar achteren. Het tellen van het aantal passagiers past niet in haar idee van wat een chauffeur doet.

Conclusie

Uit het onderzoek bleek, dat kleuters bekend zijn met vele soorten bussen en aanverwante contexten.

Ze halen die zowel uit de wereld van het speelgoed, als uit de 'volwassenen wereld'. We noemen: de schoolreisbus, de dubbeldekker, de stadsbus, de 'kar' op het schoolplein, maar ook het kegelen en bowlen.

Elk van deze contexten heeft specifieke eigenschappen die sterk van de andere contexten kunnen verschillen (5). Voor kleuters hebben de contexten dan ook weinig tot niets met elkaar te maken.

Het ligt voor de hand, dat dit ook geldt voor de getallen die per context worden gebruikt.

Getallen die hun betekenis ontleen aan de autobuscontext bijvoorbeeld, zijn niet-negatieve en niet onbeperkt grote getallen, waarmee zowel optellen als aftrekken mogelijk is en waarmee de bewerkingen herhaald kunnen worden. Voorts is deze contextgebonden optelling niet-commutatief.

6.4.3 Noties bij meerdere eersteklassers

Om nu na te gaan of bepaalde denkbeelden algemeen, dan wel slechts toevallig optraden, werden gesprekken gestart met meerdere eersteklassers over één bepaald onderwerp.

Voorbeelden

- Haltesom: uitstappen en instappen bij één halte

Een opvallend verschijnsel is, dat kinderen bij een halte zowel laten instappen als uitstappen en wel met hele bestanden passagiers tegelijk, zoals ook tijdens de gespeelde autobusrit in het autobuslijnenspel gebeurde.

We noemen dit verschijnsel een 'haltesom', bijvoorbeeld:

3-----> 2

wordt opgelost met:

-3 +2

3-----> 2

De vraag is of kinderen in conflictsituaties zijn te brengen, die meer gevarieerde verbanden tussen voorbestand, operator en nabestand oproepen.

We vertellen daarom de leerling drie situaties over een autobus die bij één halte is gestopt.

1. Eerst stapten er drie mensen in.
En toen stapten er twee mensen uit.
Hoeveel zijn er in de bus?
2. Eerst stapten er drie mensen in.
En toen stapten er vier mensen uit de bus.
Hoeveel zitten er in de bus?
3. Eerst stapten er vier mensen uit de bus.
En toen stapten er drie mensen in.
Hoeveel zitten er in de bus?

Conclusies

Het aantal passagiers, dat al in de bus zat voor de halte (in opgave 1 en 3), werd door de meeste kinderen (resp. 8/12 en 10/12) op nul gesteld of niet in beschouwing genomen. De instappende werd uit de uitstappenden gerecruteerd en niet uit de inzittenden.

Maar bij vraag 2 was dat niet mogelijk: zes van de twaalf kinderen zeiden dan ook dat de som niet kon.

Sommigen (6/12) vermoedden echter, dat het voorbestand niet nul was geweest en lieten in gedachten zoveel mensen in de bus zitten als er moesten uitstappen.

Caroline: 'Er zitten dan al vier mensen in de bus, die dus bij de halte zullen uitstappen.'

Patrick: 'Ja, dat kan wel. Er zijn twee deuren. Voor gingen er drie in en achter gingen er vier uit'.

De veronderstelling, dat beter met aftrekken dan met optellen kan worden begonnen, als men de relaties tussen de bestanden en de operator wil accentueren, vindt hierin steun.

- Operator-fout: veelvoorkomende pijlenfout

Bij pijlenstipsommen komt de volgende fout vaak voor:

$$\begin{array}{r} \cdot \\ 2 \text{ -----} > 5 \end{array} \text{ wordt opgelost als: } \begin{array}{r} +5 \\ 2 \text{ -----} > 5 \end{array}$$

We noemen deze fout de operator-fout: het gegeven nabestand wordt als operator genomen, ongeacht het voorbestand.

Als we echter laten uitstappen, zoals bijvoorbeeld bij:

$$\begin{array}{r} \cdot \\ 5 \text{ -----} > 2 \end{array}$$

dan moeten de uitstappenden uit het voorbestand worden gehaald en wordt wel direct een verband tussen bestand en operator gelegd: acht van de negen leerlingen die we deze laatste stipsom gaven, maakten hem goed. Blijkbaar komt de genoemde fout bij het aftrekken vrijwel niet voor.

6.4.4 Onderzoeksvraag

De vraag van deze paragraaf of de kinderen opvattingen hebben, die stroken met het autobusmodel, is bevestigend te beantwoorden.

We vonden enkele opvallende verschijnselen.

Contexten

Niet alleen uit de 'volwassenenwereld', maar vooral uit hun omgaan met speelgoed in spel- en speelsituaties diepen kinderen allerlei verschillende autobusstructuren op, waarvan het autobusmodel er slechts één is.

Pijlenfouten

Eén van de meest voorkomende fouten bij autobusstipsommen is de operator-fout: het nabestand wordt als operator genomen.

Didactisch is het zoals gezegd van belang om in dergelijke opgaven niet met optellen, maar met aftrekken te beginnen:

5 -----> 2 in plaats van 2 -----> 5

De haltesom, een combinatie van instappen en uitstappen bij één halte, is er nauw aan verwant.

Hij komt vroeg en frequent voor in deze vorm:

5 -----> 2 wordt opgelost als 5 -----> 2
-5, +2

waarbij hele bestanden uit- en instappen. Deelbestanden worden dan door de kinderen nog niet in ogenschouw genomen.

Oefenen

In een stroomdiagram worden alle haltes als vanzelf afgelopen. Bij elke halte wordt steeds een voorlopig bestand vastgesteld. Het bleek duidelijk, dat met de pijl de variatie in de leesrichting beter is aan te geven dan met het is-teken.

6.5 Conclusies uit de drie onderzoeksprojecten

Het pakket Autobussen, de prototypische onderwijsleergang voor het optellen en aftrekken, heeft door de drie onderzoeksprojecten veranderingen ondergaan ten aanzien van de contexten, de pijlentaal en het oefenen.

(Vandaar de typering 'ontwikkelingsonderzoek' voor deze projecten.)

6.5.1 Cito-project

De gebrekkige onderzoeksopzet van dit project is om verschillende redenen aanleiding geweest tot verdergaand onderzoek. We noemen de redenen.

Contexten

- * De invloed van beeldende contexten wordt door de onderzoekers ondergeschikt geacht. Alleen op structuurovereenkomsten worden items ingedeeld (bijvoorbeeld de items 4 en 5).
- * De antwoorden van de leerlingen worden alleen op 'goed' of 'fout' beoordeeld.
De gemaakte fouten worden niet geanalyseerd op misvattingen over bussen of pijlen die kinderen mogelijkwijs hebben.

Pijlentaal

- * In het project worden de beide rekentalen (de pijlentaal en de is-taal) niet gelijkwaardig geacht (zie doel 1). Daarmee wordt de rol die de pijlentaal als intermediaire taal tussen beeldende contexten en kale opgaven kan vervullen, uitgesloten.

Oefenen

- * Uit de relatief gunstige leerlingprestaties op de items 2, 3 en 9 bestaande uit kale pijlensommen, blijkt dat kinderen tegen het einde van het schooljaar de gewone rekenvaardigheden vaak al beheersen. Het onderwijsleerpakket Auto-bussen doet in dit opzicht niet onder voor het traditionele rekenonderwijs.

6.5.2 Onderwijsevaluatie op de Dreesschool

Opvallend waren de verschillen in uitvoering van het pakket door de onderwijzeressen C., T., L., J. en T.S. Die variatie in uitvoering is aanleiding tot de volgende conclusies.

Contexten

- * Een introductie die te snel naar de kale pijlen doorstoot (T. versus L. en C.) (T. versus J.), zorgt dat het lang duurt voordat kinderen de pijlentaal door hebben. Langdurig verblijf in beeldende contexten heeft dat niet.

Pijlentaal

- * Aan de refererende pijlentaal wordt een belangrijke rol toegekend. De pijlen worden door onderwijzeressen versierd met franje om het verband met de beeldende context te behouden (T. en T.S.)
- * Fouten in de pijlentaal worden wel gesignaleerd (C.), maar (nog) niet onderzocht.

Oefenen

- * Een accent wordt gelegd op de eigen produkties van kinderen (L., T. en T.S.).
- * Herhaling van oude onderwerpen zorgt ervoor, dat de lessen minder ééntonig worden (L. en T.).
- * Stipsommen genoteerd als autobusstipsommen, voldoen goed (C. en T.S.).
- * De rekenkaarten met de kale is-sommen zijn, tegen de afspraak in, gebruikt uit zorg om de rekenvaardigheid veilig te stellen (C.), maar ook om de handen vrij te hebben voor andere rekenonderwerpen dan het cijferen alleen (T.S.).

6.5.3 Hypothesenvormend onderzoek

Het hypothesenvormend onderzoek leidde tot een lijst van aandachtspunten bij het pakket Autobussen. De lijst verschaft de onderwijzeres (T.S.) de nodige steun en bestond onder andere uit de volgende opmerkingen:

Contexten

- * Combinaties van instappen en uitstappen (haltesommen) komen gemakkelijk voor bij autobusstipsommen.
- * Bij autobusstipsommen worden in- en uitstappers vaak van de inzittenden geïsoleerd.
- * Om inzittenden en in-of uitstappenden meer op elkaar te betrekken kunnen we beter met aftrekken dan met optellen beginnen.
- * De pijlnotatie is snel van toepassing op kegelen en op andere spelen.

Pijlenfouten

- * De verwisselingsfout (verwisseling van autobus en bushalte) komt weinig voor.
- * Het gegeven nabestand in een stipsom wordt vaak als operator genomen.
- * De gegeven operator in gewone pijlsommen wordt soms als nabestand gebruikt.

Overdracht van pijlentaal naar is-taal

- * Op den duur verwijzen de kinderen niet meer naar de autobuscontext, maar worden de pijlen een kaal model voor hen.
- * Kinderen kunnen goed de stipsom in een autobussom vertalen. De vertaling is in eerste instantie een notatieprobleem.
- * Met de pijl is beter in de leesrichting te differentiëren dan met het is-teken.
- * De dubbele stipsom ($3 \cdot \cdot = 5$, bijvoorbeeld) is zeer instructief (en vergelijkbaar met de autobusstipsom, waarin immers het bewerkingsteken ook ontbreekt).
- * De overgang van de pijl naar het = -teken is geen probleem: het is-teken is als relatieteken ingevoerd en wordt in de pijlensliert genoteerd aan het einde van de rit (T.S.).

$$5 \xrightarrow{+2} , \xrightarrow{+3} , \xrightarrow{-5} , \xrightarrow{+2} = .$$

$$5 \xrightarrow{+2} .$$

$$5 \xrightarrow{+2} = .$$

Door de pijl weg te laten, komen we in de is-taal

$$5 + 2 = .$$

Oefenen

- * In kale pijlendiagrammen hebben kinderen moeite met de vrije rijrichtingen. Alle haltes worden aangedaan, maar de herhaling van een reeds gereden route stagneert.

6.5.4 Samenvatting: de onderzoeksvragen beantwoord

We begonnen dit hoofdstuk met vier onderzoeksvragen.

1. Werden met het pakket Autobussen de doelstellingen bereikt die de ontwerper voor ogen stonden?
Met het Cito-project was deze vraag door de onvolkomenheden in het onderzoek niet goed gefundeerd te beantwoorden.
Wel werd met het project de aanzet gegeven tot onderzoek van het gegeven onderwijs en van opvattingen van kinderen binnen het pakket Autobussen.
2. Verliep de praktijk van het onderwijs op de wijze zoals de ontwerper die in het pakket had neergelegd?
Nee. Uit de evaluatiebesprekingen blijkt, dat verschillen in de uitvoering ervan onafwendbaar zijn - met alle gevolgen van dien voor de aard van de leerresultaten van de kinderen.
3. Hadden de kinderen opvattingen die wel/niet strookten met het autobus-model?
Ja. We noemen met name de haltesom, een combinatie van instappen en uitstappen bij één halte, die door kinderen aan het pakket is toegevoegd.
4. Welke voor- en nadelen had het pakket ten opzichte van het traditionele rekenonderwijs om kinderen optellen en aftrekken te leren?
Voor het antwoord op deze vraag moeten we verwijzen naar het vergelijkend onderzoek tussen de Dreesschool en de Nieuwlandschool (hoofdstuk 7 en verder).

6.6 Noten

- (1) Over 'ontwikkelingsonderzoek' zijn in de literatuur reeds tal van beschouwingen gedaan (Goffree, Treffers, Terwel, Ten Brinke, Streefland). Hier volgen er enkele.

Het is onderzoek, dat een directe bijdrage aan de ontwikkeling van het onderwijs geeft (Terwel, 1984) en dat gefundeerd is op een mathematisch-didactische beschouwing, waarin de visie op onderwijs, de essentie van kernbegrippen en de onderwijsconceptie van het betreffende (onderzoeks)gebied tot uitdrukking gebracht worden (Treffers, 1980).

Het handelt niet alleen om onderzoek van een reeds ontworpen onderwijsleerpakket, maar ook om onderzoek dat gedaan wordt al vanaf de eerste ontwerppogingen (Streefland, 1988). Dat dit soort onderzoek 'voorwetenschappelijk' zou zijn, is volkomen onjuist (Ten Brinke, 1986). Het is eerder te beschouwen als onderzoek dat steeds aangepast moet worden aan de verschillende fasen van het ontwikkelingswerk.

Goffree (1979, p.193) bijvoorbeeld onderscheidt in het onderwijsontwikkelingswerk een onderzoeksfase, die hij de 'heuristische fase' noemt en waarin ruw empirisch materiaal verzameld wordt en inhoudelijk geanalyseerd.

Terwel onderscheidt drie fasen in het ontwikkelingsonderzoek:
fase 1: een probleem-oriënterende fase op één school, daarna fase 2: een eerste evaluatieonderzoek op twee scholen met het oog op de hypothesevorming en tenslotte fase 3: onderzoek op meerdere scholen om de hypothesen te toetsen.

Een overgang naar een meer evaluatief onderzoek is hiermee geschetst, maar het is de vraag of elk ontwikkelingsonderzoek deze fasering zou moeten volgen.

Ten Brinke heeft, sprekend over het onderzoek 'De Baas over de Computer' daarover sterke twijfels (Ten Brinke, 1986). Bovendien kunnen - zoals in ons onderzoek op de Dreesschool en Nieuwlandschool (zie hoofdstuk 7) - de onderwijsleerpakketten op beide scholen in fase 2 verschillend zijn. De scholen kunnen elkaars decor vormen (Treffers in een persoonlijk gesprek), waartegen de leerlingresultaten vergeleken worden.
- (2) Evaluatie-onderzoek. 'Als een bepaald onderdeel van ontwikkelwerk afgerond is, dan is het moment aangebroken voor evaluatief onderzoek. Het ontworpen materiaal (...) wordt nu uitgezet in 'het onderwijs' (...). Hier kan men de 'effecten' van het nieuwe curriculummateriaal gaan opnemen en afwegen' (Goffree, 1985).
- Daarbij gaat het om wat wij onder 'het' onderwijs moeten verstaan, welke criteriummaten en middelen ter afweging van de effecten als evaluatiemethoden worden geaccepteerd.
- Voor de één is 'het' onderwijs het onderwijsgebeuren in alle scholen van Nederland. In 'Zo rekent Nederland' (Van den Heuvel & Goffree, 1986) bijvoorbeeld, wordt een beeld geschetst, dat geëvalueerd kan worden. Een ander beperkt zich tot leerkrachten in parallelklassen, enzovoorts.
- Tal van voor- en nadelen kleven aan deze verschillende opstellingen.
- Ook de middelen om te toetsen staan ter discussie: van observaties en interviews tot leerdoelgerichte tests (hoofdstuk 5).
- Er is veel over geschreven, voor- en nadelen zijn breed uitgemeten.

(3) Binnen het ontwikkelingsonderzoek in de probleem-oriënterende fase op één school gaat Terwel (1984) er bijvoorbeeld vanuit dat het te gebruiken onderwijspakket afgerond en volledig is.

(4) Verschillen in de volgorde van onderwerpen bij de drie onderwijzeressen. De onderwerpen in de werkbladen werden door de verschillende onderwijzeressen (L., T. en C.) soms op verschillende momenten aan de orde gesteld.

De 36 werkbladen (K-1 t/m K-18 met de daartussen liggende R-bladen) zijn in 13 onderwerpsgroepen in te delen:

1. introductie via Waterland (K-1, K-2, K-3), kegelspel
2. autobusprijen ritten (K-4, K-5, R-5)
3. taart met pijlen (K-6)
4. dubbeldekker (K-7, K-8, R-8)
5. 4 bussen (K-9, K-10)
6. busdiagram (K-11)
7. rij alle haltes af (K-12, R-12)
8. rijen voorwerpen met pijlen eronder (K-13, R-13)
9. plaatje gegeven, pijlensom gevraagd (K-14, R-14, K-17)
10. plaatje gegeven, pijlensom kiezen (K-15, K-16, R-16)
11. kale pijlensommen (K-18)
12. oefenblad van 'lege' pijlenslierten
13. getallenlijnoefeningen en -bladen (K-1-3-19 e.v.).

De bladen werden aldus door de onderwijzeressen gebruikt (zie fig. 6.8):

TABEL Het gebruik van de 13 autobusonderwerpen verdeeld over het leerjaar door de drie onderwijzeressen (H = Herhaling)					
L	1	2,4,12,13,5	13,3,8,7,9,10 H	9,10,6,13 H H H	11,10,9,13 H H H
T	1,2,11 !	2,4,10,12,13,7 H !	13,12,7,3,2 H H H H	13,7,6,9,8 H H	13,9,8 H H H
C	1,2	2,12,5,7,9 H	13,9,7,8,9,1 H H H H	6,13,10,11 H	13 H

fig. 6.8 werkbladengebruik

Ze behandelden ongeveer evenveel werkbladen.

Onderwerp 11 werd alleen door T. vroeg ingeleid.

Er werden veel bladen herhaald.

- (5) Er zijn grote structuurverschillen in de 'autobus'-contexten:
- * De stadsbus stopt bij haltes onderweg. Dit in tegenstelling met de schoolbus die alleen stopt bij het reisdoel en verkeerslichten. De structuur is ook in tegenstelling met die van bowling.
Daarentegen komt de speelgoedtrein wel met de herhalingen overeen, evenals het kegelen.
 - * Er is maar één chauffeur op de bus; dit in tegenstelling met de 'kar' waar een opschuifstelsel voor chauffeurs geldt.
 - * Er is sprake van een vaste autobusroute waarmee de speelgoedtrein overeenstemt, maar de kar weer niet.
 - * Bij elke autobushalte wordt zowel ingestapt, als uitgestapt. Bij kegelen is dit niet het geval. Daar worden de kegels in enkele worpen alleen maar omgegooid hetgeen overeenkomt met slechts één van de hoofdbewerkingen: optellen (van punten, bijvoorbeeld) of aftrekken (van het aantal omgevallen kegels).

7 Vergelijkend onderzoek Dreesschool / Nieuwlandschool

7.1 Inleiding en onderzoeksopzet

7.1.1 Onderzoeksvragen

De onderzoeksprojecten uit hoofdstuk 6 betroffen het pakket Autobussen zelf: onderzoek naar de uitvoering ervan door onderwijzeressen en naar de ideeën die het onderwerp opriep bij kinderen. Deze projecten gaven echter geen antwoord op de vraag: 'Welke voor- en nadelen heeft het pakket Autobussen ten opzichte van het traditionele, mechanistische rekenonderwijs ten aanzien van het leren optellen en aftrekken?'

Het lag voor de hand om voor de beantwoording van deze vraag ook nog een andere school erbij te betrekken waarin, net als op de Dreesschool, autonoom onderwijs werd gegeven, maar dan van mechanistische aard.

We vonden de Nieuwlandschool in Dieren bereid om gedurende het schooljaar 1982/1983 aan zo'n vergelijkend onderzoek met de Dreesschool mee te werken. De Nieuwlandschool gebruikte de mechanistische methode Niveaucursus Rekenen. Op de Dreesschool werd het Schoolwerkplan 1977/1978, klas 1 gebruikt. Het onderzoek had tot doel om na te gaan of de vijf punten van verschil tussen het mechanistische en realistische rekenonderwijs, zoals we die in hoofdstuk 4 beschreven, verschil in leerresultaten bij de betreffende kinderen bewerkstelligden (1).

We specificeren de centrale onderzoeksvraag naar die vijf onderwijsverschillen:

1. *Beeldende contexten en/of specifiek rekenmateriaal*
 - Wordt het optellen en aftrekken vlotter aangeleerd met dynamische mens-diercontexten dan met specifiek rekenmateriaal?
2. *Conflictsituaties en/of geleidelijke voortgang*
 - Zijn misvattingen van belang om bij het leren rekenen meer begrip te krijgen?
 - Welke betekenis hebben conflictsituaties voor het leren rekenen?
 - Welke gevolgen heeft een stapsgewijze geleidelijke voortgang voor kinderen?
3. *Pijlentaal en/of is-taal*
 - Biedt de versierde pijlentaal een betere introductie voor het optellen en aftrekken dan de is-taal?
 - Welke pijlenfouten worden gemaakt? Wanneer en waarom treden ze op?
 - Vertoont de prototypische onderwijsleergang een geschikte leersequentie?
 - Hoe zijn pijlentaal en is-taal op elkaar af te stemmen?
 - Welke plaats nemen stipsommen in het rekenen van de eerste klassers?

4. *Vrije rekenkunst en/of sommen maken*

- Bestaan er verschillen in de rekenvaardigheid van D- en N-kinderen?
- Welke consequenties heeft het eenzijdige oefenen met behulp van typen kale sommen?
- Is de vrije rekenkunst te verkiezen als een gedeeltelijke vervanging van het oefenend cijferen?

5. *Toepassen - ja of nee*

- Wat is het effect van de nadruk op het toepassen van rekenkennis?

We verzamelden enerzijds feiten over het onderwijs dat op beide scholen werd gegeven (zie hoofdstuk 7.2) en anderzijds over hoe het leren rekenen van de kinderen verliep met beeldende contexten en pijlentaal (hoofdstuk 8), naar aanleiding van hun eigen produkties (hoofdstuk 9) en met betrekking tot hun rekenvaardigheden en het gebruik van stipsommen (hoofdstuk 10).

7.1.2 *Onderzoeksopzet*

1. *De uitvoering van het onderwijs*

Er zijn verschillende redenen waarom ook het gegeven onderwijs uitdrukkelijk in het onderzoek moet worden betrokken (hoofdstuk 5).

Uit ervaring weten we immers (zie hoofdstuk 6) dat in een realistische rekenmethode op sommige momenten zelfs door een ervaren onderwijzeres onverwachte keuzes kunnen worden gemaakt. Vandaar onze zorg voor nauwkeurige registratie van het onderwijs op de D en de N.

Om het onderwijs te registreren voerden we gesprekken met de onderwijzeressen over de gegeven lessen. Maar wel werd opzettelijk vermeden, soms zeer tegen de zin van de onderwijzeressen in, om hen te begeleiden. Voorts werd door de onderwijzeressen hun onderwijs in een dagboek opgetekend. We observeerden in de klas en er werden video-opnamen gemaakt van saillante onderwijsmomenten. Er werd een discussie met de onderwijzeressen gevoerd aan het einde van het onderzoeksjaar. Bovendien hielden we gedurende het jaar uitgebreide tellingen van het aantal taken en (soorten) sommen die de kinderen opkregen en het aantal fouten dat ze erin maakten.

2. *Leerresultaten via 88 toetsgesprekken*

Om de leerresultaten van de kinderen vast te stellen werden 88 toetsgesprekken gevoerd. Dit waren gesprekken van de onderzoeker met individuele kinderen over een bepaald onderwerp gedurende maximaal 10 minuten, tenminste twee maal per week. Er werden opdrachten gegeven, toetsen afgenomen. Daarbij maakten we gebruik van de methode van wederzijdse observatie (zie hoofdstuk 5).

Het ging voornamelijk over vier onderwerpen.

De eigen produkties, de algemene rekenvaardigheden en de stipsommen werden op beide scholen aan de orde gesteld. Ze zijn in het onderzoek gebruikt als criteriummaten om de rekenresultaten van de kinderen te vergelijken. Zowel D- als N-kinderen werden op dezelfde dag met deze maten getoetst.

Het vierde onderwerp, het onderzoeksobject de autobuscontext en de pijlentaal, kwam voornamelijk alleen op de D ter sprake (2).

Vaak gebruikten we eenzelfde opgave meerdere keren door het jaar heen om veranderingen in het leren waar te nemen.

We maakten bij dit onderzoek, zoals eerder gezegd, gebruik van allerlei onderzoeksmiddelen.

3. Leerlingpopulaties

- T- en niet-T-groepen

Op het klassenniveau waren de leerlingen verdeeld in 'toets-leerlingen' (in het vervolg 'T' genoemd) en controleleerlingen ('niet-T') om de invloed van de toetsgesprekken te kunnen peilen.

Deze verdeling kwam tot stand door eerst de klas in zwakke, matige en goede tellers te verdelen en vandaaruit evenwichtige T- en niet-T-groepen samen te stellen (3).

Alle zittenblijvers werden in de niet-T-groep ingedeeld.

Op verschillende momenten gedurende het schooljaar bleek overigens uit de toetsgesprekken die we met alle kinderen hadden, dat er weinig tot geen verschillen waren ten aanzien van de verdeling van goede en foutieve antwoorden die de T-groepen en de niet-T-groepen maakten.

- Leeftijden (fig. 7.1)

Leeftijdengemiddelde en -spreiding in augustus 1982 in jaren en maanden						
	alle		T		niet-T	
	D	N	D	N	D	N
gemiddelde	5;8	5;9	5;8	5;9	5;9	5;10
spreiding	8	8	9	8	8	8

fig. 7.1

Wat de leeftijd betreft is er een vrijwel identieke opbouw in beide klassen (in de D zijn de kinderen gemiddeld één maand jonger).

- Jongens/meisjes

	D			N		
	T	nT	alle	T	nT	alle
♀	7(58%)	8(62%)	15(60%)	5(38%)	6(43%)	11(41%)
♂	5(42%)	5(38%)	10(40%)	8(62%)	8(57%)	16(59%)
100%	12	13	25	13	14	27

fig. 7.2 verdeling meisjes/jongens in augustus

De verdeling meisjes/jongens is scheef: op de D 60% meisjes en op de N 59% jongens. In maart is er een jongen op de N bijgekomen. Hij werd toen ingedeeld in de nT-groep.

- Beroepen van de ouders

Opgegeven beroepen	D	N
1. Vakspecialisten (wetenschappelijk, middelbaar of lager niveau: systeemanalist, constructeur, e.d.)	3	5
2. Leidinggevende functie (bedrijfsleider, stuurman)	2	2
3. Administratieve functie (kantoor)	2	0
4. Commerciële functies (slager, ondernemer)	3	3
5. Dienstverlenende functies (politie, onderwijzer, postbode)	8	8
6. Agrariër	0	0
7. Ambacht, industrie of transport(fabrieksarbeider, timmerman)	5	7
8. Militair	0	0
9. Niet van toepassing (gescheiden)	2	2

fig. 7.3 beroepen van de ouders

Op de D en op de N zagen de beroepenstratificaties van de ouders er vrijwel identiek uit, zodat we van gelijkwaardige milieu-invloeden zijn uitgegaan.

7.2 Onderzoeksonderdeel onderwijspraktijk

7.2.1 Inleiding

Onderzoek van het onderwijs, zoals het gegeven wordt in de klas, is van doorslaggevende betekenis om leerprestaties te kunnen interpreteren.

We moeten weten hoe de contexten en modellen en de rekentalen zijn gebruikt, hoeveel sommen er zijn gemaakt, hoeveel tijd er besteed is aan een bepaald rekenonderwerp, alvorens iets te kunnen zeggen over de invloed van deze onderwijsonderwerpen voor de leerresultaten.

Bovendien leveren deze onderwerpen uit het onderwijs directe onderzoeksgegevens op, zoals het totaal aantal gemaakte opgaven per leerling, de hoeveelheid tijd die nodig was om het optellen en aftrekken te introduceren, de tijd die besteed werd om het zelfstandig werken met rekentaken voor te bereiden.

De beschrijvingen van het onderwijs bestaan uit drie onderdelen die hieronder aan de orde komen. De onderwijzeressen geven eerst via hun dagboeken een impressie van hun onderwijs. Dan volgen de rekenonderwerpen die de onderwijzeressen uit de programma's kozen, in de volgorde zoals ze die aanboden in de klas. En tenslotte beschrijven we hoe de leerlingen het cijferen ondergingen in de laatste drie maanden van het schooljaar.

7.2.2 De onderwijzeressen

Trudy en Henriëtte

Trudy (T.S.), onderwijzeres van klas 1 op de Dreesschool, en Henriëtte (H.), onderwijzeres van klas 1 op de Nieuwlandschool, waren in het schooljaar 1982/1983 waarin het vergelijkend onderzoek liep, tussen de 25 en 30 jaar oud en hadden elk circa vijf jaar onderrichtservaring met respectievelijk het realistische en het mechanistische onderwijs in klas 1.

T.S. had tijdens haar opleiding ooit stage gelopen op de D. Ze handhaafde in haar onderwijs bepaalde onderwerpen die vanouds uit de D stamden zoals de rekenkaarten en het laten bedenken van sommen door kinderen. Door collega's werd ze bewonderd om haar voorliefde voor en vaardigheid in dramatische expressie. Ze bracht die in haar rekenonderwijs tot uiting en zette daartoe ook de kinderen aan.

T.S. was 'een exponent van de vrije rekenkunst', terwijl H. daarentegen meer 'voorstandster was van duidelijk en gestructureerd uitleggen' (Vermeulen, 1987). H. volgde de rekenmethode nauwgezet. Ze kende de hele methode van klas 1 tot en met klas 6, omdat ze zich als taak had gesteld een rekenlijn door de school uit te zetten.

Vanuit haar onderrichtservaring wist H. goed welke bezwaren er aan de rekenmethode kleefden en had ten aanzien van sommige onderwerpen (zoals stip-sommen, het schrijven van cijfers en het gebruik van de rekenkist) een uitgesproken mening. Het waren onderwijzeressen die met het betreffende soort onderwijs zeer vertrouwd waren.

Kale sommen op de N (een onderwijsimpressie)

H. zei dat ze de stipsommen gewoonlijk oversloeg, omdat die sommen in al die jaren dat zij onderwijzeres was, te moeilijk bleken voor de kinderen van klas 1. Maar dat wilden we juist onderzoeken: welke zin hebben stipsommen voor het rekenonderwijs en voor kinderen? We vroegen haar toch aandacht te willen besteden aan die sommen.

Ook de handleiding van de rekenmethode (Niveaucursus Rekenen, deel 1B, p. 01) liet er geen twijfel over bestaan: stipsommen waren zelfs de moeilijkste sommen. 'Het is beter voor sommige leerlingen dit type over te slaan, dan de sommen via een kunstje aan te leren', adviseerden de auteurs.

Deel 1B kwam overigens pas ná de kerstvakantie aan bod. Het gaf, volgens de handleiding, een verdieping en uitbreiding van hetgeen in deel 1A al geleerd was. Maar de stipsommen vormden daarop een uitzondering. Die werden in 1B niet herhaald, die moesten op dat moment nog geïntroduceerd worden.

Januari 1983 herinnerden we H. aan onze afspraak.

'Ja, ik zal ook netjes de stipsommen laten maken', schreef ze op 7 februari in haar dagboek.

In de daarop volgende zes weken werd er veel geoefend met de rekenkist om met deel 1B, waarin de stipsommen zaten, te kunnen starten.

'Deze week (28 februari tot 4 maart) heb ik uitgebreid de rekenkisten laten in- en uitpakken. De kinderen kunnen dit nu vrijwel allemaal zelfstandig - twee leerlingen uitgezonderd. Ze zijn nu ook bekend met de kleuren van de (Cuisine-naire) staafjes: 3, 6, 9 van de gele groep, 2, 4, 8 van de rode' (dagboek van H., 28 februari).

Ze schreef, dat ze verder een start had gemaakt met het hoofdrekenen: ze 'dicteerde' een sommetje (bijvoorbeeld: $5 - 2 =$) en de leerlingen schreven alleen het antwoord op. Het waren korte, strak geleide lesjes. Ook besprak ze klassikaal de 'paalsommen' (fig. 7.4):

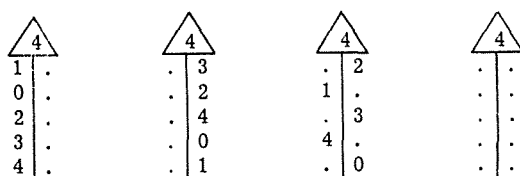


fig. 7.4 paalsommen, 1-B/3

Met de staafjes uit de rekenkisten werden tenslotte de stipsommen gelegd. Eerst werden 'vloertjes' gemaakt, te beginnen met het vloertje van 4 (later van 5, 6, 7, 8, 9 en 10).

Allerlei aanvullingen tot 4 volgden: eerst met stroken op het flanelbord door juf voorgedaan, dan op de tafeltjes met staafjes door de kinderen nagedaan (fig. 7.5).

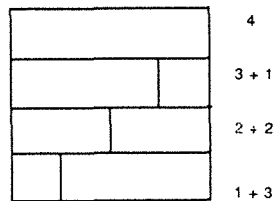


fig.7.5 vloertjes

De sommen op kaartjes werden erbij gelegd en in schriftjes genoteerd.

Tijdens zo'n les schreef H. een stipsom op het bord: $3 + . = 4$. 'Hoe moet je die som leggen met de staafjes?' Ze liet het zien op het flanelbord. 'Eerst een staaf van vier. Dan die van drie eronder. Doe maar na' (fig 7.6).

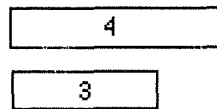
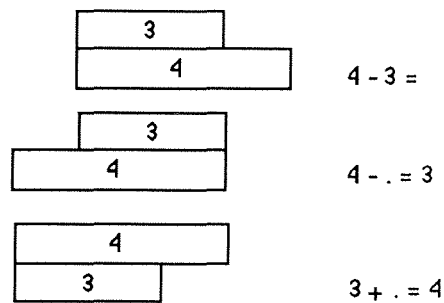


fig 7.6 rekenstaafjes

Daarna volgde steeds een vaste formulering: 'Wat moet er nu bij om er vier van te maken!' of: 'Wat ontbreekt er?'

De resultaten waren pover. In de week van 7 t/m 11 maart schreef H. daarover: 'Deze week ben ik veel met de stipsommen aan gang geweest. Niet dat ik daar nu daverende resultaten door gekregen heb. Vooral 'Hoe leg ik deze som', begrijpen de kinderen niet. Dus ik schrijf ze op en de leerlingen leggen ze met de staafjes'.

Voorbeelden:



De koppeling tussen verschillende typen sommen en de daarbij behorende 'legsels' vormde voor de kinderen een probleem.

Ze vergisten zich welke formatie van staafjes bij welke opgave behoorde.

'Het is mij opgevallen', schreef H. in haar dagboek (11 maart), 'dat veel kinderen moeite hebben met eraf-sommen. Ze kunnen ze nog niet leggen en hebben ook niet in de gaten, dat het bij die sommen iets 'minder' wordt'. Blijkbaar haalden de kinderen de handelingen van stipsom en eraf-som door elkaar, veronderstelde ze.

De handleiding waarschuwde slechts voor stipsommen: voor de begaafde rekenaars een welkome opgave, de zwakke moesten de individuele verwerking maar overslaan (1B, taak 4, p. 4).

In de week van 21 maart tot 25 maart liet H. intensief oefenen met de rekenkist. Veel kinderen hadden nog moeite met het leggen van erbij sommen ($1 + 3 =$), eraf-sommen ($4 - 3 =$) en stipsommen ($3 + . = 4$). Maar na die oefenweek schreef ze: 'Het gaat nu al bij veel kinderen erg leuk' (25 maart).

Dat wil zeggen, dat de kinderen na zes weken (vanaf 7 februari) hebben geleerd om individueel de sommen te maken met het materiaal uit de kist. De stipsom was dus te overmeesteren door de handelingen klassikaal in te slijpen.

Vooraf in de week van 25 tot 29 april werd uitsluitend aan de rekentaken uit 1B gewerkt. Toen ontstond een nieuw probleem.

H.: 'De methode werkt een competitie-element in de hand. Michel is bij taak 40. Dus ik moet ook bij 40 zijn. De kinderen gaan hun werk afraffelen. Ik heb met de kinderen daarover gepraat en hen verteld dat het niet belangrijk is, hoe ze werken, maar dat het erom gaat of ze de sommen begrijpen' (29 april).

Een week later liet H. de kinderen uit elk rijtje stipsommen slechts twee opgaven kiezen die ze moesten maken. Ze gaf als motief voor deze beperking in het oefenen, dat de kinderen hun werk anders gingen afraffelen en het rekenen veel te saai werd. De kinderen zouden namelijk gedurende de laatste drie maanden in totaal 2158 kale sommen worden aangeboden, waarvan 937 stipsommen. De stipsommen waren dus, overeenkomstig onze afspraak, aan bod gekomen en zelfs zeer uitgebreid.

H. meldde, dat opgaven zoals $2 + . = 8$ en $. + 5 = 7$ eerder werden gekozen dan opgaven zoals $8 - . = 2$ en $. - 3 = 3$.

Opgaven zoals $3 = 8 - .$ en $8 = 0 + .$ werden volgens H. zelfs nooit door de kinderen uit eigen beweging gekozen.

De mogelijkheid om vrij uit de stipsommen te kiezen gaf een indicatie over de populariteit van de stipsommen: geen kind heeft in de laatste schoolmaand nog een stipsom gemaakt.

Kale sommen op de D (een onderwijsimpresie)

T.S. maakte van de stipsommenproblematiek geen punt.

Ze was erg geïnteresseerd in allerlei speelsituaties die door de kinderen uitgebeeld zouden kunnen worden. Ze verzond de situaties ter plekke gedurende een rekenles. Haar voorliefde om kinderen zelf sommen te laten bedenken, paste in dit kader, evenals het 'spelen' van sommen in klassikale lessen.

Ook de gevarieerdheid aan onderwerpen per les was tekenend: drie tot vier verschillende onderwerpen per lesuur was heel normaal.

Op 11 maart werd door T.S. bijvoorbeeld het volgende programma voorgeschoteld:

- getallenlijnoefening met nadruk op 11, 12 en 13
- een spelletje Bingo met de klas
- stipsommen in pijlennotatie
- zelfstandig bedenken van stipsommen in de pijlentaal.

Binnen de onderwijsopvattingen van T.S. gaven de stipsommen geen moeilijkheden: de sommen werden gekoppeld gehouden aan contexten omdat ze moesten worden gespeeld.

Een voorbeeld:

T.S. schrijft op bord

$$7 \xrightarrow{\quad} .$$

en gaat met een plof op de stoel zitten. Ze leunt nu demonstratief achterover: 'Hè, hè, de dokter heeft even rust hoor' en strekt zich uit. 'Er zitten nog ...', ze staat nu op, loopt naar de deur, kijkt de lege schoolgang in en vervolgt met: '4 mensen in de wachtkamer' en noteert:

$$7 \xrightarrow{\quad} 4$$

Maar vraagt dan, terwijl iedereen dit sommetje zit uit te rekenen: 'Wie willen die patiënten zijn?' 'Ach ja', verontschuldigt ze zich, 'Hoeveel zijn er al geholpen?'

De vier kinderen op de gang worden even later door de dokter behandeld. De klas lacht.

Wat later speelt een jongen voor Fik, die van de zeven hondenbrokken er stiekem een aantal wegneemt. Er blijven er vier over. Met dezelfde pijlennotatie

$$7 \xrightarrow{\quad} 4$$

wordt die situatie moeiteloos beschreven.

In maart kwamen pijlendiagrammen voor, bijvoorbeeld:

$$4 \xrightarrow{\quad} . \quad - 5 \quad \leftarrow 7$$

die isomorf waren met de complexe stipsommen ($4 + . = 7 - 5$), maar die volgens T.S. toch niet een echte moeilijkheid vormden, mits ze maar konden worden gespeeld (7 maart).

De kinderen werden telkens uitgenodigd om, net als met gewone pijlensommen zelfstandig stipsommen in pijlennotatie te bedenken (9 maart). De belangstelling van kinderen voor kale stipsommen golfde gedurende de periode van 25 april tot 6 juni op en neer, maar verdween niet, zo bleek uit het aantal gemaakte rekentaken.

Het gesprek-achteraf

Aan het einde van het school- en onderzoeksjaar 1982/1983 hebben we een bijeenkomst belegd waarin de twee onderwijzeressen elkaar voor het eerst vertelden hoe ze rekenonderwijs hadden gegeven.

Deze bijeenkomst werd gehouden op 8 juni 1983 van 12.30 tot 15.30 uur op de N en gaf een indruk van wat elke onderwijzeres van belang achtte in haar rekenonderwijs.

Rekenmaterialen

H. zette allereerst uiteen hoe ze het optellen en aftrekken had aangeleerd met staafjes uit de rekenkist.

T.S. reageerde met de opmerking, dat zij op de D veel meer modellen gebruikte dan één soort en ze noemde in dit verband fiches, getallenlijn, stroken papier, pot met knopen en allerlei verhalen. 'Jouw rekenkist zou daarin ook heel goed passen', merkte ze tenslotte op. 'Je zou ermee kunnen laten bouwen of er een spel mee laten doen. Bijvoorbeeld: 'Ik neem een staaf in gedachten, welke?'

Rekenonderwerpen

Daarna gaf H. in globale termen aan welke onderwerpen ze op de N in de loop van het jaar had gedaan: de werkbladen, de lotto's, de rekenkist, de rekentaken uit deel 1B. 'In het eerste half jaar staat het werkblad bij ons centraal. Tot blad 1-A/f uit het rekenboek is alles een herhaling van wat er op de kleuterschool al ter sprake is geweest: hoog/laag, tellen, vergelijken en dergelijke. Het is een gewenningsperiode met knip- en plakoefeningen'.

Maar die oefeningen sloeg H. grotendeels over. In plaats daarvan deden de kinderen schrijfoefeningen. H. had zelf een serie schrijfbladen gemaakt, omdat de methode drukletters gaf. Bovendien vond H. dat de methode te laat met het schrijven van cijfers van start ging.

Vanaf 1-A/f werden optellingen aan de hand van plaatjes gemaakt en werden allerlei rekenspelletjes, zoals lotto's, gespeeld, waarmee de kinderen het optellen oefenden. Zeven weken later kwamen de craf-sommen aan de beurt.

'Na de oefeningen met de rekenkist begonnen we aan de rekentaken uit deel 1B. Die taken werden door de kinderen individueel gemaakt. Onderwerpen, zoals geld en klokkijken behandelden we klassikaal.'

Na deze uitleg van H. beschreef T.S. haar onderwijs op de D. Ze deed dat met twee voorbeelden over 'het belang van de achterkant' en het 'versieren met en van rekensymbolen'.

'Dat paddestoelen op plaatjes ook stippen op de achterkant hebben, is niet iedereen zich bewust. Ze zijn onzichtbaar, maar ze zijn wèl van belang'.

Even later vertelde ze over de 'achterkant': 'Ik vroeg de kinderen na elke oefening zelf een sommetje of verhaaltje op de achterkant van het werkblad te bedenken. Ze waren zelfs kwaad als ik dat vergat of door gebrek aan tijd er niet aan toe kwam.'

H. merkte hier op, dat ze haar kinderen niet meer zelfstandig sommetjes liet bedenken. Ze had het ooit eens gedaan, maar het was niet bevallen: het rekenen werd er niet netter en beter op. Ze maakten steeds hetzelfde type opgave.

Over de pijlentaal vertelde T.S. haar vondst om van de pijlsommen naar de sommen in de is-taal te komen door de pijlen

$$(3 \xrightarrow{+5} .)$$

te versieren: 'Het is-teken zet je als 'slot van de rit' achter de pijl

$$(3 \xrightarrow{+5} = .)$$

en dan laat je de pijl weg ($3 + 5 = .$) Klaar.'

Ook omgekeerd: 'Het was een heel geschikte manier, vooral voor rekenzwakke kinderen, om zich te herinneren wat zo'n kaal sommetje ($3 + 5 = .$) betekende, door er eenvoudigweg een pijl onder te zetten': $3 + 5 =$

----->

H. had waardering voor deze aanpak.

'Van materiaal naar notatie is altijd heel moeilijk', merkte ze op. 'Met pijlen lijkt het me - gezien de verhalen en de spelletjes - spelenderwijs te gaan'.

Samenvatting

De onderwijsprogramma's op de D en op de N verschilden op vijf punten:

- * Zich realiseren vanuit noties of vakstructuren leren

In het N-programma vond het optellen en aftrekken plaats met getekende plaatjes en met rekenstaafjes (dus met illustrerende voorwerpcontexten), waarin het rekenen werden afgesproken.

Het onderwijs op de D begon met contexten die te spelen waren in reken-toneelstukken: mens-diercontexten en speelgoedcontexten.

- * Conflictsituaties of geleidelijkheid

De kinderen op de D realiseerden zich wat ze wisten door confrontaties met misvattingen van henzelf of van anderen. Deze misvattingen werden soms zelfs door de onderwijzeres met conflictsituaties uitgelokt (4).

Op de N werden daarentegen conflicten vermeden. Een duidelijke en stapsgewijze uitleg werd voorgestaan om de manipulaties met de rekenstaafjes te leren, hetgeen uitmondde in een mechanisch en langdurig oefenen van typen sommen.

* **Pijlentaal en/of is-taal**

Deze rekentalen werden op verschillende manieren overdrachtelijk gebruikt. In de D werd de pijlentaal eerst aangeboden als pijlen die aan één context gebonden zijn, daarna als kaal, maar te versieren pijlenmodel. Door de pijlen te versieren of als versiering te gebruiken, waren ze met allerhande betekenissen te interpreteren. De kale pijlentaal werd op die manier als meer algemene, intermediaire rekentaal ontdekt. In de N werd de is-taal gehanteerd. Door het is-teken zonder enig onderscheid of 'versiering' zowel tussen plaatjes als getallen te plaatsen, trachtte men op deze wijze de is-taal te veralgemeniseren.

* **Zelfstandig bedenken en/of zelfstandig maken van sommen**

Na zes weken van voorbereiding met de rekenkist werden op de N allerlei typen oefensommen met een is-teken erin zelfstandig gemaakt. Het onderwijs beperkte zich hoofdzakelijk tot dit individuele oefenen, terwijl op de D in elke les ook aangespoord werd tot het zelfstandig bedenken van opgaven.

* **Oude en/of nieuwe toepassingsgebieden**

Rekenonderwerpen, contexten en notaties die eerder aan de orde waren geweest, werden op de D later in het jaar herhaald. Ze vormden het vertrouwde toepassingsgebied voor het kale cijferen. De pijlentaal en de is-taal werden gelijkwaardig gebruikt.

Op de N werden, geïsoleerd van de kale, individuele cijferoefeningen, klassikaal enkele nieuwe onderwerpen ingeleid (klokkijken en geldrekenen). Alleen de is-taal stond centraal.

7.2.3 De rekenonderwerpen

Het één en ander hebben we nog eens in schema gezet (zie fig.7.7 op de volgende bladzijde).

Sommige van deze rekenonderwerpen die de onderwijzeressen kozen, vereisen in verband met het onderzoek een nadere toelichting. Dat zijn de contexten en modellen, de gebruikte rekentalen en het oefenen en toepassen.

Contexten en modellen

Het gaat om opvallende verschillen tussen D en N bij het vergelijken van kleine aantallen, het gebruik van de getallenlijn en de introductie van het optellen en aftrekken.

- **Vergelijken van kleine aantallen**

Voorafgaand aan het optellen en aftrekken werd op beide scholen aandacht besteed aan kleine aantallen.

De rekenmethode op de N was duidelijk gericht op het manueel handelen.

De D-methode meer op het zich realiseren.
 De N-methode liet één-één-verbindingen aanleggen. De D-methode stoorde die verbinding soms opzettelijk om tot beter begrip te komen.
 Bijvoorbeeld:
 'Zijn er evenveel honden en poezen?' (fig.7.8)

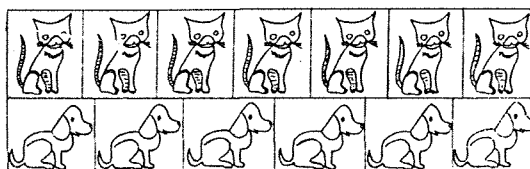


fig.7.8 honden en poezen

'Knip ze uit en plak ze op'.
 Na de opdracht was een leerling op de grond aan het zoeken: ze miste een hondje.

Rekenonderwerpen in de eerste klas van de Dreesschool en van de Nieuwlandschool		
START	KERST	APRIL
Drama & spel vanaf 31 aug tot dec Getallenlijn & cijfers (augustus) leren Relatiesommen (meer/minder/evenveel) (okt) Tellen van hoeveelh. & akoestisch tellen DREESSCHOOL	INTRODUCTIE $+$ & $-$ Rekenontleed contexten spelletjes Pijlentaal van 24/1 tot 14/3 Tellen tot 100 Tonespel dubbeldekker van 7/1 tot 27/1 NIEUWLANDSCHOOL	Redenerend rekenen met complexe pijldiagrammen Oefensommen van 28/3 tot 27/6 Zelf bedenken van opgaven Herhaling van oude onderwerpen van 7/3 tot 11/3 relatiesommen pijlsommen is-sommen getallenlijn drama & spel (minder/contesten) akoestisch tellen (10,20,...) Toepassen Telsaam
Grafisch rekenen tekenen en kleuren flanebord figuren Introductie optellen (grafisch) vanaf 23/11 tot 17/1 Cijfers schrijven vanaf 8 nov. NIEUWLANDSCHOOL	Introductie aftrekken (grafisch) vanaf 17/1 tot 21/2 Rekenkies vanaf 2/2 tot 26/3 technieken leren om zelf sommen te maken Rekenspelletjes (poto's en dergelijke)	Herhaling tweetermen in de is-notatie van 28/3 tot 27/6 centrumsommen Na 10 taken een proeftaak Zelfstandig rekenen vanaf 21/2 tot 7/6 Maken van gemiddeld 2158 sommen Gefasien: 11 tot 20 vanaf mei in verband met typen sommen Rekenspelletjes

fig. 7.7 rekenonderwerpen

Op de N werd het accent gelegd op teken- en kleuropdrachten.
'Zoek het verschil en kleur het' (fig.7.9).

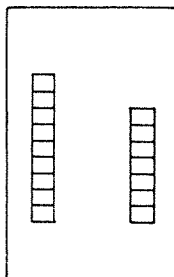


fig.7.9 kleur het verschil

- De getallenlijn
D-kinderen leerden vanaf het begin van het schooljaar de cijfers te schrijven en vormden daarmee een getallenlijn.
Allerlei spelletjes en activiteiten werden ondernomen, zoals 'raad mijn getal', 'verstoppertje spelen' (akoestisch tellen in tienvouden), tellend structureren op de getallenlijn en op het telraam tot 100.
Op de N begon het schrijven van cijfers vanaf november, maar het duurde tot mei eer de getallenlijn werd ingevoerd en dan nog tot 20.

- Er waren naast de getallenlijn ook andere 'rekenmodellen' in gebruik om getallen te structureren:
Op de D: het telraam (vanaf maart), fiches, honderdveld.
Op de N: flanelbord, rekenkist met staafjes, lotto's.

- De introductie van het optellen en aftrekken

Nieuwlandschool

Op 23/11 werd het optellen op het flanelbord aldus ingeleid (zie fig.7.10):

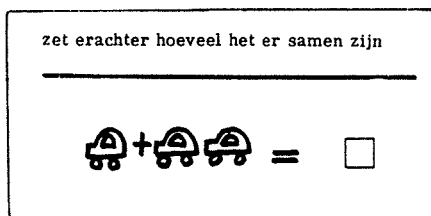


fig.7.10 bladzijde 1 - A/f - 1

Het optellen werd beschouwd als het verenigen van twee collecties voorwerpen. De methode schreef voor, dat deze opgaven met de staafjes uit de rekenkist moesten worden voorbereid.

Maar de onderwijzeres raakte daardoor met zichzelf in conflict. H. wilde zelfs wel eerder beginnen met het optellen dan de methode aangaf, maar ze wist uit ervaring dat dat onmogelijk was met de rekenkist. De rekenkist was, éénmaal uitgepakt, voor jonge kinderen niet meer in te pakken. Om toch vroeg met het optellen te beginnen gebruikte ze het flanelbord om plaatjes met sommenkaartjes te verbinden.

In het begin, op 23/11, bleken de kinderen het optellen erg moeilijk te vinden, maar na Kerst (vanaf 4/1) ging het beter.

Tot 17/1 werden 72 optellingen gemaakt, daarna pas werd het aftrekken ingevoerd als het 'doorstrepen of kleuren' (in één collectie) en als 'verschil aangeven' in twee collecties (zie fig. 7.9 en fig. 7.11).

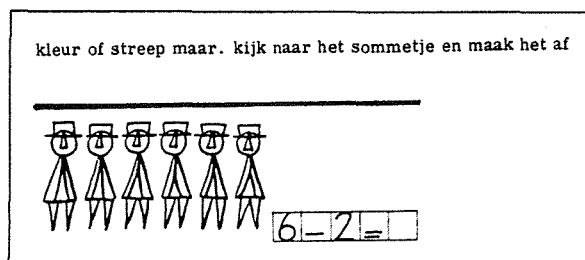


fig. 7.11 bladzijde 1 - A/f - 17

Het sommetje is gegeven. Plaatjes moeten worden doorgestreept of gekleurd.

Er volgden meer van dergelijke plaatjessommen van 17 januari tot 21 februari. Tussen 2 en 21 februari werd met de rekenkist gewerkt in een strakke onderwijsstijl: uitpakken en daarna netjes inpakken.

Vanaf 7/2 werden bepaalde handelingen met staafjes per somtype aangeleerd: eerst uitgelegd met behulp van het flanelbord en dan nagedaan door de kinderen met staafjes op hun tafel.

Op 21/2 konden de kinderen daardoor zelfstandig met de taken uit deel 1B van start, maar het duurde tot 25 maart eer dit door allen werd beheerst.

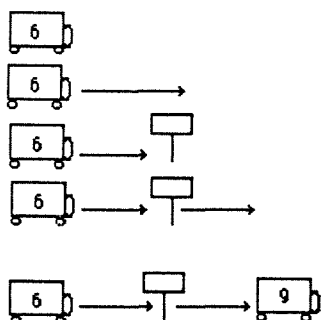
Dreesschool

Op 24/1 werd een busverhaal gespeeld: door de klas liep de chauffeur met een sliert kinderen achter zich aan.

De leerlingen gebruikten fiches als symbolen om de rit bij te houden.

De pijlentaal werd stapsgewijs en verhalend ingevoerd, zoals in het schoolwerkplan door onderwijzeres J. was bepleit (zie fig. 7.12).

Bord:



'Er zitten 6 mensen in de bus'

'De bus rijdt weg'

'Hij komt bij een halte'

Er stappen mensen in'

'Er gebeurt wat'

'De bus rijdt weer verder'

'Er zitten nu 9 mensen in'

'Wat kan er bij de halte gebeurd zijn?'

fig. 7.12 inleiding autobuspijlen

Het probleem werd direct gedramatiseerd door T.S. Daarna kwamen uitsluitend gewone pijlenlierten (dus geen pijlenstipsommen) op bord om in toneelspel uitgevoerd te worden of om er een uitgevoerde rit mee vast te leggen (zie fig. 7.13).

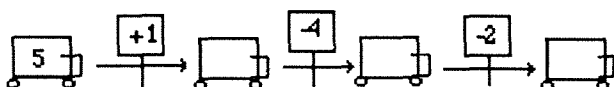


fig. 7.13 autobuspijlenliert

De contexten wisselden elkaar snel af: een treinverhaal (25/1), een winkelverhaal (27/1), hond- en kat-verhaal (28/1), goochelen (1/2), kegelen (8/2). Er werd gespeeld naar aanleiding van een verhaal van juf of naar aanleiding van een pijlenserie op bord. Eigen pijlentaalverhalen werden gemaakt (3/2)(9/2).

Er werd gekegeld: klassikaal (8/2) en in tweetallen (10/2). Met de pijlennotatie op bord werd uitgemaakt wie er gewonnen had.

Begin maart waren de refererende pijlensommen gemeengoed in de D.

Rekentalen

Op de N. gebruikte men de is-taal en de zogenaamde paalsommen.

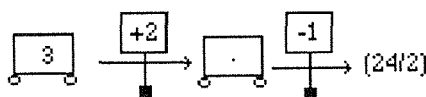
Op de D. ging de pijlentaal aan de optellingen en aftrekkingen in de is-taal vooraf. Het is-teken was al ingevoerd tussen 'kleine aantallen' als relatietekenen. De dubbeldekkernotatie was in gebruik.

- Pijlen

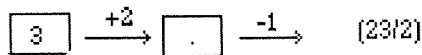
Er waren in het D-onderwijs in de pijlentaal drie perioden te onderscheiden.

In de eerste periode (van 24/1 tot 14/3 met herhalingen in april en mei) kwamen de pijlen in verschillende vormgeving voor op de werkbladen (zie fig. 7.14).

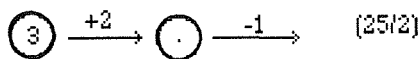
aan één context
gebonden



refererend
naar meerdere
contexten



en als kaal
oefenschema



met variaties

in contexten (bus, kegelen, enz.),

in symbolisering (pijlen, fiches, getallenlijn, diagrammen) en

in onderwijsvorm (vertellen, toneelspel, werkbladen)

fig. 7.14 pijlentypen

Op 14/3 (de start van de tweede pijlenperiode tot eind april) werd de overdracht van de kale pijlentaal naar de is-taal aldus aangeleerd (zie fig. 7.15 en hoofdstuk 4, paragraaf 4.5.2).

pijlentaal	9	$\xrightarrow{+2}$	11	$\xrightarrow{-3}$	8	$\xrightarrow{-5}$	3
pijl & is	9	$\xrightarrow{+2}$	11	$\xrightarrow{-3}$	8	$\xrightarrow{-5}$	= 3
							('=' als eindresultaat van een busrit)
is-taal			(: pijl weg)		8	-5	= 3

fig. 7.15 van pijl naar is-teken

En na deze overgang volgden in een derde periode (april, juni) de rekenkaarten en pijlendiagrammen (pijlenstipsommen, eindpuntsommen met tegengesteld gerichte pijlen en complexe pijlendiagrammen).

- Het is-teken als relatieteken

Op de D. kwam het is-teken voor het eerst aan de orde bij het bouwen van torentjes op een noppenbord (25/10) (zie fig. 7.16).

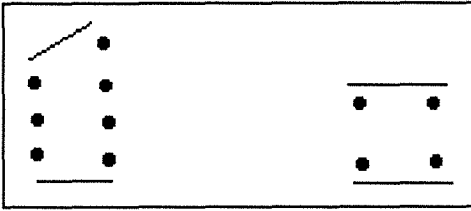


fig.7.16 torentjes

De betekenis van het teken werd van de vorm afgeleid (<=,>).

In de N-methode werd het is-teken plompverloren tussen plaatjes geplaatst (23/11).

In de handleiding lezen we daarover: 'Voor alles gaan we weer uit van de instructie. De tekens '+', '-', '=' moeten nog het geestelijk eigendom der kinderen worden.

Als voorfase kan genoteerd worden (zie fig. 7.17):

$$\begin{array}{c} \text{Q} \text{Q} \text{Q} \\ \text{Q} \text{Q} \text{Q} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Q} \text{Q} \\ \text{Q} \text{Q} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Q} \text{Q} \text{Q} \text{Q} \text{Q} \text{Q} \\ \text{Q} \text{Q} \text{Q} \text{Q} \text{Q} \text{Q} \end{array}$$

fig. 7.17 NCR, handleiding 1A, blz. 0/f-1

Van 23/11 tot 7/2 trachtte men door oefening in dergelijke plaatjes de rekensymbolen tot 'geestelijk eigendom' van kinderen te maken. De plaatjes werden tenslotte door getallen vervangen ($3 + 2 = 5$).

Dubbeldekkernotatie en paalsommen

De dubbeldekkernotatie (zie fig. 7.18)



fig. 7.18 dubbeldekkernotatie

werd op de D geïntroduceerd met een gevouwen strook als dubbeldekker. Fiches als passagiers moesten worden verdeeld (20/12). T.S. vond het nodig, dat deze papieren dubbeldekker vooraf ging aan het spel.

Op 7/1 werd voor de klas het dubbeldekkerspel met zeven leerlingen gespeeld. De kinderen in de klas maakten de verdelingen met fiches na op hun tafels en noteerden die in de dubbeldekkernotatie.

Op 10/1 en 11/1 vonden herhalingen van het spel plaats met acht en elf leerlingen en met een vrij te kiezen aantal passagiers. Het laatste spel werd gedaan op 27/1.

T.S. forceerde de kinderen van dit schooljaar overigens niet om een bewijs

te leveren voor het maximum aantal verdelingen in de dubbeldekker (een activiteit die in het Cito-Iowo-samenwerkingsproject zelfs als minimumdoel was gesteld; zie hoofdstuk 6).

Een opvallende gebeurtenis bezorgde het 'Lenteboekje', een rapportboekje, dat in de week van 21/3 tot 25/3 werd gemaakt. Er kwam een opgave in voor over de dubbeldekker, maar in een afwijkende notatie (zie fig. 7.19).

3	1
.	.

fig. 7.19 dubbeldekkernotatie Lenteboek

Deze notatie stoorde de kinderen geweldig. Velen dachten dat 4 de uitkomst was in plaats van 2.

Na het Lenteboekje werd op 27/3 de officiële dubbeldekkernotatie herhaald (zie fig. 7.20).

3	0	3	1		
3	0				

fig. 7.20 dubbeldekkernotatie

Vrijwel ieder behaalde nu een goed resultaat.

De invloed van de vorm van refererende notaties is blijkbaar zeer groot, gezien ook dezelfde ervaring met een afwijkende dubbeldekkernotatie in het Cito-Iowo-samenwerkingsproject.

De paalsommen op de N komen oppervlakkig beschouwd overeen met de dubbeldekkersommen op de D (zie fig. 7.21).

$\triangle 4$	$\triangle 4$	$\triangle 4$	$\triangle 4$	$\triangle 7$	$\triangle 7$	$\triangle 7$
1 .	. 3	. 2	. .	6 .	3 .	. .
0 .	. 2	1 .	. .	0 .	. 6	. .
2 .	. 4	. 3	. .	4 .	2 .	. .
3 .	. 0	4 .	. .	7 .	. 0	. .
4 .	. 1	. 0	. .	5 .	4 .	. .

fig. 7.21 paalsommen

Maar er zijn belangrijke verschillen:

- de naam 'paalsom' verwijst naar de vorm van de som, niet naar een zingevende context zoals bij de dubbeldekkernotatie;
- bij de dubbeldekker ging het om zelfstandig meer mogelijkheden te vinden (zie fig. 7.22).

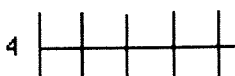


fig. 7.22 dubbeldekkernotatie

Op de N echter is het aantal open paalsommen waarin getallenparen moeten worden ingevuld, zeer beperkt (30 op een totaal van 180 paalsommen). Ook het feit dat 'paalsommen van 4' dezelfde grafische vorm hadden als bijvoorbeeld die van 7, terwijl van 7 veel meer oplossingen te vinden zijn, geeft aan dat het louter ging om splitsingen te maken en niet om het ontdekken van strategieën, zoals bij de dubbeldekker mogelijk is.

Oefenen en toepassen

Naast de rekentaken (zie hierna paragraaf 7.2.4) waren er twee duidelijke verschillen tussen D en N in het toepassen en oefenen.

* *Klassikale herhalingen op lange termijn versus individuele herhalingen op korte termijn*

Vanaf april vonden op de D klassikale herhalingen plaats van rekenonderwerpen die onder andere uit het begin van het schooljaar stamden:

- drama en spelletjes (van het onderwijs in september);
- groter dan, kleiner dan, raad mijn getal (van oktober);
- pijlsommen (van januari);
- is-sommen (van maart).

Het waren klassikale herhalingen op lange termijn ter consolidering en ter toepassing van het cijferen.

Op de N werden geen lange termijn herhalingen van vroegere onderwerpen gehouden. Wel werd na elke tien rekentaken een korte termijn herhaling ingelast: een proeftaak over de stof die individueel moest worden gemaakt. Klassikaal rekenonderwijs werd niet meer gegeven vanaf februari, met uitzondering van enkele nieuwe onderwerpen (geld en klokken).

* *Maken of bedenken van opgaven*

Op de N werd de nadruk gelegd op het maken van opgaven onder de 10. Door langdurig te oefenen in het uitspreken trachtte men ze te automatiseren en te memoriseren. Pas vanaf eind mei werd met opgaven boven de 10 gestart.

De D-kinderen werden vrijwel na ieder werkblad gevraagd om zelf, op de achterkant, opgaven te bedenken. Dat was typerend voor het D-onderwijs vanaf 3/11.

7.2.4 De rekentaken geteld

Het onderwijs aan de N en de D bestond niet alleen uit klassikale lessen. De kinderen werden ook taken opgedragen.

Op de N sprak men van rekentaken, op de D van rekenkaarten.

De taken moesten individueel worden gemaakt. De onderwijzeres keek ze na.

De rekenkaarten op de D waren een rudiment van het rekenprogramma van vòòr Wiskobas om de rekenvaardigheid veilig te stellen.

Er waren veel verschillen tussen het onderwijs met de taken op de D en op de N: verschillen in voorbereiding, in organisatie, in aantallen en soorten opgaven en verschillen in hoe de opgaven door de kinderen werden gemaakt.

Verschillen in organisatie met de taken en kaarten

Op de N werd het taakwerk voorbereid door te demonstreren hoe verschillende typen sommen met de rekenstaafjes konden worden opgelost. Daarna moesten de kinderen individueel de rekentaken maken (vanaf 21/2).

Op de D werd de is-taal afgeleid van de pijlentaal (op 14/3), zodat de kinderen in staat waren om individueel de opgaven op de rekenkaarten - die alle in de is-taal waren gesteld - te vertalen in pijlentaal en ze op die manier te maken.

Een ander opvallend verschil in organisatie was, dat op de N elke leerling alle taken in dezelfde vaste volgorde tot zijn beschikking had. Op de D was een beperkt aantal rekenkaarten voorhanden. Elke leerling moest een kaart kiezen uit het aantal dat beschikbaar was. Een kaart die al in gebruik was, kon niet door een andere leerling in dezelfde week worden gemaakt. Daardoor was een leerling soms genoodzaakt een kaart twee maal te maken.

Een ander verschil betrof het accent dat men in de sommen legde. Een rekentaak van de N bevatte verschillende soorten sommen rondom één getal; die van de D één soort sommen, bijvoorbeeld alleen stipsommen, ongeacht de getallen.

Op de D moesten alle sommen op de kaart worden gemaakt. De leerlingen van de N hoefden vanaf taak 26 (medio mei) niet alle opgaven van een taak meer te maken: van elk rijtje stipsommen waren alleen de eerste twee sommen verplicht, evenals alle 'gewone' sommen.

Er was ook een verschil in controle op de individuele activiteiten. Op de N werd nauwkeurig een overzicht bijgehouden waarop de voortgang van elke leerling door het pakket taken was te zien en op grond waarvan H. de 'achterblijvers' achter de broek zat. Na elke tien taken volgde een toets-taak. De stand van de vorderingen gold als indicatie voor de onderwijzeres om bepaalde onderwerpen klassikaal nog eens te behandelen.

Op de D was het in principe wel mogelijk om met de 'groene schriftjes', waarin de sommen werden geschreven, na te gaan hoe ver een leerling was, maar er werd geen overzicht van de vorderingen bijgehouden. Het klassikale onderwijs op de D werd ook niet beïnvloed door de rekenkaarten. Het stond daar los van.

De belangrijkste gevolgen van deze verschillen in organisatie waren, dat door de vele sommen en de nauwkeurige registratie op de N een competitiefeer ontstond en dat de kinderen hun werk gingen 'afraffelen' (dagboek van H., 29 april).

Door het ontbreken van een algemeen controlemiddel op de D en het beperkte aantal rekenkaarten aldaar maakten drie kinderen een taak dubbel, twee van hen maakten zelfs dezelfde taak twee maal vlak na elkaar, terwijl tien andere D-kinderen in het hele schooljaar nog nooit een rekenkaart met stipsommen gemaakt hadden.

Verskil in aantallen en soorten opgaven

Van 24/3 tot 1/7 (circa drie maanden) werden op beide scholen de volgende aantallen en soorten sommen aangeboden (zie fig.7.23).

	Aantallen aangeboden sommen in rekentaken(april, mei, juni)					
	gewone sommen	stip sommen	omgekeerde stipsommen	complexe stipsom	paal- sommen	totaal
D	999	260	0	0	0	1259
N	1200	366	160	0	432	2158

fig.7.23 aantallen sommen

Stipsommen werden de 'moeilijkste sommen' genoemd in de handleiding op de N en dat bleek ook uit hun aandeel in het totaal aantal sommen: er werden op de N 958 stipsommen (paalsommen meegerekend) aangeboden op een totaal van 2158. Dat is 44,4% van het totaal. Op de Dreesschool waren die aantallen 260 en 1259, dat is 20,7%.

Tussen 21/2 en 6/6 kregen de N-kinderen twee keer zoveel stipsommen aangeboden als de D-kinderen (respectievelijk 526 en 260).

Complexe stipsommen kwamen op geen van beide scholen voor.

Omgekeerde stipsommen alleen op de N.

Verskil in hoe de opgaven werden gemaakt

We kozen vier peildata (24/4, 16/5, 6/6 en 27/6) waarop we de vorderingen per leerling registreerden: het aantal opgaven, taken, soorten sommen en gemaakte fouten per opgave.

Hier volgen onze bevindingen.

Over de vier termijnen, vanaf 24/4 tot 27/6 gerekend, werden gemiddeld (over de leerlingen) de volgende aantallen opgaven en fouten per opgave gemaakt (zie fig. 7.24)

Gemiddelde aantallen		I	II	III	IV	Totaal	Extremen max. min.	
Aantallen taken	D	2.0	4.6	4.5	1.6	12.7	27	5
	N	14.1	7.3	7.3	7.8	36.5	46	28
Aantallen sommen	D	58.7	127.7	107.7	42.8	337.	710	150
	N	418.3	211.8	165.3	186.6	1156.	1475	904
Fouten-aandeel	D	0.074	0.045	0.042	0.050			
	N	0.032	0.042	0.048	0.052			

fig. 7.24 aantallen taken, sommen en fouten

Het gemiddeld foutenaandeel over de vier termijnen:

D: $(0.074+0.045+0.042+0.05) / 4 \approx 0.05$

N: $(0.032+0.042+0.048+0.052) / 4 \approx 0.04$

De standaarddeviatie voor het aantal taken is op de N stabieler dan op de D (zie fig. 7.25).

σ	I	II	III	IV
D	1.8	2.0	2.7	0.9
N	4.0	2.1	2.0	2.0

fig. 7.25 standaarddeviatie rekentaken

Conclusies

De N-kinderen maakten gemiddeld ruim drie keer zoveel sommen als de D-kinderen (respectievelijk 1156 en 337) en drie keer zoveel rekentaken (respectievelijk 36.5 en 12.7).

Maar de foutenpercentages waren op de N en de D vrijwel gelijk (respectievelijk 4% en 5% van het aantal gemaakte sommen per leerling).

Figuur 7.24 toont tevens dat bij de N-kinderen het fouten-aandeel ondanks het vele oefenen toenam. Op de D alterneerde dat.

Het gemiddeld aantal stipsommen dat per leerling in de rekentaken werd gekozen (op de vier peildata geteld) vertoonde een omslag tussen 24/4 en 1/5.

Vòòr 24/4 maakten de N-kinderen gemiddeld meer stipsommen dan de D-kinderen in hun rekentaken (N: 53.7; D: 2.9).

Nà 24/4 maakten de N-kinderen gemiddeld minder stipsommen dan de D-kinderen (N: 24.3; D: 32.3).

Dit klopt met de maatregel die H. op de N afkondigde op 29/4 tegen het 'afraffen': de kinderen mochten vanaf taak 26 slechts twee stipsommen per rij maken. Met als gevolg deze sterke daling in de gemaakte stipsommen (zie fig. 7.26).

Gemiddelde aantallen	I	II	III	IV
Aangeboden: (gewone en om- gekeerde stip- sommen)	141.7	76.6	85.1	75.3
Gemaakt:	53.7	24.3	4.1	nihil

fig. 7.26 aantallen aangeboden en gemaakte sommen

De 'gemiddelde leerling' op de N maakte in zijn rekentaken tot 6/6 per termijn: 28.6 omgekeerde stipsommen. In diezelfde tijd deed de gemiddelde leerling van de D er precies nul.

Op de D werden in de laatste termijn (6/6 tot 27/6) gemiddeld per leerling 10.6 gewone stipsommen gemaakt met een spreiding van 17.6. Het kwam erop neer, dat slechts acht leerlingen veel stipsommen maakten, 18 D-leerlingen maakten er geen.

Achteraf bleek, dat over het hele jaar genomen tien D-leerlingen nog nooit een rekenkaart met stipsommen hadden gekozen.

Conclusie

We kunnen dus concluderen, dat de stipsom niet populair was bij kinderen, ongeacht het gevolgde onderwijs.

7.2.5 Samenvattende conclusies

In antwoord op onze onderzoeksvraag kunnen we uit deze praktijkbeschrijvingen van het onderwijs op de D en op de N voor- en nadelen putten voor het leren rekenen van jonge kinderen.

We stellen de feiten tegenover elkaar en delen ze in naar de drie onderwerpen: contexten, rekentalen en oefenen.

Contexten

Zeven weken oefenen versus één dag spelen.

Om het optellen en aftrekken te introduceren stonden op de N zeven weken oefenen van alleen optellingen tegenover één dag spelen in de autobuscontext met contextgebonden pijlen op de D, waarmee tegelijk het optellen en aftrekken werd aangeleerd.

Rekentalen

Pijlen versieren en pijlen als versiering.

- * Versieringen geven betekenissen.
Afhankelijk van de vorm werkte de dubbeldekkernotatie verhelderend of verwarrend. Dit gold ook voor de pijlentaal.
Volgens T.S. werd door een versiering van de kale pijlen met bijvoorbeeld wielmpjes de betekenis van kale pijlen direct duidelijk voor de kinderen.
Het versieren van de kale pijlen met ornamenten uit andere contexten zorgde voor verschillende beeldende betekenissen bij een zelfde kale pijlensliert.
Conclusie: versieringen geven betekenissen.
- * Zes weken staafjes tegenover is-sommen versieren met pijlen.
Zes weken oefenen met rekenstaafjes was nodig op de N om de kinderen er zelfstandig sommen mee te laten maken.
Op de D begrepen de kinderen de sommen in de is-taal direct door er een pijl onder te trekken.

Oefenen

- * Drie keer zoveel sommen meer, maar niet minder fouten.
D-leerlingen maakten gemiddeld 337 kale opgaven in de laatste drie maanden.
N-leerlingen maakten gemiddeld ruim drie maal zo veel: 1156 kale opgaven.
Maar het percentage fouten op de N was niet veel kleiner dan op de D (respectievelijk 4 en 5%).
- * Stringent oefenen leidde tot 'afraffelen'.
Het grote aantal oefensommen dat in een vaste volgorde door elk kind op de N moest worden gemaakt, leidde tot competitie en afraffelen (H.).
- * Geen controle leidde tot omissies en herhalingen.
In de D was geen controle op het werk van de leerlingen, die uit een beperkte collectie rekenkaarten moesten kiezen.
Hierdoor ontstonden omissies en herhalingen van taken.
- * Impopulaire stipsom.
Geen N-kind maakte meer stipsommen in zijn taken, nadat die verplichting was vervallen.
Tien D-kinderen maakten nooit een rekenkaart met stipsommen.

7.3 Noten

- (1) Het ging dus niet om een statistische generaliseerbaarheid van het pakket Autobussen (zie hoofdstuk 5), maar om onderzoek naar onderwijs- en leer-prestaties rond het pakket Autobussen tegen de achtergrond van een simultane voortgang van de traditionele onderwijsleergang.
- (2) Alleen in de D werd het optellen en aftrekken via de pijlentaal geïntroduceerd; op de N volgde men de mechanistische onderwijsgang zonder pijlen. Verhalen over de bus die geen beroep op de pijlentaal deden, konden we echter ook aan N-kinderen voorleggen.
- (3) Toets- en niet-toets-leerlingen
Er werd in het begin van het schooljaar aan elke leerling gevraagd zover mogelijk door te tellen. We noteerden het getal voorafgaand aan de eerste telfout. De verdeling van de telresultaten was vrijwel identiek op de D en de N.

	n	μ	σ
D	25	29.12	7.41
N	27	29.26	7.41

Sommige leerlingen kwamen blijkbaar moeilijk over de 29 heen. Op grond van deze verdeling maakten we in elke klas drie groepen leerlingen:

- de zwakke tellers die onder de 29 bleven,
- de matige tellers die over de 29 maar tot onder de 36 ($\approx \mu + SD$) telden
- en de goede tellers die tot voorbij de 36 kwamen.

Elke groep splitsten we in T- en niet-T-leerlingen.

De verdeling zag er aldus uit:

	D			N		
	T	niet-T	allen	T	niet-T	allen
zwak	3	4	7	4	4	8
matig	5	6	11	6	6	12
goed	4	3	7	3	4	7
totaal	12	13	25	13	14	27

- (4) Bijvoorbeeld met onzichtbare hoeveelheden, windingen in het verhaal en dergelijke.

8 Onderzoeksonderdeel

leren met contexten en pijlentaal

In hoofdstuk 7 werden vijf punten van verschil gepresenteerd tussen de rekenprogramma's op de D en de N. Ze betroffen verschil in het gebruik van contexten, van conflictsituaties, van pijlentaal of is-taal, verschil in het oefenen en in het toepassen. In dit hoofdstuk laten we zien welke voor- en nadelen deze onderwijsverschillen kunnen hebben op het leren rekenen van kinderen. Ging het rekenen vlotter? Of ontstonden er juist fouten? Beklijfde het beter?

Van de 88 toetsgesprekken die gedurende het schooljaar gevoerd zijn kiezen we in dit hoofdstuk de gesprekken die ons de consequenties van de onderwijsverschillen toonden. Op de volgende bladzijden staat een overzicht van de gekozen toetsgesprekken (fig. 8.1). We geven steeds een beschrijving, gevolgd door conclusies, discussie en aanbevelingen voor het onderwijs.

8.1 Contexten

8.1.1 Mens-diercontext en voorwerpcontext

Een kenmerkend verschil tussen het D- en N-onderwijs was, dat op de N het optellen en aftrekken werd geïntroduceerd met voorwerpcontexten (plaatjes en rekenstaafjes) en op de D met mens-diercontexten (het rekentoneelspel en rekenverhalen).

Om de invloed van beide soorten contexten (voorwerp- of mens-diercontext) na te gaan vertelden we D- en N-kinderen twee rekenverhalen: op 2/11 een busverhaal en op 23/11 een knikkerverhaal.

bus	knikkeren
'In de bus zitten drie mensen.	'Betty had drie knikkers.
Hij komt langs twee haltes en	Ze speelde twee spelletjes.
bij de tweede halte stappen vier	In het tweede spelletje won ze vier
mensen in.	knikkers.
Dan zitten er vijf mensen in de bus.	Toen had ze vijf knikkers.
Vertel het maar na'.	Vertel het maar na'.

Beide verhalen hebben dezelfde formele structuur (zie fig. 8.2):

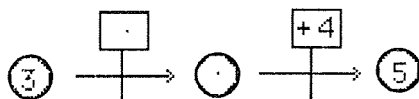


fig. 8.2 23/11/14*

* 23/11/14 betekent: uit toetsgespreknummer 23/11/14; de eerste twee getallen,

23/11, geven de datum aan waarop het gesprek werd gehouden. De 14 staat voor het nummer van het gesprek.
 In fig.8.1 geven de getallen de dag van de maand aan.

	nov	dec	jan	feb	mrt	apr	mei	jun
1	CONTEXTEN *MENSEN OF VOORWERPEN 2 23 BUS KNIKK VERH VERH *EENZIJDIGHEDEN 15 14 17 2 HERH HERH PIJL BUS BUS & VERH VERH STIP +&- +							
2	CONFLICTSITUATIES *STATISCHE CONTEXT ALS CONFLICTSITUATIE 23 28 HAZEN POPPEN KAST							
3	PIJLENTAAL *BEWEGINGEN EN PIJLEN IN PLAATJES 3 21 4 plaatjes :S de pijl verhalend 1 met pijl ontwikkelen *ATTENDERENDE PIJLENTAAL IN REDACTIEOPGAVEN 2 14 4 bus verh. bus verh. busverh. navert. navert. natekenen cijf. cijf. navertellen oplossen 15 bus verh. herh. met behulp van pijlen *PIJLENFOUTEN Directe pijlen 2 verwisselings fout nabestand-fout Pijlenstipsommen 14 17 2 21 operator-fout haltesom 4 Pijldiagrammen 3 1 16 13 eindpunt eindpunt complex sommen sommen diagram Prototypische onderwijssequentie 4 3 pijlenopgaven							

fig. 8.1 overzicht toetsgesprekken

	nov	dec	jan	feb	mrt	apr	mei	jun
4	DEFENEN EN VRIJE REKENKUNST							
	*ALGEMENE TENDENTIES							
			24 D snelle intro +&-		2 4 eindpunt diagrammen	16 Variaties in: type getallen lengte context		
	*BIJ INDIVIDUELE KINDEREN							
					4 16 21	25 nieuwe vondsten	30	
5	TOEPASSEN							
	*REKENKENNIS NIET TOEGEPAST(N)							
			17 op autobuspijlen					
	*KALE EN VERSIERDE PIJLEN ZIJN GELIJKWAARDIG							
				2 eigen constructies				
				4				
			Pijlen met het is-teken	16				
				21 1E blad rekenboek			30 2E blad rekenboek	
	*TOEPASSEN VAN HET CIJFEREN IN CONTEXTEN VAN VROEGER							
						18 kale pijl interpretatie		7 kale pijl interpretatie

fig. 8.1 overzicht toetsgesprekken

Elk verhaal over de bus en over het knikkeren werd twee keer verteld en de leerling werd gevraagd het na te vertellen. Hij of zij mocht daarbij de getallen die in het verhaal werden genoemd, noteren.

Bij elk getal uit de twee verhalen (bijvoorbeeld het getal '3': drie mensen, drie knikkers) werd het aantal interpretaties geteld die van de door ons bedoelde interpretaties afweken (bijvoorbeeld: 'Betty won twee knikkers' in plaats van 'Betty speelde twee spelletjes'). Dat aantal afwijkingen werd over het aantal leerlingen gemiddeld (zie fig. 8.3).

Gemiddelde afwijking van de getallen t.o.v. de correcte functie	D			N		
	n	μ	σ	n	μ	σ
Buscontext 2/11/9.3	12	0.75	0.72	13	1.0	0.68
Knikkercontext 23/11/14.1	10	1.70	1.00	12	1.5	0.87

fig. 8.3 23/11/14

Conclusie

De interpretaties van de getallen in de autobuscontext wijken minder sterk af van de bedoelde betekenissen dan in de knikkercontext.

Gedurende de afname van deze toetsgesprekken op 2/11 en 23/11 was men op de D nog niet met het autobussenpakket begonnen, zodat er geen onderwijsinvloed ten gunste van de autobuscontext bestond.

Drie maanden na de introductie van de autobus legden we, op 18 april, een kale pijlensliert voor aan 14 D-kinderen (zie fig. 8.4) met de volgende vragen:

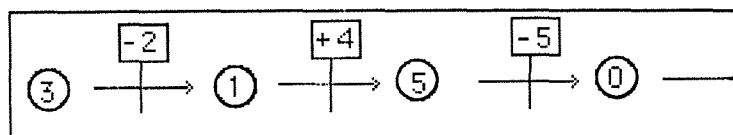


fig. 8.4 18/4/61

Vraag 1: 'Weet je wat dat is? Vertel eens wat er gebeurt.'

Vraag 2: 'Als dit nou een knikkerwedstrijd was, wat was er dan gebeurd?'

Vraag 3: 'Kan de knikkerwedstrijd ook worden voortgezet aan het eind?'

Vraag 4: 'En als het een wachtkamer is?'

Vraag 5: 'Een spelletje kegelen. Wat is er dan gebeurd?'

Met uitzondering van één kind ('Het is een som') antwoordden alle D-leerlingen op de eerste vraag ('Weet je wat dit is?'), dat het een 'autobus' was. Dat was drie maanden na de introductie van de bus. Er ontstonden voorts geen interpretatieverschillen binnen de autobuscontext. Ieder vond dat de lege bus de route gewoon kon voortzetten. Ook bij de wachtkamerinterpretatie was dit het geval. Alleen in de knikker- en kegelcontexten waren de interpretaties zeer gevarieerd; '3' werd bijvoorbeeld gelezen als 'drie knikkers in de zak', 'drie knikkers worden opgegooid', 'drie knikkers in de pot'. Sommige van deze interpretaties brachten de leerlingen in moeilijkheden (zie fig. 8.5).

Aanbieding	Interpretatie		Resultaat		n
	Soort	Aantal kinderen	Goed	Fout	
als kale som	als bus	13	11	2	14
	als som	1	1	0	
met een aanzet tot knikkeren	③ 3 in zak ○ blijft zak	10	10	0	14
	③ opgooi van 3 knikkers, 2 spelers	1	0	1	
	als som	1	1	0	
	③ 3 in zak ○ van zak naar pot	1	0	1	
	③ 3 in pot ○ blijft pot	1	1	0	
wacht-kamer	als busverhaal	13	13	0	14
	onbekend	1	-	-	
kegelen	③ 3 kegels staan	9	8	1	14
	③ 3 kegels vallen om	1	0	1	
	③ 3 kegels omgooien	1	1	0	
	③ ballen	1	1	0	
	③ 3 kinderen	1	1	0	
	onbekend	1	-	-	

fig. 8.5 18/4/61

Over vraag 3, of het knikkerspel zou kunnen worden voortgezet, bestond verschil van mening:

- nee, het spel stopt, want er zijn geen knikkers meer (antwoordden zeven leerlingen) of: nee, omdat er geen pijl meer staat (één leerling),
- ja, het spel wordt voortgezet, want ze krijgen knikkers te leen (twee leerlingen) of omdat dat altijd zo gaat (drie leerlingen),
- het is mij onbekend wat ze gaan doen (één leerling).

Conclusie

Dynamische mens-diercontexten (autobus, wachtkamer) werden door meer kinderen uniform geïnterpreteerd dan speelgoedcontexten (kegelen, knikkeren): de eerste leverden twee verschillende interpretaties op bij 14 leerlingen; de tweede vijf.

Discussie en aanbevelingen

Voorwerpcontexten waren een onmisbaar hulpmiddel bij het mechanistische onderwijs op de N. Om het optellen en aftrekken uit het materiaal te laten oplichten, wordt door onderzoekers van dit onderwijs, zoals Resnick en Greeno, geadviseerd om langdurig met de voorwerpen te oefenen.

Uit ons onderzoek blijkt echter, dat om alle kinderen tegelijk op één betekenis te attenderen men beter geen gebruik kan maken van voorwerpen. Zelfs niet van speelgoed, zoals knikkers en kegels.

Gespeelde mens-diercontexten (autobus en wachtkamer) zijn daar geschikter voor, omdat die een interne dynamiek bezitten die alle kinderen kennen.

8.1.2 Eenzijdigheden bij de introductie van het optellen en aftrekken

Een treffende overeenkomst tussen het D- en het N-onderwijs was, dat er bij de introductie van het optellen en aftrekken sprake was van zekere eenzijdigheden: op de N werden zeven weken alleen optellingen geoefend, op de D werden wel het optellen en aftrekken tegelijk aangeboden, maar alleen met directe pijlsommen en niet met stipsommen.

Wat was de invloed van deze accenten op de leerresultaten?

Dreesschool

Om na te gaan of de D-kinderen de bedoelingen van de plus- en min-tekens na de autobusintroductie (op 24/1) kenden, werden hen op 2/2 pijlslierten voorlegd van directe sommen en stipsommen (fig. 8.6).

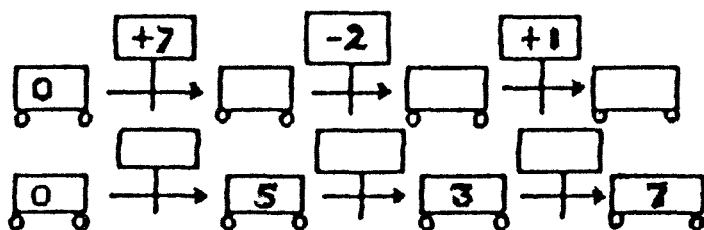


fig. 8.6 2/2/34

De laatste stipsommensliert was ook al eerder getoetst op 17/1, dus vòòr de introductie van de autobus.

Dit waren de resultaten (zie fig. 8.7):

Aantallen en percentages leerlingen die de hele opgave goed maakten:

Datum	17/1 Vòòr de introdactie van + & -	2/2 Na de introdactie van + & -	
Soort	Pijlenstipsom	Pijlenstipsom	Directe pijlenliert
n	11 7 (64%)	10 4 (40%)	9 7 (78%)

fig. 8.7 2/2/34

De directe sommenslierten bleken niet moeilijk: zeven van de negen D-kinderen maakten alle opgaven in de rit goed. We kunnen dus concluderen, dat de introductie van het optellen en aftrekken met directe autobussommen na één dag bevredigende resultaten had.

Anders was het gesteld met de rij stipsommen: slechts vier van de tien leerlingen maakten die opgaven correct.

Maar het bijzondere was, dat dezelfde liert stipsommen een week vòòr de introductie van de autobus door meer (namelijk zeven) leerlingen goed werd gemaakt.

Blijkbaar was de éénzijdige nadruk die het D-onderwijs met de introductie op directe pijlensommen legde aanleiding tot de verslechtering van de resultaten bij de stipsommen.

Nieuwlandschool

Op de N werden vanaf 24 november tot 17 januari uitsluitend optellingen gemaakt. Daarna kwamen de aftrekkingen aan de beurt.

Gedurende deze 'optelperiode' van ruim zeven weken vertelden we op 14/12 een autobusverhaal:

'Bij de halte stappen drie mensen in. Schrijf het cijfer maar op. En bij de volgende halte stappen vier mensen uit. Vertel het eens na.'

Zeven van de 26 N-kinderen (27% van het totaal aantal N-leerlingen) vertelden het verhaal goed na (op de D: negen van de 22 leerlingen (41%)).

Tien N-kinderen (38%) vergisten zich echter in de bewerkingen: ze kozen optellen in plaats van het bedoelde aftrekken (op de D maakten vijf kinderen (23%) dezelfde vergissing).

Waarschijnlijk kwam dit door het éézijdige optellen op de N, want vòòr de optelperiode (op 15/11) herhaalden vijf van de elf N-kinderen (45 %) op juiste wijze een dergelijk autobusverhaal (op de D: acht van de elf kinderen (73%)) en verwarde niemand het optellen en aftrekken bij het herhalen.

Discussie en aanbevelingen

In verschillende cognitieve theorieën (zie hoofdstuk 3) wordt het uitsplitsen en geïsoleerd oefenen van typen opgaven aanbevolen (Resnick, Greeno en Anderson).

Het uitsplitsen naar typen opgaven is een algemeen karaktertrekje van het aanvangsonderwijs, zowel op de D, als op de N.

Onderwijs dat slechts één type opgaven accentueert (bijvoorbeeld de optellingen op de N of de directe pijlensommen op de D), zorgt er echter voor dat kinderen in andere typen (in respectievelijk de aftrekkingen of in de pijlenstipsommen) vergissingen maken. Ze maken die andere typen zelfs slechter dan toen er nog geen onderwijs in één van de typen werd gegeven.

Gezien de vergissingen in optellen en aftrekken op de N, is het niet juist om zeven weken lang alleen het optellen te oefenen en daarna pas met aftrekken te beginnen. Het is bovendien ook niet nodig, omdat met het autobusmodel beide bewerkingen betekenisvol gelijktijdig zijn in te voeren.

8.2 Conflictsituaties

Conflictsituaties (rekengrappen, verrassingen) hebben in het D-onderwijs tot doel om de rekenbegrippen en -eigenschappen ter discussie te stellen om op die manier de kinderen aan te zetten zich het begrip of de eigenschap beter te realiseren. Maar gebeurde dat ook?

Statische contexten als conflictsituaties

Statische contexten, dat wil zeggen: situaties zonder een interne dynamiek, met bijvoorbeeld het vergelijkingsmodel of het deel/geheelmodel kunnen zodanig worden aangeboden, dat ze aanleiding geven tot verschillende oplossingen. Dit roept conflicten op.

We gaven 22 kinderen (tien D- en twaalf N-leerlingen) op 23/11 het volgende rekenraadsel op:

'Er zitten drie hazen in het bos.

Jij ziet er twee en ik zie er twee.

Ra, ra, hoe kan dat?

Het raadsel lokte allerlei interpretaties uit (zie fig. 8.8):

	D n=10	N n=12	to- taal
'We zien beiden één zelfde haas'	0	2	2
'We zien beiden twee dezelfde hazen'	2	3	5
'Het kan wel, want er kwam een haas voorbij'	5	4	9
'Er is een haas te kort en daarom kan het niet'.	3	2	5
Enkele leerlingen gaven een globale beschrijving die weinig met rekenen te maken had.	0	1	1

fig. 8.8 23/11

Op 28/2 legden we aan 25 kinderen (twaalf D- en dertien N-leerlingen) onder andere dit 'plaatje' (fig. 8.9) voor met de vraag



fig. 8.9 28/2

'Hoeveel spelers zitten er in de poppenkast?'

De opgave maakte verschillende oplossingen mogelijk.

Edith: 'O, nou zie ik het! Eéntje doet het met zijn voet. Kijk'maar, want hier staat maar één voet'.

Sylvia: 'Ze kunnen het ook met twee vingers doen. Dan zijn er twee poppen op één hand'.

Sommige leerlingen besloten tot één antwoord (twee spelers; drie spelers). Anderen hielden de mogelijkheid open voor meerdere oplossingen (twee of drie spelers) of gingen van de één over op de ander (eerst twee, dan drie) (zie fig. 8.10).

Antwoord		2	3	2 of 3	2-->3
School	D	4	0	2	6
	N	6	5	0	2

fig. 8.10 28/2 het aantal leerlingen dat een bepaalde oplossing koos

Conclusie en aanbevelingen

Een statische situatie kan in een conflictsituatie worden veranderd, zodat meer oplossingen mogelijk worden.

Daardoor zijn de kinderen genoodzaakt zich de situatie goed voor de geest te halen en ontstaan er oplossingen waarbij bepaalde wiskundige begrippen (verschil, één-één-correspondenties) scherp naar voren treden.

8.3 Pijlentaal

8.3.1 Bewegingen en pijlen in plaatjes

Mens-diercontexten met een intern gegeven dynamiek, zoals bijvoorbeeld het in- en uitstappen in een autobus, zorgen voor eenzelfde interpretatie onder alle leerlingen van de bedoelde activiteiten. Met toneelspel was het herhaald optellen en aftrekken in één dag aan ieder bekend (hoofdstuk 7).

Maar zodra het rekenen door 'plaatjes' werd geïllustreerd, was die eenstemmigheid over de bedoelde dynamiek verdwenen.

Tien D-kinderen werd op 31/1 vier plaatjes voorgelegd met de vraag: 'Wat kun je over die plaatjes zeggen?'

Elk plaatje suggereerde naar onze mening één of andere dynamiek (fig. 8.11):

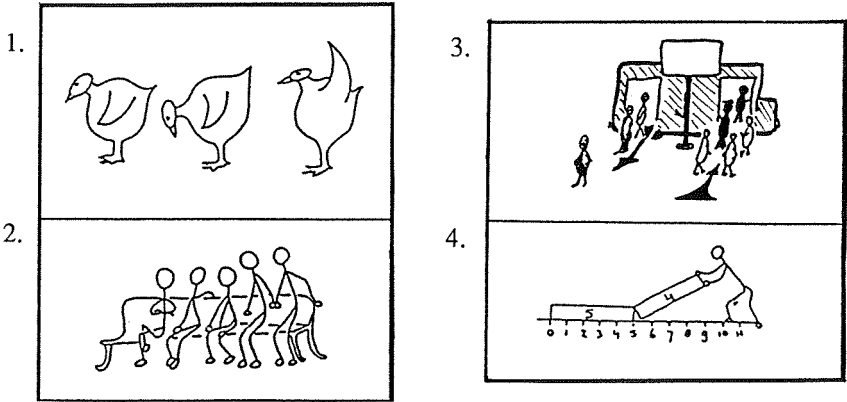


fig. 8.11 31/1/31

Dit waren de resultaten (fig. 8.12). De pijlen geven de interpretatie van wat er gezegd werd (bijvoorbeeld bij plaatje 1: 'Drie vogels en drie vogels komen erbij').

Interpretaties van leerlingen (aantallen leerlingen)				
Plaatje	vogels	bank	autobus	staafjes
Dynamische interpretatie	2 (3 $\xrightarrow{+3}$ 6)	1 (3 opstaan)	1 (+, -)	1 (staafje erbij)
	2 (2 $\xrightarrow{+1}$)	1 (5 $\xrightarrow{-4}$)	3 (-3, +5)	1 (12-11=1)
	1 (1 $\xrightarrow{+2}$)	2 (3 $\xrightarrow{+2}$)	1 (-8, 0)	2 (1 mens + 0)
		1 (6 $\xrightarrow{+6}$)	2 (+4, -4)	1 (blok van 5 5+5=10)
		1 (1 $\xrightarrow{+4}$ 5)	1 (+8, +8)	
			1 (4 $\xrightarrow{+4}$)	1 (staaf weg)
	5	6	9	6
Statische interpretatie	5	4	1	4
	2 (2+1)	1 (3 kind. 2 volw.)	1 (8 popp.)	2 (getallen)
	3 (3 vogels)	2 (5 popp.) 1 (2 en 3 poppen)		2 (1 pop)
Aantal verschillende interpretaties	5	8	7	7

fig. 8.12 31/1/31

Conclusies

Van een éénsluidende interpretatie over de beweging per plaatje was geen sprake. Er waren ook kinderen die in een plaatje in het geheel geen beweging zagen.

Eén uitzondering moet er worden gemaakt voor het plaatje met getekende pijlen (nummer 3). Dat werd wél door vrijwel ieder (negen van de tien kinderen) als dynamisch geïnterpreteerd. De pijl is blijkbaar een middel bij uitstek om kinderen zich een beweging in een plaatje te laten voorstellen. Ofwel: de autobuscontext heeft een sterkere interne dynamiek dan de andere.

Op de D werd op 24/1 de pijlentaal aangeleerd op een verhalende wijze met behulp van directe pijlensommen (zie hoofdstuk 7).

Zou dit wél tot een eenvormige interpretatie leiden?

Drie dagen voor de introductie, op 21/2, voerden we met twaalf D- en dertien N-kinderen een toetsgesprek, waarin een pijlenstipsom verhalend werd ontwikkeld.

'Er komt een bus aan'. Ik tekende:

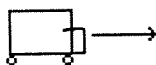


fig. 8.13

'Er zitten mensen in de bus. Hij stopt bij een halte en daar stappen vier mensen uit.'

Ik vervolgde met de tekening:

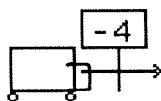


fig. 8.14

'Dan rijdt hij verder. Er zitten nu tien mensen in de bus'.

Ik vervolmaakte de tekening:



fig. 8.15

'Hoeveel mensen hebben er eerst in gezeten?'

De resultaten (fig. 8.16):

Aantallen kinderen								
School	n	Antwoord			Soorten fouten			
		Goed	Gunstig ¹⁾	Fout	4 $\xrightarrow{+6}$ 10	haltesom	weet niet	9 $\xrightarrow{+1}$ 10
D	12	6	3	3	1	0	1	1
N	13	5	2	6	1	4	1	0

¹⁾ Met 'gunstig' wordt bedoeld een antwoord dat rond de 14 (boven de 10) ligt.

fig. 8.16 21/2/40

Conclusie

Meer dan de helft van de leerlingen begrijpt de situatie.

Vier van de zes fouten die de N-leerlingen maken, zijn haltesommen:

$$- 4 + 10$$

$$4 \text{ -----} > 10$$

dat wil zeggen sommen die eigenlijk niet fout zijn.

Discussie en aanbevelingen

Uit onderzoek van anderen blijkt een voorkeur van kinderen voor wat genoemd wordt de dynamische versie van het optellen en aftrekken (Nesher, Ginsburg), ook wel betiteld als het operationele (Piaget), sequentiële (Herscovics & Bergeron) of transformatieve (Vergnaud) aspect van deze hoofdbewerkingen.

Het pakket Autobussen vertegenwoordigt onder andere deze dynamische verschijningsvorm van het optellen en aftrekken. Eén van de overwegingen om het pakket te ontwerpen was destijds om nauw aan te sluiten bij hetgeen kinderen al kenden of beheersten (hoofdstuk 3).

Achteraf blijkt dit ontwerp aan zijn doel te beantwoorden om alle kinderen in korte tijd aan de beide hoofdbewerkingen te laten denken.

De problemen ontstaan echter zodra in plaatjes de dynamiek moet worden aangegeven.

Vanuit ons onderzoek kunnen we twee aanbevelingen doen:

- Plaatjes die naar onze mening een dynamiek suggereren geven niet onbetwist voor alle kinderen dezelfde activiteit weer. Behalve die met een pijl. Gebruik dus aanvankelijk pijlen in plaatjes om bewegingen aan te geven.
- Het verhalend ontwikkelen van een pijlen(stip)som, zoals aangegeven in het D-programma, doet meer dan de helft van het aantal leerlingen aan de bedoelde bewerking denken.

8.3.2 Attenderende pijlentaal in redactie-opgaven

In het D-onderwijs werd, naast de conflictsituaties, de pijlentaal gebruikt om de kinderen binnen een wirwar van noties te wijzen op een bepaalde rekenstructuur. De pijlentaal werd gebruikt als attenderende rekentaal of 'organiserende notatiewijze' (Goffree). Maar functioneerde de pijlentaal ook als zodanig? Bijvoorbeeld in ingewikkelde redactie-opgaven, zoals:

'Er zaten drie mensen in de bus.
Bij de tweede halte stappen er vier mensen in.
Dan zitten er vijf mensen in de bus,
Rara, hoe kan dat?'

Is de structuur van een dergelijke situatie toegankelijk te maken voor kinderen met behulp van de pijlentaal?

We ontdekten de volgende resultaten:

1. geen kind kon zonder cijfers te noteren een dergelijke ingewikkelde redactie-opgave navertellen (2/11);
2. na een herhaling van de opgave en de mogelijkheid om getallen te noteren werd de opgave door minder dan de helft van de kinderen (9 van de 25: 36%) correct naverteld (2/11);
3. met een pijlensliert ter ondersteuning werd door méér dan de helft van de kinderen (13 van de 22: 59%) de opgave correct naverteld op 15/11;
4. nogmaals alleen met cijfers, maar later in het jaar (op 14/12) lukte het opnieuw minder dan de helft van de kinderen (16 van de 48: 33%) om de opgave correct na te vertellen;
5. maar vlak na de invoering van de pijlentaal op de D werden op 4/2:
 - correcte pijlenslierten gemaakt voor de opgave;
 - door negen van de elf kinderen (:82%) het verhaal correct naverteld;
 - en door zeven van de elf kinderen (:64%) de opgave opgelost (4/2).

Op deze vijf punten gaan we nu nog wat nader in.

'Vertel het busverhaal eens na', vroegen we 25 de T-leerlingen van de D en de N op 2/11.

'In de bus zitten drie mensen.
Hij komt langs twee haltes en bij de tweede halte stappen vier mensen in.
Dan zitten er vijf mensen in de bus'.
Vertel het maar na.'

Niemand kon het verhaal herhalen, noch op de D, noch op de N.
We vertelden het verhaal nog eens, waarbij de kinderen nu de genoemde getallen mochten noteren en als hulp gebruiken bij het herhalen.
Gevolg: zes van de twaalf D-kinderen vertelden het verhaal correct na. De meeste N-kinderen (tien van de dertien) gaven echter, ook met getallen, het verhaal foutief weer. Ze hadden een handicap, omdat de cijfers pas op 8 november zouden worden geleerd (sommige kinderen noteerden bijvoorbeeld voor '3' de 'd' van 'drie').
Anderhalve maand later, op 14/12, bleek de weergave van een dergelijk busverhaal louter en alleen op grond van geschreven cijfers opnieuw niet goed mogelijk, ondanks het feit dat de N-kinderen de cijfers op school nu wel hadden geleerd. Dit waren de fouten (fig. 8.17):

Soorten fouten	D	N
operator wordt bestand *	6	2
teken verkeerd	5	10
gedeelte nemen	0	3
invloed van een vorige som	2	1
weet het niet meer	0	3
totaal aantal foutieve herhalingen	13	19
n	22	26

fig. 8.17 14/12/20 * Bijvoorbeeld .. $\xrightarrow{+3}$ 4

Uit de gemaakte fouten bleek dat de getallen de kinderen geen idee gaven van de structuur in de opgave: inzittenden werden met in- of uitstappenden verwisseld. Opmerkelijk was, dat een maand eerder (op 15/11) eenzelfde soort busverhaal (namelijk het busverhaal van 2/11) wel exact werd herhaald door acht van de elf D-kinderen en vijf van de elf N-kinderen. Maar ze hadden toen deze pijlensliert tot hun beschikking (fig. 8.18):

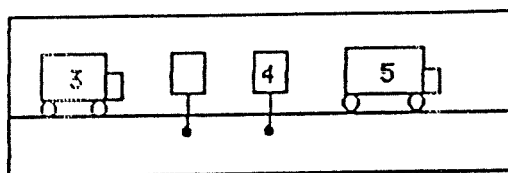


fig. 8.18 15/11/13

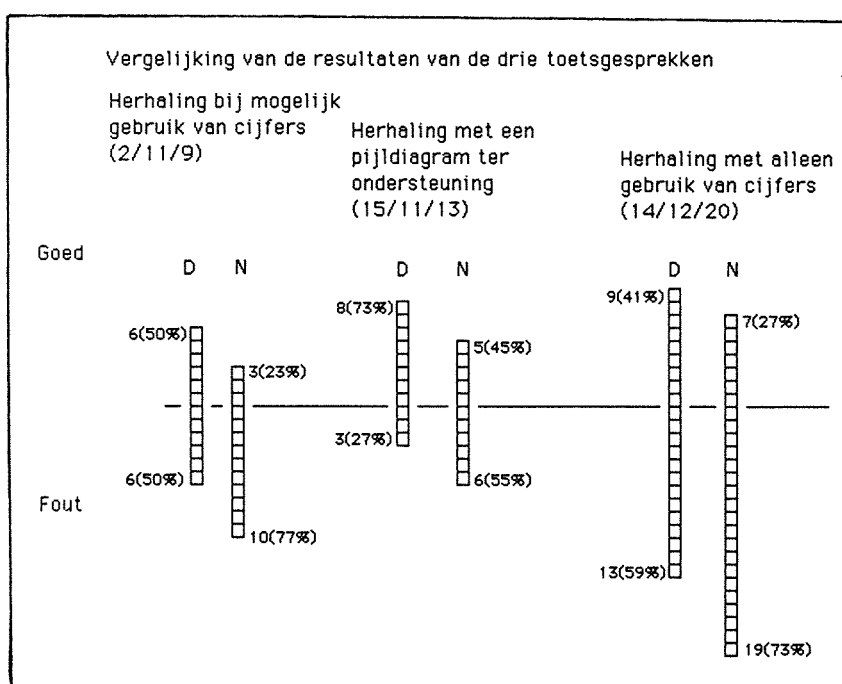


fig. 8.19 15/11/13

Conclusie

Vergelijken we de resultaten van de drie gevoerde toetsgesprekken met elkaar, dan blijkt dat met een pijldiagram de situatie preciezer is te reproduceren dan met getallen alleen.

Tijdens deze toetsgesprekken was het pakket Autobussen nog niet van start gegaan op de D. Na de invoering van de autobussen (op 24/1) werd het ingewikkelde autobusverhaal van 2/11 en 15/11 nog eens verteld.

Op 4/2 dicteerden we ter inleiding de volgende som (fig. 8.20):

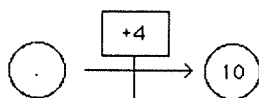


fig. 8.20 4/2/37

aan elf D-kinderen, waarbij we zelf de pijlnotatie tijdens het dicteren ontwikkelden en de leerling daarna vroegen om de som voor te lezen. Ieder deed dat goed.

'Nu volgt een ander busverhaal. Teken zelf maar direct de pijlen'.
(en we vertelden het verhaal dat we ook op 2/11 hadden verteld:)

'In de bus zitten drie mensen.
Hij komt langs een tweede halte en bij die tweede halte stappen vier mensen in.
Dan zitten er vijf mensen in de bus'.

Daarna volgden drie vragen:

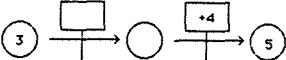
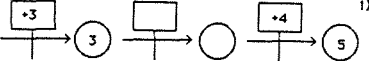
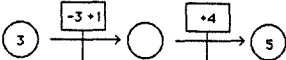
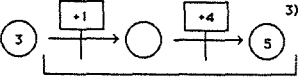
1. Wat heb je getekend?

Er waren drie typen tekeningen, maar niemand maakte een foutieve tekening (zie fig. 8.21).

Typen	Aantal leerlingen
	3
	6

fig. 8.21 4/2/37

2. Vertel het verhaal eens na (naar aanleiding van de pijlentekening die de leerling zelf maakte). Zie fig. 8.22.

	Verhaal (in schema)	Aantal leerlingen
Goed		6
		2
		1
Fout		1
		1

- 1) Uitbreiding van de opgave met een begin.
- 2) Louter voorlezen van de getallen.
- 3) Slechts gedeelten worden bekeken.

fig. 8.22 4/2/37

De vraag om het verhaal na te vertellen naar aanleiding van de door hen gemaakte pijlentekening werd door negen van de elf kinderen goed uitgevoerd.

Het viel op, dat de mondelinge representatie niet per se met de schriftelijke notatie overeen hoefde te stemmen. Ralf had bijvoorbeeld een correct diagram gemaakt

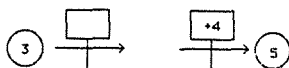
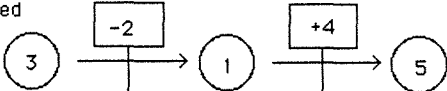
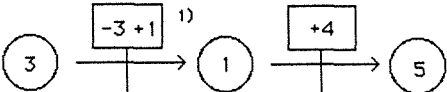
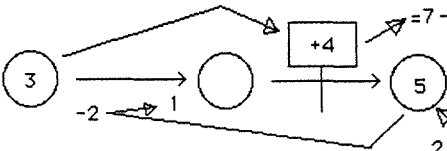
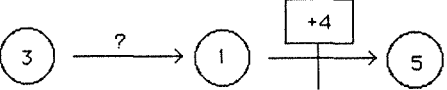
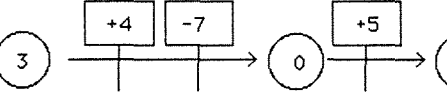


fig. 8.23 pijlensliert

maar hij vertelde er een foutief verhaal bij:

'Er zitten er eerst drie in. En hier (eerste halte) heb ik niets in gezet. (Hij noteert nu 1 in de eerste halte en vervolgt met:) Dan zit er 1 in, want er komen er vier bij en dan zitten er vijf in'.

3. Ra, ra, hoe kan dat eigenlijk? We vroegen om een oplossing.
 Zeven van de elf kinderen gaven een goede oplossing voor de opgave (fig. 8.24).

Verklaring(in schema)	Aantallen leerlingen
Goed  2  3  2	
Fout  1  1 $3 + 4 = 5$ Bedenkt geen oplossing	1 1 1 1

- 1) een haltesom
 2) een probeerfout corrigeren

fig. 8.24 4/2/37

Discussie, conclusies en aanbevelingen

Veel theoretici beschouwen alleen het opleggen van rekenstructuren aan kinderen, omdat men op theoretische gronden meende de structuur niet vanuit de grillige noties van kinderen te kunnen bereiken. Wij menen echter, dat we met de pijlentaal de kinderlijke noties kunnen leiden naar een verdergaande begripsvorming en structurering van de rekenoperaties (zie ook Ilmer, 1989).

Vlak na de invoering van de pijlentaal bijvoorbeeld konden de D-kinderen correcte pijlenslierten tekenen voor een zeer ingewikkelde autobusredactie-opgave.

De bovengenoemde opgave (vrij naar Vergnaud, 1982) die overigens niet in de is-taal van het rekenen is te formuleren, werd met behulp van de pijlentaal correct beschreven (door alle leerlingen), onthouden (door alle leerlingen), geanalyseerd (door negen van de elf leerlingen) en opgelost (door zeven van de elf leerlingen).

We kunnen daarom de pijlentaal aanbevelen om de kinderen op structuren te midden van hun noties te attenderen.

8.3.3 Misvattingen bij pijlen

Over 'fouten' bestaan onder onderzoekers verschillende meningen. Fouten dienen te worden vermeden, omdat ze kunnen worden ingeslepen, is een veel voorkomende opvatting (bijvoorbeeld bij Gal'perin). Anderen daarentegen (Balacheff, Bell) vinden juist, dat fouten bewust moeten worden uitgelokt bij het leren van wiskunde, in plaats van ze te ontwijken. Problemen oplossen en fouten maken zijn onafscheidelijk met elkaar verbonden en karakteristiek voor wiskundige activiteiten. Fouten zouden ook van het gegeven onderwijs afhangen (Brownell, Carper) (1).

In het D-programma ontstonden pijlenfouten op twee momenten: zodra men de beeldende toneelspelen en rekenverhalen verliet en zodra men de pijlentaal meer als formeel rekenmodel ging gebruiken.

We stelden ons verschillende vragen:

1. Welke soorten fouten worden in de pijlentaal gemaakt? Zijn er ook fouten die goed zijn te gebruiken in het rekenonderwijs?
2. Treden ze frequent op en wat zijn de oorzaken ervan ?
3. Was de gekozen volgorde van onderwerpen in de prototypische onderwijsleergang voor het optellen en aftrekken op de D in dit licht wel juist?

Soorten misvattingen in soorten pijlenopgaven

Bij het zoeken naar welke fouten er in de pijlentaal werden gemaakt, hielden we rekening met de fasering van het rekenonderwijs op de D.

Bij de verschillende typen pijlenopgaven die achtereenvolgens werden gepresenteerd, ontstonden bepaalde fouten.

Hier volgt een overzicht:

- de directe pijlensom (fig. 8.25):

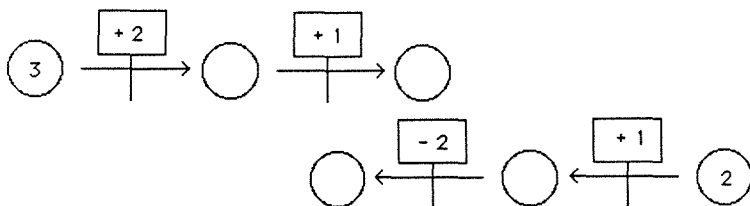


fig. 8.25 directe pijlensommen

Met als waargenomen fouten:

- * de verwisseling van bus en bushalte
- * de nabestand-fout: de gegeven operator wordt als nabestand gebruikt, ongeacht het voorbestand, bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{ccc} +2 & & +1 \\ 3 & \text{-----}> & 2 & \text{-----}> & 1 \end{array}$$

- de pijlenstipsom (fig. 8.26)

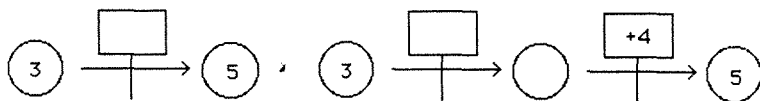


fig. 8.26 pijlenstipsommen

Waargenomen fouten:

- * de operator-fout: het gegeven nabestand wordt als operator gebruikt, ongeacht het voorbestand, soms ook omgekeerd wordt het voorbestand als operator gebruikt:

$$\begin{array}{ccc} +5 & & 3 \\ 3 & \text{-----}> & 5; \quad 3 & \text{-----}> & 5 \end{array}$$

- * de haltesom (voorbestand cruit, nabestand erin)

$$\begin{array}{ccc} -3 + 5 \\ 3 & \text{-----}> & 5 \end{array}$$

is geen fout, maar een éénzijdige interpretatie.

- * de somfout

$$\begin{array}{ccc} 8 \\ 3 & \text{-----}> & 5. \end{array}$$

- het pijlendiagram (fig. 8.27):

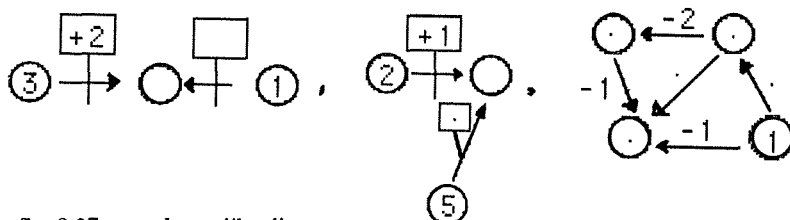


fig. 8.27 complexe pijlendiagrammen

Waargenomen fouten:

- * de probeerfout ('even een getal proberen')
- * de richtingsfout (verkeerde richting opgaan)
- * de compensatiefout (om een andere fout te compenseren en toch goed uit te komen)
- * de beginfout (een verkeerd beginpunt nemen in een diagram).

Frequenties van de misvattingen

We gingen na hoe vaak deze pijlenfouten voorkwamen.

- Misvattingen bij directe pijlensommen
- * De verwisseling van bus en bushalte kwam slechts sporadisch voor. In de directe pijlensom die op 2/2 aan tien D-kinderen werd gegeven (zie fig. 8.28), maakte slechts één van de leerlingen deze fout.

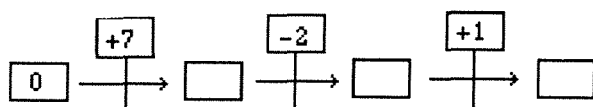


fig. 8.28 pijlensliert

- * De nabestand-fout (de gegeven operator wordt als nabestand genomen) kwam eveneens sporadisch voor in de gewone pijlensommen. Op 2/2 maar één keer in de 30 antwoorden. Maar later, in pijlendiagrammen, zoals in eindpuntsommen (zie onder Misvattingen in pijlendiagrammen), trad hij vaker op:
 - op 31/1 waren vier nabestand-fouten op een totaal van 16 fouten die tien kinderen maakten in een totaal van 10 x 6 opgaven in drie pijlendiagrammen.
 - op 16/3 werden zeven nabestand-fouten gemaakt op een totaal van 19 fouten die negen kinderen maakten op een totaal van 9 x 6 opgaven binnen drie pijlendiagrammen.

- Misvattingen bij pijlenstipsommen
Hier openbaarden zich drie soorten fouten: de haltesom, de operator-fout en de somfout.
- * De haltesom, zoals bijvoorbeeld de oplossing (fig. 8.29):

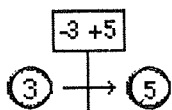


fig. 8.29 haltesom

voor de pijlenstipsom

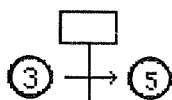


fig. 8.30 pijlenstipsom

is, zoals eerder gezegd, in feite geen fout. Ze trad vrijwel altijd op zodra kinderen voor het eerst met stipsommen in aanraking kwamen. Ook bij N-kinderen.

- 17/1: 2 van alle 39 uitkomsten (5%) waren haltesommen ($n = 13$)
- 2/2: 2 van alle 30 uitkomsten (7%) waren haltesommen ($n = 10$)
- 21/2: 4 van alle 30 uitkomsten (13%) waren haltesommen ($n = 10$).

- * De operator-fout: het gegeven nabestand wordt als operator gekozen, is wel een echte fout.
Bijvoorbeeld deze oplossing voor een pijlenstipsom (fig. 8.31):

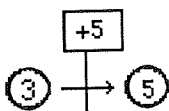


fig. 8.31 operatorfout

Van alle pijlenfouten kwam deze fout het meest voor.

- 17/1: 12 van alle 72 uitkomsten (17%) ($n = 24$)
- 2/2: 7 van alle 30 uitkomsten (23%) ($n = 10$).

De oorzaak ervan is tweërlei: enerzijds kunnen kinderen de inzittende passagiers geïsoleerd houden van de in- of uitstappende passagiers, als aparte collecties. Anderzijds is de redenering, dat het nabestand ooit eens is ingestapt en dus ooit eens operator was.

- * De *somfout* kwam zeer weinig voor.

Misvattingen bij pijlendiagrammen

Bij pijlendiagrammen werden de volgende vier fouten gesignaleerd: de probeerfout, de richtingsfout, de beginfout en de compensatiefout.

Aan D-kinderen legden we drie eindpuntsummen voor waarin de richting van de pijlen varieerde (fig. 8.32).

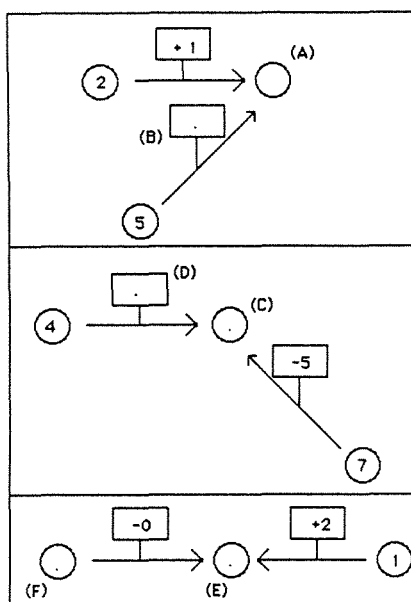


fig. 8.32 31/1/32 & 16/3/55

Op 31/1 aan tien D-leerlingen met de opmerking 'Let op de richting van de pijlen' en op 16/3 aan 23 D-kinderen zonder die opmerking.

We vroegen:

'Vul in, wat hier (in A) moet staan.'

(Alle leerlingen antwoordden: 3)

'Wat moet dan hier (in B) staan?'

(Op 31/1 gaven twee leerlingen een fout antwoord (8 en +2), dat we corrigeerden.)

Daarna volgde de opdracht:

'Doe hetzelfde met de andere pijlen.'

Dit waren de resultaten (fig. 8.33):

Vergelijking van de resultaten behaald door de T-leerlingen op 31/1 en op 16/3						
Percentages bij de uitkomsten						
	A	B	C	D	E	F
goede antwoorden	100	80	70	50	70	60
	100	67	67	56	67	33
verwisselings- fout			20	10	20	
			0	0	0	
somfout		10				
		0				
nebestandfout					10	30
					33	44
operatorfout				10		
				0		
richtingsfout		10		20		
		33		11		
probeerfout			10	10	10	
			33	33	0	
onbekend					0	
					11	
leeg					0	
					11	

fig. 8.33 16/3/55

Door de kinderen attent te maken op de richting van de pijlen, verdween de richtingsfout natuurlijk. Anderzijds verdween de richtingsfout spontaan na de drie pijlendiagrammen met verschillende pijlrichtingen.

De probeerfouten die ontstonden doordat de leerling 'maar eens een getal probeerde', traden vooral in maart op.

We kunnen dus concluderen dat beide belangrijke strategieën bij pijlendiagrammen, het kiezen van de geschikte richting en het proberen van een getal, medio maart beheerst werden. Maar tegen het einde van het schooljaar verdween de probeerfout die goed te gebruiken zou zijn geweest in het redenerend rekenen.

Op 13/6 legden we aan 25 D-kinderen dit complexe pijlendiagram voor om het als een puzzel in te vullen (fig. 8.34):

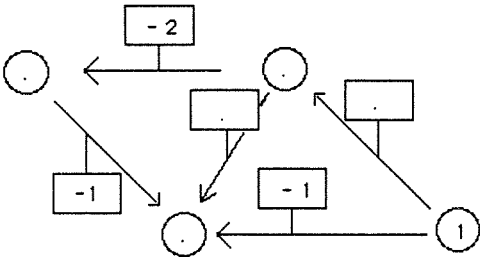


fig. 8.34 13/6/80

Dergelijke complexe pijlendiagrammen beelden een probleem georiënteerde situatie uit binnen het formele rekensysteem.

Frequentie van soorten fouten	
Soort fout	Aantal leerlingen die zo'n fout maakten
Beginfout	8
Richtingsfout	9
Compensatiefout	7

fig. 8.35 13/6/80 n = 25

De richtingsfout kwam ten opzichte van de andere fouten het meest voor. Daarna de beginfout (er wordt van uit een verkeerd beginpunt in het diagram gestart) en tenslotte de compensatiefout. De probeerfout was verdwenen. De oorzaak daarvan was het actuele D-onder- wijs, dat nu meer de klemtoon legde op het strakke, kale cijferen, dan op het redenerend rekenen. De kinderen corrigeerden niet meer een eerder gekozen getal, maar forceerden een tweede fout ter compensatie (de compensatiefout).

Samenvatting

We vatten het optreden van pijlenfouten samen. Elke overgang van het ene naar het andere onderwerp in het pakket Autobussen (introducerend, oefenend, redenerend) ging gepaard met andere misvattingen. Bij gewone pijlensommen weinig tot geen fouten. In de pijlenstipsommen waren de twee belangrijkste fouten isolatiefouten: de operator-fout (het gegeven nabestand wordt als operator gekozen) en de haltesom. De kinderen hielden inzittenden, uitstappenden en instappenden apart van elkaar, terwijl ze juist in de stipsommen op elkaar moeten worden betrokken. In pijlendiagrammen werden vier fouten gemaakt: de richtingsfout, de beginfout, de probeerfout en de compensatiefout.

Opvallend was dat de probeerfout, die in het redenerend rekenen van belang is, verdween en gecompenseerd werd door een fout elders in het diagram te maken.

Misvattingen bij pijlen en de prototypische onderwijssequentie

Het ontstaan van pijlenfouten brengt ons op de vraag of de gekozen onderwijssequentie op de D wel juist was.

De volgorde in typen opgaven was:

- directe pijlensommen in de introductieperiode,
- in de oefenperiode onder andere stipssommen en
- pijlendiagrammen in het redenerend rekenen.

Directe pijlen eerst of stipssommen eerst?

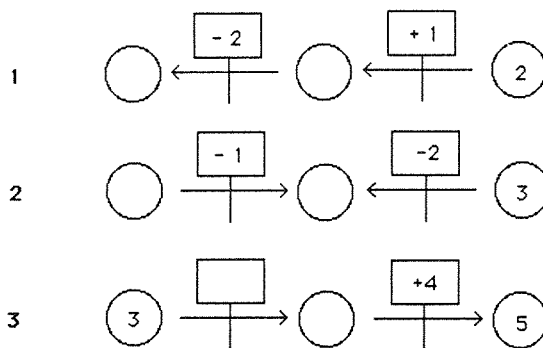
De introductie had natuurlijk ook met pijlenstipsommen kunnen worden ondernomen. Deze werden immers vòòr de introductie beter gemaakt door de kinderen dan nà de introductie met directe pijlensommen. Kinderen konden in de pijlentaal wellicht even snel met stipssommen overweg als met directe sommen indien we daarmee zouden kunnen starten.

Toch was de keuze om met directe pijlensommen te beginnen een juiste, omdat in pijlenstipsommen de hardnekkige operatorfout optrad.

Stipsommen of diagrammen eerst?

Een ander type pijlensommen, die op hun beurt meer fouten scoorden dan de pijlenstipsom, waren de pijlendiagrammen met tegengesteld gerichte pijlen.

Aan elf D-kinderen (T-leerlingen) legden we op 4/2 de drie typen pijlenopgaven voor om op te lossen (fig. 8.36):



1. gewone pijlensom met tegengestelde leesrichting en het beginpunt links,
2. pijlendiagram met tegengestelde pijlrichtingen en twee beginpunten,
3. pijlenstipsom met een beginpunt in het midden.

fig. 8.36 4/2/38

Opdracht		Aantal leerlingen
1.	goed	11
	fout	0
2.	goed	4
	fout	7
3.	goed	7
	fout	4

fig. 8.37 4/2/38

Geordend naar het aantal fouten, bleek de gewone pijlensom (opdracht 1) gemakkelijk, de pijlenstipsom (opdracht 3) iets moeilijker en het pijlendiagram met tegengesteld gerichte pijlen (opdracht 2) de moeilijkste pijlenopdracht te zijn.

Gezien de datum van toetsafname (4/2) waren alleen gewone pijlensommen, zoals opdracht 1 op de D aan de orde geweest. Dat opdracht 2 moeilijker was dan opdracht 3 is waarschijnlijk aan de structuur van de opdracht te wijten.

Conclusies en aanbevelingen

We kunnen dus concluderen, dat de gekozen onderwijssequentie gezien deze resultaten verantwoord was. Er zijn echter twee kanttekeningen te maken ten aanzien van de haltesom en de probeerfout die beter in het onderwijs hadden kunnen worden gebruikt.

Om de isolatie van inzittenden, instappenden en uitstappenden te doorbreken, zou men er goed aan doen aan te sluiten bij de haltesommen, die de kinderen ons leveren, om vandaaruit andere combinaties te laten ontwerpen.

Niet alleen:



maar ook:

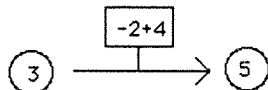


fig. 8.38b mogelijke oplossing voor een pijlenstipsom

en andere combinaties.

Door eenzijdig te oefenen op kale pijlensommen verdween de probeerfout. Het is daarom van belang te weten dat de strategie 'om maar eens een getal uit te proberen' in het rekenen geaccentueerd kan worden.

8.4 Oefenen en de vrije rekenkunst

8.4.1 Oefenen: eindonderwijs?

Oefenen werd op de N beschouwd als eindonderwijs waarop men zich richtte. De klassikale lessen hadden tot doel de kinderen technisch voor te bereiden om de rijen oefensommen in de rekentaken van deel 1B zelfstandig te kunnen maken (hoe de rekenstaafjes te hanteren, de tekeningen te gebruiken). Eenmaal in deel 1B aangekomen werd geen grote vooruitgang meer in de leerstof geboekt; het ging er voornamelijk om de aangeleerde rekenhandelingen goed in te slijpen.

Op de D beschouwde men oefenopgaven van de rekenkaarten meer als startpunt tot eigen wiskundige activiteiten van kinderen. Oefenrijtjes waren aanzetten tot eigen, vaak nieuwe vondsten.

Het pijlenmodel is een voorbeeld dat zo'n rijk gebruik toestaat - in tweeërlei opzicht. Binnen het model van kale pijlen zijn naast het kale cijferen allerlei strategische overwegingen aan de orde: 'Waar te beginnen in het diagram?' 'Welk gedeelte eerst?', 'In welke richting?', 'Eerst een getal uitproberen?'

En op de tweede plaats geven de kale pijlensommen aanleiding tot nieuwe, eigen constructies en produkties.

Afgezien van het verschil tussen 'constructies' (bijvoorbeeld gedachtenconstructies) en 'produkties' (bijvoorbeeld een neergeschreven, zelfontworpen probleem) dringt de vraag zich aan ons op wat men precies onder eigen constructie en produktie 'binnen het oefenen' moet verstaan. Een leerling die 'een oefensom maakt', levert immers ook een eigen (gedachten)constructie.

Toch is dit niet wat wij met de term bedoelen. De leerling kan (a) een opgave uit een rekenboek maken, maar de leerling kan ook (b) een opgave zelf bedenken of een opgave zelf toepassen.

Het verschil tussen (a) en (b) is het eigen initiatief, dat getoond kan worden in (b) en wat in (a) ontbreekt. In (a) maakt de leerling gewoon rijtjes sommen in opdracht, terwijl 'in de vrije rekenkunst' naar eigen initiatief pijlenopgaven worden ontworpen.

Wij menen, dat het stringente oefenen geen eindonderwijs moet zijn, maar een beginpunt voor de vrije rekenkunst: de produktie van soortgelijke pijlenopgaven door de kinderen zelf en op eigen initiatief bedacht.

Onder die omstandigheden zijn de noties van de kinderen ook bij het oefenen in het geding (3).

8.4.2 Onderzoek

We zijn nagegaan welke voor- en nadelen het heeft om, zoals in de D gebruikelijk was, de kinderen na elke oefening met pijlenopgaven de vrijheid te bieden om 'op de achterkant van het werkblad' zelf opgaven te bedenken.

Onze aandacht verdeelden we over de 'eigen produkties' die bij meer kinderen werden gesignaleerd en de vondsten die door een enkeling werden gedaan.

Op 2 en 4 maart werden respectievelijk vier en zes eindpuntdiagrammen gemaakt, sommen van dit type (fig. 8.39):

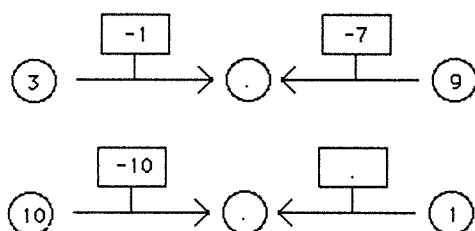


fig. 8.39 eindpuntdiagrammen

Daarna werd gevraagd zelf pijlensommen te bedenken op de achterkant van het werkblad. Dit waren de resultaten (fig. 8.40):

Totaal aantal gemaakte sommen per soort en type					
Soort	Type	Goed	Fout	Totalen	
Context	sliert	68	5	73	83
	eindpunt	10	0	10	
Kaal	sliert	62	6	68	88
	eindpunt	16	4	20	
		156	15		

fig. 8.40a 2/3/47 n = 25

Totaal aantal gemaakte sommen per soort en type					
Soort	Type	Goed	Fout	Totalen	
Context	sliert	27	2	29	87
	eindpunt	53	5	58	
Kaal	sliert	2	3	5	81
	eindpunt	71	5	76	
		153	15		

fig. 8.40b 4/2/49 n = 25

In deze vrije opdrachten maakten de kinderen ongeveer evenveel kale, als versierde pijlensommen op beide dagen. Ook het aantal fouten was gelijk. Een opvallend verschil was echter dat eerst voornamelijk pijlenslierten werden ontworpen en twee dagen later hoofdzakelijk eindpuntdiagrammen. Die waren voor de kinderen nieuw, maar snel vertrouwd. In de vrije rekenkunst is dit eenvoudig vast te stellen.

Twee weken later, op 16/3 vroegen we:
'Bedenk zelf allerlei soorten pijlensommen'

Enkele voorbeelden van typen pijlensommen

Dave ontwierp een 9-sliert, een pijlensliert van negen bestanden:

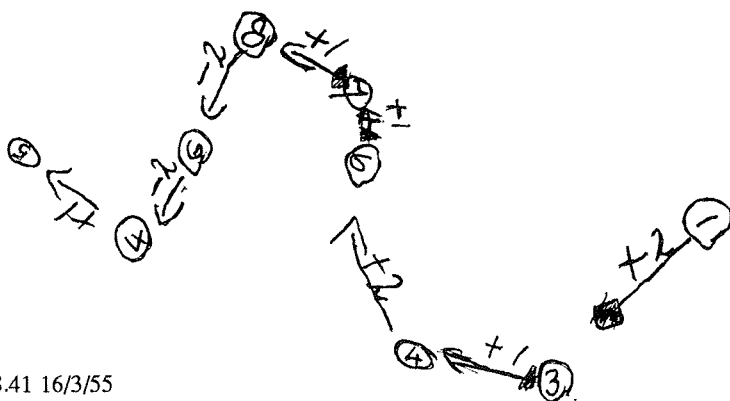


fig. 8.41 16/3/55

Xenia maakte een 6-sliert van autobussen:

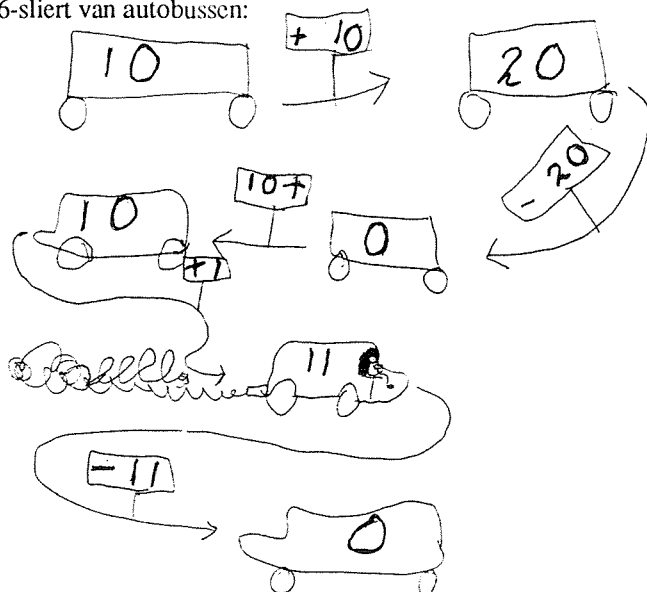


fig. 8.42 16/3/55

Manfred tekende meerdere versieringen:

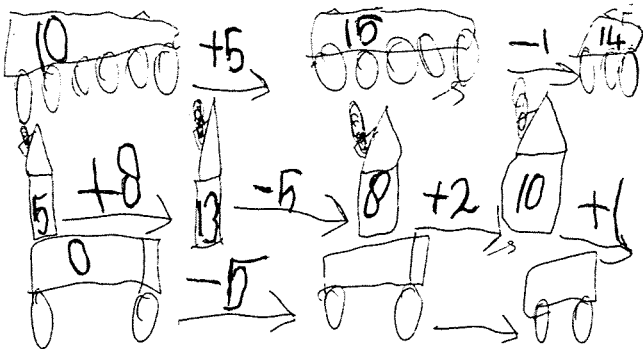


fig. 8.43 16/3/55

Nolly maakte sluitende cykels van de lengte 4:

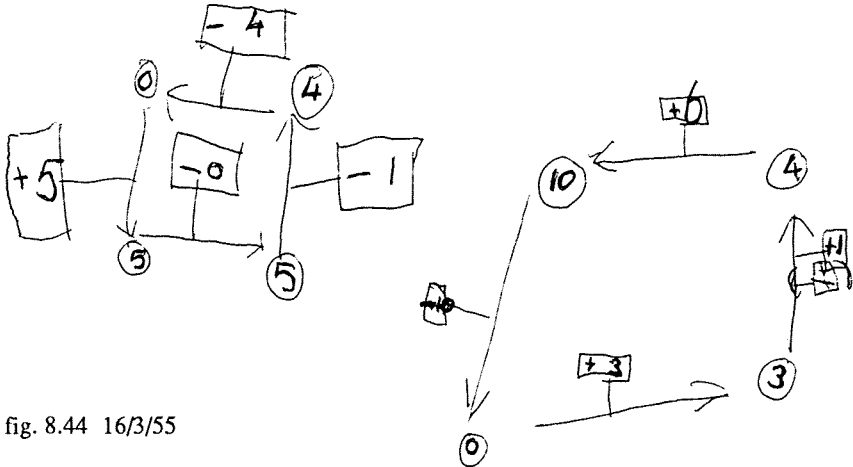


fig. 8.44 16/3/55

Nicole tekende een eindpuntsom met tegengesteld gerichte pijlen:

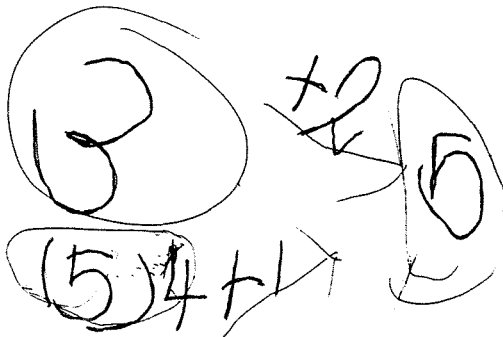


fig. 8.45 16/3/55

Leonie ontwierp onder andere een anticykel, dat wil zeggen een cykel waarvan de pijlen soms tegengesteld gericht zijn; de lengte ervan was 10:

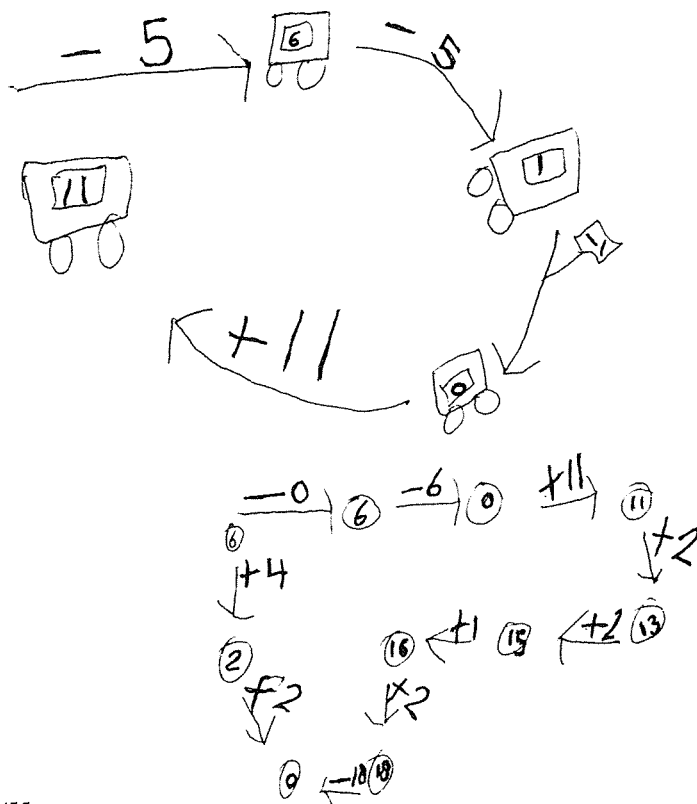


fig. 8.46 16/3/55

De variaties die de kinderen bedachten, betroffen typen pijlendiagrammen, de grootte van de gebruikte getallen, de lengte van de pijlopgeven en het gebruik van zowel kale, als versierde pijlen.

* Typen pijlensommen (zie fig. 8.47)

14 leerlingen gaven één type pijlensom op 16/3,
5 leerlingen gaven twee verschillende typen en
3 kinderen drie.

Typen pijlsommen				
Getallen G		G<10	10≤G≤20	20≤G
Eén soort	Sl	Dave Babs Marieke	Ralf Manfred Monique	Diana Ilona Xenia Marieke
	A.Sl	John	Martijn Nicole	
	C		Nolly	
	A.C			
Twee soorten	Sl & A.Sl	Marti	Jacques James	
	C & A.C		Anoek	
	A.Sl & A.C	Dory		
	Sl & A.C			Eelco
Drie soorten	Sl & A.Sl & C	Milan	Kristel	
	Sl & C & A.C		Leonie	

afkortingen: Sl=sliert, C=cykel, A.Sl= antisliert, A.C=anticykel

fig. 8.47 16/3/55

- * Het getallengebied (fig. 8.48)

Het grootste getal G* van de gebruikte getallen	Aantallen gemaakte sommen	Aantallen rekenaars		
		Totaal	Goed	Matig of Zwak
G* < 10	64	8	3	5
10 ≤ G* < 20	115	11	7	4
20 ≤ G*	47	5	3	2
TOTALEN	226	24	13	11

fig. 8.48 16/3/55

De grootte van de gebruikte getallen varieerde:
 acht leerlingen bleven onder de 10,
 elf leerlingen gebruikten onder andere getallen tussen de 10 en 20 en
 vijf kinderen rekenden boven de 20.

- * Welke typen pijlensommen kwamen het meest voor en van welke lengte? (zie fig. 8.49)

Welke typen pijlensommen komen het meest voor en van welke lengte?					
Typen Lengte	Stiert	Anti stiert	Cykel	Anti cykel	Totaal
2	5				5
3	12	10	3	1	26
4	3	1	3	3	10
5 of langer	6		2	2	10
Totaal	26	11	8	6	51

fig. 8.49 16/3/55

- * Contextgebonden of kaal?
 Slechts elf van de 24 D-kinderen tekenden alléén kale pijlen. Dertien kinderen maakten ook versierde pijlen.

Nieuwe vondsten van individuele leerlingen

In de 'vrije produktie' werden allerlei individuele vondsten gedaan die uitblonden door inventiviteit.

- * Dory versierde een eindpuntdiagram (fig. 8.50)

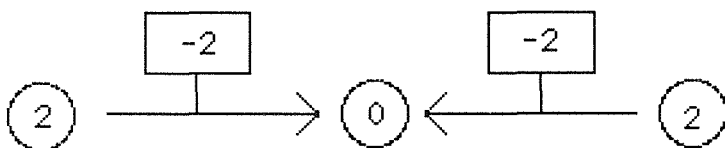


fig. 8.50 eindpuntdiagram

aldus (fig. 8.51):

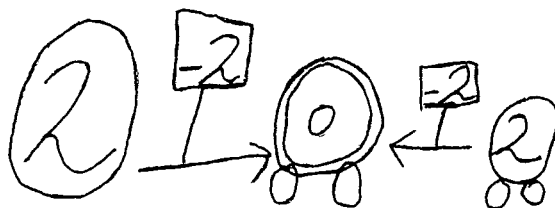


fig. 8.51 Dory eindpuntdiagram

en gaf daarmee te kennen, dat het bij eindpuntsommen om twee bussen ging in plaats van één.

- * De combinatie pijl en is-teken verscheen voor het eerst bij twee van de 25 D-kinderen in blad 1 van het rekenboek, op 21 maart (zie hoofdstuk 9). In het derde blad (ontworpen op 30 mei) maakten zes van de 25 D-kinderen deze combinatie die zo'n belangrijke schakel vormde tussen pijlentaal en is-taal.

Ze kwam voor in twee vormen:

- de pijl als toelichting onder een som in de is-taal (van de is-taal naar de pijlen, fig 8.52):



fig. 8.52 Xenia, 30/5

- het is-teken geplaatst als slot aan het einde van een pijl (van de pijlentaal naar de is-taal, fig. 8.53):

$$2 (2 + 1 = + 1 =) = 4$$

fig. 8.53 Leonie, 30/5

- * Ook andere nieuwe combinaties vonden we in de vrije produkties met de pijlentaal.
 - Michael noteerde een pijl met een kleiner dan-teken (fig. 8.54):



fig. 8.54 Michael, 30/5

Dave maakte een pijl met is-teken (fig 8.55):

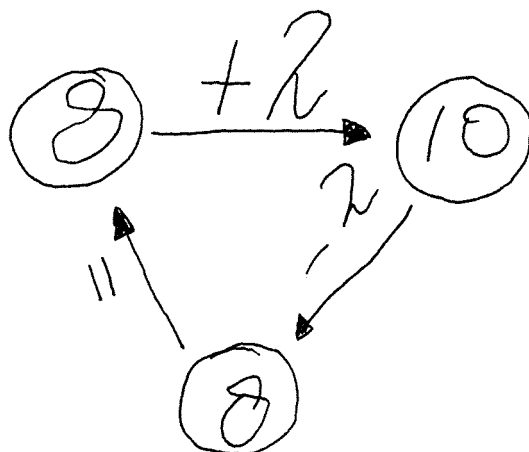


fig. 8.55 Dave, 30/5

Dory ontwierp dubbele pijlen (fig. 8.56):

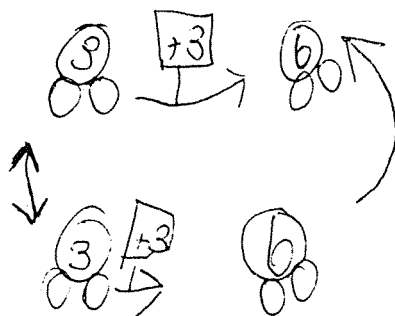


fig. 8.56 Dory, 30/5

Manfred tekende twee pijlen boven elkaar (fig. 8.57):

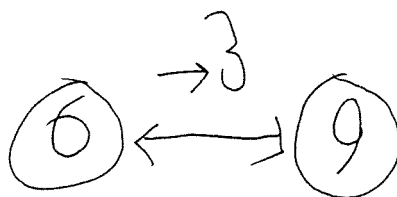


fig. 8.57 Manfred, 30/5

De pijl voor de 3 wijst aan waar drie meer zijn.

8.4.3 Conclusies en aanbevelingen

Bij de vrije produktie van pijlenopgaven na een cijferopdracht werd door de D-kinderen op eigen houtje gevarieerd op contextversieringen en pijlenvormen, op de lengte van de pijlenslierten, de getalgrootte en het type pijlendiagram.

Circa 50% van de kinderen ontwierpen zowel kale als versierde, contextgebonden pijlenopgaven en toonden daarmee het zelfstandig toepassen van de pijlen te beheersen.

Bij de vrije produktie van kale pijlenopgaven werden bovendien nieuwe symboolcombinaties door de kinderen ontworpen, die het pijlenmodel zelfs rijker maakten, dan we aanvankelijk hadden verondersteld.

8.5 Toepassen

8.5.1 Rekenkennis wordt niet vanzelf toegepast

Op 17/1 toonden we 24 kinderen (elf van de D en dertien van de N) de pijlen-sliert van stipsommen (fig. 8.58):

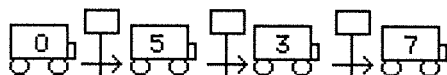


fig. 8.58 17/1/27

'Dit is een autobus, die langs de haltes rijdt.

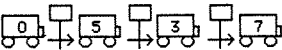
Er zitten mensen in.

Wat gebeurt er bij die haltes?'

Op de D was de autobuscontext nog niet geïntroduceerd. Dat zou pas op 24/1 plaatsvinden.

Op de N was men net, na ruim zeven weken optellingen, gestart met de aftrekkingen (vanaf 17/1).

Dit waren de resultaten (fig. 8.59):

						Totaal
D n=11	Goed	10	8	7	25	
	Haltesom	0	0	0	0	1)
	Fout	1	3	4	8	
	Operator	0	2	3	5	2)
N n=13	Goed	12	10	3	25	
	Haltesom	0	1	1	2	1)
	Fout	1	3	10	14	
	Operator	0	2	5	7	2)

- 1) deze regel is een specificering van goede resultaten.
 2) deze regel is een specificering van fouten.

fig. 8.59 17/1/27

Conclusie

Op de N waren op 17/1 al zeven weken sommen in de is-taal aangeleerd met plaatjes. De N-kinderen behaalden echter geen betere resultaten met de pijlensom dan de D-kinderen. Ze pasten dus hun geleerde rekenkennis niet toe op een andere (autobus)context.

8.5.2 Kale en versierde pijlen zijn gelijkwaardig

In de opdrachten om vrij pijlenopgaven te bedenken (op 2/3, 4/3 en 16/3) werden ongeveer evenveel kale, als versierde pijlendiagrammen ontworpen.

Op 16/3 zag de verdeling 'kale pijlen/versierde pijlen' voor de dertien goede rekenaars en de elf andere (matige en zwakke) rekenaars er als volgt uit (fig. 8.60).

Kale of met versierde pijlen?	Aantallen rekenaars		
	Goed	Matig of Zwak	Totaal
Aileen kale pijlen	7	4	11
Met contextfranje	6	7	13
Totaal	13	11	24

fig. 8.60 16/3/55

Een minderheid (elf leerlingen) tekende alleen kale pijlen. Een meerderheid (dertien) van de D-kinderen tekende naast kale, ook versierde pijlen. Voor hen waren kale en versierde pijlen gelijkwaardig.

Conclusie

De pijlentaal werd zowel in de symbolenwereld als in de leefwereld gebruikt. De oorspronkelijke betekenissen konden vervagen, maar ook weer worden opgeroepen.

8.5.3 Toepassen van het cijferen in contexten van vroeger

Voor het toepassen van het cijferen werden op de D aan het einde van het schooljaar contexten en rekenonderwerpen gebruikt die vroeger in het schooljaar al eens aan de orde waren geweest (hoofdstuk7). Maar herinnerden de kinderen zich die onderwerpen nog?

18/4: drie maanden na de introductie van het optellen en aftrekken werd aan veertien D- kinderen een kale pijlensliert aangeboden met onder andere de vraag: 'Weet je wat dit is?' Met uitzondering van één kind ('het is een som') zeiden alle D-kinderen dat het een autobusrit was (18/4/61).

Op 7/6, vijf maanden na de introductie van de autobus, stelden we twaalf D-kinderen de vraag:

'Bedenk eens een verhaaltje bij deze som': $9 - 5 = 4$.

Acht van de twaalf D-kinderen verwezen naar gespeelde toneelstukjes en spelletjes van destijds.

Conclusie en aanbevelingen

Contexten die als toneelstuk of als spelletje waren gespeeld, bleven langdurig (zeker drie tot vijf maanden) in de herinnering aanwezig; de interesse was nog springlevend. Het verdient derhalve aanbeveling om dergelijke herinneringen aan rekentoneelstukken en 'oude' contexten te laten gebruiken als

toepassingsgebied voor het kale cijferen. Gezien ook het feit, dat ze in de vrije opdrachten werden herhaald, waren ze de kinderen blijkbaar goed vertrouwd. Al met al kunnen we stellen dat de vijf aspecten (mens-diercontexten, conflict-situaties, pijlentaal, vrije rekenkunst en toepassingen) die in de prototypische onderwijsleergang gerealiseerd zijn, het leren rekenen voor kinderen begrijpelijk, toepasbaar en kunstzinnig maken.

8.6 Noten

- (1) Een ander punt van de discussies over de plaats van fouten is, dat fouten afhangen van bepaalde typen opgaven. Sommige typen zijn moeilijker dan andere (Carpenter & Moser, 1984; Baroody & Ginsburg, 1982). Er zijn echter ook onderzoekers die de alleenheerschappij van deze kale 'typologieën' in twijfel trekken. Fouten zijn afhankelijk van de gebruikte beeldende context; moeilijke opgaven worden in een bepaalde context een stuk eenvoudiger (Donaldson, 1978; Lesh, 1985) of ze hangen af van het niveau waarop het onderwijs gegeven wordt (Brownell, 1935) of van het niveau waarop het kind verkeert (Van Hiele, 1957).
- (2) Ilmer (1989) verrichtte onderzoek met stipsommen genoteerd in de autobuspijlennotatie en in de is-taal met kinderen van groep 6 (klas 4). Hij vond onder andere dat de stipsommen in de is-taal voor de kinderen onbegrijpelijk waren, terwijl de stipsommen in de pijlentaal alle goed werden gemaakt. Ook vier maanden later in het schooljaar bleven de opgaven in de pijlentaal beter te begrijpen.
- (3) Anderen die sterk de aandacht hebben gevestigd op de eigen produkties van kinderen zijn Streefland (1988) en Querelle (1988). Vooral de afwijkende en daardoor verrassende ideeën van de kinderen voeren daarin de boventoon.

9 Onderzoeksonderdeel de kinderen als rekenboekauteurs

9.1 Onderwijsverschillen en onderzoeksvraag

In hoofdstuk 7 maakten we een onderscheid tussen verschillende onderzoeksonderdelen. De onderwijspraktijk werd als eerste nader beschreven in hetzelfde hoofdstuk.

De prototypische onderwijsleergang voor het optellen en aftrekken onderzochten we op leerresultaten in hoofdstuk 8.

In de volgende hoofdstukken komen de criteriummaten aan bod om de leerresultaten van de D- en N-kinderen te vergelijken.

Eén van de drie criteriummaten betreft de klasserekenboeken.

In maart 1983 werd besloten om de kinderen gezamenlijk een rekenboek te laten maken voor de kinderen die het volgend jaar in de eerste klas zouden komen (1). De centrale vraag van dit onderzoeksonderdeel is nu of de vijf onderwijsverschillen tussen de D en de N - te weten de verschillen ten aanzien van contexten, rekentalen, oefenen, conflictsituaties en het toepassen - in de vrije produkties van kinderen zouden doorwerken. We zullen ons daarbij beperken tot de eerste drie genoemde verschillen, omdat conflictsituaties een onderwijsmiddel betreffen dat slechts indirect in de eigen produkties doorklinkt en omdat het toepassen reeds in de onderdelen contexten en rekentalen besloten ligt.

9.2 Opzet van de twee klasserekenboeken (Dr en Nr)

Er werd één klasserekenboek op de D en één op de N ontworpen. We noteren de respectievelijke boeken in het vervolg als 'Dr' en 'Nr'.

De kinderen traden op als auteurs en kregen de kans om hun eigen rekenkennis uit te venten aan andere leerlingen. Dit werd gerealiseerd in zes bijdragen, die op verschillende data met steeds één maand tussenruimte werden uitgevoerd (zie fig. 9.1 op de volgende bladzijde).

Introductie en blad 1 (21 maart)

'Ik wil een rekenboek maken van sommen die kinderen bedacht hebben. Maak eens één bladzijde voor dat rekenboek. Het mogen allerlei sommen en tekeningen zijn. Volgend jaar kunnen we het boek misschien gebruiken in de eerste klas, als jullie al in de tweede klas zitten'.

De opgave was in die zin vrij dat de sommen niet gebonden hoefden te zijn aan een bepaalde periode van het schooljaar.

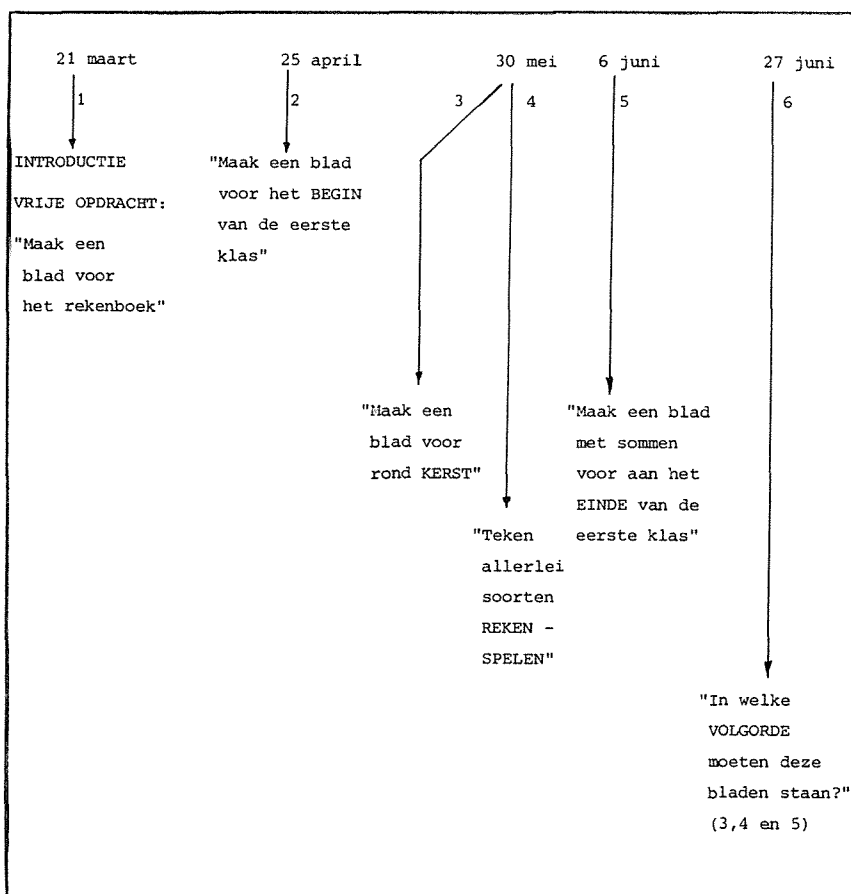


fig. 9.1 overzicht van de opdrachten

blad 2 (25 april)

De opdracht was stringenter dan die van 21 maart. Ze luidde:

'Een tijdje geleden hebben we een bladzijde voor een rekenboek gemaakt. Nu gaan we ermee verder. Straks komen die kleine kleuters in de eerste klas. Maak nu eens allerlei sommen voor hen'.

Deze opdracht was vooral bedoeld voor het begin van het schooljaar.

blad 3 (30 mei op de D, 6 juni op de N)

Weer een maand later vroegen we de kinderen een blad te maken voor hun rekenboek met sommen rondom Kerst. Op de D zijn in die periode de pijlsommen actueel. Op de N begint men dan net met het 'echte' rekenen: de sommen in de is-taal.

blad 4 (30 mei op de D, 6 juni op de N)

We vroegen de kinderen allerlei rekenspelletjes voor het rekenboek te bedenken en te tekenen die de kleuters volgens hun moesten kunnen spelen.

blad 5 (1 juni op de D, 6 juni op de N)

Tenslotte vroegen we de kinderen een blad sommen te bedenken als laatste oefening voor het rekenboek.

Op de D werden deze opgaven op de achterkant van een werkblad genoteerd. Op de N kwamen de sommen op 'ruitjespapier', omdat men op dit moment met deze nette vorm van notatie bezig was.

blad 6 (27 juni)

Tot slot hebben we op 27 juni elk kind afzonderlijk zijn of haar drie ontwerpen voorgelegd:

blad 3 (de Kerstsommen),

blad 4 (de spelletjes) en

blad 5 (de eindsommen).

We stelden het volgende auteursprobleem:

'Ik moet er een rekenboek van maken, maar ik weet niet meer in welke volgorde ze moeten liggen. Ik weet niet welke eerst moet en welke daarna. Help me eens.'

Vervolgens werd de leerling gevraagd zijn volgorde te beargumenteren.

9.3 Specificering van de onderzoeksvraag

De beide klasserekenboeken werden driemaal doorgenomen om zoveel mogelijk variabelen op te sporen (2).

De volgende onderzoeksvragen gespecificeerd naar de drie onderwijsverschillen kwamen daarbij aan bod.

Contexten

*** Spelletjes**

Zouden de kinderen hun rekenen toepassen in rekenspelletjes conform het ontvangen onderwijs? Bestaan hierin verschillen tussen het Dr en Nr?

*** Toepassen in beeldende contexten**

Bestaan er verschillen in de rekenboeken betreffende het toepassen van het rekenen in beeldende contexten?

*** Soorten opgaven**

Zouden er allerlei typen kale en versierde opgaven door de kinderen worden ontworpen en verschilde het Dr hierin met het Nr?

Rekentalen

- * Versieringen
Zouden opgaven van verschillende soorten (kale en versierde opgaven, variërend in lengte) de rekenboeken kenmerken?
- * Pijlentaal en is-taal
Zouden de pijlentaal en de is-taal gelijkwaardig worden gebruikt in het Dr zoals ook in het onderwijs bedoeld was?
- * Stipsommen
Hoe waardeerden de kinderen de stipsom in hun rekenboeken?

Oefenen

- * Volgorde
Zou de herhaling van oude onderwerpen uit het D-onderwijs worden overgenomen door de D-kinderen?
- * Aantal opgaven
Zou het aantal oefensommen in het Nr groter zijn dan in het Dr? Dat was immers in het onderwijs op de N en de D het geval.
- * Getallengebied
Zouden de kinderen alleen kleine, gemakkelijke getallen in hun rekenboeken gebruiken? Ze waren immers vrij om dat te doen.
Zouden er hieromtrent verschillen zijn tussen het Dr en het Nr?
- * Fouten
Zou het aantal fouten groot zijn in het Dr en Nr?

9.4 Kenmerken van de klasserekenboeken Dr en Nr

9.4.1 Contexten

- * Spelletjes
 1. Het gemiddeld aantal spelen dat per leerling in het rekenboek wordt getekend, is: in het Dr $47/26 = 1.8$ en in het Nr $68/28 = 2.4$.
De N-kinderen geven meer spelen per leerling dan de D-kinderen.
 2. Maar het aantal verschillende spelen is in het Dr groter dan in het Nr: respectievelijk 26 (per leerling $26/26 = 1$) en 13 (per leerling $13/28 = 0.5$).
 3. De N-spelletjes betreffen voor 97% spelletjes uit de school en ten behoeve van het oefenen van het rekenen: lotto's, rekenkist, 'sommen maken', stem-peldoos, telraam lezen (zie fig. 9.2).
De D-kinderen halen 78.7% uit school en bestemmen 70.2% voor oefenen (zie fig. 9.3 en fig. 9.4).
 4. In het Dr zijn 21.3% van de spelletjes 'buitenschools', zoals: hinkelen, kegelen, mens erger je niet. Deze spelletjes zijn van oorsprong 'buitenschools', maar kunnen uiteraard wel in het onderwijs worden gebracht. In het Nr is dat percentage 3%.
 5. In het Dr zijn 74.5% van de spelletjes van het type drama; 1.5% in het Nr.

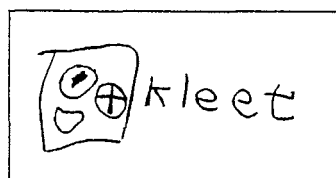
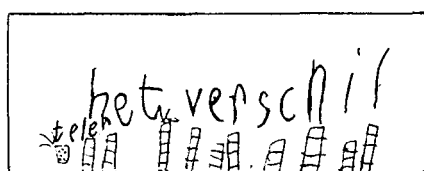
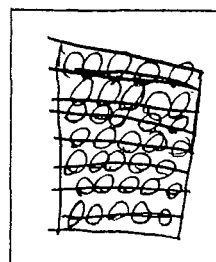
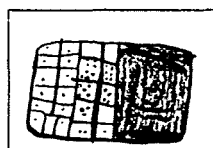
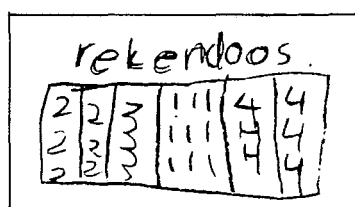
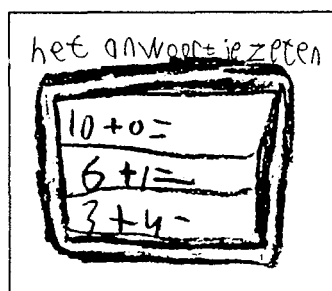
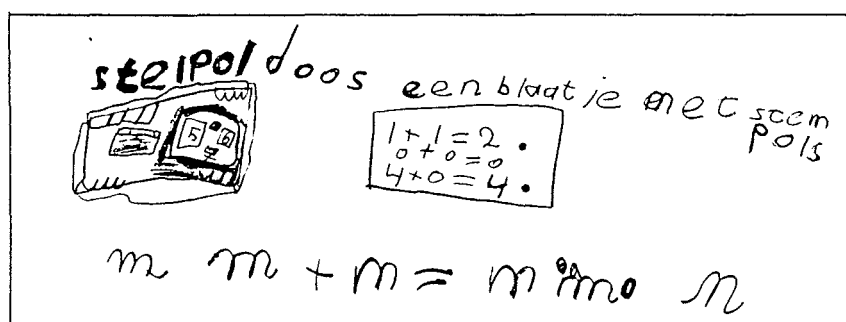


fig. 9.2 spelletjes uit het Nr

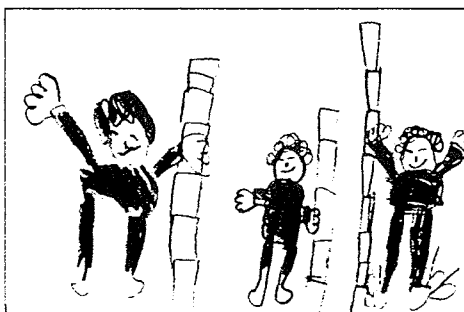
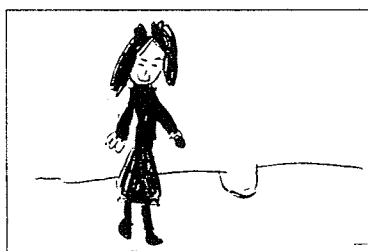
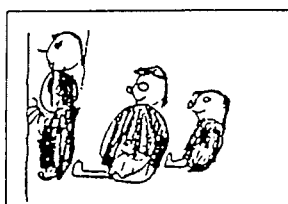
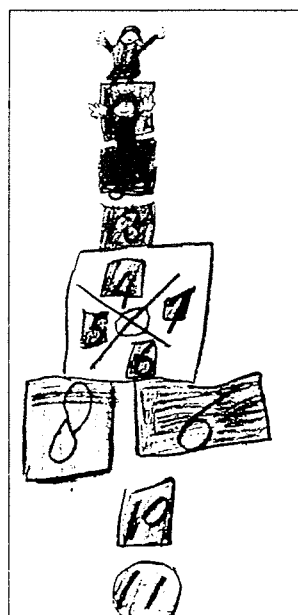
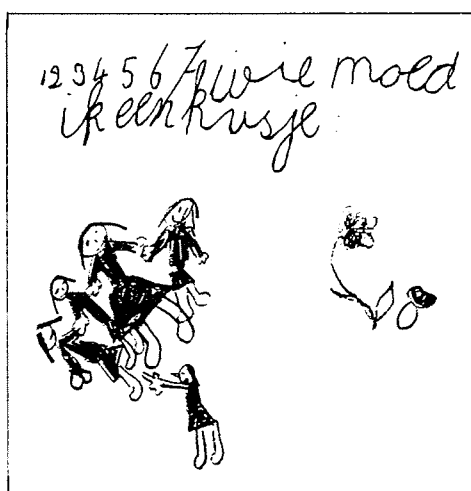


fig. 9.3 spelletjes uit het Dr

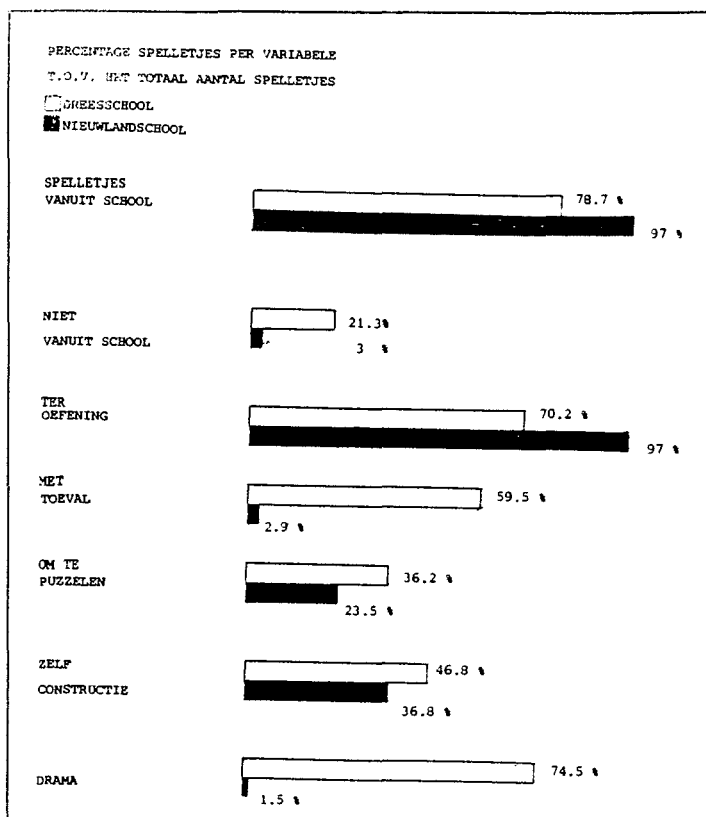


fig. 9.4 spelletjes

* Toepassen en soorten contexten (zie fig. 9.5)

6. Mens-diercontexten worden voornamelijk in het Dr gepresenteerd, zowel bij de introductie (blad 1) als bij de toepassingen (blad 3). Maximaal 23.9 % van de gemaakte opgaven in de vier opdrachten en minimaal 4 % van de opgaven waren mens-diercontexten.

Mens-diercontexten komen in het Nr sporadisch voor: maximaal 4.8 % van de opgaven en minimaal 0 %.

7. Voorwerpcontexten nemen in blad 3 van het Nr een grote plaats in. In blad 5 van het Nr verdwijnen alle beeldende contexten en blijven alleen kale sommen over.

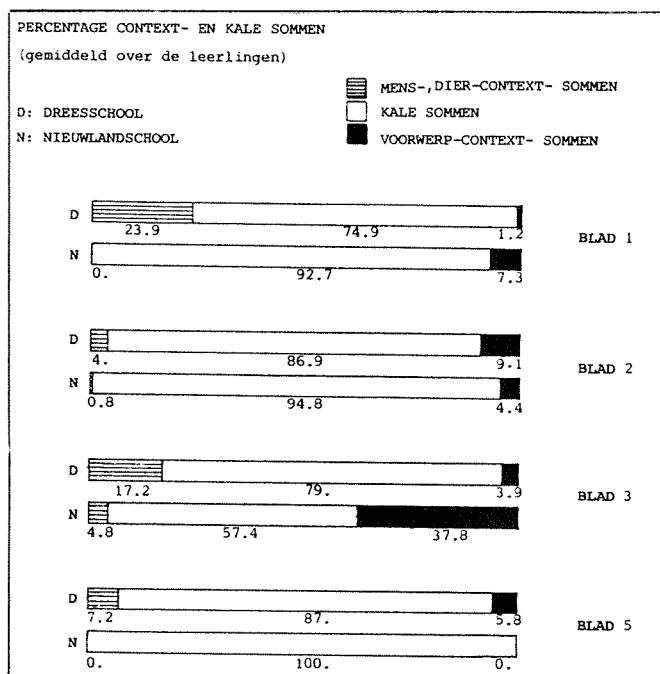


fig. 9.5 context- en kale sommen

9.4.2 Rekentalen

* Verschillende variaties in opgaven

8. Er worden tal van soorten opgaven gemaakt: contextsommen, kale sommen, opgaven in de is-taal of in de pijlentaal, variërend naar lengte en vorm. Voor de vier bladen telden we het aantal verschillende soorten opgaven per leerling (zie fig. 9.6):

Het gemiddeld aantal soorten opgaven per leerling		
Blad	Dr	Nr
1	2.5	1.0
2	1.6	1.3
3	3.2	2.0
5	2.0	1.1

fig. 9.6 aantal soorten opgaven

* Pijlentaal en is-taal

9. In het Dr zijn de pijlentaal en de is-taal gelijkwaardig in gebruik (zie hoofdstuk 8 en hieronder punt 14).

* Stipsommen

10. Stipsommen kwamen in de rekenboeken vrijwel niet voor.

In het Dr is bij de gemiddelde leerling 0.8% van de sommen stipsom; in het Nr: 0.2% (zie fig. 9.7).

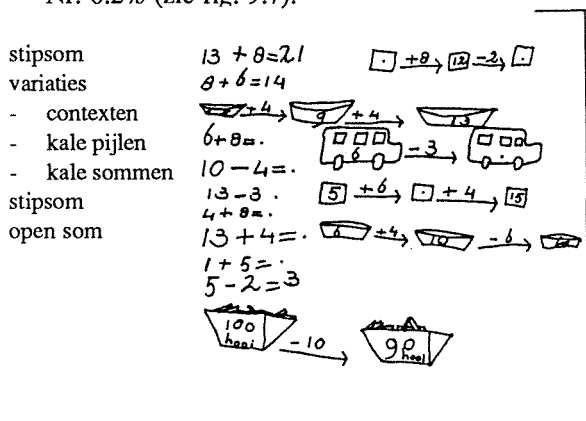


fig. 9.7 Anoeck

9.4.3 Oefenen

* Volgorde

11. Opvallend is het toenemend aandeel van de relatiesommen (met het groter-dan- of kleiner-dan-teken) in het Dr aan het einde van het jaar (blad 5). De relatiesommen werden vroeg in het leerjaar op de D geïntroduceerd (oktober), maar later weer herhaald (vanaf april). Vandaar (zie fig. 9.8).

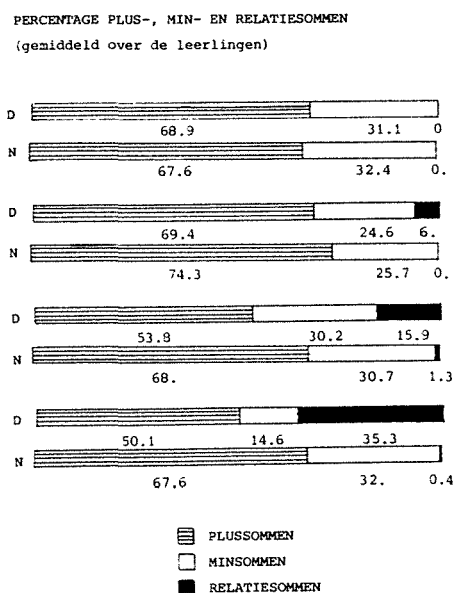


fig. 9.8 plus-, min- en relatiesommen

Fig. 9.9 toont de volgorde waarin de drie rekenonderwerpen 'spelletjes' (S), 'Kerstsommen' (K) en 'eindsommen' (E) namens de auteurs in het rekenboek moesten worden aangeboden.

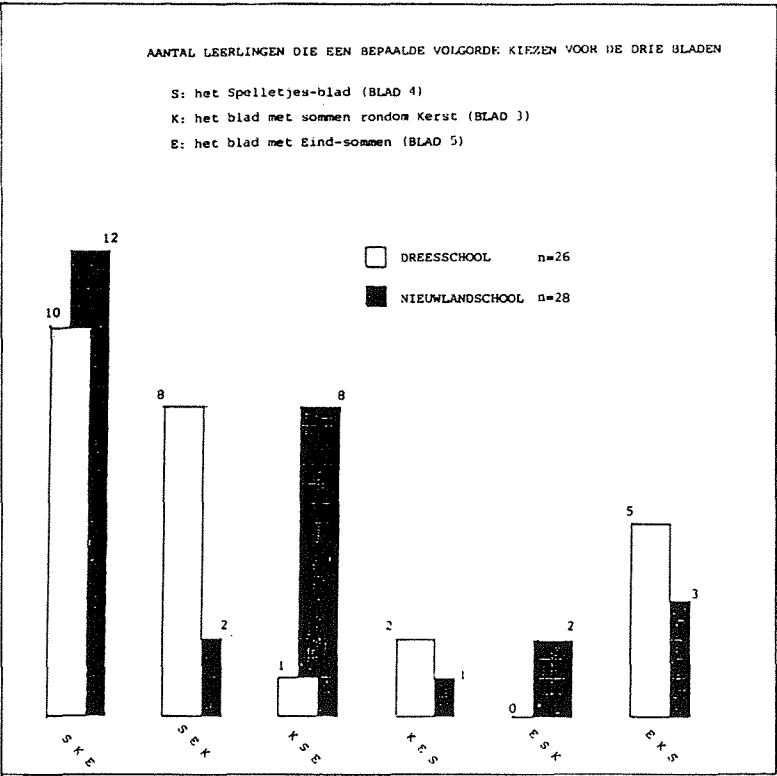


fig. 9.9 volgorde van werkbladen

12. De meeste kinderen zowel op de D als op de N kozen voor de volgorde S, K, E.
13. Veel kinderen op de N kozen de volgorde K, S, E.
De Kerstsommen in het Nr waren grafische illustraties bij kale sommen zoals $5 + 3 = 8$. De kinderen lieten deze sommen aan de spelletjes voorafgaan. Met 'spelletjes' werden in het Nr namelijk de oefen- en rekenspelen bedoeld die in het N-onderwijs volgden op het grafisch rekenen.
14. Veel D-kinderen kozen, in tegenstelling tot de N-kinderen, de eindsommen in 'is'-taal vòòr de pijlensommen van Kerst (S, E, K en E, K, S).

Ter verklaring van deze keuze kunnen we aanvoeren, dat vanaf april in het D-onderwijs verschillende rekenonderwerpen die eerder in het jaar aan de orde waren, zoals 'pijlensommen', 'relatietekens', 'getallenlijn', later weer werden herhaald. Dit verklaart mogelijk waarom de pijlensommen (K) ook ná de gewone is-sommen (E) werden geplaatst. Er is ook een andere verklaring: de kinderen vinden is-sommen gemakkelijker. Beide soorten rekentalen (de pijlentaal en de is-taal) zijn in het Dr gelijkwaardig.

- * Aantallen sommen (zie fig. 9.10)

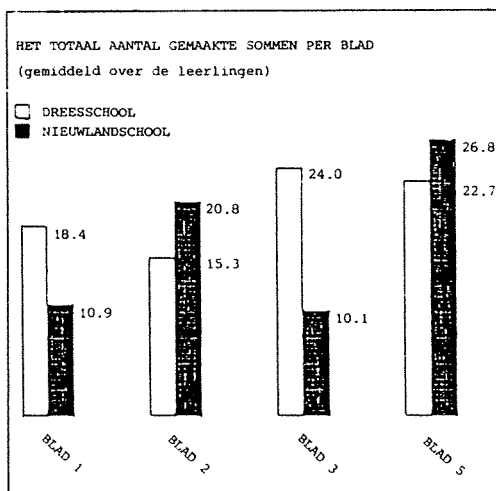


fig. 9.10 aantallen sommen

15. Het totaal aantal gemaakte sommen per leerling per blad schommelde in het Dr tussen de 15.3 en de 24. In het Nr waren die extremen: 10.1 en 26.8.

- * Getallengebied (het gebruikte grootste getal) (zie fig. 9.11)

16. In het Dr ligt het grootste gebruikte getal gemiddeld boven de 10 in de vier bladen 1, 2, 3 en 5. In blad 5 is het 30.2. met een maximum van 106. In het Nr ligt het gemiddelde soms onder de 10 (blad 2 en 3). In blad 5 is het 13.4 met als maximum 20.

HET GEBRUIKTE GROOTSTE GETAL
(gemiddeld over de leerlingen)

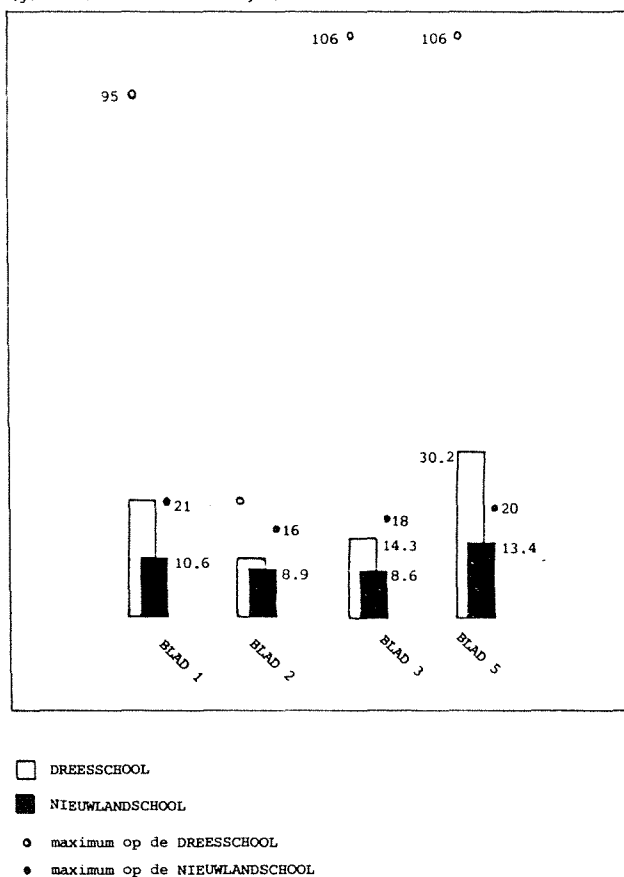


fig. 9.11 grootte van getallen

* Foutieve en open sommen

17. De percentages foutieve sommen (dat wil zeggen: gesloten sommen met een verkeerd antwoord) liggen in het Dr tussen de 1.5 en 7.1% van alle opgaven per leerling en in het Nr tussen de 2.8 en 8% (zie fig. 9.12). Er zijn dus in de zelfbedachte opgaven weinig fouten gemaakt.

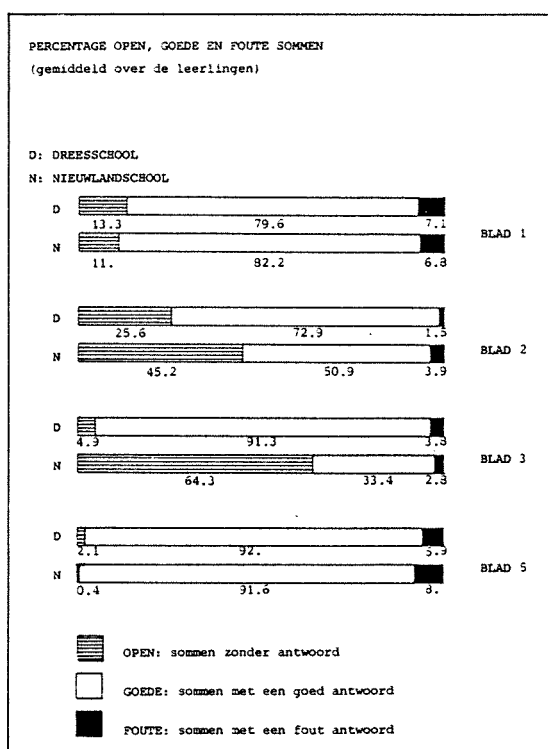


fig. 9.12 open, goede en foutieve sommen

9.5 Samenvattende conclusies in het licht van het gegeven onderwijs

Context

* Spelletjes

De rekenspelletjes in het Dr kwamen voornamelijk uit de speelsfeer : hinkelen, kegelen, knikkeren, touwtje springen (75% drama, 21.3% buitenschools).

In het Nr voornamelijk uit de rekensfeer: lotto, rekenmatje, rekenkist, telraam (97%).

* Toepassen in beeldende contexten

In het Dr kwamen sommen voor die naar verschillende beeldende contexten verwezen. Op het introductieblad 1, maar ook later op blad 3. Maximaal 23.9 % van de ontworpen opgaven in het Dr waren toepassingen van het rekenen in beeldende contexten. Dit was 4.8 % in het Nr.

* Soorten opgaven

Het aantal verschillende soorten opgaven (variërend in opgaven met plus-, min- of relatietekens, contextgebonden of kaal) was in de vier bladen van het Dr steeds groter in vergelijking met het Nr.

Dit wijst erop dat de herhaling van oude rekenonderwerpen en contexten, zoals die in het D-onderwijs werd ondernomen, terugkeerde in het klasserekenboek.

Rekentaal

* Pijlensommen, die geoefend werden op de D, kwamen in het Dr in allerlei gedaanten terug, kriskras door elkaar met sommen in de is-taal.

* De beide rekentalen (de is-taal en de pijlentaal) werden dus gelijkwaardig gebruikt. Dit bleek bovendien uit het feit, dat bij het bepalen van de volgorde van bladen door veel D-kinderen de opgaven in de is-taal vòòr de pijlenopgaven werden geplaatst, terwijl ze in het onderwijs in omgekeerde volgorde waren aangeboden.

* De stip-sommen werden op de N flink geoefend. Toch kwamen er geen stip-sommen voor in beide klasserekenboeken.

De auteurs van de rekenboeken waren blijkbaar niet geneigd om andere kinderen stip-sommen voor te leggen als rekenonderwerp.

Oefenen

* Volgorde

Zoals gezegd werden oude onderwerpen in het Dr herhaald zoals ook in het D-onderwijs het geval was met als gevolg dat de onderwerpen met elkaar werden gecombineerd.

* Aantal opgaven

De verwachting dat het aantal oefensommen in het Nr groter zou zijn dan in het Dr omdat op de N ruim drie keer zoveel sommen werden gemaakt als op de D, kwam niet uit.

N-kinderen ontwierpen in hun rekenboek niet meer sommen om te oefenen, dan de D-kinderen.

* Getallengebied

De verwachting dat de grootte van de gebruikte grootste getallen in de loop van het jaar zou oplopen bleek slechts ten dele waar. De grootste getallen in het Nr bereikten uiteindelijk de gemiddelde waarde 13.4. In het Dr was dat 30.2.

D-leerlingen gebruikten eerder en langduriger grotere getallen, dan de N-kinderen. De vroegtijdige invoering van de getallenlijn op de D zorgde hiervoor, terwijl de memoriseertaken onder de 20 op de N er debet aan waren, dat de N-kinderen slechts traag tot het gebruik van grotere getallen kwamen.

* Fouten

Verrassend was het verschijnsel dat in beide rekenboeken Dr en Nr vrijwel géén fouten voorkwamen.

De gemiddelde foutenpercentages in de rekenboeken in de periode van 25/4 tot 30/5 lagen rond de 2.7 en 3.4 % van alle sommen per leerling in respectievelijk het Dr en het Nr. In de officiële rekentaken werden in deze periode meer fouten gemaakt (respectievelijk 4.4 en 4.5 %).

De vraag of de onderwijsverschillen in de D en de N zouden doorwerken in de vrije produkties van het Dr en Nr van de betreffende kinderen kan bevestigend worden beantwoord.

Met uitzondering van stipsommen en van grote hoeveelheden oefensommen werden de karakteristieke kenmerken van de beide onderwijsrichtingen betreffende contexten, rekentalen en oefenvormen in de rekenboeken teruggevonden.

Een opvallend verschijnsel was bovendien (zoals eerder gezegd), dat er weinig fouten werden gemaakt in het Dr en Nr en dat in het Dr grote getallen aan bod kwamen en er veel werd gevarieerd.

9.6 Noten

- (1) In dit onderzoek gebruikten we de klasserekenboeken als criteriummaat, niet alleen als instructiemiddel.
Aanvankelijk was het idee ontstaan in december 1982 om de D-kinderen een rekenboek te laten maken ten behoeve van de N-leerlingen, en omgekeerd. Maar dit idee lieten we varen om het vergelijkend onderzoek niet te storen.
- (2) Het reductieprobleem leverde een aparte methodologie op. We trachtten de kenmerken vanuit de data te laten oplichten en niet van tevoren vanuit een theorie vast te stellen. Sommige van de kenmerken van de klasserekenboeken waren ondubbelzinnig te formuleren: het totaal aantal gemaakte sommen, het grootste gebruikte getal en dergelijke.
Met andere lag dit soms moeilijker: wanneer is er sprake van een contextsom, wanneer van een kale som, zijn er definities voor de nulsom en voor de tienvoudsom die elkaar uitsluiten?
Met voorbeelden uit de twee rekenboeken hebben we getracht de kenmerken zo éénduidig mogelijk te omschrijven alvorens de frequenties ervan vast te stellen.

10 Onderzoeksonderdeel

algemene rekenvaardigheden en stipsommen

10.1 Inleiding

Naast de klasserekenboeken hebben we ook als criteriummaten de algemene rekenvaardigheden en de stipsommen in dit onderzoek betrokken.

Onder algemene rekenvaardigheden verstaan we de vaardigheden die ongeacht het soort rekenonderwijs (mechanistisch of realistisch) als hoofdonderwerpen van het rekenen in klas 1 worden aanvaard.

Dat zijn in het onderhavige geval:

- * het tellen;
- * het kennen van de cijfers en de getallen onder de 20 en
- * het automatiseren van de optellingen en aftrekkingen onder de 10 en het leren optellen en aftrekken onder de 20.

Met stipsommen worden allerlei typen indirecte sommen in de is-taal bedoeld, zoals $3 + . = 5$, $12 - . = 10$, $7 - 5 = . - 3$.

Het zijn sommen die in het onderwijs kunnen worden gebruikt ter overbrugging van een tienvoud, bij het aanvullen en bij het leggen van een verband tussen optellen en aftrekken.

We hebben geconstateerd dat kinderen zelf de stipsommen niet waarderen als oefenstof (hoofdstuk 9) en uit verschillend onderzoek is gebleken (hoofdstuk 3) dat stipsommen de kinderen in verwarring brengen. De is-taal is daar debet aan. In de N dreigden de stipsommen daarom te worden overgeslagen (hoofdstuk 7). We hebben er echter op aangedrongen deze sommen toch in het onderwijs te betrekken en dat is ook nauwgezet gebeurd. In de D kwamen ze altijd al wel aan de orde, doch niet in de is-taal, maar in de pijlentaal.

10.2 Onderzoeksvragen

De N-kinderen maakten in de laatste drie maanden ruim drie maal zoveel kale sommen als de D-kinderen, waaronder tweemaal zoveel stipsommen.

We wilden onderzoeken of dit verschil in onderwijs ook verschillen zou opleveren in de algemene rekenvaardigheden en in de prestaties met stipsommen.

We stelden ons de volgende vragen:

- tellen
Welke verschillen in het tellen zouden er gedurende het schooljaar optreden?

- getallen
Welke verschillen in kennis van het positiestelsel en het gebruik van getallen boven de 10 zouden er op de D en de N ontstaan?
- directe sommen
Zouden de D-leerlingen aan het einde van het onderzoeksjaar in cijfervaardigheden van de N-kinderen verschillen? Met andere woorden: zouden de N-kinderen sneller kunnen rekenen dan de D-leerlingen en zouden ze ook minder fouten maken?
- stipsommen
Welke gevolgen had het feit, dat de N-kinderen tweemaal zoveel stipsommen maakten dan de D-kinderen?
Maakten ze minder fouten; kenden ze meer typen stipsommen?
Zou een moeilijke complexe stipsom in de is-taal die door geen kind werd opgelost, aangeboden in de pijlentaal wel worden opgelost?
Kunnen stipsommen beschouwd worden als aanzetten tot eigen produkties van kinderen?

10.3 Opzet: dezelfde onderwerpen door het jaar heen

Gedurende het schooljaar zijn dezelfde onderwerpen op verschillende momenten herhaald. Het was de bedoeling om het verloop van de rekenvorderingen na te gaan binnen het voortschrijdende onderwijs op beide scholen.

Er waren globaal beschouwd drie onderwijsperiodes op de D en de N:

1. vanaf de start van het schooljaar (31/8) tot Kerst (20/12) vond de voorbereiding plaats van het optellen en aftrekken: cijfers leren schrijven, tellen, kleine hoeveelheden vergelijken;
2. vanaf Kerst tot 24/3 (begin april): de periode, waarin het optellen en aftrekken op de D en de N werden ingeleid en
3. vanaf 24/3 tot het einde van het schooljaar (7/7) werd het accent gelegd op het oefenen met kale sommen.

Zie fig. 10.1 voor een overzicht van de acht onderwerpen die we gedurende het jaar in de gesprekken toetsten.

10.4 Getoetste onderwerpen

We beschrijven de onderwerpen en vermelden of er wel of geen verschillen waren tussen de prestaties op de D en op de N.

TOETS ONDER- WERP	MAANDEN											
	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
	31/8 ————— 1 ————— 20/12 ————— 2 ————— 24/3 ————— 3 ————— 7/7											
1 Akoestisch tellen: "Tel eens door..."	31/8				29/11				14/4			
	"1,2,3..."				"1,2,3..."				"10,20,30..."			
2 Afzien van het natuurlijke tellen								14/3 Vijf bussen			27/6 Vijf bussen	
3 Getalendictees "Welk getal is dit?" (6, 5, enz.)	31/8				29/11				14/4			
"Schrijf op' 1, 2, 5, 0, 6, 14, 19, 30 enz	31/8				29/11				24/4			
"Bedenk zelf een getal Schrijf dat op'	31/8				29/11				14/4			
4 Tellen van grote hoe- veelheden (boven de 10)									14/4 sterren tellen			
									29/4 figuren tellen		6/6 figuren tellen	
5 Cijferend rekenen aan kale sommen in de is- taal										9/5 4 som- men		27/6 56 som- men
6 Stipsommen "gewone stip. "omgekeerde "pijlenstip.								7/3 8 is-sommen 8 pijlsommen			6/6(7/6) 10 is-sommen	
7 Vlekken sommen									23/3 5 vleksom- men		23/6 5 vleksom- men	
8 Complexe stipsom- men & pijlensom- men								21/3 2 stip 2 pijl			1/7(7/7) 4 stip 4 pijl	

fig. 10.1 overzicht toetsonderwerpen

10.4.1 Akoestisch tellen

Op 31/8 en 29/11 telden we: '1, 2, 3' en vroegen daarna: 'Ga jij eens verder met tellen.' Als de leerling foutloos de 50 bereikte, vonden we dat hij of zij het tellen beheerste.

Op 14/4 vroegen we de leerling om na het startje van '10, 20, 30' door te tellen tot 100. Fig. 10.2 toont de resultaten.

De percentages kinderen die het tellen beheersten (met de fractie tussen haakjes):

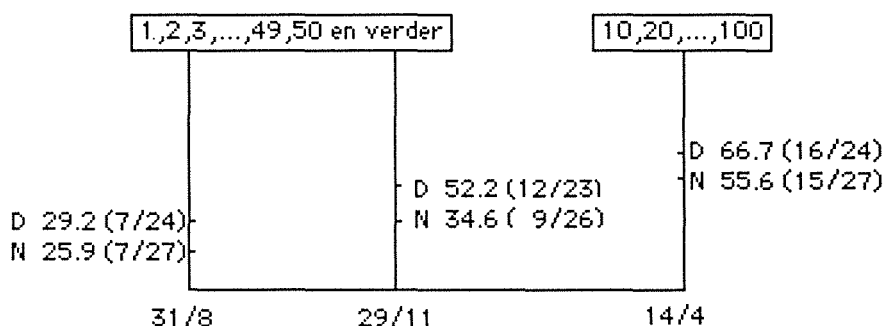


fig. 10.2 31/8

Op de D bleken in de loop van het jaar meer kinderen het natuurlijke tellen en het tellen in tienvouden te beheersen dan op de N.

10.4.2 Afzien van het natuurlijke tellen

In het onderwijs wordt het van belang geacht, dat kinderen niet blijven steken in het natuurlijke tellen, maar de getallen en aantallen gaan structureren naar tienvouden en eenheden. Het tellen in tienvouden bereidt dit voor, maar ook plaatjes die hoeveelheden suggereren, doen dit (zie fig. 10.3).

Vijf autobussen

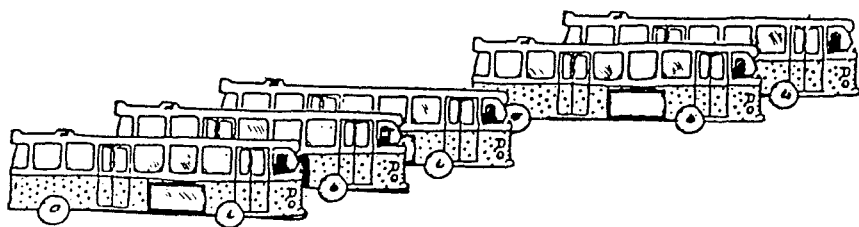


fig.10.3 14/3 & 27/6

Dit plaatje legden we de kinderen voor met de opdracht:
'Dit zijn vijf autobussen. In elk zitten tien kinderen. Ze gaan op schoolreisje.
Hoeveel kinderen gaan er mee?'

Het probleem werd op 14/3 en 27/6 besproken. Zie fig. 10.4 voor de resultaten.

HOEVEEL IN DE BUS?

De goed/fout-verdeling in percentages leerlingen
(met de fracties leerlingen tussen haakjes)

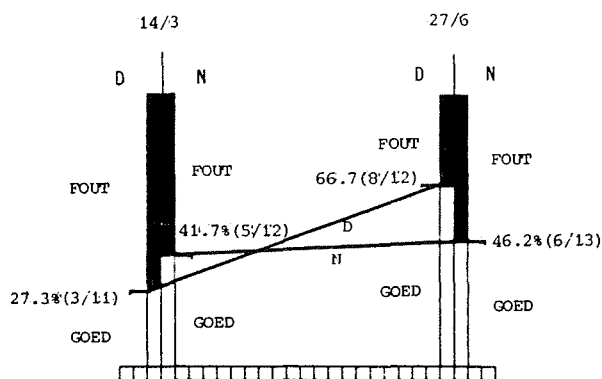


fig. 10.4 27/6

Het percentage goede antwoorden na drie maanden steeg op de D van 27.3 tot 66.7% en op de N van 41.7 naar 46.2%.

Er werden door de kinderen van verschillende oplossingsmanieren gebruik gemaakt: het natuurlijke tellen (1, 2, ..., 50), het tellen in tienvouden (10, 20, 30, 40, 50), het structureren ofwel het maken van een optelling ($10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 50$, $20 + 30 = 50$) of nog anders: 'raden' of 'direct weten' (zie fig. 10.5).

VERSCHUIVINGEN IN OPLOSSINGSMANIEREN

gegeven in percentages kinderen die een bepaalde oplossingsmanier volgden

NT = natuurlijk tellen

TT = tellen in tienvouden

S = structureren als sommetje

A = anders

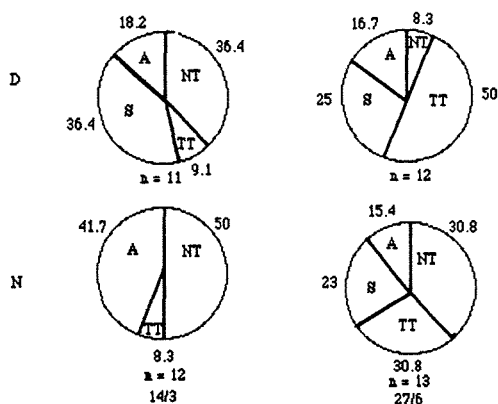


fig. 10.5 27/6

10.4.3 Getallendictees

We gaven drie verschillende getallendictees:

- * 'Welk cijfer is dit?'

Op kaartjes werden de volgende cijfers getoond: 6, 5, 1, 2, 3, 7, 8, 4, 0, 10. Maar op 14/4 werden er geen fouten meer gemaakt en konden we de D en N hierop niet meer vergelijken.

- * 'Schrijf het getal op dat ik noem'

en we noemden achtereenvolgens: 1, 2, 5, 0, 6, 0, 10, 6, 9, 3, 8, 7, 2, 4, 1, 5, 20, 100, 16, 17, 13; 11, 14, 19, 12, 18, 15, 21, 30.

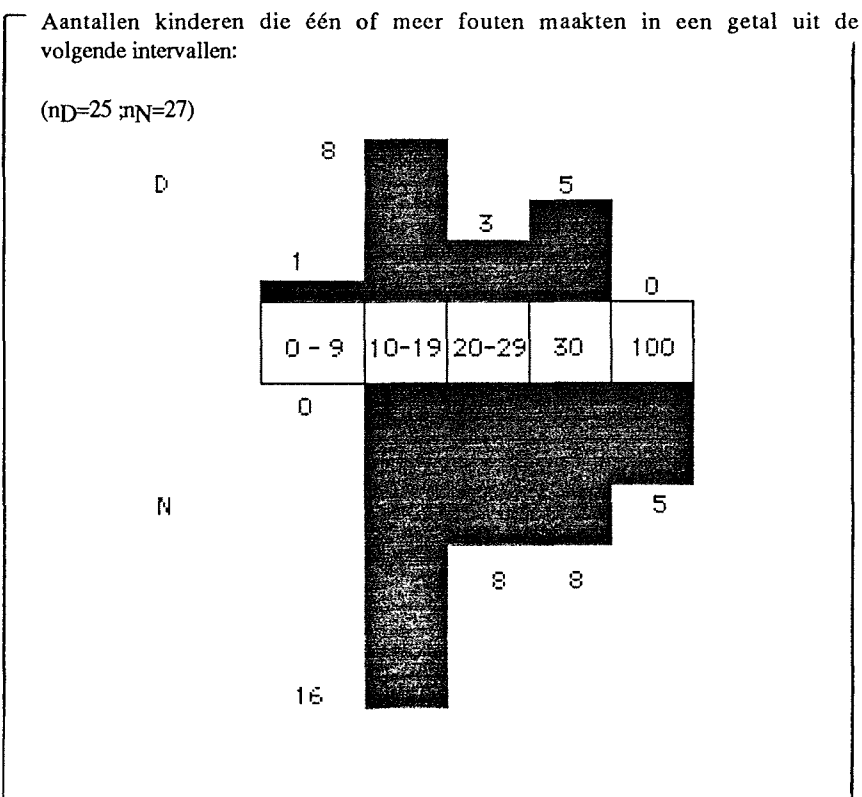


fig. 10.6 24/4

Getallen onder de tien leverden op 24/4 geen verschillen meer op tussen de D en N, maar in de getallen boven de tien werden door meer N-kinderen fouten gemaakt dan door D-kinderen.

- * Op drie data (31/8, 29/11 en 14/4) gaven we een vrije opdracht: 'Bedenk zelf een getal en schrijf het op'.

Zie fig. 10.7 voor de percentages (en aantallen) kinderen die zelfstandig een getal kozen dat groter was dan tien.

Percentages (en fracties) kinderen die zelfstandig een getal kozen dat groter was dan tien:

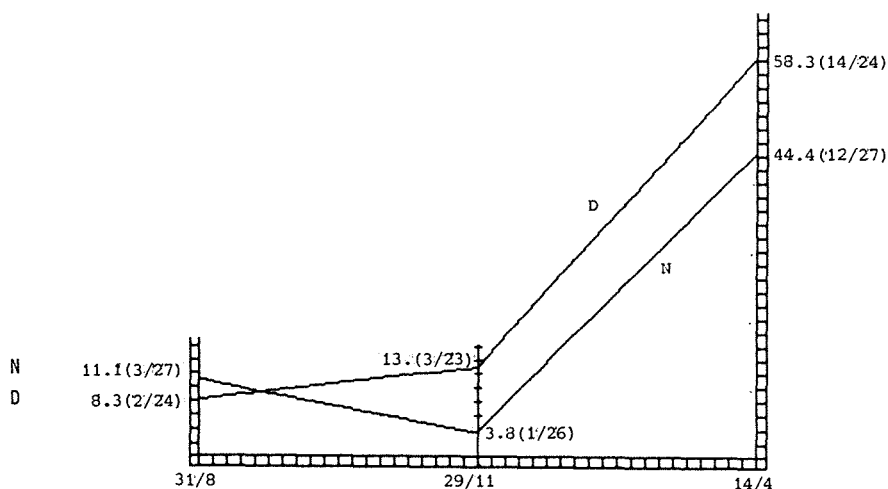


fig. 10.7 31/8

10.4.4 Tellen van hoeveelheden

We lieten hoeveelheden figuurtjes tellen: een hemel vol sterren en rijen identieke plaatjes.

* Sterren tellen

Een blad met ruim 400 sterren werd getoond en er werd gevraagd:

'Maak een kring om een groep sterren op dit sterrenblad, die je daarna moet tellen'.

De D-kinderen bakenden collecties af, die gemiddeld uit 85.8 sterren bestonden; de verzamelingen van de N-kinderen bestonden uit gemiddeld 34.5 sterren.

Bij de D-kinderen traden grote afwijkingen op: sommige kozen een collectie van 11 sterren, andere van zelfs 393 (SD = 98.8 bij een gemiddelde van 85.8).

De N-kinderen waren eenvormiger in hun keuze (SD = 26.1 bij een gemiddelde van 34.5).

Van de afgebakende collectie sterren moest de leerling het aantal sterren tellen. We hielden bij tot hoever de leerling foutloos telde: de D-leerling gemiddeld tot 47.8, de N-leerling tot 28.5 (zie fig. 10.8).

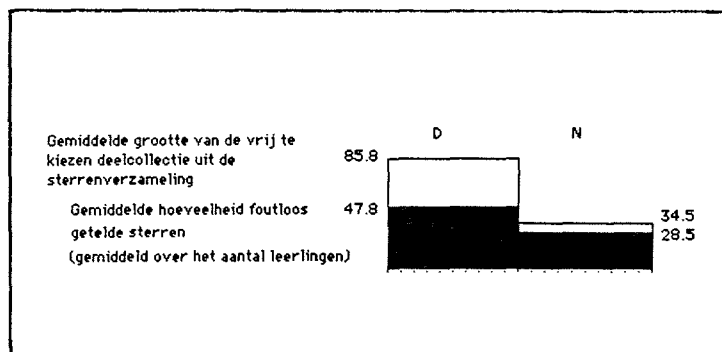


fig. 10.8 14/4

Het percentage kinderen dat de afgebakende collectie goed telde (dat wil zeggen, de telling mocht maximaal 5% van het juiste aantal afwijken), was op de D 48% en op de N 44.4%.

* Rijen identieke plaatjes tellen

'Tel de figuurtjes in de rij en schrijf het aantal op', vroegen we op 6/6 bij een blad met 12 rijen figuurtjes (zie fig. 10.9).

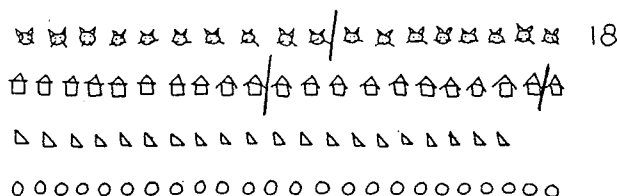


fig. 10.9 rijen figuurtjes

Het gemiddeld aantal fouten (met de standaardafwijking) was bij deze toets op de D: 2.4 (SD = 2.8) en op de N: 3.9 (SD = 3.6).

De telfout om één te veel of te weinig te tellen kwam in beide scholen voor (D: gemiddeld 1 per leerling; N: 1.4). De verwisselingsfout (21 in plaats van 12, bijvoorbeeld) trad bij de meeste N-kinderen op: gemiddeld 1.1 per leerling. Op de D: 0.56 per leerling.

10.4.5 Kale directe sommen in de is-taal

Op 9 mei werden vier sommen voorgelegd:

$$3 + 5 = \quad , 3 + 8 = \quad , 8 + 7 = \quad \text{en } 12 - 3 =$$

Op 27 juni werden 56 sommen gegeven (onder andere $10 + 0 =$, $7 - 4 =$, $8 + 1 =$).

Het gemiddelde aantal fouten per leerling steeg op de N van 1.6 op 9/5 naar 3.8 op 27/6. Op de D bleef het aantal vrijwel constant (1.3 en 1.4), ondanks het veel grotere aantal sommen op 27/6 (4 versus 56).

Anderzijds hadden de D-kinderen meer tijd nodig dan de N-kinderen om op 9/5 de vier sommen te maken (D: gemiddeld 15.8 seconden en op de N: 12.4 seconden) (zie fig. 10.10).

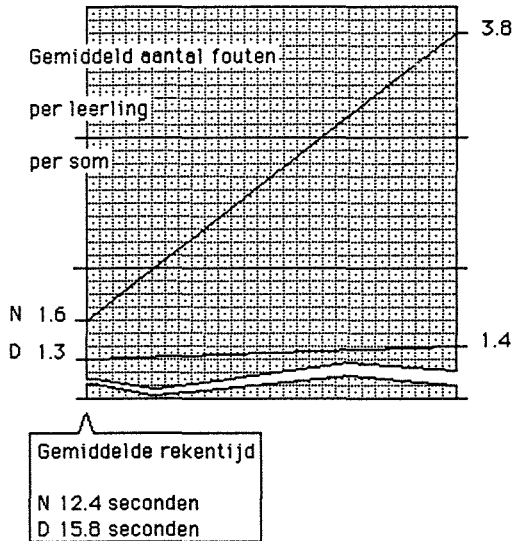


fig. 10.10 gemiddeld aantal fouten en rekentijd

10.4.6 Kale stipsommen (gewone en omgekeerde) in de is-taal en in de pijlentaal

Op 7/3 en 6/6 en 7/6 gaven we de volgende sommen aan de toetsleerlingen van de D en de N (zie fig. 10.11).

Het waren voornamelijk stipsommen.

Aan de leerlingen van de D werd op 7/3 na deze stipsommenrij bovendien autobussommen gegeven, die isomorf met de stipsommen waren.

Op 6/6 en 7/6 werden de opgaven van 7/3 uitgebreid met twee gewone stipsommen $. - 2 = 1$ en $4 - . = 3$ van de omgekeerde stipsommen VII en VIII. Bovendien werden toen de opgaven door alle leerlingen gemaakt.

Overzicht van aangeboden stipssommen		
7 maart 1983		6 en 7 juni 1983
Stipsom D&N	autobus D	stipsom D&N
I 4 + 1 = .		VIIb . - 2 = 1
II 3 + . = 5		I 4 + 1 = .
III . + 1 = 4		II 3 + . = 5
IV 6 - 4 = .		VIII 4 - . = 3
V 7 - . = 1		III . + 1 = 4
VI . - 2 = 5		IV 6 - 4 = .
VII 1 = . - 2		V 7 - . = 1
VIII 3 = 4 - .		VI . - 2 = 5
		VII 1 = . - 2
		VIII 3 = 4 - .

fig.10.11 overzicht (stip)sommen

We bespreken nu de verschillen tussen D en N ten aanzien van de gewone stipssommen en de omgekeerde stipssommen.

* Gewone stipssommen

Het percentage kinderen die een goed antwoord gaven voor een gewone stipsom of directe som (zie fig. 10.12).

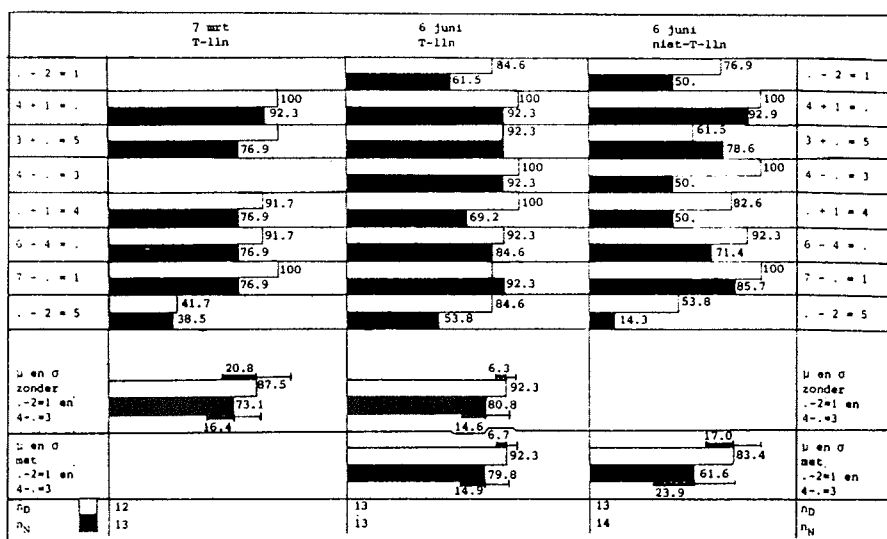


fig. 10.12 goede antwoorden op (stip)sommen

Op 7/3 is het percentage T-kinderen dat een goed antwoord gaf (gemiddeld over de stipsommen) op de D hoger dan op de N (respectievelijk 87.5 en 73.1).

Op 6/6 is dit ook het geval: 92.3 tegenover 80.8 (voor dezelfde sommen als op 7/3) en 92.3 versus 79.8 (met de twee extra sommen $. - 2 = 1$ en $4 - . = 3$ erbij).

De spreiding is op de D kleiner dan op de N (respectievelijk 6.3 en 14.6).

Voor de groep leerlingen die niet regelmatig getoetst werden, de zogenoemde niet-T-kinderen (zie hoofdstuk 7), geldt op 6/7 hetzelfde beeld: het percentage gemiddelde goede antwoorden is op de D hoger dan op de N (respectievelijk 83.4 en 61.6) met een kleinere spreiding (17.0 versus 23.9).

Conclusie

De N-kinderen hebben tussen 7/3 en 7/6 bijna twee keer zoveel gewone stipsommen gemaakt als de D-kinderen (hoofdstuk 7). Blijkbaar zonder meer opbrengst. De prestaties blijven onder die van de D-kinderen.

* Omgekeerde stipsommen (1)

Het percentage kinderen dat de goede antwoorden gaf op de twee omgekeerde stipsommen (zie fig. 10.13)

Datum \ Opgave	7/3		6/6	
	D	N	D	N
1 = . - 2	16	0	33	38
3 = 4 - .	16	0	33	92

fig. 10.13 twee omgekeerde stipsommen

In maart verschilde het oplossingsgedrag van de N-kinderen en de D-kinderen vrijwel niet. Er werden tal van interpretaties gegeven, er werd van rechts naar links gelezen. De bedoeling van de omgekeerde stipsommen was zoek.

In juni tenderden de N-kinderen echter veel sterker naar de bedoelde oplossing dan de D-leerlingen, die het zoekend gedrag handhaafden, zoals ze in maart deden.

De verklaring voor dit verschil is te vinden in het feit, dat van april tot en met juni 160 omgekeerde stipsommen werden aangeboden op de N en geen enkele op de D.

* Isomorfe pijlenstipsommen

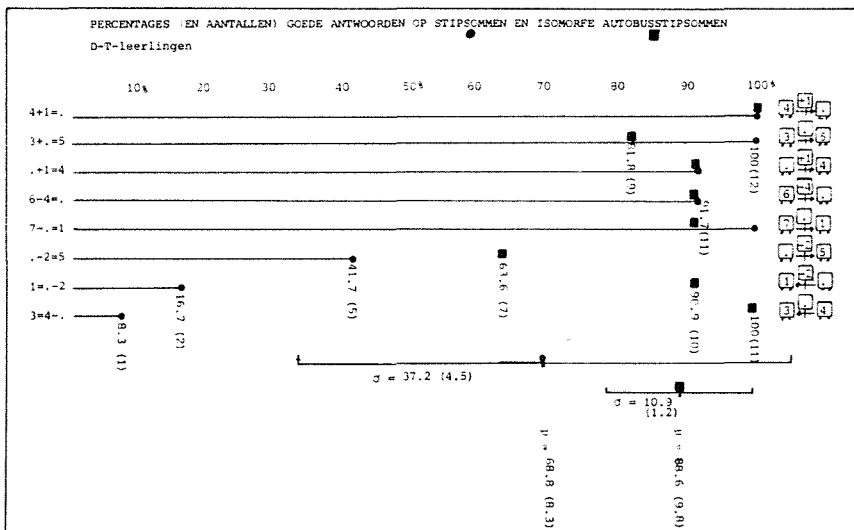


fig. 10.14 isomorfe pijlenstipsommen

De omgekeerde stipsommen werden op één of twee kinderen na door iedereen op de D fout beantwoord, terwijl daarentegen de isomorfe autobusstipsommen vrijwel alle goed werden gemaakt.

Samenvatting

- * Het oefenen van gewone stipsommen op de N (twee keer zoveel als op de D) geeft geen verandering in de drie maanden van 7/3 tot 7/6: de resultaten bleven onder die van de D-leerlingen.
- * Het ontbreken van oefening in omgekeerde stipsommen op de D zorgde ervoor, dat deze sommen voor de D-kinderen onbegrijpelijk bleven in tegenstelling tot de N-kinderen.
- * In de pijlentaal geschreven werden de omgekeerde stipsommen door de D-kinderen wel goed opgelost. Ze gaven duidelijke informatie over hoe moest worden gedacht (in welke richting gelezen, waar te beginnen). De niet-T-leerlingen lieten overigens op beide scholen hetzelfde beeld zien, als voor de T-leerlingen gold.

10.4.7 Vlekkensommen in de is-taal

Op 23/3 en 23/6 gaven we vijf vlekkensommen. Op 23/3 alleen aan de T-leerlingen en op 23/6 aan alle leerlingen.

Stellingen behorende bij het proefschrift

**realistisch
rekenonderwijs
aan jonge kinderen**

van

Frederik Jan van den Brink

Utrecht, oktober 1989

Stellingen

- 1 De autobuscontext en de bijbehorende pijlendiagrammen maken dat de introductie van het optellen en aftrekken vlot verloopt.
- 2 Door abstraheren te definiëren als 'afzien van bijzonderheden' (Van Parreren, C.F. : *Niveaus in de ontwikkeling van het abstraheren*, interne publikatie, Utrecht, 1978) wordt de onderwijsgevende op het verkeerde been gezet. Het laten abstraheren van bijvoorbeeld de autobuspijlentaal door kinderen wordt niet bereikt door af te zien van de autobuscontext, maar door kinderen juist een uitbreiding van bijzondere situaties te laten bedenken waarin de pijlentaal functioneel is.
- 3 Door de eigen produkties van kinderen zinvol te maken, bijvoorbeeld door een rekenboek voor andere kinderen te laten schrijven, wordt de rekenvaardigheid gunstig beïnvloed.
- 4 Stipsommen zijn opgaven met een niet te onderschatten gevaar en waarde.
- 5 'De conclusies van het radicaal constructivisme dat alle kennis noodzakelijkerwijs geconstrueerd wordt uit ervaringen en dat al het leren bestaat uit constructieve processen, zijn niet afgeleid uit empirisch onderzoek dat constructief leren onderscheidt van niet-constructief leren, maar zijn a priori beschouwingen die gevaarlijk kunnen zijn.' (Goldin, G.A.: *Constructivist Epistemology and Discovery Learning in Mathematics*, 'Actes de la 13e Conférence Internationale Psychology of Mathematics Education', Paris, 1989, vol. 2, pp. 18-19).
Deze aanmerking van Goldin op het radicaal constructivisme hoeft niet serieus genomen te worden, omdat hij zelf opmerkt dat de huidige empirische middelen voor een dergelijk onderzoek tekort schieten (p.22).
- 6 De onderwijspraktijk is te beschouwen als een bron voor nieuwe onderzoeksmethoden en -technieken.
- 7 Een karakteristiek kenmerk voor het onderzoek van het rekenonderwijs aan kinderen moet zijn dat de proefpersoon geconfronteerd wordt met de interpretaties van de onderzoeker betreffende het gedrag van de proefpersoon.
- 8 Het werkwoord 'zich realiseren' heeft betekenissen die voor het beschouwen van wiskundeonderwijs inspirerend zijn.

- 9 Een onderzoek heeft pas waarde voor het onderwijs als de onderzoeker naast de toetsresultaten van de leerlingen ook een interpretatie van deze resultaten met betrekking tot het gegeven onderwijs levert.
- 10 Wiskundige eigenschappen, zoals één-één-correspondenties, de commutativiteit van de optelling, het hoeveelheidsgetal, prioriteitsregels voor de hoofdbewerkingen, vormen een bron voor het ontwerpen van conflict-situaties binnen het rekenonderwijs die de kinderen de mogelijkheid geven deze eigenschappen zelf te ontdekken.
- 11 De neiging in het onderwijs om de verscheidenheid aan rekenmachines te negeren, degradeert de rekenmachine tot een hulpmiddel van mechanistisch rekenen.
- 12 Verdunnen van een gif tot een homeopatisch geneesmiddel heeft volgens het klassieke idee van potentiëren niets te maken met de verhouding tussen gif en draagstof, maar alles met hoe en hoeveel keer de verdunning geschud wordt. Het zou daarom van meer klassiek inzicht getuigen als homeopatische geneesmiddelen niet met een verdunningsverhouding, zoals D6 of D12 worden geëtiketteerd, maar met schudpatronen en het aantal keren dat de verdunning geschud is.

De resultaten (zie fig. 10.15):

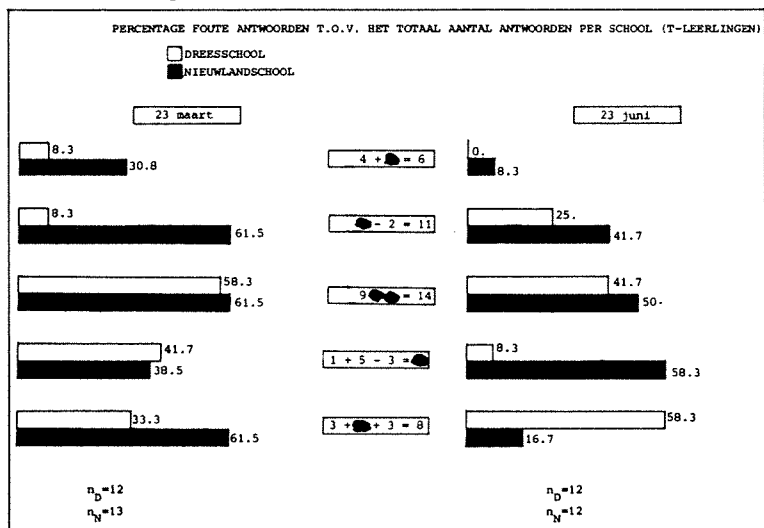


fig. 10.15 vlekkenommen

Opvallend zijn de resultaten op de sommen $1 + 5 - 3 = .$ en $3 + . + 3 = 8$.

Op 23/6 werd op de N de opgave $1 + 5 - 3 = .$ slechter gemaakt, dan op de D en op 23/3 het geval was.

Op 23/6 werd op de D de opgave $3 + . + 3 = 8$ slechter gemaakt dan op de N en op 23/3 het geval was.

Het onderwijs is hiervan de oorzaak.

Op 23/3 ontstonden de fouten in $1 + 5 - 3 = .$ en $3 + . + 3 = 8$ vooral doordat de D- en de N-kinderen slechts een onderdeel van de sommen bekeken en de oplossing van dat gedeelte niet gebruikten om de gehele som op te lossen.

De opgave $3 + . + 3 = 8$ werd op 23/3 door meer D-kinderen goed beantwoord dan door N-kinderen. Het succesvol toepassen van centrumsommen was daarvan de oorzaak ($3 \times 3 = 9$, $2 \times 3 = 6$, en dergelijke).

Maar daarna zijn in het D-onderwijs voornamelijk slietsommen aan de orde gekomen. Daardoor werd $1 + 5 - 3 = .$ moeiteloos opgelost op 23/6, maar werd $3 + . + 3 = 8$ slechter gemaakt dan in maart.

Het N-onderwijs legde van maart tot juni het accent juist op centrumsommen met tweetermen. Dit verklaart waarom $1 + 5 - 3 = .$ slecht en $3 + . + 3 = 8$ goed werden gemaakt in juni.

Conclusie

Op beide scholen is in de periode van maart tot juni te eenzijdig geoefend op één bepaald type sommen. In de D op pijlslietsommen en in de N op rijtjes tweetermen.

10.4.8 Complexe stipsommen in de is-taal en in de pijlentaal

Op 21/3 gaven we de T-leerlingen de volgende complexe stipsommen :

$$5 + 3 = 10 - . \quad 4 + . = 9 - 4$$

We lazen de som voor: '5 erbij 3 is 10 min stip' en vroegen welk getal erop de stip moest staan.

Vooraf aan deze stipsommen gaven we de D-kinderen twee pijlensommen die isomorf waren met de bovengenoemde.

Zie fig. 10.16 voor de aantallen leerlingen die de pijlenstipsommen en/of de complexe stipsommen goed of fout beantwoordden.

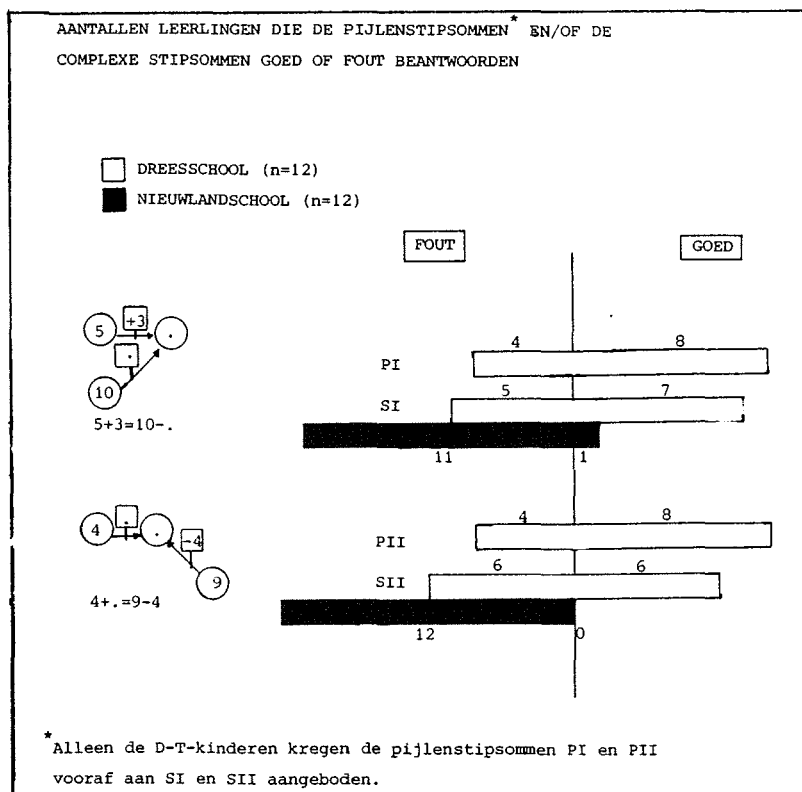


fig. 10.16 stipsommen en pijlenstipsommen

De pijlensommen werden zonder hulp via de autobuscontext door acht van de twaalf D-kinderen direct opgelost. De andere vier kinderen losten ze ook op, maar hadden hulp nodig.

De complexe stipsommen werden door tenminste 50% van de D-kinderen opgelost, omdat het verband tussen de stipsommen en de pijlensommen door ons werd gelegd.

Door de meeste N-kinderen werden de complexe stipsommen 'verbeterd tot' of 'vervangen door' een som, die slechts een onderdeel vormde van de complexe stipsom, maar die als som met hun huidige rekenen goed overeenkwam (zie fig. 10.17).

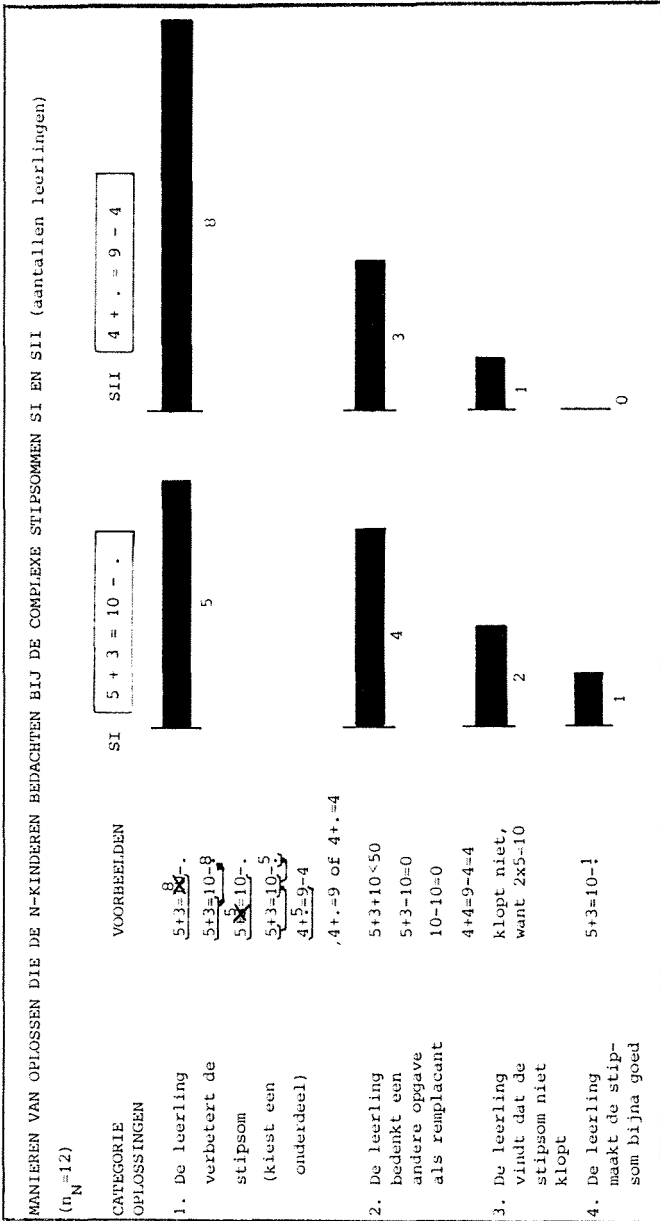


fig. 10.17 oplossingsstrategieën

Veel N-kinderen bedachten een plaatsvervangende som, die echter in geen van de gevallen de door de auteur beoogde oplossing was. Men kan dus de kale complexe stipsommen in het onderwijs gebruiken om eigen produkties uit te lokken, die wel overeenstemmen met het huidige rekenen, maar niet met de bedoeling van de complexe stipsom. Op 1/7 legden we de T-kinderen vier complexe stip-en vleksommen in de is-taal voor. Een week later (op 7/7) gaven we alleen de D-leerlingen vier complexe pijlenstipsommen die isomorf waren met de complexe stipsommen in de is-taal. Fig. 10.18 toont de resultaten.

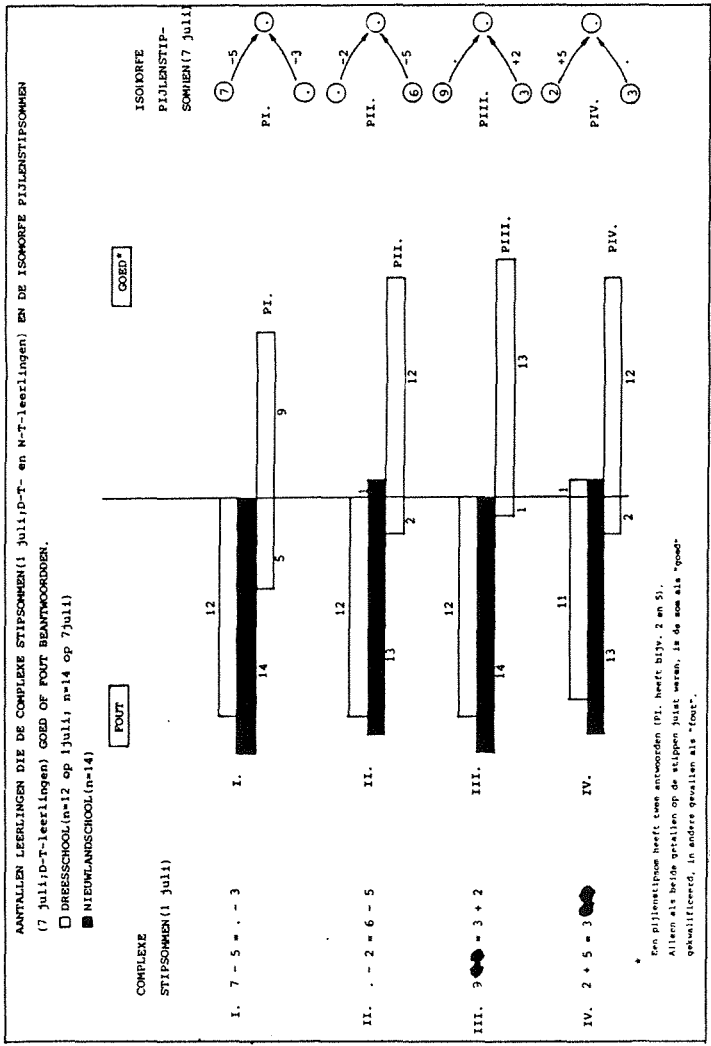


fig. 10.18 complexe stipsommen en pijlenstipsommen

De vier stip- en vleksommen in de is-taal werden ongeacht het gevolgde onderwijs aan het einde van het leerjaar door vrijwel alle leerlingen op de D of op de N fout gemaakt. Maar vrijwel alle hiermee isomorfe pijlensommen werden door het overgrote deel van de D-kinderen correct uitgevoerd.

10.5 Samenvattende conclusies

We signaleerden de volgende verschillen tussen D- en N-kinderen ten aanzien van de algemene rekenvaardigheden:

**tellen in tienvouden en afzien van het natuurlijke tellen*

In de loop van het jaar boette het natuurlijke tellen bij de D-kinderen sterk in ten gunste van het tellen in tienvouden en het structureren.

Bij de N-kinderen handhaafde zich het natuurlijke tellen. Wel werd het structureren door steeds meer N-kinderen gebruikt.

De verschillen ontstonden, omdat de betreffende rekenmethoden op de respectievelijke activiteiten gericht waren.

**getallen onder de 20 kennen*

In de getallendicties werden in de getallen boven de 10 door meer N-leerlingen fouten gemaakt dan door D-kinderen.

Aan het begin van het schooljaar (31/8) werd gevraagd om een getal te kiezen en dat op te schrijven.

11.1% van de N-kinderen koos een getal dat groter was dan 10. Drie maanden later was dit nog slechts 3.8% van de kinderen. Voor de D golden de percentages resp. 8.3 en 13%.

N-kinderen kozen getallen en hoeveelheden die gemiddeld kleiner waren dan die welke de D-kinderen gebruikten. En dat bleef zo gedurende het schooljaar.

Het onderwijs was daaraan debet. De late invoering van de getallen boven de 10 op de N was merkbaar in de getallendicties en in het tellen van de N-kinderen.

**sommen onder de 10 kennen*

N-kinderen hadden bij het cijferen onder de tien gemiddeld minder rekentijd nodig dan de D-kinderen. Ze rekenden dus sneller dan de D-kinderen. Maar ze maakten gemiddeld meer fouten.

**oefenen van typen stipsommen*

Het aantal gewone stipsommen dat op de N werd geoefend was twee keer zoveel als op de D. Maar de resultaten die de N-kinderen behaalden op dit type stipsom waren niet beter dan die van de D-kinderen.

Anderzijds: de omgekeerde stipsom werd niet op de D aan de orde gesteld, maar werd wel op de N geoefend. De resultaten op de N waren op dit type stipsom dan ook aanzienlijk beter dan op de D.

Langdurig oefenen op één type opgaven (op slietsommen in de D en op rijtjes tweetermen in de N) bleek ten koste te gaan van andere typen opgaven (van respectievelijk tweetermen in de D en lange slietsommen in de N).

**complexe stipsommen*

Complexe stipsommen in de is-taal lokten bij bijna alle kinderen zowel op de D als op de N plaatsvervangende sommen uit, die op hun beurt wel werden opgelost, maar die alle van de bedoelde oplossing afweken. Complexe stipsommen in de is-taal werden dus door geen kind naar behoren opgelost.

Maar aangeboden in de vorm van autobuspijlen werden dezelfde sommen door vrijwel ieder op de D goed gemaakt.

Conclusie

We concluderen voor wat de algemene rekenvaardigheden betreft, dat de kinderen van de D zeker niet slechter waren gedurende het gehele schooljaar dan de kinderen van de N.

Oefening in typen sommen is nodig, maar een overmaat geeft geen verbetering in resultaten en schaadt andere typen.

Over de stipsommen melden we het volgende: als we ervoor willen zorgen, dat de kinderen begrijpen wat er met complexe stipsommen bedoeld wordt, moeten die sommen via de pijlentaal gekoppeld blijven aan contexten. Tenzij men kale complexe stipsommen in het onderwijs wil gebruiken om eigen produkties uit te lokken.

10.6 Noot

- (1) Sommige onderzoekers menen, dat het omkeren van een stipsom (bijvoorbeeld : $1 = . - 2$ in plaats van $. - 2 = 1$) van weinig invloed is (De Corte & Verschaffel, 1980) of weinig invloed behoort te hebben (Van Erp, 1983). Anderen (Linder, Erlwanger, Koomen) stellen dat de omkering grote problemen schept. In nauwkeurige interviews zagen wij, dat dit laatste het geval is (zie de bijlage over stipsommen), maar dat dit ook afhangt van het gevolgde onderwijs. Vaak stimuleerden de omgekeerde stipsommen tot het bedenken van aanverwante directe sommen. Deze sommen werden dan als vervanger voor de omgekeerde stipsom genomen. Ook werden de omgekeerde stipsommen door sommige kinderen niet vergelijkenderwijs (linker- en rechterlid van de vergelijking), maar stapsgewijs (sequentieel) opgelost: in gedeelten; ook dit waren zinvolle eigen produkties van kinderen.

11 Conclusies en aanbevelingen

11.1 Inleiding

In hoofdstuk 3 hebben we in elf punten onze visie gegeven over controverse kwesties bij het leren rekenen. In hoofdstuk 4 is die visie gerealiseerd in een prototypische onderwijsleergang die op vijf onderdelen van het traditionele rekenonderwijs afwijkt.

In dit hoofdstuk staven we onze standpunten over het leren rekenen en over het realistisch rekenonderwijs met resultaten uit het vergelijkend onderzoek dat in de hoofdstukken 7 tot en met 10 is beschreven.

11.2 Onze leertheoretische opvattingen getoetst

Onze opvattingen over het leren rekenen behelzen elf standpunten die we in drie groepen samennemen.

11.2.1 *Leren met contexten*

1. Het is voor het leren rekenen van belang om contexten uit modellen en noties van kinderen te laten bestaan. Dit blijkt uit het feit, dat er slechts één dag nodig is om het optellen en aftrekken aan te leren met gespeelde autobussituaties. Deze situaties sluiten aan bij hetgeen de kinderen al weten, in tegenstelling met het traditionele rekenmateriaal waarmee de kinderen eerst zeven weken alleen optellingen moeten leren alvorens met aftrekkingen te beginnen. Ook uit het feit, dat de toneelstukjes zeker drie tot vijf maanden in de herinnering blijven, kunnen we concluderen, dat de contexten waarin de noties zijn vertegenwoordigd een grote rol spelen in het vlot leren rekenen, terwijl daarentegen zes weken van voorbereiding nodig zijn om de N-kinderen zelfstandig opgaven met de rekenkist te laten maken.
2. Misvattingen van leerlingen kunnen gebruikt worden om relaties aan het licht te brengen waarvan de kinderen zich nog niet bewust zijn.
De pijlenfouten zijn er een voorbeeld van. De oorzaak van veel van die fouten is, dat kinderen de passagiersbestanden en de in- en uitstappende mensen van elkaar isoleren. Zo ontstaan de operatorfout, de haltesom en de nabestandfout. De fouten treden op, zodra men overgaat van het gespeelde toneelstuk naar het noteren van het gebeuren in kale pijlenslierten. Door de fouten halen de kinderen zich de situatie weer voor de geest, worden ze zich de verbanden tussen inzittenden en in- en uitstappenden bewust en doorbreken ze daarmee de isolatie van die collecties.

Ook conflictsituaties die we in de toetsgesprekken aan de kinderen voorleggen, werken door de meerdere oplossingen die mogelijk zijn, verhelderend op de gebruikte rekenbegrippen. Men kan blijkbaar van zijn fouten leren.

3. Bij het leren rekenen gaat het om structuren passend te krijgen met hetgeen de leerling al weet. Het gaat om kennis die voor kinderen zinvol is, dat wil zeggen die past binnen een bepaalde context. Dat dit invloed heeft op het leren rekenen, blijkt uit het volgende.
 - Binnen de context van de klasserekenboeken worden door de kinderen goede rekenresultaten behaald: vrijwel geen fouten, gebruik van grote getallen, toepassingen van het rekenen.
 - De prestaties in het rekentoneelspel (snel aanleren van de hoofdbewerkingen en die snel kunnen toepassen) tonen aan, dat passende, zinvolle rekenkennis van invloed is op het vlot leren rekenen.
 - Conflictsituaties (zoals bijvoorbeeld ontstaan door complexe stip-sommen) zijn aanleiding voor de kinderen om structuren passend te maken met de eigen ideeën. Ook dit is een signaal waaruit blijkt dat het rekenen zinvol moet zijn.

4. Het leren als actor (de daadwerkelijk handelende) en als observer (de beschouwende toeschouwer) worden als twee geheel verschillende typen van leren opgevat. De actor en de observer kennen de wereld anders, via andere zintuigen.

Menscontexten uitgebeeld in toneelspel maken het mogelijk om in ons onderwijs op beide manieren te leren, terwijl het illustrerende rekenmateriaal (rekenstaafjes en -plaatjes) uit het mechanistische onderwijs alleen gelegenheid geeft om te leren vanuit het standpunt van de toeschouwer.

Uit ons onderzoek blijkt, dat de kinderen sneller en uniformer op de hoofdbewerkingen zijn te richten met het toneelspel, dan met specifieke rekenstaafjes.

Het verschil tussen het leren rekenen als actor en als observer treedt vervolgens op bij de overgang van het daadwerkelijke toneelspel naar het gebruik van de kale pijlen, die meer om een toeschouwers houding vragen. De overgang gaat namelijk gepaard met andere fouten: blijkbaar moeten andere verbanden worden gezien dan in het daadwerkelijke toneelspel.

Een bijzonder feit in dit verband is, dat de stip-sommen op de D niet zo problematisch worden ervaren als op de N, omdat ze op de D daadwerkelijk worden 'gespeeld' en met de pijlentaal aan een beeldende context kunnen worden verbonden.

Kortom, er zijn gegevens die aantonen dat we het leren rekenen kunnen bespoedigen door beide typen van leren te onderscheiden en er in het onderwijs mee rekening te houden.

11.2.2 Leren met pijlentaal

5. Het leren rekenen betreft niet alleen de feitelijke ontwikkeling, dat wil zeggen de aanwezige noties, maar moet ook op de naaste ontwikkeling gericht zijn, bijvoorbeeld op het rekenmodel dat de leerling moet leren kennen. Het kale model moet dus min of meer al in de beginsituatie verborgen zijn en er moeten pogingen kunnen worden ondernomen om het te ontdoen van contextuele franje.

Uit ons onderzoek blijkt dat dit goed mogelijk is met het pijlenmodel in de autobuscontext.

Aangewakkerd door het versieren van de pijlen ontstaat in de vrije rekenkunst een soort 'handel' in verschillende betekenissen bij één en dezelfde pijlensom, zodat reeds één maand na de inleiding van de pijlentaal een losmaking optreedt van de oorspronkelijke autobusbetekenis. De pijlentaal wordt geabstraheerd, in die zin, dat hij door de kinderen op eigen initiatief kan worden toegepast in andere contexten en opgaven. De pijlentaal attendeert de kinderen bijvoorbeeld op de verborgen structuur van een ingewikkelde redactie-opgave, zodat die opgave door alle kinderen correct kan worden verwoord en door meer dan de helft van het aantal kinderen kan worden opgelost.

6. Het bovenstaande stemt overeen met één van de taalfenomenen die bij het leren rekenen van belang worden geacht: de vervaging van de oorspronkelijke betekenis van de taalsymbolen.
7. Anderzijds sluit de pijlentaal ook goed aan bij de noties van kinderen, dus bij de feitelijke ontwikkeling.

Een pijl getekend in een plaatje blijkt bij uitstek het symbool te zijn, dat kinderen aan een beweging doet denken; zonder een pijl lukt dit niet goed.

Ook het versieren van de pijlen met allerlei franje sluit aan bij de fantasierijke ideeën van kinderen. In vrije opdrachten ontwerpen ruim de helft van de D-kinderen zowel kale als versierde pijlen.

Ook later, bij moeilijkere pijlendiagrammen, zoals de eindpuntdiagrammen, sluit de pijlentaal goed aan bij de noties van kinderen: de diagrammen zijn in twee dagen aan ieder vertrouwd.

8. In de klasserekenboeken worden de leefwereld en de symbolenwereld afwisselend beklemtoond. De pijlentaal speelt daarin een essentiële rol. Ruim de helft van de D-kinderen ontwerpen zowel kale als versierde pijlenopgaven en in de is-taal worden de pijlen als betekenisgevende versieringen onder de sommen getekend. De kinderen begrijpen daarmee wat er met die sommen wordt bedoeld.

De beide rekentalen zijn gelijkwaardig in de vrije opdrachten; nu eens vertoeft de leerling via een versierde pijlensom in de leefwereld, dan weer via de is-taal of de kale pijl in de symbolenwereld

9. De kale pijlensommen blijven transparant. Zelfs na vijf maanden doet een kale pijlensliert de kinderen allereerst aan een autobusrit denken. Vroegere contexten die vervaagd zijn, worden later gemakkelijk opgeroepen met de pijlen zodat ze als toepassingen kunnen fungeren.
De pijlentaal maakt echter ook nieuwe, ingewikkelde situaties transparant. Met de pijlentaal kunnen alle D-kinderen een zeer ingewikkelde redactiesom nauwkeurig beschrijven.
Kortom, onze opvattingen over de rol van de rekentalen bij het leren rekenen zijn in de pijlentaal gerealiseerd.

11.2.3 Leren door te oefenen

10. Langdurig oefenen aan één model of type som wordt om verschillende redenen van belang geacht. We noemen er enkele: oefenen om de kinderen vertrouwd te maken met een model of type som, om te memoriseren en te automatiseren en oefenen om verbanden te tonen.
In ons onderzoek ontdekken we echter ook, dat kinderen langdurig rekenwerk gaan afraffelen, meer fouten gaan maken naarmate ze langduriger oefenen, zich vergissen in verschillende typen sommen, dat de prestaties op typen opgaven die niet in de oefeningen zijn opgenomen, verminderen en dat de kale rekenkennis niet wordt toegepast.
Langdurig oefenen van een enkel type heeft dus ook zijn schaduwzijde.
11. Tegenover het eenzijdige oefenen van één model of één type som stellen wij 'de vrije rekenkunst': het zelf bedenken en ontwerpen van rekenopgaven.
Zonder aansporing variëren de D-kinderen hun eigen produkties in vorm, type, lengte, getal en context.
Er worden niet uitsluitend eenvoudige opgaven bedacht, maar spontaan ook moeilijke opdrachten met grote getallen verzonnen. Er worden weinig tot geen fouten gemaakt, nieuwe vondsten gedaan en nieuwe combinaties ontworpen.
Het oefenen is door de vrije rekenkunst niet meer het eindonderwijs van klas 1, maar bereidt de nieuwe uitdaging voor om zelf rekenopdrachten te ontwerpen.

11.3 De onderzoeksvragen beantwoord

In hoofdstuk 7 stelden we ons de vraag:

Welke voor- en nadelen heeft het pakket Autobussen ten opzichte van het traditionele, mechanistische rekenonderwijs waarmee kinderen optellen en aftrekken wordt aangeleerd?

Welke gegevens uit ons vergelijkend onderzoek op de D en de N legitimeren de door ons ontwikkelde prototypische leergang voor het optellen en aftrekken? Onze leergang onderscheidt zich van het gebruikelijke onderwijs op zeker vijf punten. In de beantwoording van de onderzoeksvraag specificeren we naar die vijf onderwijsverschillen.

11.3.1 Beeldende contexten en/of specifiek rekenmateriaal

Wordt het optellen en aftrekken vlotter aangeleerd met dynamische, beeldende contexten dan met specifiek rekenmateriaal?

Zoals eerder is betoogd, verwerven kinderen de hoofdbewerkingen vlotter door aan te sluiten bij hun noties.

Hier volgen enkele feiten die soms, zij het in een ander verband, al eerder zijn genoemd.

- Zeven weken oefenen van optellingen met plaatjes staat tegenover één dag spelen in de autobuscontext om het optellen en aftrekken aan te leren.
- Dynamische menscontexten, zoals de autobus en de wachtkamer worden uniformer geïnterpreteerd dan speelgoedcontexten, zoals kegelen en knikkeren.
- Zes weken van voorbereiding zijn nodig om op de N de kinderen zelfstandig met de rekenstaafjes te laten werken.
- Optellen en aftrekken worden met beeldende menscontexten adequater geïntroduceerd dan met voorwerpcontexten die de vakstructuren illustreren.

11.3.2 Conflictsituaties en/of geleidelijke voortgang

- Zijn misvattingen van belang om bij het leren rekenen meer begrip te krijgen?

We verwijzen voor het antwoord op deze vraag naar 11.2 en naar de pijlenfouten.

De overgangen in de prototypische leergang van toneelspel naar pijlen-slierten en van de pijlenslierten naar pijlendiagrammen van verschillende soort zijn aanleiding tot pijlenfouten. Ze maken de relaties bewust die nog niet eerder door de kinderen gezien zijn en corrigeren daardoor bestaande misvattingen van kinderen.

- Welke onderwijssituaties ensceneren conflicten?
We noemen:
 - de overgangen in de prototypische leergang;
 - de statische beeldende contexten (bijvoorbeeld de dubbeldekker, een poppenkastsituatie), die ingericht als conflictsituaties waarin meerdere antwoorden mogelijk zijn, aanleiding zijn tot tal van eigen constructies van kinderen;
 - de complexe stipsommen die eveneens allerlei eigen produkties induceren, zoals verbeteringen van de gegeven stipsom, het kiezen van

onderdelen uit de som en het ontwerpen van een context waarin de gegeven stipsom past. De oplossingen die de kinderen vinden, zijn echter vrijwel alle fout, maar kunnen voor de kinderen aanleiding zijn zich beter op de opgave te bezinnen. Dergelijke conflictueuze onderwerpen zorgen ervoor dat de kinderen zich scherper een situatie voor ogen stellen.

- Welke gevolgen heeft daarentegen een stapsgewijze geleidelijke voortgang voor kinderen?
Men tracht op de N fouten te vermijden door stapsgewijs en geleidelijk door steeds moeilijkere typen sommen voort te gaan. De kinderen gebruiken dan echter geen getallen groter dan 20 en passen het cijferen niet toe.

11.3.3 Pijlentaal en/of is-taal

- Waarom is de versierde pijlentaal een betere introductie voor het optellen en aftrekken dan de is-taal?
Al eerder is genoemd dat in één dag het optellen en aftrekken is aangeleerd met versierde pijlen, waar men met de is-taal zeven weken voor nodig heeft. Versierde pijlen die naar contexten verwijzen, zijn bovendien in vergelijking met de is-taal op verschillende fronten voor het rekenonderwijs van belang:
 - een ingewikkelde redactie-opgave die niet met de is-taal is te omschrijven, wordt met behulp van de pijlentaal door alle D-leerlingen correct beschreven, de opgave wordt aan de hand van de pijlen door alle leerlingen nauwkeurig naverteld, geanalyseerd door 82% van de leerlingen en opgelost door 64%;
 - complexe stipsommen in de is-taal gesteld die door geen kind goed worden gemaakt, worden, aangeboden in (autobus)pijlen, door iedereen opgelost.
 - D-kinderen zijn snel (in twee dagen) vertrouwd met een nieuw pijlen-diagram (de eindpuntdiagrammen), terwijl sommen in de is-taal die daarmee isomorf zijn, voor alle D- en N-kinderen onoplosbaar blijven.
- Welke pijlenfouten worden gemaakt? Wanneer en waarom treden ze op?
Zoals eerder is opgemerkt ontstaan pijlenfouten omdat de kinderen nog niet de relaties tussen bestanden en operator genuanceerd overzien. Met name op onderwijsmomenten waarin men de manier van representeren verandert, treden die fouten op en maken ze de bedoelde relaties bewust.
Overigens is het aan te bevelen bepaalde pijlenfouten die uit strategische overwegingen gemaakt worden (de haltesom, de probeerfout, de beginfout) te accentueren, omdat ze anders verdwijnen.
- Is de prototypische onderwijsleergang een geschikte sequentie?
Deze vraag kan bevestigend worden beantwoord (zie hoofdstuk 8).
- Hoe zijn pijlentaal en is-taal op elkaar af te stemmen?

In paragraaf 11.2 is reeds aangegeven dat allerlei verschillende versieringen van een kale pijlenopgave voor verschillende beeldende betekenissen zorgen; de pijlensliert wordt onder andere met het is-teken versierd en het is-teken met een pijl, waardoor de talen gelijkwaardig worden gebruikt. In de vrije rekenkunst worden ze op elkaar toegepast. De conclusie is dat de pijlentaal een geschikt intermediair vormt tussen de noties en beeldende contexten enerzijds en de sommen in de kale is-taal en in het kale pijlenmodel anderzijds.

- Welke plaats bezetten stipsommen in het rekenen van de eersteklassers?
De stipsommen in de is-taal zijn, gezien de klasserekenboeken, zeer impopulair bij kinderen. Ze geven kinderen aanleiding tot allerlei gissingen. De omgekeerde en complexe stipsommen lokken bij bijna alle kinderen plaatsvervangende sommen uit, zowel op de D en als op de N. Deze op eigen initiatief ontworpen sommen worden op zich goed opgelost, maar alle oplossingen wijken af van wat met de stipsommen is bedoeld. Oefening met 160 omgekeerde stipsommen leidt op de N tot een beter resultaat dan op de D, waar de omgekeerde stipsommen niet aan de orde komen. Dat betere resultaat bestaat er uit, dat alle kinderen op dezelfde wijze de bedoelde uitkomst vinden.
Een ander type stipsommen, de gewone stipsommen, wordt wel op de D beoefend, maar niet zo stringent als op de N. Het aantal sommen dat op de N wordt geoefend, is twee keer zo groot als op de D. Maar de resultaten van de kinderen op de gewone stipsommen vertonen geen enkel verschil. We kunnen dus concluderen, dat de kinderen zonder enige oefening de vaardigheid om een bepaald type stipsom op te lossen niet verwerven en dat de stipsommen in dat geval slechts aanzetten tot eigen produkties blijven. Anderzijds beperkt het stringente oefenen op één type stipsom de produkties van eigen, vaak foutieve oplossingen. Maar het leidt niet tot betere resultaten in vergelijking met wat minder stringent oefenen.

11.3.4 Vrije rekenkunst en/of sommen maken

- Bestaan er verschillen in de rekenvaardigheid van D- en N-kinderen?
Ondanks het feit, dat de N-kinderen in hun rekentaken gemiddeld ruim drie keer zoveel sommen maken als de D-leerlingen, zijn er geen opvallende verschillen in de algemene cijfervaardigheden tussen beide groepen. De N-kinderen zijn gemiddeld iets sneller in het cijferen dan de D-kinderen, maar daar staat tegenover dat het percentage fouten op de D gemiddeld over de leerlingen kleiner is dan op de N en dat de D-kinderen eerder en langduriger grotere getallen gebruiken dan de N-kinderen. De getallenlijn is op de D vroeger en uitgebreider ingevoerd dan op de N.
We stellen vast dat de D-leerlingen aan het einde van het leerjaar niet onderdoen in cijfervaardigheden en dat het maken van drie keer zoveel sommen door de N-kinderen geen betere resultaten oplevert.

- Welke consequenties heeft het eenzijdige oefenen op typen kale sommen?
 We constateren, dat een langdurige nadruk op slechts één type kale sommen ten koste gaat van of verwarring schept met andere typen opgaven. Dit is het geval in elke onderwijsperiode op zowel de D, als de N.
 Op de D worden pijlenstipsommen vòòr de inleiding van gewone pijlen-sommen eerst goed gemaakt en daarna fout; nadruk op sliertsommen later in het jaar zorgen ervoor dat vervolgens structuursommen slecht worden gemaakt.
 Op de N zorgt het onderwijs in louter optellingen tijdens de introductie-periode voor verwarring met het aftrekken en aan het einde van het school-jaar worden door het eenzijdige oefenen op talrijke tweetermen de sliert-sommen fout gemaakt.
 Eenzijdige en langdurige toepassing van het cijferen op één type som leidt tot extra fouten.
- Waarom is de vrije rekenkunst te verkiezen als een gedeeltelijke vervanging en zinvolle voortzetting van het oefenend cijferen?
 Er zijn daarvoor verschillende redenen aan te voeren:
 - opmerkelijk is de impliciete kritiek die de N-kinderen vertolken op het feit, dat ze zoveel oefensommen in de laatste drie maanden maken (gemiddeld ruim 2000 kale sommen). In hun klasserekenboek voor andere kinderen is namelijk het aantal oefensommen niet groter dan het aantal oefensommen dat de D-leerlingen lieten maken;
 - bij de vrije rekenkunst worden nieuwe symboolcombinaties door de D-kinderen ontworpen die nog niet eerder zijn bedacht. Hiermee breken de kinderen door het cordon van aangeleerde rekenkennis heen en maken ze waar, hetgeen wij met 'vrije' rekenkunst bedoelen: de vrijheid om op eigen initiatief uit vaste structuren (zoals sommentypen) te breken via eigen vaak kunstzinnige produkties;
 - bij de vrije produktie van opgaven voor het klasserekenboek zijn op de D verschillende typen kale pijlendiagrammen ontwikkeld (slierten, cykels, antislierten en anticykels), die in lengte variëren;
 - binnen het D-onderwijs is de vrije rekenkunst een vervolg op het cijferend oefenen;
 - maar het meest opvallende is wel, dat er vrijwel geen fouten gemaakt worden in de opgaven van zowel het klasserekenboek van de D, als van de N.

We concluderen: het formele rekenen moet niet als eindonderwijs worden beschouwd, maar kan gedeeltelijk worden vervangen door en voortgezet in de vrije rekenkunst.

11.3.5 Toepassen - ja of nee

Met het toepassen van kale rekenkennis bedoelen wij dat rekening wordt gehouden met de specifieke eigenaardigheden van het toepassingsgebied.

- Hoe is het toepassen van rekenkennis aan te leren en met welke effecten?
Het toepassen van kale sommen in beeldende contexten ontstaat niet spontaan. De N-kinderen passen bijvoorbeeld hun rekenkennis opgedaan met de rekenstaafjes niet vanzelf toe op een autobusopgave. Het toepassen moet blijkbaar in het onderwijs worden geleerd of getoond.
Op de D worden rekenonderwerpen en -contexten uit het begin van het schooljaar later herhaald. Dat die oude onderwerpen ook terugkeren in het klasserekenboek van de D-kinderen, is tekenend voor de geschiktheid van deze herhalingen.

Conclusie

Het toepassen moet niet alleen worden geleerd, maar ook regelmatig worden herhaald met vertrouwde contexten en zou daarom net als de vrije rekenkunst, het rekenonderwijs moeten larderen.

- Hoe is het redenerend rekenen te effectueren?
Een andere vorm van toepassen van het cijferen is het redenerend rekenen. Het vindt plaats bij zowel de pijlendiagrammen, als bij stipsommen in de is-taal, zij het op verschillende wijzen.

Reeds een maand na de inleiding op de D worden de pijlen, los van de oorspronkelijke betekenis gebruikt als kale pijlendiagrammen, ofschoon altijd op de oorspronkelijke autobusbetekenis kan worden teruggevallen.

Er worden door de kinderen spontaan 'goede' misvattingen en fouten gemaakt, zoals de 'haltesom' door bij een halte het voorbestand uit en het nabestand in te laten stappen, of zoals de probeerfout: 'om maar eens een getal uit te proberen' en de beginfout: 'om maar eens ergens in het diagram van start te gaan'. Dergelijke fouten zijn 'goede' fouten, omdat ze uit strategische overwegingen ontstaan.

Het is dan ook verrassend te ontdekken, dat het D-onderwijs deze fouten aan het einde van het jaar dreigt uit te bannen.

Door tijdens de oefenperiode te veel nadruk op het cijferen met slietsommen te leggen, verdwijnt de haltesom en wordt de probeerfout vervangen door ergens in het diagram met een extra fout de probeerfout te compenseren.

Het eenzijdige oefenen op slietsommen laat ook hier zijn sporen achter.

Het toepassen van het cijferen op verschillende pijlendiagrammen en verschillende sommen in de is-taal met een accent op strategieën moet in de laatste maanden niet worden vergeten.

11.3.6 Samenvattende conclusie

Algemeen kunnen we concluderen, dat de prototypische onderwijsleergang op alle vijf punten van verschil met het traditionele onderwijs betere effecten op het leren rekenen heeft.

De gekozen volgorde in de pijlensommen binnen de onderwijsleergang (dat wil zeggen: van de autobuspijlen in de introductieperiode, via de gewone pijlen- en pijlenstipsommen in de oefenperiode naar de pijlendiagrammen in het redenerend rekenen) blijkt werkbaar te zijn. De introductie verloopt snel en de gespeelde contexten blijven goed in de herinnering zodat ze later als toepassingsgebied kunnen fungeren. De overgangsmomenten in het onderwijs (tussen introducerend, oefenend en redenerend rekenen) kunnen als conflictsituaties worden gebruikt om de kinderen de relaties bewust te maken. De overgang van de pijlentaal naar de is-taal is geen probleem meer. De pijlendiagrammen kunnen ingewikkelde situaties verduidelijken en vormen een oefenmodel dat rijk is aan momenten van strategisch leren. De vrije rekenkunst leidt niet tot een vermindering van de rekenvaardigheid en blijkt geschikt als vervolg op elke cijferoefening.

11.4 Slotwoord

Tot slot stellen we ons de vraag wat dit onderzoeksverslag zou kunnen betekenen voor het onderwijsonderzoek, de onderwijsleertheorie en de onderwijsontwikkeling?

Voor het onderwijsonderzoek zijn, geïnspireerd door het onderwijs, nieuwe ideeën over onderzoek ontstaan. We noemen: de methode van het wederzijdse observeren, de onderwijsbeschrijvingen als directe onderzoeksresultaten, de proefpersoon als waarnemer, de vrije produktie als criteriummaat, onderzoek vanuit het standpunt van de onderwijzeres voor de klas.

Kortom, in ons onderzoek is de onderwijspraktijk een niet aflatende bron van nieuwe onderzoeksmethoden en -technieken gebleken.

Centraal in onze onderwijsleertheorie staat het 'zich realiseren'. Aan deze activiteit van kinderen is een individuele en een sociale component te onderscheiden.

Het (re-)construeren van noties, gedachten, voorstellingen, ervaringen en fantasieën door elke leerling afzonderlijk ondernomen, is in eerste instantie wat we met 'zich realiseren' bedoelen. Maar het heeft bovendien de betekenis dat een kind zich een gedachtenconstructie eigen maakt, een idee bij uitstek tot eigen bezit rekent (eigen constructies).

Anderzijds leiden onderlinge confrontaties van deze sterk individueel getinte gedachten ertoe dat kinderen zich nauwkeuriger hun eigen ideeën realiseren. Deze interacties luiden vervolgens een algemene overeenstemming in over wat er in een betreffende context door alle kinderen in ogenschouw moet worden genomen. Die overeenstemming betreft dan een eerste intersubjectieve aanzet tot een mentaal object of een mentale activiteit. Hiermee is een onderwijsleerweg geschetst vanaf subjectieve noties naar mentale objecten.

Het ontwikkelwerk aan de prototypische onderwijsleergang is met dit onderzoeksverslag niet definitief afgesloten. Integendeel. Het verslag toont dat het werk, dat in 1974 werd gestart, nadien allerlei nieuwe vervolgen heeft gekregen.

Nieuwe didactische werkvormen zijn tijdens het onderzoek bedacht en onderzocht voor het praktische onderwijs in de klas. We noemen: het reken-toneelspel, de overgangen binnen de pijlentaal en naar het is-teken, het versieren van symbolen als centraal thema, het idee van de vrije rekenkunst, de klasserekenboeken, rekenspelenboeken voor kleuterschool en klas 1, een door kinderen te ontwerpen autobusboek.

Bij al deze ontwikkelingen is het Leitmotiv dat scheppende activiteiten van kinderen een vakinhoudelijke en vakdidactische erkenning vinden en een plaats krijgen in het rekenonderwijs.

12 Summary

One of the projects undertaken in the 1970s by IOWO (the Institute for the Development of Mathematics Education) was an attempt at developing a new arithmetic/mathematics curriculum for the primary school (K - 6), called Wiskobas (Mathematics in Primary Education). For grade 1 its prototype included an initiating course of addition and subtraction where the package "Buses" played a central part.

Realistic and mechanistic views on learning and teaching arithmetic

During the developmental activities at the Dr.W.Dreesschool (the Wiskobas design school in Arnhem) certain views emerged on how children are learning and how instruction can take advantage on it. These so-called "realistic" views differed globally on three points from the ideas prevailing in traditional mechanistic instruction. The three points, defined by a reinterpretation of what is learning, were related to the use of contexts and of arithmetical languages, and to modes of training.

Contexts

It is a principle of realistic instruction in general, and in particular with regard to arithmetic, to have children "realising" their own ideas. Following their own ideas, experiences, and imaginations children create visual or mental situations matching the arithmetical tasks they are given.

In the setting of 'Buses' this means plays, scenes, and stories about people who are boarding and getting off buses, in which the learner performs one time as an actor or story-teller and another time as a spectator or listener - a variety of ways of learning.

Mechanistic instruction of arithmetic makes use of drawings and objects, as are Cuisenaire rods, in order to imitate the arithmetical operations. One agrees on certain actions - so-called arithmetical actions - with the rods, whereas no attention is paid to the learner's factual arithmetical knowledge. The protracted process of training to master the arithmetic operations goes on along a road of stepwise increased difficulties, where mistakes are anxiously tried to be circumvented. This graduality is one more characteristic that distinguishes mechanistic from realistic instruction, where learners "realise" their own ideas in clashing with those of others or with unexpected mathematical facts, which is organised to happen in dramatised confrontations and conflicts.

Arithmetical languages

The second point on which realistic and mechanistic instruction differ from each other is languages. In our approach the main part is played by the bus-arrow language. An important feature of this language is decorating arrows by little wheels and stop posts, which are to refer to the bus context. This feature invites the children to apply decorating and decorated arrows in other contexts, and as a consequence, to generalize the meaning of the arrows. Even the equality sign can serve as an ornament, which allows switching to and fro between tasks in the bus-arrow and in the traditional arithmetic language (that of the equality sign).

Mechanistic instruction has numbers and rods precisely tuned to each other in order to accentuate their accordance. There are even plus- and minus-signs placed on cards between the rods. In order to be generalised, the only figurative context (rods) present has entirely to be abandoned.

Modes of training

By long series of mechanical exercises with a great diversity of problems one tries to strengthen the bonds of similarity between numbers and rods, in order afterwards to teach arithmetic rules, and to get knowledge and abilities memorised and automatised. The aim of training is bare arithmetic, while in realistic instruction its scope is much broader, as the learner is expected to experience the various modes of training as meaningful as such. They include among others the learners' own productions in behalf of their peers, applications of arithmetic in contexts of an earlier date, and arithmetical reasoning in arrow system puzzles.

Four research projects

In order to check whether the course developed for adding and subtracting justified one's expectations, the package "Buses" has in the course of time been subjected to four research projects.

- The Cito-Iowo-project was a formalistic research based on what external analysts had come to believe to represent the objectives of "Buses". It didn't work out as well as expected: the report didn't include any details on how the children arrived at their solutions, target objectives were interpreted as minimum objectives, and the previous instruction was not taken into account.
- In the next project "Evaluation of instruction at the Dreesschool" the teachers of the design school got the floor. It became clear that the package "Buses" had been implemented in a variety of ways.

New supplements were thought up, certain subjects were rejected, others were emphasised or modified. Teachers could not agree on the kind of instruction that is required to decently implement the arithmetical concepts.

- In the project 'Hypothesis-forming research' it was the turn of the children to display their ideas on buses. Here the method of mutual observation was initiated and applied: The researcher gave the subject all details of the report he was writing down during the observation; so while being dealt with as a research subject one discovered that the text as it was written concerned oneself, and thus started meddling into the research itself, as it were as a co-researcher. It appeared that young children don't think the way adults do about buses and in other contexts. Even on counting and numbers they nourished quite different ideas.
- The fourth project, which is the mainstay of the present thesis, is a 'Comparative research' between realistic arithmetic instruction as provided at the Dreesschool, and instruction at another school (the Nieuwlandschool at Dieren) with a traditional mechanistic curriculum. The project was meant to project the two schools upon each other: on which points did they distinguish themselves mutually, and was the one better than the other?

Regularly during one year test talks of ten minutes were carried on with each pupil, while using the method of mutual observation. The detailed day by day registration of the instruction as actually administered at both schools, including data on the time, spent on instruction and preparation, and numbers of arithmetical tasks set, made it possible to explain the subjects' performances by means of the instruction they had received.

The package 'Buses' which was used only at the Dreesschool was the proper target of the research. Three criterium measures were applied to test all subjects: the general arithmetical abilities, indirect sums, and the so-called own productions.

Conclusions and recommendations on behalf of arithmetic instruction

The detailed picture of the factual instruction and the learning performances at both schools made it possible to indicate a number of preconditions for higher quality instruction, which in turn regarded the used contexts, arithmetical languages, and modes of training.

Contexts

Plays and stories around buses and other people-and-animals-related contexts resulted in a convincingly faster process of learning the operations of adding and subtracting than the traditional mechanistic approach by means of illustrating objects.

Arithmetical languages

Wherever context tasks are set, the bus-arrow language can create awareness with regard to such situations as cannot possibly be described in the equality sign language. The latter applies only in a small minority of contexts. The multi-interpretability of the bare arrow, however, if concretised by decorations, favoured both generalisation and applicability. Decoration by means of the equality sign was an intermediary between appealing contexts and the equality language.

Modes of training

Applying arithmetic language in appealing contexts is something that has to be learned. It does not develop automatically as apparently presupposed in mechanistic instruction. Moreover the number of bare arithmetic sums dealt with in the last three months of mechanistic instruction can drastically be reduced in favour of, for instance, applications. A meaningful frame for children's own production was essential as a condition for correct practice. In the role play of authoring textbooks, children made less mistakes than in the more formal tasks.

In general we may conclude that the subject area oriented innovation as designed by realistic arithmetic instruction has rightly and successfully appealed to young children's playful faculties.

13 Literatuur

- Anderson, J.R.: 'Acquisition of cognitive skill', *Psychological Review* 89 (1982), 369 – 406.
- Anderson, J.R.: *The architecture of cognition*, Cambridge 1983.
- Balacheff, N.: *Elements about french research in didactics of mathematics*, Grenoble 1985.
- Balacheff, N.: 'Experimental Study of pupils' treatment of refutations in a geometrical context', in *Proceedings of the Ninth International Conference for the PME*, Culemborg 1985, pp. 123 – 229.
- Baroody, A.J. and H.P. Ginsburg: *The effects of instruction on children's understanding of the 'equals' sign*, American Educational Research Association, New York 1982.
- Bauersfeld, H.: 'Research related to the mathematical learning process', in Athen, H. and H. Kunle, *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education*, Karlsruhe 1976, pp. 231 – 245.
- Bauersfeld, H.: 'Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens', in *Lernen und Lehren von Mathematik*, Köln 1983, pp. 1 – 57.
- Bednarez, N. and M. Belanger: 'Problems of representation of an operation in elementary school arithmetic', in *Proceedings of the Seventh International Conference for the PME*, Israël 1983, pp. 188 – 192.
- Bell, A.: 'Teaching Theories in Mathematics', in *Proceedings of the Sixth International Conference for the PME*, Antwerpen 1982, pp. 207 – 213.
- Bell, A.: 'Diagnostic teaching of additive and multiplicative problems', in *Proceedings of the Seventh International Conference for the PME*, Israël 1983, pp. 205 – 210.
- Bereiter, C.: 'Towards a solution of the learning paradox', *Review of Educational Research* 55 (1985), 201 – 226.
- Bessot, A. and C. Comiti: 'Etude du fonctionnement de certaines propriétés de la suite des nombres dans le domaine numérique [1,30] chez des élèves de fin de première année de l'école obligatoire en France', in *Proceedings of the Fifth International Conference for the PME*, Grenoble 1981, pp. 31 – 38.
- Bloemkolk, M.R.M. en K.B. Koster: *Aanvankelijke rekenopgaven bij tweede en derde klassers: moeilijkheidsgraad en oplossingsstrategieën*, Groningen 1984.
- Brink, F.J. van den: 'Bijna noemen', *Wiskobasbulletin* 3 (1973), 129 – 131.
- Brink, F.J. van den: 'Laat ze voor je uit lopen', *Wiskobasbulletin* 3 (1973), 229 – 233.
- Brink, F.J. van den: 'Redactiesommen', *Wiskobasbulletin* 4 (1974), 129 – 130.
- Brink, F.J. van den: *Schoolwerkplan Dreesschool Klas 1. Met een analyse op principes van het wiskundeonderwijs in de onderbouw van de Dreesschool*, Utrecht 1978.

- Brink, F.J. van den: 'Wiskundige wereldoriëntatie', *Wiskobasbulletin* 9 (1980), 106 – 109.
- Brink, F.J. van den: 'Mutual observation', *For the Learning of Mathematics* 2 (1981), 29 – 30.
- Brink, F.J. van den: 'Zo zijn onze manieren', *Willem Bartjens* 1 (1981), 14 – 20.
- Brink, F.J. van den: *Naar de basisschool (vormen van integratie tussen kleuterschool en onderwijs van de lagere school)*, Amsterdam 1981.
- Brink, F.J. van den: 'Intensiever observeren van jonge kinderen', *Het Jonge Kind* 8 (1981), 228 – 229.
- Brink, F.J. van den: 'Kinderlijke denkbeelden over substitueren ('In de trein ben ik 7')', *Het Jonge Kind* 9 (1981), 68 – 72.
- Brink, F.J. van den: 'Rekentoneelspelen, een nieuwe suggestie voor het aanvankelijk rekenonderwijs', *Het Jonge Kind* 11 (1983), 101–103.
- Brink, F.J. van den: 'Acoustic counting and quantity counting', *For the Learning of Mathematics* 4 (1984), 2 – 13.
- Brink, F.J. van den: 'Is gelijk tekens', *Willem Bartjens* 2 (1983), 103 – 109.
- Brink, F.J. van den: 'Is gelijk tekens (2)', *Willem Bartjens* 3 (1984), 176 – 180.
- Brink, F.J. van den: 'Kritiek op het rekenen van een rekenautoriteit', *Willem Bartjens* 4 (1984), 212 – 215.
- Brink, F.J. van den: 'Numbers in contextual frameworks', *Educational Studies in Mathematics* 15 (1984), 239 – 257.
- Brink, F.J. van den: 'Kinderen, knikkeren en knikkergetallen', *Het Jonge Kind* 12 (1985), 197 – 200.
- Brink, F.J. van den, I. Fredriks en J. Louws: *Tel- en taalverhaal*, Purmerend 1985.
- Brink, F.J. van den: 'Intuïtieve notities van spelende kinderen en wiskunde in realistische contexten', in *Wiskunde: werkelijk spel*, Leiden 1985.
- Brink, F.J. van den: 'Classical arithmetic books', in *Proceedings of the Seventh Annual Meeting PME – NA*, Columbus 1985, pp. 282 – 286.
- Brink, F.J. van den: 'Staging arithmetic: a suggestion for the start of mathematics instruction', *For the Learning of Mathematics* 5 (1985), 35 – 37.
- Brink, F.J. van den: 'Kinderen als rekenboekauteurs', *Het Jonge Kind* 13 (1986), 258 – 260.
- Brink, F.J. van den: 'Calculators and realistic arithmetic instruction developing the calculating automaton', in *Proceedings of the Tenth International Conference for the PME*, London 1986, pp. 475 – 480.
- Brink, F.J. van den: 'Children as arithmetic book authors', *For the Learning of Mathematics* 7 (1987), 44 – 47.
- Brinke, S. ten: 'De waarde van Lmbinf voor onderzoek en praktijk', in Woerd, E. te en M. Simons (eds.), *Verslag van de conferentie Computers in het onderwijs, stroomversnelling of waterval?*, Utrecht 1986, pp. 154 – 160.

- Brownell, W.A.: 'Psychological considerations in the learning and teaching of arithmetic', in Reeve, W.D. (ed.), *Teaching of arithmetic. The Tenth Yearbook of the NCTM*, Columbia 1935.
- Byers, V. and S. Erlwanger: 'Content and form in mathematics', *Educational Studies in Mathematics* 15 (1984), 259 – 275.
- Carpenter, T.P., J. Hiebert and J.M. Moser: 'Problem structure and first-grade-children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems', *Journal for Research in Mathematics Education* 12 (1981), 27 – 39.
- Carpenter, T.P. and J.M. Moser: 'Acquisition of addition and subtraction concepts', *Journal for Research in Mathematics Education* 15 (1984), 179 – 202.
- Carver, R.P.: 'The case against statistical significance testing', *Harvard Educational Review* 48 (1978), 378 – 399.
- Cobb, P. and E. von Glasersfeld: 'Piaget's scheme and constructivism', *Genetic Epistemology* 13 (1984), 9 – 15.
- Cobb, P.: 'Two children's anticipations, beliefs and motivations', *Educational Studies in Mathematics* 16 (1985), 111 – 126.
- Cobb, P.: 'An investigation into the sensory-motor and conceptual origins of the basic addition facts', in *Proceedings of the Tenth International Conference for the PME*, London 1986, pp. 141 – 146.
- Cobb, P.: 'Information-processing psychology and mathematics education – a constructivist perspective', *Journal of mathematical behavior* 6 (1987), 3 – 40.
- Corte, E. de en L. Verschaffel: 'Kwalitatief-psychologische analyse van het oplossen van aanvankelijke rekenopgaven bij 6 à 8- jarige basisschoolleerlingen', *Pedagogische Studiën* 57 (1980), 383 – 396.
- Corte, E. de en L. Verschaffel: 'Drie keer plus en min', *Willem Bartjens* 3 (1983), 106 – 114.
- Corte, E. de, J. Lowyck en L. Verschaffel: 'Zelfrapportering als techniek bij de studie van onderwijsleerprocessen: een poging tot verheldering', *Pedagogische Studiën* 63 (1986), 506 – 514.
- Creemers, B.P.M. en W.T.J.G. Hoebe: 'Curricula en de verbetering van het onderwijs', in *SLO jubileumboek*, Enschede 1986.
- Davis, R.B.: 'Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations', *The Journal of Children's Mathematical Behavior* 1 (1975), 7 – 35.
- Davis, P.J. and R. Hersh: *The mathematical experience*, Boston 1981.
- Donaldson, M.: *Children's minds*, Glasgow 1978.
- Dormolen, J. van: *Metaforen en andere beeldspraak*, Utrecht 1986.
- Eerde, D. van: 'Weten kinderen wel wat = is?', *Willem Bartjens* 1 (1981), 69 – 73.
- Ellerton, N.: 'A window into children's perceptions of mathematics', in Caughey, W. (ed.): *From now to the future*, Victoria 1988, pp. 64 – 70.
- Erp, J. van: 'Spelen rond het evenwicht; een alternatieve basis voor het aanvankelijk rekenen', in Moor, E. de, (ed.), *Panamacursusboek 1*, Utrecht 1983, pp. 15 – 24.

- Freudenthal, H.: *Mathematics as an educational task*, Dordrecht 1973.
- Freudenthal, H.: *Weeding and sowing*, Dordrecht 1978.
- Freudenthal, H.: 'Wat is er met het aftrekken aan de hand?', *Willem Bartjens* 1 (1981), 74 – 75.
- Freudenthal, H.: 'Ik was moeder en ik doe boodschappen', *Willem Bartjens* 1 (1982), 131 – 133.
- Freudenthal, H.: 'Appels en peren: wiskunde en psychologie', *Willem Bartjens* 3 (1983), 60 – 65.
- Freudenthal, H.: *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren*, Utrecht 1984.
- Freudenthal, H.: 'Wie alt ist der Kapitän?', *Mathematik Lehren* 5 (1984), 38 – 39.
- Freudenthal, H.: 'Theorievorming bij het wiskundeonderwijs – geraamte en gereedschap', *Panamapost* 5 (1987), 4 – 15.
- Fuson, K.: 'More complexities in subtraction', *Journal for Research in Mathematics Education* 15 (1984), 214 – 225.
- Gagné, R.M.: 'Some issues in the psychology of mathematics instruction', *Journal for Research in Mathematics Education* 14 (1983), 7 – 18.
- Gal'perin, P.J.: *Zu Grundfragen der Psychologie*, Berlin 1980.
- Gelman, R. and C.R. Gallistel: *The child's understanding of number*, Cambridge 1978.
- Giddens, A.: *Nieuwe regels voor de sociologische methode*, Baarn 1979.
- Ginsburg, H.: *Children's arithmetic, the learning process*, Philadelphia 1977.
- Ginsburg, H.: 'The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: aims, rationals, techniques', *For the Learning of Mathematics* 1 (1981), 4 – 11.
- Glaser, R.: 'Education and thinking: the role of knowledge', *American Psychologist* 39 (1984), 93 – 104.
- Glaserfeld, E. von: 'Learning as constructive activity', in *Proceedings of the Fifth Annual Meeting PME-NA*, Montreal 1983, pp. 41 – 69.
- Glaserfeld, E. von and P. Cobb: 'Knowledge as environmental fit', *Man-environment systems* 13 (1983), 216 – 224.
- Glaserfeld, E. von and L.P. Steffe.: 'Composite units and the operations that constitute them', in *Proceedings of the Tenth International Conference for the PME*, London 1986, pp. 212 – 216.
- Goffree, F.: *Leren onderwijzen met Wiskobas*, Utrecht 1979.
- Goffree, F.: *Onderzoek en (leerplan)ontwikkeling ten behoeve van het reken-wiskunde onderwijs op de basisschool*, Enschede 1985.
- Goffree, F.: *Rekenen, realiteit en rationaliteit*, Enschede 1986.
- Gooijer-Quint, J. de: 'Kleuters en wiskunde: een treintje ging uit rijden', *Wiskobasbulletin* 7 (1978), 13 – 17.

- Gravemeijer, K. and F. van Galen: 'De betekenis van contexten', in Feys, E. en E. de Moor (eds.), *Panama cursusboek 4*, Utrecht 1986, pp. 135 – 142.
- Grazer, G.: *Rekenmethodiek en moderne psychologie*, Tilburg/Antwerpen 1933.
- Greeno, J.G.: 'Conceptual entities', in Gentner, D. and A.L. Stevens (eds.), *Mental models*, Hillsdale 1983.
- Hadamard, J.: *An essay on the psychological invention in the mathematical field*, Princeton 1945.
- Heuvel, M. van den en F. Goffree: *Zo rekent Nederland*, Enschede 1986.
- Hiele, P.M. van: *De problematiek van het inzicht, gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof*, Amsterdam 1957.
- Hilbert, D.: 'On the infinite', in Benacerraf, P. and H. Putman (eds.), *Philosophy of mathematics*, Englewood 1964.
- Hilton, P.: 'Education in mathematics and science today: the spread of false dichotomies', in *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education*, Karlsruhe 1976, pp. 75 – 79.
- Hilton, P.: 'Current trends in mathematics and future trends in mathematics education', *For the Learning of Mathematics* 4 (1984), 2 – 8.
- Hofstadter, D.R.: *Gödel, Escher, Bach: een eeuwige gouden band*, Zwolle 1985.
- Holt, J.: *How children fail*, New York 1982.
- Hooft, G. van der en J.W. Oonk: *Verslag van een tweede proefevaluatie in het kader van het samenwerkingsproject IOWO-CITO: Autobusproblemen*, Arnhem 1975.
- Hoyles, C. and R. Sutherland: 'Ways of learning in a computer based environment and the role of the teacher', in Woerd, E. te en M. Simons (eds.), *Verslag van de conferentie Computers in het onderwijs, stroomversnelling of waterval?*, Utrecht 1986.
- Ilmer, K.: 'Stipsommen - een vergelijkend onderzoek naar het effect van verschillende notatiewijzen', in *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs* 7, (1989), pp. 49 - 57.
- Jong, R.A. de: *Wiskobas in methoden*, Utrecht 1986.
- Koomen, H.: *Diagnostiek van problemen in het beginnend rekenen*, Amsterdam 1982.
- Koster, K.B.: *Nieuwe wiskunde: Piaget's bijdrage voor de ontwikkeling van leerplannen voor de basisschool*, Groningen 1974.
- Koster, K.B. en J. Kruidenier: 'Cognitieve conflicten bij het leren spellen door eerste klassers', *Tijdschrift voor Taalbeheersing*, 8 (1985), 268 – 277.
- Lakatos, I.: *Proofs and refutations*, Cambridge 1976.
- Lakatos, I.: 'Falsification and the methodology of scientific research programmes', in Lakatos, I. and A. Musgrave (eds.), *Criticism and the growth of knowledge*, Cambridge 1970.
- Lehrer, A.: *Semantic fields and lexical structures*, Amsterdam 1974.
- Lesh, R.: 'Conceptual analyses of mathematical ideas', in *Proceedings of the Ninth International Conference for the PME*, Culemborg 1985, pp. 73 – 96.

- Lewis, C.: 'Skill in algebra', in Anderson, J.R. (ed.), *Cognitive skills and their acquisition*, Hillsdale 1981.
- Lyons, J.: *Introduction to theoretical linguistics*, Cambridge 1968.
- Mackay, D.M.: *Information, mechanism and meaning*, Cambridge 1969.
- Mevarech, Z.R. and D. Yitschale: 'Students' misconceptions of the equivalence relationship', in *Proceedings of the Seventh International Conference for the PME*, Israël 1983, pp. 313 – 318.
- Monbill, T. and C. Souyung: 'Children's psychology of number', *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* **14** (1983), pp. 351 – 363.
- Nelissen, J.M.S.: *Kinderen leren wiskunde; een studie over constructie en reflectie in het basisonderwijs*, Utrecht 1987.
- Nesher, P. and T. Katriel: 'Two cognitive modes in arithmetic word problem solving', in *Osnabrücker Schriften zur Mathematik*, Osnabrück 1978, pp. 226 – 241.
- Oers, H.J.M. van: *Activiteit en begrip*, Amsterdam 1987.
- Olson, D.R.: 'On a theory of instruction: why different forms of instruction result in similar knowledge', *Interchange* **3** (1972), 9 – 24.
- Parreren, C.F. van en J.A.M. Carpay: *Sovjetpsychologen aan het woord*, Groningen 1973.
- Piaget, J.: *La construction du réel chez l'enfant*, Neuchâtel 1937.
- Pimm, D.: *Speaking mathematically*, London 1987.
- Poincaré, H.: *The foundations of science*, New York 1913.
- Polanyi, M.: *Personal knowledge*, Chicago 1962.
- Querelle, W.M.G.: '10 minuten fietsen is ... minuten lopen', in *Nieuwe Wiskrant* **7**, (1988), pp. 8 - 11.
- Resnick, L.B.: 'Towards a cognitive theory of instruction', in Paris, S.G., G.M. Olson and W.H. Stevenson (eds.), *Learning and motivation in the classroom*, Hillsdale 1983.
- Rumelhart, D.E. and D.A. Norman: 'Analogical processes in learning', in Anderson, J.R. (ed.), *Cognitive skills and their acquisition*, Hillsdale 1981.
- Sawyer, W.W.: *Wegwijs in de wiskunde*, Utrecht 1962.
- Schoenfeld, A.H.: *Cognitive science and mathematics education*, London 1987.
- Sigel, J.E.: 'Social experience in the development of representational thought: distancing theory', in Sigel, J.E., D.M. Brodzinsky and R.M. Golinkoff (eds.), *New directions in Piagetian theory and practice*, Hillsdale 1981.
- Smaling, A.: *Methodologische objectiviteit en kwalitatief onderzoek*, Lisse 1987.
- Sowder, L.: 'Strategies children use in solving problems', in *Proceedings of the Tenth International Conference for the PME*, London 1986, pp. 469 – 474.
- Stake, R.E. and J. Easley: *Case studies in science education*, Urbana 1978.
- Steffe, L.P., E. von Glasersfeld, J. Richards and P. Cobb: *Children's counting types: philosophy, theory and applications*, New York 1983.

- Steffe, L.P. : 'Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics education – The Wiskobas Project', *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 4 (1988), 132 – 134.
- Stokking, K.M.: *Interpreteren en evalueren. Methodologie rondom de uitkomsten van onderzoek*, Deventer 1984.
- Streefland, L.: 'Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction', *Educational Studies in Mathematics* 9 (1978), 51 – 73.
- Streefland, L.: 'Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron', *Nieuwe Wiskrant* 5 (1985), 60 – 67.
- Streefland, L.: *Realistisch Breukenonderwijs*, Groningen 1988.
- Stubbs, M.: 'Language, meaning and logic: a case study of some children's language', in *Proceedings of the Tenth International Conference for the PME*, London 1986, pp. 59 – 74.
- Tall, D.: 'The mutual relationship between higher mathematics and a complete cognitive theory for mathematical education', in *Proceedings of the Fifth International Conference for the PME*, Grenoble 1981, pp. 316 – 321.
- Terwel, J.: *Onderwijs maken*, Harlingen 1984.
- Thom, R.: 'Modern mathematics: does it exist?', in Howson, A.G. (ed.), *Proceedings of the Second International Congress on Mathematics Education*, Cambridge 1973, pp. 194 – 209.
- Thompson, A.G.: 'The relationship of teacher's conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice', *Educational Studies in Mathematics* 15 (1984), 105 – 127.
- Treffers, A.: 'Cito item dito', *Wiskobasbulletin* 9 (1980), 81 – 98.
- Treffers, A.: *Stipsommen en zakcomputer. Voorstudie bij een onderzoeksaanvraag*, Utrecht 1983.
- Treffers, A. en E. de Moor: *10 voor de basisvorming rekenen/wiskunde*, Utrecht 1984.
- Treffers, A. and F. Goffree: 'Rational Analysis of Realistic Mathematics Education – the Wiskobas Program', in *Proceedings of the Ninth International Conference for the PME*, Culemborg 1985, pp. 97 – 123.
- Treffers, A.: *Three dimensions – a Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project*, Dordrecht 1986.
- Vergnaud, G.: 'The acquisition of arithmetical concepts', *Educational Studies in Mathematics* 10 (1979), 263 – 274.
- Vergnaud, G.: 'Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education. Some theoretical and methodological issues', *For the Learning of Mathematics* 3 (1982), 31 – 41.
- Vermeulen, W.M.M.J.: *Rekenen en Wiskunde in de school*, Rotterdam 1988.
- Vossen, H.M.M. e.a.: *Niveaucursus Rekenen*, 's-Hertogenbosch 1975.
- Vygotsky, L.S.: *Denken und Sprechen*, Berlin 1964.

- Whitehead, A.N.: *Science and the modern world*, Cambridge 1925.
- Whitney, H.: 'Taking responsibility in schoolmathematics education', in *Proceedings of the Ninth International Conference for the PME*, Culemborg 1985, pp. 123 – 141.
- Wiebenga, A.H.: 'De waarneming in de geneeskunde: van klinische blik tot en met computers', in *Waarneming in verschillende wetenschappen*, Utrecht 1967, pp. 99 e.v..
- Wijdeveld, E.: 'Zich realiseren', in *De Achterkant van de Möbiusband*, Utrecht 1980, pp. 23 – 26.

Curriculum vitae

Jan van den Brink (1942) was na zijn opleiding werkzaam als onderwijzer aan een experimenteerschool in het Amsterdamse onderwijs. Tijdens zijn studie wiskunde (lo en mo) kwam hij in dienst bij het Rekenproject van het Kohnstamm-instituut en werd hij in 1971 medewerker aan het Wiskobasproject van het IOWO (Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs) aan de Rijksuniversiteit Utrecht.

Na zijn doctoraal examen wiskunde en de opheffing van het IOWO (eind 1980) trad hij in dienst van de vakgroep OW&OC (Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijs Computercentrum) van de Faculteit voor Wiskunde en Informatica. Gedurende lange tijd heeft hij zich beziggehouden met de ontwikkeling en het onderzoek van wiskundeonderwijs aan jonge kinderen (akoestisch tellen, contextgebonden getallen) en het gebruik van zakrekenmachines op de basisschool.

In talrijke publikaties vestigde hij vooral de aandacht op de waarde die speelse en conflictueuze situaties in het reken- en wiskundeonderwijs hebben voor de vorming van wiskundige noties bij kinderen. Hij werd uitgenodigd mee te werken aan een Amerikaanse uitgave op dit gebied.

Momenteel levert hij ontwerp- en onderzoeksbijdragen binnen het ontwikkelteam Wiskunde 12-16 van de COW (Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs) ten behoeve van een inhoudelijke vernieuwing van het wiskundeonderwijs aan kinderen van 12 tot 16 jaar. Zijn aandacht gaat daarbij vooral uit naar zogenoemde geïntegreerde wiskundige activiteiten voor deze kinderen.