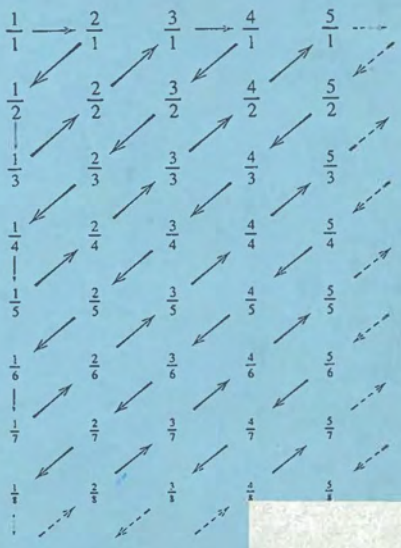
realistisch breukenonderwijs

L. Streefland



Freudenthal institu
Archief

vakgroep onderzoek wiskundeonderwijs en onderwijscomputercentrum,
rijksuniversiteit utrecht

Realistisch breukenonderwijs

realistisch breukenonderwijs

Onderzoek en ontwikkeling van een nieuwe leergang

Realistic instruction of fractions
Research and development of a new program (with a summary in English)

L. Streefland

vakgroep onderzoek wiskundeonderwijs & onderwijs computercentrum
rijkskuniversiteit utrecht

Onderzoek wiskundeonderwijs
Publikatie nr 9

Reeds verschenen:

Nr 1 *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas*
(A. Dekker, H. ter Heege, A. Treffers)
Nr 2 *Oppervlakte bij Wiskobas en inzichtverwervend handelen*
(A. Dogger)
Nr 3 *Aanzet voor een nieuwe breukendidactiek volgens Wiskobas*
(L. Streefland)
Nr 4 *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren (1)*
(H. Freudenthal)
Nr 5 *Wiskobas in methoden*
(R.A. de Jong)
Nr 6 *De baas over de computer*
(P. Bergervoet e.a.)
Nr 7 *Mathématiques pour tous à l'âge de l'ordinateur*
(Jan de Lange Jzn, ed.)
Nr 8 *Mathematics, insight and meaning*
(Jan de Lange Jzn)

Realistisch breukenonderwijs *is tevens verschenen als dissertatie ter verkrijging van de graad van doctor in de sociale wetenschappen aan de Rijksuniversiteit te Groningen (promotor: K.B. Koster; referent: A. Treffers)*

tekstverwerking: Ada Ritzer, Sylvia Pieters
vormgeving: Sylvia Pieters, Ada Ritzer
illustraties: Kees Henzen, Marja Streefland
vertaalwerk: Ruth Rainero
druk: Technipress, Culemborg

© 1988 vakgroep onderzoek wiskundeonderwijs & onderwijs computercentrum, rijksuniversiteit utrecht

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, microfilm of op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de houder van het copyright.

'Als we een ideaal opgeven omdat het onbereikbaar is, dan zullen we nooit weten hoe dicht we het hadden kunnen benaderen.'

G. Nienhuis (in: De eenheid van de natuurkunde)

voor Joke
Hedwig
Coen

Inhoud

Voorwoord X

Inleiding en overzicht 1

1 Signalement van het breukenprobleem 6
1.1 Inleiding en overzicht 6
1.2 Het probleem gesignaleerd 7
1.3 Signalement van het probleem 8
1.3.1 Historisch perspectief 8
1.3.2 Het probleem gekenschetst 12
1.4 Overzicht en uitzicht 14
Noten bij hoofdstuk 1 15

2 Stromingen Stellingname Probleemstelling 18
2.1 Inleiding en overzicht 18
2.2 Stromingen 18
2.2.1 De structuralistische benadering 18
2.2.2 De mechanistische benadering 20
2.2.3 Pragmatisch structuralisme 20
2.2.4 Reflectie 21
2.2.5 De realistische benadering 22
2.2.6 De empiristische benadering 25
2.3 Stellingname 26
2.4 Probleemstelling 27
2.5 Overzicht en uitzicht 28
Noten bij hoofdstuk 2 29

3 De context van het onderzoek 32
3.1 Inleiding en overzicht 32
3.2 Uitgaan van het constructiebeginsel 32
3.3 Ontwikkelingsonderzoek 37
3.4 Design en methoden 38
3.5 De onderzoeksgroep 41
3.5.1 Inleiding 41
3.5.2 De onderzoeksgroep nader getypeerd 42
3.6 De positie van de onderzoeker 42
3.6.1 Rollen 42
3.6.2 Tussen deelname en distantie 43
3.7 Besluit 45
Noten bij hoofdstuk 3 46

4 De leergang in theorie en praktijk 52
4.1 Inleiding en overzicht 52
4.2 Globale schets van de leergang breuken 52
4.2.1 Vooraf 52
4.2.2 Breuken maken 53
4.3 Breuken maken. Een impressie van het onderwijs 69
4.3.1 Vooraf 69
4.3.2 'Begin breuken' of de vulling van het concrete niveau 70
4.3.3 'Voortzetting breuken' of op weg naar hogere niveaus 107
4.3.4 'Herhaling breuken' of omzien naar regels 134
4.4 Met het oog op mathematiseren 144
4.4.1 Vooraf 144
4.4.2 De rol van contexten 145
4.4.3 Symbolen, schema's en modellen veelvuldig gebruikt 146
4.4.4 Construeren en produceren, of de inbreng van de leerlingen in hun leerweg 147
4.4.5 Interactief 147
4.4.6 Verstrengeling van leerlijnen 147
4.5 Overzicht en uitzicht 148
Noten bij hoofdstuk 4 149

5 Breukenonderzoekers individueel geportretteerd 156
5.1 Inleiding en overzicht 156
5.2 Indicatoren voor de (toename in) kwaliteit van de individuele leerprocessen 156
5.3 De leerlingportretten 163
5.4 Overzicht en uitzicht 304
Noten bij hoofdstuk 5 306

6 Interne evaluatie van het leerproces 308
6.1 Inleiding en overzicht 308
6.2 Het zwichten voor N-distractoren en het opbouwen van weerstand ertegen 309
6.3 Voortschrijden in schematiseren door verkorten 314
6.4 Modellen en schema's 325
6.4.1 Flexibel modelgebruik en schematoepassing 325
6.4.2 Situatiemodellen 328
6.5 Het zich (eigen) maken van een voorstelling of representatie bij een formeel gesteld probleem 330
6.6 Constructies en produkties op symbolisch niveau 333
6.7 Het niveau-theoretisch kader en de leergangconstructie 338
6.8 Samenvatting en vooruitblik 341
Noten bij hoofdstuk 6 344

belangrijk bijgedragen aan de ideevorming. Ook zij verdienen mijn dank en niet alleen hiervoor. Dit geldt ook Joke, mijn vrouw, die wanneer ik er zelf niet bij was, observaties voor mij bewaarde, gelukkig niet alleen aangaande breuken en verhoudingen.
De laatste pijler wordt gevormd door de ideeën die ontstonden in samenwerking met collega's in de fase van de fundamentele opbouw tijdens de nadagen van het IOWO en nadien.
In de eerste plaats dienen dan genoemd te worden de collega's W.Haverkort, R.Gerdsen en J.Baaij van de Fatima Jozefschool te Bussum, het proefterrein waar zich het onderzoek afspeelde. Zij droegen in belangrijke mate bij aan de inhoud zowel als aan de uitvoering van het onderzoek. Bovendien toonden zij zich steeds vol belangstelling bereid tot het constructief kritisch becommentariëren van ontwerpteksten voor dit boek. In dit verband verdient ook Nanda Querelle het genoemd te worden, omdat zij dikwijls – met haar rijke ervaring – klaar stond voor een gesprek wanneer ik daaraan behoefte had. Zij ijkte bovendien de toets voor het verrichte vergelijkende onderzoek middels een proefafname in twee LBO/MAVO-brugklassen.
H.Freudenthal, F.Goffree, K.Gravemeijer, K.B.Koster, E.W.A.de Moor, J.M.C.Nelissen, A.Treffers, L.Verschaffel en E.J.Wijdeveld droegen bij aan leergangvoorstel en vergelijkende toets door ontwerpversies van constructieve kanttekeningen te voorzien.
Van hen wil ik in het bijzonder noemen mijn promotor, Prof.dr.K.B.Koster. Hij was het, die door zijn begeleiding meehielp het zicht te behouden op de grote lijnen van het onderzoek en van deze publikatie in algemene zin en die in deze van beslissende invloed was op het uiteindelijke resultaat. Dit geldt zowel de zuiverheid van formuleren alsook de opbouw en het wetenschappelijke gehalte.
Mijn referent Dr.A.Treffers vervulde een overeenkomstige rol aangaande de mathematisch-didactische fundering vanuit het gezichtspunt van zijn theorie voor realistisch wiskundeonderwijs. Dit geldt in het bijzonder het uiteindelijke leergangvoorstel dat in dit boek gedaan wordt. Door zijn intensieve inhoudelijke betrokkenheid droeg hij hieraan in aanzienlijke mate bij. Men kan wel stellen dat de leergang in gedurige samenspraak met hem geworden is tot wat hij nu is.
Tenslotte verdienen degenen dank die de tekst verwerkten, de illustraties verzorgden en het geheel vorm gaven. Ada Ritzer en Sylvia Pieters die onder grote werkdruk van andere projecten toch kans zagen de tekst tijdig te verwerken – mede dankzij Betty Dekker, die bij hoge nood bijsprong – en wat Ada en Sylvia aangaat ook voor de vormgeving zorg te dragen; en Marja Streefland en Kees Henzen die met grote toewijding en inzet de illustraties voor hun rekening namen: allemaal bedankt.

Zeist, april 1988
Leen Streefland

7 Externe of summatieve evaluatie 346
7.1 Inleiding en overzicht 346
7.2 De groepen gewogen 347
7.3 De programma's vergeleken en getypeerd 348
7.3.1 Inleiding 348
7.3.2 NCR en NZR 349
7.3.3 De programma's met realistische trekken 350
7.4 De toetsen 356
7.5 Uitkomsten 357
7.5.1 Inleiding 357
7.5.2 De slottoets, een kwalitatieve analyse 358
7.6 Samenvatting en conclusies 396
7.6.1 Inleiding 396
7.6.2 Samenvatting van de resultaten van de experimentele groep 396
7.6.3 Conclusies 400
7.7 Realistisch en mechanistisch, verschil in effecten? 405
7.8 Vooruitblik 406
Noten bij hoofdstuk 7 406

8 Theoretische terugblik 409
8.1 Inleiding en overzicht 409
8.2 Breuken onderwijzen en leren 411
8.2.1 Inleiding 411
8.2.2 Het eerste niveau rijk gevuld 412
8.2.3 Naar hogere niveaus 416
8.2.4 Algemene kenmerken van het verticaal mathematiseren 421
8.3 Besluit 424
Noten bij hoofdstuk 8 425

Nawoord 427

Summary 432

Literatuur 435

Curriculum vitae 442

Voorwoord

Wie zich wil verdiepen in de breuken in onderzoek en onderwijs zal zonder al te veel moeite voor vrijwel iedere letter van het alfabet een naam van een auteur kunnen vinden met een publikatie op dit terrein: Bidwell, Romberg, Erlwanger, Usiskin, Kieren, Ellerbruch, Noelting, enz. Deze vaststelling geldt ook, welhaast onverkort, voor de lijst van degenen die aan de totstandkoming van dit boek hebben bijgedragen. Aan allen past een woord van dank. Het zijn er velen. Het met name noemen zou enkele pagina's vergen. Dat doe ik dan ook niet, zonder hen daarmee overigens bij de verzwegen meerderheid te willen onderbrengen. Daarom noem ik in dit verband de leerkrachten en leerlingen van de scholen die deelnamen aan het vergelijkende onderzoek en degenen die voor de werving van deze scholen zorg droegen. Alsook hen, die voor kleine kwesties materiaal verzamelden of adviezen gaven. Er is echter heel wat gebeurd voordat het zover was. Het denken dat geleid heeft tot de oplossingen die in dit boek voor het breukenprobleem worden voorgesteld, berust op vier pijlers. Daarvoor ontstonden de fundamenten en bouwstenen grofweg in dezelfde periode.
De eerste pijler, tevens mijlpaal in het Wiskobasproject van het IOWO, was het voorbeeld-schoolwerkplan voor de basisschool dat verscheen. Ruim tien jaar geleden is dat al weer. Voor mij als ontwerper van het bovenbouwprogramma betekende dit een enorme bevrijding. Het hele karwei – een programma voor de basisschool inclusief de breuken voor de bovenbouw – was voorlopig geklaard dankzij voorbeeldig teamwork. Dit slagen kende als basis het mislukken, namelijk het grondig schipbreuk lijden van eerdere, gerichte zoekacties naar oplossingen voor het breukenprobleem. Daarna werden de breuken eenvoudigweg genegeerd in het onderwijsontwikkelingswerk. Mede daardoor kwamen ontwerpen tot stand waarin de breuken betrekkelijk zinvol toepassing vonden. Deze ervaringen vormden een goed uitgangspunt voor de fundamentele opbouw erna.
Tezelfder tijd verscheen de eerste versie van Freudenthals didactische fenomenologie voor de breuken, in het Duits. 'Provisorisch, unvollständig' schreef hij erbij. Dit moge zo zijn. Wel werd in dit stuk 'in één klap' expliciet gemaakt wat bij mij hooguit als schimmige, niet te uiten noties had postgevat. Deze ervaring bezorgde mij niet alleen de nodige opwinding, maar droeg geweldig bij aan de voortgang van de fundamentele opbouw. Niet alleen om die reden verdient Freudenthal mijn dank, maar vooral ook vanwege zijn gedurige beschikbaar zijn om te reageren op ideeën, bij te dragen aan het verbeteren van toetsmateriaal, suggesties te doen voor de verwerking van de data van het vergelijkende onderzoek, en wat niet al.
Eveneens in dezelfde tijd begonnen mijn kinderen, deels geïnspireerd door vraagjes die ik hen voorlegde, deels spontaan uiting te geven aan hun ideeën omtrent verdelen, eerlijk verdelen en hoe zoiets weer te geven. Dit gebeurde op een leeftijd dat zij nog onbelast waren met schoolkennis dienaangaande. Gelukkig maar. Deze observaties van Hedwig en Coen hebben eveneens

Inleiding en overzicht

Twee decennia geleden verscheen Dienes' 'Fractions An Operational Approach' (1967). Daarin werden de breuken op meer dan formele wijze benaderd. Dit blijkt onder andere uit de taal waarmee de leerling wordt aangesproken. 'Do not forget that a fractional operator is just a multiplying operator followed by a dividing operator' (loc.cit.p.29). Dienes' boek staat er vol mee. New Math ten top. Inmiddels is deze richting in het wiskundeonderwijs ter ziele. Dit likt hooguit nog de wonden die het heeft nagelaten. Nadien is er nog van alles geprobeerd met de breuken (o.a. 'back to basics'). Het wordt nu hoog tijd voor een realistisch alternatief. Dit boek bevat iets dergelijks. Daarmee wordt een belofte ingelost die de afdeling Wiskobas van het IOWO destijds kennelijk niet gestand kon doen.[1]
'Realistisch breukenonderwijs' dat wil zeggen een beschrijving ervan, hoe het ontwikkeld werd en beproefd. Onderzoek en ontwikkeling van een nieuw breukenprogramma voor de basisschool, dat al in praktijk wordt gebracht.[2]
Dat was het doel. En, theorie voortbrengen voor het onderwijzen en leren van breuken, als specimen van een theorie voor realistisch wiskundeonderwijs.
Een groep leerlingen van een basisschool ontving gedurende enkele jaren onderwijs volgens een (voorlopig) uitgewerkt prototype van een nieuwe leergang. Hoe ver zou men met zo'n groep kunnen gaan met de breuken?
In het *vierde* hoofdstuk wordt een globale schets gegeven van de nieuwe leergang. De verwevenheid van de breuken met verhoudingen trekt erin de aandacht alsook de totale uitlijning van de leergang gebaseerd op (te verwachten) inbreng van de leerlingen door middel van wat zij zelf gaan construeren en produceren. Dan volgt een (gestileerde) impressie van het onderwijs zoals zich dit in het uitgevoerde experiment voltrokken heeft. Een menigte reacties van de leerlingen is erin verwerkt. Daarmee wordt de blikwisseling van het onderwijs naar de individuele leerprocessen ingezet.
Ook op het niveau van de ontwikkelingsonderzoeker voltrekt zich iets dergelijks, namelijk een standpuntverandering van de probleemdefiniëring voor deze studie op grond van het materiaal en de kennis die daarvoor reeds voorhanden waren[3], via het verrichte onderzoek naar nieuwe kennis en theorie (de vrucht van het leerproces van de onderzoeker).
Aan het onderwijshoofdstuk gaat dan ook het nodige vooraf.
Tegen een historische achtergrond wordt in het hoofdstuk dat de rij opent, het probleem dat de breuken in het onderwijs vormen, vastgesteld en verwoord. De theorie van de breuken blijkt ontdaan te zijn van zijn historische ontstaans- en toepassingsbron. In de meeste leerboeken, ook voor jonge kinderen, is de theorie voorop komen te staan, wat averechts werkt. Het spoor in de geschiedenis van het rekenen heeft namelijk geleid tot schraal, werkelijkheidsvreemd, mechanistisch rekenonderwijs. Het is in hoge mate ineffectief gebleken. Mede onder invloed van het Wiskobasproject van het IOWO heeft zich een tot dan toe bescheiden didactische tegenstroom

versterkt, die nog steeds aan kracht wint en zich kenmerkt door een sterke toewending naar de realiteit. De golfbeweging die in de turbulentie van dit tweestromenland ontstond gaat nog voort. In dit krachtenveld bleef de kwestie van de breuken echter onopgelost. Er kon nog geen afdoende antwoord op de problemen worden aangedragen en de behoefte aan zo'n oplossing is sterker dan ooit. Immers, ook in recent onderzoek zijn de resultaten voor vraagstukken met breuken nog altijd bedroevend.
Het *tweede* hoofdstuk belicht de breuken vanuit verschillende gezichtshoeken, dit keer tegen de achtergrond van het historische leerproces. De structuralistische benadering blijkt zich van de historische ontwikkeling te onderscheiden door de gerichtheid op de inzichtelijke reproduktie van het systeem. In het onderzoek valt de keuze op de realistische benadering met als hoofddoel de inzichtelijke (re)constructie van het systeem in overeenstemming met het historische leerproces. Aan een voorbeeld uit de Papyrus Rhind (1700 v. Chr.) worden de onderwijskundige grondstellingen of basisprincipes ontvouwd, die de inzichtelijke constructie van het systeem door een proces van geleidelijk voortgaand mathematiseren nader inhoud moeten geven.
Met dit raamwerk op de achtergrond worden vervolgens de – reeds genoemde – intenties van het onderhavige ontwikkelingsonderzoek nader uiteengezet.

Constructie en produktie vormen de kern van de wiskundige activiteit van de leerlingen. Dit zal dan ook voor de activiteiten van de onderzoeker het geval (moeten) zijn. Het *derde* hoofdstuk biedt daartoe een niveautheoretisch raamwerk, dat met constructie als kernbegrip de te verrichten werkzaamheden nader differentieert en structureert.
Als niveaus worden onderscheiden:
— het lokale of lesniveau
— het globale of leergangniveau en
— het niveau van de theorie.
De componenten van de door Treffers (1987) samengestelde theorie van realistisch wiskundeonderwijs zijn in dit constructiekader voor een leergang (breuken) geïntegreerd samengebracht, d.w.z.
— de didactische fenomenologie (Freudenthal)
— de niveautheorie (Van Hiele) en
— het voortgaande mathematiseren (horizontaal en verticaal) (Treffers).
Verder worden in dit hoofdstuk nog allerlei kwesties beschouwd aangaande het onderzoeksdesign (de observatie van langlopende, individuele leerprocessen), de toe te passen methoden (onderwijsexperiment en interview), de selectie van de onderzoeksgroep, de deelnemende leerkrachten en de positie(s) van de onderzoeker in het geheel. Met name de invloed van de onderzoeker wordt op grond van het deelname-distantie-dilemma nader beschouwd en verantwoord.
Hierna volgt dus de leergangschets met de onderwijsimpressie. Deze wordt

voorlopig afgerond met een reflectie aangaande de voortgang in het mathematiseren. De eerder ontvouwde basisprincipes dienen daarbij tot richtsnoer.
Het betreft:
— uitgaan van de realiteit als bron en toepassingsgebied;
— het ontwikkelen van symboliseringen, schema's en (visuele) modellen in het onderwijsleerproces;
— het leveren van inbreng door de leerlingen door het doen van constructies en produkties;
— het verweven van leerlijnen (m.n. breuken en verhoudingen);
— het inrichten van het onderwijs als een interactief proces van samenwerking, onderhandeling en discussie.

In het *vijfde* hoofdstuk wordt de omslag die werd ingezet van onderwijs naar leerproces, doorgezet.
De dertien leerlingen die de volle onderzoeksperiode hebben meegewerkt, worden nu naar hun individuele leerprocessen geportretteerd.
Uitgaande van de impressie van het onderwijs en de wijze waarop de leerlingen daaraan deelnamen vindt selectie en definitie van een vijftal indicatoren plaats. Deze dienen om het voortschrijdende mathematiseren en de niveauverhogingen die zich daarin hebben voltrokken, te beschrijven.
Het betreft:
— het maken van fouten in het eerbiedigen van de noties breuk en verhouding, bijvoorbeeld $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ of (2,4) 'gelijk' verklaren aan (4,6), vanwege het zelfde verschil tussen de getallen.
Dergelijke fouten zijn een aanwijzing dat de concrete bronnen van het inzicht nog onontbeerlijk zijn;
— het voortschrijden in schematiseren;
— het flexibel toepassen van (visuele) modellen en schema's in samenhang met handig rekenen;
— het maken van voorstellingen of representaties bij formeel gestelde problemen;
— eigen constructies en produkties op symbolisch niveau.

Aan het einde volgt een grafische samenvatting van de bereikte niveaus in de individuele leerprocessen. De mate van differentiatie die is opgetreden weerspiegelt het antwoord op de vraag hoe ver men met een groep basisschoolkinderen met de breuken zou kunnen komen.
In de twee volgende hoofdstukken komt de evaluatie van het onderzoek tot stand. In het *zesde* hoofdstuk gaat het om de interne evaluatie. De geobserveerde en beschreven individuele leerprocessen worden doorgelicht tegen de achtergrond van het gegeven onderwijs. Dit gebeurt met het oog op verbetering van de leergang en theorievorming beide. De eerder geselecteerde indicatoren vervullen een kernrol in dienst hiervan.
De voortgang in het mathematiseren blijkt voor twee van deze indicatoren

grafisch te kunnen worden verwerkt, namelijk voor het opbouwen van weerstand tegen de neiging tot het maken van fouten die de begrippen breuk en verhouding geweld aandoen en voor het voortschrijdende schematiseren.
Van Hieles niveautheorie kan nu voor het onderwijzen en leren van breuken worden uitgewerkt. (Het vergaarde onderzoeksmateriaal laat zich dienovereenkomstig beschrijven.)
Het *zevende* hoofdstuk bevat het vergelijkende deel van het onderzoek. Voor dit doel is een 'doorsneetoets' samengesteld. De resultaten van de onderzoeksgroep op deze toets worden vergeleken met die van een omvangrijke controlegroep (ruim 200 leerlingen), die met uiteenlopende leergangen (met realistische trekken en van mechanistische signatuur) werd onderwezen. Deze vergelijking levert opnieuw enkele aanwijzingen op tot verbetering van de leergang. Tevens blijkt eruit dat het leren mathematiseren de moeite heeft geloond. De resultaten op de eindtoets basisonderwijs 1986 van het CITO voor het onderdeel rekenen bevestigen de uitkomsten van de externe evaluatie.
In vergelijking met de rigide, algoritmische attitude van de leerlingen in de controlegroep kenmerkt die van de onderzoeksgroep zich in het algemeen door flexibiliteit, handigheid en inzicht een mathematische attitude dus.
Het hoofdstuk dat de rij sluit, bevat de theoretische reflectie. Deze wordt verricht binnen een mathematisch-didactisch beschrijvingskader. Er worden overigens wel enkele verbindingen gelegd met de meer algemene kaders van cognitieve psychologie en onderwijspsychologie.
Een theorie voor het realistisch onderwijzen en leren van breuken wordt aldus ontvouwd. In een nawoord tenslotte wordt een haalbaar geacht leergangvoorstel voor het basisonderwijs gedaan.

Noten

1. Het Wiskobasproject kende een niveautheoretische fasering. Na fasen van *exploratie* (van lokale onderwerpen) en *integratie* (samensmeding van deze onderwerpen tot een totaalprogramma voor de lagere school, langlopende leergangen voor het cijferen en de breuken e.d. inbegrepen), volgde de fase van de *fundamentele opbouw*.
   In deze laatste fasen had fundamenteel en funderend onderzoek (en ontwikkeling) van een passende leergang breuken hoge prioriteit. Wiskobasteam (1980). Met de voortijdige opheffing van het IOWO werden deze werkzaamheden abrupt afgebroken en daardoor in ernstige mate vertraagd.
2. De nieuwste methoden 'Rekenen & Wiskunde' (Bekadidact Baarn) en 'Rekenwerk' (commerciële versie van het SAC-programma, De Ruiter, Gorinchem) hebben in belangrijke mate van de ontwikkelde ideeën kunnen kennisnemen.
3. In Streefland (1983) is het nodige voorwerk verricht. Blijkens de literatuuropgave vond een groot aantal deelstudies plaats. Dit weerspiegelt tevens de complexiteit van de aangevatte problematiek.

1 Signalement van het breukenprobleem

Und merk dir ein für allemal
den wichtigsten von allen Sprüchen:
Es liegt dir kein Geheimnis in der Zahl,
allein ein grosses in den Brüchen
(Goethe)

1.1 Inleiding en overzicht

De breuken herbergen een groot geheim, aldus Goethe destijds.
Een oude puzzel, die in velerlei toonzettingen de ronde heeft gedaan, weerspiegelt dit. Deze luidt in Midden-oosterse context:

> 'Een oude Arabier, Anwar, bepaalde voor zijn dood, dat zijn oudste zoon de helft, de tweede zoon het vierde deel en de derde zoon het vijfde deel van zijn kamelen zou erven. Toen hij 19 kamelen naliet konden zijn zoons het over de verdeling niet eens worden. De derwisj, die – per kameel langskomend – de onenigheid opmerkte, toonde zich hulpvaardig, steeg af en sprak: 'Ik wil jullie mijn kameel lenen.' Ieder van de drie zonen nam nu van de 20 kamelen zijn deel. De derwisj besteeg wederom zijn lastdier en vervolgde zijn weg, de drie erfgenamen tevreden achterlatend. Aldus geschiedde de laatste wil van Anwar.'

Zie daar, hoe de 'erven Anwar' in de geheimen van de breuken vastliepen toen het op het vererven van de nagelaten 19 kamelen aankwam. Gelukkig was daar de wijze derwisj, die het geheim naar zich toehaalde en vervolgens prijsgaf. Het dilemma van Anwars laatste wil en de 19 kamelen kon worden bezworen volgens de regelen van de breukenkunst, dank zij die ene 'extra' kameel.
'Benny' was een geval apart. Voor hem hadden de breuken ook dat anekdotische. Erlwanger verhaalde van hem in 1973 en 1975, daarmee de nodige aandacht in kringen van het wiskundeonderwijs trekkend.[1]
Geheimen kenden de breuken voor Benny niet meer, zo meende hij zelf althans. Erlwanger ondervroeg hem hierover. Benny gaf zijn kijk op de breuken zonder terughouding prijs. Zijn kennis, vaardigheden en inzichten had hij opgedaan tijdens het individueel verwerken van een sterk gefragmenteerd rekenprogramma.[2] Benny, het tegendeel van een afhaker, zag rekenen – en dus ook en vooral het breukrekenen – als een (onsamenhangend) stelsel van regels. Deze waren nodig om tot de goede antwoorden te geraken, dat wil zeggen, antwoorden die overeenstemden met de uitkomsten op de controlekaarten van de onderwijsgevende; uitkomsten die tegelijk hetzelfde konden zijn en desondanks verschillend lijken, afhankelijk van de gevolgde procedure of toegepaste oplossingsmethode.
Zo kwam, aldus Benny, 2 + 0,3 uit op 0,5; 2,3 of $2\frac{3}{10}$ al naar gelang er gerekend werd met kommabreuken, gewerkt met een plaatje (stroken) of gerekend met breuken.

Erlwanger stelde ernstige misvattingen in Benny's kennis van de breuken vast. Hij schreef die toe aan het sterk gefragmenteerde, op regels aansturende rekenprogramma dat Benny zelfstandig doorliep en dus aan het ontbreken van begeleiding door de leerkracht. Hij, dat wil zeggen Benny, schreef de regels voor het rekenen toe aan een knappe uitvinder, iemand met de ondoorgrondelijke wijsheid van een derwisj, die bij elk vraagstuk hoe dan ook een uitkomst wist te scheppen. Benny, apart geval vanwege de naambekendheid die hij in de literatuur verwierf, staat model voor een legioen van naamlozen. Waar de effecten van het onderwijs in de breuken worden nagegaan weerspiegelen deze, hier te lande en elders, doorgaans een kijk van dit legioen op de breuken als waarvan Benny blijk gaf.
De breuken vormen het probleemgebied bij uitstek in het elementaire wiskundeonderwijs. Bedoeld probleem wordt in dit hoofdstuk nader toegelicht op grond van uitkomsten van recent onderzoek.
Dan volgt een beknopte historische schets van het breukrekenen, eindigend met een beschrijving van de huidige stand van zaken van het rekenwiskundeonderwijs op de basisschool.
De voor dit schooltype beschikbare methoden worden daartoe geraadpleegd. Een analyse volgt later (hoofdstuk 7).
De schets resulteert in een signalement van de vermoedelijke oorzaken van het grotendeels falen van het breukenonderwijs.
Tenslotte wordt de kern van het betoog overzien en zicht op het vervolg geboden.

1.2 Het probleem gesignaleerd

Benny staat als 'geval' dus niet op zichzelf. De uitkomsten van veel onderzoek getuigen hiervan.[3] Steeds blijven de behaalde resultaten achter bij wat men op grond van de in het onderwijs gebruikte programma's zou mogen verwachten. De nagestreefde doelen worden niet of maar ten dele bereikt.
In Nederland blijkt de situatie in de jaren zestig en zeventig bovendien nog verslechterd te zijn.
In het Tweede Wiskunde Project van het IEA-onderzoek werd in 1981 op grond van enkele ankeritems vergeleken met 1963, een terugval in rekenvaardigheid bij MAVO-, LTO- en LHNO-leerlingen geconstateerd van ruim 25%.[4]

Bij de ankeritems bevond zich ook een opgave met breuken ($\frac{2}{5} + \frac{3}{8} =$).
Hierop was het vastgestelde verval het grootst. Treffers (1986) stelt naar aanleiding van de resultaten op de rekentoetsen in genoemd project vast, dat voor een aanzienlijk deel van de kinderen de sleutelonderwerpen per traditie, zoals breuken e.d., te hoog gegrepen zijn. De door Schuring (1985) gepubliceerde cijfers bevestigen dit.[5]
Zowel het oplossen van toepassingsvraagstukjes als het contextloos uitvoeren van de hoofdbewerkingen met breuken blijken voor een aanzienlijk deel van de leerlingen telkens weer onoverkomelijke obstakels te zijn. Kortom, de

breuken zoals lange tijd onderwezen, vormen een probleemgebied.

1.3 Signalement van het probleem

1.3.1 Historisch perspectief

Papyrus Rhind

Historisch beschouwd zijn de breuken verbonden met het breken en verdelen van voedsel, met de handel, de markt en de landbouw, dus met de realiteit van het dagelijks bestaan.

De Papyrus Rhind, een 'rekenboekje' van 1700 v. Chr. bedoeld voor hen die zich tot koninklijk schrijver wilden bekwamen, bevatte een tachtigtal voor het merendeel praktische vraagstukken, zoals '6 broden verdelen onder 10 mannen' en net zo met 7, 8 en 9 broden (Rhind no. 3 t/m 6). [6]

Het oudste breukensysteem, met passende symbolen, was dat o.a. van het herhaald halveren, dat in de landbouw toepassing vond.

Een strikte scheiding tussen de rekentheorie en de praktische toepassingen was er niet in de Rhind; ze waren verweven.

Bij de Babyloniërs was het al niet anders.[7]

Tractaat van Gent

Maken we vervolgens een sprong naar de zestiende eeuw, dan zien we dat zich een scheiding heeft afgetekend tussen rekentheorie en toepassingen. In een arithmetica tractaat van omstreeks 1530 behandelt een onbekend auteur, vermoedelijk Cristianus van Varenbraken, eerst de rekentheorie en vervolgens de toepassingen.[8]

Na de theorie, die ongeveer één derde deel van het tractaat beslaat, volgen de praktische vraagstukken, de toepassingen, die dus het leeuwedeel van de tekst voor zich opeisen.[9]

Wat de breuken aangaat betreft het dan niet toepassingen als de verdeelproblemen van de 'Rhind'. Het gaat veel meer om toepassingsgebieden, namelijk die van de verhoudingsproblemen in het zogenaamde koopmansrekenen en in het algemeen het rekenen met grootheden, met als kern 'de regel van drie'; het betreft een bonte rij van *contextgebonden* varianten op deze regel, elk voorzien van een passende naam.[10] Op zichzelf behoeft dit geen bevreemding te wekken, want omrekenen en inwisselen waren inherent aan de handelspraktijk van alle dag vanwege de rijke schakering aan niet-tiendelige maatsystemen voor lengte, gewicht en geldswaarde die in gebruik waren.

Het toepassen van het breukrekenen was dus eenvoudigweg onvermijdelijk. En dat zou voorlopig nog wel even zo blijven ook, ondanks Stevin.

De Thiende

In 1585 was het namelijk, dat Simon Stevin (1548-1620), zijn 'De Thiende' publiceerde.[11] Hij schetste daarin hoe het systeem van de natuurlijke getallen met decimale breuken zou kunnen worden uitgebreid, overigens nog zonder

komma en vrij complex en onpraktisch genoteerd.[12]
Stevins vinding diende een heel praktisch doel, namelijk de dagelijkse praktijk van het (breuk)rekenen te vergemakkelijken door de gewone breuken op de door hem voorgestelde wijze te omzeilen. Als gezegd, de variëteit aan niet-gestandaardiseerde, niet-decimaal verfijnde maatsystemen maakte de dagelijkse praktijk van markt en handel ingewikkeld, zeker internationaal. Daarbij viel aan gecompliceerd breukrekenen niet te ontkomen.
Stevin was zich van de draagwijdte van zijn uitvinding ten volle bewust. Hij voorzag dat de invoering van decimaal verfijnde maatstelsels voor lengte, gewicht en geld nog slechts een kwestie van tijd zou zijn. Hij bepleitte de overgang op dergelijke maatstelsels in ieder geval nadrukkelijk. Overigens zou het nog zo'n twee eeuwen duren vooraleer het decimaliseren van maatstelsels werd ingezet.[13]
Bovendien betekende dit nog niet, dat de breuken nu van hun bestaansgrond ontdaan zouden worden. Er bleven namelijk in de dagelijkse praktijk nog genoeg toepassingen over.[14]
De bedoelingen achter Stevins voorstellen bevestigen nogmaals hoe sterk het breukrekenen in de toepassingen verankerd lag.

Bartjens
De bekende 'Vernieuwde Cijfferinghe' van Willem Bartjens, *'waer uytmen meest alle de Grondregulen van de Reecken-konst leeren kan'*, geeft globaal beschouwd een overeenkomstig beeld te zien, als van het Gentse tractaat werd weergegeven.[15] Het breukrekenen blijft, althans wat de toepassingen aangaat, opgaan in het verhoudingsrekenen, in het toepassen van de regel van drie, in het rekenen met grootheden. Bartjens en zijn navolgers behandelden, zoals reeds lang te doen gebruikelijk, regel na regel, recht toe recht aan, zonder didactische opsmuk, zonder pogen enig inzicht in het waarom achter de regels te verschaffen.[16]

Intrede van de didactiek
Een eeuw geleden, bij het verschijnen van de 'methode Versluys' en het daarbij behorende methodiekboek voor kwekelingen, zou men het startpunt kunnen leggen van de intrede van rekendidactische inzichten in het onderwijs.[17]
De breuken worden in deze methode ingevoerd op aanschouwelijke grondslag via het verdelen van variërende eenheden en de ervaring, die kinderen daarmee hebben. In zeker opzicht is er sprake van het inslaan van een nieuwe weg of, beter, van terugkeer tot de oerbron van de breuken, namelijk het eerlijk verdelen (van voedsel, etc.) dat reeds de grondslag vormde voor de breuken in de Papyrus Rhind.[18]
Opmerkelijk met het oog op het leergangvoorstel, dat in deze studie gedaan wordt, is de niet onbelangrijke kwestie van de aanvankelijk *monografische* behandeling van de breuken evenals dit voor de gehele getallen in het aanvangonderwijs werd voorgesteld. Bij de *monografische* behandeling van

een getal, bijvoorbeeld 12, komen op het moment van invoering van dit getal, alle voor het aanvangsonderwijs onderscheiden onderdelen en subonderdelen te pas, zoals tellen, meten, het uitvoeren van bewerkingen.
In het 'geval' 12 worden 12 aanwezige voorwerpen geteld, opgeteld, eerlijk verdeeld, opgedeeld in groepjes, etc. en tevens treedt 12 op in schriftelijke opgaven als $8 + 4 = 10 + .$ en $12 - 6 = 12 - 2 - .$ en $12 = . \times 2$ en in hoofdrekenopgaven als $12 = 12 \times 1$, $12 = 6 \times 2$, $12 = 4 \times 3$.
Voor de breuken gebeurde, althans bij de introductie iets dergelijks. Direct na het invoeren van $\frac{1}{2}$, passeerden allerhande betrekkingen met $\frac{1}{2}$ in een hoofdrol en geënt op het uitvoeren van de vier hoofdbewerkingen de revue.[19]

Bouman en Van Zelm
Een halve eeuw geleden was de methode 'Bouman en Van Zelm' (nog) toonaangevend in Nederland.[20] Hij dateerde van 1918.
Deze methode bezag de 'rekenkundige denkbaarheden in logische samenhang'.
'Theorie' en praktijk zijn strikt gescheiden. Het onderwerp verhoudingen, het toepassingsgebied voor de breuken bij uitstek zoals we hebben laten zien, vertoont een opbouw die verloopt van 'het denken van verhoudingen van het ene *on*benoemde getal tot het andere' via 'verhoudingen van *be*noemde getallen' naar 'het oplossen van vraagstukjes, waarin de verhouding der gegevens overeenkomt met de behandelde getalverhouding'.
De keuze van deze didactische uitlijning wordt als volgt verantwoord.

> 'Keert men de zaak om, dat wil zeggen: tracht men allerlei verhoudingen tot bewustzijn te brengen naar aanleiding van benoemde getallen, die in de sommen voorkomen, dan wordt het rekenonderwijs in hooge mate verzwaard. Ieder onderwijzer, die zelfstandig vraagstukjes laat oplossen, weet bij ondervinding, dat de denkkracht van tal van kinderen niet beantwoordt aan zeer matig te stellen eischen.' [21]

Het verhoudingsrekenen los van enige context werd dus doelbewust vooropgezet en van de toepassingen afgezonderd.[22] In plaats van de traditie zonder meer te volgen werd deze uitlijning nu dus didactisch verantwoord.
Hoe staat het met de behandeling van de breuken in Bouman en Van Zelm, nu het historische toepassingsgebied bij uitstek hiervoor, naar het tweede plan is geschoven?
Niet anders dan met de verhoudingen. Er is een apart deeltje (VII), waarin de gewone breuken geïntroduceerd worden in de geest van Versluys en Zijlstra, zij het aanzienlijk schraler, en waarin de technische aspecten van het breukrekenen worden behandeld. In latere deeltjes volgen de toepassingen in vraagstukjes, nadat eerst nog het rekenkundige verband met de decimale breuken in deeltje VIII is gelegd.[23]

Tweestromenland
In de rekenmethoden, die na de tweede wereldoorlog in ons land verschenen tekenden zich globaal beschouwd twee benaderingen steeds duidelijker af.

Enerzijds werd de vakdidactische benadering, die door Versluys en Zijlstra werd ingezet, genuanceerd voortgezet. Anderzijds werd voortgebouwd op Bouman en Van Zelm, zij het in aangepaste vorm. Sinds de invoering van de leerplicht in 1900 deed het probleem van de differentiatie in het rekenonderwijs zich in toenemende mate gelden.[24]
Ook Bouman en Van Zelm kwamen op hun manier aan dit probleem tegemoet door vanaf deeltje IX van hun methode met alternatieve deeltjes te komen.[25]
De trend voor de methoden uit de jaren veertig en vijftig werd gezet door 'Diels en Nauta', die reeds voor de tweede wereldoorlog de hegemonie van Bouman en Van Zelm aantastte.[26] De bezuiniging op de leerstof die Diels en Nauta, vergeleken met Bouman en Van Zelm toepasten, kenmerkte zich door vereenvoudiging, het terugdringen van vorm- en denksommen en meer aandacht voor het hoofdrekenen (rekendictee). De zogenaamde 'uitloopdeeltjes' en 'opleidingsdeeltjes' dienden om de methode het nodige differentiatiegehalte te verlenen. Andere middelen, die in de zogenaamde 'vijftigers' wel werden toegepast, waren het indelen van de leerstof in A-, B- en C-taken of het geven van aanwijzingen voor de leerlingen (steeds op de linkerpagina) in de leerlingenboekjes.
Wat de breuken aangaat, kunnen we kort zijn. De mechanistische trekken tekenen zich steeds pregnanter af: het direct afstevenen op regels, het domineren van kale sommen, het verworden van toepassingsvraagstukjes tot aangeklede rekenopgaven, het atomiseren van de leerstof tot de meest elementaire en schematische grondvormen.[27] Deze trekken kenmerken overigens het hele leerpakket.
Het historische beginsel van eerst de techniek en dan (eventueel) de toepassingen was mede door Bouman en Van Zelm en sterker nog door Diels en Nauta tot onderwijskundig adagium verheven. Dit gold althans de methoden die naar de leerinhoud zochten te differentiëren. De geschetste trend zette zich in de jaren zestig en deels ook nog in de jaren zeventig krachtig door. Het rekenonderwijs verwerd tot individuele sommenmakerij, georganiseerd door de leerkracht als administrateur van de vorderingen, een vruchtbare voedingsbodem voor het aan de lopende band voortbrengen van gevallen als Benny (§ 1.1). Het contextloze, in kleine stapjes uiteengelegde en op regels gerichte rekenen liet zich immers het eenvoudigst in tempodifferentiatiemodellen organiseren.[28]
De drijvende kracht in de andere trend is juist het zich afkeren van het kale, mechanistische rekenen, ten gunste van toepassingsgericht rekenonderwijs of anders gezegd: rekenonderwijs met een zeker realiteitsgehalte.[29]
Naar zijn invloed gerekend bleef deze vakdidactische benadering van bescheiden omvang.

> 'Misschien was dit te wijten aan de 'New Math' als glanzend perspectief en alternatief voor het 'ouderwetse' rekenen (zoals het toen heette) die in het midden van de jaren zestig opkwam'. (Treffers, 1985, p.13)

Over de breuken kunnen we opnieuw kort zijn. Hoewel de toewending tot de realiteit zich zo hier en daar ook in de behandeling van de breuken deed gelden, slaagde men er geenszins in het 'juk der traditie' af te werpen. Tot in de jaren zestig was de druk van toetsnaalden en toelatingsexamens op het breukvlak van lagere school en voortgezet onderwijs hieraan niet vreemd.[30]

Recente ontwikkelingen
Met voorgaande historische schets is de status van de breuken in het huidige methodenbestand nagenoeg getypeerd. Alleen de bezwering van de dreigende invloed van de New Math-beweging in de jaren zeventig ten gunste van een eigen ontwikkeling middels het Wiskobas-project in de jaren zeventig en tachtig dienen de historie nog aansluiting te geven op het heden. Kort gezegd komt het hierop neer, dat beide gesignaleerde trends zich geconsolideerd hebben, zij het, dat de invloed van de mechanistische benadering tanende is. Het op de realiteit van de toepassingen gerichte rekenwiskundeonderwijs daarentegen vergroot zijn invloedssfeer nog steeds, mede door de onvrede in het onderwijsveld met de mechanistische benadering en door de ontwikkeling binnen en de nawerking van het Wiskobas-project.[31]
We volstaan voorlopig met deze vaststelling omdat dit voor de signalering van het probleem dat in deze studie centraal staat toereikend is.
We komen tot de slotsom dat de techniek van het rekenen al vrij vroeg in de geschiedenis geïsoleerd van de ontstaansbron en de toepassingen, voorop kwam te staan. Zodoende werd de kunst van het rekenen door de techniek overvleugeld en lange tijd overleefd.

1.3.2 Het probleem gekenschetst
Breuken is een lastig en complex onderwerp. Vandaar, dat een voor-aanstaand didacticus als Van Hiele zich eertijds al afvroeg:

> 'Zouden we het rekenen met breuken misschien kunnen afschaffen?'.[32]

De onderzoeks- en vakdidactische literatuur bevat een respectabele bloemlezing van uiteenlopende oorzaken omtrent het falen van het onderwijs in breuken.
Mede gelet op de gevalsbeschrijvingen van Erlwanger en op grond van door ons in het verleden verricht onderzoek[33] komen wij tot het volgende signalement.
Globaal beschouwd zijn er twee bronnen van oorzaken voor het breukenprobleem, namelijk
— verregaande onderschatting van de complexiteit van dit leergebied voor kinderen;
— de mechanistische benadering van de breuken, onthecht aan de realiteit en gericht op rigide regeltoepassing.
Wat is er dan zo lastig en complex aan de breuken?
Freudenthal (1986, p.6) formuleerde het zo:

'Ein neues Ding, das sich unter so vielen Namen verbirgt, und um mit ihm umzugehen, muss man den von Fall zu Fall geeigneten Namen kennen, den man durch Kürzen und Erweitern ermittelt! Und dann die komplizierten Gesetze, denen diese neuen Dinge bei den Grundrechenarten gehorchen. Je mehr das Bruchrechnen der Realität verhaftet gelernt und geübt wird, desto grösser wird die Zahl derer sein, die es sich erwerben'.

In het miskennen van de noodzaak tot de bepleite toewending naar de realiteit ligt de oorzaak van wat Goffree (1985a) 'een klassiek drama' noemde, besloten.
In deeloorzaken gespecificeerd tekenen zich de contouren en trekken in het signalement van het breukenprobleem af.
De aanpak van breuken (en decimale getallen) is vrijwel van meet af aan formeel en gericht op het opereren volgens nauw omschreven regels[34].
Dit brengt een betrekkelijk eenzijdige benadering met zich mee gekenmerkt door een oppervlakkige en vluchtige instap door eenhedenverdeling[35], en een regelgerichte inkleding van de bewerkingen, dus het negeren van de concrete instap als mogelijke grondslag voor de bewerkingen.
Het leerproces wordt in het geheel niet of slechts bij wijze van incident ondersteund met wiskundige werktuigen en hulpmiddelen in de vorm van notatievormen, schema's of modellen.
Samenhang met het overige curriculum ontbreekt of deze wordt op te ver gevorderde niveaus van abstractie en algoritmisering geforceerd.
De fragmentarische en informele kennis en inzichten, die kinderen in hun buitenschools leren opgedaan (kunnen) hebben wordt genegeerd.[36]
Samengevat komt het erop neer, dat de traditionele benadering van de breuken op alle te onderscheiden onderdelen van de leergang defecten vertoont, wat de onderlinge samenhang van de onderdelen aangaat en op het punt van de inbedding in het geheel van het curriculum voor rekenen/wiskunde.
Weliswaar wint als nawerking van het Wiskobas-project, de realistische benadering van rekenen en wiskunde nog steeds aan invloed, althans het aantal methoden van realistische signatuur groeit nog steeds. Ook het aantal gebruikers van dergelijke methoden neemt toe. Dit kan echter niet verhelen, dat op het moment van voortijdige beëindiging van het Wiskobas-project, nog geen afdoende oplossing voor het breukenprobleem aan het onderwijsveld kon worden aangereikt.[37]
De gegeven aanzetten tot een nieuwe breukendidactiek zijn door auteursgroepen van meer op de realiteit gerichte reken/wiskundemethoden verwerkt.[38]
Dit neemt echter niet weg, dat het op geheel eigen wijze verwerkte materiaal en de toegepaste inzichten nog ruimschoots voor verbetering vatbaar zijn. Nog teveel vragen waren onbeantwoord gebleven. Dit wordt bevestigd door het feit dat het voorstel tot het radicaal omgooien van het didactische roer voor het breukenonderwijs nagenoeg volledige instemming verwierf van enkele honderden deskundigen, daartoe ondervraagd met het oog op de ontwikkeling van een nationaal plan voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool.[39]

De kwesties die bleven liggen, betroffen zowel onduidelijkheden en hiaten in de uitlijning van het tot dan toe ontwikkelde voorbeeld van een leergang als ook in de leereffecten in deels ermee beoogde, deels gerealiseerde individuele leerprocessen.[40]

1.4 Overzicht en uitzicht

Tekorten in de traditionele benadering van de breuken werden gesignaleerd. Het betrof rigide, regelgericht onderwijs, voorbijgaand aan het fragmentarische en informele kennisbestand van de leerlingen, berustend op een oppervlakkige, vluchtige en eenzijdige concrete instap, goeddeels onthecht aan de realiteit en geïsoleerd binnen het wijdere verband van het curriculum voor rekenen-wiskunde als geheel.
Tevens werd een nog steeds voortgaande toewending naar de realiteit vastgesteld, wat het reken-wiskundeonderwijs aangaat.
Met de vaststelling aan het slot van § 1.3 is de probleemstelling van deze studie voorlopig geduid. Het gaat om het *ontwikkelen en beproeven* van een leergang waarin de nog aanwezige hiaten en de tekorten van de traditionele benadering ontbreken.
Ook zal onderzoek verricht worden naar de leereffecten van de nieuwe leergang in ontwikkeling met het oog op de nagestreefde doelstellingen. Kortom, het gaat om ontwikkelingsonderzoek.
Alvorens deze voorlopige aanduiding van onze probleemstelling nader uit te werken, zullen eerst enkele stromingen in het wiskundeonderwijs naar hun benadering van de breuken nader worden geprofileerd.
Op grond van een (voorlopige) stellingname zal onze probleemstelling vervolgens nader worden omschreven. De theoretische fundering ervan zal overigens pas in het achtste hoofdstuk worden uitgevoerd.

Noten bij hoofdstuk 1

1. Zie in dit verband Erlwanger (1973) en (1975) en bijvoorbeeld ook Goffree (1984) en (1985).
2. Het betrof IPI, Individually Prescribed Instruction; Zie Erlwanger (1973) en Howson e.a. (1981): hoofdstuk 6.
3. Uit de overvloed aan literatuur noemen we Hart (1985), Hasemann (1985), (1986), Hunting (1986), Lesh, Landau en Hamilton (1983).
4. Het Tweede Wiskunde Project werd uitgevoerd door de vakgroep Toegepaste Onderwijskunde van de T.H. Twente onder leiding van W.J. Pelgrum.
   I.E.A. staat voor International Association for the Evaluation of Educational Achievement.
   Zie voor de kwestie van de ankeritems Schuring (1985).
   Pelgrum e.a. (1983) rapporteren over het Tweede Wiskunde Project. Voor commentaren van uiteenlopende invalshoek op het onderdeel wiskunde in het project verwijzen we naar Euclides 61 (2).
5. Ook buiten de ankeritems om zijn de resultaten op het onderdeel rekenen onthullend. Pelgrum e.a. (1983).
   Overigens steken de resultaten van Nederland niet ongunstig af vergeleken met die van andere (westerse) landen.
   De in het IEA-onderzoek geboekte resultaten komen overeen met bijvoorbeeld de resultaten op de periodiek verrichte peilingen in het onderwijs in de Verenigde Staten van Noord-Amerika, de zogenaamde NAEP-onderzoeken.
   NAEP staat voor 'The National Assessment of Educational Progress', zie Carpenter e.a. (1975), (1980) en ook met de bevindingen van Hart (1981) (1985).
6. Zie Bunt (1968), Van der Waerden (1950).
7. Sterker nog: de oorsprong van de sexagesimale, positionele grondslag van het Babylonische getallenschrift met 60 als zogenaamde 'grote eenheid' moet (hoogstwaarschijnlijk) in de metrologie gezocht worden. De gewichten, die tevens dienden als geldeenheden, waren namelijk sexagesimaal geordend. (Van der Waerden, 1950)
   Het gebezigde getallensysteem voerde dus rechtstreeks terug op de praktijk van markt en handel.
8. Het betreft het arithmetica tractaat 127R-191R ± 1532, hs.2141 UB Gent, dat door Marjolein Kool toegankelijk werd gemaakt door transcriptie en verklaring. Kool (1984).
   Aparte vermelding verdient het feit, dat het halveren en verdubbelen, bewerkingen die de grondslag van de Egyptische rekenkunde vormden, nog steeds als afzonderlijke bewerkingen in het beschouwde tractaat zijn onderscheiden (mediatie en duplicatie), zie Kool (1984, deel I).
9. Al dient hier gezegd, dat er, evenals dit bij de Papyrus Rhind bijvoorbeeld ook al het geval was, vraagstukken zijn opgenomen voor het plezier van de rekenaar, in het geval van het tractaat fictieve situaties beschrijvend.
10. Deze regel, ook wel 'Reghel van Dryen' of 'Regel de Tri' genoemd, behelst de rekenregel voor het vaststellen van de ontbrekende 'vierde' bij drie gegeven getallen, volgens zekere verhouding, die in twee van de drie gegeven getallen vervat is. Voorbeeld: Als 4 ellen linnen 9 gulden kosten, wat is dan de prijs van 16 ellen?
    Als toepassingsgebied voor de breuken in het onderwijs werd dit terrein opnieuw aanbevolen door Kirsch (1969):

    '...why should we teach fractions, if we would not use them in this context'.

    (loc.cit. p.307).
    Het gaat om regels als: 'Reghel van Wisselinghe', 'Reghel van Mangelinghe', waarmee respectievelijk bedoeld werden, de regel van drie voor het wisselen van geld en de regel van drie voor het vaststellen van een ruilvoet tussen twee verschillendsoortige goederen, waarvan hoeveelheid-prijsrelaties gegeven zijn, bijvoorbeeld:
    'Eén el laken kost 18 stuivers. Een pond suiker kost 3 stuivers. Hoeveel suiker krijgt men

voor 43 el laken.' (Kool, 1984, deel I, p.63 en 128).

11. 'De Thiende' droeg de veelzeggende ondertitel: 'Leerende door onghehoorde lichticheyt allen rekeningen onder den menschen noodich vallende, afveerdighen door heele ghetalen zonder ghebrokenen'. Wanneer men zich op het standpunt stelt, dat in 'De Thiende' de schuchtere en verspreide pogingen van voorgangers om tot invoering van decimale breuken te komen zijn uitgekristalliseerd, en bovendien, dat een algemeen voorstel tot invoering van decimale breuken wordt gedaan, met daaraan verbonden de voorwaarde van de beschikbaarheid van een decimaal verfijnd systeem van maten, gewichten en geldswaarde, dit alles, om de gewone breuken te vermijden, dan kan men Stevin de uitvinder van de decimale breuken noemen. (zie bijvoorbeeld R.Depau: Simon Stevin, Brussel, 1942, p.62 of Boyer (1962)).
    Het is Boyer, die ook aan Francois Viète met zijn 'Canon Mathematicus' en aanvullend werk daarop (1579) een deel van de eer wil toeschrijven. Verder worden in dit verband ook genoemd Christoff Rudolff met zijn Exempel Buechlin (1530) en Adam Riese (de Duitse 'Willem Bartjens') met zijn 'Rechnung auff der Linien und Federn' (1522).
12. Zie bijvoorbeeld Streefland (1981b).
13. 'Op 8 mei 1790 besloot de Grondwetgevende Vergadering (in Frankrijk, toevoeging L.S.), een eind te maken aan de eeuwenoude janboel van maten en gewichten' (Freudenthal, 1954, p.49). Dit besluit was het startsein tot de ontwikkeling en instelling van het gedecimaliseerde metrieke stelsel.
14. Te denken valt hier aan de renteberekeningen, het zich lange tijd handhaven van oude maten, gewichten en geldswaarden, bijvoorbeeld de el, die afwisselend naar een lengte van 68 cm dan wel 69 cm dong, althans in de volksmond; het bestaan van de aanduiding van vierduit(en)stuk, lokaal wel verbasterd tot 'verduitenstuk' of 'fiduitenstuk' voor een muntstuk van $2\frac{1}{2}$ ct. tot na de Tweede Wereldoorlog, het werken met delen van tijdseenheden als week, maand, jaar; delen van aantallen als dozijn en gros, e.d. Wel is het zo, dat sinds de invoering van het metrieke stelsel in Franse en ook Nederlandse rekenboeken een volledige behandeling van de decimale breuken voorafging aan de gewone breuken.
    In Nederland hield deze uitlijning in de meeste rekenboeken driekwart eeuw stand, totdat de invloedrijke methode van J. Versluys verscheen in 1875/1876, die voor de geschetste voorrangskwestie een middenweg bewandelde, geen afscheiding van decimale breuken en gewone breuken bepleitte, doch een gezamenlijk optrekken in het onderwijsleerproces. Het startpunt werd bij de gewone breuken gelegd om didactische redenen. De voornaamste was de betere mogelijkheid tot veraanschouwelijken van de zogenaamde natuurlijke breuken waarmee kinderen op grond van buitenschoolse ervaringen vertrouwd zijn. Zie Versluys (1899, § 90, pp.53-56).
    Overigens sloot Versluys met zijn keuze de voorrangsdiscussie decimale breuken en gewone breuken geenzins af. Ze zou nog bij herhaling gevoerd worden. Zie in dit verband Streefland (1983, hfdst I).
15. Zie bijvoorbeeld Goffree (1982) over een uitgave van 'Bartjens' uit 1648 of 'De Vernieuwde Cijfferinghe van Mr. Willem Bartjens', Hersteld, vermeerderd en verbeterd door Mr. Jan van Dam, Amsterdam, 1794.
16. Zie in dit verband Streefland (1982a) en Goffree (1985a).
17. Vergelijk Treffers (1985).
18. Zie in dit verband Versluys (1899)
    De voorstellen van Zijlstra (1901) vertonen sterke overeenkomst met die van Versluys.
    Ook Kühnel (1966, eerste druk 1916) zocht het in dezelfde richting als Versluys en Zijlstra, zij het dat zijn didactiek nog verfijnder was.
19. Versluys (1899, pp.45-53); Zijlstra (1901, pp.102-109).
    Zie ook hoofdstuk 4.
20. Bouman en Van Zelm (1918).
21. Bouman en Van Zelm, deeltje 9, loc.cit. p.322.
22. In de bekende 'Elementen van Euclides' (300 v. Chr.) geschiedde dit overigens ook al, zij het dat het daar meetkundige toepassingen betrof.

De redentheorie liep vooruit op de toepassingen in gelijkvormigheidsvraagstukken, waarmee de ontogenese op z'n kop werd gezet (Streefland, 1982b).

23. Op dit punt werd dus afgeweken van de didactische voorstellen van Versluys (1899).
24. Ook vóór die tijd bestond dit probleem overigens al. Zo maakt Versluys melding van een geïndividualiseerde benadering van het rekenen voor de hoogste klasse (de twee laatste leerjaren) van de lagere school, in de 19e eeuw. Deze kenmerkte zich door tempodifferentiatie en individuele hulp van onderwijzer of medescholier (Versluys, 1899, p.92).
25. Er verschenen 'nieuwe' deeltjes 9, 10 en 11, waarin sterk bezuinigd was op de leerstof die oorsponkelijk in die deeltjes was opgenomen. Deze toegevoegde, vervangende deeltjes waren vooral bedoeld voor die kinderen, voor wie de lagere school eindonderwijs verzorgde. Zie ook Treffers (1985).
26. Zie Diels en Nauta (1936). Zie ook Treffers (1985).
27. Zie Wiskobasteam (1980) en Treffers (1985).
28. Een dieptepunt vormt in dit opzicht de methode Niveaucursus rekenen. Zie Streefland (1983); zie ook hoofdstuk 7.
29. Als representanten van deze richting, die voortbouwde op de didactische traditie en op het rekenonderwijs, op denkpsychologische grondslag, kunnen genoemd worden 'Functioneel Rekenen' van Reynders en Sneijders. 'Dat is Rekenen' van Tiemersma en Wardekkers e.a., zie verder Treffers (1985), Wiskobasteam (1980).
    Voor de aard en invloed van de rekendidactiek in de naoorlogse onderwijzersopleiding verwijzen we naar Goffree (1979) en wat de ontwikkeling van reken-wiskundemethoden in het naoorlogse aangaat naar De Jong (1986).
30. Zie bijvoorbeeld Meijer en Streefland in Wiskobasteam (1980). Door de invoering van de mammoetwet veranderde de toelatingsprocedure tot het voortgezet onderwijs.
31. Treffers (1985); zogenaamde realistische reken-wiskundemethoden verheugen zich nog steeds in een groeiend marktaandeel (De Jong, 1986).
32. Hoofdstuk met gelijkluidende titel in Van Hiele (1973).
    In 1985 blijkt de aarzeling bij Van Hiele omtrent het afschaffen van de breuken in het basisonderwijs volledig verdwenen te zijn, zoals bleek in een interview met Goffree (1985b). Van Hieles bespreking (1984) van Freudenthals Didactical Phenomenology of Mathematical Structures (1983), weerspiegelde deze zekerheid omtrent de breuken in het basisonderwijs ook al.
33. Streefland (1983). Deze studie bevat eveneens een uitgebreid literatuuronderzoek.
34. Treffers en De Moor (1984).
35. Freudenthal heeft bij herhaling op deze tekortkoming van het breukenonderwijs gewezen. Zie bijvoorbeeld Freudenthal (1968).
36. Zie in dit verband Streefland (1983), Hasemann (1985), Goffree (1985a). Overigens achten wij de aanbevelingen, die Hasemann (1986b) doet ter verbetering van het breukenonderwijs ontoereikend om dit de vereiste gedaanteverwisseling te doen ondergaan. In verband met een mogelijk aandeel van kinderen in het uitstippelen van hun eigen leerweg merken we nog op, dat uit eerste resultaten van onderzoek naar 'Children's Mathematical Frameworks' blijkt, dat de overgang van concrete ervaringen naar meer formele benaderingen van wiskundige verschijnselen geenszins vanzelf gaat en dat de oorzaak hiervan gezocht moet worden in het niet zien van enige samenhang tussen concreet opereren en formeel handelen. Hart (1985), WRR (1986).
37. Zie Streefland (1983), De Jong (1986). Het project stopte met de opheffing van het IOWO.
38. De Jong (1986). De breukenleergangen weerspiegelen de methoden 'Taltaal', 'De Wereld in Getallen' en 'Rekenen en Wiskunde' de stand van zaken met betrekking tot dit onderwerp in het Wiskobasproject en later onderzoek.
39. Cadot en Vroegindeweij (1986, pp.99-102).
40. Streefland (1983).

2 Stromingen Stellingname Probleemstelling

2.1 Inleiding en Overzicht

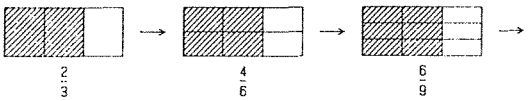
In de historische beschouwing van het eerste hoofdstuk tekende zich een 'tweestromenland' in het reken-wiskundeonderwijs in Nederland af. Enerzijds betrof het de sterk door de traditie bepaalde benadering van het rekenen, gericht op de verwerving van het systeem, al dan niet met inzicht, op oefenen binnen het systeem en het toepassen hooguit op het tweede plan. Anderzijds ging het om de meer realistische benadering van rekenen-wiskunde, waar toepassingen – zeg realistische probleemvelden – juist in het hart van de leergangen gesitueerd worden.
Welnu, dit onderscheid zal in dit hoofdstuk nader worden verhelderd.
Aan de gezichtshoeken van waaruit men de breuken kan bezien, wordt het met de 'New Math' verwante structuralisme met nog een variant daarop toegevoegd. Op grond hiervan wordt het gekozen uitgangspunt voor deze studie ontvouwd, waarna tot formulering van de probleemstelling kan worden overgegaan.
Een korte terugblik en enig zicht op het vervolg vormen de sluitstenen van dit hoofdstuk.

2.2 Stromingen

2.2.1 De structuralistische benadering

In deze basisconceptie of specifieke leertheorie wordt wiskunde beschouwd als cognitieve verworvenheid, als een geordend, gesloten, deductief systeem. Een belangrijk gevolg hiervan voor het wiskunde-*onderwijs* is, dat de *structuur* van het systeem en *structuren in* het systeem de belangrijkste pijlers zijn, waarop het onderwijsleerproces gefundeerd wordt.
Voor de breuken betekent dit, dat veel nadruk gelegd wordt op de equivalentie en op de rekenregels en eigenschappen bij de omzetting van breuken in ermee gelijkwaardige. Dat wil zeggen, dat de aandacht (van de lerende) gericht wordt op de breuk, die opgaat in het wijdere verband van zijn equivalentieklasse en tezelfdertijd staat voor die klasse, deze vertegenwoordigt.
Het nastreven van inzicht is in deze benadering van primair belang, vandaar dat de nodige nadruk gelegd wordt op *samenhang* in het curriculum. Daarom wordt equivalentie niet beschouwd als afzonderlijk fenomeen, doch in samenhang met de toepassing ervan bij het voltrekken van enkele van de hoofdbewerkingen, in het bijzonder het optellen en het aftrekken. Het optellen van twee breuken met verschillende noemers, bijvoorbeeld $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$, betekent in dit verband, dat voor $\frac{2}{3}$ zowel als voor $\frac{3}{4}$ eerst equivalentieklassen worden voortgebracht, resp. $\{\frac{2}{3},\frac{4}{6},\frac{6}{9},\frac{8}{12},\frac{10}{15},\cdots\}$ en $\{\frac{3}{4},\frac{6}{8},\frac{9}{12},\frac{12}{16},\cdots\}$, vervolgens 'geschikte' representanten worden gekozen, $\frac{8}{12}$ en $\frac{9}{12}$, ($\frac{16}{24}$ en $\frac{18}{24}$

had bijvoorbeeld ook gekund), om op grond daarvan tot de gevraagde optelling te kunnen overgaan:
$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$ $(= 1\frac{5}{12}$; resp. $\frac{16}{24} + \frac{18}{24} = \frac{34}{24} = 1\frac{10}{24} = 1\frac{5}{12})$.
Dergelijke operaties worden in visueel materiaal voorbereid voordat naar het geschetste symbolische niveau wordt doorgestoten:



Onder invloed van de 'New Math'-beweging zijn in de zestiger jaren met name in de V.S. leerboeken geschreven, waarin heel zorgvuldig leergangen werden construeerd voor het optellen en aftrekken van ongelijknamige breuken, waarvoor de geschetste benadering de grondslag vormde.[1]
Het gebruik van voorgestructureerd materiaal, zoals breukencirkels, past in deze benadering, maar ook – wanneer de leergang gegrondvest wordt op de breuk in de operator – de beschouwing van de breuk als rek- en krimp-*machine*. In deze beschouwingswijze van breuken worden de teller en de noemer als afbeeldingen opgevat. (Vergroten en verkleinen resp. rekken en krimpen[2]; het vermenigvuldigen, bijvoorbeeld wordt dan als een aaneenschakeling van rek- en krimpmachines gezien.)
De genoemde materialiseringen zijn bedoeld om de leerlingen stapje voor stapje concrete representaties van het systeem (op gewichtige onderdelen) te verschaffen. Binnen de beschouwde basisconceptie valt het onderwijsleerproces globaal als volgt te typeren.
Na een betrekkelijk korte en eenzijdige instap volgt de periode van het inzichtelijk oefenen van de basisvaardigheden (binnen het systeem) waarna de leerfase mogelijk wordt afgesloten met het verwerken van enkele toepassingsproblemen. De nadruk ligt dus eerst en vooral op het voortschrijden binnen het wiskundige systeem zèlf (het verticaal mathematiseren). Om de instap in het verticale mathematiseringsproces voor de leerlingen te realiseren worden de grondbegrippen en grondelementen verhelderd door materiële representaties.
Echter, het voltrekken van de grensoverschrijding van een realistisch probleemveld naar de wiskunde toe blijft in deze benadering buiten beschouwing. Het op eigen kracht passeren van de grens tussen realiteit en wiskunde onder inzet van passende wiskundige werktuigen, door Treffers (1987) horizontaal mathematiseren genoemd, vindt in het onderwijsleerproces dus niet plaats.[3]
Op grond van het voorgaande kan het traditionele rekenonderwijs als voortbrengsel van de historische ontwikkelingsgang nu eenvoudig worden getypeerd als mechanistisch onderwijs.

2.2.2 De mechanistische benadering

Het nastreven in het onderwijsleerproces van kwaliteiten als structuur, samenhang en inzicht, kenmerkend voor de structuralistische benadering, wordt in de mechanistische veronachtzaamd, dan wel volledig genegeerd ten gunste van de geval-na-geval-behandeling onder toename van de complexiteit. In iedere fase van het onderwijsleerproces ligt het einddoel vast, of beter, staat het einddoel voorop, namelijk het realiseren van het bij dat stadium passende algoritmische eindniveau.

Het toepassen blijft – wat de breuken aangaat – beperkt tot het voltrekken van regels voor het vereenvoudigen van breuken, het omzetten van breuken >1 in gemengde getallen en omgekeerd, en het uitvoeren van de vier hoofdbewerkingen.

Het is deze benadering, die het signalement van het breukenprobleem bepaalt, en waarvan de contouren en enkele globale trekken eerder werden verwoord.

Het individuele leerproces van veel leerlingen kenmerkt zich door het oproeien tegen een stroom van contextloze opgaven, een overvloed, die buiten zichzelf treedt, de afhakers meesleurend, ontsporend van hun eigen leerweg, dikwijls voorgoed.

2.2.3 Pragmatisch structuralisme

De tot nu toe beschreven basisconcepties of specifieke leertheorieën moeten beschouwd worden als ideaaltyperingen. Zoals dit bij typologieën te doen gebruikelijk is, mag men verwachten in de praktijk van het onderwijs mengvormen of varianten aan te treffen.

Een mengvorm of variant, die nauw aansluit bij het door Van Hiele ingenomen standpunt ten aanzien van de breuken, zou men met *pragmatisch structuralisme* kunnen aanduiden. Dit gaat er vanuit dat voortschrijding in het wiskundig systeem op zeker moment toepassing van de breuken vergt. Welnu, smeed het breukijzer als het op hitte is, zo luidt nu kortweg de stellingname.

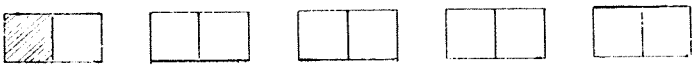
Men kan hierbij dan bijvoorbeeld denken aan het toepassen van breuken bij het oplossen van lineaire of kwadratische vergelijkingen, het uitvoeren van allerlei algebraische bewerkingen in het letterrekenen, het invullen van formules, die in concrete gevallen moeten worden toegepast e.d.[4] Zo zou men bij de introductie van de irrationale getallen, bij wijze van contrastwerking, de rationaliteit van de breuken (rationale getallen) kunnen beklemtonen. Nog op andere wijze kan men de rationale getallen voor de introductie van de irrationale te hulp roepen, namelijk door de irrationale als machten met gebroken exponenten bij exponentiële groei te introduceren.[5]

Zonder ons in overbodige, technische details te verliezen stellen we vast, dat – globaal beschouwd – meerdere momenten in het verticale mathematiseringsproces aanwijsbaar zijn waar breuken in het voortgezet wiskundeonderwijs toepassing vinden. Het geschetste standpunt kan dan nog verstevigd worden met het argument dat de natuur- en scheikunde door hun

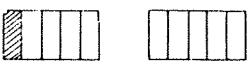
toepassingsmogelijkheden voor de breuken ook nog hun steentje kunnen bijdragen aan de voorgestane behandeling ervan.[6]

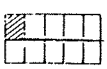
2.2.4 Intermezzo

Door het oplossen van allerhande (verdeel)problemen in de werkelijkheid werden de breuken voortgebracht. In het 'historische leerproces' voltrok de mensheid de grensoverschrijding naar de wiskunde, daarmee o.a. de breuken scheppend.
In de geschetste, structuralistische basisconceptie blijft dit kenmerk van de historische oorsprong buiten beschouwing; er wordt niet horizontaal gemathematiseerd. De structuur van het systeem staat voorop. Omwille van het onderwijsleerproces wordt het geconcretiseerd naar de leerlingen toe. De hiertoe aangewende materialiseringen, zoals bijvoorbeeld gevarieerd verdeelde rechthoeken voor gelijkwaardigheid, zijn bedoeld om het systeem te *reproduceren*. Anders gezegd: de materialiseringen worden in dienst gesteld van het verticaal mathematiseren. Daardoor krijgen deze iets kunstmatigs, iets willekeurigs, althans het nagestreefde doel wordt er a priori in vervat. Dit leidt niet alleen tot *valse* concretiseringen, zoals Freudenthal (1984) ze noemde.[7] Ook vooronderstelt een dergelijke benadering het inzicht dat men met het onderwijsleerproces juist wil verwezenlijken.
Hier nu manifesteert zich een beslissend verschil met het historische materiaal waarop de breuken gegrondvest werden. Dit was namelijk in hoge mate *generatief*; het had de potentie tot *voortbrenging*. De breuken werden ermee gegenereerd en ook hun *operatoire* samenhang. Neem zoiets als de Rhind no. 5 '8 broden verdelen onder 10 mannen'.
Een mogelijke verdeling is:

Eerst 

ieder $\frac{1}{2}$ brood, dan

 ieder $\frac{1}{5}$ brood, en tenslotte

 ieder nog $\frac{1}{10}$ brood, dus ieder

$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ brood. ($\frac{8}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$).

Iets dergelijks ligt niet alleen voor de hand, doch weerspiegelt bovendien de dominantie van eenheids- of stambreuken in de Egyptische rekenkunde en onthult tevens de vermoedelijke oorsprong daarvan.[8]
Twee ingrijpende verschillen tussen de structuralistische benadering en het

'historische leerproces' tekenen zich nu af – verschillen overigens die verre van onafhankelijk van elkaar zijn – namelijk:
— de structuralistische benadering gaat voorbij aan de realiteit als bron voor de wiskunde, die men op het oog heeft, met als consequentie dat
— systeem voortbrengend materiaal wordt vervangen door systeem reproducerend materiaal.

Kortom, het structuralistische uitgangspunt betekent, dat de algemene doelen voor het wiskundeonderwijs vastgelegd worden. Deze laten zich globaal samenvatten tot: *het inzichtelijk reproduceren van het systeem.* Het alternatief dat zich reeds aftekende neemt de volgende paragraaf voor zich in.

2.2.5 De realistische benadering

In plaats van de '*inzichtelijke reproduktie van het systeem*' te beklemtonen, zoals in de structuralistische opvatting, is er ook de historische pendant: '*de inzichtelijke constructie van het systeem*'.[9]

Men kan zich daarbij het volgende afvragen:

Wat zijn de globale trekken van het onderwijsleerproces, dat zich op een dergelijke doelstelling richt?, en: *Hoe ziet het onderwijs in de breuken er globaal beschouwd uit binnen een dergelijke onderwijskundige context?* (zie ook hoofdstuk 3).

De eerste kwestie betreft de onderwijskundige grondstellingen, zoals Treffers (1987) ze noemde en die hier vanuit historisch perspectief zullen worden ontvouwd.[10]

Een tweetal grondtrekken tekende zich in het voorgaande reeds af.

De *eerste* is, dat de realiteit zich aandient als *bron* voor de voort te brengen wiskunde. De wiskunde die men nastreeft, vindt in reële probleemvelden haar oorsprong.

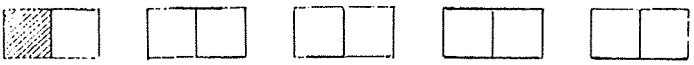
Door deze sterke verbondenheid van werkelijkheid en wiskunde, zal men bij het toepassen van de eenmaal verworven wiskunde opnieuw in de werkelijkheid terecht kunnen. De realiteit is dus ook toepassingsgebied.

Uitgaande van de realiteit kunnen de leerlingen zelf de grensovergang naar de wiskunde leren voltrekken, door zèlf te structureren, te ordenen, te symboliseren, visualiseren, schematiseren en wat niet al. Kortom, door zèlf het horizontale mathematiseringsproces vorm te geven.[11]

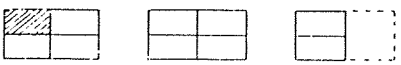
Maar ook, tezelfdertijd dan wel naderhand, met de bewerking van het voortgebrachte wiskundige materiaal binnen de wiskunde zelf voort te schrijden door het verhogen van de efficiëntie van procedures, door voortschrijding in schematiseren, door het aanbrengen van verkortingen, door linguistisch relatieve taal te vervangen door de taal van de conventionele symbolen en variabelen, kortom door abstraheren, generaliseren en unificeren en waar nodig specificeren.[12]

De *tweede* onderwijskundige grondstelling, die we betrekken, heeft van doen met het uitgaan van open probleemsituaties met een sterk generatief karakter. In het onderwijsleerproces betekent dit – daarmee tevens recht doende aan 'het historische leerproces' – dat de leerlingen met dergelijk materiaal

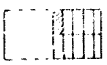
constructeurs worden, voortbrengers van hun eigen wiskunde. Het gaat er daarbij niet om de leerlingen het historische leerproces nogmaals te doen doorlopen naar de letter, maar wèl naar de geest.[13] Anders gezegd: het gaat erom de onderwijsleerweg uit te lijnen door rationele reconstructie van het historische leerproces. Daarmee wordt een instap in het leerproces op te hoog niveau van abstractie voorkomen en kan het geleidelijk voortschrijden in het mathematiseren naar historisch voorbeeld gerealiseerd worden.
Voor het *derde* basisprincipe of kenmerk grijpen we nog eens terug op de Rhind no.5: '8 broden verdelen onder 10 mannen' (§ 2.2.4).
De eerder beschouwde verdeling kan gemakkelijk worden ingeruild voor andere, bijvoorbeeld



eerst ieder $\frac{1}{2}$ brood



dan ieder $\frac{1}{4}$ brood



en tenslotte ieder nog $\frac{1}{20}$ brood, dus ieder $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$ $(= \frac{8}{10})$ brood; maar ook het eenvoudigweg successief verdelen in tienen van elk der broden komt in aanmerking en beslist tot ieders portie van $\frac{1}{10} + \frac{1}{10}$ ..... + $\frac{1}{10} = 8 \times \frac{1}{10} = \frac{8}{10}$ broden.
Ook kan de verdeler de gegeven vraagstelling in verband zien met '4 broden verdelen onder 5 mannen', let wel twee maal toegepast, met alle beschrijvingsconsequenties vandien.
Ieder krijgt $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 4 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.
Dit alles overziende, zal de conclusie geen andere zijn, dan dat het respecteren van de actieve inbreng van de leerlingen en hun rol van constructeur kan, ja zelfs wel moet leiden tot uiteenlopende constructies en beschrijvingen bij het gevolg geven aan de twee eerste onderwijskundige grondstellingen. Vooral de eerbiediging van het tweede basisprincipe brengt met zich mee, dat met het diverse materiaal dat de leerlingen kunnen voortbrengen in het onderwijsleerproces, iets gedaan zal moeten worden, ook al is dit materiaal informeel en weerspiegelt dit het fragmentarische kennisbestand van de leerlingen. Het van daaruit komen tot meer formele stellingnamen vergt, dat er onderhandeld wordt in het onderwijsleerproces. Er zullen discussies moeten plaatsvinden en er zal samengewerkt moeten worden. En er dienen keuzen te worden gedaan, wil men althans het materiaal aan het gezamenlijke leerproces dienstbaar maken.
Het onderwijsleerproces dient dus in hoge mate *interactief* te zijn.[14] Zie daar de derde onderwijskundige grondstelling.
Het *vierde* en *vijfde* onderwijskundige basisprincipe liggen reeds besloten in

de voorbeelden waarmee het derde werd ingeleid.
Als mogelijkheid om te beslissen over de verdeling van '8 broden onder 10 mannen' werd genoemd het zien dat de situatie '4 broden met 5 mannen' zich in de gegeven vraagstelling herhaald voordoet.
Welnu, de keuze van dergelijke situaties als toegang tot de breuken betekent tevens een keuze voor vervlechting met verhoudingen.
Het vergelijken en ordenen van situaties kan al op voorhand met verhoudingen beslist worden. En daar zijn verhoudingen nu juist voor.[15] Een dergelijke samenhang in het onderwijsleerproces waarborgt men door van onversneden realiteit uit te gaan. Voor de uitlijning van het curriculum betekent dit, dat leerlijnen of leergangen *verstrengeld* dan wel *verweven* worden.[16] Dit is dus de vierde onderwijskundige grondstelling.
En wat de *vijfde* aangaat, deze wordt eveneens zichtbaar in het meergenoemde voorbeeld uit de Rhind.
Het laat zien, dat het zonder de nodige wiskundige werktuigen en hulpmiddelen niet zou gaan, wil men althans op de opgeworpen vraagstelling buiten de werkelijkheid om ingaan en zijn bevindingen dienaangaande vastleggen en beschrijven. De wiskundige hulpmiddelen zullen dus in het leerproces voortgebracht, gecreëerd moeten worden: symboliseringen, schema's en (visuele) modellen. Het toegepaste materiaal bij de beschrijving van de Rhind no.5 laat tevens zien dat voortschrijden in het mathematiseren mogelijk wordt op deze manier. Zo kan er afgezien worden van de visuele representatie van het probleem en de symbolische weergaven van verdeelprocessen en uitkomsten kunnen worden verkort. Aldus kunnen hogere niveaus in de betekenis van grotere distantie tot de realistische bron in het materiaal bewerkstelligd worden.
Naar historisch voorbeeld werden aldus de consequenties doordacht van het heruitvinden van de breuken. Vijf onderwijskundige grondstellingen heeft dit opgeleverd.
Het betreft:
— de realiteit dient als *bron* voor de begripsvorming en als *toepassingsgebied*;
— de leerlingen krijgen de gelegenheid tot *actieve inbreng* in hun eigen leerproces; zij zullen de rol van *constructeurs* gaan vervullen;
— de aandacht zal zich in het bijzonder richten op het voortbrengen van *symboliseringen, schema's en (visuele) modellen*;
— leerlijnen worden *verstrengeld*;
— het onderwijs dient in hoge mate *interactief* te zijn.
In al deze onderwijskundige grondstellingen wordt manifest het voortschrijden in mathematiseren, waarop het in feite aankomt in het onderwijsleerproces, daarbij zowel rechtdoende aan de horizontale als aan de verticale component ervan.[17] (Zie ook § 3.2 en § 4.4.)

De tweede kwestie, die we opwierpen aan het begin van deze paragraaf behelsde een kenschets van de breuken in realistisch perspectief.

Welnu, vanuit dit standpunt doen de breuken zich als volgt voor, of beter, komen de leerlingen er op de volgende manier aan.
Er vindt een brede exploratie plaats van de context van het (ver)delen, dat wil zeggen, iets uitdelen, iets opdelen in, eerlijk (ver)delen, (ver)delen met rest, etc. Het *modelkarakter* van het breukvoortbrengende eerlijk verdelen wordt hierdoor vanzelf in het oog gevat alsook de toepasbaarheid ervan.[18]
Het breukbegrip en de bewerkingen met breuken worden vervolgens vanuit uiteenlopende gezichtshoeken en naar een breed spectrum van aspecten beschouwd. Daartoe worden niet alleen uiteenlopende contexten en processen verkend die breuken teweeg kunnen brengen, zoals het eerlijk verdelen, delen, maatverfijnen bij het meten, het maken van mengsels, het samenstellen en toepassen van recepten. Tevens richt de aandacht zich op de verscheidenheid aan trekken volgens welke de breuken zich in dergelijke contexten en processen profileren, zoals de breuk in de breek*operator*, de breuk in de breek*relatie* e.d.[19]
De geschetste activiteiten zullen het nodige aan wiskundig materiaal moeten opleveren om het leerproces over langere termijn te kunnen ondersteunen en gaande te houden. Dit betekent, dat met veel zorg een breukentaal zal moeten worden voortgebracht met passende symboliseringen en gesteund door de ontwikkeling van passende schema's en (visuele) modellen.[20]
De leeractiviteiten voor de breuken worden met die voor verhoudingen verstrengeld vanaf het prilste stadium van het onderwijsleerproces. Dit betekent, dat niet pas unificerende verbanden gelegd gaan worden tussen bijvoorbeeld de equivalentie van breuken en verhoudingen tegen het einde van het leerproces. Integendeel, deze zijn op wederzijds zingevende manier vanaf het begin met elkaar verbonden.[21]
Een en ander brengt met zich mee, dat het vergelijken en ordenen van allerlei situaties (verdelingen, mengsels, recepten, afstand-tijd kwesties e.d.) door verhoudingsredeneren kwalitatief kan worden voltrokken.
Is grotere precisie bij het ordenen gewenst (verschilbepaling), dan kunnen de breuken daarvoor worden toegepast. Het spreekt welhaast vanzelf dat bij kwalitatieve weging van situaties voor het schatten, als bemiddelaar op de weg naar meer numerieke precisie, een gewichtige rol kan zijn weggelegd.[22]

2.2.6 De empiristische benadering

Voor de volledigheid noemen we ook nog de empiristische benadering, die vooral in het Verenigd Koninkrijk tot bloei kwam.[23] Als in de realistische benadering krijgen ook hier de toepassingen grote nadruk; toepassingen waarin zich bijvoorbeeld equivalente breuken kunnen voordoen. Het pure uitvoeren van bewerkingen als context wordt vermeden.
Voorbeelden van activiteiten zijn het kleuren van figuren of het grafisch verwerken van meetresultaten of van verhoudingen, die in gebroken getallen kunnen worden uitgedrukt. Gedeeltelijk onder invloed van Piagets fasentheorie voor de cognitieve ontwikkeling, wordt het accent voor basisschoolkinderen op concrete operaties gelegd. Iedere vorm van formalisering wordt

vermeden. Vergeleken met de realistische benadering zou men kunnen stellen dat het empirisme in het horizontaal mathematiseren blijft steken. Verdieping en niveauverhoging door reflectie op het eigen handelen en het zelf voortgebrachte, wiskundige materiaal in een proces van verticaal mathematiseren blijven goeddeels achterwege.

2.3 Stellingname

Het in § 2.2.3 vertolkte standpunt heeft slechts betrekking op dat deel der leerlingen, dat erin slaagt in de wiskunde van het voortgezet onderwijs een stuk verder te komen. Richten we ons voor deze kwestie op de basisschool dan gaat het ook en vooral om andere categorieën van leerlingen.
Mede gelet op de huidige situatie in het basisonderwijs zijn de volgende overwegingen van belang ter rechtvaardiging van deze studie.
Ten *eerste* behoren de breuken tot het informele leerplan voor de basisschool. In alle methoden die momenteel voor het basisonderwijs gebruikt worden nemen de breuken een aanzienlijke plaats in.[24]
Weliswaar klinkt in de discussie over homogenisering van het rekenwiskundeonderwijs in Nederland nadrukkelijk het pleidooi door voor het radicaal omgooien van het didactische roer, waar het op breuken en decimale breuken aankomt. Naar stemmen ten gunste van radicale afschaffing van de breuken zal men in deze discussie echter tevergeefs luisteren.[25]
Ten *tweede* kan men de breuken niet missen vanwege de toepassingen. Onze historische beschouwing (hoofdstuk 1) wees immers uit, dat het koopmansrekenen, het rekenen met grootheden en in het algemeen het gebied van de verhoudingen, bij uitstek de toepassingsgebieden voor de breuken zijn. Bovendien kan men bij de inleiding in de kommagetallen niet om het breukbegrip heen, alle historische leerplannen ten spijt die de behandeling van de decimale breuken aan de breuken vooraf deden gaan.[26] Verder kunnen verdeelsituaties en de kansrekening als relevante toepassingsgebieden worden genoemd. Het optellen en vermenigvuldigen van breuken zijn in de kansrekening ruimschoots toepasbaar. Het omzetten van gewone breuken in decimale breuken zou in dergelijke gevallen niet alleen verhullen wat er gaande is, maar

> '... conversion to decimals can destroy understanding'

aldus Usiskin (1979, p.19).[27]
Het leren toepassen blijkt ook in andere vakken dan de wiskunde van belang te zijn, zoals in § 2.2.3 werd vermeld.
Behalve aan natuur- en scheikunde kan men ook nog denken aan vakken als statistiek, economie en geografie (gemiddelden en (standaard) afwijkingen berekenen, percentages toepassen, schaalbegrip en (bevolkings)dichtheid e.d.). Kortom toepassingen te over, voor wie er maar oog voor heeft.[28]
Behalve de voorbereidende waarde voor het vervolgonderwijs en de toepassingsmogelijkheden vormen de teleurstellende ervaringen met de

breuken in het onderwijs tot dusver een *derde* argument ten gunste van het uitgevoerde en in deze studie beschreven onderzoek.
Deze teleurstellende ervaringen berusten voornamelijk op het gebruik van onderwijsmateriaal van mechanistische snit of op zijn best van structuralistische signatuur en het dienovereenkomstig onderwijzen ermee. Dit alles maakt het de moeite waard om, onder eerbiediging van de in § 2.2.5 ontvouwde realistische basisconceptie met alle onderwijskundige grondstellingen van dien, na te gaan, hoe ver men met een jaargroep kinderen van het basisonderwijs met de breuken zou kunnen komen. In onze probleemstelling zal worden ontvouwd hoe 'het nagaan hoe ver men ..... kan komen' zal worden geoperationaliseerd.
Een *vierde* argument tenslotte betreft het simpele feit, dat een dergelijk langlopend onderzoek niet eerder is verricht. Weliswaar zijn er enkele longitudinale onderzoeken verricht en beschreven, doch steeds gebaseerd op andere uitgangspunten. Het meest omvangrijke tot dusver is het Amerikaanse Rational Number Project (RNP) op structuralistische grondslag.[29]

2.4 Probleemstelling

Op de Nederlandse schoolboekenmarkt waren medio 1983 realistische reken-wiskundemethoden volledig dan wel gedeeltelijk voorhanden. Daarin vertoonden de leergangen breuken realistische trekken in de geest van Wiskobas.[30] Dit zou het beoogde onderzoek overbodig gemaakt hebben, ware het niet, dat bij het voortschrijden van het Wiskobasproject de behoefte aan fundamenteel ontwikkelingsonderzoek steeds dringender werd gevoeld op een aantal terreinen. Ook de breuken behoorden daartoe.[31] Tot afdoende uitvoering van dergelijk onderzoek kwam het niet. De door De Jong (1986) vastgestelde beïnvloeding van de leergangen door Wiskobas met betrekking tot breuken in realistische methoden voltrok zich dus op basis van onaf materiaal en ontoereikende inzichten.[32]
Al het voorafgaande overwegende komt onze probleemstelling op het volgende neer.
Het ontwikkelen en beproeven in een daartoe op te zetten ontwikkelingsonderzoek van een nieuwe leergang voor de breuken in het basisonderwijs en daarbij gebruik maken van reeds beschikbaar materiaal en verworven inzichten aangaande individuele leerprocessen in dit gebied. Dit alles voltrekt zich dan onder de vigeur van de ontvouwde basisconceptie voor realistisch reken-wiskundeonderwijs.
Uitgaande van een voorlopige uitwerking van de leergang worden de volgende werkzaamheden verricht:
— met één groep leerlingen van het basisonderwijs een leerproces op gang brengen en doen voortgaan over meerdere jaren;
— dit leerproces observeren en beschrijven;
— op grond van het geobserveerde de leergang bijstellen dan wel

ongewenste verschijnselen in de individuele leerprocessen bestrijden, corrigeren of elimineren (hoofdstukken 4, 5 en 6), en
— een (voorlopig) antwoord geven op de vraag naar de effecten van het gerealiseerde onderwijs in vergelijking met andere leergangen (hoofdstuk 7);
— een (haalbaar) leergangvoorstel voor het basisonderwijs doen, bij wijze van aanbeveling (hoofdstuk 4 en nawoord); en
— een onderwijsleertheorie voor de breuken formuleren (hoofdstuk 8).

Ziedaar de probleemstelling voor deze studie. Medio 1983 waren de voorwaarden nog niet vervuld om een leergang te scheppen. Wel tekenden zich allerwegen de contouren af voor een voorlopig ontwerp, dat dan in het voorgenomen ontwikkelingsonderzoek zijn definitieve beslag zou kunnen krijgen.[33]

2.5 Overzicht en uitzicht

Uit een ruimer aanbod van mogelijkheden is beargumenteerd gekozen voor een realistische benadering van de breuken.

De zinvolheid van het voorgenomen ontwikkelingsonderzoek is met argumenten omkleed. Dit alles heeft geleid tot onze probleemstelling: het ontwikkelen en beproeven van een nieuwe leergang. Met het oog hierop zal het nodig zijn een geheel nieuwe onderwijswerkelijkheid te scheppen. Alleen dan kan men nagaan wat er aan de leergang schort en op welke onderdelen hij werkt.

Iets dergelijks vraagt – mede vanwege de theorievorming – om fundamenteel ontwikkelingsonderzoek. In het volgende hoofdstuk zal dit worden verantwoord. Ook de zakelijke condities en omstandigheden ervan zullen dan worden uiteengezet.

Het betreft de keuzecriteria voor de school en de deelnemende groep, het onderzoeksdesign, de methoden van onderzoek, de positie van de ontwikkelingsonderzoeker e.d.

Noten bij hoofdstuk 2

1. Zie in dit verband Eicholz et al (1968) en Meijer en Streefland (1980) of Streefland (1984a).
2. Over deze benadering van de breuken is nogal wat gepubliceerd. Vooral in het Frans- en Duitstalige gebied zijn schoolboeken verschenen, waarin de breuken 'als' operatoren werden behandeld.
   Voor nadere informatie verwijzen we naar enkele bronnen 'van het eerste uur'. Dit zijn Dienes (1967) en Braunfeld en Wolfe (1966).
   De breuk in de operator als compositie van afbeeldingen werd wiskundig gefundeerd door Pickert (1968).
   Freudenthal (1973, pp.260-262) (1984, p.162) wees op de didactische bezwaren van het onderwijzen van deze benadering, die vooral gelegen zijn in de didactische beperkingen zoals de eenzijdige beklemtoning van de bewerking vermenigvuldigen bijvoorbeeld, alsook het didactische gevaar van verbalisme, vanwege het onbereikbare inzicht voor leerlingen op dit niveau. Zie ook Streefland (1983, p.40).
   Overigens dient in dit verband opgemerkt te worden, dat veel sterker nog dan dit bij de natuurlijke getallen het geval is, het *operatorische* bij de breuken voorop staat (Freudenthal, 1984, hoofdstuk 5).
3. De begrippen horizontaal en verticaal mathematiseren zijn ingevoerd door Treffers (1978) (1987). Zie in dit verband ook Treffers en Goffree (1985). Ook de indeling in specifieke leertheorieën als de structuralistische treffen we bij Treffers (1978) (1987) aan.
4. Ter toelichting geven we de volgende voorbeelden.
   Los op: $8x = 3$, $x =$
   Rekenkundig gemiddelde: $m = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$
   Functieonderzoek: $f : x \to 3x^2 - 2x - 1$, bijvoorbeeld kwadraat afsplitsen $3x^2 - 2x - 1 = 3(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}) = 3((x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9})$
   Toepassen van de formule voor relatieve massa in de fysica bijvoorbeeld $m = \frac{m0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c}}}$ e.d.
5. Voor nadere uitwerking van dit idee verwijzen we naar Freudenthal (1986) en De Lange en Kindt (1984).
6. Van Hiele verdedigt dit standpunt bijvoorbeeld in Van Hiele (1984).
7. Voor de kwestie van de valse concretiseringen zie het tweede hoofdstuk in Freudenthal (1984). Door het 'vertalen' van een wiskundige structuur in een voor kinderen van een bepaalde leeftijd geschikte versie doet men niet alleen de wiskundige activiteiten geweld aan, doch loopt men tevens het gevaar de structuur zelf onvolledig of onjuist te belichamen.
   Elders heb ik, geïnspireerd door eerdere interne versies van Freudenthal (1984), enkele voorbeelden hiervan gegeven. Zie Streefland (1980a, hoofdstuk 3) en (1980b).
   In de psychologische literatuur komt men dergelijke concretiseringen op structuralistische grondslag tegen als cognitieve procesmodellen, waarbij de basisopvattingen omtrent de wiskundige inhoud eveneens over de gekunsteldheid hebben mee beslist. Zie in dit verband bijvoorbeeld Greeno (1976), Treffers en Goffree (1985) en Streefland (1986).
8. In de Papyrus Rhind zelf speelden bij dergelijke verdelingen de breuken $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$ een belangrijke rol.
   Voor $\frac{2}{3}$ als niet-stambreuk had men namelijk een apart symbool. In het gegeven vraagstuk verdeelde men resp. $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{10}$ en $\frac{1}{30}$, zie in dit verband Gillings (1962).
9. In 1962 keerden 75 vooraanstaande wiskundigen in de Verenigde Staten en Canada in een memorandum in 'The Mathematics Teacher' zich tegen de nog maar kort in gang gezette ontwikkelingen van de 'New Math'.
   Zij – waaronder Courant, Coxeter, Kline, Polya en Sawyer – formuleerden het aldus:

'The best way to guide the mental development of the inividual is to let him retrace the mental development of the race – retrace its great lines, of course, and not the thousand errors of detail.'

Ahlfors e.a. (1962, loc.cit. p.192).

10. Treffers (1987) onderscheidt in zijn driedimensionale beschouwing van een specifieke leertheorie voor realistisch wiskundeonderwijs een vijftal onderwijskundige grondstellingen, in verband met het progressief mathematiseren.
11. Freudenthal (1979), Streefland (1985b), Treffers (1987).
12. Aan de literatuurverwijzing van noot 8 voegen we Van den Brink en Streefland (1983) nog toe.
13. Zie Freudenthal (1984), Lakatos (1977), Treffers en Goffree (1985) en noot 9.
14. Zie in dit verband behalve Treffers en Goffree (1985) en Treffers (1987) ook Bishop en Goffree (1987).
15. Zie Freudenthal (1984).
16. Zie in dit verband bijvoorbeeld Streefland (1984b) (1985a) (1985b) en Treffers en Goffree (1985), Treffers (1987).
    Een en ander brengt met zich mee, dat een rationele analyse van dergelijke realistisch materiaal in volstrekt andere leerstofordeningen of hierarchieën kan resulteren dan rationele taakanalyses van mechanistisch of structuralistisch materiaal.
    Wij delen in dit verband Resnicks optimisme niet, als zouden rationele taakanalyses van zeker leerstofgebied uitgevoerd door verschillende deskundige personen hooguit op ondergeschikte details van elkaar kunnen verschillen. Zie Resnick en Ford (1981) en Streefland (1986). Aan genoemd optimisme ligt de stilzwijgende vooronderstelling ten grondslag als zou men slechts van één specifieke leertheorie voor het wiskundeonderwijs kunnen uitgaan, namelijk de structuralistische.
17. Zie Treffers (1987).
18. In Streefland (1983) (1984c) wordt een en ander in concreto uitgewerkt en aan voorbeelden toegelicht. Zie voor een globalere beschouwing ook Treffers (1987).
19. Zie in dit verband Freudenthal (1984).
20. Freudenthal (1981) (1984), Lesh et al (1983), Vergnaud (1983), Streefland (1986a).
21. Zie in dit verband Freudenthal (1984), Streefland (1985c) (1986a), Treffers en Goffree (1985), Treffers (1987).
22. De vraag om een schatting brengt in zeker opzicht reflectie op een voorgelegde situatie teweeg, althans die mogelijkheid bestaat.
    Er vindt bij het schatten zowel vooruitgrijpen plaats op de operatoire structuur die in het geding is als op de uitkomst. Dit wordt althans door de vraag naar een schatting bevorderd, zeker wanneer het schatten één van de pijlers is waarop een leergang berust. Zie in dit verband Trafton (1978), Streefland (1981) (1982), Teule-Sensacq en Vinrich (1982), Treffers (1987).
23. Als voorbeelden van projecten noemen we het Nuffield Mathematics Project en het School Mathematics Project.
24. Zie in verband hiermee De Jong (1986).
25. Treffers en De Moor (1984), Van der Blij en Treffers (1985), Cadot en Vroegindewey (1986).
26. Versluys (1899) toonde reeds met kracht van argumenten aan, waarom de uitlijning eerst kommagetallen dan gewone breuken didactisch onjuist is. Daarmee kritiseerde hij vrijwel alle negentiende eeuwse rekenboeken die deze volgorde wel aanhielden. Zie bijvoorbeeld Meurs en Kraak (ca. 1875). Versluys' standpunt werd nog eens krachtig herhaald door Hilton (1983). Ook Usiskin (1979) vertolkte hetzelfde standpunt.
27. In dit artikel noemt Usiskin de toepassingen op uiteenlopende niveaus de belangrijkste reden voor handhaving van de breuken in het onderwijs.
28. De meningsverschillen omtrent de waarde van de breuken voor de wiskundige vorming kunnen vooral verklaard worden met de basisconcepties die achter bepaalde standpunten schuilgaan.

'Er wordt een stuk wiskunde afgeschaft, dat een op zichzelf staande techniek bevat'.

Dit citaat van Van Hiele (1973, p.203) weerspiegelt de structuralistische interpretatie van de breuken als getallensysteem; een kijk op de breuken, die in het pleidooi voor de interpretatie van de breuk als samenstel van afbeeldingen bij het toepassen in natuur- en scheikunde formules nog eens bevestigd wordt (Van Hiele, 1984, p.313). In feite benaderde Van Hiele de breuken te formalistisch, dit ondanks het feit, dat zijn niveautheorie althans een denkkader bood voor een benadering dichter bij de leerlingen. Zie in verband hiermee hoofdstuk 8.

29. Dit project werd geleid door bekende onderzoekers als Richard Lesh, Merlyn Behr, Thomas Post en Ypke Wachsmuth.
Herhaaldelijk werd erover gerapporteerd. Zie bijvoorbeeld Behr, e.a. (1983), Lesh e.a. (1983) en Behr, e.a. (1984), Post, e.a. (1985).
Voor een beschouwing van de essenties in de theoretische grondslagen ervan verwijzen we naar Treffers (1987), Streefland (1986) kritiseerde de theoretische fundering van de uitlijning van de breuken in een leergang in het RNP.
30. Medio 1983 werden de eerste voorbereidingen voor het hier beschreven ontwikkelingsonderzoek getroffen (zie ook hoofdstuk 3). Wiskobas staat voor Wiskunde op de Basisschool en was tevens een afdeling van het per 1 januari 1981 opgeheven Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO) aan de Rijksuniversiteit te Utrecht.
Voor een historische beschouwing verwijzen we naar De Jong (1986), alsook voor het onderzoek naar de invloed van Wiskobas in methoden. Voor de breuken in het Wiskobasproject zie Streefland (1983).
31. Zie Wiskobasteam (1980).
32. Streefland (1983) en De Jong (1986) vermelden dat de breukenkwestie in het Wiskobasproject nog niet geklaard was.
33. Met het oog op de beheersbaarheid van het onderzoek dienen we onszelf de nodige beperkingen op te leggen. Bijvoorbeeld door de inhoud van de leergang af te palen en de decimale breuken buiten beschouwing te laten. Daarmee wordt dus de grondstelling van de verwevenheid van leergangen enig geweld aangedaan.
Bovendien zullen allerlei mogelijkheden tot op zichzelf interessante deelstudies goeddeels buiten beschouwing moeten blijven. Te denken valt in dit verband bijvoorbeeld aan de kwestie van de leergangconstructie of de leerpsychologische implicaties van de ontwikkelde leergang. Deze laten zich met vele belangwekkende vragen en deels ook antwoorden omgeven. We laten ze buiten beschouwing en beklemtonen vooral de onderwijskant van deze studie, d.w.z. de nadruk valt op de presentatie van de ontwikkelde leergang, het onderwijs en de leerprocessen.

3 De context van het onderzoek

3.1 Inleiding en overzicht

In onze probleemstelling (§ 2.4) werden de verwachtingen verwoord aangaande de opbrengst van het onderzoek, zowel de praktische als de theoretische.
Dit hoofdstuk betreft dus de beschrijving van de omstandigheden en condities waaronder een en ander is gerealiseerd.
Het karakter van het onderzoek is a priori bepaald en wordt nader uiteengezet en verantwoord, design, methoden en methodologische kwesties inbegrepen (§ 3.3 en 3.4). Dat daarbij ook de school, de onderzoeksgroep en de positie van de onderzoeker ter sprake komen, is vanzelfsprekend (§ 3.5 en 3.6). Het scheppen van een volledig nieuwe onderwijswerkelijkheid – het 'ontwikkelen en beproeven' (§ 2.4 en 2.5) – vormt de kern van de werkzaamheden.
De vraag is nu hoe op het niveau van de ontwikkelingsonderzoeker recht kan worden gedaan aan de onderwijskundige grondstelling van de eigen inbreng in de leerweg door middel van constructies en produkties.
Welke zijn de samenhangen van ontwikkelen, beproeven en de individuele leerprocessen daarbij? En hoe kan de ingenomen positie van de realistische benadering met zijn onderwijskundige grondstellingen met het oog op het mathematiseren verwerkelijkt worden? Er wordt een constructie raamwerk geschetst dat een voorlopig, globaal antwoord op deze vragen geeft (§ 3.2 en 3.3).
De kern van dit raamwerk wordt gevormd door het constructiebeginsel, waarvan de noodzaak met argumenten wordt omkleed. Een beknopt overzicht en uitzicht op het vervolg markeren de grenzen van dit hoofdstuk.

3.2 Uitgaan van het constructiebeginsel

De formulering van onze probleemstelling weerspiegelde de didactische stand van zaken voor de breuken medio 1983 (§ 2.4). Op de didactische balans stond o.a. het beschikbare onderwijsmateriaal van het Wiskobasproject. Aan de totstandkoming van dit materiaal lag een lang en moeizaam proces ten grondslag van ideeontwikkeling, van didactische deliberatie, van discussie en discursie, van het ontwikkelen en beproeven op onderdelen van de leergang en van het uitvoeren van onderzoek daarvoor en wat al niet meer.[1]
Daarbij ging het om kwesties die tot de kern van de wetenschappelijke werkzaamheden gerekend moeten worden, zoals daar zijn:
— het vinden (en geven) van aanwijzingen, hoe te ontwikkelen, waarop te letten;
— het aanreiken van voorbeelden van analysen;
— het formuleren en (eventueel) weer verwerpen van hypothesen;
— het doordenken van de consequenties van de visie op wiskundeonderwijs voor het gebied van onderzoek.[2]

Ondanks dit alles stonden op de didactische balans van 1983 nog allerlei kwesties aan de debetzijde die in het voorgenomen ontwikkelingsonderzoek dienden te worden verhelderd en opgelost.
Met het constructiebeginsel als kernbegrip zetten we uiteen hoe dit is aangepakt. Waarom het constructiebeginsel?
Ten eerste laat zich vanuit deze gezichtshoek de probleemstelling nader specificeren. Bijvoorbeeld kan het voorgenomen onderzoek op basis van een onaf prototype voor de leergang verder worden verhelderd en verantwoord zoals nog zal blijken.
Ten tweede is constructie de kern van het historische leerproces en was daarin wellicht niet alleen weggelegd voor geniale uitvinders.
Freudenthal zegt er dit van:

> 'De wiskunde, het rekenen, werd zo'n 5000 jaar geleden uitgevonden. Op vele plaatsen tegelijk, wat eerder wat later. En wie die wiskunde heeft uitgevonden, of dat een genie is geweest of een doodgewone boer die zijn schapen moest tellen, dat weten we niet.' (in Schoonen, 1987).

In de derde plaats is in onderzoek van Van den Brink (1987) het doen van constructies en produkties door jongere kinderen dan in dit onderzoek een effectief onderwijsleermiddel gebleken.
Tenslotte vormt dit beginsel één van de markantste, nieuwe onderdelen van de realistische onderwijstheorie, naar Treffers (1987, p.261) stelde.

> 'This, in fact, is one of the most characteristic features of realistic instruction theory.'

Welnu, wat het constructiebeginsel voor de ontwikkelingsonderzoeker aangaat, tekenen zich drie niveaus af, namelijk het lokale – of lesniveau, het globale – of leergang niveau en het niveau van de theorie.
Met het *lokale* niveau (1) bedoelen we dus het microniveau. Het *globale* niveau (2) heeft betrekking op de globale uitlijning of macrostructurering van de leergang binnen het wijdere verband van het totale curriculum. Het *theorie* niveau (3) tenslotte geeft de mate van organisatie en reflectie van beide voorgaande niveaus aan en is dus beslissend voor de theoretische status van het geheel.[3]
De drie onderscheiden niveaus kunnen op de volgende wijze worden gekenschetst.

Niveautheoretisch constructiemodel voor een leergang (breuken)

1. *Het lesniveau of het horizontaal mathematiseren*
   a. *Constructie als onderwijsbeginsel*
      In de onderwijssituatie wordt generatief (open) materiaal ingebracht dan wel gelegenheid ingeruimd tot het doen van vrije produkties. Dit geschiedt met het oog op gedifferentieerde constructies en produkties door de leerlingen. Daarbij worden van de eerder ontvouwde onderwijskundige grondstellingen (§ 2.2.5) de volgende toegepast:

— het bedoelde materiaal is gesitueerd in de realiteit, die *bron* en *toepassingsgebied* is (het uitgaan van zinvolle en zingevende contexten met de potentie tot voortbrenging van wiskundig materiaal); dit brengt met zich mee, dat
— leerlijnen *verstrengeld* zijn; in onversneden realiteit zijn bijvoorbeeld breuken en verhoudingen onlosmakelijk met elkaar verbonden, zoals we hebben laten zien (§ 2.2.5); en dat
— werktuigen in de vorm van symboliseringen, schema's, diagrammen en (situatie)modellen in het onderwijsleerproces door gezamenlijke inspanning worden voortgebracht.

Opmerking:
Het voorgaande geldt niet slechts voor de eerste lessen in het onderwijsleerproces doch voor (vrijwel) alle lessen, ook na verloop van leertijd. Dit betekent niets anders dan dat het horizontaal mathematiseren niet alleen tijdens de bronverkenning beoefend wordt, maar ook op den duur in de toepassingen (zie ook § 4.4).

b. *Leren door constructies*
Gerekend naar de individuele leerprocessen hebben de op het lokale niveau te treffen voorzieningen tot gevolg dat de leerlingen metterdaad tot de beoogde gedifferentieerde constructies en produkties komen. Daarin kan reflectie op het eigen handelen worden uitgelokt door de vraag naar nieuwe mogelijkheden of alternatieve oplossingen. Beslissend voor het realiseren van leermomenten zijn ook de discussie, onderhandeling en samenwerking in verband met constructies en vrije produkties. Hier vindt de onderwijskundige grondstelling van de interactie dus toepassing.[4] Bovendien kan aldus in de microsituatie de inbreng van de leerlingen in hun eigen leerweg worden gewaarborgd.
De exploratie van verdeelsituaties is bij uitstek geschikt om gedifferentieerde constructies uit te lokken.[5]
Een dergelijke constructieve bezigheid kan men doen volgen door een opdracht tot meer vrije produktie; bijvoorbeeld het zelf bedenken van een verdeelverhaal, enkele verdelingen voltrekken en de uitkomsten beschrijven.[6]
Met het oog op de constructie van de leergang kan men het bij deze constatering niet laten. Immers wat dient te gebeuren is met bedoeld materiaal buiten de grenzen van de microsituatie treden, al was het maar vanwege de misvattingen die het kan weerspiegelen, waartegen men – na afdoende diagnose omtrent de oorzaak – remediërende maatregelen in het vervolg van het onderwijsleerproces kan verwerken.[7]
Een gewichtiger reden om het er niet bij te laten is echter het rechtdoen aan de eigen inbreng van de leerlingen op lange termijn.

2. *Het niveau van de leergang: door verticaal mathematiseren naar hogere niveaus*

   a. *Constructie als onderwijsprincipe op de lange termijn*

   Vergeleken met het eerste niveau dient van blikrichting te worden gewisseld. Het zijn nu de leerlingen, die met het oog op het bouwen van de leergang, *mede* het generatieve materiaal inbrengen in het onderwijsleerproces.

   Het op lokaal of lesniveau (1) door constructie teweeggebrachte materiaal wordt naar zijn mathematisch-didactische essenties gedurig benut om de globale uitlijning of macrostructuur van de leergang in wording te realiseren.

   We zullen dit aan het voorbeeld van de Rhind no.5 '8 broden verdelen onder 10 mannen' illustreren. Daarmee lieten we zien hoe de gevraagde verdeling op uiteenlopende wijzen kan worden voltrokken, dienovereenkomstige beschrijvingen voor proces en uitkomst met zich meeslepend (§ 2.2.4 en 2.2.5).

   Het weerspiegelt tevens de variëteit aan constructies die men van een zesde of hogere jaargroep van de basisschool mag verwachten, wanneer zij dergelijke verdeelvraagstukjes krijgt voorgelegd.

   Dit materiaal nu, zal in het perspectief van het onderwijsleerproces over langere termijn beschouwd dienen te worden. Het geldt ook voor de eigen vrije produkties door de leerlingen. Deze laten we hier verder ongemoeid, om er vanuit de gezichtshoek van het leerproces op lange termijn beter recht aan te kunnen doen.

   b. *Leren door constructies op de lange duur*

   Bij het ontvouwen van de onderwijskundige grondstellingen voor realistisch wiskundeonderwijs kwam al even aan het licht dat wiskundige neerslag van de oplossing van een verdeelprobleem mogelijkheden tot niveauverhoging in zich draagt (§ 2.2.5). Dergelijke niveauverhogingen zullen in de langlopende, individuele leerprocessen die we hier op het oog hebben, door middel van constructies en vrije produkties dienen te worden gerealiseerd. De essentiële leermomenten zijn dus vervat in het realiseren en bewust worden (of bewust maken) van zulke niveauverhogingen. Om deze te bewerkstelligen worden de onder 1b genoemde middelen gedurig aangewend teneinde een proces van verticaal mathematiseren tot stand te brengen. Anders gezegd: de maatregelen tot lokale inbreng in het leerproces dienen ook op het globale niveau van de macro-uitlijning een vervolg te krijgen.

   Welnu, om de globale organisatie van leermomenten in de individuele leerprocessen verantwoord te kunnen doen, zal men de constructieopbrengst op generatieve problemen op lokaal niveau als de Rhind no.5 mathematisch-didactisch trefzeker moeten typeren.

   Een realistische, rationele analyse vormt daartoe de geëigende heuristische methode.[8]

Enkele markante trekken in het materiaal dat de Rhind no.5 teweegbracht (§ 2.2.4 en 2.2.5) zijn:

een breuk – in het voorbeeld $\frac{8}{10}$ – kan worden voortgebracht door een gedifferentieerd proces van verdelen, samennemen, verkorten en beschrijven. Het verdelen kan zowel *successief* of *eenheidsgewijs* worden uitgevoerd als op meer *globale* benaderingen zijn toegesneden.

Het *breukbegrip* in ontwikkeling en het *inzichtelijk* opereren – zeg samenstellen en uiteenleggen – gaan binnen de context van het breukvoortbrengend eerlijk verdelen hand in hand.

Een breuk schaart zich als opbrengst van een verdeling aan het hoofd van een monografie. In het beschouwde geval van $\frac{8}{10}$ aldus:

$\frac{8}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ $= 8 \times \frac{1}{10}$ $= 4 \times \frac{1}{5}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$ $= 1 - \frac{1}{5}$

$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10}$ $= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$

Dergelijk verdelen schept dus equivalente breuken.

Het verdelen kan ook voltrokken worden door een vergelijking met verwante situaties.

Daarbij kan (ook) een beslissing worden genomen op grond van vastgestelde verhoudings(on)gelijkheid. Er is dus een hechte band met verhoudingen. Er van uitgaande dat hiermee een trefzekere mathematisch-didactische typering van het vergaarde materiaal gegeven is, zal in de leergang dus ruimte gecreëerd moeten worden

— voor het eenheidsgewijs of successief verdelen;
— voor meer globale vormen van verdelen (waarin zich tevens een mogelijkheid voor het schatten lijkt voor te doen);
— voor het gevarieerd beschrijven van dergelijk verdelen;
— voor het zelf construeren van equivalenties 'avant la lettre'.

Dit alles gebeurt dan met het oog op het voortgaande mathematiseren van elke individuele leerling. Daarbinnen kunnen ook de eigen vrije produkties hun plaats verwerven. Als mogelijkheid noemen we hier de eigen produktie van monografieën (§ 1.3.1; zie ook § 4.4).

3. *Het niveau van de theorie*
   a. *de constructie van theorie in dienst van het ontwikkelingsonderzoek*
   Het geheel aan overwegingen, de ideevorming, de didactische deliberatie, het uitproberen, kortom het geheel aan werkzaamheden, dat in dienst van beide voorgaande niveaus plaatsvindt, vormt de theorievoortbrengende bron, het generatieve materiaal voor dit niveau. Met het in deze studie beschreven onderzoek wordt deze kwestie nader verhelderd. De onderzoeker ontwaart in het

theorievoortbrengende materiaal hypothesen, weerlegde hypothesen, noties van theorie in wording e.d. Om hiervan te profiteren wordt dit geheel aan inzichten in ontwikkeling in dienst gesteld van de werkzaamheden op de twee eerste niveaus.
Dit gebeurt zowel met het oog op de onderwijspraktische verbetering of aanvulling van het materiaal als op de verrijking ervan in theorievoortbrengend opzicht.
Aan de reeds verworven inzichten worden aldus nieuwe toegevoegd in de vorm van nieuwe hypothesen, weerlegging of bijstelling van vorige, nieuwe theoretische noties en uitbreiding van bestaande.

De complexiteit van het proces van het ontwikkelingsonderzoek komt goed tot uitdrukking wanneer men zich de gedurige standpuntveranderingen realiseert die zich daarin dienen te voltrekken, namelijk:
— van onderwijsproces naar individuele leerprocessen en omgekeerd met het oog op de leergangconstructie;
— van individuele leerprocessen naar groepsproces en omgekeerd met het oog op de inbreng van ieder afzonderlijk in het progressief mathematiseren van de groep als geheel;[9]
— door toenemende organisatie van en reflectie op het voorgaande van onderwijsleerproces naar theorie en omgekeerd met het oog op leergang en theorie beide.

b. *De constructie van theorie*
Op het niveau van de wetenschappelijke deliberatie[10] zal men niet alleen zijn bevindingen zo helder en zo hecht mogelijk onderbouwd willen expliciteren in de vorm van lokale theorie voor een specifiek leergebied. Tevens zal men een dergelijke lokale theorie willen onderbrengen in het wijdere verband van een meer algemene theorie voor het wiskundeonderwijs.[11]

3.3 Ontwikkelingsonderzoek

Binnen de context van het in § 3.2 geschetste raamwerk is het nu mogelijk de stand van zaken van 1983 nader te specificeren.
Op les- zowel als op leergangniveau was er materiaal voorhanden waarvan het generatieve karakter voldoende empirisch was onderbouwd. Bij herhaling had het gedifferentieerde constructies teweeggebracht.[12]
Vooral verdeelsituaties hadden bewezen van onschatbare waarde te zijn, zowel op les- als op leergangniveau, namelijk door de leerweg te plaveien met een rij van geschikt gekozen, enkelvoudige verdeelsituaties, alsook met vraagstellingen waarin twee (of meer) van zulke situaties met elkaar vergeleken worden.
Allerlei onderdelen van de leergang, die in de mechanistische benadering

uitsluitend algoritmisch worden afgedaan, zoals het 'helen uithalen', het vereenvoudigen van breuken en het optellen en aftrekken van ongelijknamige breuken, worden door de exploratie van verdeelsituaties in het visuele materiaal voorbereid, sterker nog, er door *voortgebracht*.
Desondanks waren er nog allerlei ingrijpende tekortkomingen. Zo ontbrak ieder zicht op eventuele leereffecten van het doen van vrije produkties, en ervaring in het methodisch toepassen van dit onderwijsprincipe voor de globale uitlijning van een leergang was er evenmin.
Op dit punt zou de hypothesevorming dus nog vrijwel van de grond moeten komen.[13]
Er was nog een te grote 'afstand' tussen de concrete bronnen van het breukbegrip en het algoritmiseringsproces voor het aftrekken en optellen van ongelijknamige breuken.[14]
Systematische ervaring met de bewerkingen vermenigvuldigen en delen in een realistische benadering, constructies en produkties inbegrepen, was er niet.[15]
Tenslotte ontbrak iedere ervaring in het met basisschoolleerlingen terugzien op hun eigen leerervaringen met breuken met het oog op een meer formele beschouwing van de hoofdbewerkingen.[16]
Een en ander betekende, dat op les- en leergangniveau dringend behoefte bestond aan nóg meer hypothese- en theorievoortbrengend materiaal, zodat de vastgestelde leemten konden worden opgevuld.
Bij realisering ervan lag een kant en klare leergang binnen bereik, ingekaderd in een theorie van en voor het onderwijzen en leren van breuken, opgaand in een theorie voor realistisch wiskundeonderwijs.
Ziedaar de uitgangspunten die eenduidig verwezen in de richting van ontwikkelingsonderzoek als mogelijke aanpak. Dat wil het volgende zeggen.
Er wordt een nieuwe onderwijswerkelijkheid gecreëerd.[17] In de reële onderwijsleersituatie wordt door onderzoekend speuren de gedurige wisselwerking tussen de leergang in ontwikkeling en de ermee teweeggebrachte individuele leerprocessen aan het licht gebracht.
Kortom, het gaat om onderzoek dat gekenmerkt wordt door de diepgang van het speuren, vakinhoudelijk bepaald, gericht op de vorming van theorie met het nodige waarheidsgehalte aangaande het onderwijzen en leren van breuken; grensverleggend onderzoek met in het hart van de activiteiten de didactische deliberatie, discussie en discursie.[18]

3.4 Design en methoden

In § 3.2 en 3.3 hebben we laten zien dat onze probleemstelling onmiskenbaar verwees naar ontwikkelingsonderzoek. Daarmee is het *design* dan tevens bepaald. Het gaat om de observatie van individuele leerprocessen over lange termijn en vanwege de dienstbaarheid van de opbrengst ervan aan de leergangconstructie, het plegen van interventies daarin. Ogenschijnlijk is de vrijheid van de onderzoeker hiermee volledig aan banden gelegd. De facto

beoogt de context van het onderzoek echter een maximum aan vrijheidsgraden te bieden om oplossingen voor de gesignaleerde problemen te kunnen voortbrengen. We bespreken kort de methoden, die ons daartoe ten dienste staan, namelijk, het gecontroleerde onderwijsexperiment, het (klinische) interview en vergelijkend onderzoek.

Gecontroleerd onderwijsexperiment
Een dergelijke onderneming met één jaargroep van de basisschool gedurende minimaal twee jaren is daartoe het meest geschikt. Het begrip beheersing of controle dient daarbij als volgt begrepen te worden.
Indachtig het constructiemodel voor de leergang worden zowel de proces variabele 'onderwijsproces' als de effectvariabele 'individuele leerprocessen' in het oog gehouden. Dit gebeurt niet alleen in de genoemde hoedanigheid, maar als het ware ook omgekeerd, omdat het gaat om gedurige toetsing van een provisorisch uitgewerkte leergang met het oog op de verbetering ervan. Controle doelt in ons geval dus veel meer op het scheppen van ruimte om recht te doen aan het geschetste, realistische constructieraamwerk, dan dat men zou willen proberen zichzelf de onmogelijke taak te stellen van totale beheersing van het onderwijsleerproces.
Immers:

> 'The really interesting problems in education are hard to study. They are long term and too complex for the laboratory and too diverse and non-linear for the comparative method. They require longitudinal study of individuals ...'

en, al vast even vooruitlopend op de positie van de onderzoeker in het geheel:

> 'The investigator who can do that and will do it is, after all, rather like what I have called a teacher'. (Hawkins, 1973, loc.cit. 135)

Het is de complexiteit van het geheel, die de geschetste opstelling noodzakelijk maakt. Om te verhelderen wat bedoeld wordt zou aangaande het onderwijzen in het voorgenomen onderwijsexperiment en het nakomen van het constructiebeginsel als uiterste gesteld kunnen worden: zodra men zijn toevlucht moet nemen tot het onderwijsmiddel 'uitleggen' bij blijkende stagnatie van het leerproces, is dit het duidelijkste bewijs dat er iets mis is.
Dit 'iets' kan dan van alles zijn, zoals onjuiste keuze van generatieve activiteiten of problemen, het ontoereikend zijn van de taal-, schematisering- of visualiseringsmiddelen die de leerlingen inmiddels beschikbaar hebben, het onvoldoende respecteren van de inzichten der leerlingen, het niet traceren en dus uitwerken van onmisbare deeltrajecten in de globale structurering van de leergang of anderszins.[19]

Het (klinische) interview

Vanuit de eigen constructies en vrije produkties zal door de leerlingen in het onderzoek materiaal worden voortgebracht dat – naar men mag aannemen[20] – niet alleen een afspiegeling is van het gegeven onderwijs, maar dat ook de stand van zaken in de individuele leerprocessen weerspiegelt.

Met andere woorden: er mag worden aangenomen, dat het voortgebrachte materiaal het nodige diagnostische gehalte zal hebben. Op grond hiervan ligt interventie in het onderwijsexperiment door middel van (individuele) interviews voor de hand en wel met een drieledig doel, namelijk:

1. het verifiëren van diagnoses, die op grond van analyses van individuele constructies en vrije produkties gesteld worden;
2. het remediëren van eventuele misvattingen of onvolkomenheden in de inzichten van individuele leerlingen;
3. het voorbereiden van 'remediërende' maatregelen naar de leergang in ontwikkeling toe.

Als extra functie, verband houdend met de laatstgenoemde, vermelden we nog die van 'gesprekken met kinderen' ter voorbereiding van het ontwerpen van nieuwe bouwstenen voor de leergang.[21] Al naar gelang het nagestreefde doel zullen de af te nemen interviews variëren in mate van (voor)structurering. De drie genoemde functies van dit methodische onderdeel weerspiegelen de hechte samenhang ervan met het onderwijsexperiment; experiment en interview worden aldus eendrachtig dienstbaar gemaakt aan het bewerkstelligen van zo groot mogelijke samenhang tussen het onderwijsproces en de individuele leerprocessen.

Vergelijkend onderzoeksdeel

Gelet op de vastgestelde didactische positie van de breuken bij de aanvang van het onderzoek, mocht verwacht worden, dat het realiseren van een uitgebalanceerde leergang tot de mogelijkheden behoorde.

Dit betekende, dat de tijd rijp leek om – overeenkomstig de onderzoeksgang in de natuurwetenschappen – het observeren (dat wil zeggen het speurend en begrijpend gadeslaan) dat vanzelfsprekend in experiment en interviews een beslissende rol gaat spelen, van zijn laatste finesse, namelijk het meten als sluitstuk, te voorzien.[22]

Dit betekent dat het onderzoek in dat geval kan worden beklonken met een vergelijkend deel.

De effecten van de ontwikkelde en uitgewerkte leergang worden vergeleken met de effecten zoals – naar mag worden aangenomen – teweeggebracht door onderwijs met bestaande mechanistische en realistische leergangen die in 1986 op de onderwijsmarkt in dienovereenkomstige rekenwiskundemethoden beschikbaar zijn.[23]

Samengevat komt het erop neer, dat voor het traceren van de individuele leerprocessen in dienst van de leergangconstructie (en theorievorming) de volgende middelen zullen worden ingezet:

— een gecontroleerd onderwijsexperiment gedurende minimaal twee opeenvolgende jaren met eenzelfde basisschoolgroep;
— interviews met een vierledige functie (diagnose, remedie, bijstelling leergang, voorbereiding nieuw ontwerp); en
— een vergelijkend onderzoeksdeel op basis van een daartoe te ontwikkelen (passend) instrument.

3.5 De onderzoeksgroep

3.5.1 Inleiding

Het teweegbrengen en traceren van langlopende leerprocessen, daarom gaat het in dit onderzoek. Probleemstelling en design, geoperationaliseerd in de toe te passen middelen van experiment, interview en vergelijkend onderzoek weerspiegelen dit.
Zowel het onderwijzen als het leren van breuken worden dus in het oog gevat. Dit gebeurt vooral met het oog op de ontwikkeling van een theoretisch kader daarvoor; een kader van realistische signatuur. Bijgevolg zullen zowel de onderzoeksgroep als de deelnemende leerkrachten aan bepaalde voorwaarden moeten voldoen.
Onwenselijk is het bijvoorbeeld een onderzoeksgroep te recruteren, die rekenonderwijs krijgt met een mechanistische methode. De attitude, die rekenonderwijs vanuit een dergelijke basisconceptie zowel bij de onderwijsgevende als leerlingen met zich meebrengt kan het te verrichten onderzoek namelijk ongunstig beinvloeden. Dit geldt zowel het verloop van het onderwijsexperiment als de voort te brengen leergang.
Ergo, het ligt dus voor de hand een school met een realistisch rekenwiskundeprogramma te kiezen. In verband met de doelen van ons onderzoek en de verwachte opbrengst ervan is de vervulling van deze voorwaarde alleen echter niet voldoende.
Er moeten immers op zichzelf succesvol gebleken onderdelen van een breukenleergang tot grotere samenhang worden gesmeed door verfijning aan te brengen en leemten ongedaan te maken.[24] Bovendien zal het (laten) doen van vrije produkties in het leergebied breuken voor het eerst systematisch worden beproefd. In verband hiermee is het wenselijk dat de onderzoeksgroep zich profileert door een aanzienlijke spreiding in bekwaamheden van de leerlingen.[25]
Hoewel de Fatima Jozefschool te Bussum inmiddels haar status als stimuleringsschool heeft moeten prijsgeven, was het – al het voorgaande overwegende – welhaast vanzelfsprekend, dat de onderzoeksgroep een jaargroep van deze school zou zijn. Ook aan de eerstgestelde voorwaarde van overig realistisch reken-wiskundeonderwijs is dan eveneens ruimschoots voldaan.[26]
Omdat in het vijfde hoofdstuk de deelnemende leerlingen naar hun individuele leerproces geportretteerd zijn beperken we ons hier tot het kenschetsen van de onderzoeksgroep als geheel.[27]

3.5.2 De onderzoeksgroep nader getypeerd

Toen het onderzoek van start ging, was de gerecruteerde onderzoeksgroep juist 'vierde klas' geworden (9 – 10 jaar).[28] De groep bestond uit zestien leerlingen en was gecombineerd met een deel van de vijfde klas.
Gerekend naar de in de wet op het basisonderwijs gevoerde wegingsgetallen als te gebruiken indicatoren om de mate aan te geven waarin individuele leerlingen probleemgevallen zouden kunnen zijn, stak de onderzoeksgroep niet ongunstig af tegen de schoolbevolking als geheel.[29]
De groep was van beneden gemiddeld niveau met een behoorlijke spreiding in mogelijkheden, en voldeed dus ook aan de tweede voorwaarde die gesteld was.[30]
Overigens zullen alleen de leerlingen naar hun individuele leerprocessen geportretteerd worden (hoofdstuk 5) die aan het volledige onderzoek hebben meegedaan.[31]

3.6 De positie van de onderzoeker

3.6.1 Rollen

Gedurende de schooljaren 1983/84 en 1985/86 konden de betrokken leerkrachten onbelemmerd aan het onderzoek deelhebben door voorzieningen van organisatorische aard.[32]
In deze beide schooljaren werden de lessen gegeven en geprotocolleerd door onderwijsgevende en onderzoeker beiden. In het cursusjaar 1984/85 ontbrak deze mogelijkheid tot samenwerking in de klas. Er was geen leerkracht beschikbaar die gedurende de experimenteeruren het andere deel van de combinatieklas, waarvan de onderzoeksgroep ook in dat jaar deel uitmaakte, onder zijn hoede kon nemen. Wel voorzag het lesrooster in de mogelijkheid tot het afzonderen van de onderzoeksgroep en ook een vrij lokaal was steeds beschikbaar. De onderzoeker vervult dus diverse rollen.
Als onderwijzer geeft hij zelf lessen en heeft in die hoedanigheid tevens interviews met de leerlingen. Als schoolbegeleider staat hij de klasseleerkracht bij in de lesvoorbereiding en lesuitvoering alsook bij het verslaan en evalueren van de lessen en bij de organisatie van de voortgang van het experiment. Verder ontwikkelt hij het onderwijsmateriaal en treedt op als onderzoeker. Zijn positie is dus die van *onderwijsontwikkelingsonderzoeker* met een maximum aan mogelijkheden tot betrokkenheid, zoals eerder bepleit (§ 3.2 en 3.4).
Een dergelijke gewichtige positie in het hart van de totale onderwijsontwikkeling is vooral ook wenselijk met het oog op de voortbrenging van relevante theorie.

> 'Researchers who do not engage in intensive and extensive teaching of children run the risk that their models will be distorted to reflect their own mathematical knowledge' (Steffe en Cobb, 1983, loc.cit. p.85).

Om dit risico op nog een andere manier te vermijden dient de onderzoeker deel te hebben aan de ontwikkeling van het experimentele materiaal. Op die

manier kan er namelijk gedurig rekening mee worden gehouden dat:

> 'In the constructivist view teachers should continually make a conscious attempt to 'see' both their own and the childrens actions from the childrens point of view.' (ibid, p.85)

Gevoed door de ruime opbrengst van genoemde werkzaamheden worden de posities van begeleider en onderzoeker bekleed. De vraag is of dit een steeds wisselende instelling vergt, bijvoorbeeld bij de interviews in dienst van het traceren van de individuele leerprocessen vergeleken met de interviews die rechtstreekse bijdrage aan de constructie van de leergang moeten leveren of bijvoorbeeld bij het evalueren van de lessen en het verwerken van de ruwe empirische data.
Anders gezegd: moet de onderzoeker ten opzichte van de uitersten aan deelname en distantie zijn positie niet variëren, afhankelijk van de rollen die hij speelt en de werkzaamheden die hij daarin verricht?

3.6.2 Tussen deelname en distantie

Op grond van de interpretatie van ontwikkelingsonderzoek – een interpretatie die overigens afwijkt van de onze – kenschetst Terwel (1984, p.191) de positie van de onderzoeker als in de tijd verschuivend van meer deelname naar meer distantie.
Dit betreft zowel de in het onderzoek participerende scholen als het ontwikkelingswerk. Daarbij verandert gaandeweg ook het karakter van de werkzaamheden, of – beter – er treedt verandering op in de benadering van het onderzoeksprobleem van holistisch naar analytisch.
Dergelijke stellingnamen dienen begrepen te worden binnen de context van Terwels model voor ontwikkelingsonderzoek en daarin is de verwijdering tussen onderzoeker en het ontwerp van de eerste versie van onderwijsmateriaal op voorhand gepostuleerd (ibid, p.177).
Binnen onze opvattingen over ontwikkelingsonderzoek staat de ontwikkeling en toetsing van een voorlopige leergang in dienst van het maken van een verbeterde versie. Dit vraagt juist om het gedurig hernemen van de positie van nauw betrokkene. Er is dus eerder sprake van variatie in distantie dan dat er zich een geleidelijke verschuiving voltrekt. Men varieert als het ware gedurig zijn 'focal view'.[33]
Op grond van het begrippenpaar 'distantie' en 'deelname' zou men de hele onderzoeksopzet, de toe te passen middelen en het onderzoek zelf kunnen gaan screenen of en in welke mate van één van beide sprake is. Dit kan bijvoorbeeld voeren tot beschouwingen over participerende observatie. Deze methode kan worden toegepast in die vorm, waarbij men weliswaar alert waarneemt, doch voor het overige passief blijft, ook al lijkt dit wat paradoxaal.[34] Ook is er de vorm van de actieve bemoeienis door het uitoefenen van invloed op de gang van zaken of het scheppen van bepaalde voorwaarden.[35]
Daarbij kan de onderzoeker doorslaan in één van zijn rollen; bijvoorbeeld in die van onderwijzer koste wat het kost iets willen verwezenlijken

voorbijgaand aan de overige doelen van het werk in uitvoering.
De vraag is of de onderzoeker en de posities die hij in zijn onderneming bezet en de middelen die hij toepast wel tot de kern van de problematiek gerekend moeten worden wanneer het gaat om het wetenschappelijk gehalte en de integriteit van de voortbrengselen van onderzoek. Deliberaties inzake objectivisme dan wel een subjectivistische kenhouding, omtrent de 'context of discovery' en de 'context of justification' e.d., hoe interessant op zichzelf ook, mogen van de onderzoeker niet te veel energie vergen.[36]
Waar behoort men het dan wel in te zoeken? Wel:

> 'Het behoort tot het wetenschappelijk bedrijf om je kennis ter discussie te stellen, zowel onder vakgenoten als naar de buitenwereld.' (Van Aalst, 1986, loc.cit. p.21).

Op het produkt van het onderzoek en op de rechtvaardiging ervan komt het dus aan. Wat preciezer geformuleerd: behalve de interne argumenten, die ter rechtvaardiging van leergang en theorie kunnen worden aangevoerd, kan men ook pogingen in het werk stellen om allerlei externe argumenten te vergaren.[37]
Daartoe kan men allerlei middelen aanwenden. Door het veelvuldig geven van voorbeelden kan men zich een zekere (wetenschappelijke) integriteit verwerven of, indien men een dergelijke status al heeft, deze nog meer glans geven.[38] Wat men in deze ook kan doen is zekere garanties scheppen om aan Poppers pleidooi voor een kritische verhouding tussen theorie en waarneming tegemoet te komen. Dit brengt met zich mee dat men instemt met Poppers positieve waardering voor kritiek, speciaal ten aanzien van de voortbrengselen van het eigen onderzoek.[39]
Voor het verzamelen van externe argumenten ter rechtvaardiging van het gepresenteerde onderzoek zijn de volgende werkzaamheden verricht.

— het ratificeren van lesprotocollen en leerlingportretten door de onderwijsgevenden;
— het ratificeren van interviewprotocollen door de leerlingen;[40]
— het voorleggen van mathematisch-didactische analyses en van les- en toetsmateriaal aan externe deskundigen;[41]
— het analyseren van lesprotocollen en interviews met behulp van geluids- en video-opnamen;
— de raadpleging van externe deskundigen bij de weging van kernpunten uit een nationaal plan voor reken-wiskundeonderwijs;[42]
— het voorleggen van resultaten van deelonderzoeken aan een (inter)nationaal wetenschappelijk forum;[43]
— het gebruikmaken van de resultaten van eerder door ons verricht ontwikkelingsonderzoek;[44]
— de consultatie van externe deskundigen ter beoordeling van onderwijsleerpakketten, die o.a. als bron voor dit ontwikkelingsonderzoek gebruikt zijn;[45]
— de bevestiging van onderzoeksuitkomsten en theorie met betrekking tot verdeelsituaties in enkele buitenlandse onderzoeken;[46]

Bovendien noemen we het eerder geschetste constructiemodel als objectiverend element. Juist het eerbiedigen van het zogenoemde constructiebeginsel kan er voor zorgen, dat de onderdelen ontwikkelen, onderwijzen, leren en onderzoeken in evenwicht op elkaar zijn afgestemd. Vanuit de onderscheiden posities immers vindt inbreng plaats door middel van constructies en produkties. Dit alles in dienst van hetzelfde doel. Voor zelfbedrog en misleiding is dan geen plaats.
Tenslotte noemen we nog de afronding van dit onderzoek met een vergelijkend deel als empirisch sluitstuk.

3.7 Besluit

Wat met de context van het onderzoek bedoeld werd, is in het voorafgaande ontvouwd.
De geuite verwachtingen dienaangaande werden wat dichterbij gebracht. Design (de observatie van langlopende leerprocessen) en toe te passen onderzoeksmiddelen (onderwijsexperiment, interview met vierledige functie, en vergelijkend onderzoeksdeel) zijn toegesneden op de geformuleerde probleemstelling.
De kern wordt gevormd door het constructiemodel met het constructiebeginsel als centraal begrip. De aandacht van deze studie zal zich in de eerste plaats richten op het verantwoorden van de opbrengst van het onderzoek. Het is mogelijk gebleken om op grond van het constructiestandpunt de probleemstelling nader te specificeren. De relatie van onderwijzen, leren en theorievorming binnen het geheel is gekenschetst. Ook de onontkoombare noodzaak tot het verrichten van ontwikkelingsonderzoek is met argumenten omkleed.
Tevens is de selectie van de onderzoeksgroep verantwoord.
Tenslotte is ingegaan op de rol en de invloed van de onderzoeker in het geheel en het daarmee samenhangende dilemma van deelname en distantie.
Wat ons te doen staat voor het voorgenomen ontwikkelingsonderzoek is het verrichten van een vak-onderwijskundige oriëntatie, d.w.z. wij zullen:

> '... een rationale moeten maken:
> — ter explicitering van de theoretische vooronderstellingen;
> — gebruik makend van wat bekend is;
> — en ter bevordering van de wetenschappelijke discussie;
> een rationale, waarin logische, psychologische en emprische analyseonderdelen geïntegreerd zijn.' (Treffers, 1986, loc.cit. p.24) [47]

Met bedoelde rationale zijn we al een eind op weg. Op de explicitering van de theoretische vooronderstellingen komt het nu aan. In het volgende hoofdstuk worden ze operationeel gemaakt in de leergang. Daarvan wordt een globale schets gegeven. Deze wordt vervolgens tot leven gebracht in een (gestileerd) verslag van het gerealiseerde onderwijs. Bij wijze van bezinning hierop zullen de realistische uitgangspunten en onderwijskundige grondstellingen eraan worden geïllustreerd.

Noten bij hoofdstuk 3

1. In verband hiermee zij verwezen naar het literatuuroverzicht, met name naar Streefland (1983).
2. Het verloop van een dergelijk proces kan niet volledig rationeel gereconstrueerd worden, ten eerste niet, doordat het proces zelf verre van zuiver rationeel is (zie Kuhn (1972)). Ten tweede niet door het aantal betrokkenen en ten derde niet door het distantie-deelname dilemma.
   Zie voor aspecten van de beschouwde kwestie Treffers (1978), Streefland (1980a) en (1983a). In Streefland (1983a) wordt een beknopte uiteenzetting gegeven van de weerbarstigheid van het breukenprobleem in het Wiskobasproject van het IOWO.
3. De onderscheiden niveaus zijn verwant met de niveaus van Van Hiele voor het leren van wiskunde; zie in dit verband Treffers (1987). Men zou kunnen stellen, dat het in dit geval gaat om de relevante niveaus voor het (leren) voortbrengen van een leergang voor het leergebied van de breuken.
   De door Goffree (1986) onderscheiden karakteristieken van het leren van jonge en volwassen leerlingen, namelijk: *anticiperen* en *reflecteren*, resp. *corrigeren* en *herstructureren* worden er in manifest.
4. In het vervolg van deze studie zal de reflectieve functie van de vrije produkties nog nader worden geconcretiseerd (vanaf hoofdstuk 4). Hier volstaan we met opnieuw te verwijzen naar Treffers (1987).
5. Zie in dit verband bijvoorbeeld Bidwell (1982), Kieren e.a. (1985) en Streefland (1983).
6. Zie bijvoorbeeld Streefland (1984a) (1986b).
   Payne (1986) gaat naar aanleiding van Streefland (1984c) op de kwestie van het zelf construeren door de leerlingen in. Hoewel hij de voorgestane benadering positief waardeert, zet hij – overigens terecht – de nodige vraagtekens in verband met de beheersbaarheid van het onderwijsleerproces en de vereiste bekwaamheid van de leerkracht.

   > 'Empirische Ergebnisse zu diesen Fragen enthält das erwähnte Heft jedoch nicht'

   zo concludeert hij (loc.cit. p.56). 'Empirische Ergebnisse', dient daarbij overigens begrepen te worden vanuit de Noordamerikaanse onderzoekstraditie. Vanuit ons standpunt staat bedoelde publikatie vol met paradigmatische empirische gegevens.
7. Zie in dit verband bijvoorbeeld Treffers en Goffree (1985) en Streefland (1986b).
8. Zie behalve de in voetnoot 7 genoemde publikaties ook Freudenthal (1984) en Treffers (1987).
9. In termen van Steffe en Cobb (1983) betekent dit gedurig 'shiften' van micro- naar macroscheme, zoals zij resp. het groepsproces over langere termijn en individueel leerproces aanduiden.
10. > 'Het behoort tot het wetenschappelijke bedrijf om je kennis ter discussie te stellen, zowel onder vakgenoten als naar de buitenwereld.' (V. Aalst, 1986, p.21)

    Op het niveau van de leerling betekent dit recht doen aan de onderwijskundige grondstellingen van interactie en eigen inbreng door constructies en produkties. Op het niveau van de onderzoeker gaat het erom dat zijn bevindingen op uiteenlopende wijzen ter discussie worden gesteld in de geest van het citaat (zie ook § 3.6).
11. Pas dan, bij beschikbaarheid van specifieke leertheorieën voor ook andere vormingsgebieden als natuurkunde en scheikunde, gloort het perspectief van een specifieke leertheorie voor de β-wetenschappen, om over een algemene leertheorie, die tevens het nodige waarheidsgehalte bezit, nog maar te zwijgen.
12. Zie Streefland (1983).
13. Wel waren er aanwijzingen voor de veronderstelling, dat de opdracht tot eigen vrije produkties een vruchtbaar onderwijsprincipe zou kunnen zijn, dat in de voort te brengen leergang een kernfunctie zou kunnen vervullen. Zo leerden ervaringen met constructieopdrachten dat leerlingen nogal eens buiten hun boekje gingen en heel wat meer produceerden dan er in feite van

hen was gevraagd. Zie in dit verband bijvoorbeeld het vijfde hoofdstuk in Streefland (1983). Van den Brinks ervaringen met jongere leerlingen in een produktieve rol speelden in de overwegingen eveneens mee, als ook De Langes ervaringen met tweetrapstoetsen in het HEWET-project.
Van den Brink (1985) (1986), De Lange (1987).

14. De ervaringen opgedaan met een leergang daarvoor waren weliswaar bevredigend, maar niet overtuigend. Intuitief werd door de onderzoeker aangevoeld dat er in de uitlijning van concrete activiteiten naar algoritmiseringsproces 'een gat zat'. Daar zou nog iets tussen moeten! Maar wat? Acceptatie van de voorlopige juistheid van een dergelijke bevinding zou dus rechtstreekse gevolgen voor de uitlijning (èn concrete uitwerking) van de beoogde leergang hebben. Zie Streefland (1983).
15. Om misverstanden te vermijden, merken we nogmaals op, dat het hier gaat om het realiseren van een leergang naar realistische maatstaven.
Stellig ligt, nationaal en internationaal in onderwijsmethoden, praktische artikelen, onderzoeksverslagen en meer omvattende onderzoekspublikaties, een keur van gegevens en didactische tips opgeslagen, doch vrijwel uitsluitend berustend op afwijkende visies of theorieën. Daardoor zijn ze voor ons onderzoek stellig niet onbruikbaar als eventuele inspiratiebron, maar zeker niet geschikt als rechtstreekse leveranciers van ideeën of elementen voor de voort te brengen leergang. Zie Streefland (1983).
16. Een dergelijke terugblik is inherent aan realistisch-wiskundeonderwijs, waarin men ook het verticale mathematiseringsproces op gezette tijden van een (voorlopig) sluitstuk tracht te voorzien.
Zie in dit verband bijvoorbeeld De Jong (1986), en daarin met name het onderzoeksinstrument in de bijlage.
17. Het longitudinale karakter van de onderneming sluit het alternatief van het laboratoriumexperiment op voorhand uit. In de eerste plaats zouden de proefpersonen vanaf zeker moment de storende invloed ondervinden van het eveneens voortgaande gewone onderwijs in breuken. Bovendien zijn ervaringen met individuele leerlingen niet zomaar generaliseerbaar naar de klassesituatie.
18. Voor nadere uiteenzettingen aangaande ontwikkelingsonderzoek verwijzen we naar IOWO (1980), Treffers (1978) (1984) (1986), Freudenthal (1981) (1983a) (1980), Goffree (1979), Goffree (red) (1985c), Streefland (1980a).
Overigens merken we op, dat aan het begrip ontwikkelingsonderzoek verschillende interpretaties gegeven worden. Zo wordt onderzoek na een ontwikkeling, eventueel in dienst van nieuwe ontwikkelingen dan wel onderzoek gekoppeld aan ontwikkeling eveneens ontwikkelingsonderzoek genoemd.
Het door Terwel (1984, p.177) gegeven model van ontwikkelingsonderzoek bijvoorbeeld, is fundamenteel anders dan het door ons geschetste kader. In zijn definiëring staat de onderzoeker nog buitenspel bij het scheppen van een eerste versie van een onderwijsleerpakket. In de eerste fase, de probleemoriëntatie op school, in Terwels model ligt die versie er reeds. De onderzoeker als buitenstaander komt in de tweede fase tot hypothesevorming, terwijl ideeontwikkeling, hypothesevorming (en -verwerping) en de hele didactische deliberatie, waarin het ontstaan van de eerste versie is ingebed juist tot de kern van de wetenschappelijke werkzaamheden gerekend kunnen worden.
Bovendien vervult de theorie in ons 'model' een constructieve rol. In Terwels model worden de hypothesen in een tweede evaluatieronde getoetst, terwijl in onze opvattingen hypothese- en theorievorming juist van meet af aan in dienst gesteld worden van de te ontwikkelen leergang met het oog op het verleggen van de grenzen van de beschikbare kennis; grenzen, die er juist de oorzaak van zijn, dat met een onaf produkt gestart moet worden.
Anders gezegd: in Terwels model wordt theorie *gereconstrueerd*, dit wil zeggen, de impliciete theorie van de ontwikkelaars. Onze benadering brengt constructieve theorie voort.
In feite is het door ons uitgevoerde onderzoek in overeenstemming met Lakatos' heuristische model voor wiskundige ontdekkingen (Lakatos (1977); zie ook Davis en Hersch (1985)).

Lijnse (1986) neemt een met Terwels model vergelijkbaar standpunt in, overigens gedwongen door de omstandigheden (vgl. Lijnse (1987)). Hij ziet als voornaamste functie van didactisch onderzoek, aansluitend op de afsluiting van het PLON-project, reflectie op de voorafgaande ontwikkeling. (PLON: Project Leerpakket Ontwikkeling Natuurkunde).
Op het punt van onderzoek naar begrips- en attitudevorming door het PLON-curriculum stelt Lijnse (loc.cit. p.317):

> 'Het verbaast me dan ook niet dat er ten aanzien van vergelijkbare cognitieve leeropbrengsten op het gebied van fysisch correcte begripsvorming geen noemenswaard verschil optreedt tussen PLON-onderwijs en traditioneel onderwijs. Juist het onderzoek naar 'alternative frameworks' maakt duidelijk dat, alhoewel het PLON-curriculum weliswaar motivationeel beter lijkt aan te sluiten bij de leefwereld van leerlingen, *er ten aanzien van de fysisch-conceptuele aansluiting nog veel problemen*, om *overigens begrijpelijke redeneren, zijn blijven liggen.*' (curs. L.S.).

Hier ligt een belangrijk argument voor het verrichten van ontwikkelingsonderzoek in de geest als door ons bedoeld. Bij ons gaat het immers om de mathematisch-conceptuele aansluiting, die tot dusverre in alle ons bekend onderzoek veel, zo niet alles te wensen overlaat. Een mooi voorbeeld van ontwikkelingsonderzoek, waarin gezocht wordt naar de chemisch-conceptuele aansluiting van het onderwijs bij dat van leerlingen in het derde jaar van het voortgezet onderwijs is dat van De Vos (1985). Hij stelt:

> '....., waarin de ontwikkeling van de in eerste instantie waarschijnlijk nog zeer primitieve korpuskulaire voorstellingen van leerlingen simultaan met de ontwikkeling van het begrip element en de daaraan ten grondslag liggende begrippen stof en reaktie zou moeten verlopen'. (loc.cit. p.15)

Tenslotte zij verwezen naar ontwikkelingsonderzoek aangaande cijferen, en burgerinformatica dat wel overeenkomstig de door ons geschetste kaders is uitgevoerd en dus in zekere zin voor ons onderzoek model kan staan en deels ook gestaan heeft.
Zie in dit verband Treffers (ed.) (1979), Treffers (1982), Rengerink (1983), Treffers en Goffree (1985), Dekker (e.a.) (1981), Treffers (1986), Bergervoet (e.a.) (1986).

19. Zie bijvoorbeeld Streefland (1983) (1986c).
20. Enige voorzichtigheid is hierbij zeker geboden. Immers de leerlingen blijven een gesloten boek, door alles wat zij niet opschrijven, construeren of produceren.
21. Doordat de jaargroep basisonderwijs in het onderzoek van beheersbare omvang was, kon telkens binnen een betrekkelijk korte tijdsspanne elke individuele leerling van de groep aan de beurt geweest zijn. Dit was nodig om betrekkelijk snel na een interviewronde bepaalde activiteiten weer gezamenlijk te kunnen vervolgen. Vooral tegen het eind van het onderzoek is het interview met dit doel nogal eens toegepast, omdat toen pas de contouren van de leergang op allerlei onderdelen zich steeds scherper gingen aftekenen.
    Overigens vervulden de 'gesprekken met kinderen' een belangrijke rol in de destijds door Wiskobas toegepaste strategie voor het ontwikkelen van onderwijsmateriaal met een eerste aanzet tot ecologische validiteit. Zie in dit verband Streefland (1980a).
    De functie van 'gesprekken met kinderen' in dienst van de opleiding tot onderwijsgevende in het basisonderwijs is door Goffree (1979) uitgewerkt.
22. Zie Freudenthal (1980).
23. Zie hiervoor De Jong (1986).
24. Hierbij kan gedacht worden aan de ervaringen opgedaan met het exploreren van verdeelsituaties en met het algoritmiseringsproces voor het aftrekken en optellen van ongelijknamige breuken onder toepasssing van de verhoudingstabel als middel tot voortschrijding in schematisering en verkorting. Streefland (1983).
25. Juist de zogeheten 'zwakke rekenaars' zullen door hun moeilijkheden met de breuken de weg kunnen wijzen naar didactische oplossingen van problemen. Streefland (1983, hoofdstuk V, § 2.1).

Bovendien mag verwacht worden dat juist de reactie van deze zwakke rekenaars op vrije produktieopdrachten van beslissende betekenis is voor de haalbaarheid van de methodische toepassing ervan.

26. Zie Streefland (1983, hoofdstuk V).
De status van stimuleringsschool ging verloren doordat de overheid de norm daartoe verhoogde. Wat de voorwaarde van realistisch wiskundeonderwijs aangaat, de Fatima Jozefschool speelde in de vernieuwing van het reken-wiskundeonderwijs binnen het Wiskobasproject van het IOWO een voortrekkersrol.
Deze school nam deel aan de ontwikkeling van diverse nascholingscursussen voor onderwijsgevenden, voerde een volledig nieuw programma voor rekenen-wiskunde in als genoemde volgschool in het Wiskobasproject onder begeleiding van enkele leden van het Wiskobasteam en was het proefstation voor eerder uitgevoerd breukenonderzoek. Zie in dit verband: Wiskobasteam (1977) (1978) (1980b), Streefland (1983).
27. Zie ook het zevende hoofdstuk waarin het vergelijkende onderzoeksdeel is beschreven.
28. In september 1983 begon het onderzoek.
Tijdens de onderzoeksperiode vond de invoering van de wet op het basisonderwijs plaats (per 1 augustus 1985). Voor de Jozefschool betekende dit samenvoeging met de in hetzelfde gebouw gevestigde Fatima kleuterschool. In de nieuwe terminologie is er dus sprake van groep 6 in plaats van vierde klas (of leerjaar).
29. Het betreft de 'gewichten' 1; 1,25 en 1,9 (1,40 en 1,70). Voor de betekenissen ervan zie hoofdstuk 7, § 7.2, alwaar de groep vergeleken wordt met de controlegroep die deelnam aan het vergelijkende onderzoeksdeel.

	1	1,25	1,9
onderzoeksgroep	36	64	-
schoolbevolking	29	54	17

Percentages leerlingen per 'gewicht'.

Zie artikel 6 van het formatiebesluit W & O, Staatsblad, 1985, p.337.

30. In het schooljaar 1984-'85 werd de groep getest door de Schoolpedagogische en Psychologische Dienst te Hilversum.
De gebruikte instrumenten waren onderdelen van de Differentiële Aanleg Test (Figuren Reeksen serie A en Ruimtelijke Inzicht serie A), aangevuld met 'eigen' materiaal van de Dienst voor getallenreeksen, woordbetekenissen, redeneren met woorden en gevoel voor zinsbouw. Ook werd de PMT-K van Hermans gebruikt.
De uitslagen waren (volgens staninenormering):

		score 1-3	score 4-6	score 7-9
Verbaal	Woordbetekenissen	36	64	-
	Redeneren met woorden	14	65	21
	Gevoel voor zinsbouw	29	71	-
Gemiddelde Verbale aanleg		26	71	7
Exact	Figuren	-	93	7
	Getallen reeksen	7	64	29
	Ruimtelijk inzicht	43	57	-
Gemiddelde Exacte aanleg		17	71	12

Indeling van de onderzoeksgroep in percentages op de 'Differentiële Aanleg Test' in het schooljaar '84-'85:

	score 1-3	score 4-6	score 7-9
P.M.	31	56,5	12,5
F-	31	38	31
S.W.	31	50	19

Indeling van de onderzoeksgroep in percentages op de PMT-K van Hermans, in het schooljaar '84-'85. Deze cijfers zijn – globaal beschouwd – in overeenstemming met de verwachtingen, die de leerkrachten van de groep hadden.

31. Deze groep telt dertien leerlingen, zes meisjes en zeven jongens. Bij langlopend onderzoek als dit valt vrijwel niet te ontkomen aan mutaties. De 'parttimers' meegeteld hebben in totaal achttien leerlingen aan het onderzoek meegedaan. De 'vaste kern' bestond dus uit dertien leerlingen. Van de inbreng van de tussentijdse uitvallers resp. nieuwkomers zal in de onderwijsbeschrijving – voorzover passend of relevant – overigens wèl gebruik gemaakt worden.
32. In beide schooljaren maakte de onderzoeksgroep deel uit van een combinatieklas, zodat tijdens de experimenteer-uren het andere deel van de combinatie door een andere dan de eigen leerkracht, begeleid moest worden.
    Het betrof de heren W. Haverkort en J. Baay, tevens directeur van de school, die resp. meededen in de genoemde perioden.
33. Terminologie van de Engelse psycholoog – wiskundige R.R. Skemp (1976) (1979).
    Er is in feite sprake van gedurige tussentijdse theoretische reflectie in de geest zoals Ten Have (1977) dit voor sociologisch veldonderzoek schetste.
34. Zie Ten Have (1977), Terwel (1978), Goffree (1979, § 4.1 pp.187-203) en Terwel (1984).
    Een alerte, doch passief blijvende observator vermag overigens niet zijn onwillekeurige invloed in de onderzoekssituatie uit te sluiten. Zie in dit verband Adda (1982).
35. Zie Goffree (1979) en Terwel (1984).
36. Zie bijvoorbeeld Goffree (1979), Nauta (1977) en Streefland (1980).
37. Zie Nauta (1977) en met name Goffree (1979, p.299).
38. Zie bijvoorbeeld Boenders (in gesprek met Thomas Kuhn) (1978, p.53).
39. Zie Boenders (nu in gesprek met Karl Popper) (1978, p.15).
    Zie ook hoofdstuk 7, het vergelijkende deel van het onderzoek waarvan de uitkomsten mede benut zijn om de leergang in ontwikkeling te kritiseren en bij te stellen.
40. Bij de methode van 'mutual observation' legt men ter controle (deel)protocollen aan de geinterviewde voor ter verificatie van het geregistreerde en eventuele 'gekleurde' waarnemingen van de onderzoeker.
    Zie Van den Brink (1981).
41. Zie in dit verband Goffree (1979), Streefland (1980a) (1984d) (1985c).
42. Zie Treffers en De Moor (1984) en Cadot en Vroegindewey (1986). Zie ook hoofdstuk 2 § 2.3.
43. Zo werd bijvoorbeeld het ontwikkelingsonderzoek naar een leergang voor het aftrekken en optellen van ongelijknamige breuken volgens progressieve schematisering met de verhoudingstabel gepresenteerd op het vijfde internationale congres voor de psychologie van het wiskundeonderwijs (PME) in Grenoble en in de Proceedings van het congres gepubliceerd. Zie Streefland (1981c).
    In variërende omvang en distantie tot de onderwijspraktijk werd over de leergang nog herhaaldelijk gepubliceerd. Streefland (1982c) (1983d) (1983c) (1983d).
44. Zie Streefland (1983a) en alle overige in noot 43 genoemde publikaties.
45. Een dergelijke raadpleging vond veelal plaats op de zogenaamde najaarsconferenties, die Wiskobas in Noordwijkerhout organiseerde voor PABO-docenten, schoolbegeleiders e.d. Zie in dit verband Streefland (1985).
46. Bidwell (1982), Kieren e.a. (1985).
47. Het bevorderen van de bepleite wetenschappelijke discussie op basis van de door Treffers geformuleerde eisen te stellen aan ontwikkelingsonderzoek is noodzakelijk, vanwege de

4 De leergang in theorie en praktijk

4.1 Inleiding en overzicht

Het globaal schetsen van de leergang betekent in feite niets anders dan het ruwweg in kaart brengen van het onderzoeksterrein waar de geselecteerde leerlingen het breukenonderzoek gaan uitvoeren, dat wil zeggen hún onderzoek naar de breuken.
Net zoals dit voor de onderzoeker het geval was (§ 3.2) is ook hiervoor een indeling in drie niveaus mogelijk, de niveaus van Van Hiele.[1]
In § 4.2.1 wordt hierop kort ingegaan. Daarna volgt een beknopte schets van de globale inhoud van de leergang, het werkterrein voor het onderzoek naar de breuken door de leerlingen. Een nadere uitwerking in een meer onderwijs nabije beschrijving volgt daarna. Waar nodig, zal deze gestileerde onderwijsimpressie worden verlucht met (observatie)materiaal uit het verrichte onderzoek. Hierdoor ondergaat niet alleen de leergangschets concrete uitwerking. Tevens komt het gezamenlijk leerproces van de onderzoeksgroep in het blikveld. De geleidelijke verplaatsing van de aandacht van onderwijs naar leerproces zal in het vijfde hoofdstuk worden bekroond met de portretten van alle leerlingen die aan het volledige onderzoek hebben deelgenomen. Het portretteren geschiedt naar de geobserveerde, individuele leerprocessen. Deze weerspiegelen het gegeven onderwijs.
Het stellen van het onderwijs tegenover de individuele leerprocessen ligt dus voor de hand. In het zesde hoofdstuk zal dit zijn beslag krijgen. De bedoeling ervan is de bevindingen mede in dienst te stellen van de verbetering van de leergang. Zulks geldt ook het erna te beschrijven vergelijkende deel van het onderzoek.
Bij wijze van samenvatting van dit hoofdstuk zal op het geheel worden gereflecteerd met het oog op het mathematiseren.

4.2 Globale schets van de leergang breuken

4.2.1 Vooraf

Van Hiele ontpopte zich als een vasthoudende pleitbezorger voor de afschaffing van het kale breukrekenen op de basisschool, naar eerder werd vermeld. Zijn zienswijze berustte op de vaststelling, dat de leerlingen in dit gebied op een te hoog niveau werden ingeleid.[2]
Treffers (1986, p.43) stelde in verband hiermee:

> '...: het traditionele rekenonderwijs in bijvoorbeeld verhoudingen, procenten, breuken, kommagetallen en metriek stelsel is ontoereikend en ineffectief, omdat het zich van meet af aan vrijwel uitsluitend op het tweede, formele niveau afspeelt.'[3]

Van Hiele ging in zijn stellingname dus voorbij aan het overwegen van mogelijkheden om tot een verantwoorde vulling van het concrete, eerste niveau te komen. Het is daarop, dat onze aandacht zich hier in de eerste plaats richt, namelijk het mathematisch-didactisch inhoud geven aan het

theoretische duidelijkheid.

> 'And clarity signifies that which can be shown not to be able to fulfill the claim of generality should be referred back to specificity'. Streefland (1986, loc.cit. p.19).

Gedoeld wordt hier op het drie-fasen-model van Gagné voor het oplossen van wiskundige toepassingsproblemen, dat aanwijsbaar in de structuralistische basisconceptie thuishoort en niet past in de realistische. Gagné (1983).

constructieve en produktieve handelen met subjectief concrete objecten, materieel waarneembaar, voorstelbaar.[4]
Wanneer het door de leerlingen te bewerken materiaal voldoende generatief is, zal het ermee voortgebrachte breukenmateriaal er immers borg voor kunnen staan, dat ook het tussenniveau, dat van de relaties tussen de objecten, rijk gevuld wordt.[5]
Het formele, derde niveau, dat van de vaksystematiek, alwaar het denken zich richt op de op het tweede niveau vastgestelde relaties tussen de objecten, wordt dan eveneens rijk gefundeerd. Omdat de onderzoeksgroep van de basisschool is, behoort dit niveau vanzelfsprekend niet de eerste prioriteit te hebben in onze analyse.
Om de lezer enig houvast te geven, verwijzen we naar de in § 3.2 gegeven typering van het mogelijke opbrengstmateriaal uit een verdeelsituatie. Dit materiaal kan bijvoorbeeld als toetssteen worden gebruikt om vast te stellen in hoeverre met de mogelijkheid tot eigen inbreng van de leerlingen rekening wordt gehouden.

4.2.2 Breuken maken

Het bezigen van de leerstofterm 'breuken' houdt een gevaar in, namelijk dat men a priori zijn blikveld vernauwt. 'Breuken *maken*' met het oog op de inzichtelijke voortbrenging van het systeem dient dit gevaar enigszins te bezweren, al is het niet toereikend.
Breuken voortbrengen vraagt om toegangen met die mogelijkheid, zo mogelijk meerdere toegangen én met het nodige realiteitsgehalte.
Welnu, meten, eerlijk verdelen, het vergelijken van verdeelsituaties, het samenstellen van recepten en mengsels, vergroten en verkleinen, kunnen als zodanig dienst doen.[6]
Uit alle genoemde toegangen spruiten wiskundige activiteiten als vanzelf voort, of beter, het zijn reeds – deels – gemathematiseerde toegangen. Niet opgaand meten bijvoorbeeld brengt verfijning van de toegepaste maateenheid als vanzelf binnen het blikveld en in de nasleep van een dergelijk meetproces met zijn uitkomst dus ook de decimale breuken, wanneer de toegepaste maatverfijning tenminste decimaal is. Maar dat is – zonder meer – niet voldoende. Immers, dergelijke toegangen kan men ook aanwenden om het systeem hooguit inzichtelijk na te volgen.[7]
Waarop het bovendien nog aankomt is de inbedding van genoemde toegangen in een context of realiteit. Met name de manier waarop dit gebeurt, dat wil zeggen, de aard van de vraagstelling die men opwerpt om de toegangen te passeren en het gebied van de breuken binnen te dringen, is doorslaggevend. Afgezien van de verschillende functies die contexten of uiteenlopende situaties daarbinnen kunnen vervullen, zoals het dienstbaar zijn aan de begripsvorming, aan de modelvorming, aan het toepassen en het oefenen van rekenvaardigheden in specifieke toepassingssituaties, doelen we hier vooral ook op het variabele element in een probleemstelling in een context, of anders gezegd, de '*omgeving*' van de tekst of uitbeelding, waarin een

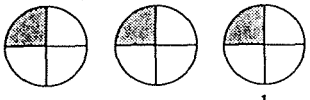
opgave vervat is, hetzij expliciet opgeroepen, hetzij tot de (verzwegen) achtergrondassumpties behorend.[8]
Bedoelde omgeving als variabel element kan in subjectieve zin het probleemoplossingsproces sturen. In dit geval bekijken wij de objectieve kant ervan, namelijk de variabele elementen van een context zodanig te benutten, dat daarmee de condities gecreëerd worden om tot inzichtelijke constructie van het systeem te komen in plaats van navolging. Situeert men bijvoorbeeld het eerlijk verdelen in verdeelsituaties in de context van een eethuis, dan blijken – zoals we zullen laten zien – het opdienen van de bestellingen en het schikken van de eters om de tafels verstrekkende gevolgen te kunnen hebben voor het voortschrijdende mathematiseringsproces dat de activiteiten van de jonge breukenonderzoekers kenschetst. Bovendien biedt het variëren van de deelname aan het verdeelproces op grond van uiteenlopende behoeften, nog meer mogelijkheden.
Van dit alles dient de lezer zich bewust te zijn, ook al zal de nu volgende beschrijving meer in termen van leerstof dan van realistische contexten gesteld worden.
Welnu, de breuken zullen geleidelijk aan als ordeningsmiddel worden benut om de resultaten van breken, eerlijk verdelen, enz. wiskundig te beschrijven. Voor de voort te brengen breuken en hun onderlinge verbanden zullen geen rekenrecepten worden verstrekt. Naar nog zal blijken, zullen de vraagstellingen die we op het oog hebben, van meet af aan aanleiding geven tot het informeel opereren. Dergelijk inzichtelijk, niet-regelgeleid opereren zal zoveel mogelijk worden aangemoedigd. Aldus hangen de begripsvorming en het inzichtelijk opereren vanaf het begin onverbrekelijk – en dus over-en-weer zingevend – samen.
De formalisering van het opereren vindt geleidelijk aan plaats en wordt bebakend door *vijf* clusters van activiteiten, die min of meer gelijk optrekken in het onderwijsproces en zodoende niet duidelijk van elkaar te scheiden zijn.
De exploratie van *verdeelsituaties* vormt de kern van de leergang en dient vanaf zeker moment ook model te gaan staan voor situaties waarin het verdelen een meer verhuld of ander karakter heeft, zoals bij het meten met maatverfijningen of het samenstellen van mengsels.
Rond de genoemde kern zullen de vijf clusters van activiteiten bij wijze van bakens worden gegroepeerd. Uitgangspunt daarbij is – zoals de analyses op het niveau van de leergang in § 3.2 reeds uitwezen – dat verdeelsituaties bij uitstek de middelen zijn voor een jaargroep basisschoolkinderen om uiteenlopende constructies met bijpassende beschrijvingen aan leeractiviteiten te ontlokken.
De vijf onderscheiden clusters zijn:
1. Het opdienen en verdelen in verdeelsituaties.
2. Het tafelschikken en verdelen in verdeelsituaties.
3. Het opereren via een bemiddelende grootheid.
4. Het doen van eigen produkties op symbolisch niveau.
5. Het op weg gaan naar rekenregels voor breuken.

Van elk cluster volgt nu een beknopte beschrijving, steeds voorafgegaan door een globale aanduiding van wat op langere termijn beoogd wordt. Aan het eind vatten we deze clusters nog eens samen.

ad 1: het opdienen en verdelen in verdeelsituaties
Op het rijk vullen van het concrete niveau richten zich hier de activiteiten. In dienst van het oplossen van allerlei problemen wordt door middel van schatten en gevarieerd verdelen breukenmateriaal voortgebracht. In dit materiaal liggen allerlei fenomenen vervat, die in de loop van het leerproces geleidelijk aan expliciet gemaakt gaan worden.
Het betreft de verkenning van het herhaald halveren als steunsysteem en referentiekader voor het geheel, de equivalentie van breuken, breuken in gemengde getallen en de operatoire samenhang in het algemeen. Door het koppelen aan grootheden en het variëren van de objecten wordt niet alleen de notie van breuk in de operator manifest, maar bovendien kan een proces van gevarieerde modelvorming hecht verankerd in de realiteit, zich op deze wijze voltrekken. In het derde cluster komen de beide laatstgenoemde aspecten samen.

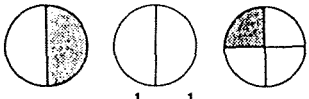
Het globale perspectief van dit cluster laat zich als volgt verbijzonderen.
Verdelingen kunnen aan een variëteit van materiaal worden voltrokken: rechthoeken, cirkels, stroken, lijnstukken e.d., elk op hun beurt iets werkelijks vertegenwoordigend. Naar het voorbeeld in § 3.2 uitwees biedt een verdeelsituatie gevarieerde mogelijkheden om de portie voor iedere deelnemer voort te brengen met een dienovereenkomstige variëteit aan genoteerde oplossingen, die in de discussie achteraf vanzelf letterlijk op dezelfde noemer van uitkomst worden gezet.
Voorbeeld: '3 pizza's verdelen onder 4 kinderen'.
In de context van een pizzeria kunnen op vrij ongekunstelde wijze voorwaarden worden aangebracht die de beweerde variëteit aan oplossingen met passende notaties teweeg zullen brengen.
Variaties in het 'opdienen' kunnen worden toegeschreven aan het tempo waarin de keuken werkt, en waarbij dan het verdelen wordt aangepast.

a. Eén voor één:



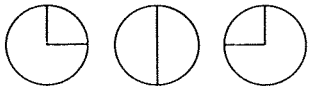
Ieder krijgt een kwart ($\frac{1}{4}$) (pizza) + (..) ($\frac{1}{4}$) (pizza) + (..) ($\frac{1}{4}$) (pizza) of $3 \times \frac{1}{4}$ (pizza) of $\frac{3}{4}$ (pizza).

b. Eerst twee daarna één:



Ieder krijgt $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

c. Alle drie tegelijk:



Twee kinderen krijgen $1 - \frac{1}{4}$, eentje krijgt $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ en

eentje krijgt $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ etc.

Afhankelijk van de wijze van opdienen voltrekt het verdelen zich dus eenheidsgewijs of globaal. Deze globale vormen van verdelen kunnen ook voorbereid worden met schatten.

'Ieder meer of minder dan een half?' en bij 'meer dan een half' het uitdelen met een halve beginnen – wat als ingang tot het delen door een breuk kan worden benut (cluster 3) – en vervolgens nagaan wat te doen met wat rest.

De breuken die nauw verbonden zijn met het herhaald halveren ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$, ...) kunnen als *referentiepunten* voor het schatten dienst gaan doen.[9]

Haakt een verdeler af, dan grijpt dit eveneens in verdeling en notatie in.

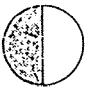
Exploratie van situaties als '6 pizza's verdelen onder 8 kinderen' en '5 pizza's verdelen onder 4 kinderen' brengt equivalente breuken ($\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$) en breuken in gemengde getallen voort ($1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$). Allerlei equivalenties kunnen worden voortgebracht door het middel van het gevarieerd opdienen in te zetten in minder overzichtelijke situaties met grotere aantallen. Het over en weer in elkaar opgaan van allerlei breuken, zoals $\frac{1}{2}$ in $\frac{2}{4}$ en $\frac{3}{4}$ in $\frac{6}{8}$, geeft aanleiding tot het gebruik van de term '*schuilnaam*' om de equivalentie van breuken te kunnen omschrijven.[10]

Het op grond van verdeelsituaties voortgebracht monografisch materiaal kan worden opgeslagen voor latere bewerking en uitbreiding in dienst van de eigen produkties op symbolisch niveau (cluster 4).

Het spreekt vanzelf dat in verband met het uitvoeren van verdeelwerkzaamheden zich ook allerlei reconstructievragen kunnen voordoen, bijvoorbeeld uit visueel of (in cijfersymbolen) beschreven porties de verdeelsituatie bepalen dan wel het verloop van het opdienen traceren.

Bijvoorbeeld: '5 pizza's werden onder 8 kinderen verdeeld; ieder kreeg $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$; hoe werd er opgediend?'

Ook noemen we nog het toekennen van een maat, gewicht of prijs aan wat verdeeld wordt of is. De breuken gaan dan in de functie van *operator* optreden.

Bijvoorbeeld: 1 pizza kost *f* 2,00. Iemand krijgt 
Wat kost dat?

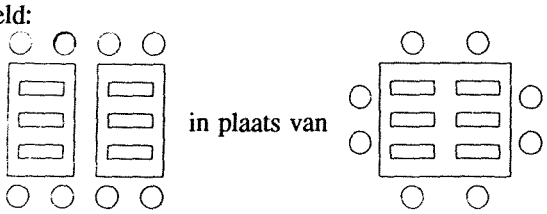
$\frac{1}{2}$ pizza kost $\frac{1}{2}$ van (keer) *f* 2,00 = *f* 1,00

Het zelf produceren van verdeelverhalen met passende verdelingen en

notaties behoort vanzelfsprekend ook tot de activiteiten.

In latere instantie staat het geschetst verdelen model voor de exploratie van situaties met mengsels, recepten, wegduur kwesties en wat dies meer zij. Bijvoorbeeld: '3 schepjes koffie in het apparaat voor 4 kopjes' en '4 schepjes voor 6 kopjes'. Welke koffie zal sterker zijn? (In dit geval is het dus meer een kwestie van opdienen na het verdelen.)

Bij meer omvangrijke situaties tenslotte, zoals '6 repen verdelen onder 8 kinderen' e.d. kan de overzichtelijkheid, behalve door het opdienen te faseren, ook worden vergroot door de schikking van de kinderen om de tafels te variëren.
Bijvoorbeeld:



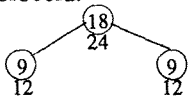
Daardoor kan tevens het eenvoudig vergelijkbaar zijn met en de (on)gelijkwaardigheid met andere situaties aan het licht komen.
Met dit voorbeeld maakt het tweede cluster van activiteiten zijn opwachting.

Samengevat komt het er op neer, dat met verdeelsituaties equivalente breuken, breuken in gemengde getallen enz. kunnen worden voortgebracht. Deze verdeelsituaties vormen één van de belangrijkste bouwstenen voor de eigen produkties op symbolisch niveau (cluster 4).

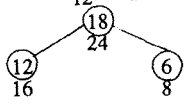
ad 2: het tafelschikken en verdelen in verdeelsituaties
Het tafelschikken, daartoe gematerialiseerd in een passend symbool en schema, is bij uitstek geschikt om equivalente situaties voort te brengen. Het schema leent zich tot voortschrijden in schematiseren door verkorten en vormt als zodanig ook de bron voor de verhoudingstabel, waarmee het voortschrijdende schematiseren nog kan worden vervolgd. Het schema voor het tafelschikken kan worden ingezet om verdeelsituaties gemakkelijker vergelijkbaar te maken met het oog op de ordening en verschilbepaling van die situaties. Er liggen dus toegangen tot bewerkingen als het aftrekken in besloten. Kortom het tafelschikken vormt de voedingsbodem waarin een proces van verticaal mathematiseren wortelt en waarbij door de constructie van een afzonderlijk 'tafeltjessymbool' als bouwsteen voor het schematiseren verhoudingen en breuken welonderscheiden zowel als hecht met elkaar verbonden zijn.

Wat betekent nu het voorgaande in concreto?
Wel, de aanvankelijk getekende of voorgestelde situatie met bijvoorbeeld 18

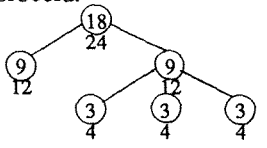
pizza's op een tafel en 24 personen er omheen, vraagt om de *constructie* van een passend symbool: $\frac{18}{24}$.
Zulk een gezelschap dat 'neerstrijkt' in een pizzeria laat zich voegen naar de manier waarop de tafeltjes en zitplaatsen zijn gegroepeerd.
Omgekeerd kan men tafeltjes en zitplaatsen voegen naar het binnenkomende gezelschap en daarvan afgeleid naar de wiskundige activiteiten die men op het oog heeft.
Dit brengt allerlei organiserende en structurerende activiteiten met zich mee, zoals de bouw van schema's, waarin het variëren van de tafelschikkingen tot uitdrukking wordt gebracht.
Bijvoorbeeld:



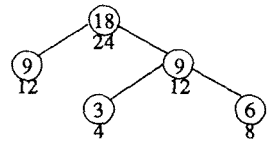
Twee tafels $\frac{9}{12}$ in plaats van $\frac{18}{24}$



of de tafels $\frac{12}{16}$ en $\frac{6}{8}$.
Dergelijke schema's weerspiegelen niet alleen de eerlijkheid van het verdelen, doch vereenvoudigen tevens de onderlinge communicatie van leerlingen en onderwijsgevende over dergelijke kwesties, terwijl de trits situatie-symbool - schema het denken van de leerlingen in belangrijke mate kan ondersteunen. Het opzetten van zulke schema's kan tot spontane constructie van allerlei meer uitgebreide of verkorte schema's aanleiding geven.
Bijvoorbeeld:



,of



$\frac{18}{24}$ uiteengelegd in $\frac{9}{12}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}$ in $\frac{9}{12}, \frac{3}{4}$ en $\frac{6}{8}$

Vanuit de context kunnen aanwijzingen omtrent aantallen tafeltjes en aantal personen per tafeltje gegeven worden. Aldus kan een veelheid aan mogelijkheden zich afspelen om in de uitkomst gelijkwaardige 'tafeltjes' teweeg te brengen.[11]
In ieder gewenst stadium kan de schemabouw worden onderbroken of stopgezet om de uitkomst van de bereikte situatie te beslissen met de middelen 'opdienen en verdelen' (cluster 1).
Daarbij verdient vooral het opdienen per stuk de nodige aandacht, door de

trefzekerheid die deze wijze van verdelen in alle gevallen heeft. Bovendien vormt deze manier van doen de bron voor de constructie van breuken met teller ongelijk één uit stambreuken.
Een ander middel tot 'uitstappen uit het schema' om de uitkomst te beslissen, is de herkenning van overzichtelijke situaties waarvoor eerder (eventueel) verdelingen zijn uitgevoerd.
Het tafeltjessymbool roept nogal wat vragen op:

— is de verdeling van $\frac{18}{24}$ in $\frac{6}{8}$ en $\frac{12}{16}$ eerlijk?;

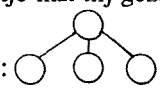
— wie krijgt meer, die bij $\frac{3}{4}$ zit of bij $\frac{7}{8}$? hoeveel meer?;

— idem voor $\frac{3}{4}$ en $\frac{5}{7}$, met verdelingen;

— bij $\frac{3}{4}$ krijgt ieder $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$; hoe is er opgediend en verdeeld?;

— bij een verdeling krijgt iemand $\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$; hoe is er opgediend en verdeeld?; aan welk tafeltje zat hij?;

— bij een verdeling krijgt iemand $1\frac{1}{3}$; aan welk tafeltje kan hij gezeten hebben?;

— iemand maakt een schema voor het tafelschikken:  om hoeveel pizza's en verdelers kan het gaan?; maak het schema af; hoeveel krijgt ieder?;

— kan iemand die $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ krijgt aan het tafeltje $\frac{2}{5}$ gezeten hebben?;

— iemand krijgt bij een verdeling $\frac{1}{2}$, aan welke tafeltjes kan hij allemaal gezeten hebben?;

— iemand zit aan tafeltje $\frac{4}{5}$, aan welk tafeltje zou hij maar de helft gekregen hebben?

Juist bij kwesties als de laatstgenoemde, kan het ondersteunende denkkader van de tafelschikkingen goede diensten bewijzen, namelijk $\frac{4}{5}$ de helft? $\rightarrow \frac{2}{5}$ of $\frac{4}{10}$, dus $\frac{1}{2}$ van $(\times)$ $\frac{4}{5} = \frac{2}{5}$ of $\frac{4}{10}$, want $\frac{4}{5}$ geeft $\frac{4}{5}$ als portie, $\frac{2}{5}\frac{2}{5}$ en $\frac{4}{10}\frac{4}{10}$.
Opmerkelijk is – en dit geldt de facto voor dit cluster van activiteiten in zijn geheel – dat het bij de beschouwde kwesties vooral ook gaat om de koppeling van verhoudingen aan breuken en deze tegelijkertijd van elkaar te onderscheiden door middel van de verschillende notaties.[12]
Behalve door situaties rechtstreeks te vergelijken kan een gevraagde ordening ook tot stand worden gebracht via de koppeling aan een prijs van wat er op tafel komt.
'Prijs', in cluster 1 ook al genoemd, is het zoveelste variabele element binnen de beschouwde context. Eerder noemden we ook al de eetwaar zelf, die opgediend wordt met het oog op de verschillende visuele modellen die worden toegepast (rechthoeken, cirkels, etc.; cluster 1).
De opgeworpen kwesties in verband met het tafeltjessymbool geven

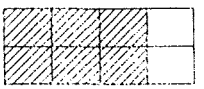
aanleiding tot de constructie van materiaal dat ingangen in zich herbergt naar de bewerkingen toe, bijvoorbeeld in verband met:
— gelijkwaardige verdeelsituaties en breuken;
— het ordenen van (equivalente) verdeelsituaties en breuken:
— het bepalen van verschillen; en dus ook
— het aftrekken (en optellen); en
— het vermenigvuldigen, door in situaties in te grijpen;
— het delen in de vorm van uitdelen, gestuurd door uniform opdienen.

Eigen constructies en vrije produkties kunnen binnen dit cluster ruimschoots aan bod komen. Dit geldt niet alleen de schemabouw voor de tafelschikkingen zèlf en de gelegenheid die dit de leerlingen biedt tot het spontaan aanbrengen van allerlei verkortingen daarin. Ook de mogelijkheid tot ongekunstelde overgang op verhoudingstabellen via optimaal 'gesnoeide' tafelschikkingsbomen en opgeroepen tafeltjesklassen ($\frac{1}{2} \rightarrow \frac{①}{2'} \frac{②}{4'} \frac{③}{6'}$ ...) via iemands portie na een verdeling. Daardoor krijgt het proces van voortschrijdende schematisering door verkorting de nodige nieuwe impulsen en mogelijkheden.[13]
Waarop het vooral aankomt is, dat de activiteiten die de weg moeten effenen naar de bewerkingen nu hechter dan ooit in de concrete bronnen voor de breuken zijn verankerd. De eerder genoemde kloof tussen de concrete bron 'verdeelsituaties' en de destijds toegepaste schematiseringsvorm 'verhoudingstabel' lijkt nu te zijn gedicht.[14]
Het breukverwekkende eerlijk verdelen als model krijgt een vervolg in het bewerken van situaties, waarin het verdelen meer verborgen blijft. Dit geldt ook voor het vergelijken en ordenen met toenemende precisie van dergelijke situaties.
Dit betekent, dat de beschouwde symboliseringen en schemavormen op overeeneenkomstige wijze ook ruimer worden toegepast. Dit gebeurt bij problemen van afstand en tijd, snelheid en tijd, gewicht en prijs, aantal en prijs, etc. Op die manier krijgen de geschetste methoden een meer algemeen karakter.[15]

ad 3: het opereren via een bemiddelende grootheid
Toekenning van een maat, gewicht of prijs aan zekere eenheid meet, weegt of prijst eveneens van deze eenheid afgeleide delen. De breuk die in eerste instantie de teweeggebrachte deel-geheel-relatie beschrijft wordt dan breuk *in* een operator (cluster 1). In dit cluster van activiteiten is het erom te doen maat, gewicht en prijs van allerlei samenstellingen, waarin breuken zich manifesteren, vast te stellen. Het is dus een indirecte methode om som, verschil, produkt of quotient van breuken te bepalen. Als maat, gewicht of prijs kunnen ook de visuele modellen in ontwikkeling dienst doen.
Gemakshalve zal van 'prijskoppeling' worden gesproken, wanneer gemeten, gewogen of geprijsde eenheden worden toegepast, en van 'opereren met een

omweg'. In de fase van het onderwijsproces met een sterk accent op de exploratie van het verdelen, kan iets dergelijks al aan de orde worden gesteld (cluster 1).

Bijvoorbeeld: Bij een verdeling kreeg iemand $\frac{3}{4}$ reep.

Teken: 

Een hele reep kost 1 gulden 20. Hoeveel kost het getekende stuk?

In het bijzonder is het echter te doen om het samenstellen van breuken in vraagstukken als $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} =$; $\frac{1}{2} - \frac{2}{5}$; $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} =$ en $\frac{1}{2} : \frac{2}{5} =$, niet rechtstreeks dus, maar via de omweg van de 'prijskoppeling'.[16]

Optellen en aftrekken

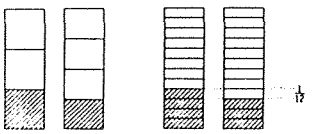
$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} =$ ... wordt in verband gebracht met een pizzasituatie. Een pizza kost *f* 5,00. Iemand, die beide stukken nuttigde, at dus voor $\frac{1}{2} \times 5 =$ *f* 2,50 en $\frac{2}{5} \times 5 =$ *f* 2,00 op. De totale vertering bedroeg dus *f* 4,50. Zo wordt ook gevraagd naar de prijs van $\frac{9}{10}$ pizza. Bijgevolg wordt impliciet verband gelegd tussen $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$ en $\frac{9}{10}$. Het expliciteren van dergelijke verbanden kan men ondersteunen door eenzelfde samenstelling ook met andere valuta, bijvoorbeeld BF 100,00 per pizza of FF 20,00 te beschouwen.[17] Het verband tussen $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$ en $\frac{9}{10}$ tekent zich af door de onafhankelijkheid van de gevoerde eenheidsprijzen, die telkens blijkt.
Achteraf kan eventueel nog controle uitgeoefend worden onder toepassing van schuilnamen:

$$\frac{9}{10} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5}.$$

Het prijsvoorschrift kan ook achterwege gelaten worden. In dat geval zoeken de leerlingen zelf naar een handige prijs, zonder dat dit overigens met de methode van de kgv-bepaling der noemers in verband wordt gebracht.
Aan het verwoorden van eventueel ontdekte regels wordt eveneens nog voorbijgegaan.
Een activiteit die in de loop van het onderwijsproces wel de nodige nadruk krijgt is het over en weer verbinden van contextopgaven met daarbij passende samenstellingen van breuken. Anders gezegd: de leerlingen zullen de nodige vaardigheid moeten verwerven in het kiezen van de juiste bewerkingen en het in symbolen uitdrukking geven daaraan.[18]
Voor deze wijze van (be)werken kunnen eveneens de visuele modellen

worden ingezet. Sterker nog, dit is zelfs noodzakelijk om bepaalde modellen niet alleen hecht te verbinden met passende bewerkingen, maar ook om in het proces van modelvorming in verband daarmee tot zekere niveauverhogingen te komen (hoofdstuk 6).
Om het niet bij pizza's met hun prijzen te laten, ruilen we deze in voor ordelijk in stukjes te verdelen stroken of voorverdeelde rechthoeken (repen).
Voorbeeld met stroken:

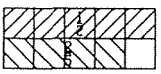
$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$



Bij verdeling in 12 stukjes kunnen $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{4}$ met elkaar worden vergeleken en het verschil worden afgelezen.[19] In plaats van een strook van 12 gulden wordt nu dus voor een strook van 12 stukjes gekozen.

Repen

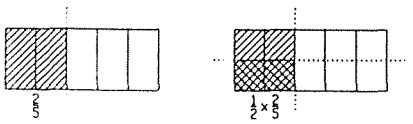
$\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$



Vermenigvuldigen

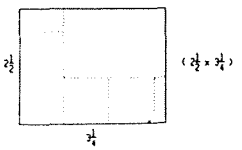
$\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} =$

Het produkt van echte breuken kan eveneens in repen worden voltrokken.

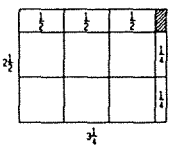


Onderzoek naar de uiteenlopende mogelijkheden tot het verdelen van repen met variërende onderverdelingen in blokjes gaat hieraan vooraf, zowel in dienst van het optellen als het vermenigvuldigen (cluster 1). Dit geldt ook voor verwante, nog te construeren, verdelingen zoals het 'leggen' van tegelvloeren.
Bijvoorbeeld

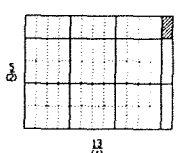
Gegeven een vloer van $2\frac{1}{2}$ m bij $3\frac{1}{4}$ m.



a. Schatten van het aantal 'grote' tegels: minstens 6 (2 bij 3), maar 7 of 8 kan ook.
b. Het verfijnen van de schatting door al tekenend de vloer met grote tegels en delen ervan te beleggen en de delen te benoemen en handig samen te nemen: $2 \times 3 + 3 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + \ldots$



c. Het verder verfijnen van de uitkomst voltrekt zich door het zoeken van een passende tegel, waarmee de vloer volledig kan worden belegd. Daarbij trekt het 'hoekstukje' van $\frac{1}{8}$ de aandacht ($\frac{1}{4}$ bij $\frac{1}{2}$). Er zijn dan reeds produkten binnen de eenheid bepaald.
d. De procedure van 'volleggen' met passende tegels kan worden verkort door het (visuele) schema steeds globaler en tenslotte slechts voorgesteld in te vullen. Daarmee gepaard gaat een notatie ontwikkeling voor het aantal passende tegels, waarin de regel voor het vermenigvuldigen van breuken is vervat $\frac{5}{2}$ (5 tegels van $\frac{1}{2}$ in $2\frac{1}{2}$ m) $\times$ $\frac{13}{4}$ (13 tegels van $\frac{1}{4}$ in $3\frac{1}{4}$ m) = $\frac{65}{8}$ (65 tegels van $\frac{1}{8}$). Dat er 8 passende tegels in één grote van de schatting opgaan blijkt tijdens de geschetste procedure, dus 8 grote en $\frac{1}{8}$ of $8\frac{1}{8}$ tegels.



Via de prijs van een 'grote tegel' (1 vierkante meter) kan de verkregen uitkomst nog eens worden gecontroleerd, namelijk:

1 vierkante meter (grote tegel) kost 16 gulden, dus een vloer van $2\frac{1}{2}$ m bij $3\frac{1}{4}$ m kost $2\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{4} \times 16 = 2\frac{1}{2} \times 52 = 130$ gulden en uit dit bedrag kunnen $8\frac{1}{8}$ 'grote tegels' worden bekostigd, dus $2\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{4} = 8\frac{1}{8}$.

In verband met het voorgaande beschouwen we de:

'Van-keer-kwestie'

In de omgangstaal zeggen we 'zoveel keer' of 'zoveel maal' wanneer 'zoveel' verwijst naar getallen groter dan 1; de suggestie van het meervoudige ligt in 'keer (maal)' besloten. Bij 'van' echter in 'zoveelste deel van' denken we aan getallen kleiner dan 1.

Welnu, er zou van geen 'kwestie' sprake zijn, ware het niet, dat één en

hetzelfde symbool voor vermenigvuldigen het geschetste onderscheid wegwist.

Het vervangen van '$\frac{1}{3}$ deel van 60' door '$\frac{1}{3} \times 60$' is dus niet vanzelfsprekend, tenzij '$\times$' 'van' zou betekenen, wat niet zo is.
Dit vraagt dus om opheldering.[20]
Vanwege het evenwicht zou bij 'zoveel keer, maal ...' ook van 'zoveel van ...' gesproken moeten worden.
Bijvoorbeeld: 3 dozen met 12 kaarsen elk, 3 dozen van 12, 3 keer 12, 3×12.

'Keer (maal)' boet aan natuurlijkheid niets in, in gevallen als '$3\frac{1}{2}$ keer .....', '$5\frac{3}{4}$ keer .....'.

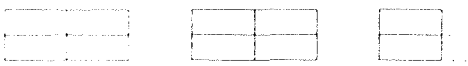
Bijvoorbeeld: $3\frac{1}{2}$ meter stof van 12 gulden per meter kost $3\frac{1}{2} \times 12$ gulden. Welnu daar ligt het aangrijpingspunt om voor $\frac{1}{2}$ meter van die stof tot $\frac{1}{2} \times 12$ gulden te kunnen beslissen:
3 meter stof *van* 12 gulden per meter, 3×12.
$3\frac{1}{2}$ meter stof van 12 gulden per meter, $3\frac{1}{2} \times 12$.
Het verschil is dan vanzelf:
$\frac{1}{2}$ meter stof *van* 12 gulden per meter, $\frac{1}{2} \times 12$.

Er zijn meer van dergelijke voorbeelden. Het rondgaan van de minutenwijzer van de klok: $2\frac{1}{2}$ keer rond, 2 keer rond met als verschil $\frac{1}{2}$ keer rond of $2\frac{1}{2}$ uur en 2 uur met als verschil $\frac{1}{2}$ uur, wat in minuten uitgedrukt neerkomt op $2\frac{1}{2} \times 60 =$ en $2 \times 60 =$ met $\frac{1}{2} \times 60 =$ als verschil.

Het 'reep na reep' verdelen van $3\frac{1}{2}$ en 3 repen onder 4 deelnemers levert per deelnemer $3\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ en $3 \times \frac{1}{4}$ reep op, verschil dus $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ reep.

Aldus kan deze kwestie het hoofd worden geboden.
Terug nu naar het rekenen via een bemiddelende grootheid.

Delen
Al in het beginstadium van het verdelen (cluster 1) kunnen verdelingen met het oog op deze bewerking bekeken worden.
Bijvoorbeeld: $2\frac{1}{2}$ reep op te delen in kwartrepen.



$2\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 10$; $\frac{5}{2} : \frac{1}{4} = 10$; $\frac{10}{4} : \frac{1}{4} = 10$

(In $2\frac{1}{2}$ reep, dat is $\frac{10}{4}$, gaan dus 10 kwarten.)
Ook het rekenen met passende prijzen kan hier worden toegepast.
Verbinden we bijvoorbeeld $\frac{7}{10} : \frac{1}{8} =$ met de inhoud van een fles wijn ($\frac{7}{10}$ liter) en de inhoud van een glas ($\frac{1}{8}$ liter) en kost de wijn 40 gulden per liter, dan gaat de deling via $\frac{7}{10} \times 40 = 28$ en $\frac{1}{8} \times 40 = 5$ over op $28 : 5 = 5\frac{3}{5}$. $\frac{7}{10} : \frac{1}{8} = 5\frac{3}{5}$. Er gaan dus bijna 6 glazen uit de fles.
Het delen kan overigens ook betrekkelijk probleemloos met de verhoudingstabel worden aangepakt. De benadering met de 'prijskoppeling' vormt hierop als het ware de inleiding, namelijk $\frac{7}{10} : \frac{1}{8} =$

$\frac{7}{10}$	$\frac{56}{10}$	56
$\frac{1}{8}$	1	10
	$\times 8$	$\times 10$

en $56 : 10 = 5\frac{6}{10} = 5\frac{3}{5}$.

Op de geschetste wijze kunnen de hoofdbewerkingen met breuken worden aangepakt.
De getallenlijn kan daarbij ook worden toegepast. De keuze van een geschikte onderverdeling van de eenheid vervult in dat geval de rol van handige prijs.
Met dit al is de omweg voor het uitvoeren van de hoofdbewerkingen ons inziens voldoende getraceerd.

ad 4: het doen van eigen produkties op symbolisch niveau
De aandacht richt zich hier op het uiteenleggen en samenstellen van breuken met het doel bedreven te worden in het voortbrengen van gelijkwaardige breuken en in toenemende mate de noties voor de bewerkingen te verscherpen. Nu kan een opdracht tot vrije produktie maar niet plompverloren gesteld worden.
Zoiets vraagt om zorgvuldige voorbereiding. Wie voorgaande clusters van activiteiten overziet kan de aanwezigheid van een veelheid aan generatief materiaal en constructiewerkzaamheden ontwaren. Bovendien komen in het voorgaande ook al momenten van vrije produktie voor.
In deze vaststellingen liggen de condities tot het voortbrengen van eigen produkties op symbolisch niveau besloten.
In latere instantie zal op deze kwestie uitvoeriger dan wel meer diepgaand worden ingegaan (§ 4.2.3 en hoofdstuk 8).
Welnu de activiteiten 'onder dit cluster' worden gekenmerkt door het uiteenleggen en samenstellen van breuken.

Een breuk als $\frac{3}{4}$ bijvoorbeeld wordt *uiteengelegd* in 'vrij' te kiezen samenstellingen.
$\frac{3}{4}$ = ... + ...; $\frac{3}{4}$ = ... + ... + ..., terwijl omgekeerd het samenstellen van $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ bijvoorbeeld betekent dergelijke composities tot hun meest beknopte vorm te arrangeren, dus tot $\frac{3}{4}$.

Gaat het om lastiger splitsingen, bijvoorbeeld van $\frac{5}{6}$, dan kan bij het uiteenleggen het tafeltje $\textcircled{5}$ met het eenheidsgewijs verdelen, dat inmiddels standaardprocedure is geworden, als denkkader te hulp geroepen worden.
$\frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$.
Hiermee kunnen weer nieuwe samenstellingen worden voortgebracht.
Bijvoorbeeld: $\frac{5}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$, welke op zijn beurt weer bemiddelt tussen $\frac{5}{6}$ en $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

De gelijkwaardigheid van $\frac{3}{6}$ en $\frac{1}{2}$ kan daarbij op uiteenlopende wijzen worden vastgesteld, namelijk via het weten dat $\frac{1}{2}$ schuilnaam voor $\frac{3}{6}$ is, door middel van 'prijskoppeling' of op grond van een redenering met (opnieuw) de tafelschikking in de rol van bemiddelend model ($\frac{3}{6} \rightarrow \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{2}, \textcircled{1} \rightarrow \frac{1}{2}$, dus $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$).
Dergelijke acitiviteiten vinden hun bekroning in opdrachten tot het opstellen van monografieën voor gegeven breuken onder toepassing van o.a. het schuilnaambegrip.
Hieronder kan ook het opstellen van een 'ordeningsmonografie' begrepen worden.

Een bewering als '$\frac{1}{2}$ is groter dan $\frac{1}{3}$' kan op die manier worden bevestigd (of eventueel weerlegd):
$\frac{1}{2}$ is groter dan $\frac{1}{3}$
$\frac{2}{4}$ is groter dan $\frac{2}{6}$
$\frac{3}{6}$ is groter dan $\frac{2}{6}$, dus
$\frac{3}{6}$ is $\frac{1}{6}$ groter dan $\frac{2}{6}$.
$\frac{3}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6}$
$\frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$
$\frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$ weerspiegelt de uitkomst ervan nogmaals op andere wijze.
Dit brengt ons bij de tweede voorbeeldreeks van activiteiten, namelijk het

beslissen tot uitkomsten bij gegeven samenstellingen als $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.
Bij een dergelijke opdracht kunnen diverse situaties of modellen worden 'gedacht'. Als mogelijkheden noemen we het oplossen
— via de visuele verdeling van een reep;
— via het koppelen aan een handige prijs;
— via het vaststellen van een passende titel voor de monografie, waarvan het beschouwde geval deel uitmaakt;
— via toepassing van de tafelschikking als intern model.[21]
Zoals in de inleiding op de activiteiten van dit cluster al werd aangeduid betekent voortschrijding in de voorafgaande clusters, dat de leerlingen op symbolisch niveau steeds meer en steeds verfijndere opgaven kunnen produceren onder gebruikmaking van uiteenlopende 'denkmodelsituaties' en onder toepassing van produktiemethoden die steeds wiskundiger worden en toenemende distantie tot de concrete bronnen weerspiegelen (hoofdstukken 5 en 6).[22]
Behalve het veeltal constructie- en produktiemomenten (zie § 4.3) zal ook het verwerken van een variëteit van toepassingsvraagstukken de kwaliteit van de eigen produkties moeten bevorderen, alsook het bedenken van eenvoudige contextprobleempjes bij kale opgaven.
Het verwoorden van regels voor de bewerkingen blijft ook hier achterwege, zo niet het ingaan op vragen als: waarom kan $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ niet gelijk aan $\frac{2}{5}$ zijn?

ad 5: het op weg gaan naar rekenregels voor breuken
Binnen een daartoe speciaal gecreëerd wereldje, het Land van Samen, wordt met de leerlingen gereflecteerd op de rekenregels, die daar wellicht kunnen heersen. Zouden deze regels ook geschikt zijn voor het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van breuken?
Het verwoorden van formele rekenregels als onderwijsactiviteit bleef tot dusver buiten beschouwing.[23] Daarentegen zijn zoveel mogelijk activiteiten gericht op het stimuleren van inbreng in de leergang door de leerlingen met hun informele werkwijzen. Dan rijst vanzelf de vraag: hoe dient de overgang op het meer formele, regelgeleide breukrekenen zich te voltrekken?
In het Land van Samen (LvS) kan de beoogde overgang op het (bewust) toepassen van meer formele regels bij het breukrekenen worden gerealiseerd.
In het LvS – de naam zegt het al – wordt veel, zo niet alles, door de inwoners *samen* gedaan. Voor de Samenlanders is dit zó belangrijk, dat zelfs hun getallen deze hoedanigheid weerspiegelen. 'Onze 2' bijvoorbeeld kan daar van alles zijn.
Het hangt er maar van af wat voor eerlijke verdeling erachter steekt, bijvoorbeeld $\frac{4}{2}$ (vier met z'n tweeën). De Samenlanders hebben voor hun getallen als het ware vastgehouden aan de tafeltjesnotatie (zonder rondje).
De Samenlandse kinderen leren met die getallen rekenen op school. De vraag is of hun rekenregels achterhaald kunnen worden.

Al gauw wordt duidelijk, dat 'onze 2' een *schuilnaam* is voor een onbeperkte hoeveelheid LvS-getallen

2:	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		

Telkens neemt onze 2 een andere gedaante aan afhankelijk van de betekenis van 'samen'. $\frac{2}{1}$ is vanzelfsprekend een vreemde eend in de bijt. Alleen kun je immers niet samen zijn?
Hoe gaat het bewerken nu in zijn werk?
Bijvoorbeeld $\frac{4}{2} + \frac{9}{3} =$
Waren de groepjes verdelers gelijk, dan was het in één oogopslag te beslissen. Geen nood, want verandering van groepsgrootte, de een in de ander of omgekeerd, laat zich, althans in de getallen, moeiteloos voltrekken.
$\frac{4}{2} + \frac{9}{3} = \frac{6}{3} + \frac{9}{3} = \frac{15}{3}$ (onze 5), of
$\frac{4}{2} + \frac{9}{3} = \frac{4}{2} + \frac{6}{2} = \frac{10}{2}$ (id), maar ook bijvoorbeeld
$\frac{4}{2} + \frac{9}{3} = \frac{12}{6} + \frac{18}{6} = \frac{30}{6}$ (id)
'Onze' getallen kunnen bij twijfel als denkkader fungeren en een bemiddelende rol spelen, of gewoon als controlemiddel dienst doen.
De regel? Eerst de groepjes verdelers gelijk maken (gelijknamig maken) en wat verdeeld wordt (de tellers) optellen (of aftrekken).
Voor het vermenigvuldigen en delen gelden min of meer overeenkomstige overwegingen. Ziedaar, de wijze, waarop de rekenregels voor de Samenlandse getallen kunnen worden voortgebracht.
Rest nog de vraag of de Samenlandse kinderen hun regels ook op onze breuken zouden kunnen toepassen.
Voor het optellen en aftrekken bijvoorbeeld zal dan blijken dat de noemers over en weer niet zo eenvoudig in elkaar te transformeren zijn als dit bij de LvS-getallen het geval was, maar wèl dat de essenties van de gevonden regels onverkort hun geldigheid blijven behouden.
Voor vermenigvuldigen en delen kan iets dergelijks worden vastgesteld.
Hiermee sluiten we dit laatste cluster van activiteiten af.

Samengevat komt het er op neer, dat door het opdienen en verdelen (1) een rijke vulling gegeven wordt aan de concrete bron. Een grote variëteit aan door de leerlingen zelf voort te brengen breukenmateriaal vormt het fundament voor het op te trekken breukenbouwwerk.
Het tafelschikken en verdelen (2) leent zich bij uitstek tot het voortbrengen van equivalenties. Tevens bevat dit cluster van activiteiten aangrijpingspunten om een brug te slaan naar de hogere niveaus, o.a. door middel van het voortschrijdende schematiseren met het schema voor de tafelschikkingen en

later met de verhoudingstabel. Met name het vergelijken van verdeelsituaties – en later ook andere situaties – herbergt mogelijkheden tot het inzetten van de wiskundige werktuigen in ontwikkeling in zich en kan tot startpunt en ondersteuning van het mathematiseren dienen.
De breuk in de breek-relatie als beschrijver van resultaten van het verdelen kan zich ook ten volle gaan ontplooien als breuk in de operator door aan de te verdelen objecten maten, gewichten dan wel prijzen toe te kennen en hierop de zelf voort te brengen verdeelbreuken te laten werken. Door de prijskoppeling kan een indirecte methode worden ontwikkeld om ook aan samenstellingen een prijskaartje te hangen; het opereren met een omweg (3).
Bij het doen van vrije produkties op symbolisch niveau zal de aandacht zich richten op het uiteenleggen en samenstellen van breuken met het oog op het voortbrengen van equivalente breuken en het ontwikkelen van noties voor de bewerkingen. Belangrijke bouwstenen hiervoor vormen de kleine monografieën die in verdeelsituaties kunnen worden voortgebracht.
Tenslotte is de mogelijkheid van reflectie op het systeem geschetst. In het 'Land van Samen' wordt op weg gegaan naar meer formele regels voor het breukrekenen (5). Enkele bouwstenen voor deze reflectie zijn hecht gefundeerd in het voorafgaande.
Ziedaar de globale kartering van het onderzoeksterrein voor onze jonge breukenonderzoekers.

4.3 Breuken maken: een impressie van het onderwijs

> 'En dan heb ik verleden week ook genoteerd: 'Begin breuken'. 'k Zie al aankomen dat daarop volgt: 'Voortzetting breuken' – en over enige tijd 'herhaling breuken'.
> Theo Thijssen in 'De gelukkige klas'.

4.3.1 Vooraf

De beschrijving van het onderwijs wordt globaal gestructureerd overeenkomstig de gegeven schets van de leergang (§ 4.2).
Dit betekent, dat het concrete en de hogere niveaus overeenkomstig de onderscheiden clusters zullen worden ingedeeld (§ 4.3.2 en 4.3.3). Met een tijdbalk met grove tijdsaanduiding zal het geheel omlijst worden om op het verloop van het onderwijsleerproces in de tijd enig zicht te bieden. Omdat het gaat om een gestileerde onderwijsbeschrijving, weerspiegelt de inhoud niet het feitelijke onderwijs tot in alle details. De chronologie bijvoorbeeld is zo hier en daar in een wat andere tijdsorde omgezet. Bij een nog fijnere structurering van de onderwijsschets wordt gebruik gemaakt van aanduidingen voor subparagrafen, die rechtstreeks verwijzen naar de context of realiteit waarin de beoogde activiteiten zijn gesitueerd.
Het is steeds de onderwijsgevende die direct of indirect aan het woord is, dan wel bepaalde kwesties overweegt. Vandaar dat aan het opnemen van als zodanig herkenbare momenten van licht beschouwende aard de voorkeur is gegeven boven een zuivere beschrijving op afstand.

De leerlingen doen gedurig als sprekende, handelende en construerende deelnemers mee, bij wijze van illustratie.
Ten slotte, wat dit 'vooraf' aangaat, nog de kwestie van de lijn in het geheel, *de rode draad.*
Het dagelijks bestaan van de familie Brokken[24], bestaande uit vader Bert (35), moeder Els (34) en hun kinderen Peter (10), Anja (8) en Monica (7), is deze rode draad. Hun leven is vol kleine gebeurtenissen, belevenissen en activiteiten, die als aangrijpingspunt kunnen dienen.
Welk kind zal niet iets van zijn eigen ervaring of belevenissen kwijt kunnen of herkennen in:

— het verdelen van de omelet bij de lunch;
— het tijdig opstaan met de voorzorg van het wekkerzetten;
— de pasta en het tandenpoetsen;
— het bezoeken van een eethuisje;
— het tracteren op school als jarige;
— het watertrappen voor het diploma zwemmen;
— het koffiezetten met een apparaat;
— het maken van limonade;
— het bakken van een boterkoek naar eigen of andermans recept;
— het wandelen in een natuurgebied, en noem maar op.

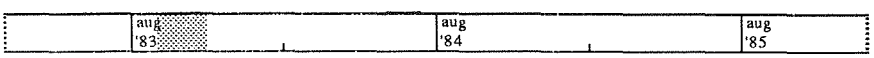
De algemene context van het leven van de familie Brokken[25], of welk ander samenlevingsverband van volwassenen met kinderen dan ook, is zo overstelpend rijk aan specifieke situaties, dat we het daar met de kinderen van de onderzoeksgroep gezocht hebben, om de breuken te leren kennen, om ze zelf voort te brengen, rijk geschakeerd, in onbeperkte variëteit.

4.3.2 'Begin Breuken' of de vulling van het concrete niveau

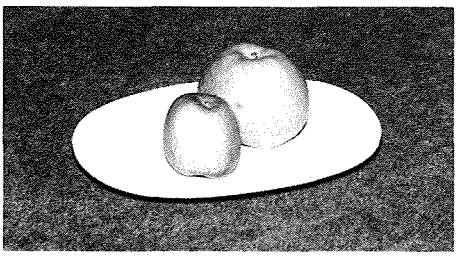
Opdienen en verdelen in het leven van alle dag

> 'Van alle lekkers hield ik het meest van vruchten, maar mijn moeder dacht dat vruchten luxe waren, zoals snoepjes en koekjes. Ze verdeelde één of twee appels tussen acht kinderen en alleen de grote mensen hadden recht op een hele appel'.
> Clara Asscher-Pinkhof in 'Danseres zonder benen'.

Eerlijk verdelen
De tijden zijn veranderd. Anja en Monica Brokken komen thuis van school. Zij mogen ieder een hele appel nemen.



Wat te doen bij zulk een verschil in omvang?



Om een antwoord verlegen zijn de kinderen niet. Hun voorstellen om af te rekenen met het gebrek aan evenwicht tussen aantal en hoeveelheid berusten op uiteenlopende standpunten, variërend van:
'Ik zou de grote nemen!', tot en met:
'Ik zou beide appels doormidden snijden'.
Zo zijn er allerlei dilemma's te beslissen.
Wat noem je bij het verdelen eerlijk? Ieder evenveel, of moet smaak of voorkeur de doorslag geven? En wanneer het om andijvie gaat en de één zegt: 'Mmm, lekker!', en de ander: 'Bah!'?
Hoe moeten 14 kikkervisjes verdeeld worden over de 'aquaria' van Peter, Anja en Monica? En hoe verdelen Anja en Monica de fiets, waarmee ze voorlopig samen moeten doen?

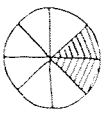
Het eerlijk verdelen dat breuken voortbrengt is model verdelen met heel wat minder vrijheidsgraden dan het verdelen van alle dag. Om daartoe te komen moeten nogal wat beslissingen en hindernissen genomen worden (de beschrijving ervan en de ontwikkeling van een taal en wiskundig apparaat ervoor nog daargelaten). Want:

— de te verdelen helen of eenheden moeten gelijk of gelijkwaardig zijn, zo ook de voortgebrachte delen;
— het verdelen dat breuken voortbrengt is uitputtend, er blijft geen restje over (en daarom is het nodig, dat er ook problemen als met de kikkervisjes beschouwd worden, waarin zulk verdelen niet toepasbaar is);
— iedere deelnemer krijgt evenveel, het is eerlijk verdelen.

Op school hebben we met elkaar zulk verdelen een enkele keer echt gedaan: Repen!
En daarna smullen. Dat spreekt vanzelf.
Maar daarom gaat het nu niet. Veel meer is er een beroep gedaan op het voorstellingsvermogen van de kinderen. Verdeelsituaties zijn om na te denken of na te spelen (op papier). Vanzelfsprekend is in het begin de nadruk op het herhaald halveren gelegd met zijn halven, kwarten en helften van halve kwarten. Vrijwel alle kinderen waren er al mee vertrouwd geraakt buiten de school om.

Omelet

Op een middag, vader kwam die keer niet thuis, bakte Els Brokken een omelet voor de lunch. Daarmee was nogal wat aan de hand. Allereerst trok het recept de aandacht.[26] Daaraan gaan we nu maar voorbij. Onze aandacht richt zich hier op de verdeling van de eierpannekoek. Moeder en de kinderen belegden ieder twee boterhammen met hun deel. Maak een verdeling, was de opdracht.

Zó deden de meesten: 

'Op iedere boterham een half', waagde er eentje.

De groep gaf te kennen het er niet mee eens te zijn.

L(eraar): Ik vind het zo gek nog niet. Wie bedenkt wat Nanja gedacht heeft.[27]

Niet nodig, want Nanja wil het graag zelf uitleggen.

N(anja): Het is net als bij de klok, eerst kwartieren tekenen en dan door de helft.

L.: Dus: die half is wel goed, als je maar zegt .....?

Groep: Een halve kwart.

L.: Of?

G.: Een half kwartier.

L.: Trouwens ... handig van jou, Nanja, om *in* de klok te denken.

Zó meenden drie eigenzinnigen:

'Fout', besliste de rest van de groep, 'want er is niet eerlijk verdeeld'.

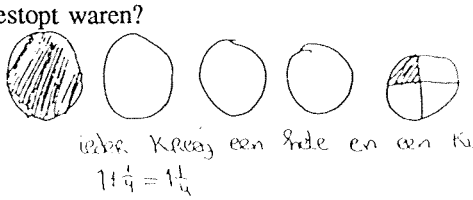
'Nee', werpt Helga, die zelf niet tot de drie behoort, tegen.

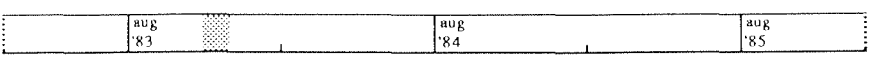
H.: Volgens mij is 't wel eerlijk, als je ieder maar een klein en een groot stuk geeft.

De rest van de groep is onder de indruk van Helga's standpunt en aanvaardt dit als juist.

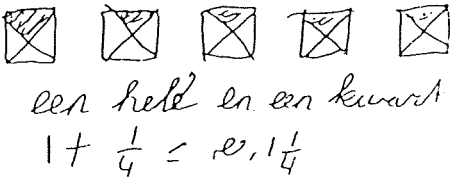
Dat neemt overigens niet weg, dat de andere verdeling het wint. Deze is niet alleen handiger en overzichtelijker, maar op die manier wordt het boterhammenpaar gelijkelijk belegd.

De omelet is nu bijna 'verorberd'. Alleen: hoe zijn nu de vijf eieren verdeeld, die er in gestopt waren?

Helga vindt: 



Marja: Ik teken geen echte eieren:



Zij pasten verkortingen in hun notaties toe die niet voor iedereen vanzelfsprekend zijn.

Kevin besliste tot $1 + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$ met als redenering: 1 + 1 = 2 en de 4 blijft zo.

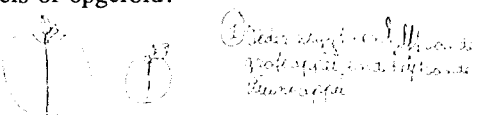
L.: Is het nu nog net zo veel als eerst?
K(evin): Uhh ..... oh, nee!
L.: Waarom niet?
K.: Nou ..... $\frac{2}{4}$ is een half en 1 en $\frac{1}{4}$ is meer dan een hele!

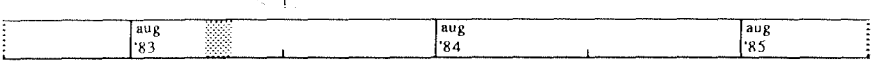
Zo wordt al worstelend en tobbend met deze weerbarstige materie conflict na conflict onder ogen gezien – hoewel niet steeds naar bevrediging geslecht[28] – en besluit op beslissing genomen.

De eerste verkenning van het breukvoortbrengende eerlijk verdelen zit, althans voor een flinke deelgroep van de kinderen, vol valstrikken en valkuilen.

Bijvoorbeeld:

- Wanneer een dropstaaf of dropveter in vieren verdeeld moet worden, moet je dan ook vier keer breken of snijden?[29]
- Hoe moet je beginnen aan een verdeling in een verdeelsituatie, wanneer de kinderen geen naam hebben? Voor enkelen bleek het niet mee te vallen om bijvoorbeeld dropstaven en verdelers met elkaar in verband te brengen en dan ook nog aan de eisen van het breuken voortbrengende eerlijk verdelen te voldoen.
  De aanwezigheid van de familie Brokken doet de abstractie van de onbenoemde verdelers te niet. Een leerling kan hierdoor niet alleen gemakkelijker verdelen maar bovendien de voortgebrachte porties verbinden met de namen van de deelnemers.
- Hoe moet een verdeelverhaal op papier nagespeeld worden? Moeten de verdelers ook getekend worden of worden die erbij gedacht?
  Moeten de appels getekend worden met blaadjes en steeltjes? En halve appels met klokhuizen en pitten? Dropstaven met 'schroefdraad'? Dropveters met kronkels of opgerold?



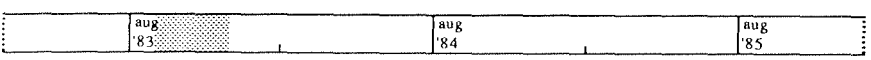


Aanvankelijk gebeurde dit, totdat het besef bezit van hen nam, dat gestileerde tekeningen het werk aanzienlijk vergemakkelijken en ook veel inzichtelijker zijn. Geleidelijk aan evolueren de levensechte dropstaven tot stroken, de dropveters tot lijnstukken, de appels en eieren tot cirkels, ja zelfs tot vierkanten.
Kortom, het aanvankelijk realistische tekenwerk onderging een metamorfose. Het werd schematisch tekenwerk, waarbij op zeker moment ook van vormverwantschap kon worden afgezien. Zo ontstaan de visuele modellen, eerst 'modellen van', later 'modellen voor'.
De kinderen stuitten nog op velerlei kwesties. Om maar eens te noemen:

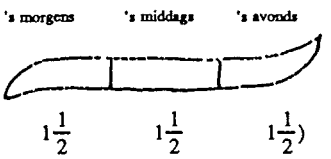
- Wat is een hele? Welk getalletje moet daarvoor gebruikt worden?
- Welke relatie moet precies beschreven worden?
  Of: waarmee worden de voortgebrachte delen nu precies vergeleken?
- Hoe wordt zoiets beschreven? Voluit, in (alledaagse) taal? Of met symbolen?

  Hoe schrijf je dan een kwart: $\frac{4}{1}$ of $\frac{1}{4}$? En drie achtsten? $3|\frac{1}{8}$ of $\frac{3}{8}$?
- Zijn 'een kwart' en 'een vierde' hetzelfde?
- Hoe kunnen 'een hele en een kwart', 'een kwart en een kwart en een kwart', 'drie keer een kwart', 'driekwart', 'een halve en een kwart' in symbolen worden verkort tot
  $1 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
  zonder te zwichten voor verleidelijke alternatieven als
  $1 + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ enz?

Dit zijn enkele hobbels die de kinderen moeten nemen bij de instap in dit leergebied.
Er valt echter ook veel te melden dat de kinderen een duwtje gaf bij het nemen van deze hobbels. Vooral het dringende appèl op eigen ervaringen, belevingen en inzichten pakte goed uit.
Er waren kinderen:
— die zelf de wekker wel eens gezet hadden;
— die zelf – en in hun ogen blonk nog de napret van de ondeugd – wel eens een tube tandpasta hadden omgezet in een prachtige lange sliert, net als Peter Brokken toen hij nog klein was.



(Met een stukje van $4\frac{1}{2}$ cm van zo'n sliert bleek je al een hele dag vooruit te kunnen met poetsen



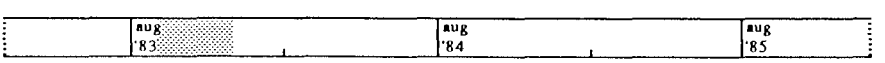
— die zelf recepten hadden bedacht en uitgeprobeerd in de keuken thuis;
— die meteen snapten, waarom bij de kikkervisjes niet verder gegaan moest worden met verdelen, terwijl het bij de dropveters wèl gekund had;
— die zelf .....

Kortom, juist die alledaagse belevingen als aangrijpingspunt bleek een schot in de roos. Dit kon stellig niet van alles gezegd worden dat er gedaan werd. Met de peiling die vooruitgreep op het vervolg van wat in de eerste drie lessen was geobserveerd, werd nogal wat weerstand opgeroepen. Enkele kinderen waren daardoor niet eens meer in staat geweest om zelfs maar met het werk te beginnen.[30]

Tot dat moment waren eerst verdelingen voltrokken en vervolgens beschreven. Nu werd het omgekeerde van de kinderen gevraagd, namelijk uit voluit beschreven uitkomsten van verdelingen – overigens gesteld in door henzelf eerder gebezigde terminologie – deze al tekenend te reconstrueren.

Peter verdeelt dropstaven. Anja krijgt een hele en een kwart. Teken een hele en ook wat Anja krijgt. Schrijf erbij wat Anja krijgt.

Dit was 'iets nieuws'. Bovendien kostte het begrip hele aan nogal wat kinderen hoofdbrekens. Had 'dropstaaf' er nog even bij vermeld moeten worden? Ook leek het verbale informatieaanbod in de toets als geheel te overvloedig. De toets had in dit prille stadium beter als meewerkpracticum dienst kunnen doen.



Niet, dat er nu van een impasse sprake was, maar een echte doorbraak kwam er die keer, met dat pizzaprobleem gevolgd door een vrije produktieopdracht.

Produktief pizza's verdelen
De familie Brokken, dit keer bestaande uit Vader, Moeder, Peter en Anja – Monica was bij een vriendin – at op Nieuwjaarsdag pizza's.
Na het opwarmen van de eerste pizza werd nummer twee in de oven gezet. Op de aanrecht verdeelde Els de eerste pizza in vier gelijke stukken en ieder kreeg zijn of haar deel.
Terwijl ieder smakelijk at kwam de tweede pizza op temperatuur. Deze onderging hetzelfde lot als de eerste, gevierendeeld dus. Maar vanaf dat moment liep het anders. 'Oh, wat dom van me', zei moeder, 'ik heb genoeg gehad. Jullie mogen dit wel met z'n drieeën delen.' 'Dat hoeft niet', zei Anja, 'want ik heb aan nog zo'n stuk genoeg', en, tot Peter en haar vader, 'delen jullie de rest maar.' Dat lieten vader en Peter zich geen twee keer zeggen. Maak een verdeling van de pizza's. Wat kreeg ieder?

Dit was een bron van allerlei 'uitvindingen'. Marja is er zich nu zó van bewust dat het naspelen op papier slechts model staat voor de werkelijkheid, dat zij – als enige – vierkante pizza's tekent. Mark op zijn beurt, doet een flinke stap vooruit op zijn leerweg, door 'de helft van een kwart' of 'een halve kwart' – want daarop kwamen vader en Peter uiteindelijk uit toen zij de rest gingen verdelen – om te zetten in $\frac{\frac{1}{2}}{4}$. [31]
Het was maar goed, dat de namen van de verdelers weer gegeven waren, want negen kinderen maakten daarvan al dan niet verkort tot beginletters – gebruik in hun tekeningen.
De beschrijvingen liepen nogal uiteen, variërend van symboolgebruik in de meest verkorte vorm (moeder $\frac{1}{4}$ pizza, Anja $\frac{1}{2}$, Peter $\frac{5}{8}$ en vader $\frac{5}{8}$) tot en met niet tot het uiterste verkorte mengvormen van voluit schrijven en cijfersymbolen ('Peter kreeg de helft en $\frac{1}{8}$'). Ook de omschrijving 'anderhalf' voor het aandeel van vader en Peter in de tweede pizza komt nog voor, waarmee de gebruikers – weer even tobbend met de juiste relatie – 'anderhalve kwart' bedoeld hebben.
Kevin laat in sommige gevallen de delen nog onbenoemd en bezigt behalve beschrijvingen als '$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$' ook nog omschrijvingen als 'drie stukken'.
De '0' als neutraal element maakte in dit vraagstuk op natuurlijke wijze zijn opwachting. Enkele kinderen leken dit ook zo aan te voelen. Sanny besliste moeders portie tot 'een kwart + 0 = $\frac{1}{4}$', terwijl Marja '$\frac{1}{4}$0' noteerde en

Nanja '$\frac{1}{4}$ + 0' = $\frac{1}{4}$.

De eerste eigen, vrije produktie op symbolisch niveau
In de inventariserende en beschouwende nabespreking werd nog een eenvoudiger versie van het vraagstuk 'meegenomen', neerkomend op 'moeder en Anja ieder $\frac{1}{4}$ + 0 pizza' en 'vader en Peter beide $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{2}$ pizza'.

Toen volgde de opdracht om nu zelf ook eens tien zulke sommen te bedenken, sommen met halven en/of kwarten en voor wie dat aan kon ook achtsten, met 'erbij' of 'eraf' en wie weet zelfs met 'keer'. Maarrr... het zouden wel sommen moeten zijn, die bij een verdeling pasten, zoals in de twee voorbeelden met pizza's.

We waren benieuwd. Zou er wel iets van terecht komen? De eerste keer – er waren nog maar *zes* lessen geweest – was het dat een dergelijke opdracht tot vrije produktie werd gegeven.
De groep had er in elk geval zin in. Welgemoed ging een ieder aan de slag. Beatrijs bijvoorbeeld zette na een wat aarzelend begin het volgende 'rijtje' op stapel:

$1 - \frac{1}{2} =$

$2 - \frac{1}{2} =$

Zij was zichtbaar verrukt over haar eigen vondst, toen zij, zich inlevend in de regelmaat ervan dit voltooide tot:

$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

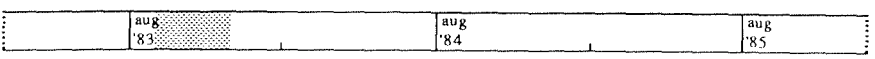
$3 - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$

$4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$

$5 - \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

Was dit dezelfde Beatrijs, die zich drie lessen terug nog zo nadrukkelijk bij de dwarsliggers vol onbegrip had geschaard, bij gelegenheid van de voorbarige, overvragende toets? Dezelfde! We zouden erop terugkomen.
Deze prestatie was het waard om ook voor de rest van de groep niet ongemerkt voorbij te laten gaan. Op het moment zelf werd aan de klas haar vondst verteld. (Een beetje extra aandacht zou haar goed doen.) Dat er verder niemand na deze 'bekendmaking' behoefte aan had Beatrijs te gaan naäpen was eigenlijk wel begrijpelijk. Ieder had immers zijn *eigen*

produktie. In minder dan een halve les bracht de vereende inspanning meer dan 160 sommen op. (In het vrij produceren wordt dus heel wat afgeoefend. Bovendien zullen veel momenten aan 'even oefenen' besteed worden.)
Het gemiddelde per kind had iets boven de uitdaging gelegen. De kwaliteit van de produktie daarom ging het natuurlijk en niet de omvang. Onthullend was deze geweest in meer dan één opzicht. Frank en vrij hadden de kinderen hun kijk van het moment op de breuken prijsgegeven, dat wil zeggen: voorzover deze uit het voortgebrachte materiaal viel af te leiden. Immers, aan wat niet onthuld wordt op papier, kan men nu eenmaal moeilijk conclusies gaan verbinden omtrent het leerproces.
Maar desondanks! Het was toch wel verrassend geweest, dat de kinderen met een vlekkeloze produktie – één uitzondering daargelaten – niet tot de voortrekkers van de groep behoorden. Dit keer dan dus wèl! Beatrijs was er ook bij. Wat de anderen aangaat was er sprake van een tweedeling. Er waren kinderen, die 'zondigden' tegen bepaalde wiskundige conventies, voornamelijk algebraïsche kwesties, zoals het denken van haakjes zonder ze te zetten, bijvoorbeeld:
$20 - \frac{1}{4} \times 2 = 38\frac{3}{4}$. (Henk ging bovendien nog 'even' aan de distributiviteit van de vermenigvuldiging over de aftrekking voorbij).[32] Ook het ongeoorloofd schakelen van is-gelijk-tekens kwam nogal eens voor:
$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.
Alleen het volgende euvel is wat meer zorgwekkend, namelijk de verborgen verleiders in de natuurlijke getallen. Deze kunnen een leerling op het verkeerde been zetten bij het samenvatten en verkorten van beschrijvingen van verdeelprocessen in symbolische vorm.
$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$; $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{0}{2}$; $\frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{4}{16}$ etc.
Op Margreet, Michael en Kevin had deze 'ondeugd' in de natuurlijke getallen te grote aantrekkingskracht uitgeoefend. Was dit hun signaal om te laten weten dat de opdracht voor hen te voorbarig was geweest? De concrete bronnen té vroeg de rug toegekeerd? Of hebben we te doen met een weerbarstig verschijnsel dat eenvoudig onvermijdelijk is? We moeten in ieder geval proberen de kinderen bewust te maken van deze valstrik en hen helpen deze te ontlopen door er weerstand tegen op te bouwen.
Dus zullen we ons in het vervolg niet alleen richten op het voortbrengen van breuken, maar ook op het beargumenteerd weerleggen van dergelijke misvattingen, of – eenvoudigweg – op het afleren ervan door de vorming van een krachtig breukbegrip, dat tegen een afleidersstootje kan.[33] Er gloorde hoop, in deze eerste produktie al, ondanks de fouten. Nanja, ook al één van de zorgenkinderen wat leren aangaat, had ook zo'n fout



gemaakt, maar bevrijdde zich op eigen kracht uit de valstrik.
Met dit al zou de kwestie van de eerste eigen produktie nog een vervolg moeten hebben en hadden we er een nieuw probleem bij.

Uit deze eerste produktie werd een opdracht samengesteld om aan de hele groep voor te leggen.
Eerst zou er echter een hartig woordje gesproken moeten worden met iedere leerling afzonderlijk, om te zien hoe het met de verleidelijke natuurlijke getallen en hun bewerkingen stond.[34]
Het 'proefwerk' van eigen makelij was een uitdaging. Stel je voor: Werk met bijdragen van Henk en Helga, Nanja en Kevin en noem maar op. Van iedereen! Ze waren trots bij de ontdekking van eigen sommen: 'Die is van mij! Die heb ik bedacht!'
Vooral Beatrijs groeide van trots. Het proefwerk begon met:

Beatrijs bedacht dit rijtje:

$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

$3 - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$

$4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$

$5 - \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$.

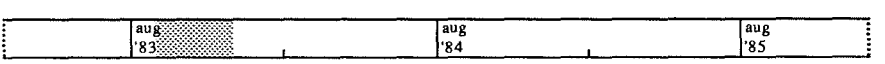
Bedenk jij ook eens zo'n rijtje met: $1 + \frac{1}{2} = ...$

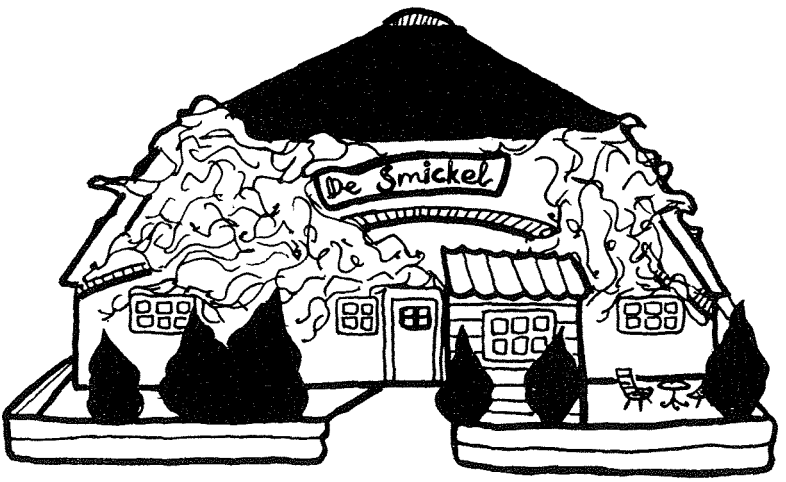
De gesprekken met ieder over de verleidelijke fouten, die zo logisch leken, hadden klaarblijkelijk wat vruchten afgeworpen. Niemand maakte deze keer dergelijke fouten in de bloemlezing uit het eigen produktiewerk.
Overigens zou alras blijken dat het euvel hiermee niet uit de wereld geholpen was en dat er met enkelen heel lang stevig aan het opbouwen van weerstand hiertegen gewerkt zou moeten worden.

Opdienen en verdelen in verdeelsituaties

'De Smickel'

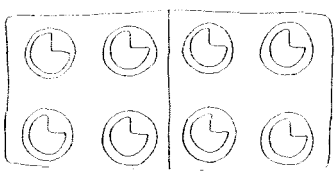
De familie Brokken besluit een dagje uit in een pannekoekenrestaurant. De keuze valt op 'De Smickel' in Soest. Daar is het gezellig toeven.

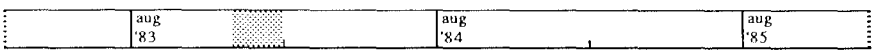




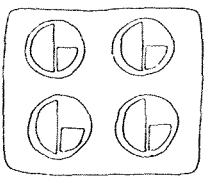
Er is van alles te zien voor wie zijn ogen de kost geeft. Het bakken van de pannekoeken bijvoorbeeld duurt niet steeds even lang. Ook het opdienen kan verschillend verlopen. Terwijl de tijd verstrijkt branden de kaarsen op tafel gestaag op. Soms wordt er aan tafel verdeeld. De één eet nu eenmaal meer dan de ander.
Wanneer er een wat grotere groep mensen binnenkomt is het soms een heel probleem om deze gezellig bij elkaar aan één of meer tafels te krijgen. Zo groot is 'De Smickel' nu ook weer niet. Wanneer je er eenmaal zit, haal je soms zo maar vakantieherinneringen op.
En, wanneer er echt verdeeld wordt, kan het ook interessant zijn na te gaan, hoe zoiets doorwerkt in de prijzen.

Partijtje
Aan het tafeltje naast de familie Brokken zette zich een gezelschap van acht, een mevrouw met zeven kinderen. Het was een verjaardagspartijtje. De dame bestelde echter maar zes pizzapannekoeken met acht borden. Geen wonder ook. De zes pannekoeken bleken heel groot te zijn. Meer dan genoeg voor acht. Het verdelen had geen problemen gegeven. Hoe zou dat gegaan zijn?

Frans tekende op tafel 



en schreef erbij, dat het hetzelfde was als bij 3 pannekoeken met z'n vieren verdelen, alleen: 'Nu is het verdubbeld', zo concludeerde hij.
Margreet had nog behoefte aan enig naamhouvast en noemde de dame met de kinderen 1, 2, ..., 8. Met deze symbolen duidde zij de stukken voor ieder aan en op de borden op tafel tekende zij telkens



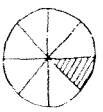
Marja schreef: 'eerst ieder een half en daarna nog een kwart'. Kevin ging op zijn papier echt uitdelend te werk. De stukken van een verdeelde pannekoek verwees hij systematisch en eerlijk naar de acht borden door verbindingslijnen te trekken.
In het algemeen werd een beroep gedaan op eerdere ervaringen met '3 pannekoeken onder 4 kinderen verdelen'. Vijf kinderen maakten van de zes pannekoeken uitsluitend kwarten en elf kinderen halven en kwarten. Niemand verdeelde in achten.

Vakantieherinnering
De familie Brokken had zich geen betere gelegenheid kunnen wensen om, al genietend in 'De Smickel', die merkwaardige ervaring in een Frans pannekoekenrestaurant nog eens op te halen.
'Waar was het ook weer?' vraagt moeder Els. ''t Was een Duits-Franse naam, dat weet ik nog wel', veert Peter op. Dankzij deze aanwijzing weet vader zich nog te herinneren, dat het Lützelbourg was, in de Elzas. Dan volgt het verhaal van de bestelling:
'Quatre crêpes à la crème aigre, s'il vous plait', had vader gezegd, nadat hij eerst op de spijskaart had gekeken. Vier pannekoeken dus, met iets erop.
Een poosje later had de 'patron' één pannekoek binnengebracht en die op hun tafeltje netjes en eerlijk in vier stukken verdeeld en ieder een stuk gegeven. (Monica was er niet bij geweest, want die mocht juist op die dag met een vriendinnetje van de camping mee.)
'Mais, monsieur', had vader aarzelend gestotterd, 'mais... mais, ik' en toen had hij maar vier vingers opgestoken.
'Oui, monsieur', had de 'patron' gerateld, 'oui je sais, mais c'est notre habitude de .....'.
De rest zou nog wel komen. Dus waren ze maar gaan eten. Toen ieder z'n stukje op had werd de tweede 'crêpe' binnen gebracht en precies zo verdeeld en later nog één.

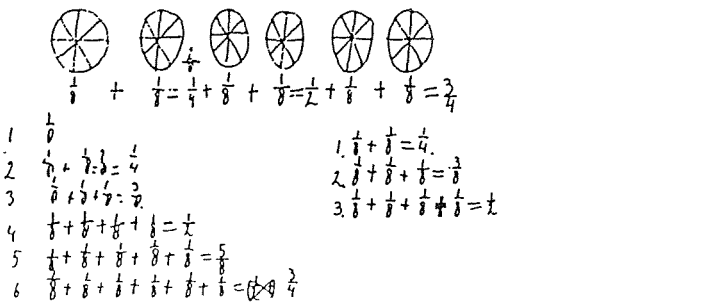
Toen hadden ze genoeg gehad. Later, toen vader afrekende hadden er maar drie crêpes op de rekening gestaan. Maar goed, dat er in het begin geen vier gebracht waren.

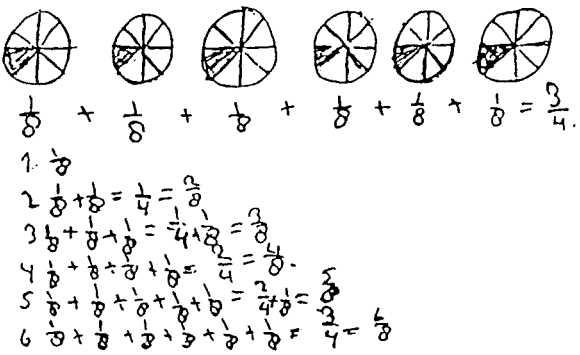
Zes pizzapannekoeken had de dame van het partijtje besteld. Hoe zouden die verdeeld zijn wanneer het feestje zich in dit Franse eethuisje had afgespeeld? Wat zou ieder gekregen hebben?

Eerst is het verhaal precies naverteld. Frans brengt 'het verdelen op z'n Frans' onder woorden: 'De eerste pannekoek wordt binnen gebracht ... eh ... eh ... en ... eh ... verdeeld in acht stukkies ... en zo door'.
Op het bord wordt dit bijgehouden.
De eerste pannekoek wordt binnen gebracht en in achten verdeeld:



Ieder krijgt ...?
De reactie van velen 'één achtste (pannekoek)', wordt in symbolen aan de tekening op het bord toegevoegd: $\frac{1}{8}$. [35] Zo ondergaat ook de tweede 'crêpe' deze behandeling.
Leraar: Wat had elk nu, nadat er twee pannekoeken binnen gebracht en verdeeld waren?
Degenen, die de zo vertrouwde breuknamen nog veelvuldig toepassen, weten het snel.
Het gaat immers om 'een halve kwart' en nog 'een halve kwart' en dat is nu eenmaal 'een héle kwart'.
Aan de groep wordt de opdracht gegeven dit af te maken, dus doorgaan met 'het Franse verdelen' en na elke verdeelde pannekoek te noteren hoeveel ieder tot dan toe gekregen heeft. Deze activiteit zou het nodige monografische materiaal moeten opbrengen.
Het volgende werk van Helga en Michael illustreert dit.[36]





Wat we aantroffen in het werk laat zich als volgt kenschetsen:

— herhaald optellen: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} =$;

— herhaald optellen en samenstellen: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$, $\frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ etc;

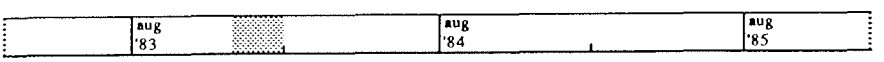
— samenstellen onder toepassing van gelijkwaardigheid:
$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{4}$ (zie het voorbeeldwerk);

Een enkeling beperkte zich tot het noteren van uitkomsten. Niemand verkortte de optellingen spontaan tot vermenigvuldigingen, bijvoorbeeld:
$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

Dit lag ook nog niet zo in het verhaal van het Franse verdelen besloten.
Alle kinderen bleken al aardig vertrouwd met de breuken van het herhaald halveren tot en met $\frac{1}{8}$ als ook met hun onderlinge verbanden en gelijkwaardigheden.[37] Allemaal pasten ze bij het verkorten van hun beschrijvingen equivalenties toe als $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.
Met name Delilah was zichtbaar in de wolken met haar ontdekking, dat $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ in $\frac{1}{4}$ kon worden ondergebracht.

> Toch zullen we de groep nog wat meer ervaring buiten het herhaald halveren laten opdoen, alvorens met de kinderen op deze kwestie te reflecteren om tot de introductie van het begrip 'schuilnaam' voor de equivalentie van breuken te komen, met het oog op het vergemakkelijken van de onderlinge communicatie op dit punt en vanzelfsprekend vanwege het naamhouvast voor de kinderen. Even wachten dus nog maar om de noties op dit punt nog wat te laten aanscherpen.

Inmiddels heeft zich nog iets anders voorgedaan, dat in het leerproces moet worden betrokken.

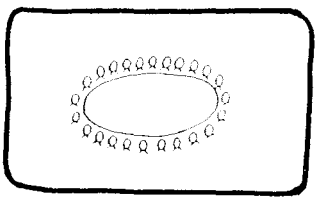


Tafelschikken en verdelen in verdeelsituaties

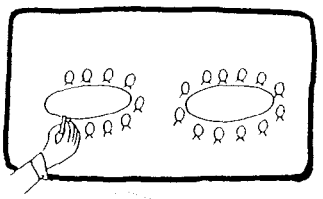
Het was Frans geweest, die voor de dame met haar verjaardagspartijtje in 'De Smickel' verwoord had, wat ieder voor zich ook wel had opgemerkt, namelijk dat '3 pannekoeken verdelen onder 4 personen' zich in het gezelschap van 8 personen met 6 pannekoeken aan twee tafeltjes herhaald had. De oogst aan verdelingen had dit uitgewezen: halveren en vierendelen. Niemand van de groep behoefde zijn toevlucht tot het verdelen in achten te nemen.
Zou het niet de moeite waard zijn om dit idee van het zich herhalen in soortgelijke tafeltjes te benutten om minder doorzichtige verdeelsituaties tot meer beheersbare proporties terug te brengen en dus het vergelijken te vereenvoudigen.
Dat vroegen wij ons af.

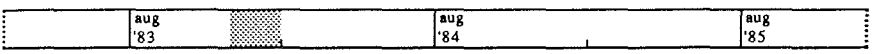
'De Smickel' op stelten gezet
Terwijl de familie Brokken en het feestgroepje zich verliezen in gesmikkel, komt er ook nog een schoolklas binnen, 24 eters sterk!
Het is meteen een drukte van belang. Wat moet de chef doen? Allemaal aan één tafel of .....?

De leraar tekent:



De groep wacht benieuwd, maar geduldig af.
Of ..... aan twee tafels?



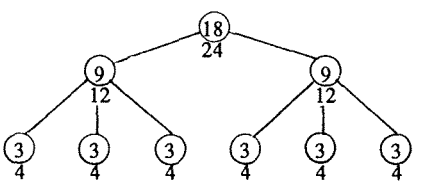


Gelaten, maar zonder verdere toelichting werd aldus verder getekend. Enige onrust steekt de kop op ten teken dat de storm van protest na de aanvankelijke stilte niet ver weg meer kan zijn.
De waargenomen klimaatsverandering wordt vanzelfsprekend dankbaar benut.
L(eraar): 'Meisjes en jongens, dit is eigenlijk geen werk, al dat tekenen!'
De groep stemt van harte in en een doelmatiger oplossing is snel bedacht.
G(roep): 'U moet gewoon 24 schrijven voor die klas kinderen'.
L.: 'Goed, maar wat doe ik met die tafels?'
G.: 'Nou, gewoon: een rondje of een vierkantje.'
Op het bord verscheen: ◯ 24

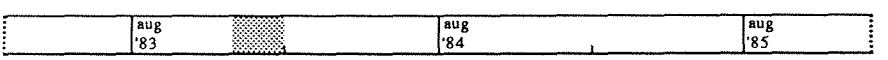
L.: '24 kinderen *om* één grote tafel.
Nu de bestelling nog, zeg 18 pizzapannekoeken.'
G.: 'In 't rondje natuurlijk!'
L.: Dus zo: (18) 24.
24 kinderen *óm* één grote tafel met hun bestelling van 18 pizzapannekoeken er*óp*.

Op deze manier is er door gezamenlijke inspanning - of eigenlijk is het helemaal niet zo inspannend, alles is zo natuurlijk, dit symbool ligt zó voor het oprapen - gewerkt aan de constructie van dit symbool, dat op zijn beurt weer als bouwsteen voor een schema zal gaan dienen, voor het schikken van de tafels: (18) 24 in (9) 12 , (9) 12 , maar in (6) 8 , (12) 16 kan natuurlijk ook.
Voorlopig zullen we het echter nog maar niet te complex maken. Eerst zal het inzicht er moeten zijn, dat al deze tafels, beschouwd als (afzonderlijke) verdeelsituaties, in de portie voor ieder gelijkwaardig zijn. Het is nog lang niet zeker, dat ieder dat zomaar inziet of voetstoots wil aannemen.

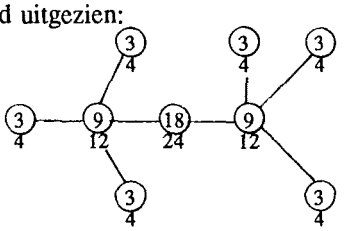
Boom
Alras prijkt er een schema op het bord:



'Nu is het weer net als daarstraks', merken sommigen op. En inderdaad: 3, 't doet er niet toe wàt verdelen met z'n vieren is inmiddels een bekend geval geworden.

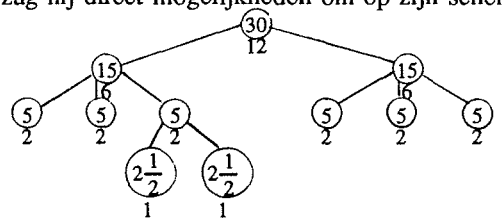


Het zou beter bij 'De Smickel' gepast hebben, wanneer het 'schema' er zo had uitgezien:

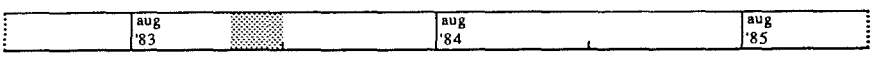


Voor de overzichtelijkheid werd het maar even 'gladgestreken'. Te voorbarig, zoals ras zou blijken. Niet iedereen deed het op papier meteen zo klinisch. Net als destijds bij de appels etc. met hun echtmakende franje, zullen sommige leerlingen hier ook even tijd nodig hebben om het schema te modelleren en af te zien van realistische trekjes, zelfs al leek alles op het eerste gezicht nog zo voor de hand te liggen.

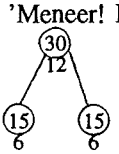
Clara bijvoorbeeld, die 'De Smickel' uit eigen ervaring kent, *weet* dat de tafels daar niet rond zijn, dus tekent ze rechthoekige. In Marja's schema's wijzen de takken in het begin als de vangarmen van een octopus alle kanten op, net als in ons voorbeeld. Voor Alwyn en Kevin zitten tafels nu eenmaal niet aan elkaar vast, dus tekenen zij in eerste instantie losse 'tafels', in plaats van een samenhangend schema. Wennen doen ze echter allemaal snel aan deze schematisering. Reeds na de eerste vingeroefening in de les, begint het er bij de meesten al aardig op te lijken.
Bij het beslissen over ieders portie worden de cijfersymbolen aan Margreet weer te machtig.
Zij tekent een verdeling. Eigen initiatief! En zij zal dit – overigens niet als enige – nog lang blijven doen.
Tijdens het zelf construeren van zo'n tafelschikkingsboom kan meteen al de kracht blijken van dit schematiseringsmiddel wat zijn progressiemogelijkheden aangaat.
Frans, die er nu eenmaal van houdt luid en duidelijk te laten horen hoe hij over de zaken denkt, ook ongevraagd, gaf er niet alleen onmiddellijk blijk van te doorzien, dat het om de constructie van gelijkwaardige tafeltjes ging. Ook zag hij direct mogelijkheden om op zijn schema te bezuinigen:



Ieder krijgt $2\frac{1}{2}$.



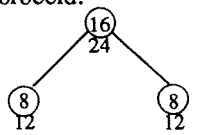
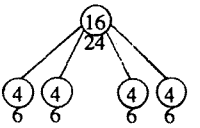
De rest van het schema (en nog wel meer dan dat) kon worden weggelaten. 't Was toch allemaal hetzelfde!
Deze mathematische gelijkwaardigheid, op het eerste gezicht zonneklaar voor Frans, was dat niet voor ieder. Je kon het immers ook heel anders bekijken. Michael wilde het liefst aan $\frac{30}{12}$ zitten, omdat het daar het gezelligst moest zijn, vanwege 'de meeste kinderen'. Margreet beziet de situatie meer door een economische bril en beslist haar voorkeur voor $\frac{30}{12}$ vergeleken met $\frac{15}{6}$ op grond van de 15 lekkernijen die er meer te verdelen zijn. Ze neemt hiermee geen eenzaam standpunt in, want Kevin denkt er net zo over.
Beatrijs: 'Nee hoor! Bij $\frac{15}{6}$, want daar zijn minder kinderen!'
De botsende standpunten worden eerst nogal fel verdedigd. Tweedracht alom! Frans mengt zich in de discussie. ''t Is eigenlijk hetzelfde', meent hij, 'want de helft van 30 is 15, en de helft van 12 is 6. Dus 't blijft hetzelfde!' Dit legt de kiem voor een ommezwaai in opvatting bij Kevin: 'Meneer! Meneer!', eist hij nadrukkelijk de aandacht en – wijzend naar



'15 en 15 is 30 en 6 en 6 is 12'.
Kevins bedoeling met deze opmerking wordt nog even toegelicht en vervolgens wordt de les afgerond met: 'Ik begrijp best, waarom Beatrijs, Margreet en Kevin zo redeneerden. Ze hebben maar op één van beide getalletjes gelet: op het lekkers òf op de kinderen die verdeelden. Wat we nu *geleerd* hebben – en dat is moeilijk – is op beide getallen *tegelijk* te letten. Met beide moet rekening gehouden worden bij het vergelijken, daarom gaat het!'

Behalve dit is er nog een lange weg te gaan. Frans liet spontaan zien dat het schema kon worden verkort. Ook anderen construeerden alras schema's naar dit kenmerk. Een keur aan verkortingsmogelijkheden zal zich in de loop van het komende leerproces nog aandienen: het weglaten of wegwissen van takken, het invullen van het hoogstnoodzakelijke in het schema, het .....
Vooral de in- en uitstap blijken belangrijk te zijn.
Instap: Wie zijn schema met méér dan twee tafels begint bereikt sneller het 'eind'.

Bijvoorbeeld:

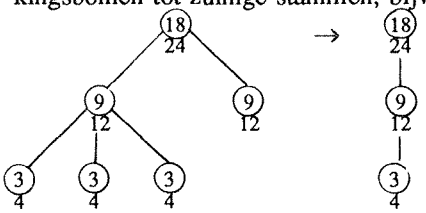
niet  , maar meteen 

en daarna (mogelijk) verder.

Een oneven aantal verdelers kan helpen de kinderen op dit spoor te brengen.

Uitstap: Hoe sneller in een tafeltje binnen het schema een gekende verdeelsituatie wordt herkend, des te eerder kan uit de boom worden gestapt om te beslissen tot ieders portie.

En dan zijn er nog de middelen van opdienen en verdelen. Neem bijvoorbeeld het 'Franse verdelen'. Met behulp daarvan kan uit ieder stadium van schematiseren gestapt worden om de portie voor ieder vast te stellen. Op deze manier zijn situatie en uitkomst niet slechts symbolisch onderscheiden, maar worden ze tegelijkertijd hecht verbonden. Bij $\frac{3}{4}$ gaat onverbrekelijk $\frac{3}{4}$ behoren en omgekeerd. Het moet tot een automatisme worden. Omgekeerd kan dan uit $\frac{3}{4}$ via $\frac{3}{4}$ de reeks $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \ldots$ als denkkader worden opgeroepen. Uiteindelijk gaan de fors gesnoeide tafelschikkingsbomen tot zuinige stammen, bijvoorbeeld:



en een klasse van tafeltjes bij een portie (een breuk) op in de verhoudingstabel als schematiseringsmiddel.

Daarmee kan het eenmaal in gang gezette proces van voortschrijding in schematisering door verkorting nog lange tijd worden voortgezet.[38]

De computer kan daarbij een hulpmiddel zijn. In het onderzoek is dit later ook geprobeerd. Een computerprogramma voor het tafelschikken werd geschreven in Forth en draaide op de IBMpc.[39]

In het programma werden de verkortingen verwerkt die in het voorafgaande schematiseringsproces op papier werden geobserveerd. Deze werden nu als keuzemomenten in het programma aan de kinderen voorgelegd. Het toepassen van de computer was ons inziens gerechtvaardigd doordat een leerproces van maanden in sterk gecomprimeerde vorm nog eens versneld kon worden doorlopen om aldus reflectie te weeg te bren-

gen op het eigen leren. In zekere zin heeft het programma, althans voor een deel der kinderen, deze functie ook nog wel enigszins vervuld. Toch willen we het bij deze summiere vaststelling laten. Het programma kwam, vertraagd door allerlei problemen die zo kenmerkend zijn voor de ontwikkeling van educatieve software, te laat, veel te laat om nog die bijdrage aan niveau-verhogingen in de individuele leerprocessen te kunnen leveren, die er feitelijk mee beoogd werden. Mosterd na de maaltijd dus. (Zie ook hoofdstuk 6 in verband met de niveau-verhogingen.)

Drie voorbeelden van het tafeltjessymbool in actie

Drie momenten worden nu uit het onderwijsleerproces gelicht om het voorgaande te beschrijven.

Het betreft:

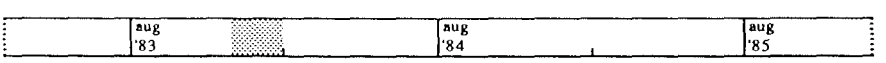
— de grensoverschrijding van het verdelen met het tafeltjessymbool en schema naar situaties met continue hoeveelheden;
— de strijd tegen de IN-verleiders met behulp van de modelsituatie van het tafelschikken;
— bewerkingen met breuken voortkomend uit bewerkingen met het symbool (en het schema) voor het tafelschikken.

Symbool- en schemaconstructie vlotte gemakkelijk alsook de toepassing ervan in eenvoudige vergelijkingsproblemen daarna, althans voor de meesten. Dit maant tot voorzichtigheid en het temperen van al te voorbarig optimisme. Immers, het tafeltjesschema mag niet verworden tot dwingend keurslijf voor alle leerlingen; bovendien is het geen panacee voor alle breukenkwalen. Kijken we echter vooruit – wat ook steeds het devies is – dan gloort een brede horizon van toepassingen voor de verhoudingstabel als vervolg; schematiseringsmiddel bij uitstek in wiskunde, natuurkunde, scheikunde, biologie, e.d.[40]

Dit maakt één ding zonneklaar. Ook het terrein van het meten dient in een vroeg stadium te worden ontgonnen. De getallenlijn als visualiseringsmiddel en model zijn hierbij van belang.

Terug nu naar de toegezegde voorbeelden. Er worden kwesties mee binnen het blikveld van de lezer gebracht die nog in het verschiet van het onderwijsleerproces liggen.

Intussen zijn ook allerlei activiteiten gericht op het voortbrengen van de getallenlijn gaande, opdat verschillende modellen eendrachtig optrekken in het leerproces. De lezer zou dit tot zijn bewustzijn moeten toelaten om de noodgedwongen ééndimensionaliteit van deze beschrijving even te kunnen relativeren.



Het eerste voorbeeld: ruimere toepassing van het schema voor het tafelschikken; koffiesterkte

Bij gelegenheid van de verjaardag van Peter Brokken werd er nagedacht over het zetten van koffie met een apparaat vanwege de visite. Zoveel schepjes koffie erin en het waterreservoir gevuld voor zoveel kopjes. Hoe sterk wordt de koffie?
Sterker dan de vorige keer? Kun je dat vooraf al weten? Of ... moet er perse geproefd worden? Kan het ook berekend worden?

Snel werd weer eens duidelijk hoe gemakkelijk er iets kan misgaan in het onderwijsleerproces. De context – Peters verjaardag – was goed. Daaraan schortte het niet. Aan het koffiezetten trouwens ook niet. Ook daarover wilden de kinderen best nadenken. (Keukenactiviteit!) Het apparaat op het werkblad werd door iedereen herkend.
'Wie vertelt er eens iets van?', zo luidde de eerste onderwijszet. Geen respons! Wat nu?
'Wie weet hoe dit apparaat werkt?' Iedereen vanzelfsprekend!

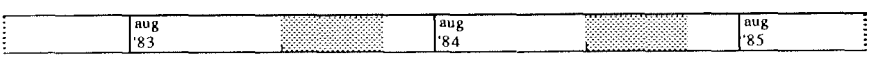
> De juiste vragen stellen, daarop komt het aan. Of, dikwijls beter nog, de leerlingen daarop laten anticiperen: 'Welke vraag zouden we hier kunnen stellen?'

Na het nemen van genoemd obstakel liep het allemaal wel weer.
Op zeker moment – de aandacht richtte zich op de vraag: 'Wanneer zijn twee koffiesoorten ('verdeelsituaties') gemakkelijk vergelijkbaar?' – gaf het bord weer:

6 S(chepjes) en 5 K(opjes) en
6 S en 8 K.

L: Welke is het sterkst?
Delilah neigt even naar 6S + 8K.
L.: Voor welke koffie wordt het meeste water gebruikt?
D.: Oh nee, ik zie het al 6S + 5K
L.: Waarom kun je deze nu zo gemakkelijk vergelijken?
Henk: Bij die ene zit 't meeste water ...
L.: En .....?
H.: De schepjes zijn gelijk.
Op het bord wordt nu even een klein uitstapje gemaakt:

6S + 8K
3S + 4K (Net zo sterk.)



L.: Wie bedenkt de volgende?

Carlien: $1\frac{1}{2}$S + 2K.

Michael: $\frac{3}{4}$S + 1K.

Stef: *Dit is eigenlijk net als met die boom*!

L.: Oké, Stef. Zou jij dan nu ernaast een boom willen maken voor 6S + 8K?

Stef tekent ◯ en aarzelt dan .....

L.: Wat moet er nu *óp* en wat er *omhéén*?

Sanny: Zes *pannekoeken* erop en .....

Hilariteit alom.

L.: Tja ....., we zijn nu aan het koffiezetten.

Stef, die tijdens dit welkome intermezzo even heeft kunnen nadenken zegt opeens: 'Oh, 'k weet 't al', en vult in $\frac{6}{8}$.

L.: Stop, Stef! Stop!, en, tot de rest van de groep. Wat *betékent* dit nu?

Lln: Dat er 6 schepjes koffie zijn en 8 kopjes.

L.: Juist. En heeft dit nog iets met verdelen te maken, bijvoorbeeld het 'Franse verdelen', hoe gaat dat hier?

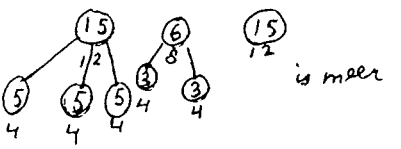
Uit een aanmerkelijk ruimer aanbod valt aan Mark de beurt te beurt.

Mark: (enigszins grijnzend) Het ... uh ... eerste schepje wordt binnengebracht en over die acht kopjes verdeeld en daarna .....

Stef maakt de hem opgedragen koffieboom af en aldus ondergaat het tafeltjessymbool met schema een aanzienlijke verruiming van betekenis en toepassingsmogelijkheid.

Vanzelfsprekend ging de nodige oefening eraan vooraf. Eerst het zelf bedenken van verdeelsituaties (tafeltjes), waar meer, minder of evenveel voor ieder zou worden opgediend dan (als) aan een gegeven tafel. En vanzelfsprekend ook twee keer zoveel, half zoveel enz.

Omgekeerd waren ook situaties met elkaar vergeleken. Een in die tijd veel toegepaste methode was die van Clara:



En later .....

Met name het zelf bedenken van koffie, die sterker is of slapper, even sterk, twee keer zo sterk, twee keer zo slap etc. dan (als) koffie met gegeven S + K verhouding had de nodige energie en redeneerkunst van de leerlingen geëist.

Aanvankelijk bleken de meeste kinderen bij de open opdrachten (bedenk er

één die sterker is dan ...) geneigd te streven naar overtuigende verschillen met de gegeven situatie. Beide componenten S en K werden gevarieerd. Dergelijke uitkomsten kwamen dubbel zo vaak voor als enkelvoudige S- of K-variaties.[41] Alleen Stef bleek haarscherp aan te voelen, hoe door 'zuinig' en 'systematisch' variëren snel de nodige paren uit een gegeven voorbeeld konden worden geconstrueerd. Sterkere koffie dan 3S + 4K bijvoorbeeld werd volgens hem verkregen door – onder eerbiediging van zekere grenzen – het aantal K in 3S + 4K of een hieraan gelijkwaardig paar, successief met één te doen afnemen of de hoeveelheid S telkens met één te laten groeien. Met het oog op bewustmaking van de continuïteit van de hoeveelheden (meetsituatie), was de vraag naar een toe- of afname met gebroken hoeveelheden voor beide variabelen hier relevant, in tegenstelling tot verdeelsituaties.

Het tweede voorbeeld: de strijd tegen de IN-verleiders

Iemand krijgt bij een verdeling $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ (.....).

Kan hij of zij bij het tafeltje $\textcircled{2}_{5}$ gezeten hebben?

'Neen', zegt Michael, 'je kunt niet zeggen $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$, want $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ = meer dan $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{5}$ is minder'.

'Neen', beweert ook Henk, 'want $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ en daarbij hoort dus het tafeltje $\textcircled{5}_{6}$ en niet $\textcircled{2}_{5}$'.

'Neen', meent Stef, 'want $\frac{1}{2}$ is meer dan $\frac{2}{5}$'.

'Ja', vindt Marja even, 'want 1 + 1 = 2 en 2 + 3 = 5'. Maar dan verbetert ze zichzelf spontaan, 'oh nee, want 2 + 3 = 5 kan niet bij $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$'. Hoe het dan wel moet laat ze nog maar even in het midden.

Kwam het signaal 'Frans verdelen' voor $\textcircled{2}_{5}$ dan was in een oogwenk zonneklaar:

Dit kan niet. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ valt nu eenmaal niet gelijk te praten aan $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$, zijnde ieders 'op z'n Frans' voortgebrachte portie bij $\textcircled{2}_{5}$. Deze redenering betrof ook hen, die in eerste instantie geneigd waren in de IN-distractor fout te gaan.

Het derde voorbeeld: ingang tot bewerking

Bij welk tafeltje krijgt men het dubbele van ieders portie bij $\textcircled{3}_{4}$?

De betekenis van het symbool liet Nanja klaarblijkelijk even in de steek, want zij neigde in eerste instantie tot $\textcircled{6}_{8}$. Op de vraag dit te controleren, corrigeerde zij haar uitkomst tot $_{(8)}\textcircled{6}_{4}$.

'Hoe heb je gedacht?' 'Nou', zei Nanja, 'bij het tafeltje $\textcircled{3}_{4}$ krijgt ieder $\frac{3}{4}$, het dubbele is $\frac{6}{4}$ en daar hoort het tafeltje $\textcircled{6}_{4}$ bij'.

In symbolen: $2 \times \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$.

Anderen volgden overeenkomstige denkpatronen al dan niet verlucht met foutjes als Nanja maakte.

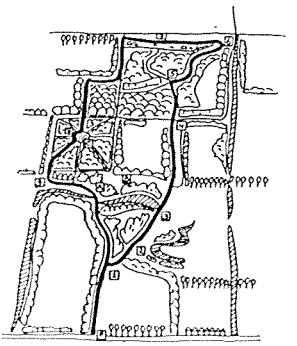
> De kunst is steeds de betekenis achter de opgebouwde symboliek en modellen vast te houden. Een krachtig middel om al te voorbarige onthechting van de wiskundige bedrijvigheid aan zijn betekenisrijke oorsprong tegen te gaan, bleek het verwoorden te zijn.
> Telkens opnieuw kregen de kinderen de gelegenheid te vertellen wat hun modellen en symbolen aan betekenis weerspiegelden en vanzelf ook hoe de symbolen en de ermee samenhangende schema's en modellen uit de geëxploreerde contextrijke voedingsbodems kunnen worden voortgebracht.

'Opdienen en verdelen' in meetsituaties

> Sprekend over symbolen, schema's en modellen moet gezegd, dat het tot dusverre opgeroepen beeld in dit onderwijsverhaal te eenzijdig dreigt te worden. De beperkingen in dimensies, die het papier – hoe geduldig verder ook – oplegt, zijn hieraan mede debet, ondanks het feit, dat in termen van Treffers, de na te streven doelen voor de breuken driedimensionaal gekleurd worden.[42]
> Weliswaar kwam in het begin even naar voren, hoe Peters ondeugd met de tandpasta en het verdelen van dropveters tot lineaire modellen aanleiding gaven. Dit neemt echter niet weg, dat het eerder opgemerkte gevaar van modeldwang bij de tafelschikkingen en de nadruk op verdeelsituaties door deze onderwijsimpressie bevestigd dreigt te worden.
> Vandaar dat nu stilgestaan wordt bij de getallenlijn, waarop niet meer de zo vertrouwde natuurlijke getallen het alleenrecht als hun drager kunnen laten gelden, maar waarop ook plaats voor de breuken zal moeten worden ingeruimd. Hoe natuurlijk en vanzelfsprekend zich dit lineaire model ook voordoet, het gevaar loert dat het een opgelegd model wordt dat op louter rationele gronden wordt toegevoegd aan een situatie, zonder dat de kinderen de achterliggende overwegingen tot een dergelijke rationele stap

kunnen doorgronden; een rationele stap die veelal volgt op het op louter rationele gronden situeren van de breuken als rationale getallen op de getallenlijn.
Deze overwegingen brengen ons ertoe niet uit te gaan van de reeds gekende getallenlijn als drager van de natuurlijke getallen, maar nogmaals van voren af aan te beginnen en de getallenlijn als drager van breuken op zo natuurlijk mogelijke wijze voort te brengen. De natuurlijke getallen zullen daarbij vanzelf, zich o.a. onderscheidend als mooie, afgeronde buitenbeentjes, opnieuw hun plaats verwerven.

Wandelen in 'Gooilust'
Het bezoek van de familie Brokken aan 'De Smickel' was de kroon op een middagje samen uit. Eerst had de familie het avontuur gezocht op het landgoed 'Gooilust', nabij Hilversum. Een kaart met wandelroute was hun gids geweest.



Wandelroute 'Gooilust'

Vader Brokken wilde weer enkele foto's maken; fotografie was trouwens zijn hobby. Moeder en de kinderen vinden het altijd spannend zo'n nieuw gebied te kunnen verkennen.
't Was meteen al met iets merkwaardigs begonnen. De windroos op de wandelkaart stond zó , terwijl de kaart van de omgeving van Hilversum zó op het noorden georiënteerd was.

Gedraai
Ook voor de groep was de vraag hoe nu de ene kaart te draaien om hem dezelfde oriëntatie te geven als de andere en deze draai te beschrijven een leuk probleem geweest. Het kon twee kanten op, en – hoewel wat onzinnig – nog hele draaien erbij maken ook.
Het bleek weer eens een goede gelegenheid om breuken in gemengde getallen voort te brengen (en ook om het 'van-keer'- probleem aan te snijden).

Het volgende was geleidelijk aan op het bord gezet:

$2\frac{1}{4}$ keer rond, $2\frac{3}{4}$ keer rond,

$1\frac{1}{4}$ keer rond, $1\frac{3}{4}$ keer rond.

dus ook $\frac{1}{4}$ keer rond, $\frac{3}{4}$ keer rond.

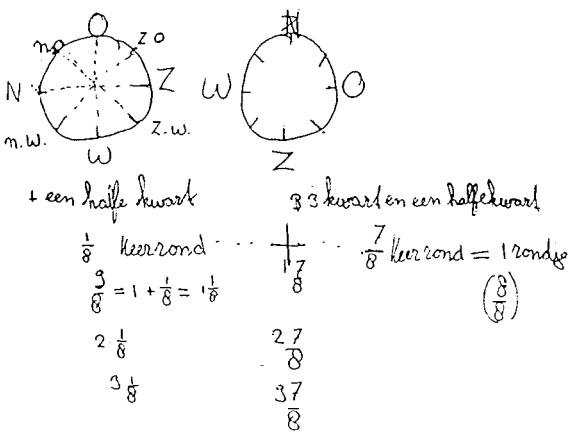
Het woord 'draai' was ook bruikbaar, net als in de gymles trouwens.
Het was eigenlijk toch nog niet zó gek geweest, en (gaf je aan de windroos een waarde – 360 graden voor een hele draai) dan lieten de regels van het bord zich in rekenregels omzetten:

$2\frac{1}{4} \times 360$ (graden) = $2\frac{3}{4} \times 360 =$

$1\frac{1}{4} \times 360 =$ $1\frac{3}{4} \times 360 =$

$\frac{1}{4} \times 360 =$ $\frac{3}{4} \times 360 =$

Voor de draaien zelf konden eveneens betrekkingen worden opgesteld:



'Margreets windrooswerk'

Baktijden
Er was veel overeenkomst geweest met het nadenken over de verschillende baktijden voor de pannekoeken, die in 'De Smickel' op het menu stonden.
Er waren pannekoeken die zes minuten 'duurden', maar ook vijf, twaalf, tien en noem maar op. Met de klok werd steeds uitgezocht hoeveel pannekoeken van elke soort er per uur door de koks werden gemaakt. Allerlei nieuwe breuken, anders dan halven, kwarten en achtsten waren er zodoende ontstaan. Vervolgens waren die in allerlei zelfbedachte sommen weer teruggekeerd.

Bijvoorbeeld:
1 kinderpannekoek met appel duurde zes minuten, dus 10 kinderpannekoeken met appel $10 \times 6 = 60$ minuten = 1 uur, dus één zo'n kinderpannekoek ook $\frac{1}{10}$ uur, of, anders gezegd, de minutenwijzer gaat voor een kinderpannekoek $\frac{1}{10}$ keer rond:

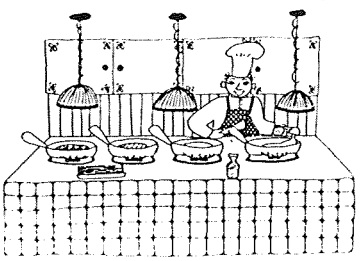
$\frac{1}{10} \times 60 = 6$, en zo ook
$\frac{2}{10} \times 60 = 12$ (of $\frac{1}{5} \times 60 = 12$)

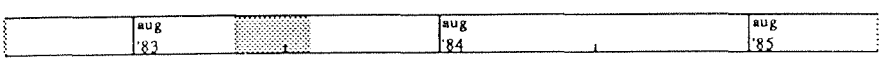
Schuilnaam

Een goede gelegenheid was het geweest om opnieuw even stil te staan bij het verschijnsel, dat zich nu al zo dikwijls had voorgedaan, namelijk, dat twee of meer gelijksoortige stambreuken – in dit geval $\frac{1}{10}$ en $\frac{1}{10}$ – konden worden verzameld en teruggebracht tot een andere gedaante, hier $\frac{1}{5}$. De kinderen stelden voor dit verschijnsel te omschrijven met 'verstopnaam' of 'schuilnaam'. De voorkeur was uitgegaan naar 'schuilnaam': '$\frac{1}{5}$ is een schuilnaam voor $\frac{2}{10}$' (en feitelijk ook omgekeerd, om dat $\frac{1}{5}$ eveneens in $\frac{2}{10}$ schuilgaat). Carlien had dit niet zonder een vleugje trots meebeleefd. Het spreken over gelijkwaardigheid zou in de toekomst namelijk door haar vondst van het woord 'schuilnaam' bepaald gaan worden, en aanmerkelijk vereenvoudigd.

Baktijden

Terug naar de baktijden nu. Vooral de vraagstukken over de koks van 'De Smickel', die verschillende soorten door elkaar bakten, waren niet eenvoudig geweest, maar wel uitdagend.
Bijvoorbeeld:
Kok Eddy aan de eerste pan had na één uur vijf pannekoeken gebakken.





Welke kunnen dat geweest zijn? Hoeveel van elk?

Dat viel niet mee. Een hele samenstellen uit ongelijke delen, of, anders gezegd, een uur vol maken met verschillende 'stukjes tijd'. Na veel passen en meten, proberen en uitzoeken, denken en redeneren was het dan toch met vereende krachten gelukt, niet alleen voor het 'geval Eddy', maar ook nog andere en zelfs met bijpassende sommen.

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$ $\qquad 2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

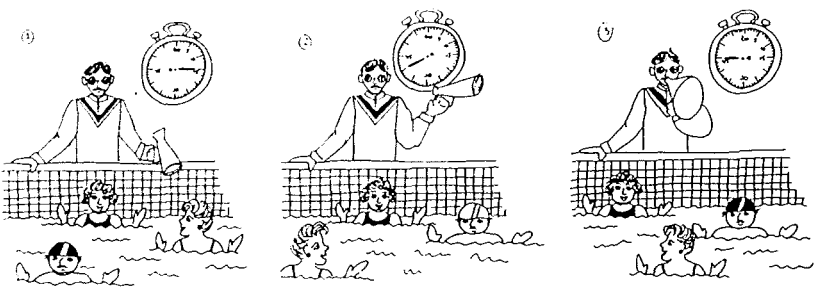
$2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{6} = 1$ $\qquad 3 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,

en, gelet op de duur van het bakken, vanzelfsprekend ook:

$\frac{1}{4} \times 60 = 15$ $\qquad \frac{1}{6} \times 60 = 10$

$\frac{2}{4} \times 60 = \frac{1}{2} \times 60 = 30$ $\qquad$ enz.

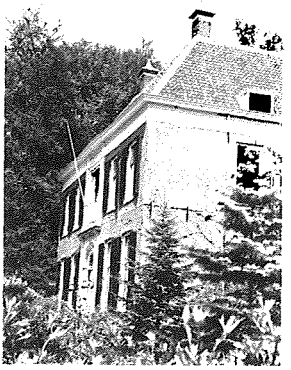
Later zou iets dergelijks nog eens aan bod komen. Anja Brokken bereidde zich toen voor op het zwemmen voor Diploma A. Met de zestig seconden van het watertrappen, was heel wat te doen geweest (zie ook p. 114).



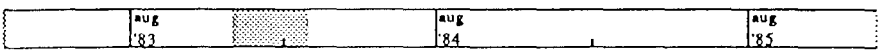
In het begin, toen Anja en andere lotgenootjes het nog niet konden volhouden, stokte de stopwatch van de badmeester op alle mogelijke en onmogelijke plaatsen: precies op de helft, even over de helft of bijna halverwege, nog maar net op een kwart minuut, op driekwart minuut, na 48 seconden en noem maar op.

Wandelen in 'Gooilust'

We waren weer afgedwaald. De familie Brokken was op weg om 'Gooilust' te betreden. Gelukkig waren de foto's die vader Brokken zou (kunnen) gaan maken al gereed. Hierdoor kon het verkennen van de te volgen wandelroute het nodige realiteitsgehalte krijgen.



Vooral het bepalen van het standpunt van de fotograaf bij een zestal foto's van de route, was een uitdagende activiteit geweest, die ieder geboeid had.[43] Wel was het een heel gedoe geweest een spraakverwarring te vermijden.

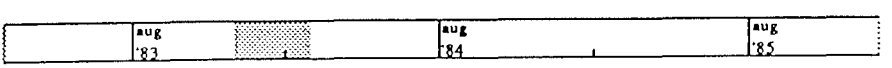


Met uitspraken als: 'Dáár stond hij!' of 'Een stukje die kant op!' kwam je niet ver. Niemand wist dan precies wat bedoeld werd. Gelukkig stonden bij de wandelroute op de kaart letters en cijfers voor bezienswaardigheden en aandachtspunten. Daarvan kon bij het beschrijven van de opnameplek van fotograaf 'Brokken' steeds gebruik worden gemaakt en natuurlijk ook van de namen voor de windrichtingen en van links en rechts.
Bijvoorbeeld: Foto 3. Waar stond de fotograaf?

Mark: Op een pad.
L.: Hoe zie je dat zo snel?
M: Onder op de foto zie je nog iets van een hekje.
L.: Waar kan vader dan gestaan hebben?
Margreet: Bij drie (zie kaart) want je ziet de achterkant van het huis.
Alwyn: Nee, tussen drie en vier.
Delilah: Ja, maar wel dichter bij vier.

Zij zet haar woorden daadkracht bij door de bewuste plek zo nauwkeurig mogelijk aan te wijzen (op de transparant van de overheadprojector).
Al met al vindt er zo 'n nauwgezette kwalitatieve verkenning van de wandelroute plaats, dat ieder er nu een verhaal over zou kunnen vertellen.

Wandelroute
Maar we zijn er nog niet. Boven de wandelkaart staat '3,5 km/1 uur'.
L.: Kan iemand er 50 minuten over doen?
Alwyn: Ja, dan moet-ie sneller.
L.: En 1 uur en 7 minuten?



Alwyn twijfelt en hij niet alleen.

L.: Wat betekent die '1 uur'?

A.: (Aarzelend) Misschien dat je er 1 uur mag blijven?

Anderen vinden van niet. Stef vertolkt hun standpunt.

Stef: De wandeling duurt zo ongeveer 1 uur. De één doet er wat korter over, de ander wat langer. 't Is een soort gemiddelde.

In die zienswijze kan ieder zich vinden. De afspraak wordt (voor het gemak): *Precies één uur.* Nu de lengte van de route.

In werkelijkheid dat's geen punt: 3,5 km.

Maar nu op de kaart. Hoe daarachter te komen?

Geen nood! Daarvoor zijn middelen en mogelijkheden te over.

Door te meten met een liniaal, de route volgend, een touwtje er langs en dan meten of streepjes zetten om de centimeter, zo klaart de groep dit karwei. Een precieze definiëring van de route is nog wel op zijn plaats, want de uitkomsten lopen uiteen van 29 tot 41 cm.

Geen wonder, want afgezien van diverse onnauwkeurigheden heeft de één 'het staartje' van de oprijlaan wèl meegeteld en de ander niet.

Daarom wordt zónder 'staartje' en mèt de touwtjesmethode van Stef en anderen de kaartroute bemeten op 35 cm.

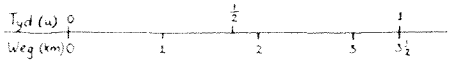
Dan is de tijd rijp om behalve de markante punten, die de samensteller van de kaart al aangebracht heeft, zelf nog andere plekjes onder de aandacht te brengen.

Zet een kruisje voor: 'Zij waren halverwege.' (Wie zegt dit anders?) e.d. Maar ook: 'Na welk deel van de route was de familie Brokken bij het sterrebos (9)?', gevolgd door nog meer uitspraken, zoals: Na zo'n driekwart van de route zag Peter plotsklaps een ree. Waar kan dat geweest zijn? Wie kan het *precies* zeggen?

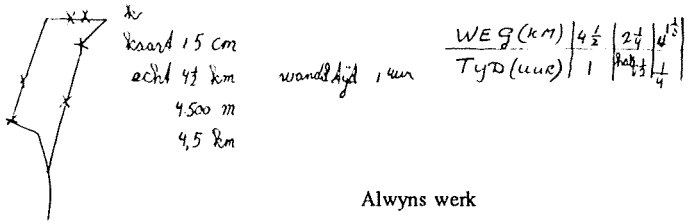
De breuken, in eerste instantie bedoeld om de relatie van routedelen tot de gehele route te beschrijven, werken daarna op afstand of wandeltijd, aldus tot breuken in operatoren promoverend. Tot zover voltrok de gedurige standpuntverandering van (voorgestelde) werkelijkheid naar kaart en vice versa zich moeiteloos. Maar nu? 'Eén centimeter op de kaart is zoveel ..... in werkelijkheid', kenmerkend voor de gebruikelijke benadering van het schaalbegrip, zou (nog) niet werken, dat wisten we. Het uitgangspunt zou niet de kaart, maar de werkelijkheid zelf moeten zijn, verkleining en verschraling ondergaand naar het kaartbeeld toe.[44]

L.: Waar moet het eerste kilometerpaaltje op de kaart komen?
Bij een gegeven route van 3,5 km valt 1 km nog wel af te schatten. Iets meer dan een kwart (of de helft van de halve route).
Is éénmaal zo'n referentiepunt beschikbaar, dan zijn de paaltjes voor twee en drie kilometer ook snel bepaald, inclusief eventuele bijstelling van de eerdere schatting.
Achteraf was het nog een hele ontdekking voor sommigen, dat een routedeel van 1 km overeenstemt met 10 cm op de kaart en tegelijkertijd weer vanzelfsprekend wanneer voor 3,5 echte kilometers 35 kaartcentimeters voorhanden zijn.

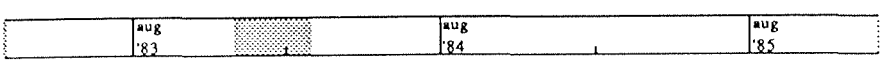
Ziedaar, hoe al mathematiserend, zonder overigens de andere aspecten van de werkelijkheid die de moeite waard zijn, uit het oog te verliezen, ook deze activiteit allerlei wiskundig materiaal kan voortbrengen. Eerst als nasleep om de situatie al maar gedifferentieerder te beschrijven, totdat je als leerling ontdekt, dat nieuwe werkelijkheden ermee wiskundig beheersbaar worden.
Te denken valt aan het stroomlijnen van de route tot afstands- en tijdlijn, samenvloeiend tot tweeschalige getallenlijn.[45]



Allerlei uitspraken kunnen nu nogmaals eenvoudiger gevisualiseerd worden, bijvoorbeeld 'Ze zijn halverwege; welke afstand, welke tijd?'
Iets dergelijks kan ook heel overzichtelijk in een tabel genoteerd worden.



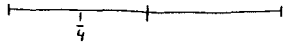
Alwyns werk



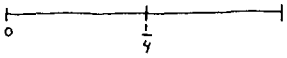
De tweeschalige getallenlijn met afstand-tijd-tabel is nu constructief gevuld en kan bovendien nog verder worden verfijnd.
Zo is ook de relatie tussen werkelijke route en kaartroute wat de afstanden aangaat onder de loep te nemen met tweeschalige getallenlijn of in tabel.

Dit geldt ook de in het spel zijnde metrieke samenhang.
Schaal als 'zoveel kaart' op 'zoveel echt' begint zich dan langzaam maar zeker af te tekenen. Uit het ruime klasseaanbod van voortgebrachte paren verhoudingsgetallen, die werkelijkheid en kaart verbinden, kan de keuze vallen op een representant die de voorkeur heeft, zoals in de getallenlijn met dubbele schaal is aangegeven:
KAART 10 cm is ECHT 1 km.
Een kwestie van normeren dus en daarom gaat het steeds.
De afstand- en tijdschaal kunnen ook nog gescheiden gehouden worden, daarmee de Brokkenwandeling in een weg-duur-grafiek verbeeldend. Het toekennen van verschillende wandelzwaarten aan deeltrajecten van de route grijpt in de vooronderstelde eenparigheid van beweging in, daarmee de lineariteit van het grafisch verband, berustend op de aangenomen verhoudingsconstantie verstorend.

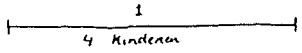
Getallenlijnen in dropveters, tafels en tijd
Ook hier was vanzelfsprekend een voorgeschiedenis.
In de eerste plaats was met de kinderen een getallenlijn als dropveterlijn geconstrueerd, daarbij rekening houdend met een bron van misverstand, namelijk het in verwarring raken door breuk als *interval* (als lijnstuk),



en breuk als *punt* op de getallenlijn.

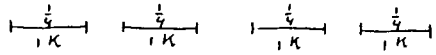


Het verdelen van dropveters werd voltrokken als bij het tafelschikken:
1 dropveter voor 4k

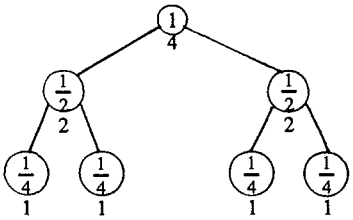


½ dropveter voor 2k

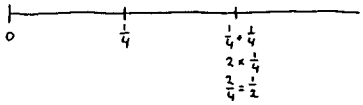
$\frac{1}{4}$ dropveter voor 1k



of:



Met de voortgebrachte stukken voor ieder werd de dropveterlijn weer 'in' elkaar gezet.



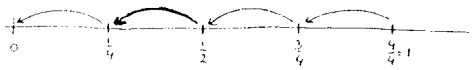
Bij 0 is er nog niets op.

Na het opsnoepen van $\frac{1}{4}$ wordt $\frac{1}{4}$ genoteerd, een soort 'kilometerpaaltje' met twee betekenissen:

a. deze afstand (dit stuk) is gedaan (interval), en

b. bij deze halte (op dit punt) staan we daar even bij stil.

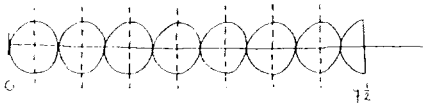
Al construerend wordt vanzelf voor de verschillende haltes op de getallenlijn het bijpassende monografische materiaal voortgebracht. Bij het bereiken van een gehele mijlpaal



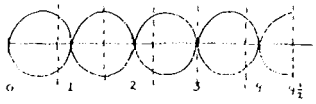
werd nog even omgegezien: Wanneer een hele dropveter met $\frac{1}{4}$ tegelijk wordt uitgedeeld kun je vier kinderen iets geven $1 : \frac{1}{4} = 4$.

Bij het speuren naar tafeltjes met als portie voor ieder $\frac{1}{2}$ ... ($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, ...), rezen ook vragen als:

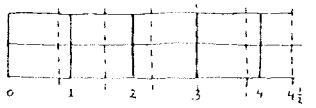
'Hoeveel kinderen kun je een halve geven van $7\frac{1}{2}$ pannekoek.'



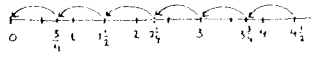
Er werd een lijn achter de pannekoeken gestopt.
Het uitdelen van de halven kon even goed op die lijn getoond worden:
$7\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 15$ en dus ook $7\frac{1}{2} : 15 = \frac{1}{2}$. Voor wie nog wilde tekenen zou dit veel werk besparen. Het ging er immers om of de situatie nog voorstelbaar was?
Zo eenvoudig lag het nu echter ook weer niet, want niet veel later, toen de tafeltjes met ieder $\frac{3}{4}$ geïnventariseerd werden ($\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, ...) liep het met dit idee volkomen fout.
'Hoeveel kinderen kunnen elk $\frac{3}{4}$ pannekoek krijgen van $4\frac{1}{2}$ pannekoek?'



Bij teruggang met $\frac{3}{4}$ op de getallenlijn van $4\frac{1}{2}$ klopte er met de pannekoeken helemaal niets meer van.
Geen eerlijke verdeling! Stef stelde vierkante pannekoeken voor, om het verhaal weer kloppend te krijgen.



Frans spreekt dan van een misvormde pan en de groep vindt, dat de getallenlijn ook wel zonder al die franje toegepast kan worden.



met, gelet op de grootte per stapje of het aantal stapjes: $4\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = 6$ en $4\frac{1}{2} : 6 = \frac{3}{4}$, ingeleid via 'tussenstanden' als

$4\frac{1}{2} - \frac{3}{4} =$; $4\frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} =$ of $4\frac{1}{2} - 2 \times \frac{3}{4} =$ etc.

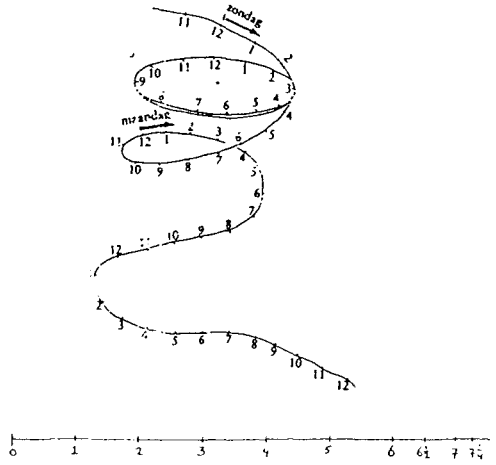
Bovendien is $\frac{4\frac{1}{2}}{6}$ als tafeltje waar ieder $\frac{3}{4}$ krijgt, ingelijfd:

$\frac{3}{4} \rightarrow \frac{3}{4}, \frac{4\frac{1}{2}}{6}, \frac{6}{8}, ...$

Zo kan er tussen $\frac{6}{8}$ en $\frac{9}{12}$ ook weer één bepaald worden.

Zo rolde er ook een wijzerplaat af om een tijdlijn na te laten;

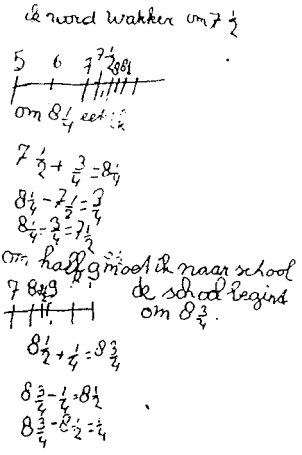
een opengeknipte en verlengde wijzerplaat dus.



met als startpunt weer een heel verhaal:
Peter Brokken was op zijn verjaardag om half zeven al wakker geweest ($6\frac{1}{2}$) en om kwart over zeven ($7\frac{1}{4}$) werd er pas ontbeten. Al die tijd had hij moeten wachten. Wel drie kwartier. Een verschil in tijd, dat op diverse manieren kon worden uitgedrukt:
$7\frac{1}{4} - 6\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$; $6\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 7\frac{1}{4}$; $7\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 6\frac{1}{2}$, met elk zijn eigen verhaal.
Om kwart over zeven was het ontbijt, maar Peter was al om ..... wakker.

Dit was tevens een goede gelegenheid geweest om na te denken over allerlei minder precieze tijduitspraken, zoals 'tegen half negen', hoe laat is dat? En: 'bijna', 'plus minus', 'ongeveer', 'om en nabij'?
Met behulp van de tijdlijn kon niet alleen worden getoond waar al deze tijdstippen te situeren. Ook had dit weer geholpen overeenkomsten en verschillen scherper te verwoorden.
Zo werden 'bijna' en 'tegen' bij elkaar gezet als 'net er voor' èn 'ongeveer', 'plus minus' en 'om en nabij' als 'net er voor' of 'net er over'.

Vrije produktie op tijd
Het verhaal van de eigen dagindeling op de tijdlijn was voor velen een feest geweest. In korte tijd waren aanzienlijke produkties voortgebracht: tijdlijnen met tijdstippen, tijdsduren en bijpassende sommen, waarin de verstreken tijd van de eigen dagindeling gevangen werd.



Marja's werk

Ziedaar een impressie van de manier waarop de getallenlijn, voornamelijk als 'nabeeld', als 'model van' werd voortgebracht.[46]
Hoewel hier en daar al wel als zodanig toegepast, zou het er om gaan, dat de getallenlijn tot voorbeeld zou worden, model voor 'de wiskundige organisatie' van toepasselijke situaties, of gewoon om het denken te ondersteunen.

Tussenstand
Met het voorgaande is een impressie gegeven van de manier, waarop het concrete niveau voor de breuken in het onderwijsexperiment gevuld werd. Het opdienen en verdelen deed zich voor in allerlei verdeelprobleempjes van alledag en in 'De Smickel'. Daar lag ook het aangrijpingspunt voor het tafelschikken en verdelen. Tevens werd het opdienen en verdelen gesitueerd in situaties, die meer op het meten waren toegesneden.
Alom werden kiemen gelegd en middelen ontwikkeld om aan dit concrete niveau te ontgroeien ten gunste van wiskundig hogere, meer volwassen niveaus. Daarop richt zich de aandacht in het volgende deel van deze onderwijsimpressie. Dat daarbij nog gedurig toewending tot de concrete bronnen van het inzicht nodig zal blijven, spreekt vanzelf. Al was het maar op die geregelde momenten dat er 'even geoefend' wordt.

4.3.3 'Voortzetting breuken' of op weg naar hogere niveaus

Tafelschikken en verdelen in andere dan verdeelsituaties

> 'Maar de evenredigheden snap ik niet goed. De som van de termen van de eerste reden staat tot die van de tweede reden als de eerste term tot de derde term of als de tweede tot de vierde.
> Ik vraag het aan de juffrouw. Waarom is dat zo? En de juffrouw zegt: 'Kijk, Jetje, dat is zo, dat staat hier, zie je wel?' 'Maar', zeg ik .....
> Dan zwijg ik, kijk naar haar. Ze is rustig, zelfverzekerd en gaat door met corrigeren. En ze kan zo zelfverzekerd zijn, omdat ze niet begrijpt, dat er wat te begrijpen valt. Ik ga maar terug naar mijn bank en doe de sommetjes zoals zij het zegt. Maar ik zou het zo graag begrepen hebben.'
> Ted Bokhorst in: 'Het einde van de rondweg'.

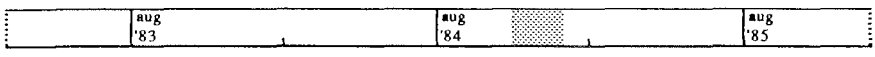
Leren relativeren

Bij de koffiekwestie werd al zoiets ervaren. Symbool en schema voor het tafelschikken werden breder inzetbaar. Zo zou het de aan 'Gooilust' ontlokte wiskundige middelen, met name de getallenlijn met dubbele schaal, eveneens moeten vergaan om toepasselijke situaties op hun relatieve verschillen te kunnen vergelijken en ordenen.[47] Door middel van gevarieerd probleemaanbod zal het inzicht in meer algemene bruikbaarheid van de toegepaste middelen dus kunnen groeien.
Symbolen, schema's en modellen zijn voor de meeste kinderen in eerste instantie sterk situatiegebonden. De banden van genoemde wiskundige werktuigen met hun situaties van oorsprong, zullen dus doorgesneden moeten worden.[48]
Wat het vergelijken van situaties aangaat richt de aandacht zich in het bijzonder op het zich op het standpunt van verhoudingen leren stellen en het beschouwen van uitkomsten, bijvoorbeeld verschillen, vanuit die gezichtshoek.
In deze onderwijsimpressie tot dusver is duidelijk gebleken, dat het innemen van een relatief standpunt niet vanzelf gaat, maar moet worden geleerd. Niet alleen de getallen zelf die in het spel zijn kunnen het handelen naar verhouding in de weg staan of verbloemen. Bovendien liggen ook hier de verborgen verleiders vanuit de natuurlijke getallen op de loer. Dit in tegenstelling tot verhoudingen bij gelijkvormigheden, die in de kijkwereld van kinderen zichtbaar voor het oprapen liggen en waar

dergelijke misvattingen niet zo voor de hand liggend zijn.
Zo hadden o.a. Sanny en Kevin de neiging de sterkte van koffie bij lastig vergelijkbare gevallen (bijvoorbeeld $\textcircled{4}_{5}$ en $\textcircled{6}_{8}$) toe te schrijven aan de grootte van (één van) de getallen en het sterkteverschil af te leiden uit het verschil in aantal schepjes. Ook het niet in acht nemen van verhoudingen, althans de neiging daartoe in bepaalde situaties, moet dus worden afgeleerd.[49]

Nadat het eerste schooljaar van experimenteren met de onderzoeksgroep erop zat – het was inmiddels zo'n dertig lessen later – lag het onderwijsleerproces meer dan twee maanden stil.
Een opfrisser in de vorm van een retentietoets leek op zijn plaats om het nodige zicht op de 'beginsituatie' te krijgen. Wat was er blijven hangen? Drie vraagstukken in de toets handelden over het vergelijken van verdelingssituaties en het op sterkte vergelijken van koffie.
Op sommige punten was er sprake van een zekere terugval, bijvoorbeeld bij het (partieel) samenstellen van meerdelige uitkomsten van verdelingen. Waar we eerst schreven, dat ieder nu vertrouwd was met halven, kwarten, achtsten, hun onderlinge equivalenties en verbanden, moesten we nu vaststellen, dat bij het samenstellen ervan de achtsten buiten spel gelaten werden.
Bijvoorbeeld $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ werd tot $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$ verkort en niet verder. Er kan dus in zekere zin ook gesproken worden van geleidelijke voortschrijding in het samenstellen, gekenmerkt door het inlijven van steeds minder gangbare breuken in de toegepaste verkortingen op grond van schuilnaamconstructies.
Behalve verdeel- en mengsituaties van uiteenlopende aard (verdelingen, koffiezetten, chocolademelk maken (lepeltjes (l) + kopjes (k), zoals $\textcircled{18}_{8}\ {}^{l}_{k}$ en $\textcircled{14}_{6}\ {}^{l}_{k}$ in verband met breuken in gemengde getallen), recepten samenstellen, werden op gezette tijden ook afstand-tijd vraagstukken aangepakt.
Bij de verwerking en bespreking ervan werden telkens accenten geplaatst bij de kwestie van het 'naar verhouding' beschouwen. Ook in ander verband trok de 'race van twee slakken' reeds de aandacht.[50]

Slakkengang
Twee slakken, Speedy en Fasty, houden een wedstrijd, een snelheidswedstrijd, dat spreekt vanzelf.
Na 8 minuten heeft Speedy 7 dm afgelegd, terwijl Fasty na 12 minuten de respectabele weg van 10 dm heeft gegleden.



- Welke slak is de 'master of speed'?
- Hoe zit het met het verschil in hun afstand-tijd overbrugging?

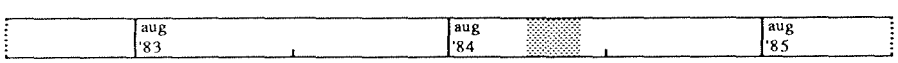
In een eerste oriëntatie op dit probleem leefden de kinderen zich in deze modelsituatie in om tot afspraken te komen als 'de slakken bewegen zich rechtlijnig, met constante snelheid' e.d.
Voor Speedy stond er daarom al snel op 't bord:
7 dm in 8 minuten
$3\frac{1}{2}$ dm in 4 minuten
$1\frac{3}{4}$ dm in 2 minuten

L.: Wie bedenkt de volgende?
Alwyn: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ dm in 1 minuut (redenering: de helft van 1, de helft van $\frac{1}{2}$ met nog $\frac{1}{4}$ over en dus nog $\frac{1}{8}$ als de helft daarvan).

Stef verkortte dit tot $\frac{7}{8}$.
Kevin vond dat hier een boom ook wel kon. Hij wist zijn goede idee jammer genoeg niet in een symbool te vangen.
Stef stelde $\textcircled{7}_{8}$ voor, waarop Frans stelde: het kan ook andersom $\textcircled{8}_{7}$. Waarop Stef, gedachtig aan 'zijn' $\frac{7}{8}$, zijn voorstel verdedigde: 'Maar zo is 't meer dan een hele.'

Door het symbool doet zich de kwestie hoe (op grond van welk standpunt) te normeren nadrukkelijk voor, verwijzend naar de gevallen die eventueel gemakkelijk vergelijkbaar zijn doordat ze in één component overeenstemmen. Bij andere notaties blijft deze kwestie meer op de achtergrond.

Het geschetste lesmoment was een mooie gelegenheid om beide relatieve standpunten opnieuw goed uit de verf te laten komen, te meer daar sommige kinderen zich in een ondoordacht moment nog wel eens vergisten en de getallen in het symbool verwisselden.
$\textcircled{7}_{8}$ *betekent* 7 dm in 8 minuten, dus iets minder dan 1 dm per minuut.
$\textcircled{8}_{7}$ *betekent* 8 minuten voor 7 dm, dus iets meer dan 1 minuut voor elke decimeter.
Hiermee is in feite nog eens één van de drijvende krachten achter het onderwijsleerproces geïllustreerd, namelijk steeds de zaak vanuit wisselende standpunten bekijken: van verdeling naar uitkomst, van uitkomst



naar verdeling, uitkomsten samenstellen, samengestelde uitkomsten uiteenleggen, vooruitgrijpen en omzien, enz.[51]

Prijsbewust

Neem het geval van de sinaasappels bij AH en de Vivo dat zich eerder had voorgedaan.[52]

AH: 12 sinaasappels voor $7\frac{1}{2}$ gulden, en

Vivo: 15 sinaasappels voor 9 gulden.

Hoe opgeschreven? $\frac{7\frac{1}{2}}{12}$ en $\frac{9}{15}$ of $\frac{12}{7\frac{1}{2}}$ en $\frac{15}{9}$?

Teruggaan naar de betekenis in de context brengt uitkomst.

$\frac{9}{15}$: de 9 gulden 'verdelen' over 15 sinaasappels, dus de sinaasappels kosten aanzienlijk minder dan 1 gulden per stuk.

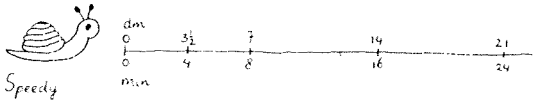
$\frac{15}{9}$: de 15 sinaasappels verdelen over 9 gulden, dus voor 1 gulden krijgt men meer dan 1 sinaasappel, doch minder dan 2, etc.[53]

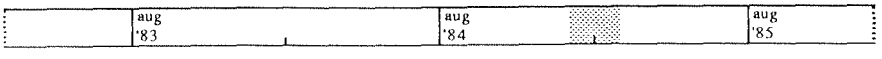
Ondanks het zich bij herhaling voordoen van dergelijke lesmomenten, zou het nog lang duren eer alle kinderen hun uitkomsten op grond van een dergelijk standpunt kleurden. Dit ondanks het feit dat de omzetting van $\frac{7}{8}$ en dergelijke in $\frac{\frac{7}{8}}{1}$ enz., hetzij door middel van het Franse verdelen, hetzij door toepassing van het algemene inzicht hoe een het-doet-er-niet-toe-wat voor situatie met zijn per eenheid genormeerde uitkomst te identificeren, in het algemeen probleemloos voltrokken werd.

Opnieuw slakken

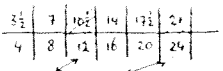
Hoe het ook zij, 7/8 dm per 1 minuut was voor wie dan ook geen punt van onbegrip meer en desondanks relateerde niemand van de elf leerlingen met een expliciet vermelde uitkomst zijn vastgestelde afstandsverschil aan de ervoor benodigde tijd, terwijl enkelen een conclusie op grond van de voortgebrachte tabellen achterwege lieten.[54]

Vanzelfsprekend werd er (steeds) op deze kwestie teruggekomen, telkens onder beklemtoning van het relatieve standpunt.

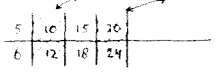




of met tabel:



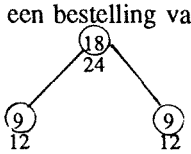
en voor Fasty:



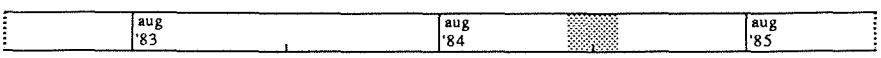
De leerlingen pikten meteen de volgende situaties als gemakkelijk vergelijkbaar er uit:

'omdat de minuten daar hetzelfde zijn'.

Bord: Speedy is
Groep: 1 dm sneller
Leraar: Nog niet helemaal goed en op het werkblad had ook niemand dit goed.
Enkelen: 1 dm is 24 minuten.
Dit werd vervolgens vrijwel moeiteloos uitgebouwd tot:
1 dm in 24 minuten sneller
$\frac{1}{2}$ dm in 12 minuten sneller
.....
$\frac{1}{24}$ dm in 1 minuut sneller
met daarbij de vaststelling, dat beide eerste regels rechtstreeks uit de geconstrueerde tabellen voortvloeiden. (Voor enkelen bleek het gemakkelijker de laatste regel rechtstreeks van de eerste af te leiden in plaats van uit '$\frac{1}{8}$ dm in 3 minuten' te concluderen.)
Voor alle zekerheid werd ook nog de les in herinnering geroepen, die zoveel conflictstof had doen opwaaien. Een schoolklas van 24 in de Smickel met een bestelling van 18:



en de vraag: 'Aan welk tafeltje zit je het liefst?'
En de reacties van de groep met overwegingen als de gezellige drukte of juist de rust, enzovoort. Alsook de afspraak om hiervan af te zien en alleen te letten op ieders portie, zoals al voorgetekend in $\frac{18}{24}$, dus op pizza's èn kinderen tegelijk; en later ook op schepjes èn kopjes, kilometers èn uren of decimeters èn minuten, enz. Tijdens dit intermezzo spreken de gezichten en de daaruit voortkomende geluiden boekdelen:
'Man, waar praat je nog over. Dat weten we allang!'



Schaatstocht

'Zelf doen', zo luidde steeds het devies. Bij de chocolademelkkwestie, die in deze tijd speelde was een nieuwe kans ($\binom{18}{8}$ en $\binom{14}{6}$). Slechts twee kinderen verwoordden hun uitkomsten relatief.

Stef, die zich inmiddels al had onderscheiden, was de één. Hij stelde: ' $\binom{14}{6}$ is 2 schepjes sterker op 24 kopjes dan $\binom{18}{8}$ '. De ander was Sheila, een nieuwkomertje dat sinds kort meedeed.[55] Zij had zich in die tijd geschaard bij de 'moeizamen'. Zij kwam tot de slotsom 'het is 4 op de 24 sterker' (rekenfoutje).[56]

Bij 'schaatsers' (Jan een tocht van 50 km in 4 uur en Frits 30 km in $2\frac{1}{2}$ uur. Wie reed het snelst? Verschil?) was er een nieuwe kans, die wederom gemist werd.

Tabeltoepassing was algemeen als ook het beantwoorden van de ordeningsvraag, zij het, dat dit kwalitatief gebeurde. 'Jan was sneller dan Frits' of absoluut kwantitatief: 'Jan was $\frac{1}{2}$ uur sneller' (bedoeld is: $\frac{1}{2}$ uur sneller over 150 km).

De nabespreking verliep weer vrijwel conflictloos, al moet gezegd, dat Henks denken weer even op de klassieke wijze ontspoorde. Op het bord groeiden de volgende tabellen:

Jan	km	50	
	u	4	

Frits	km	30	60
	u	$2\frac{1}{2}$	5

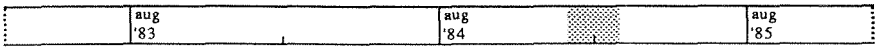
Waarop Henk z'n kans schoon zag. Hij stelde voor om bij Frits de afstand met 10 km en de tijd met 1 uur te verminderen. Daarmee gaf hij zijn denktrant achter zijn eerder geconstrueerde (schriftelijke) oplossing prijs, 'even snel, ieder was 4 uur bezig met 50 km, geen verschil.'

We besloten met elkaar Henks gedachtengang te volgen en die nog wat verder op zijn consequenties te bezien.

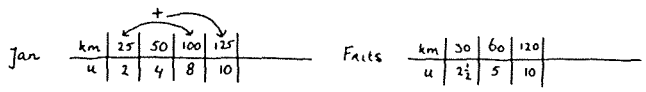
km	60	50	40	30	20	10	
u	5	4	3	2	1	?	

Ieder zag het al ruimschoots van te voren aankomen. Ook Henk! Wat je kreeg was absurd. 10 km tijdloos overbruggen was onmogelijk. Bovendien was $\left|\frac{30}{2}\right|$ in strijd met Frits' prestatie; èn, vanaf de andere kant doorredenerend op Henks suggestie zou er $\left|\frac{30}{3}\right|$ als conflicterend met $\left|\frac{30}{2\frac{1}{2}}\right|$ uitgekomen zijn.

Vervolgens hebben we nog eens met elkaar gezien, hoe het verschil op twee manieren beslist kon worden. Maar dan wel uitgaande van de gegeven prestaties van Jan en Frits, om de verhoudingsgetrouwheid geen geweld aan te doen, dus in tegenstelling tot Henks voorstel.



naar de vaststelling:
'Jan was $\frac{1}{2}$ uur sneller *op 150 km*' of beter 'Jan zou .....', of via

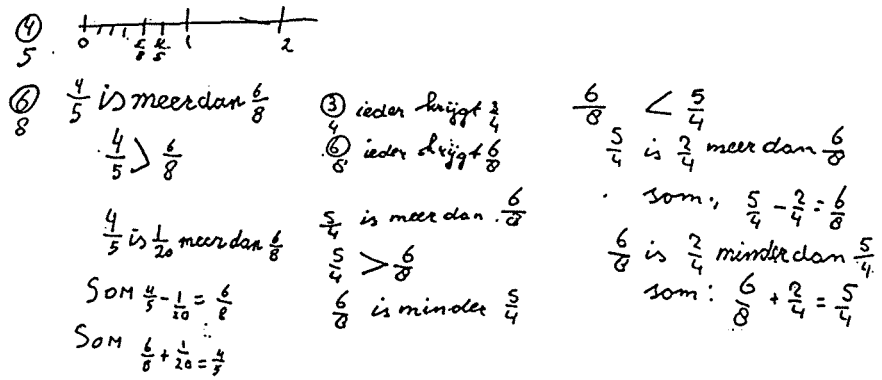


naar: Jan reed $12\frac{1}{2}$ km per uur en Frits 12 km per uur, dus Jan was $\frac{1}{2}$ km per uur sneller.

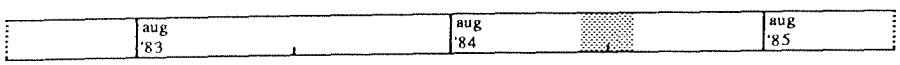
Eigen produkties op symbolisch niveau

Ordeningsmonografieën
Terwijl de exploratie van het verhoudingsgebied buiten de verdelingssituaties om nog maar nauwelijks was ingezet, was er binnen de lijn van de verdelingssituaties en koffiezetterijen vanzelfsprekend ook de nodige voortgang geboekt in het mathematiseringsproces. Van deze voortgang geven we een impressie.

Het vergelijken van tafeltjes, bijvoorbeeld ⑤ $\frac{5}{4}$ en ⑥ $\frac{6}{8}$ kan al gauw leiden tot monografische produkties als de volgende, al dan niet met denksteun van de getallenlijn.



werk van Henk werk van Carlien



In een heel wat later stadium worden dergelijke ordeningen niet meer – of hooguit mentaal door de leerlingen zelf – verbonden met concrete verdelingssituaties en krijgen ze het karakter van wat we in de globale schets van de leergang (§ 4.2.2) ordeningsmonografie hebben genoemd.

Bijvoorbeeld: stel er wordt beweerd: '$\frac{1}{2}$ is groter dan $\frac{1}{3}$' dan kan met schuilnaam als produktiemiddel worden beslist tot:

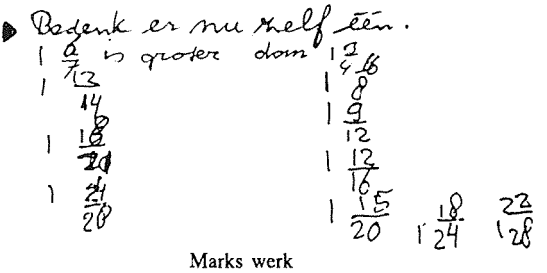
$\frac{2}{4}$ is groter dan $\frac{2}{6}$

$\frac{3}{6}$ is groter dan $\frac{2}{6}$.

(de bewering was dus juist) en op grond hiervan tot:

$\frac{3}{6}$ is $\frac{1}{6}$ meer dan $\frac{2}{6}$ $\quad \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$ $\quad \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$

$\frac{1}{2}$ is $\frac{1}{6}$ meer dan $\frac{1}{3}$ $\quad \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ $\quad \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$



Marks werk

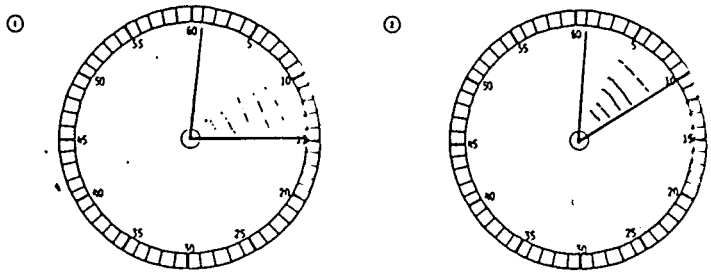
Opereren langs een omweg

Voorgaande activiteiten, hun aangrijpingspunt vindend in de realiteit, in realistische verschijnselen, brachten een schat aan materiaal voort: monografieën van uiteenlopende aard, diverse schematiseringsvormen en visuele modellen; dit alles op basis van symboolgebruik met een tweeledig doel, onderscheid van situatie en uitkomst gepaard aan hechte verbinding van beide.

Voor het opereren op symbolisch niveau zal uit deze rijkgevulde bron worden geput. Wat ligt immers meer voor de hand dan het materiaal dat

de leerlingen grotendeels zelf hebben voortgebracht voor verdergaande organisatie en wiskundige bewerking aan een nader onderzoek te onderwerpen. Niet alleen voor het opereren op symbolisch niveau geldt dit, maar ook het indirect bewerken, 'het opereren langs een omweg' zoals we het genoemd hebben. Ook daarvoor dienden zich al construerend en producerend allerlei mogelijkheden aan.
Reeds vanaf het moment dat aan een te verdelen 'iets' een waarde werd toegekend in de vorm van een gewicht, lengte, prijs of tijdsduur, kon worden nagegaan hoe de op grond van het verdelen voortgebrachte breuken hierop zouden inwerken. Betrof het de doorwerking van breuken in samenstellingen, dan kon het opereren langs een omweg op dat moment worden verwezenlijkt.

Diploma zwemmen
Neem bijvoorbeeld het diploma zwemmen van Anja Brokken en de eis van het watertrappen gedurende één minuut. Anja zag daar tegenop, omdat ze er aanvankelijk niet in slaagde haar wijsvingers zó lang boven water te houden.



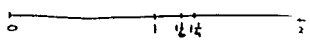
Dit had aanleiding gegeven tot allerlei problemen (werkblad)
Anke (1) en Erik (2) probeerden het watertrappen op de voorgeschreven manier zo lang mogelijk vol te houden. Wie kon het deze keer het langst? Verschil?

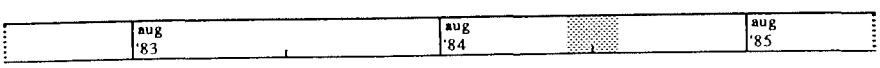
Anke hield het $1\frac{1}{4}$ minuut vol, dus

$1\frac{1}{4} \times 60 = 75$ seconden, en Erik

$1\frac{1}{6} \times 60 = 70$ seconden

Verschil 5 seconden





5 seconden past 12 keer in 1 minuut, het is het $\frac{1}{12}$ deel van 1 minuut, dus moet $1\frac{1}{4} - 1\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ zijn.
O.a. bij die gelegenheid gaven de kinderen er stuk voor stuk blijk van hun breukbegrip in meer algemene zin te kunnen toepassen. Ze waren het gebied van het herhaald halveren nu echt aan het ontgroeien.

Wat dit 'omslachtige' bewerken aangaat werd trouwens toch iedere gelegenheid aangegrepen.
Al in het stadium van het ordenen van situaties konden de leerlingen zich hiervan bedienen. Neem het geval dat voor 11 kinderen, gezeten aan 2 tafels, 7 pizza's werden besteld, en als volgt verdeeld: $\frac{4}{6}$ en $\frac{3}{5}$. Waar zou je het liefst willen zitten? Zal aan beide tafels gelijk verdeeld worden?[57]

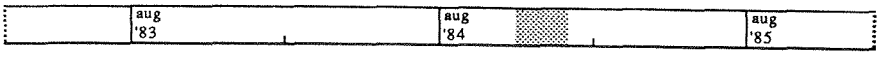
$\frac{4}{6} \rightarrow \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ aan de eerste tafel en $\frac{3}{5}$ aan de tweede. Wat is meer?
Wie meer krijgt zal ook meer moeten betalen. Wat kost een pizza? We bedenken met elkaar een 'handige' prijs, zodat het rekenen gemakkelijk valt. Laten we zeggen 6 gulden per pizza. Voor de linker tafel is de rekening 24 gulden, dus per persoon 4 gulden (ook: $\frac{2}{3} \times 6 = 4$). Voor de andere tafel is de rekening 18 gulden, *f* 3,60 per persoon ($\frac{3}{5} \times 6 = 3{,}60$). Omdat 4 gulden nu eenmaal meer is dan 3 gulden 60, moeten zij die links zitten meer gegeten hebben.

$$\text{dus } \frac{2}{3} > \frac{3}{5} \text{ of } \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$$

Aangezien het verschil in vertering 40 cent bedraagt, scheelt het $\frac{1}{15}$ pizza per persoon, want 40 cent 'past' 15 keer in 6 gulden, dus $\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{1}{15}$.
Met 3 dollar per pizza in een Amerikaans restaurant, zouden de rekeningen 12 en 9 dollar geweest zijn, resp. 2 en 1 dollar 80 per eter, dus met het zelfde resultaat $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$. In een Oostenrijks restaurant, 30 schillingen per pizza rekenend, zou het al niet anders geweest zijn.

Van alles wat
Getallenlijn prijsgeven

Bij dit rekenen met een omweg is er in het onderwijsleerproces van alles uitgeprobeerd. In het leergangoverzicht hebben we slechts de 'prijskoppeling' als benadering vermeld, omdat dit in het algemeen de voorkeur van de kinderen had, zeker bij het optellen en aftrekken van breuken.



Het laatste woord is hierover echter nog niet te zeggen, omdat zich ook andere voorkeuren manifesteerden, terwijl in sommige gevallen de modelkeuze de leerling onverschillig liet.

Eén en ander kan het gevolg geweest zijn van het (te) late stadium in het onderwijsleerproces, waarin meer systematische aandacht werd besteed aan deze wijze van opereren. Een kwestie die er in ieder geval uitsprong, was de verleidelijkheid van een additief standpunt.

Wie $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{4}$ langs een omweg moet sommeren, denkt bij $\frac{2}{3}$ aan een handige prijs van 3 gulden (eventueel 6, 9, ...) en bij $\frac{3}{4}$ aan 4, (8, 12, ...) gulden. 'Dus' voor de gevraagde samenstelling aan 3 + 4 = 7 gulden.

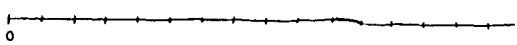
Bij proberen werd zulk een voorkeur dan al gauw ontmaskerd als onhandig. Geleidelijk aan kon zich het gevoel voor een toepasselijker multiplicatief standpunt ontwikkelen bij de kinderen.

Helga liet zien hoe je dit handig zou kunnen aanpakken. Bij '$\frac{3}{4} + \frac{1}{5}$' ging zij als volgt te werk: 'Ik nam eerst 15, dat zit in de tafel van 5, maar dat ging niet. En toen 20 en dat ging wel.'

Zij doorzag, dat zij zich op multiplicatief standpunt moest stellen.

Clara en Marja hadden een uitgesproken voorkeur voor deze handige prijsbenadering ten nadele van toepassing van de getallenlijn.

Bijvoorbeeld $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$. Waar zet je 1 op de getallenlijn, zodat je $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{4}$ er ook zonder verder verdelen op kunt zetten?



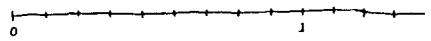
Zoek daarna uit hoeveel $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ is.

$\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ deden zij via een handige pizzaprijs, waarbij Marja even zwichtte voor 5 gulden als prijs.

Bij $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$ kozen zij beiden vol overtuiging voor de 'prijsmethode'.

Henk was kennelijk al zó ver, dat hij aan de handige prijs, noch aan de getallenlijn echt behoefte leek te hebben. Bij $\frac{3}{5} + \frac{1}{2}$, die hij met 'ondersteuning' van de getallenlijn oploste, besliste hij al op het eerste gezicht: 'Het is $\frac{\frac{1}{2}}{5}$ meer dan een hele, want $\frac{1}{2}$ is gelijk aan $\frac{2\frac{1}{2}}{5}$. (en $\frac{1}{2}$ met z'n vijven is 1 met z'n tienen, dus $\frac{1}{10}$ meer dan 1 hele). Het is $1\frac{1}{10}$'.

Toen hij er vervolgens zelf eentje bedacht ($\frac{5}{9} + \frac{2}{3}$), plaatste hij voor de vorm de eenheid op de reeds onderverdeelde getallenlijn na 9 stukjes:



Vervolgens bepaalde hij de uitkomst op grond van schuilnaamtoepassing: $\frac{5}{9} + \frac{2}{3} = \frac{5}{9} + \frac{6}{9} = \frac{11}{9} = 1\frac{2}{9}$ en liet hij de getallenlijn verder ongemoeid.

Vermenigvuldigen

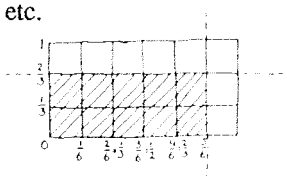
Op overeenkomstige wijze is er gewerkt met het vermenigvuldigen, niet alleen met de methode van de prijskoppeling, maar ook via het handig kiezen van een passende chocoladetablet in blokjes onderverdeeld.

Ook op dit punt beschikken we slechts over aanwijzingen in een bepaalde richting.

In het stadium van het onderwijsleerproces waarin het verdelen nog volop in zwang is, ook het verdelen van repen met variabel aantal blokjes, wordt de aandacht gericht op handige verdeelmogelijkheden, net zoals dit bij de 60 minuten in een uur of seconden per minuut gebeurd was.

Bijvoorbeeld:

Onderzoek met hoevelen je deze chocoladetablet gemakkelijk kunt verdelen, etc.



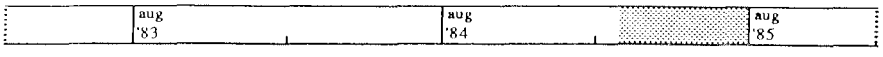
Vervolgens worden brokken, die ontstaan zijn door breken (in twee richtingen, zie figuur) beschreven met een vermenigvuldiging: $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6}$ reep. (Eerst $\frac{5}{6}$ van (×) de reep en vervolgens daarvan het $\frac{2}{3}$ deel, dus $\frac{2}{3}$ van (×) $\frac{5}{6}$ van (×) de reep, met passende uitkomst).

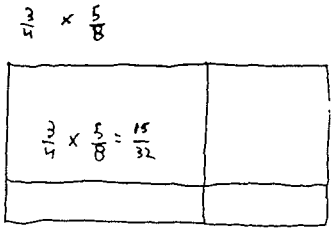
Tenslotte, zoals steeds, vindt omkering van de kwestie plaats.

Bedenk een handige reep bij $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8}$.

Hoeveel is $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8}$? (En: Hoeveel is $\frac{15}{32}$ van de reep, die jij bedacht?)

Frans, die eerst uitkomsten van produkten via prijskoppeling bepaald had en vervolgens de repenmethode onderzocht (op ruitjespapier) koos zonder aarzelen voor een reep van 4 bij 8 blokjes.[58]



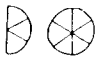


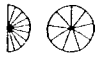
Hij 'brak' in beide richtingen resp. $\frac{3}{4}$ en $\frac{5}{8}$ af, en passant opmerkend, dat hij dit gemakkelijker vond dan het rekenen met een handige prijs, en bepaalde $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8}$ op $\frac{15}{32}$, omdat het afgezonderde reepdeel 15 van de 32 blokjes van de hele reep bevatte.

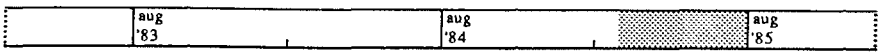
Delen
Voor het delen van breuken kan een overeenkomstige strategie gevolgd worden. Toepassing van de verhoudingstabel lijkt eveneens voor de hand te liggen, wat Henk spontaan liet zien in de afsluitende toets (zie de hoofdstukken 5 en 7).

Behalve het indirect uitvoeren van de bewerkingen zoals geschetst, zijn er ook allerlei andere – ook al klinkt dit wat tegenstrijdig – meer directe vormen van opereren langs een omweg beproefd.
Ten eerste: bij het globaal verdelen werd ieders portie eerst in het materiaal geconstrueerd en vervolgens met de beschikbare taalmiddelen beschreven en gesymboliseerd.
Bijvoorbeeld: $\textcircled{6}_{9}$ gebarend schatten op 'ieder meer dan een half', daarna aan ieder $\frac{1}{2}$ uitdelen en nagaan hoe dit zou uitpakken voor de rest.

ieder $\frac{1}{2}$

over ; vervolgens of  ieder nog $\frac{1}{6}$, dus ieder $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{6}(\frac{1}{2} + \frac{1}{6})$

of  ieder nog $\frac{1}{9}$ en $\frac{1}{18}$, dus ieder $\frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$.
Daarna, werkend met de uitkomst in symboolvorm, het bijpassende 'tafeltje' terugvinden en dus de uitkomst verifiëren.[59]



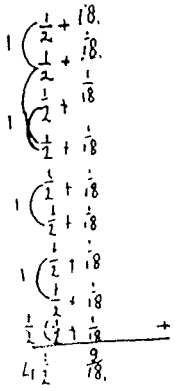
Bijvoorbeeld: Ieder krijgt $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$. Er zijn 9 zulke porties, dus:

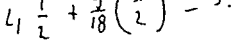
$\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$
. .
. .
. .
. .
. .
. .
$\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

9 keer

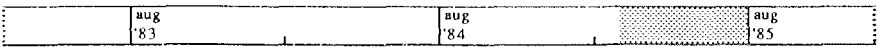
Handig samennemen
(6 maal en 3 maal):
$3 + 1 = 4$ en $1\frac{1}{2} + \frac{3}{6} = 2$, dus
6 voor 9, $\frac{6}{9} \rightarrow \frac{6}{9}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{6}{9}$

Idem met $\frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$ of eventuele andere uitkomsten. Merk op, hoe in deze controle activiteit allerlei verkortingen kunnen worden toegepast.





Ten tweede: Later kan een vraag tot samenstelling, zoals $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ in eerste instantie als een vraag tot reconstructie van de situatie worden gezien.
$\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ wordt dus opgevat als iemands portie bij een verdeling.
In plaats van de vraag naar een handige prijs of een handige eenheid op de getallenlijn, kan de aandacht zich dan ook richten op: hoeveel verdelers zaten aan tafel?
Stel, dat een leerling toegeeft aan de eerder opgemerkte verleiding van het optellen ($\frac{1}{2}$ herinnert aan 2 verdelers, $\frac{1}{6}$ aan 6, samen dus aan 8 verdelers) en besluit tot 8 verdelers. Met dit gegeven vindt reconstructie van de situatie plaats als bij het globaal verdelen:



$\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$
. .
. .
. .
. .
$\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

8 keer

$8 \times \frac{1}{2} = 4$

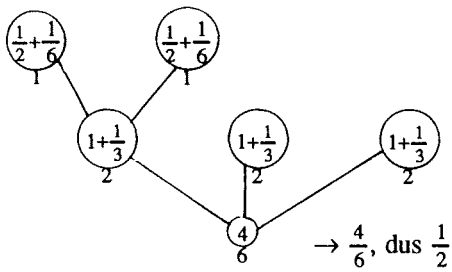
$8 \times \frac{1}{6} = \frac{8}{6} = 1\frac{2}{6} = 1\frac{1}{3}$

Aldus blijkt dat het nog niet mooi uitkomt. Met zo'n portie van $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ erbij is dit wel het geval: $4\frac{1}{2} + 1\frac{3}{6} = 6$. Het tafeltje (6) was dus in het geding met $\frac{6}{9}$ als portie voor elk, bijgevolg moet $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ aan $\frac{6}{9}$ gelijk zijn.

Tafeltjessymbool en schema kunnen voor dergelijke (re)constructies eveneens worden ingezet.

($\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$) 1

$\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ als portie op 'een tafeltje van één'. Hoe was dit toen het verdelen begon?



$\rightarrow \frac{4}{6}$, dus $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$ $(= \frac{2}{3})$

Iemand, die $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ krijgt kan ook aan twee verdelingen hebben meegedaan; eerst aan het ene tafeltje $\frac{1}{2}$ gekregen en daarna aan nog een tafeltje $\frac{1}{6}$.

$\frac{1}{2} \rightarrow (1)_2, (2)_4, (3)_6, \ldots\ldots$; $(3)_6 \rightarrow \frac{3}{6}$

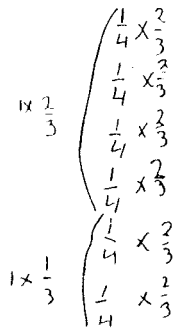
samen $\frac{4}{6}$

$\frac{1}{6} \rightarrow (1)_6, (2)_{12}, \ldots\ldots$; $(1)_6 \rightarrow \frac{1}{6}$

De *betekenis* verhindert het bij elkaar schuiven van $\frac{3}{6}$ en $\frac{1}{6}$ tot $\frac{4}{12}$, want daar is maar een portie van $\frac{1}{3}$ voor ieder beschikbaar en dat is al minder dan $\frac{1}{2}$, dus zeker minder dan $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.
(Over het verdubbelen van onze meedeler in het vraagstuk dan nog maar gezwegen.)[60]

> De geschetste reconstructieactiviteit heeft in feite het karakter van opereren langs een omweg op symbolisch niveau. Het gevraagde aantal verdelers speelt de rol van gezochte prijs, overigens een nauw betrokken prijs, besloten in de gegeven noemers. Het is dus anders dan in het geval een gezochte prijs als een extern gegeven moet worden toegevoegd.
> Overigens kan het aantal verdelers in eerste instantie betrekkelijk impliciet blijven. Wie er zich niet al te druk om maakt, doch zijn weg zoekt in het herhalen van de portie en het handig samenstellen, komt een heel eind.

Op die manier onderzocht Stef $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$:



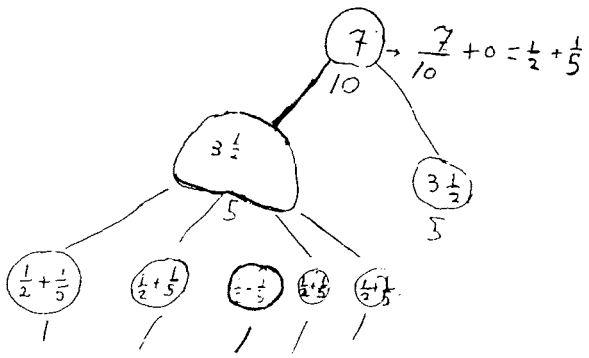
Na 6 porties van $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ kwam hij op 1 hele portie uit, dus ieder $\frac{1}{6}$.

O: Had je dit ook direct kunnen zien?

S: Ja, $\frac{2}{3}$ eerst door de helft, dan heb je $\frac{1}{3}$. Dan nog een keer door de helft dan heb je $\frac{1}{6}$.

Dergelijk opereren nabij het bewerken op symbolisch niveau kan op een overtuigende manier door de trits situatie-symbool-schema van het tafelschikken worden ondersteund. Dit bleek uit het feit, dat 13 van de toen 15 kinderen *spontaan* op het idee kwamen voor vraagstukken van het geschetste type een boom van onderaf op te zetten. Blijft staan dat binnen het op te zetten schema op symbolisch niveau geopereerd moet worden. Het valt niet meer te verwachten dat de kinderen hun gedurige denken in tafelschikkingen zouden kunnen onderbreken met het denken in verdelingen en uitkomsten om het symbolische opereren te ondersteunen. Ter illustratie een ervaring.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$. Clara denkt aan 2 en aan 5, dus aan 7 verdelers in totaal. Zij wil eerst vijf tafeltjes $\underset{1}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)}$ bij elkaar zetten, omdat zij $\frac{1}{5}$ het moeilijkst vindt.



Met het tussenresultaat $\underset{5}{3\frac{1}{2}}$ was zij tevreden.

Er zijn nu meer kinderen, dus ..... Maar dat stuk van $\frac{1}{2}$ dan? Clara besluit tot nog een tafel $\underset{5}{3\frac{1}{2}}$, beseffend, dat deze eveneens wordt 'gedragen' door vijf tafeltjes $\underset{1}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)}$; dus in totaal zijn er geen zeven maar tien!

Voor $\underset{10}{(7)}$ werd tot ieder $\frac{7}{10}$ beslist; dat zij geen verschil ziet met $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ weerspiegelt haar $\frac{7}{10} + 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$.

Eigen produkties op symbolisch niveau

Symbolisch, objectief en subjectief

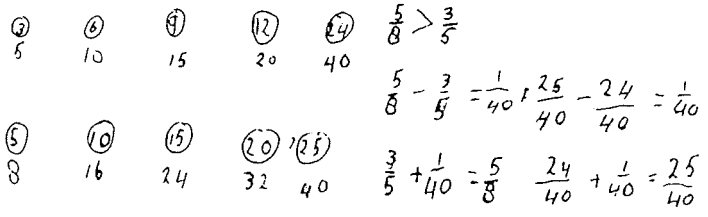
Opereren op symbolisch niveau, daartoe zijn de kinderen al gauw geneigd, zoals uit het gesignaleerde verschijnsel van de natuurlijke getalverleiders blijkt. Vooral aanvankelijk dienen de te ondernemen activiteiten op dit punt dus terughoudend te zijn. Dit betekent natuurlijk geenszins, dat het juiste opereren op symbolisch niveau in subjectieve zin niet veel vroeger zijn intrede in het leerproces zou kunnen doen – en in feite ook doet – dan in deze onderwijsbeschrijving wordt weergegeven.

Stef bijvoorbeeld beheerste al spoedig na de aanvang van het experiment (na minder dan 10 lessen) het herhaald halveren al in symboolvorm en een voorgelegd vraagstuk als '$\frac{5}{8} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4}$. Goed of fout?' wist hij te ontkrachten met een redenering, die puur aan de symbolen voltrokken werd, namelijk: '$\frac{4}{8} = \frac{2}{4}$, dan blijft er van $\frac{5}{8} - \frac{3}{4}$ nog $\frac{1}{8} - \frac{1}{4}$ over en dat klopt niet, want $\frac{1}{4}$ is groter dan $\frac{1}{8}$ en dus kan er geen $\frac{2}{4}$ uitkomen.'

Desgevraagd bleek Stef grote moeite te hebben met het bedenken van de tot de onjuiste uitkomst voerende redenering. Dit gold trouwens alle kinderen die vanaf het begin geen of weinig IN-distractorfouten maakten.

Dit is ook wel verklaarbaar. Immers, voor wie niet op die manier redeneert, is het minder eenvoudig een dergelijke denktrant te achterhalen, dan voor degenen die dit nog wel doen.

Na minder dan 20 lessen kon Stef ook al situaties als $\frac{3}{5}$ en $\frac{5}{8}$ vergelijken op louter numerieke overwegingen en ten aanzien van het verschil een beslissing nemen.



Deze voorbeelden en de hardnekkigheid van IN-distractorfouten in het werk van anderen weerspiegelen de omvang van de onderlinge verschillen die in de onderzoeksgroep op dit punt ontstonden. Vandaar dat we de start van het bewerken van breuken in symbolische vorm afhankelijk

gesteld hebben van de vorderingen in het mathematiseringsproces van de groep als geheel. Desondanks moeten we stellen, dat er enkele kinderen waren, die aan dergelijk opereren in subjectieve zin niet toekwamen.
Waarom dan toch in objectieve zin hiernaar gestreefd? Wel, de kinderen hebben het materiaal, waaraan op symbolisch niveau wordt gewerkt zelf voortgebracht. Voor hen, die dit nodig (blijven) hebben, is het teruggaan naar het concrete *op eigen initiatief* steeds mogelijk. De activiteiten op dit punt trekken in het onderwijsleerproces gelijk op met een gedurige onderstroom van toepassingsvraagstukken en komen deels daaruit voort, zoals we nog zullen laten zien.

Monografieënschriftjes

Al eerder (p.82) maakten we melding van een gemiste kans, door niet vanaf het begin het door de kinderen voortgebrachte breukenmateriaal te laten vastleggen en bewaren. Achteraf bezien had dit moeten gebeuren om recht te doen aan de gedachte, dat het om het materiaal gaat dat de leerlingen in hun constructieve onderzoek hebben voortgebracht (§ 4.1).
Vanaf zeker ogenblik is dit wel gebeurd en werd een apart schrift aangelegd, o.a. bedoeld voor het bijhouden van monografieën, het 'O. en O.-schrift' voor onderzoek en ontdekkingen.

Monografieën maken

Er werden weer eens herinneringen opgehaald aan die oude, vertrouwde smickeltijd, waarin de verdeelsituatie '3 pannekoeken verdelen met 4 kinderen' een heel 'verhaal' voor $\frac{3}{4}$ had voortgebracht.

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

etc.

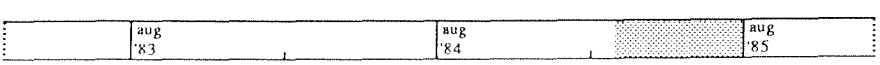
met daarin $\frac{1}{2}$ als 'schuilnaam' voor $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ en omgekeerd.

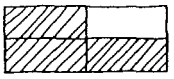
Het 'omgekeerd', daarop kwam het aan, want behalve iedere uitdrukking steeds efficiënt te verkorten tot $\frac{3}{4}$, kon omgekeerd worden gezien, hoe $\frac{3}{4}$ op uiteenlopende wijzen *uiteengelegd* zou kunnen worden in $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, $1 - \frac{1}{4}$ enz.

Frans, en ook anderen, hadden trouwens steeds al de suggestie gedaan kwarten in schuilnamen met grotere getallen om te zetten, bijvoorbeeld:

$\frac{3}{4} = 1 - \frac{2}{8}$ in plaats van $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$.

Om de herkomst van dergelijk materiaal nog eens goed te benadrukken, wordt $\frac{3}{4}$ nogmaals gevarieerd gevisualiseerd (klok, rechthoek, strook,



getallenlijn).
Carlien suggereerde  voor $\frac{3}{4}$.

Ieder vindt dit een goede voorstelling, omdat allerlei regels uit de monografie voor $\frac{3}{4}$ er gemakkelijk uit afgelezen kunnen worden.

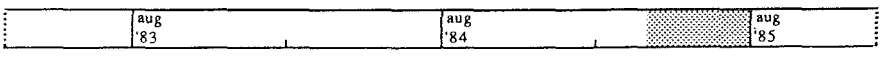
De groep gaat hierna zelf aan de slag. 'Opstellen' maken voor $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ en $1\frac{1}{4}$, elk op een aparte bladzijde, zo luidt de opdracht. Niet al te moeilijk dus om te beginnen. Denk om het gebruik van schuilnamen! Al werkend wordt al ras ontdekt, dat er allerlei produktiemethoden zijn.
'Schuilnaam' is er zo eentje met onbegrensde mogelijkheden, maar er zijn er meer. Wanneer bijvoorbeeld met uiteenleggingen voor $1\frac{1}{4}$ wordt begonnen met een groter getal dan $1\frac{1}{4}$, 'krijg je een min-som', aldus Marja.

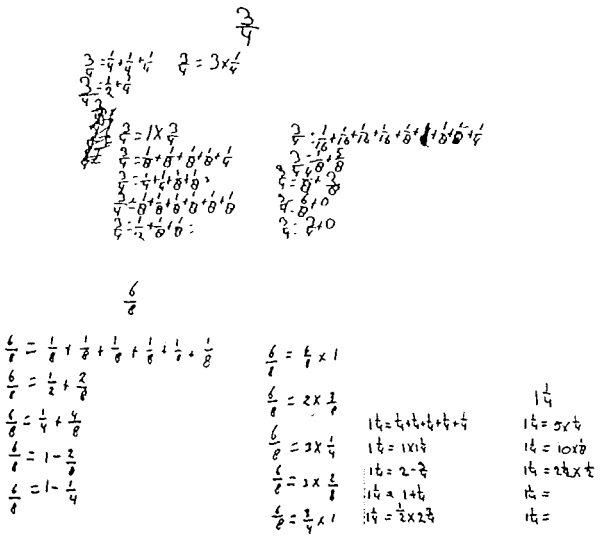
Voorlopig wordt nog maar niet te veel ruchtbaarheid aan dergelijke slimmigheden gegeven. De kinderen moeten eerst zelf maar eens laten zien hoe ze dergelijk monografisch materiaal zullen produceren en organiseren. De opdracht was een 'opstel' van minstens tien regels.
Er werd goed en geinspireerd aan gewerkt. Met gemengde gevoelens zijn later de resultaten besproken. Vrijwel niemand had 'overwerk' gedaan, terwijl daartoe toch gerede aanleiding bestond en dit bovendien dikwijls wèl gebeurde. Bovendien was er sprake van de nodige eentonigheid in het werk van sommigen (drijven op eenzelfde produktiemethode). Frans grijnsde bij die vaststelling. Hij besefte haarscherp, dat de gemengde gevoelens ook hem betroffen, getuige zijn:

$$1\tfrac{1}{4} = 2 - \tfrac{3}{4}$$
$$= 3 - 1\tfrac{3}{4}$$
$$= 4 - 2\tfrac{3}{4}$$

Niet, dat hij bereid was, zich hiervoor in enig boetekleed te steken. Hij had immers verband gelegd tussen de 'opstellen' voor $\frac{3}{4}$ en $1\frac{1}{4}$?

De bewerkingen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen kwamen in ieders werk voor. Het was alleen Alwyn, die zich ook aan het delen waagde. Door de keuze van $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ en $1\frac{1}{4}$ lag het voor de hand, dat de breuken van het herhaalde halveren de overhand zouden hebben. Allen pasten schuilnamen als produktiemethode toe, zij het in sommige gevallen sporadisch. Behalve de systematiek van Frans werd de commutatieve eigenschap nogal eens toegepast om 'nieuwe' sommen te genereren. Om een indruk te geven van deze eerste monografische produktie, nemen we achtereenvolgens werk op van Marja, Henk en Helga.





In de nabespreking wordt het accent gelegd op meer systematische toepassing van schuilnamen.

Op het bord prijkt $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$.

L: Als je nu weet, dat $\frac{1}{4}$ een schuilnaam is, wat had er dan ook kunnen staan?

Zo ook met $\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$.

Met inbreng van Clara, Margreet, Kevin, Frans, Stef en noem maar op worden de volgende produkties tot stand gebracht.

$$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$
$$= 1 - \frac{2}{8}$$
$$= \frac{2}{2} - \frac{2}{8}$$
$$= \frac{8}{8} - \frac{2}{8}$$
$$= \frac{16}{16} - \frac{4}{16}$$

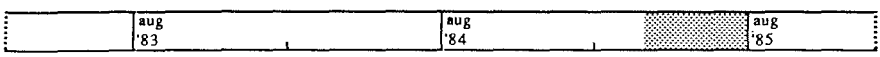
en

$$\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$$
$$= 3 \times \frac{2}{8}$$
$$= \frac{24}{8} \times \frac{2}{8}$$, deze laatste op voorstel van Kevin!

Door de bewerking te variëren en de produktiemethode even vast te houden, kan de eerder gekritiseerde eentonigheid in het werk wat doorbroken worden.

Drie nieuwe 'titels' volgen, namelijk $\frac{5}{6}$, $\frac{10}{12}$ en $1\frac{1}{3}$, met nog steeds als enige boodschap erbij: 'Gebruik zoveel mogelijk schuilnamen.'

Tijdens de produktie van de monografietjes neemt de rust al maar toe. Dit werk houdt de kinderen in zijn ban.



Er ontstond een veelzijdig beeld van de opgegeven breuken. Dit kwam mede door het verfijnder toepassen van bepaalde produktiemethoden. Schuilnamen werden tweezijdig toegepast, bijvoorbeeld $\frac{5}{6} = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6}$ vervangen door $\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, maar ook omgekeerd, bijvoorbeeld: $\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ vervangen door $\frac{5}{6} = \frac{4}{12} + \frac{1}{3} + \frac{4}{24}$.
Zes kinderen pasten de schuilnamen aldus tweezijdig toe en vier eenzijdig. Behalve de commutatieve eigenschap werd nu ook de distributieve wet benut. Zo bracht Mark moeiteloos 8 sommen van het type $1\frac{1}{3} = 10 \times 1\frac{1}{3} - 9 \times 1\frac{1}{3}$ voort.
Ook het 'sleutelen' aan produkten door middel van het halveren en verdubbelen van de factoren deed zich voor, zij het nog incidenteel. Met name Helga bleek hiervoor gevoelig te zijn. Onder het hoofd '$\frac{5}{6}$' bedacht zij zowel $5 \times \frac{1}{6}$ als $2\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$.
Weer anderen bleken nog moeite te hebben met de omkering van samenstelling naar uiteenlegging. Zo schreef Margreet nog consequent:
$\frac{12}{12} - \frac{2}{12} = \frac{10}{12}$
$\frac{6}{12} + \frac{4}{12} = \frac{10}{12}$ etc.[61]

De collectieve produktie voor $\frac{5}{6}$ was opnieuw uitgangspunt voor een nauwgezette beschouwing van handige werkwijzen om monografieën voort te brengen.

Marja bedacht : $\frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$.

Margreet : $\frac{5}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$.

Frans : $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

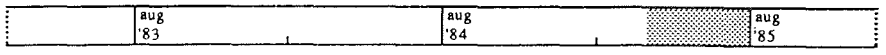
Helga bedacht : $\frac{5}{6} = 2\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$.

Marja (en Helga) : $\frac{5}{6} = 5 \times \frac{1}{6}$.

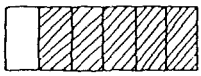
Clara : $\frac{5}{6} = 10 \times \frac{1}{12}$.

Stef : $\frac{5}{6} = 20 \times \frac{1}{24}$, etc.

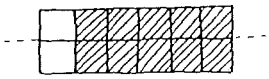
Hoe het één met het ander in verband te brengen, of beter eruit af te leiden?
L: (bord) $\textcircled{\frac{5}{6}}$. Wat krijgt ieder?
Lln: $\frac{5}{6}$.



Tekening?
Marja:



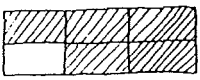
Wanneer het een gewone reep was?
Nanja:



Aan de laatste tekening is onmiddellijk te zien, dat $\frac{5}{6}$ ergens schuilnaam voor is.

Kevin (en anderen): $\frac{10}{12}$. Wanneer $\frac{5}{6}$ de uitkomst van een 'Franse verdeling' zou zijn, wat dan? Marja (vanzelf): $\frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$.

Bord:



Dan gebaart de leraar hoe de losse zesden in twee groepjes kunnen worden samengenomen.

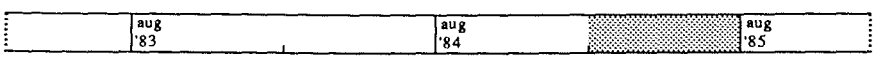
$\frac{5}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$ en door overgang op schuilnamen $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Aldus ontstonden de regels van Margreet en Frans uit die van Marja, terwijl haar eerste regel aan het 'Franse verdelen' ontsproot.

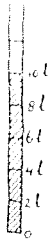
Ziedaar hoe langzaam maar zeker systeem gebracht werd in het voortbrengen van monografieën. De groepsproduktie en de toegepaste methoden stonden daarbij in toenemende mate model voor de individuele produktie van nieuwe monografieën.[62]

Intermezzo: toepassingen

De reeds genoemde, gedurige onderstroom van toepassingsvraagstukken diende een tweeledig doel, namelijk ter toepassing van het geleerde en startpunt zijn van het opereren op symbolisch niveau. Het laatste was het geval met de zogenaamde verkeerslichtsommen, waarvan later een voorbeeld volgt. De toepassingsvraagstukken hadden betrekking op het verdelen van van-alles-en-nog wat, het beschrijven van zulke verdelingen, de nawerking ervan in gewichten en prijzen inbegrepen, het vergelijken van situaties op relatieve verschillen, het samenstellen van kookrecepten uit gegeven recepten, oppervlaktevraagstukken enz. Eéntje willen we eruit lichten vanwege de belangwekkende opbrengst aan aanpakken van de leerlingen, waarin zich het gedifferentieerde onderwijsaanbod weerspiegelde. Dit bood kennelijk 'voor elck wat wils', getuige de resultaten.[63]



Vulmachine



Het ging om het volgende vraagstuk.
In een zuivelfabriek worden bekertjes met room gevuld met een vulmachine. Het kijkglas toont, dat er nog 10 l room in de machine zit.

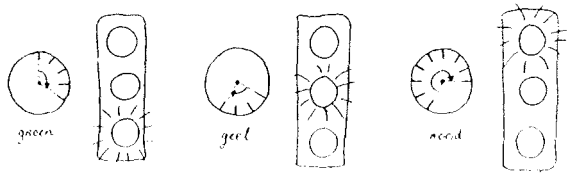
► Hoeveel bekertjes van $\frac{1}{4}$ l kan de machine nog vullen?

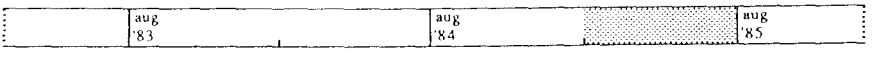
De volgende typen oplossingen konden worden opgetekend.

— het uitvoeren van een bewerking; vermenigvuldigen (Henk, Sheila), delen (Stef);
— het beschrijven van een oplossing in een verhaal (Clara, Nanja); Nanja bouwt haar uitkomst op via 1 l (4 bekertjes) en dan een 'nulletje erachter';
— het samenstellen van een verhoudingstabel voor liters gekoppeld aan bekers (Frans, Carlien);
— de gegeven peilschaal tweeschalig maken (Kevin, Michael);
— het maken van een verdeeltekening met circulaire eenheden (Marja, Margreet);
— het slechts noteren van een uitkomst (Helga, Alwyn, Mark).

Alleen Clara en Sheila maakten een foutje bij hun stapsgewijze toewerking naar hun uitkomst.

Verkeerslichten
Via o.a. de verkeerslichtsommen verschaften de leerlingen zich ook weer toegang tot het opereren op symbolisch niveau. In het diploma zwemmen van Anja Brokken – de één minuut watertrappen – had al een aangrijpingspunt gelegen.
Voorbeeld:



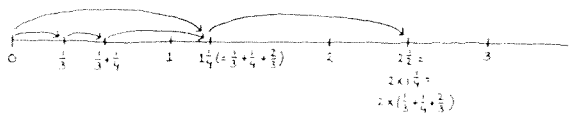


Deze chronometers vertellen een verhaal over het groen, geel en rood van een verkeerslicht.

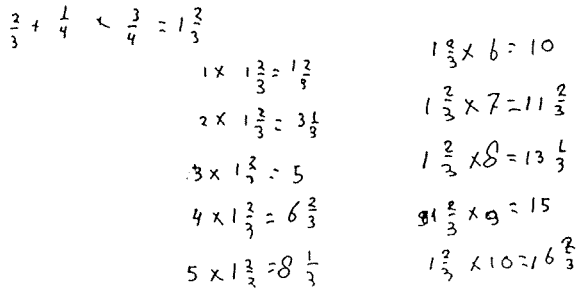
- Welk verhaal? .....
- Laat eens zien op deze chrono's hoe het verhaal verder gaat.

- Hoe lang duurt één keer groen, geel en rood samen? En twee?
- Wat heeft dit verkeerslicht met de tafel van $1\frac{1}{4}$ te maken?

Zo'n vraagstuk kon nogal wat opleveren, zoals werken met sprongen op de getallenlijn:



of werken op symbolisch niveau.



Zoals Clara's kijk op het verkeerslicht $\frac{2}{3}$ minuut groen, $\frac{1}{4}$ minuut geel en $\frac{3}{4}$ minuut rood laat zien.
Zou de vraag: hoe zit het nu met de kleurtijden voor het verkeer uit de dwarsrichting? beantwoord kunnen worden met: 'Laat rood en groen gewoon stuivertje wisselen? Of zou er een veiligheidsmarge zijn, met bijvoorbeeld de roodtijd in één richting van gelijke duur als de groen- en geeltijd in de andere richting?
Het verkeerslicht ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$) begint 's morgens om 7 uur zijn dienst. Het is nu acht uur.

- Hoe vaak heeft het op groen gestaan? Hoe lang is dat bij elkaar?
  $60 : 1\frac{1}{4} = 48$, dus 48 keer en $48 \times \frac{1}{3}$ minuten = 16 minuten.'

Weer terug naar het symbolisch niveau

In welk 'opstel' kan $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ gestaan hebben?

Een dergelijke vraag kan de hele context van de produktie van monografieën met alle middelen vandien, zoals schuilnaamtoepassing, oproepen.
Anders wordt dit, wanneer opgaven 'kaal' worden opgevoerd.
Het doen van een schatting kan dan een hulpmiddel zijn voor de leerling zich de opgave te realiseren.

Bijvoorbeeld: $2\frac{1}{2} : \frac{1}{3} =$

Het is al heel wat, wanneer hiervoor een schatting wordt gegeven groter dan het deeltal.[64] Zo'n schatting lukt soms alleen maar voor wie nog enige betekenis aan de opgave weet te geven. Betekenis achter zo'n opgave moeten denken is een goed middel gebleken om zich de opgave te realiseren.
Henk probeerde een verhaal met dropveters:

H: 'Ik heb $2\frac{1}{2}$ dropveter en 3 kinderen die verdelen.'

Oh, nee. Er staat geen drie. Wacht, ik geef ieder $\frac{1}{3}$.

L: Wat zoek je dan uit?
H: Hoeveel stukjes!

Dan is het niet moeilijk meer de opgave te visualiseren, een schatting te doen of deze bij te stellen en de precieze uitkomst te bepalen.

Het duistere 'vermenigvuldigen met het omgekeerde' is hierbij helemaal niet nodig. Ook anderen gedroegen zich als Henk.

> De opzet was overigens terug te gaan naar het symbolische niveau van bewerken. Dit blijkt nu een vlucht in schatten en afpassen te zijn. Zulks hangt samen met wat eerder over de plaats van het delen in de deelleergang werd vastgesteld. Tevens blijkt, dat opereren op symbolisch niveau zich niet zo maar laat afdwingen in het onderwijsleerproces, doch afgestemd zal moeten zijn op wat zich spontaan aldaar manifesteert op dit punt.
> Vergeleken met de prestaties van de meeste leerlingen bij het vermenigvuldigen, ook van gemengde getallen, steekt het delen dus af als een achtergebleven bewerking.[65]

Ter illustratie van de prestaties bij het vermenigvuldigen nemen we achtereenvolgens iets op uit het werk van Henk, Helga, Mark, Carlien en Stef.

Henk berekent:

$2\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5} + \frac{2}{5} = 2$ S: $1\frac{2}{5}$

$2\frac{1}{2} \times 1\frac{4}{5} = \frac{9}{5} + \frac{4\frac{1}{2}}{5} = 4\frac{1}{2}$ S: 3

$2\frac{12\frac{1}{2}}{5} \approx 4\frac{2\frac{1}{2}}{5}$

Helga volstaat met $2\frac{1}{2} \times 1$ bij de uitkomst van $2\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$ op te tellen:

$2\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5} + \frac{2}{5}$ $\frac{10}{5}$ of 2 S: $3\frac{1}{5}$

$2\frac{1}{2} \times 1\frac{4}{5} = 4\frac{1}{2}$ S: 4

Mark laat zien dat Henk heel wat handiger te werk had kunnen gaan:

$2\frac{1}{2} \times \frac{5}{5} = \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$

$2\frac{1}{2} \times 1\frac{4}{5} = 2\frac{8}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = 4\frac{1}{2}$

Carlien:

$2\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$

$2\frac{1}{2} \times 1\frac{4}{5} = \frac{8}{5} + 2 + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$ S: $2\frac{1}{2}$; 4

Stef berekent:

$2\frac{1}{2} \times 1\frac{4}{5} = 3\frac{3}{5} + \frac{4}{10} = 4\frac{5}{10} = 4\frac{1}{2}$ S: 5

$2 \times 1\frac{4}{5} = 3\frac{3}{5}$ en zet dit later om in $3\frac{6}{10}$ en $\frac{1}{2} \times 1\frac{4}{5} = \frac{9}{10}$.
Alle volgens hem vereiste schuilnaamomzettingen doet hij en passant.

Getoond werk illustreert de benadering van de gehele groep. Met name Helga's handigheid gebruik te maken van een vorige uitkomst kwam nog al eens voor.
Uit de algemene aanpak van de opgave $2\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$ blijkt, dat $\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$ vrijwel door ieder opgevat is als 'de helft van $\frac{4}{5}$', waarmee de 'van-keer-kwestie' geklaard lijkt.

4.3.4 'Herhaling breuken', of 'omzien naar regels'

> 'En als er breuken zijn ..... lastig is 't, nu ja, maar ik zoek de algemene noemer. Ja, ja, ik zal goed mijn best doen, zoals de dokter gezegd heeft .....
> Multatuli in 'Woutertje Pieterse'.'

In het Land van Samen[66] (LvS) op weg naar regels

Om de bedoeling van het LvS te kunnen motiveren starten we met enkele IN-distractorfouten.

Iemand beweert '$\frac{4}{8}$ is groter dan $\frac{3}{5}$'. Nanja legt uit, waarom dit fout moet zijn: 'Bij $\frac{3}{5}$ krijg je meer dan $\frac{1}{2}$ en bij $\frac{4}{8}$ krijg je precies $\frac{1}{2}$'.

Iemand beweert '$\frac{7}{8} - \frac{5}{5} = \frac{2}{3}$'.

Frans zegt: 'Dit kan dus niet, want $\frac{5}{5}$ is een hele en $\frac{7}{8}$ is minder dan een hele.' 'Min $\frac{1}{8}$', voegt Stef zelfverzekerd zijn uitkomst toe.

Na enkele van dergelijke soms ook juiste gevallen te hebben nagegaan, wordt zicht geboden op de bedoelingen van de komende lessen.

Er gaat gewerkt worden aan het opstellen van goede regels voor het breukrekenen. Niet, om ze daarna uit het hoofd te leren, maar om – als dat nodig mocht blijken – de gezochte regels *zèlf weer te kunnen terugvinden.*

Daartoe wordt een uitstapje gemaakt naar het LvS. In het LvS, – de naam zegt het al – wordt veel, zo niet alles, door de inwoners samen gedaan. Voor de Samenlanders is dit zó belangrijk, dat zelfs hun getallen deze hoedanigheid weerspiegelen. Wanneer iemand, om maar eens iets te noemen, 2 appels bezit die hij gekregen heeft door 4 appels met iemand anders te delen, dan zegt men in het LvS $\frac{4}{2}$ (4 met z'n 2-en).

Wij zouden gewoon '2' zeggen.

In $\frac{4}{2}$ komt het samen nog tot uitdrukking. De kinderen in het LvS leren op hun scholen met déze getallen rekenen.

De kinderen van de onderzoeksgroep spelen de rol van LvS-kinderen.

'In jullie rekenschriften ziet mijn getal 2 er heel anders uit,' zo betoogt de leraar. 'Welke gedaanten kan mijn 2 bij jullie zoal aannemen?'

Met vereende inbreng bouwt de groep aan een 2-tabel:

2	4	6	8		
1	2	3	4		

'Twee eerste' noemt Henk het eerste paar.
Voor de volledigheid wordt dat er ook bijgedaan.
Het LvS biedt onbeperkte mogelijkheden voor het getal 2 van de leraar. Het is een *schuilnaam* voor een menigte LvS-getallen.
Al praktisch meewerkend wordt zo het LvS gekarteerd.
Een uitkomst in het LvS was $\frac{6}{2}$. Wat kan dat betekenen? Wat is mijn schuilnaam ervoor? Het had ook een ander verhaal kunnen zijn ($\frac{9}{3}$, $\frac{12}{4}$, ...) met steeds dezelfde gehele uitkomst.

Wat zou een 'eenzame' Samenlander er voor schrijven? ($\frac{3}{1}$). En een lid van een twaalftal? ($\frac{36}{12}$). En wanneer er 18 te verdelen was geweest? ($\frac{18}{6}$).
De kinderen zijn er dan aan toe een 3-tabel samen te stellen. De meesten bedenken snel even de eerste 10 gevallen, al dan niet opvolgend. Frans gaat meteen al buiten zijn boekje en neemt ook $\left|\frac{100}{33\frac{1}{3}}\right|$ in zijn 3-tabel op.

$\frac{28}{4}$. Hoe ziet dit getal er voor 3 verdelers uit? ($\frac{21}{3}$). En voor een tweetal? ($\frac{14}{2}$).
Wanneer 56 verdeeld werd?
Vul eens in $\frac{4}{2} = \frac{\cdot}{3}$; $\frac{8}{4} = \frac{\cdot}{7}$ ook $\frac{4}{\cdot} = \frac{16}{\cdot}$; $\frac{6}{\cdot} = \frac{12}{\cdot}$.
Bij deze laatste opgaven ligt de invulling niet meer eenduidig vast. Wat let iemand de weg van de breuken op te gaan, ook al wijkt dit, van de stilzwijgende afspraak die leek te bestaan, af.
Nanja vraagt: 'Kun je ook $\frac{4}{8}$ (4 met z'n 8-en) doen?'
De leraar laat dit aan het oordeel van Nanja en haar reisgenootjes over. Probeer wel steeds de sommen te controleren, zo adviseert hij.
De Samenlandertjes bedenken zelf ook vijf van zulke invulsommen, maken deze en zetten een kring om de uitkomst.
Nanja houdt het maar weer op gehele uitkomsten, maar negen anderen zien ook goede mogelijkheden voor het toepassen van breuken als hún getallen.[67]

Optellen en aftrekken in het LvS
Wel, het LvS was betreden. Nu zouden de belangrijkste kenmerken waarnaar we op zoek waren, achterhaald moeten worden.
De leraar roept herinneringen op uit het begin van de schooltijd:
2 + 3 = 5.
Hoe kan deze som in jullie LvS-schrift er hebben uitgezien?
Dat is een kwestie van 'vertalen'.

Carlien: $\frac{8}{4} + \frac{12}{4} = \frac{20}{4}$ Marja: $\frac{4}{2} + \frac{6}{2} = \frac{10}{2}$

Michael: $\frac{6}{3} + \frac{9}{3} = \frac{5}{1}$ Stef: $\frac{2}{1} + \frac{3}{1} = \frac{5}{1}$

Frans: $\frac{8}{4} + \frac{9}{3} = \frac{5}{1}$

Nu wordt nagegaan of ze goed zijn.
Deze springen eruit:

$\frac{8}{4} + \frac{12}{4} = \frac{20}{4}$

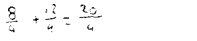
$\frac{4}{2} + \frac{6}{2} = \frac{10}{2}$

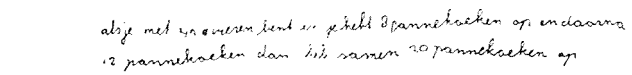
$\frac{2}{1} + \frac{3}{1} = \frac{5}{1}$

Ahmed vindt ze eigenlijk allemaal hetzelfde. Hij zet zijn standpunt kracht bij door van onder naar boven verbanden te leggen als:
$2 \times 1 = 2 \rightarrow 2 \times 2 = 4 \rightarrow 2 \times 4 = 8$ etc.

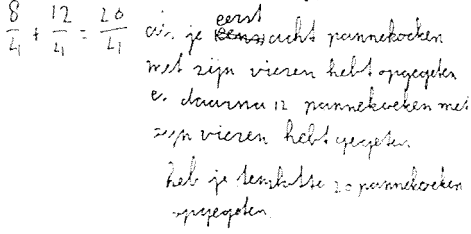
Zou er een verhaal bij $\frac{8}{4} + \frac{12}{4} = \frac{20}{4}$ gemaakt kunnen worden?

'Als je *eerst* 8 pannekoeken met z'n vieren hebt verdeeld en *daarna* nog eens 12 met diezelfde vier, dan krijgt ieder $\frac{20}{4}$, of heb je tenslotte 20 pannekoeken met z'n vieren opgegeten.





Werk van Sanny, en



Michaels werk

Voor $\frac{4}{2} + \frac{6}{2} = \frac{10}{2}$ en $\frac{2}{1} + \frac{3}{1} = \frac{5}{1}$ worden ook passende verhalen bedacht.
Wanneer de groepjes even groot zijn: 'Dan mag je de bovenste getallen optellen', vult Henk aan. En in de zojuist bedachte verhalen lag die regel al waarneembaar voorgetekend.

Maar nu Michaels som: $\frac{6}{3} + \frac{9}{3} = \frac{5}{1}$.

Michael vertelt desgevraagd, dat hij nu wel weet, dat hier $\frac{6}{3} + \frac{9}{3} = \frac{15}{3}$ van hem werd verwacht.

Blijft nog staan $\frac{8}{4} + \frac{9}{3} = \frac{5}{1}$ van Frans.

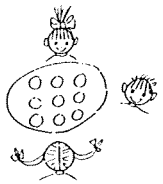
Alle groepjes verschillend. Wie vertelt er een verhaal bij? Wanneer je eerst 8 pannekoeken met z'n vieren deelt en dan nog 9 met z'n drieën, dan ..... Tja, daar schiet je niet veel mee op. Zo'n 'eerst-en-daarna-verhaal' met gelijke groepjes, dat zou wèl gaan, mèt uitkomst.

$\frac{8}{4} + \frac{9}{3} =$ Kan dat met dezelfde groepjes?

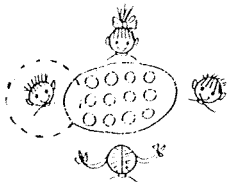
Clara stelt 12 voor: $\frac{8}{4} + \frac{9}{3} = \frac{24}{12} + \frac{36}{12} = \frac{60}{12}$.

Zoals steeds worden de gehele getallen even als controlemiddel (denkkader, bemiddelaar) te hulp geroepen om na te gaan of het klopt. Alom instemming, want 60 met z'n 12-en geeft ieder 5.

Wie een ander groepje? $\frac{8}{4} + \frac{9}{3}$



We gaan nog heel even terug naar de Smickeltafeltjes van lang geleden. 9 met 3 dat geeft ieder 3, dus wanneer er eentje bijschuift, moeten er op tafel 3 bij:



om het 'net zo' te houden.

Dus $\frac{8}{4} + \frac{12}{4} = \frac{20}{4}$, zo luidde de conclusie. En ... $\frac{6}{3} + \frac{9}{3} = \frac{15}{3}$ had ook gekund.

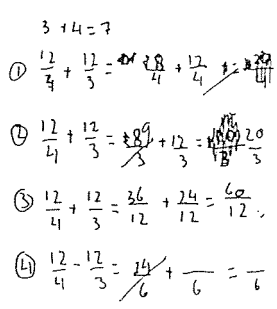
Volgende som: 3 + 4 = 7.

Frans stelt $\frac{12}{4} + \frac{12}{3}$ voor.

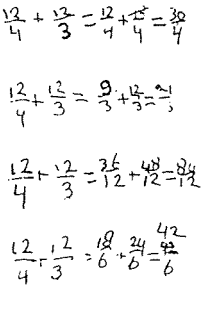
Nu maar aan het werk, uitgaande van Frans' voorstel, met groepjes van 4, van 3, van 12 en van 6. Allemaal proberen!

Voor Margreet blijkt het onbegonnen werk: $\frac{12}{4} + \frac{12}{3} = \frac{24}{4} + \frac{28}{4} = \frac{32}{4}$. Zij rekent stellig, maar niet naar de betekenis van de getallen en weet naderhand desgevraagd ook absoluut niet meer hoe ze te werk is gegaan. Nog twee anderen deelden in Margreets malaise. Michael en Sanny leverden 'half

werk'. Hun missers bleken eerder aan oppervlakkige concentratie te ontspruiten dan aan onbegrip, zoals bij Margreet, naar in nagesprekken bleek. De overigen werkten nagenoeg feilloos.

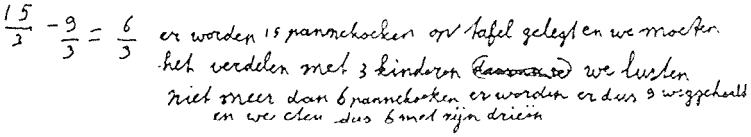


Michaels werk



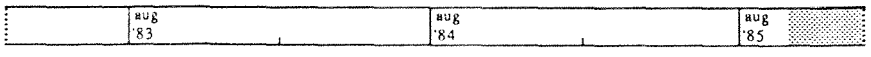
Marja's werk

De regel van de gelijke groepjes (is gelijke noemers) onderging vanzelfsprekend uitbreiding naar: En als ze niet gelijk zijn, dan eerst .....
Van het LvS werd nogmaals het voorlopig signalement gegeven, al was het maar om Margreet en anderen opnieuw gelegenheid tot herkenning te geven. Alles nog eens netjes op een rij: de gelijkwaardigheid met de schuilnamen, het optellen en aftrekken met de regel en de verhaaltjes als prelude op die regel, ook voor het aftrekken. Lastig is dat nog.



De afzonderlijke getallen opvatten als verdelingssituaties of uitkomsten daarvan, dat kan iedereén. Echter, de samenhang erin brengen door ook het bewerkingsteken zijn plek in het verhaal te geven, kost een enkeling nog wel wat hoofdbrekens.
Gelukkig maken Margreet en die anderen (Delilah en Ahmed) er nu heel wat meer van, zodat de verkenning van nieuwe gebieden in het LvS kan worden voortgezet.

Vermenigvuldigen en delen in het LvS
Het onderwijsleerproces lijkt volgens dezelfde matrijs voorgetekend.
Ieder wordt weer uitgedaagd een LvS-som te bedenken voor: 5 × 2 = 10. Geen probleem!



Hier zijn enige bedenksels.

Margreet: $\frac{25}{5} \times \frac{10}{5} = \frac{50}{5}$

Nanja: $\frac{50}{10} \times \frac{20}{10} = \frac{100}{10}$

Henk: $\frac{20}{4} \times \frac{8}{4} = \frac{40}{4}$

Frans: $\frac{15}{3} \times \frac{6}{3} = \frac{30}{3}$

Alwyn: $\frac{10}{2} \times \frac{4}{2} = \frac{20}{2}$

Helga: $\frac{20}{4} \times \frac{6}{3} = \frac{20}{2}$, enz.

Allemaal goed, zo wijst controle uit. Een regel komt echter niet aan de oppervlakte in deze produktie. Wat te doen?
Verschillende mogelijkheden staan open.
Ten eerste

Neem Alwyns regel: $\frac{4}{2} \rightarrow \frac{\textcircled{4}}{2}$, dan een tafeltje bedenken, waar 10 maal zoveel wordt opgediend en uit de zo verkregen tafel er eentje afleiden, waar maar de helft wordt aangedragen.

$\frac{\textcircled{4}}{2}$ $\xrightarrow{10x}$ $\frac{\textcircled{40}}{2}$ $\xrightarrow{:2}$ $\frac{\textcircled{20}}{2} \rightarrow \frac{20}{2}$

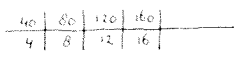
$\xrightarrow{:2}$ $\frac{\textcircled{40}}{4} \rightarrow \frac{40}{4}$

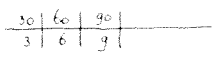
Behalve Alwyns uitkomst is er nog eentje, die – samen met nog meer gevallen – wèl een regel zou kunnen prijsgeven.

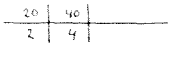
Ten tweede
Een andere mogelijkheid is teruggaan naar de herkomst van het vermenigvuldigen.
$5 \times 2 = 10$.
$2 + 2 + 2 + 2 + 2$ (= 10), nu naar het LvS:
Bijvoorbeeld $\frac{6}{3} + \frac{6}{3} + \frac{6}{3} + \frac{6}{3} + \frac{6}{3} = \frac{30}{3}$ (volgens de optelregel), maar is ook:
$5 \times \frac{6}{3} = \frac{30}{3}$, in complete LvS-uitrusting wordt dit $\frac{5}{1} \times \frac{6}{3} = \frac{30}{3}$. Echter, was de keuze op $\frac{10}{2} \times \frac{6}{3}$ of op $\frac{15}{3} \times \frac{6}{3}$ gevallen, dan zou de regel weer verbloemd zijn.

Ten derde
Een derde mogelijkheid is de uitkomst, onze 10, als schuilnaam voor meerdere LvS-getallen op te vatten en deze er bij te gaan produceren.
$\frac{25}{5} \times \frac{10}{5} = \frac{50}{5}$ –

Hetzelfde wordt bij de overige sommen gedaan. De leraar zette de situatie naar zijn hand, door telkens degene die de beurt heeft bij een geschikt getallenpaar met de tabel te laten stoppen.

$\frac{20}{4} \times \frac{8}{4}$ Helga: 

$\frac{15}{3} \times \frac{6}{3}$ Marja: 

$\frac{10}{2} \times \frac{4}{2}$ Sheila: 

$\frac{50}{10} \times \frac{20}{10}$ Clara:

Wel, achter al deze tabellen gaat 10 schuil. Het zijn dus allemaal stukjes van één grote 10-tabel.

Er is nog iets bijzonders. Steeds is het stukje 10-tabel op een andere plaats afgebroken.

Bijvoorbeeld: $\frac{25}{5} \times \frac{10}{5} = \frac{50}{5}$ hadden we.

Stef maakte ervan: $\frac{25}{5} \times \frac{10}{5} = \frac{50}{5} = \frac{100}{10} = \frac{150}{15} = \frac{200}{20} = \frac{250}{25}$.

'Stop, dacht ik toen bij mezelf.' Waarom juist daar? Natuurlijk ....., dat ze dat niet eerder hadden gezien! Henk verwoordt wat de meesten toen begonnen te zien. $25 \times 10 = 250$ en $5 \times 5 = 25$. Twee sommen verder ($\frac{20}{4} \times \frac{8}{4} = \frac{40}{4} = \frac{80}{8} = \frac{120}{12} = \frac{160}{16}$) kan Delilah ook al zeggen, waarom er juist daar gestopt is, omdat $2 \times 8 = 16$ en $20 \times 8 = 160$ is.

Met Helga's opgave, waarbij alles verschillend was, wordt dan de 'proef op het produkt' genomen. De leraar begint .....

$\frac{20}{4} \times \frac{6}{3} = \frac{20}{2} = \frac{30}{3} =$ ..... Wanneer hij $\frac{110}{11}$ bereikt heeft, beginnen velen al te roepen: nog ééntje, nog ééntje! De leraar noteert de volgende $\frac{120}{12}$.

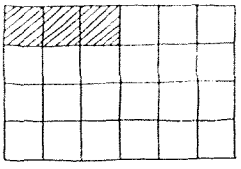
Stòòòp!, zo klinkt het stereofonisch nog voordat de teller kon worden voltooid.

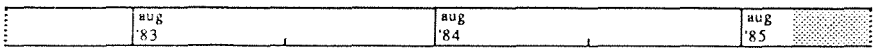
Waarom zeggen jullie hier nu 'stop'?

Nou, omdat $20 \times 6 = 120$ en $4 \times 3 = 12$ is. Een regel bedenken en zeggen lukt nu wel. Carlien mag de spreekbuis van velen zijn: 'Je moet de bovenste getallen keer doen ... eh ...' Blijkbaar vindt zij dit toch te kinderachtig, getuige: 'Je moet de bovenste getallen met elkaar vermenigvuldigen', en voegt eraan toe, 'En je moet de onderste getallen met elkaar vermenigvuldigen.'

Eigen produktie volgt weer op enkele controleoefeningen via 'onze' getallen. Diverse kinderen bedenken ook sommen met breuken. Beatrijs, inmiddels weer aangehaakt, bedenkt $\frac{3}{8} \times \frac{10}{9} = \frac{30}{72}$. Controle op de LvS-manier is nu niet meer mogelijk, maar met 'minder dan de helft van ietsje meer dan een hele' kan op acceptabele wijze hetzelfde doel worden bereikt.
Het neemt zo langzamerhand bezit van ieders bewustzijn, dat onze breuken in wezen ook een soort LvS-getallen zijn. Zelfs Margreet, Sanny en Nanja hebben de breuken nu erbij ingelijfd.
Margreet bedacht $\frac{4}{3} \times \frac{12}{5} = \frac{48}{15}$.
Dit alles eenmaal vastgesteld hebbende kunnen 'de bovenste getallen' en 'de onderste getallen' in de door Carlien verwoorde regel nog best kort en bondig worden omgezet in 'tellers' en 'noemers'.
De regels voor het optellen en aftrekken ondergaan dezelfde opknapbeurt.
Voor het delen wordt weer eenzelfde plan getrokken (8 : 2 = 4 omzetten in zijn LvS-gedaante).
De regel is naar analogie van het vermenigvuldigen snel verwoord. De tellers delen en de noemers. De vraag is of het begrepen en té begrijpen is.
'Hoe moet het nu als de noemers verschillend zijn?', kritiseert Stef de eenzijdige gelijke-noemer-benadering terecht. Hij werpt met $\frac{16}{2} : \frac{8}{4}$ dan gelijk zichzelf en de hele groep maar voor de leeuwen, om vervolgens zelf als dompteur de situatie te kunnen beheersen, want hij vervangt zijn voorstel onmiddellijk door $\frac{16}{2} : \frac{4}{2} =$.
En daarmee wist vrijwel iedereen raad. De leraar heeft echter nog andere zorgen, die meer op de kwaliteit van het inzicht van de groep in deze kwestie betrekking hebben. Hoe zit het met de betekenis achter de regel voor het delen? (Bij het vermenigvuldigen was er immers een terug naar de tafeltjes?)
Helemaal ontevreden is hij nu ook weer niet, want met de regel dat 'delen door een breuk vermenigvuldigen is met het omgekeerde', is nu definitief afgerekend.
Hij besluit op twee manieren deze kwestie met de concrete bronnen te verbinden, namelijk:

Ten eerste: aan het verdelen van repen met wisselend standpunt ten aanzien van de eenheid.

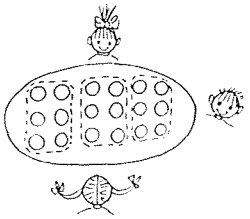




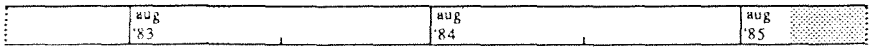
Wie bedenkt bij dit plaatje van een reep een verdeelverhaal?
Ik verdeel een reep van 24 blokjes in stukken van 3 blokjes 24 : 3 = 8. Acht kinderen kan ik dus zo'n stuk van 3 blokjes geven. Hoe zit dat, wanneer ik het stuk van 3 blokjes nu eens 'Eén' noem?
(De reep wordt nu dus met een ander maatje gemeten.) Hoe ziet de passende deelsom er nu uit? 8 : 1 = 8.
Gedurige verandering van maatstandpunt brengt heel wat delingen op:
Eenheid:

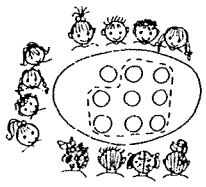
1 blokje	$24 : 3 = 8$		
3 blokjes	$8 : 1 = 8$		
4 blokjes	$6 : \frac{3}{4} = 8$	$\rightarrow$	$\frac{24}{4} : \frac{3}{4} = 8$
6 blokjes	$4 : \frac{1}{2} = 8$	$\rightarrow$	$\frac{8}{2} : \frac{1}{2} = 8$
12 blokjes	$2 : \frac{1}{4} = 8$	$\rightarrow$	$\frac{8}{4} : \frac{1}{4} = 8$
24 blokjes (de hele reep)	$1 : \frac{1}{8} = 8$	$\rightarrow$	$\frac{8}{8} : \frac{1}{8} = 8$

Telkens blijkt, dat bij gelijke maatjes (is gelijke noemers) de tellers toereikend zijn om de uitkomst te kunnen beslissen.
Ook wanner de breuken als verdeelsituaties worden opgevat, kan vrij eenvoudig worden ingezien, dat het quotient van de tellers bij gelijke noemers beslissend is.
Bijvoorbeeld: $\frac{18}{3} : \frac{6}{3}$



Uit het plaatje blijkt duidelijk, dat $\frac{6}{3}$ zich in $\frac{18}{3}$ drie maal herhaalt.
Er is zelfs een 'verhaal' van te maken in de geest van de verhalen, die bij het optellen en aftrekken zo duidelijk naar de regels voor die bewerkingen verwezen.
3 kinderen eten samen 18 pannekoeken. De keuken heeft het druk en dient voor de 3 steeds 6 pannekoeken tegelijk op. Hoe dikwijls wordt er opgediend?
In geval er sprake is van $\frac{3}{4} : \frac{2}{3}$, verliest de vraag naar de frequentie aan het serveren nagenoeg zijn betekenis.

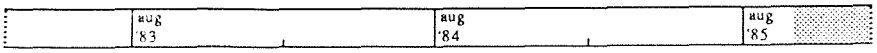




$\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{9}{12} : \frac{8}{12}$. Het is duidelijk, dat de situatie $\textcircled{\frac{8}{12}}$ zich nu slechts $1\frac{1}{8}$ keer in $\textcircled{\frac{9}{12}}$ herhaalt.
Ter afronding is alles nog eens netjes op een rijtje gezet. Er is vastgesteld, dat de ontwikkelde regels ook op onze breuken van toepassing zijn.

> En daarna waren we aan een afsluiting toe; een slot, dat geen einde zou moeten zijn. In principe zijn de kiemen gelegd om eens het breukenbouwwerk in abstractie te voltooien, dat wil zeggen: kiemen van intuitieve noties bij hen, die daaraan toe waren.
> De omslag bijvoorbeeld naar het algebraische opereren met rationale getallen – ook in lettervorm – daagt pas aan de horizon van de wiskundeleerweg van deze groep en dan nog lang niet voor ieder.
> Het behoort echter nu eenmaal tot de beperkingen van lange termijn onderzoek naar leerprocessen, dat het einde altijd voortijdig en dus voorbarig komt, ook al is men jarenlang bezig geweest. In tegenstelling tot de slaap is hier het moment van wakkerworden, het doorbreken van het volle bewustzijn, niet (goed) aan te geven.
> We gaan nu over tot de slotproduktie in deze onderwijsimpressie, die de apotheose vormt van een lang en voor de helft van de groep moeizaam (leer)proces van vallen en opstaan.
> Op zichzelf mag het tekenend genoemd worden, dat elk groepslid steeds de moeite weer genomen heeft om na een val weer op te krabbelen, dan wel, zich zo veel mogelijk op eigen kracht op de been te (laten) helpen. Afhaken deed niemand, wilde niemand en hoefde ook niemand.[68]

Slotproduktie
Vier weken nadat het Land van Samen verlaten was en we weer met beide benen op de eigen realistische reken/wiskunde grond stonden, werd nog een keer teruggekeerd, in gedachten, niet voor een vluchtig bliksembezoek, maar om diepgravende herinneringen op te halen. Dit gebeurde voor de volgende lichting hoogste jaars, die eens ook een excursie naar het LvS zouden maken. Voor die groep werd naar een gezellige binnenkomer gezocht. Het besluit viel eerst maar eens een ansichtkaart te sturen, met daarop een kernachtige kenschets van het LvS.



Al delibererend, discussiërend en onderhandelend bracht de groep de volgende steekwoorden op het bord: eerlijk samen delen, $\frac{4}{2} = 2$, schuilnamen, breuken, tellers en noemers, optellen, aftrekken enz., bij +, −, : noemers eerst gelijkmaken, regels, ...
Wel, dat zou een onbegrijpelijke ansicht worden. Wellicht was het beter deze kaart maar voor onszelf te bewaren en voor onze opvolgers een proefwerk te bedenken, dat zij zouden kunnen maken, wanneer zij volgend jaar in het LvS ingevoerd zouden zijn. De bedachte steekwoorden voor de ansicht zouden ons hierbij kunnen helpen.
Een uitdaging was het geweest. Niemand had zich een waardiger en produktiever afsluiting van dit langlopende onderwijsleerproces kunnen wensen. Er werd gezwoegd, geploeterd, gesteund en gekreund. Bij wijze van sfeertekening het volgende. Drie minuten voor het einde zat Nanja wat onderuitgezakt voor zich uit te staren. De leraar meende haar ook voor die laatste minuten te moeten motiveren haar produktie te hervatten: 'Kom, zet 'm op! Ook die paar laatste minuten nog!' (Op indringende fluistertoon.) Nanja veert op, verontwaardigd, zich op dezelfde indringende fluistertoon verwerend: 'Ik zit *na te denken*!' Daarom ging het. Het nàdenken van het eigen leerproces en deze gedachten doorgeven aan de volgende lichting Samenlanders.
De produktie liep in kwaliteit en omvang sterk uiteen, zoals gewoonlijk. Een uitvoeriger bespreking van de resultaten brengen we elders onder (hoofdstuk 5).
Een saillant trekje in het werk was de opmerkelijke toename van het aantal kinderen, dat nu ook deelsommen voortbracht, vergeleken met eerdere produktieopdrachten. Opmerkelijk was ook dat een tiental kinderen constructie- en produktieopdrachten bedachten. Dit zou een hoger niveau van reflectie kunnen weerspiegelen dan het voortbrengen van rechtstreekse vraagstukken.
Tenslotte nog dit. De meeste kinderen maakten ook de zelfbedachte sommen. Voor ℕ-distractoren ging niemand meer op de knieën, al bevestigt ook hier de uitzondering de regel.

4.4 Met het oog op mathematiseren

4.4.1 Vooraf

Eerder betrokken we de positie van de basisconceptie van realistisch wiskundeonderwijs met alle onderwijskundige grondstellingen vandien. Deze waren daaraan voorafgaand vanuit historisch-genetisch perspectief ontvouwd (hoofdstuk 2).
Daarom zal de geschetste leergang tot leven gebracht in een onderwijsverhaal nu nader beschouwd worden met het oog op het mathematiseren.
De vijf karakteristieken van realistisch wiskundeonderwijs zijn daarbij het beschrijvingskader voor het kenschetsen van het mathematiseren, horizontaal en verticaal (§ 2.2.5 en § 3.2).

4.4.2 De rol van contexten

Realistische contexten manifesteerden zich als bron voor de begripsvorming en als toepassingsgebied.

Eerst lagen de activiteiten ingebed in verdelingssituaties in het (gezins)leven van alle dag. Dit was een rijke, doch weerbarstige bron voor de begripsvorming. Dit kwam, omdat zoveel grensovergangen naar de wiskunde *gelijktijdig* moesten worden voltrokken. De breuken moesten worden gemaakt, het verdelen dat ze voortbracht was model-verdelen met nog allerlei bijkomende technische en strategische kwesties, de ene keer wel, de andere keer niet toepasbaar; visuele modellen moesten nog worden bedacht, door allengs bij het visueel ondersteunen van de activiteiten de realistische trekjes achterwege te laten. Bovendien waren er nog nauwelijks taalmiddelen en symbolen voorhanden om proces en uitkomst te beschrijven.

Later bleek de context 'restaurant' twee elementen te bevatten van heel speciaal karakter. Opdienen èn tafelschikken bleken middelen om verdeelsituaties te gaan beheersen.

Het eenheidsgewijze opdienen en verdelen werd tot zekerheid verschaffende standaardprocedure. De modelsituatie van het Elzasser pannekoekenrestaurant was voldoende krachtig om tot situatiemodel te worden: het Franse verdelen, of, verdelen op z'n Frans. Zulks gold ook het tafelschikken. Dit gaf niet alleen aanleiding tot de constructie van een afzonderlijk symbool. Tevens kwam er met dit symbool als bouwsteen een schema uit voort met mogelijkheden tot voortschrijden in schematiseren door verkorten.

De betekenis van beide fenomenen voor zowel het horizontaal als het verticaal mathematiseren kan niet genoeg worden beklemtoond.

Telkens na het opdienen, met meer of per eenheid, moet het opgediende met het aantal verdelers in verband worden gebracht. Hierdoor kunnen noties omtrent de betekenis van teller en noemer in hechte samenhang postvatten en aldus het mentaal object breuk geconstitueerd worden (hoofdstuk 8).

Met name voor het Franse verdelen met zijn natuurlijke nasleep van monografisch materiaal is op de weg naar de bewerkingen een gewichtige rol weggelegd, in het bijzonder bij het uiteenleggen en samenstellen van breuken, zoals we gezien hebben, met het begrip schuilnaam als leidend beginsel.

Voor het tafelschikken geldt iets overeenkomstigs. Toen het speciale symbool daarvoor eenmaal een betekenisverruiming had ondergaan, speelde het een belangrijke rol bij het bewustworden van het in te nemen verhoudingenstandpunt en de mogelijke blikwisselingen daarbij. In het mathematiseren van het vergelijken van situaties werkte dit door bij de selectie van gemakkelijk vergelijkbare situaties. Ook daar konden twee standpunten worden ingenomen, al dan niet gunstig in verband met de beoogde relatieve verschilbepaling erna. Bij het vergelijken van situaties kon ook het schema worden toegepast en voor het nemen van lokale beslissingen over uitkomsten eventueel het Franse verdelen.

Tevens lag de verhoudingstabel in het verschiet van situatie, symbool en schema. En daarmee kan de voortschrijding in schematisering door

verkorting weer worden vervolgd, terwijl het schema voor het tafelschikken op natuurlijke wijze weer op de achtergrond raakt. In het vergelijken van situaties, of beter, het vergelijkbaar maken, liggen allerlei aanzetten tot bewerkingen voorgetekend, zoals we hebben laten zien (§ 4.2, cluster 2; § 4.3).[69]

Nadat breuken via het verdelen zijn voortgebracht, wordt door inbreng vanuit de context (lengte, gewicht, prijs, duur) het terrein van breuken in operatoren betreden. Zelfs al vooruitlopend op het verdelen konden ordeningen op basis van 'prijskoppeling' worden voltrokken. Ook het toepassen speelt zich af in contexten. Daarbij gaat het louter om toepassing van het geleerde. Toch kan het meer zijn dan dat.
Door contexten te variëren, werd het tafelschikken met symbool en schema algemener toepasbaar. Op die manier – denk aan het koffiezetten en de afstand-tijd-problemen – kan het toepassen in contexten dienstbaar zijn aan het abstraheren en generaliseren (hoofdstuk 8).
Contextsituaties werden ook benut als toepassingskader voor het beoefenen van bepaalde vaardigheden, zoals bij het vergelijken van verdelingssituaties, koffiesoorten op sterkte e.d.
Tenslotte noemen we de gedurige aandacht voor het omzetten van situaties in sommen, het bedenken van verhalen bij sommen en de rol van verdeelcontexten op de achtergrond bij het werken met symbolisch materiaal, bijvoorbeeld in het Land van Samen.

4.4.3 Symbolen, schema's en modellen veelvuldig gebruikt

Het spreekt vanzelf, dat de vijf karakteristieken van realistisch wiskundeonderwijs eendrachtig dienstbaar zijn aan het mathematiseringsproces. Er is samenhang, afhankelijkheid. De wiskundige werktuigen van de aanhef kwamen dus onvermijdelijk al ter sprake onder contexten, hun belang voor de grensoverschrijding naar de wiskunde en de voortgang binnen de wiskunde zelf.
Als voorbeeld noemen we het tafeltjessymbool met zijn betekenis voor het innemen van een verhoudingen-standpunt, de mogelijkheden tot voortschrijden in schematiseren door verkorten met de tafelschikkingsboom en de mogelijkheid tot ongekunstelde overgang op de verhoudingstabel als schematiseringsmiddel, alsmede de toegangen tot de bewerkingen.
Cirkel, rechthoek, strook en getallenlijn vonden hun oorsprong in de activiteiten van de kinderen zelf, die hun werkelijkheid omwille van het mathematiseren in toenemende mate verschraald weergaven.
Tenslotte verdienen nog afzonderlijke vermelding de in § 4.4.2 genoemde context- of situatiemodellen van het opdienen (het Franse verdelen) en tafelschikken, die over langere termijn inzetbaar gebleken zijn om als denkmodellen het horizontaal en verticaal mathematiseren te ondersteunen.

4.4.4 Construeren en produceren, of de inbreng van de leerlingen in hun leerweg

Aan eigen constructies en produkties heeft het in het onderwijsleerproces niet ontbroken. Sterker nog, naar in het constructiemodel voor de leergang al lag voorbeschikt zou met het materiaal van de leerlingen hun leerweg worden geplaveid (§ 3.2).
Als voorbeeldmateriaal noemen we:
— verdeelsituaties en 'kleine' monografieën;
— de constructie van het tafeltjessymbool;
— het eenheidsgewijs en globaal verdelen;
— het bedenken van de term 'schuilnaam';
— de produktie van voorbeeld monografieën met ieders materiaal;
— het samenstellen van proefwerken uit ieders vrije produkties;
— het voortbrengen van rekenregels voor het Land van Samen;
— het samenstellen van een proefwerk voor het LvS.
Kortom met de constructies en vrije produkties van de kinderen werd de gang in het onderwijsleerproces gehouden.

4.4.5 Interactief

De mogelijkheid tot gedifferentieerde inbreng in de gezamenlijke leerweg vraagt gedurig om afweging op geschiktheid van het voortgebrachte materiaal. Zoiets moet geleerd worden door nadenken, onderhandelen, discussiëren, leren vertrouwen op je eigen verstand, dus in je eigen standpunt en – waar nodig – leren dat te verdedigen.
Het onderwijsleerproces diende dus interactief te zijn, althans interactieve lesperiodes te bevatten om te onderhandelen enz., ook wanneer er gemeten naar de opbrengst voor het vervolg, niet zo veel op het spel stond.
We denken in dit verband aan de heftige discussies over de gelijkwaardigheid van tafeltjes in eenzelfde tafelschikkingsboom met een opbrengst die voor het vervolg van beslissende betekenis was.
Ook de disputen over de standpunten van de fotograaf tijdens de verkenning van de Gooilustroute aan de hand van foto's sprong eruit. Zo ook het toepassen van het tafeltjessymbool in andere situaties en de twijfels en meningsverschillen over de betekenis en invulling ervan, alsmede het werken aan het systematisch leren voortbrengen van monografieën met individueel geproduceerd materiaal.
In alle gevallen ging het er steeds om – grof gezegd – het collectieve mathematiseringsproces dienstbaar te maken aan ieders individuele leerproces en omgekeerd (§ 3.2).

4.4.6 Verstrengeling van leerlijnen

Als laatste noemen we de hechte samenhang, waarin verhoudingen en breuken optrekken bij het afleggen van de leerweg. De leerlijnen voor verhoudingen en breuken waren verstrengeld.
Zo ligt in een verdelingssituatie de portie voor ieder reeds voorgetekend in

de verhouding van objecten en deelnemers. Bij het vergelijken van situaties spelen verhoudingsredeneringen een beslissende rol. Er is een afzonderlijk symbool gecreëerd om situaties van uitkomsten te onderscheiden en deze tezelfdertijd hecht te verbinden. Dit symbool helpt bij het bewustmaken van het in te nemen verhoudingenstandpunt. Met de toegepaste schematiseringsmiddelen (boom en tabel) kunnen equivalente verhoudingen gegenereerd worden. En de breuken? Wel, voortgaan op de leerweg voor verhoudingen betekent vorderingen maken met de breuken en omgekeerd. Deze moeten wel nauw samengaan.[70] De numerieke verwerking van verhoudingen is het toepassingsgebied bij uitstek voor de breuken.
Er zijn vanzelf nog meer knooppunten en dwarsverbindingen met allerlei andere leerlijnen, zoals die voor het delen, het beoefenen van basisvaardigheden, het meten, de decimale breuken enz.
Bij het uitgaan van realistische contexten is zoiets welhaast vanzelfsprekend, al moet gezegd dat we ons in dit onderzoek beperkt hebben door decimale breuken, schaal, procenten en kansrekening buiten beschouwing te laten.[71]

Ziedaar hoe het aanwenden van contexten, symbolen, schema's en modellen, constructies en produkties, interactie en het verstrengelen van leerlijnen het mathematiseringsproces in gang zetten en deden voortgaan; van 'halven en kwarten' tot en met een volwaardig systeem met zijn equivalenties en rekenregels.

4.5 Overzicht en uitzicht

In dit hoofdstuk werd het onderzoekskader geschetst voor de leerlingen, dit is de context van hun breukenonderzoek. In een vijftal clusters van activiteiten werd dit veld van onderzoek globaal uiteengelegd, de globale schets van de leergang. Deze werd vervolgens tot leven gewekt in een onderwijsimpressie en was zo concreet, dat alle aan het experiment deelnemende kinderen er in optraden. Een blikwisseling werd aldus ingezet van onderwijsproces naar leerproces. Het ging in de eerste plaats om het gedifferentieerde leerproces van de voltallige groep ook al werden de jonge breukenonderzoekers afzonderlijk, met pseudonamen, genoemd, dikwijls vergezeld van hun persoonlijke, inhoudelijke inbreng.
In het volgende hoofdstuk wordt de ingezette standpuntomslag voltooid. Alle kinderen, die het volledige onderwijsproces hebben meegemaakt – dertien in getal – zullen geportretteerd worden naar hun individuele leerprocessen.

Noten bij hoofdstuk 4

1. Zie hoofdstuk 3, noot 3 en hoofdstuk 6.
2. Zie Van Hiele (1973), (1984) en Van Hiele in Goffree (1985).
3. Het tweede, formele niveau wordt in deze studie het derde niveau genoemd, terwijl de daaraan voorafgaande niveaus van het concrete en het tussengebied tussen het concrete en het formele niveau van de vaksystematiek resp. eerste en tweede niveau genoemd worden in plaats van nulde en eerste niveau.
4. 'Mathematisch-didactisch' is hier bedoeld in de betekenis die Freudenthal (1984, hoofdstuk 2) eraan gaf, namelijk het verbinden van verschijnselen in de werkelijkheid met de wiskunde met het oog op het verwerven van die wiskunde in een leerproces.
5. Het is immers hierop, dat het geschetste constructiemodel zich richtte (hoofdstuk 3).
   Overigens dienen de niveaus niet als louter opeenvolgend beschouwd te worden. Ze kunnen op verschillende onderdelen binnen eenzelfde leerstofgebied gelijktijdig bereikt worden. Bovendien kan er, naarmate het leerproces voortschrijdt, niveaureductie optreden. Zie Treffers (1987).
6. Streefland (1983a), Freudenthal (1984), Treffers (1986).
7. In de methoden Hoj Rekenen (Nederland) en Gamma (West Duitsland) zijn de meeste van genoemde toegangen benut om tot een structuralistische opbouw van de breuken te komen met nadruk op breuken in operatoren.
   Opmerking: Wat de typering van Hoj Rekenen betreft, dient vermeld dat De Jong (1986) ook empiristische trekken signaleerde.
8. Indeling en terminologie van Treffers (1987).
9. Zie Trafton (1978).
   Naarmate het leerproces vordert breidt zich het arsenaal aan mogelijke referentiepunten bij het schatten nog uit.
   Wij handhaven in dezen overigens ons eerder ingenomen standpunt, dat het beter is, dat de leerlingen zichzelf tijdens het schatten dergelijke referentiepunten aanmeten dan dat deze van buitenaf worden aangereikt. Zie Streefland (1982d).
10. Term van Treffers; zie Treffers en Goffree (1985).
11. Overigens behoeven de tafeltjes in eenzelfde boom in sociaal of emotioneel opzicht geenszins gelijkwaardig te zijn, zoals de ervaring inmiddels uitgewezen heeft. Zie bijvoorbeeld Streefland (1985a).
12. Natuurlijk is het zo, dat ook de activiteiten van cluster 1 op de koppeling van situatie en breuk gericht zijn. Doordat in cluster 2 een afzonderlijk symbool voor situaties is ingevoerd komt de bedoelde koppeling nog nadrukkelijker tot uitdrukking.
13. Zie hoofdstuk V in Streefland (1983a).
14. Zie hoofdstuk 3 in verband met deze kwestie en ook Streefland (1983a).
    Hieraan dient nog te worden toegevoegd, dat het artefact dat de benadering van destijds teweegbracht, namelijk het steeds in één richting werken van kleinere naar meer gecompliceerde situaties door de eenzijdige toepassing van de tabel als schematiseringsvorm, nu eveneens bezworen is.
    Dit alles kan op het conto geschreven worden van de didactische deliberatie en discussie, die we in hoofdstuk 3 noemden en die in bepaalde perioden tijdens het onderzoek met grote intensiteit werd gevoerd. De ingrijpende consequenties van een en ander met betrekking tot een (lokale) theorie voor het onderwijzen en leren van breuken tekenen zich op voorhand reeds af. Een bewijs te meer hoe reëel de samenhang in ons drie-niveau-model voor de

leergangconstructie in feite is en tevens hoe raak gecompliceerd ontwikkelingsonderzoek als het onderhavige met dit model gekenschetst wordt. Zie ook de hoofdstukken 6 en 8.

15. Een nadeel van de gevoerde tafeltjesnotatie zou kunnen zijn de sterke verbondenheid ervan met het verdelen, dat de toepassing ervan in situaties met een meetkarakter zou kunnen blokkeren. Daar staat echter tegenover dat de verhoudingstabel weer zeer ruim toepasbaar is in al die situaties, waarin twee grootheden op functionele wijze met elkaar verbonden zijn. De uitbreiding van toe te passen contexten en probleemvelden naar andere gebieden dan verdeelsituaties zou men dus (grotendeels) kunnen uitstellen totdat de tabel als uitloper van de schemabouw met het tafeltjessymbool in het leerproces oogstbaar is.

16. Sawyer (1969) spreekt van de methode van Robert Wirtz.

17. Zie in dit verband Streefland (1986e).
Ook is het mogelijk toepassingsvraagstukken in dienst te stellen van het verticale mathematiseren voorzover deze op natuurlijke wijze oplossingen uitlokken die verwijzen naar een bepaalde regel.
Een voorbeeld van zo'n vraagstuk (van Treffers) is: 6 mensen hebben voor 30 keer een tennisbaan gehuurd, waarop per keer 4 van hen spelen. Hoe vaak speelt ieder?
De oplossing: $(4 \times 30) : 6$. De kruisproduktmethode blijkt hier heel voor de hand liggend te zijn, zoals de ervaring leerde.

18. Zie bijvoorbeeld Hart (1981), Rengerink (1983).
O.a. op dit punt, dat sterke aanwijzingen vormt omtrent de toepasbaarheid van het geleerde, faalt mechanistisch rekenonderwijs.

19. Zie in dit verband Baay en Streefland (1987).

20. Zo vinden ook Sawyer (1969) en Freudenthal (1984).
Het zal geen verwondering wekken dat voor Griesel, die de breuken bij herhaling fundeerde vanuit verschillende wiskundige gezichtshoeken, het opgemerkte probleem totaal niet bestond. In een zuivere mathematische analyse gaat het immers slechts om dat ene vermenigvuldigingsteken. Griesel (1959). Zie in dit verband ook Streefland (1983a) hoofdstuk III.

21. Dit laatste kan op verschillende manieren.
Bijvoorbeeld:
$\frac{1}{2} \rightarrow \underset{1}{\textcircled{1}}, \underset{2}{\textcircled{2}}, \underset{3}{\textcircled{3}}, \ldots\ldots;$ $\qquad \underset{6}{\textcircled{3}} \rightarrow \frac{3}{6}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + = \frac{5}{6}$
$\frac{1}{3} \rightarrow \underset{3}{\textcircled{1}}, \underset{6}{\textcircled{2}}, \ldots\ldots\ldots;$ $\qquad \underset{6}{\textcircled{2}} \rightarrow \frac{2}{6}$
of
$\underset{1}{\textcircled{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}} \rightarrow \underset{2}{\textcircled{1+\frac{2}{3}}} \rightarrow \underset{6}{\textcircled{5}} \rightarrow \frac{5}{6}$, dus $\underset{1}{\textcircled{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}} = \underset{1}{\textcircled{\frac{5}{6}}}$.

22. Zie in dit verband bijvoorbeeld ook Streefland (1987b).

23. Dit sluit het ontdekken en verwoorden van rekenregels als individuele leeractiviteit vanzelfsprekend niet uit. Sterker nog, aangenomen mag worden, dat dit te verwachten valt bij individuele leerlingen. Het onderwijsproces voor de voltallige jaargroep dient zich ten aanzien hiervan dus terughoudend op te stellen.

24. Zie Streefland (1984c).

25. Zie in verband met de aard en functie van contexten De Lange (1987), Treffers (1987a).

26. Vrijwel alle kinderen in de midden- en bovenbouw van de basisschool hebben belangstelling voor recepten en voor het zelf koken of bakken van iets. Dit is niet alleen bij herhaling gebleken in eigen onderzoek. Ook werd dit bevestigd door een internationaal forum, dat werd

geraadpleegd in verband met een onderwijsthema, dat handelde over verhoudingen. Daarin was o.a. een recept voor een boterkoek opgenomen. Zie Streefland (1984d).

27. Alle gebruikte namen in deze onderwijsimpressie zijn fictief.

28. De kwestie van de zogenaamde IN-distractoren, dit zijn de afleiders vanuit de natuurlijke getallen (de meeste breuknamen verwierven reeds een rangtelwoordbetekenis en ook de gebruikte cijfer- en bewerkingsymbolen zijn binnen IN belast) zal blijken voor enkele leerlingen uit de onderzoeksgroep een hardnekkig en langdurig euvel te zijn.
Zie in dit verband Streefland (1986f) en ook de hoofdstukken 5 en 6.

29. Piaget (e.a.) (1966) claimden een vaste relatie tussen het aantal sneden en het aantal delen, waarin een geheel uiteengelegd wordt. Kinderen blijken zich echter bij het verdelen grotere vrijheden te permitteren dan Piaget c.q. postuleerden, zonder in de fout te gaan, hoewel, zoals we gemerkt hebben, het aantal delen en aantal sneden met elkaar kunnen interfereren. Zie in dit verband ook Streefland (1979).

30. Er zit overigens ook nog een positieve kant aan deze kwestie in verband met de onderzoekswaarde van leerlingenmateriaal, dat in sterk interactief onderwijs is voortgebracht. Tegenover de kwalificatie 'waardeloos' op grond van het betrouwbaarheidscriterium, kan men met hetzelfde recht op grond van correct materiaal van met name de zogeheten zwakke leerlingen vooruitgang in het leerproces postuleren, omdat goede uitkomsten bij onbegrip of weerstand hoe dan ook achterwege blijven.

31. Wanneer het besef doordringt dat in de algemene gedaante van een breuk $\frac{t}{n}$, elk der t en n weer door een breuk bezet kunnen worden, is het breukbegrip 'af'. Zo ver is het hier nog lang niet. Wel worden op deze wijze, op grond van het herhaald halveren, de eerste kiemen hiervoor gelegd, zoals Marks vondst getuigt.

32. Uit deze voorbeelden wordt eens te meer duidelijk, dat en waarom het onderdeel algebra in het wiskunde-onderwijs zo lastig is.

33. Over het opbouwen van weerstand tegen IN-distractoren handelt Streefland (1986f). Zie ook Freudenthal (1983b).
Noelting (1980) wees in dit verband op de noodzaak tot 'adaptive restructuring' van de natuurlijke getallen.
Bauersfeld sprak in 1986 in een lezing ter gelegenheid van het eerste lustrum van de vakgroep OW & OC in termen van het *reformeren* van de natuurlijke getallen bij het verruimen van de numerieke horizonten van de leerlingen met de breuken e.d. Zie in dit verband ook Goffree (1986).
Freudenthal (1983a) stelde, de praktijk van 'educational research' kritiserend:

> 'There were catalogues of errors of learners but nothing about the learning and unlearning of errors' (loc.cit. p.48).

34. Zie de hoofdstukken 5, 6 en 7.
Vooruitlopend op een meer uitvoerige beschrijving van de ervaringen in dit onderzoek, kan hier reeds worden gesteld, dat de procedureonafhankelijkheid van uitkomsten van wiskundige activiteiten niet voor alle kinderen (op voorhand) vanzelfsprekend is. Ook Benny (hoofdstuk 1) kampte met dit euvel. Kinderen krijgen geen cognitief conflict na het verkrijgen van verschillende uitkomsten voor eenzelfde vraagstuk op grond van verschillende procedures (symbolische verwerking versus tekenen en verdelen bijvoorbeeld). Zie in dit verband bijvoorbeeld Hasemann (1986a) en Streefland (1984c), (1986f).

35. In het 16e eeuwse tractaat (hoofdstuk 2) is sprake van 'achtendeelen' om 'achtsten' aan te duiden en van 'vierendeelen' voor vierden of kwarten. In andere gevallen is er sprake van rangtelwoordgebruik 'tweededeel', 'derdendeel', 'vijfstendeel', 'zestendeel'.

Op het eerste gezicht is men geneigd te veronderstellen dat de breuknamen voor vierden en achtsten dichter bij het eerlijk verdelen stonden dan nu het geval is. Dit is echter niet juist. In alle genoemde gevallen is sprake van rangtelwoordgebruik. En dat is ook de historische oorsprong van de breuknamen. Zo liet Homerus Ilias zeggen (K253): 'Twee delen van de nacht zijn voorbij, slechts het derde deel blijft over'. De breuknaam had dus een rangtelwoordbetekenis. Het derde deel was het laatste van drie delen, dat met beide andere delen (in het middel-nederlands ook wel 'tweedeel' genoemd; en waarvoor de Egyptenaren een afzonderlijk symbool hadden als niet-stambreuk) de eenheid volmaakt.
Zie in dit verband Kruyskamp (1971), Verwijs en Verdam (1889) en Van der Waerden (1950).
Later is deze specifieke rangtelwoordbetekenis vervaagd en werden de namen voor de laatste delen ook op de overige delen toegepast, waarin een eenheid was onderverdeeld. Dit is voor kinderen eveneens een bron van misverstand.

36. De kans tot het verzamelen van dergelijk materiaal in een afzonderlijk schrift werd in eerste instantie gemist. In een monografieënschrift zou immers het eigen materiaal kunnen worden vastgelegd en bij iedere geschikte gelegenheid bijgewerkt en uitgebreid bij wijze van onderzoeksverslag.

37. De niveauverhogingen in de individuele leerprocessen in termen van Van Hiele zullen en kunnen zich ook niet voor de breuken in zijn geheel voltrekken.
Voor observaties op dit punt, zie Streefland (1978) en voor een theoretische beschouwing van deze kwestie, zie Treffers (1987a).

38. Zie Streefland (1983a) (1985b) (1985a) (1986f) (1985c).

39. Het programma werd geschreven door W. van Velthoven van het Forth Team Utrecht in JWA Forth V4.2.

40. Streefland (1985c).

41. Merk op hoe met dergelijke activiteiten het verwerven van een constructief variabele begrip in gang wordt gezet, hetgeen op zichzelf reeds een afzonderlijk appèl doet op iemands wiskundige attitude. Voor een nadere definiëring van het begrip wiskundige attitude, zoals het hier is bedoeld, verwijzen we naar Krutetskii (1976), Freudenthal (1978) en Streefland (1980a).

42. Zie Treffers (1987a).

43. Zie in dit verband ook Wiskobasteam (1975).

44. Voor een benadering van het schaalbegrip in termen van verkleinen en vergroten, zie NOT 'Open kaart' en Kees Boeke z.j. (± 1957).
Overigens kan een kaart door de wijze van symboolgebruik en kartering, bijdragen aan een beeldvorming, die suggestief is en dus de werkelijkheid geweld aan doet.
Zie in dit verband Ormelings oratie 'Beeldvorming', Utrecht, 1986.

45. Zie Freudenthal (1984).

46. Zie bijvoorbeeld Streefland (1985b).

47. Overigens merken we op dat we hier op brede raakvlakken gestuit zijn van de breukenleergang met het overige wiskunde- en zelfs scienceonderwijs. Bijgevolg zal ook 'elders' aan de hier aangesneden kwesties gewerkt moeten worden.

48. Freudenthal (1973) spreekt van anontologisering. Voor een beschouwing van de situatiegebondenheid van getallen, verwijzen we naar Van den Brink (1981) (1984).

49. Het zwichten voor IN-distractorfouten bij de breuken manifesteert zich hier in de vorm van foutief additief verhoudingsredeneren blijkens bijvoorbeeld het constant houden van hun

verschil bij variatie van een verhoudingenpaar in plaats van constantie in verhouding te respecteren.
Ons inziens kan dit verschijnsel evenzeer toegeschreven worden aan de te nemen numerieke hindernissen in dergelijke problemen dan aan ontoereikend inzicht in de verhoudingen. Dit, ondanks het feit, dat dergelijk onjuist additief redeneren veelvuldig in de onderzoeksliteratuur gerapporteerd is. Streefland (1986a) vermeldt enkele tientallen onderzoekers in verband met deze kwestie. Piaget e.a. (1977) en Piaget e.a. (1981) onderscheiden zelfs een fase in de ontwikkeling van kinderen 'stade hyperordinal' genoemd, waarvoor dergelijk foutief additief redeneren karakteristiek zou zijn.
De uitkomsten van onderzoek die mede tot het onderscheid van genoemd stadium geleid hebben, worden door anderen (deels) toegeschreven aan de op het verschijnsel verhouding gepleegde reductie, de gecompliceerde fysische context, waarin aan kinderen voorgelegde problemen gesitueerd waren (het rekken van elastiek en samenstel van krachten) en de structuurarmoede van voorgelegde problemen, zoals de gelijkvormigheid van rechthoeken, waarbij van de met een gegeven rechthoek te construeren gelijkvormige rechthoek slechts lengte of breedte gegeven zijn. Tenslotte noemen we nog de door Piagets experimentatoren gebezigde taal als bron van misverstand. Zie in dit verband Karplus e.a. (1979), Koleza-Adam (1987), Streefland (1979) en (1980c).
Juist voor die kinderen, voor wie het werken aan het vermogen tot het innemen van een verhoudingenstandpunt langere tijd vergt, zou moeten worden nagegaan, welke stilzwijgende assumpties er in de kantlijn van het lesgebeuren besloten blijven op dit punt.
Bijvoorbeeld:
Bij het vergelijken van (koffie) $\frac{4}{5}$ en $\frac{4}{10}$ op zeker moment, besliste
Henk: '$\frac{4}{5}$ is sterker, want bij $\frac{4}{10}$ heb je meer kopjes water.'
L: Inderdaad. Kun je iets van dat 'meer' zeggen?
H: Wel twee keer zoveel kopjes water.
L: Henk zegt alleen iets van het water.
Wat hoort daar eigenlijk nog bij?
Nanja: En *evenveel* schepjes koffie.
Deze laatste vaststelling zou steeds opnieuw *niet* achterwege mogen blijven.
Voor een meer theoretische beschouwing van N-distractorfouten bij breuken en het foutief additief redeneren verwijzen we naar de hoofdstukken 6 en 7.

50. Zie Streefland (1983a) (1986f).

51. In feite betekent de gedane vaststelling niets anders dan een bevestiging van het geschetste niveautheoretische constructiemodel (hoofdstuk 3) tot in details van de voortgebrachte leergang.

52. Zie ook Streefland (1984c).

53. Vakantiegangers, die in het land van bestemming geld wisselen, worden geconfronteerd met deze blikwisseling. Uitgangspunt bij de koersaanduiding is nu eenmaal de prijs van de vreemde valuta in de eigen valuta en ziet er dus op een Franse bank bijvoorbeeld anders uit dan op een Nederlandse. Uit het ongemak, dat vakantiegangers dikwijls met het rekenen in vreemde valuta ervaren spreekt de onwennigheid of het onvermogen tot het innemen van het gewijzigde standpunt, terwijl het, de gegeven voorbeelden tonen het aan, toch niet meer is dan het omkeren van een breuk of verhouding:

$$\frac{Ff.}{fl}\ \frac{100}{40} \rightarrow \frac{fl}{Ff.}\ \frac{40}{100} \xrightarrow{\times 2\frac{1}{2}} \frac{fl.}{Ff.}\ \frac{100}{250}.$$

54. Voor een karakteristiek van het progressief schematiseren onder toepassing van de verhoudingstabel verwijzen we naar Streefland (1983a, hoofdstuk V) en laten op dit punt de ervaringen hier sterk onderbelicht.
In het algemeen kan men stellen, dat de eigenaardigheden, die de toepassing van de

verhoudingstabel en het progressief schematiseren ermee kleurden, overeenstemden met de bevindingen in het hierop gerichte onderzoek zoals beschreven in Streefland (1983a). Zie ook Streefland (1986d).

55. Sheila was een zittenblijver.

56. Overigens zijn we van mening, dat bij het vergelijken en ordenen van situaties op verhoudingen hetzelfde geduld opgebracht moet worden als bij het vergelijken en ordenen van breuken, dat wil zeggen, de vraag naar het verschil gedurende langere tijd achterwege laten en de gelegenheid geven in kwalitatieve zin over dergelijke verschillen te oordelen. Ons inziens zijn we met betrekking tot deze kwestie te ongeduldig geweest. Bovendien werd in dit onderzoek lang niet het volledige verhoudingengebied bestreken en ontbrak de gelegenheid het experiment hechter te integreren in het overige reken-wiskundeonderwijs dan nu gebeurde.

57. Zie Streefland (1986d).

58. Frans' voorkeur (en van anderen) valt mogelijk te verklaren op grond van het wel onderscheiden blijven van beide factoren in het produkt, die elk aan een kant van een reep worden toegewezen. Het resultaat is een heel overzichtelijke situatie voor de produktbepaling die tot model daarvoor kan worden.
Bij de prijskoppeling verdwijnen de beide operatoren respectievelijk in 'tussenstand' en uitkomst, namelijk bij $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ met 15 gulden als handige prijs 'verdwijnt' $\frac{4}{5}$ via $\frac{4}{5} \times 15 = 12$ en wordt $\frac{2}{3}$ 'opgelost' via $\frac{2}{3} \times 12 = 8$. Vaststelling van de breuk in de verhouding van 8 en 15 gulden voert tot de uitkomst $\frac{8}{15}$.
Overigens kan bij het exploreren van verdeelmogelijkheden van repen dit model ook voor het optellen worden benut, zoals we in het leergangoverzicht hebben betoogd.

59. Uit de geschetste sequentie blijkt, dat er nog heel andere mogelijkheden zijn dan het door Gagné geschetste drietrapsmodel voor het oplossen van toepassingsproblemen. Zie Gagné (1983), zie ook Streefland (1986b).

60. Vanuit wiskundig standpunt lijkt het samenvoegen van tafeltjes het gevaar in zich te bergen van dienovereenkomstig handelen met de breuken(porties), dus rechtstreeks te voeren tot het maken van IN-distractorfouten. Op dit gevaar is ook al meer dan eens gewezen bij internationale presentaties van deze ideeën. Voor de leerlingen bestaat dit gevaar echter niet of nauwelijks, vanwege de nadrukkelijke betekenis, die de symbolen in de context van het eerlijk verdelen hebben verworven. Bovendien is het behouden blijven van de verhouding bij samenvoegen van gelijke of equivalente paren een essentiële eigenschap die in onze benadering een kernrol vervult, omdat spontane neigingen van kinderen tot het opbouwen naar uitkomsten toe ermee gehonoreerd wordt. Zie ook Freudenthal (1984), Hart (1981) en Streefland (1985c).

61. Naarmate de werkzaamheden voortschreden werd overigens steeds duidelijker, dat de bewerking delen in het voorafgaande onderwijsleerproces teveel onderbelicht was gebleven. Hieraan had vanaf het begin meer systematische aandacht moeten worden geschonken. Het lag in de loop der dingen besloten, dat zowel tijdens de uitvoering van het ontwikkelingsonderzoek als gedurende de beschrijving erna de beoogde leergang gedurig 'in beweging' zou zijn, althans niet op alle onderdelen in al zijn consequenties zou kunnen worden vastgelegd.
Deze vaststelling had niet tot gevolg, dat we naar de afronding toe het delen verder uit de weg zijn gegaan, evenmin trouwens als in het onderwijsleerproces tot dusver. Wat we niet gedaan hebben is pogen het geconstateerde verzuim alsnog geforceerd goed te maken. Dit zou overigens ook weinig zin gehad hebben, omdat uit de attitude van de leerlingen overduidelijk bleek, dat zij er nog niet op ingesteld waren het delen spontaan in hun vrije produkties op te nemen. Iets dergelijks zou zich in te korte tijd niet meer laten herstellen.

62. Hier manifesteert zich nog eens nadrukkelijk, hoe de individuele leerervaringen op het lesniveau in ons constructiemodel van hoofdstuk 3 ingebracht worden voor het leergangniveau, om aldaar onderdeel te worden van het onderwijsproces voor en het leerproces van de groep op de langere termijn.

63. Men dient zich hierbij te realiseren, dat de helft van de groep nogal moeizaam op zijn leerweg voortging. Dit overwegende logenstrafte de groep de veel verkondigde stelling, dat voor zwakke leerlingen reken/wiskunde materiaal sterk dient te worden voorgestructureerd wil men met dergelijke kinderen in dit vak nog enig leereffect bereiken.

64. Door eenzijdige ervaring met natuurlijke getallen kan gemakkelijk het idee postvatten 'delen maakt kleiner', zoals in onderzoek is aangetoond. Zie Bell e.a. (1981).

65. Vergeleken met de vigerende onderwijsprogramma's voor de breuken wordt hiermee niets nieuws vastgesteld. Het vormt een aanwijzing te meer, dat de mentale constitutie van het begrip rationaal getal op de basisschool niet volledig kan worden voorbereid.
Voor beschouwingen aangaande vigerende breukenprogramma's zie Feys e.a. (1987).

66. Na de afsluiting van het experiment in het schooljaar 1984/85 waren inmiddels 22 weken verlopen, voordat met het Land van Samen de draad weer werd opgepakt.

67. Met het LvS was eerder proefgedraaid met een groep 'oudere jaars' met een andere breukenvoorgeschiedenis. Door deze groep werden de breuken pas na enkele lessen als mogelijke LvS getallen ingelijfd. Dit is vanzelfsprekend één van de meer impliciete bedoelingen van het thema, namelijk dat de leerlingen zelf de grenzen van het LvS verleggen.

68. De mastery learning norm het onderwijsleerproces te vervolgen wanneer 80% van de leerlingen 80% van de gestelde detaildoelen realiseert is in feite een onderwijskundig zwaktebod om het dan desnoods maar bij 20% afhakers te kunnen laten.

69. Zie ook Streefland (1983a), hoofdstuk III § 2.2.

70. Achteraf bezien behoeft het dilemma van de voorrang, waarvoor Freudenthal zich geplaatst zag bij het ordenen van zijn didactische fenomenologiën voor breuken en verhoudingen dus geen bevreemding meer te wekken.
Zie Freudenthal (1984) de hoofdstukken 5 en 6 (loc.cit. p.146).

> 'Inderdaad hebben breuken veel met verhoudingen te maken, en ik heb geaarzeld of ik onder 'Hoofdstuk 5' niet het woord 'verhouding' moest plaatsen. Niet als vervanger van 'breuken', maar als onderwerp, dat voorrang eiste – voorrang om didactische redenen, maar ook terwille van de expositie. 'Verhoudingen' zijn tot hoofdstuk 6 uitgesteld, maar ik zal er in dit hoofdstuk af en toe eens op vooruit moeten lopen.'

71. Zie hoofdstuk 2 noot 33.
Wat de kansrekening aangaat zou men in navolging van Van Hiele kunnen stellen, dat het breukrekenen op het derde niveau hiervan de grondslag vormt (zie ook hoofdstuk 8, Treffers (1987)).
Overigens zouden de leerlijnen voor het kansbegrip en verhouding weer nauw moeten samenhangen en kan in kwalitatief opzicht in een veel vroeger stadium al heel wat aan intuitieve noties worden gewekt. Zie in dit verband Streefland (1985c).

5 Breukenonderzoekers individueel geportretteerd

5.1 Inleiding en overzicht

In dit hoofdstuk staan de leerprocessen van de afzonderlijke leerlingen centraal.
Hiermee wordt de omslag van onderwijsproces naar leerproces in de onderwijsimpressie ingezet, voltooid.
De vraag is nu welke kenmerken of indicatoren als beschrijvingskader kunnen dienen om de (toename in) kwaliteit van elk afzonderlijk leerproces te kunnen kenschetsen. Een vijftal van dergelijke kenmerken zal uit de onderwijsbeschrijving worden gehaald. Omdat enkele ervan in het bijzonder een beeld (kunnen) geven van de leerprocessen over lange termijn, zullen deze – het betreft 'begripsverwerving en IN-distractoren' en 'voortschrijding in schematiseren door verkorting' – in dit hoofdstuk in globale termen worden beschreven. Dit geldt ook de aanduiding van het niveau waarop gewerkt wordt door de leerlingen en de niveauverhogingen die zich in hun individuele leerprocessen voltrekken.
In het zesde hoofdstuk worden de individuele leerprocessen met het gegeven onderwijs geconfronteerd. De genoemde kwesties zullen dan meer verfijnd worden beschouwd. Met informatie buiten het beschikbare materiaal om, kunnen de leerlingportretten vanzelfsprekend worden aangevuld en verrijkt.
Tegelijkertijd zal er ook nog sprake zijn van wat uitgestelde informatie per leerling tot de beschrijving van het vergelijkende deel van het onderzoek (hoofdstuk 7).

5.2 Indicatoren voor de (toename in) kwaliteit van de individuele leerprocessen

De gezochte aanwijzers halen we uit de onderwijsimpressie en de wijze waarop de leerlingen zich daarin manifesteerden.
Dat wil zeggen, we gaan af op Frans als voorbeeld, die gelet op zijn inbreng in het onderwijsleerproces en zijn uiteindelijke bestemming – hij ging naar een scholengemeenschap voor LBO/MAVO – als representatief voor de groep in zijn geheel kan worden beschouwd wanneer het op een gemiddelde aankomt.

Frans
Hij deed meestal goed mee. Er was echter een opmerkelijk kwaliteitsverschil tussen zijn deelname aan de verbale (interactieve) lesmomenten en zijn werk op papier. Het laatste was als regel van soms aanzienlijk geringer gehalte. Hij leek dit zelf ook heel goed te beseffen. Het werken op papier lag hem niet zo, maakte hem onzeker. Bij interactieve lesgedeelten voelde hij zich als een vis in het water, hij mengde zich dikwijls in de discussie en gaf ook vaak ongevraagd zijn mening.
Inhoudelijk gezien stond hij zijn mannetje op alle fronten, waardoor hij –

althans die indruk gaf het – meende te kunnen rivaliseren met Stef.
Het vergelijken van situaties en het beslissen over hun (on)gelijkwaardigheid ging hem in het algemeen goed af (§ 4.3 p.86). Hij was zich bewust van verschillende mogelijkheden tot het innemen van een relatief standpunt bij gekoppelde grootheden en van de consequenties daarvan voor de symbolische weergave (§ 4.3 p.109).
Hij wist zich vanaf zeker moment ook te weren als het ging om het beargumenteerd ontkrachten van IN-distractorfouten (§ 4.3 p.134).
Wat het construeren van boomschema's en tabellen aangaat behoorde hij aanvankelijk tot de koplopers. Hij doorzag niet alleen direct de generatieve kracht van het boomschema voor de voortbrenging van gelijkwaardige tafelschikkingen maar ook de mogelijkheid om deze kracht zuinig toe te passen middels het aanbrengen van verkortingen (§ 4.3 p.85, 86).
Ook het spontaan toepassen van niet direct voor de hand liggende schema's of modellen bij het oplossen van vraagstukken kenmerkte zo nu en dan zijn oplossingsgedrag. Dit is een teken van flexibel modelgebruik (§ 4.3. p.130).
Bij het bewerken langs een omweg kon hij zich bij een produkt van breuken een passende reep voorstellen. Deze bemiddelde bij het beslissen van de uitkomst. Vergeleken met het rekenen met handige prijzen ging zijn voorkeur naar deze methode uit (§ 4.3 p.109). Hij toonde zich – tenslotte – bij herhaling handig in het voortbrengen van eigen produkties. Bij de monografieën bijvoorbeeld was hij van meet af aan op zoek naar beginselen of methoden volgens welke de produktie systematisch zou kunnen verlopen (§ 4.3 p.125 – 128).

Wat in de onderwijsimpressie niet tot uitdrukking komt, maar wat naar onze mening een plaats verdient in de leerlingportretten is het gedrag over het geheel van een batterij van problemen. Deze kwestie zal in het vergelijkende onderzoeksdeel worden beschouwd (hoofdstuk 7).
In de geschetste voorstudie van Frans' portret tekenen zich de volgende aanwijzingen af voor het kenschetsen van de kwaliteit van zijn leerproces:
— de begripsverwerving (breuk, verhouding) en IN-distractorfouten (1);
— voortschrijden bij het schematiseren (2);
— flexibel modelgebruik, schematoepassing (en flexibel rekenen daarbij) (3);
— het zich voorstellen van formele problemen (4);
— eigen constructies en produkties op symbolisch niveau (5).
Elke indicator zal nu gedefinieerd worden en de keuze ervan gemotiveerd.

ad 1: begripsverwerving en IN-distractoren
Het zwichten voor de verleidelijke natuurlijke getallen met hun rekenregels bij het breukrekenen is een aanwijzing, dat het aanwezige breukbegrip nog niet toereikend is om hier tegenop te tornen. Immers, het opereren op symbolisch niveau op en met afzonderlijke tellers en/of noemers onder miskenning van hun conceptuele samenhang duidt op onvoldoende hechte mentale constitutie van het breukbegrip bij de leerling. De groei van weerstand tegen

bedoelde verleiders, zich manifesterend in het in toenemende mate met kracht van argumenten kunnen ontkrachten van IN-distractorfouten duidt op de groei in kwaliteit van een operationeel breukbegrip.[1]
Het veelvuldig in de onderzoeksliteratuur gerapporteerde zogenaamde *foutieve* additieve verhoudingsredeneren behoort, theoretisch beschouwd, tot hetzelfde verschijnsel als het maken van IN-distractorfouten bij de breuken. Het betreft dan het vergelijken en construeren van verhoudingen op basis van constante in plaats van relatieve verschillen.
Bijvoorbeeld: voor het mengsel rood : blauw om paars te maken bij gegeven mengverhouding 2 (eenheden) rood en 4 (eenheden) blauw op de vraag naar *gelijke* kleur met 4 (eenheden) rood 6 (eenheden) blauw beslissen met als argument 'ook twee meer'.
Of: bij de portie '$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$' beslissen tot 3 + 4 verdelers in de oorspronkelijke verdeelsituatie.

Zo min als er bij het maken van IN-distractorfouten sprake is van het beschouwen van breuken als getallen die een ratio of althans een ratiowaarde beschrijven, zo min wordt er bij het foutieve additieve verhoudingsredeneren de ratio van te vergelijken of geconstrueerde paren verhoudingsgetallen geëerbiedigd.[2] Vandaar, dat bij deze indicator ook de redeneringen die de leerlingen bij vergelijkingsproblemen volgden in de beschouwingen over hun individuele leerprocessen betrokken zullen worden.

Voorzichtigheid is overigens geboden. Het maken van additieve redeneerfouten in oplossingen voor vergelijkingsproblemen bijvoorbeeld, rechtvaardigt niet altijd de conclusie omtrent de kwaliteit van het mentale object verhouding bij de leerling. De getalgegevens in een probleem kunnen de numerieke verwerking ervan zodanig compliceren, dat de leerling zich een uitweg zoekt die de vereiste verhoudingsconstantie geweld aandoet. In zo'n geval waren de getallen even machtiger dan het aanwezige begrip, zonder dat hieraan overigens schade behoeft te zijn toegebracht.[3]

ad 2: voortschrijden in schematiseren
Het schema voor het tafelschikken en de daaruit voortspruitende verhoudingstabel zijn bij uitstek de schematiseringsmiddelen die het leerproces over langere termijn kunnen schragen. De onderwijsimpressie weerspiegelde hoe de 'tafelschikkingsboom' geleidelijk aan kon worden verkort tot overzichtelijker proporties. Eerder hebben we elders laten zien, hoe het schematiseren met de verhoudingstabel zich over langere termijn op overeenkomstige wijze voltrekt.[4]
In het overzicht van de leergang werd gesteld, dat hier allerlei mogelijkheden lagen tot organiserende en structurerende activiteiten en ook constructie van meer uitgebreide of verkorte schema's (§ 4.2.2 cluster 2). Iets dat in de onderwijsimpressie bevestigd werd, zoals we al opmerkten.

Kortom, ook de voortschrijding in schematiseren door verkorten dient zich aan als een belangwekkende indicator voor de kwaliteit van het leerproces, met name de stijgingskracht die ervan uit kan gaan om los te komen van het concrete en zodoende hogere niveaus te realiseren.
Er is globaal beschouwd een krachtige parallel met het leren cijferen volgens progressieve schematisering. Dat zou het gekozen verschijnsel tot een betrouwbare aanwijzer kunnen maken. Ook hier is echter voorzichtigheid geboden vanwege een niet onbelangrijk verschil met het cijferen.
De overeenkomsten zijn, dat het schematiseren de informele methoden van de kinderen als uitgangspunt heeft, dat de uit te voeren bewerkingen in de schema's worden georganiseerd en voorgestructureerd, dat daarin verkortingen kunnen worden toegepast, en dat een eindalgoritme van zekere standaardvorm in de hele procedure ligt voorgetekend.[5]
Een ingrijpend verschil tussen beide is echter gelegen in het volgende.
In het leren cijferen volgens progressieve schematisering vinden basisvaardigheden, zoals de opteltafels tot twintig en de tafels van vermenigvuldiging, ruimschoots toepassing.
Bij het voortgaande schematiseren met tafelschikkingsboom en verhoudingstabel is dit ook wel zo, doch de uit te voeren bewerkingen liggen in dit geval veel dichter bij de basisvaardigheden dan bij het cijferen, ja vallen er dikwijls grotendeels mee samen.
Een en ander kan tot gevolg hebben, dat een leerling in afwijking van zijn gebruikelijke aanpak incidenteel uiterst verkorte procedures voltrekt. Het toevallig zien van verbanden tussen de gegeven getallen kan dan zelfs het schematiseren compleet overbodig maken, terwijl een volgende keer de behoefte aan schematisering er weer wel is.

Bijvoorbeeld: in de retentietoets aan het begin van het tweede onderzoeksjaar werd gevraagd $\frac{4}{5}$ en $\frac{13}{15}$ met elkaar te vergelijken. Het ging om de schepjeskopjes kwestie bij het koffiezetten.
Michael en Helga rekenden: $5 \times 3 = 15$ en $4 \times 3 = 12 + 1 = 13$ en verklaarden $\frac{13}{15}$ tot ietsje sterker.

Het voortgaan in schematiseren met tafelschikkingsboom en verhoudingstabel kan door dit verschijnsel dus 'golfbewegingen' vertonen. Voorzichtigheid met het vaststellen van abrupte opklimming of terugval in schematiseringsniveau is hier dus geboden.

ad 3: flexibel modelgebruik, schematoepassing (en flexibel rekenen daarbij)
Het spontaan toepassen van schema's en modellen werd als flexibel gekenschetst, wanneer de vraagstukken niet direct iets prijsgaven omtrent het toe te passen model of schema.
We verwezen naar het vraagstuk van de vulmachine in een zuivelfabriek. In

zijn oplossing paste Frans de verhoudingstabel toe, terwijl ook allerlei anders geaarde oplossingen konden worden opgetekend.
We achten het noodzakelijk de kwestie van het flexibele modelgebruik nog wat nader te specificeren:

a. Tot flexibel modelgebruik bestempelen we in ieder geval het al genoemde verschijnsel van de verrassende of althans niet direct voor de hand liggende model- of schemakeuze bij het oplossen van een (toepassings)vraagstuk.
b. Is eenmaal een model of schema gekozen dan kan de manier waarop daarmee bij het oplossen van een vraagstuk wordt omgesprongen de nodige souplesse vertonen. In plaats van starre navolging is er dan sprake van aan de eisen van de werkzaamheden aangepast gebruik.
   Dergelijk aangepast gebruik beschouwen we bij het schematiseren overigens afzonderlijk (als voortschrijden in het schematiseren door verkorten).
c. Tenslotte kan het voorkomen, dat de leerling in een eenmaal gekozen schema of model door het verzanden van de werkzaamheden in onneembare numerieke of andere obstakels in een impasse geraakt. Het in zulke omstandigheden zoeken van een uitweg in een ander model of schema, eventueel gevolgd door terugkeer in het oude model wordt eveneens als flexibel modelgebruik beschouwd.

Bij het laatstgenoemde verschijnsel dienen we overigens opnieuw voorzichtig te zijn met de weging ervan voor de kwalificatie van een individueel leerproces. Immers, het vastlopen in een oplossing volgens bepaald model of schema zal zich eerder voordoen bij die leerlingen, die bijvoorbeeld sneller tegen onoverkomelijke numerieke barrières oplopen. Zou dit dan meer dan incidenteel gepaard gaan met een 'change of model' dan kan een onjuist of scheef beeld aangaande flexibel modelgebruik het gevolg zijn. Voor leerlingen die niet of weinig vastlopen in hun eenmaal gekozen oplossingsweg blijft een noemenswaardige score op dit punt immers uit.
Evenals dit bij het voortschrijdende schematiseren al ter sprake kwam, dient ook hier in het beschouwde verschijnsel de flexibele omgang met (kleine) getallen te worden opgenomen. Immers, model en schema worden met de numerieke gegevens van een (toepassings)probleem aangekleed.
Model of schema plus de getallen zijn onlosmakelijk verbonden in hun weergave van het gestelde probleem. De voortvarendheid en souplesse waarmee de oplossing wordt gerealiseerd is dus niet alleen afhankelijk van de wijze waarop de oplosser een gekozen model of schema naar zijn hand weet te zetten, maar ook (en vooral) van de manier waarop daarbij de getallen beheerst worden.
Globaal gesproken hebben we het toepassen van de basisvaardigheden op het oog.[6]
Bij deze indicator zal in het bijzonder ook het omgaan van de leerlingen met de getallenlijn in ogenschouw worden genomen. Op voorhand zien we ons genoodzaakt op dit punt een positie van terughoudendheid te betrekken. Het dient gezegd, dat de getallenlijn in het onderzoek niet echt goed

functioneerde, ondanks de zorgvuldige voortbrenging vanuit bepaalde verschijnselen. Dit kan aan de genomen maatregelen gelegen hebben. Er kunnen echter ook andere oorzaken zijn. Bij het omgaan met de getallenlijn tekenden zich vanaf het begin twee groepen af. Aan de ene kant de 'meters', die heel nauwkeurig en precies de getallenlijn constructief invulden. Aan de andere kant de 'globalen', die de getallenlijn meer als instrument gebruikten voor het ruwweg vaststellen van orden van grootte, doch er bij vragen naar grotere precisie weinig aan hadden.
De gesignaleerde typen lijken te beantwoorden aan de indeling die Krutetskii op grond van langdurig onderzoek vaststelde: de analytici en de globaal meetkundigen.[7]
Het zou kunnen zijn, dat voor de laatste het met toenemende verfijning constructief vullen van de getallenlijn indruist tegen hun algemeen globaal-meetkundige instelling. Iets dergelijks geldt de analytici, die naar het schijnt verfijnd metend te werk gaan, maar desondanks wellicht liever zouden rekenen. Zoals we al gezien hebben in de onderwijsimpressie had Henk een sterke voorkeur voor rekenwerk en ging hij voorbij aan de modellen.[8]
Ondanks dit alles hebben we gemeend de ervaringen met de getallenlijn niet buiten beschouwing te moeten laten. Voor het vervolgonderwijs is deze als drager van de rationale getallen onontbeerlijk.[9]
De overige visuele modellen en schema's zijn op betrekkelijk vanzelfsprekende wijze door de activiteiten van de kinderen voortgebracht. Daarbij langer stil te staan op dit moment is onnodig.

ad 4: het zich voorstellen van formele problemen
Het oplossen van problemen van formele aard en datgene wat de leerlingen zich daarbij kunnen voorstellen, kunnen aanwijzingen bevatten omtrent de kwaliteit van het leerproces.
Van Frans vermeldden we, dat hij zich een geschikte reep voorstelde voor het vermenigvuldigen van twee breuken. Als indicator is dit verschijnsel niet eenvoudig te scoren. Immers, het openhouden van de bronnen van het inzicht, het zich realiseren van de betekenis van modellen, schema's en symbolen, en het zich voorstellen van situaties weergegeven in louter wiskundig materiaal waren gedurig aan de orde tijdens het onderwijsleerproces.

Wat kan nu wel en wat niet worden aangemerkt als materiaal voor deze indicator? We zullen speciaal letten op spontane uitingen in deze. Dan zal wel de voorstelling die een leerling had op enigerlei wijze geuit moeten zijn, wil daarvan gebruik kunnen worden gemaakt.
Tenslotte zullen analytisch-algoritmisch ingestelde leerlingen zich snel thuisvoelen in een formeel probleemwereldje. Behoefte aan voorstellingen die de werkzaamheden ondersteunen, is er dan vermoedelijk niet meer. Wellicht worden deze middelen dan zelfs als hinderlijk ervaren.

ad 5: eigen constructies en produkties op symbolisch niveau
Als laatste indicator zullen we de eigen constructies en produkties van de leerlingen beschouwen. Uitgangspunt daarbij is dat ze het onderwijsleerproces weerspiegelen. Eerder hebben we aangegeven waar de leermomenten (kunnen) optreden.[10]
Eigen produkties kunnen beschouwd worden op navolging van anderen, dan wel originaliteit. Tot aan het Land van Samen blijkt uit de eigen produkties van de leerlingen zonneklaar, dat de bewerking delen in ons onderzoek lange tijd onderbelicht is gebleven. Men kan ook letten op overprodukties, op variatie in de produktie, op systematiek door toepassing van bepaalde produktmethoden, bijvoorbeeld in het voortbrengen van monografieën.
Men kan letten op het uiterst verkort samenstellen van breuken, variatie in bewerkingen, het tweezijdig toepassen van schuilnamen (opvatten als ... en zoeken naar ...), het toepassen van eigenschappen. Ook het al dan niet oplossen van de zelfbedachte vraagstukken kan men in dit verband in het oog vatten. Enzovoort.
Al met al ligt hier een 'mer à boire' aan mogelijkheden om deze indicator te specificeren. Om die reden willen we ons hier niet beperken tot slechts een enkel aspect. Veel voortgebracht werk zou dan immers onrecht worden gedaan.
Voorgaande opsomming is bedoeld als verwijzing naar de richtingen waarin het in dit geval gezocht gaat worden.
Constructies zoals bijvoorbeeld bij de voortgang in het schematiseren, kunnen deels ook onder een andere indicator beschouwd gaan worden.

Tenslotte zal aandacht worden besteed aan leerlinggedrag over het geheel van een batterij van problemen, naar al eerder werd opgemerkt. Dit zal gebeuren tegen de achtergrond van de zojuist beschreven indicatoren. Het al te lichtvaardig aaneenrijgen van enkele in de tijd gestrooide gunstige leerervaringen tot een parelend leersnoer – want zo iets is mogelijk – kan op die manier van wat tegenwicht worden voorzien.
Kwesties als flexibel modelgebruik, toegepaste schematiseringsvormen e.d. over de grenzen van één enkel vraagstuk of probleemsituatie heen, kunnen belangrijke informatie verschaffen over de kwaliteit en voortgang van het individuele leerproces als geheel en in het bijzonder over de (ontwikkelde) wiskundige attitude daarin.
Voor het moment verlaten we deze kwestie en betreden de portrettengalerij van de jonge breukenonderzoekers op schuilnaam gerangschikt.

5.3 De leerlingportretten

Alwyn (9;3) – (11;7)

Algemeen

Wanneer we de impressie van het onderwijs (§ 4.3) erop naslaan blijkt Alwyn aanzienlijk minder nadrukkelijk aanwezig geweest te zijn dan Frans bijvoorbeeld, met wie hij veel samendeed. Zoiets kon overigens verwacht worden, want ook in de jaren voorafgaand aan het onderzoek was hij minder actief dan zijn levendigheid deed vermoeden.

In dit geval hebben we het dan over zijn bijdrage aan het onderwijsleerproces, want anderszins was hij veelal wèl nadrukkelijk aanwezig. Maar, zoals zijn respectieve leraren het uitdrukten: 'Redelijk vaak met andere zaken bezig'. Kortom, zijn afleiding in de les leidde nogal eens af. Vooral verbaal stond hij zijn mannetje.

Echter, zelf met voorbeelden of voorstellen komen was er niet bij. Net zo min als hij uit zichzelf vragen stelde. In dat opzicht was hij 'een stille', zelfs bij het hoofdrekenen, waarvoor hij een voorkeur had, vooral als het op handige manieren aankwam. Neen, zijn deelname kan allerminst optimaal genoemd worden. Zelfs in lessen, die 'eruit sprongen' qua motivatie en betrokkenheid van de groep als geheel, behoorde Alwyn – samen met Kevin, Mark en Nanja – tot de eersten bij wie de aandacht snel wegebde met alle consequenties vandien.

Alwyn was – althans ten tijde van het onderzoek – betrekkelijk klein van postuur. In zijn olijke kop met springerig haar stonden zijn ogen meestal op pret. Soms, wanneer hij bijvoorbeeld laat naar de tv had gekeken, kwam hij er rond voor uit lui te zijn, geen zin te hebben en niet van plan te zijn die dag veel te doen. Stef en Frans waren de makkers met wie hij veel optrok.

Zijn leerprestaties in de groep wisselden sterk in kwaliteit. Hij hield van een grapje met als gevolg dat zijn antwoorden niet altijd even betrouwbaar waren.

In de individuele interviews daarentegen maakte hij meestal een goede indruk. Daar deed hij het heel wat beter dan in de les, al waar hij een sterk reflectief moment met het grootste gemak wist af te wisselen met één van grote kortzichtigheid.

Soms leverde hij bij bepaalde opdrachten een verrassende overproduktie, door veel meer te doen dan er van hem gevraagd was. Een volgende keer presteerde hij dan prompt weer ver beneden de maat. Kortom: Alwyn was erg wisselvallig in zijn leerprestaties.

Alwyn acteerde als kok in de afscheidsmusical over hotel 'De luie lift'. In de CITO-eindtoets 1986 voor het basisonderwijs (b.o.) had hij in het onderdeel rekenen 26 van de 27 opgaven voor breuken en verhoudingen goed. Voor de onderdelen taal, rekenen en informatieverwerking bedroegen zijn percentielen achtereenvolgens 62, 84 en 56. Hij verruilde de Fatima-Jozefschool voor een MAVO.

Specifiek

ad 1: begripsverwerving en IN-distractoren

Het voltrekken en beschrijven van het herhaald halveren had Alwyn betrekkelijk snel onder de knie, al liet hij lange tijd na door hem voortgebrachte samenstellingen te verkorten. Zo liet hij het bijvoorbeeld bij het bepalen van de helft van $1\frac{3}{4}$ bij $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ (§ 4.3 p.109).

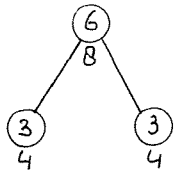
Later gebruikte hij halven en kwarten als referentiepunten om andere breuken af te schatten. Bijvoorbeeld in verband met de IN-distractorfout:

'Is $\frac{5}{7} - \frac{3}{5} = \frac{2}{2}$ goed of fout en waarom?', verving hij $\frac{2}{7}$ door $\frac{1}{4}$ om de waarde van $\frac{5}{7}$ ongeveer te kunnen bepalen en daarmee rekende hij. Overigens is Alwyn in het algemeen vanaf het begin tegen IN-distractorfouten bestand geweest. Slechts in het eerste half jaar van zijn leerproces is het een enkele maal voorgekomen, dat hij eventjes voor zo'n fout zwichtte en desgevraagd bijvoorbeeld $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$ verklaarde.

De aandacht was dan niet speciaal op dergelijke kwesties gericht. In dit geval vond de ontsporing plaats tijdens de reconstructie van verdeelsituaties met behulp van tafelschikkingsschema's. Door terug te gaan naar de context van het verdelen en de uitkomsten ervan ontkrachtte hij zijn fout en verwierp die daarna met klem. In zijn schriftelijk werk maakte Alwyn nimmer IN-distractorfouten en in latere interviews evenmin.

De conclusie lijkt gerechtvaardigd, dat hij van meet af aan heeft begrepen waarom het ging bij de breuken, wat deze kwestie aangaat. Met de vergelijkingsproblemen ligt het iets gecompliceerder.

Zo beweerde hij na een half jaar dat iemand bij $\frac{6}{8}$ meer kreeg dan bij $\frac{3}{4}$ doch in zijn schriftelijk werk vermeldde hij naast zijn boom

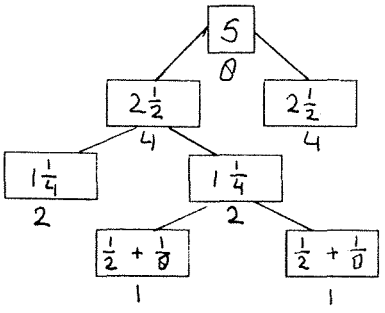


'bij allen evenveel'.

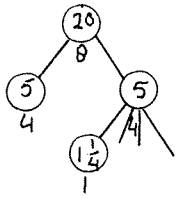
In een aansluitend interview blijkt dan dat hij toch wel weet hoe het zit. Zo verklaart hij bijvoorbeeld $\frac{5}{4}$ en $\frac{10}{8}$ zonder merkbaar gereken onmiddellijk gelijkwaardig. Daarbij dan zelf nog een nieuwe situatie bedenken ging hem minder vlot af. Hij verwierp zijn eerste suggestie $\frac{16}{8}$, door op de uitkomst voor ieder te letten en schoof vervolgens de al gegeven tafels bij elkaar tot $\frac{15}{12}$.

Dat hij sterk op de uitkomst per situatie gericht was, bleek uit zijn handelwijze bij $\textcircled{5}_{4}$ en $\textcircled{5}_{8}$, die hij paarsgewijs vergeleek als externe verhoudingen.[11]
Later gebruikte hij steeds efficiënter schematiseringsmiddelen om het vergelijken van verhoudingen aan te pakken. Bij het zelf construeren van situaties uit een gegeven situatie onder een gegeven voorwaarde, kwam zijn voorkeur voor handigheidjes bij het hoofdrekenen duidelijk naar voren. Bij het bedenken van tafels bijvoorbeeld, waarbij ieder slechts $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ... deel zou krijgen van ieders portie bij een gegeven tafel, bedacht hij onmiddellijk een algemene methode, namelijk van de portie op tafel $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... deel nemen of 2,3,4, ... keer zoveel kinderen als in de gegeven situatie. Zijn wat algoritmische instelling uitte zich daarbij door voor het gelijkwaardig verklaren van $\textcircled{4}_{8}$ en $\textcircled{1}_{2}$ naar het middel van de boomconstructie te grijpen. Later deed hij dit via hun uitkomsten. Het verschijnsel van het onjuiste additieve redeneren deed zich bij Alwyn niet voor gedurende zijn hele leerproces, hoewel hij soms wel eens een wat merkwaardige conclusie trok. Zo verklaarde hij $\textcircled{7}_{8}$ en $\textcircled{4}_{5}$ eens gelijk met als argument, dat beide slechts een 'stamdeel' van een hele verschilden $\frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1$ en $\frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$.
Het vergelijkingsprobleem in de vergelijkende toets aan het eind van het onderzoek beoordeelde hij juist, ook voor wat betreft het relatieve verschil.

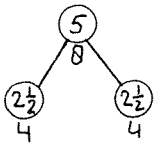
ad 2: voortschrijden in schematiseren
Het schematiseren kwam bij Alwyn wat moeizaam op gang. Zo tekende hij in eigen werk na de introductie van het tafelschikkingsschema toch nog losse tafels in plaats van een schema (§ 4.3 p.86). De eerste verkorting die hij kort daarna – evenals trouwens de meeste andere kinderen – al toepaste, was het weglaten van takken.
Na enkele ervaringen deed hij dit vrij systematisch. Na een klein half jaar maakte hij de volgende boom:



om te beslissen over ieders portie bij $\boxed{\frac{5}{8}}$. Hij tekende in zijn schema toen nog vierkante en rechthoekige tafeltjes. Spoedig daarna ging hij echter op rondjes over.
Zo'n maand na deze ervaring paste hij nieuwe verkortingselementen in zijn boomschema's toe. Hij tekende bijvoorbeeld niet meer alle tafeltjes,



of hij stapte bij een vergelijkingsopdracht uit het schema, zodra dat handig was, bijvoorbeeld:



waarna het vergelijken met $\frac{(5)}{4}$ een peuleschil was.
Nieuwe ideeën tot verkorten kwamen er daarna niet meer bij, althans wat het boomschema aangaat. Na het computerprogramma (zie § 4.3 p.90) paste Alwyn het weglaten van overtollige takken systematisch en consequent toe, zoals hij vòòr het computerprogramma ook al deed. Desgevraagd beweerde hij niet te weten iets van het computerprogramma geleerd te hebben.
Wat het verkortingsproces bij de toepassing van verhoudingstabellen aangaat, kan iets overeenkomstigs geconstateerd worden.
Er is een periode in zijn leerproces geweest waarin Alwyn zowel tabellen als boomschema's toepaste om equivalente verhoudingen te genereren.
Lang voor het uitproberen van het computerprogramma werden reeds tabellen samengesteld in het onderwijsleerproces. In eerste instantie maakte Alwyn tabellen, die veel meer informatie bevatten dan voor een gezochte oplossing strikt noodzakelijk was. Aan het einde van het eerste onderzoeksjaar – medio 1984 – maakte hij

S	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
K	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44

en

S	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
K	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

om de koffie van drie schepjes voor vier kopjes met die van vier schepjes voor vijf kopjes op sterkte te kunnen vergelijken.
Later zag hij in het herhaalde verdubbelen kennelijk een verkortingsmogelijkheid voor zijn procedure. In de retentietoets (september 1984) paste hij die

methode nog toe. Deze bevredigde hem blijkbaar niet, want twee maanden daarna verviel hij weer in zijn oude methode van overproduktie. Hij maakte toen om $\frac{18}{8}$ en $\frac{14}{6}$ te kunnen vergelijken tabellen tot aan resp. $\frac{180}{80}$ en $\frac{140}{60}$ zonder één tussenstap over te slaan.
Weer twee maanden later paste hij onder invloed van Stef abrupt uiterst verkorte tabellen toe voor de oplossing van een afstand-tijd kwestie, die kortweg neerkwam op: 'Jan schaatste 50 km in 4 uur en Frits 30 km in $2\frac{1}{2}$

4	12	en	$2\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{2}$
50	150		30	150

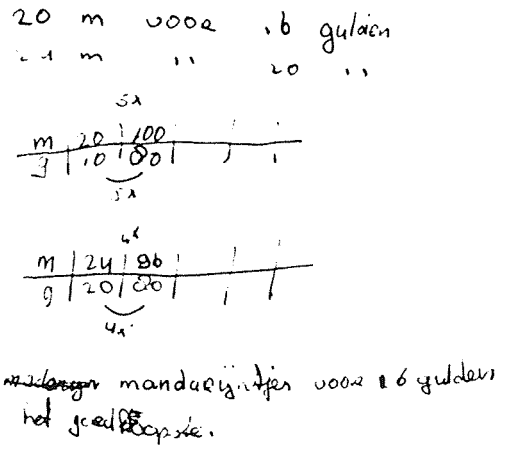
Zijn werk bevatte dezelfde rekenfout als dat van Stef. Voor het verschil gaf hij een absoluut antwoord. Dat dit echt niet de stand van zaken in zijn eigen schematiseringsproces weerspiegelde bleek een maand later. Hij verviel toen in veel omvangrijker werk, zij het, dat zich nu wel een echt verkortingsproces had ingezet. Om $\frac{(30)}{18}$ en $\frac{(22)}{12}$ te kunnen vergelijken, werden door Alwyn de volgende tabellen samengesteld.

30	60	90	12	240		
18	36	54	72	144		

en

22	44	66	88	110
12				

daarna vergeleek hij $\frac{330}{180}$ en $\frac{300}{180}$ met elkaar en deed een correcte ordeningsuitspraak, overigens kwalitatief. In het voortijdig afbreken van beide tabellen en de overgang op $\frac{330}{180}$ en $\frac{300}{180}$ tekenen zich de verkortingen af. Anderzijds blijkt de persistentie van zijn vroegere methoden, namelijk herhaald verdubbelen en vooral overproduktie, in plaats van de getallenparen zèlf op hun verdeelmogelijkheden na te gaan. Alwyns algoritmische instelling zien we hierin bevestigd.
In zijn latere werk komt tabeltoepassing nauwelijks meer voor, zij het, dat een enkele maal bij opgaven een lege tabel prijkt, terwijl hij de uitkomsten dan rechtstreeks besliste. Dit kan er op duiden, dat de tabel voor hem op de achtergrond als denkmodel functioneerde, of dat hij tijdig getalrelaties zag, dienstig aan een directe oplossing, waardoor de tabel overtollig werd.
Bij het maken van enkele toepassingsvraagstukken aan het eind van het experiment greep Alwyn terug op de tabel als schematiseringsmiddel. Hij paste ze uiterst verkort toe. Zijn werk week essentieel af van dat van zijn vrienden met wie hij veel placht samen te werken.



In de toets van het afsluitende vergelijkende onderzoek werden door Alwyn geen schematiseringen meer toegepast.
Al met al komen we tot de slotsom, dat de voortgang in het schematiseren voor Alwyn betrekkelijk moeizaam verliep. Er was weliswaar sprake van het spontaan toepassen van bepaalde verkortingen, doch tegelijkertijd waren minder efficient gebleken trekken in Alwyns schematiseren nogal hardnekkig, waardoor aan stijgingskracht werd ingeboet. Dit ondanks het computerprogramma en de bewustmakingsmomenten, die er in de lessen ten aanzien van verkortingen en eigenschappen binnen de tabel herhaaldelijk werden ingebouwd.[12]

ad 3: flexibel modelgebruik, schematoepassing (en flexibel rekenen daarbij)
In het voorgaande werd reeds duidelijk dat het schematiseringsproces van Alwyn enigszins star was. We denken daarbij in het bijzonder aan de persistentie van zijn neigingen tot overproduktie en herhaald verdubbelen in het schematiseren met de verhoudingstabel en de betrekkelijke moeizaamheid waarmee bij hem het construeren van boomschema's op gang kwam en zich ontwikkelde. Veel verder dan de meest voor de hand liggende verkortingen kwam hij niet.
In het algemeen kenmerkte Alwyns leerproces zich niet of nauwelijks door flexibel modelgebruik en/of schematoepassing. Weliswaar wist hij, wanneer het erop aankwam, toepasselijke schematiseringen en tabellen op te roepen, doch dit was dan in betrekkelijk voor de hand liggende situaties.
In dit verband noemen we nogmaals de toepassingsvraagstukken waarmee het experiment min of meer besloten werd. Ze hadden het karakter van een retentietoets, omdat iets vergelijkbaars al enkele maanden niet aan de orde was geweest vanwege het Land van Samen. Alwyns aanpak van een afstand-tijd-kwestie door middel van tabellen hebben we onder het vorige punt al gemeld. In twee andere gevallen – verdeelproblemen – visualiseerde

hij met schematische tekeningen om zijn oplossing te ondersteunen.
In de wijze waarop hij omging met een hele batterij van problemen kon voor Alwyn niets worden aangewezen dat zweemde naar de beschouwde indicator (hoofdstuk 7). Kortom, bij het horizontaal mathematiseren legde Alwyn geen enkele originaliteit aan de dag, terwijl hij, gelet op het vorige punt, bij het verticaal mathematiseren evenmin tot opzienbarende prestaties kwam.

ad 4: het zich voorstellen van formele problemen
Nadat het onderzoek anderhalf jaar aan de gang was, werd Alwyn in een interview gevraagd met de breuken $\frac{5}{8}$ en $\frac{2}{3}$ een aftrekking te maken. Alwyn begon onmiddellijk uit het hoofd te rekenen, besliste tot $\frac{2}{3}$ als degene die voorop moest in de opgave en tot een verschil van $\frac{1}{24}$. Hij kan zich geen verdeelgeschiedenis voorstellen die iets met $\frac{2}{3} - \frac{5}{8}$ te maken zou kunnen hebben.
Door Alwyns algoritmische voorkeur was zijn behoefte aan het zich voorstellen van formele problemen niet erg waarneembaar aanwezig. Hij was meer ingesteld op rekenen, wanneer hij eenmaal begreep waarom het ging. Dit bleek bijvoorbeeld uit het feit, dat voor hem vanaf zeker moment het situatiesymbool $\frac{(x)}{y}$ en de passende uitkomst $\frac{x}{y}$ – naar zijn zeggen – hetzelfde waren. Hij realiseerde zich daarbij overigens niet, dat hij om $\frac{(4)}{8}$ en $\frac{(1)}{2}$ als gelijkwaardig met elkaar in verband te brengen, rekende via de uitkomsten, dus $\frac{(4)}{8} \rightarrow \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{(1)}{2}$. Eertijds had hij hiervoor tafelschikkingsschema's nodig gehad. Op een dergelijk symbolisch niveau ontmaskerde hij ook IN-distractorfouten als zodanig, zonder er zich nog al te veel bij voor te stellen. Bijvoorbeeld $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ kon volgens hem niet gelijk zijn aan $\frac{2}{5}$, want '$\frac{2}{5}$ is minder dan $\frac{1}{2}$'.
Werd er expliciet gevraagd naar een voorstelling, dan slaagde hij daar slechts in wanneer het om simpele situaties ging.
Bijvoorbeeld bij de monografie voor $1\frac{1}{6}$ bedacht Alwyn desgevraagd het volgende verhaaltje.

6 mensen komen in een restaurant
ze bestellen 7 pizza ieder krijgt 1½

Echter, zelf een verhaaltje bedenken of zich een voorstelling maken van $\frac{3}{4} : \frac{1}{8} =$ kon hij niet. Dit ondanks het feit dat iets dergelijks vaker aan de orde was geweest (§ 4.3 p.132). Overigens dienen we ons hier wel bij te realiseren, dat de bewerking delen in het hele onderzoek onderbelicht bleef.
We komen, wat deze indicator aangaat tot de slotsom, dat deze voor Alwyns leerproces aan aanwijzende kracht inboet door zijn voorkeur voor min of

meer formeel rekenwerk.

ad 5: eigen constructies en produkties op symbolisch niveau
Na de eerste opdracht voor het monografieënschrift waagde Alwyn zich als enige van de hele groep ook aan de bewerking delen (§ 4.3 p.126).
Voor $\frac{6}{8}$ had hij $\frac{12}{8}$: 2, $\frac{24}{8}$: 4. $\frac{18}{8}$: 3, 3 : 4, $\frac{36}{8}$: 6, in deze volgorde.
In het algemeen waren zijn constructies en produkties nogal wisselend van kwaliteit. Zoals we in hoofdstuk vier hebben laten zien, kwam het construeren en zelf produceren veelvuldig aan de orde. De volgende chronologische impressie toont hoe Alwyn met de geboden mogelijkheden omsprong.

Na $3\frac{1}{2}$ *maand:* vrije produktie

Alwyns werk kan worden gekenschetst door:
— het op één uitzondering na toepassen van het optellen, met
— halven, kwarten en achtsten, onder
— toepassing van schuilnamen daarvoor, bijvoorbeeld $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{4}$;
$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{4}{4}$.

Na vijf maanden: verkenning van $\textcircled{5}_{8}$
Frans verdelen in achten met het bijhouden van tussenstanden. De saillantste trekken in Alwyns werk waren:
— toepassing van het herhaalde optellen, dus $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$, $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$, ...
en het
— vervangen door schuilnamen, bijvoorbeeld $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Twee weken later: monografie voor $\textcircled{5}_{8}$
Voor het verdelen op z'n Frans in $\frac{5}{8}$ noteert Alwyn de volgende tussenstanden:
$\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$ of $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$ of $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, $\frac{4}{8}$ of $\frac{2}{4}$ of $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$ of $\frac{2}{4} + \frac{1}{8}$ of $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.

Eén maand later: ordeningsmonografie
Alwyn construeert op grond van het vergelijken van $\textcircled{5}_{4}$ en $\textcircled{3}_{4}$ met (voorgeschreven) getallenlijnondersteuning de volgende ordeningsmonografie:
$1\frac{1}{4}$ is meer dan $\frac{3}{4}$
$1\frac{1}{4} > \frac{3}{4}$
$1\frac{1}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$
$1\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4}$
$1\frac{1}{4}$ is $\frac{2}{4}$ meer dan $\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}+\frac{2}{4} = 1\frac{1}{4}$
(gelijk maken)[13]
$\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}$.

Drie weken later: opnieuw een ordeningsmonografie
Alwyn produceerde aanzienlijk meer dan er in feite van hem werd gevraagd. Er was in kwaliteit geen noemenswaardig verschil met de voorgaande produktie. Dergelijk werk lag hem wel!

Twee weken later: dagverhaal met tijdlijn en passende sommen
Alwyn vindt geen uitweg uit het dilemma van een gemengd notatiesysteem. Hij spreekt in zijn verhaal van '7.15 opstaan, 7.30 beneden', geeft dit correct weer op de getallenlijn en in een som: $7\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 7\frac{1}{2}$, doch voor later op zijn dag beschrijft hij: '8.45 taalblok, 9.30 rekenen', met als betrekking '$8.45 + \frac{3}{4} = 9.30$'.

Vijf maanden later: constructieve vulling van de getallenlijn
Zo luidde de opdracht op grond van 'drie dropveters verdelen onder vier kinderen'.
Alwyn vult de getallenlijn vrij globaal in, waarbij hij geen gebruik maakt van extra steunpunten. Het bij het verdeelprobleem passende monografische materiaal bevat een nieuw kenmerk, vergeleken met zijn vorige produkties, namelijk hij geeft nu ook multiplicatieve samenstellingen, bijvoorbeeld:
$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \rightarrow 2 \times \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \rightarrow 3 \times \frac{3}{4}$ etc.

Vijf maanden later: opgaven samenstellen
Desgevraagd beslist Alwyn dat in een aftrekking met $\frac{5}{8}$ en $\frac{2}{3}$ de laatste breuk voorop moet. Het verschil bepaalde hij 'uit het hoofd'. Hij plaatste beide breuken niet helemaal precies op de getallenlijn, na twaalf hokjes van het ruitjespapier als eenheid te hebben gekozen vanwege 4×3 en $1\frac{1}{2} \times 8$. Bij $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{4}$ koos hij opnieuw voor 12 als eenheid met 4×3 als overweging.
Het getallenlijngebruik en het 'zoeken' naar een bij de opgave passende eenheid erop, zijn in feite overbodige activiteiten voor hem. Hij kan het uitsluitend mentaal af.

Twee dagen later: verkeerslicht
Voor het verkeerslicht $\frac{2}{3,}\frac{1}{2,}\frac{3}{4}$ (zie § 4.3 p.130) maakte Alwyn de tafel van $1\frac{11}{12}$ tot en met vier keer. Hij haalde zonder tussennotaties wèl helen uit, doch vereenvoudigde $3\frac{10}{12}$, $5\frac{9}{12}$ en $7\frac{8}{12}$ niet.
Bij de '$x \times 60$ sommen' in verband met het verkeerslicht produceerde hij zelf betrekkelijk voor de hand liggende opgaven als:

$\frac{1}{10} \times 60 = 6$ $\frac{1}{20} \times 60 = 3$ $\frac{1}{60} \times 60 = 1$

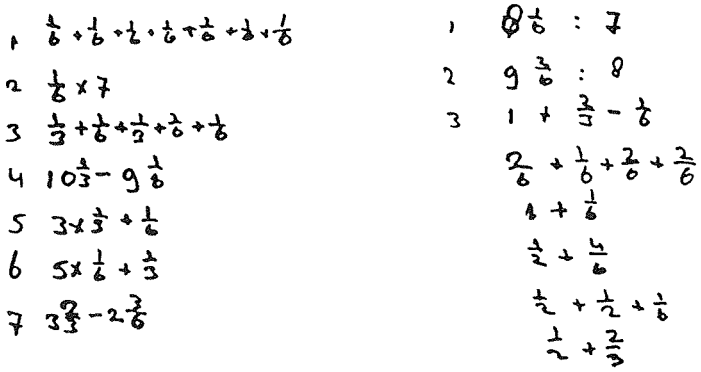
$\frac{2}{10} \times 60 = 12$ $\frac{2}{20} \times 60 = 6$ $\frac{2}{60} \times 60 = 2$

Vanaf een maand later: monografieën

In de meer systematische voortbrenging van monografieën vanaf 24-4-'85 maakte Alwyns werk een gevarieerde indruk. Hij paste de volgende produktiemethoden toe:

— variatie in bewerking: vrijwel steeds koos hij voor *alle vier* de hoofdbewerkingen;
— schuilnaamtoepassing in twee richtingen, dus zowel het vervangen *door* een schuilnaam als het opvatten *als* schuilnaam;
— gebruikmaking van de commutatieve wet om aan 'nieuwe' uiteenleggingen te komen.

Hier is een proeve van zijn werk.



Een half jaar later: proefwerk Land van Samen (LvS) (§ 4.3 p.143).

Alwyn bedenkt een betrekkelijk gevarieerd proefwerk, dat zich kenmerkt door:

— veel optel- en aftrekopgaven, waarbij hij tabelgebruik voorschrijft;
— enkele toepassingsvraagstukken, soms vergezeld van een toelichtend voorbeeld;
— een vertaalopdracht van gehele getallen naar LvS-getallen, uitsluitend optellen;
— enkele opdrachten tot vrije produktie, al dan niet met voorgeschreven schematiseringsvorm (tabel).

Opvallend in zijn werk is het ontbreken van vermenigvuldig- en deelopgaven waarmee hij afweek van zijn gewoonte bij het voortbrengen van monografieën. Kenmerkend is ook dat hij in enkele van zijn opdrachten de grens van zuivere LvS-getallen naar de breuken toe overschrijdt. Vragen naar regels voor bewerkingen ontbraken overigens.

Alwyn was gevoelig voor procedures. Dit bleek uit zijn vermogen uit $\frac{5}{8}$ en $\frac{2}{3}$ volledig mentaal de juiste opgave ($\frac{2}{3} - \frac{5}{8}$) samen te stellen en uit het hoofd tot het verschil ($\frac{1}{24}$) te beslissen. Of hij eigen methoden voor het aftrekken en optellen uit het gedurig vergelijken van situaties ontwikkelde, kan niet meer achterhaald worden. Met het vermenigvuldigen kon hij inzichtelijk uit de voeten door een opgave met gemengde getallen op basis van de distributiviteit uiteen te leggen. Delen kon hij in visueel materiaal voltrekken. Tot toepassen van formele regels kwam het nog niet met Alwyn, getuige zijn resultaten op de slottoets (hoofdstuk 7).

Samenvatting
Over Alwyns mathematiseringsproces op de lange termijn kan het volgende worden gezegd.
In het horizontaal mathematiseren vertoonde hij geen originaliteit, doch volgde hij de in het lesgebeuren door gezamenlijke inspanning gebaande paden, waarin hij meestal geen inbreng had. Bij het verticaal mathematiseren droeg hij daadwerkelijk bij aan de formele organisatie van het voortgebrachte systeem van de breuken. De kenmerken die het door hem voortgebrachte monografische materiaal weerspiegelen, bevestigen dit.
Wat het voortschrijden in schematiseren aangaat, was er sprake van een gemiddeld leerproces. Weliswaar werden door Alwyn de nodige verkortingen toegepast in de verschillende schematiseringsmiddelen, doch nimmer spectaculair buiten door de groep gebaande paden om. De kracht van de verhoudingstabel als mathematiseringsmiddel lijkt Alwyn doorgrond te hebben, gelet op zijn toepassing van lege schema's, zijn terugroepen van dergelijke schema's om toepassingsvraagstukken te maken na eerder meer verkorte methoden te hebben toegepast en zijn voorschrijven van dit middel tot schematiseren in een deel van zijn LvS-proefwerk.
In het min of meer formele werken op symbolisch niveau leek hij zich het beste thuis te voelen, waarbij hij vanaf het begin begreep waarom het ging. Zijn omgaan met vergelijkingsproblemen en zijn bestand zijn tegen IN-distractoren wijzen dit uit. Desondanks is er in de slottoets sprake van achterblijven in niveau. Een flink deel van het derde, formele niveau lag nog braak voor hem.

Carlien (9;7) – (11;11)

Algemeen
Uit de impressie van het onderwijs blijkt, dat Carlien wel iets meer in te brengen had dan Alwyn. Zij was het bijvoorbeeld die bij gelegenheid van het reflecteren op de kwestie van de equivalentie het begrip 'schuilnaam' voorstelde (§ 4.3 p.96). Zij was het ook die de regel voor het vermenigvuldigen in het Land van Samen formuleerde en tijdens deze bezigheid ook

nog op een formeler niveau van taalgebruik overschakelde (§ 4.3 p.140). Zo droeg zij in het algemeen op gezette tijden bij aan het onderwijsleerproces; evenwel in de regel niet in constructieve maar meer in reproduktieve zin. Het ging dus meestal om inbreng van iets dat ze al geleerd had. Door haar verbale kwaliteiten – zij was verbaal sterk – maakte zij een geflatteerde indruk en wist zij de feiten omtrent haar werkelijke mogelijkheden wat te verbloemen. Buiten het haar vertrouwde terrein stelde ze zich nogal passief op. Voorstellen of suggesties had ze niet in te brengen bij iets nieuws. In het zich op ander standpunt stellen, het vereenvoudigen van een probleem of het bedenken van een voorbeeld was ze niet bepaald sterk. Integendeel. Het toepassen van wat ze geleerd had, deed ze plichtmatig. Ze was vooral gericht op maniertjes, op algoritmen. Haar oplossingsgedrag in de interviews kenmerkte zich door nauwgezette navolging van wat in de les besproken was. Carlien is een wat spichtig meisje. Ze maakt een nuffige indruk, wat op een afstand. Ze heeft iets formeels. Op school trok zij op met Clara en werkte met haar samen. Of het door deze band kwam, is niet precies te zeggen, maar samen legden ze nogal eens de nodige onzekerheid aan de dag omtrent de bedoeling van opdrachten of door hen gekozen uitvoeringen. Carlien wilde op gezette tijden haar werk voortijdig laten zien om bevestigd te krijgen, wat zij eerder gehoord had, namelijk dat het in orde was, of om te vragen hoe ver ze moest gaan bij constructies en produkties, bijvoorbeeld 'tot hoever verhoudingstabellen moesten'. Dit wees erop, dat zij aanvankelijk absoluut niet doorzag, dat de gevraagde tabellengte wel eens zou kunnen samenhangen met het opgegeven vraagstuk. Soms kwam het ook, omdat haar geest iets vluchtigs had. Het beheer over haar werkgeheugen tijdens het oplossen van een probleem brak haar nogal eens op. Carlien kon, wanneer haar iets niet zinde, echt hinderlijk zijn in de les. Zij stak haar ongenoegen dan niet onder stoelen of banken en zij vond ook dat zij daartoe het volste recht had. Wanneer anderen iets dergelijks hadden, kon zij onverstoorbaar en enthousiast aan een produktie-opdracht beginnen, zich nergens iets van aantrekkend, alsof ze zeggen wilde, dat het haar niets aanging. In haar werk klonk dat formele, dat afstandelijke, soms ook wat door.

Haar dagverhaal begon ze bijvoorbeeld met: 'Mijn dag begint om $7\frac{1}{2}$. Om $7\frac{3}{4}$ eet ik. $\begin{cases} 7\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 7\frac{3}{4} \\ 7\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 7\frac{1}{2} \end{cases}$ Naar school ga ik om $8\frac{1}{2}$', etc.

Carlien besloot haar basisschoolcarriere als inspectrice van het hotelwezen. Dat ging haar goed af.

In het onderdeel rekenen van de CITO-eindtoets 1986 voor het basisonderwijs had zij 24 van de 27 opgaven voor breuken en verhoudingen correct. Zij scoorde op de onderdelen taal, rekenen en informatieverwerking resp. de percentielen 43, 56 en 97. Zij trad toe tot de gelederen van een scholengemeenschap voor MAVO/HAVO.

Specifiek

ad 1: begripsverwerving en IN-distractoren

Carliens leerproces kwam betrekkelijk moeizaam op gang. Haar eerste stappen in het (horizontale) mathematiseringsproces, die beoogden haar onderzoeksgebied te definiëren, waren wankel. Dit werd mede veroorzaakt door het feit dat een enkel extra gegeven in een vraagstelling haar al in verwarring bracht. Bijvoorbeeld die keer toen gevraagd werd naar de lengte van $\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4}$ van de tandpastasliert, waarmee Peter Brokken eens de badkamervloer sierde, terwijl van de hele en de halve sliert de lengten al gezamenlijk waren vastgesteld (§ 4.3 p.75). Ook interpreteerde zij 'x keer zo groot, sterk, ...' als *additief*, wat de nodige misverstanden wekte en had zij de grootste moeite – er waren inmiddels vijf maanden verstreken – om naar aanleiding van de baktijden in de Smickel (§ 4.3 p.96) uit resp. vier, zes en tien pannekoeken in één uur, per pannekoek baktijden van $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{10}$ uur vast te stellen. Haar breukbegrip was nog erg contextgebonden en zat vastgebakken aan pannekoeken en pizza's.

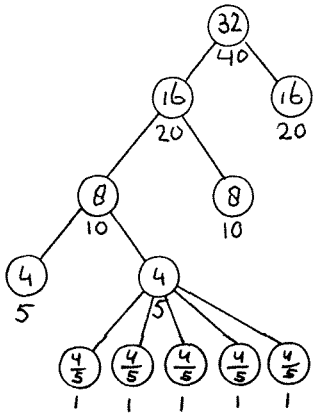
Het zal ook geen bevreemding wekken, dat Carlien bij de constructie van de getallenlijn met breuken merkbaar hinder ondervond van de kwestie puntinterval (§ 4.3 p.102). Ook kwam het bij herhaling voor, dat Carlien moeite had met het innemen van het juiste relatieve standpunt. Na anderhalf jaar deed zij in dit opzicht soms toch nog onjuiste keuzen. Ondanks dit alles bleek zij al gauw betrekkelijk weerbaar tegen IN-distractorfouten. In het begin liet zij zich wat overdonderen, wanneer dergelijke fouten werden uitgelokt. Zij moest vooral optornen tegen een wat weifelmoedige houding. Zij gaf in het eerste jaar van het onderzoek weliswaar enkele malen toe aan dergelijke fouten, met name bij ordeningsvragen, maar steeds bleek zij dan gevoelig voor de cognitieve conflicten die naar aanleiding daarvan werden opgeroepen. Een uitkomst was voor haar methode-onafhankelijk, dus kon het niet zo zijn dat één vraagstuk tot wezenlijk verschillende uitkomsten leidde. Dat Carlien zich tegen dit verschijnsel trachtte te wapenen, bleek in de loop van het eerste onderzoeksjaar. Carlien loste een vergelijkingsprobleem op door in eerste instantie globaal te verdelen (§ 4.3 p.119). De porties voor ieder in de twee onderzochte situaties bepaalde zij resp. op $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ en $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$. Zij neigde er waarneembaar toe de laatste portie tot de grootste te verklaren doch verwierp deze gedachte spontaan. Ze koos daarna gedecideerd voor $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ op grond van een verklaring vanuit het verdelen. Sindsdien was zij er tegen bestand, althans dit verschijnsel hebben we daarna in haar leerproces niet meer waargenomen. Haar schriftelijke activiteiten zijn overigens vanaf het begin van deze smetten vrijgeweest.

Deze vaststelling behoeft niet in conflict te zijn met het doen van onjuiste relatieve keuzen, een verschijnsel dat bij Carlien ook na het verdwijnen van IN-distractorfouten uit haar leerproces nog wel eens voorkwam. Het betrof dan steeds standpuntverandering ten aanzien van de eenheid gedurende de oplossing van een vraagstuk. Deze kwestie houdt o.i. meer verband met het zich realiseren van de eenheid waarmee gewerkt wordt en het beheren van een dergelijk uitgangspunt in het werkgeheugen tijdens het oplossingsproces. Wat het vergelijken van situaties aangaat, is Carliens leerproces vrijgebleven van additieve redeneerfouten met verhoudingen. Daarmee wil niet gezegd zijn, dat een en ander zich volkomen vlekkeloos voltrok. Het in louter kwalitatief opzicht beoordelen van situaties ging haar meestal goed af. Zij redeneerde bij de koffiekwestie bijvoorbeeld (§ 4.3 p.90): 3S : 4K kun je slapper maken door er meer water in te doen.
Ook nam zij juiste beslissingen in geval
6S : 4K met 6S : 5K vergeleken moest worden, of
6S : 4K met 3S : 2K.
Met lastiger getallen, bijv. 6S : 4K en 7S : 5K ging het in het begin mis of voegde zij een juiste kwalitatieve conclusie aan een onjuiste uitkomst toe. Bijvoorbeeld bij het vergelijken van de verdeelsituaties $\frac{(15)}{12}$ en $\frac{(15)}{10}$ waarvoor zij zonder schematiseringen direct de uitkomsten bepaalde op resp. $1\frac{1}{4}$ en $1\frac{1}{2}$ voor ieder en desondanks koos voor de uitkomst : 'Bij 15 met 12 krijg je meer, want er zijn minder kinderen.'
Dergelijke vergissingen kwamen vaker bij haar voor, alsook het verwisselen van de getallen in een verhoudingspaar. Wanneer ze zelf situaties onder voorwaarden construeerde, veranderde zij beide variabelen, wat het voortbrengen van correcte uitkomsten eveneens bemoeilijkte (§ 4.3 p.92). Zij had er ook een betrekkelijk lange periode voor nodig om dergelijke vergelijkingsvraagstukken numeriek correct te kunnen afhandelen met het oog op de bepaling van het verschil (zie ook het volgende punt). Gedurig zaten er van dergelijke kleine rimpels in Carliens leerproces. Haar verhoudingsredeneren werd daarmee echter niet overschaduwd door het verschijnsel van het onjuiste additieve redeneren.

ad 2: voortschrijden in schematiseren
Het schematiseringsproces met de verhoudingstabel verliep niet bepaald glad voor Carlien, d.w.z. wat de inzichtelijke kant ervan aangaat. In technisch opzicht lukten bepaalde dingen wèl . Met de constructie van boomschema's was iets overeenkomstigs aan de hand. Het begaan van de schematiseringsweg was aarzelend.
Haar eerste schema was een complete boom voor $\frac{(30)}{24}$ tot aan $\frac{(5)}{4}$. Geen tak sloeg ze over. Een week later beproefde zij opnieuw haar krachten op $\frac{(30)}{24}$. Ze ging nu verder en maakte ook een onderverdeling voor $\frac{(5)}{4}$ tot aan 'tafeltjes

van één', herhaalde dit voor de volgende tafel van $\frac{5}{4}$, tekende bij de laatste slechts vier streepjes en verantwoordde 'daar ook hetzelfde'. Een maand later liet ze de streepjes met de toegevoegde verantwoording achterwege. Weer een maand later bouwde zij weer complete bomen tot aan het einde toe. Opnieuw een maand later stelde zij verkorte bomen samen om situaties te kunnen vergelijken en ordenen (§ 4.3 p.91). Zij bracht de groei van haar boompjes tot stand zodra het vergelijken en ordenen moeiteloos kon worden gedaan. Tegen het einde van het eerste experimenteerjaar paste Carolien voor het eerst het snoeien van takken als systematisch verkortingsprincipe toe.

Bij die gelegenheid legde zij $\frac{32}{40}$ uiteen middels herhaalde tweedelingen. Eenmaal aangekomen bij $\frac{4}{5}$ wilde zij haar methode nog voortzetten, herriep dit en vervolgde met een vijfdeling, aldus:



Kort daarna paste Carlien voor het eerst tabellen toe in vergelijkingsproblemen, nadat eerder voor enkelvoudige situaties ook al tabellen waren voortgebracht, bijvoorbeeld om de verdeelverhaaltjes op rij te organiseren, waarin ieder $\frac{2}{3}$ kreeg.

Deze keer – het eerste experimenteerjaar liep nog steeds ten einde – vergeleek Carlien $\frac{6}{8}$ met $\frac{4}{5}$. Zij stelde de volgende tabellen samen:

S	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
K	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

en

S	4	8	12	16	20	24
K	5	10	15	20	25	30

Carlien deed dus meer dan strikt nodig was. In haar ordeningsmonografie voor de uitkomsten van $\frac{6}{8}$ en $\frac{4}{5}$ verwerkte zij het verschil van beide:

'$\frac{4}{5}$ is $\frac{1}{20}$ meer dan $\frac{6}{8}$; $\frac{4}{5} - \frac{1}{20} = \frac{6}{8}$ en $\frac{6}{8} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$'.

Voor de gevallen $\frac{3}{4}$ en $\frac{5}{8}$ en $\frac{3}{5}$ en $\frac{10}{15}$ volstond zij – in hetzelfde werk – met telkens één tabel zonder overtollige gegevens:

$\frac{3}{4}$ $\frac{5}{8}$

$\frac{3}{4}$ is sterker $\frac{6}{8} - \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$.

S	3	6
K	4	8

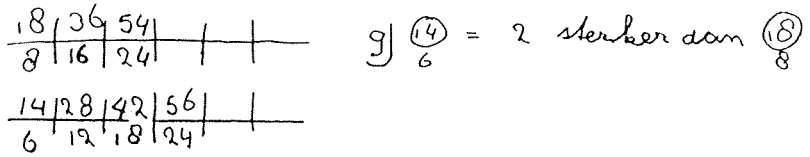
In de retentietoets, zo'n drie maanden na voorgaande bevindingen, kenmerkten Carliens boomconstructies zich voornamelijk door herhaalde tweedelingen en het systematisch weglaten van takken onderweg als enige verkorting.

Voor $\frac{13}{15}$ paste ze bij die gelegenheid na elkaar een drie- en een vijfdeling toe om met $\frac{4}{5}$ te kunnen vergelijken. Ze leverde daarbij een opmerkelijke prestatie, door de foutieve 'tafel' $\frac{4\frac{3}{8}}{5}$ na de eerste stap correct op te delen in vijf tafeltjes $\frac{\frac{3}{4}\ \frac{1}{8}}{1}$!

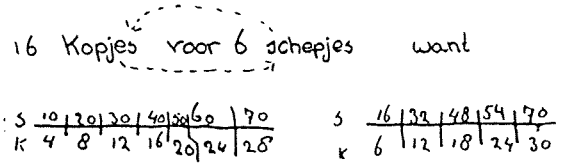
Carlien werd zich daarna allengs bewuster van de verkortingsmogelijkheden van beide schemavormen, zij het, dat de toepassing sterk situatiegebonden bleef. Dit uitte zich hierin, dat zij meer afging op de eigenschappen van de getallen in een gegeven situatie, dan dat zij gericht was op algemene kenmerken van de door haar toegepaste methoden over de situaties heen.

Zo zag zij bijvoorbeeld kans om in het al meer besproken schaatsprobleem (§ 4.3 p.112) de getallen naar haar hand te zetten, doch toonde zich tegelijkertijd verrast, dat de door haar toegepaste tabellen best wat langer gemaakt mochten worden dan zij deed wanneer dit voor het op te lossen vraagstuk handig was. Iets overeenkomstigs zagen wij bij de boomschema's. Tijdens de verwerking van het computerprogramma zocht zij naar opdelingen in 6 en zelfs meer tafels als eerste stap, om snel tot een uitkomst te komen, wanneer de gegeven vraagstukken dit toelieten. Na het computerprogramma ging zij hiermee voort, zij het veel minder efficiënt. Het weglaten van takken was de enige verkortingsmogelijkheid die zij systematisch toepaste. Naar haar zeggen leerde zij van het computerprogramma: 'Dat we hele korte bomen moesten maken, niet lange'.

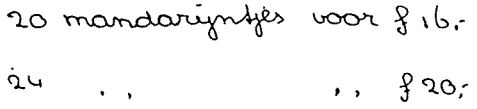
Wat de tabellen aangaat, de ene keer werkte zij naar de eerste gemakkelijk te vergelijken situaties toe:

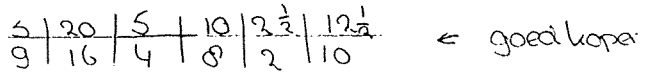


en een volgende keer leverde ze weer overproduktie:



Pas tegen het einde van het onderzoek richtte Carlien zich systematisch op eerste gemakkelijk vergelijkbare getallenparen zonder daarbij tussenstappen over te slaan. Tevens is dan waarneembaar, dat zij zich meer bewust geworden is van de eigenschappen, die in een tabel toepasbaar zijn, zoals uit het volgende werk blijkt:



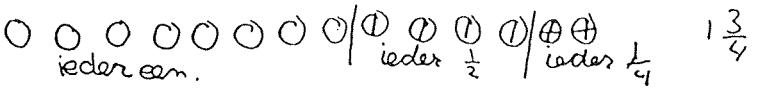


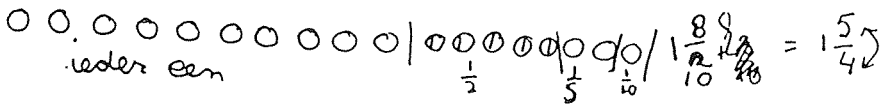
Samenvattend komen we tot de slotsom, dat haar schematiseringsproces de algemene karakteristiek weerspiegelt, die we van Carlien gegeven hebben. Vrij lange tijd klonk er onzekerheid in haar schema's door omtrent de manier van toepassen. Was Carlien eenmaal vertrouwd met een bepaald niveau van schematisering, dan hield zij daaraan vast. Op den duur ging er dus wel een zekere stijgingskracht van uit. Uit haar omgaan met beide schema's bleek dit, zij het dat voor de verhoudingstabellen gold, dat zij daarbij haar neiging tot overproduktie afwisselde met het nastreven van korte tabellen. Bij het tafelschikken daarentegen hield het consequent gesnoeide doch overigens volledige schema lang stand. Wel gaf Carlien er gedurig blijk van te weten in welke situaties de besproken schema's toepasbaar waren.

ad 3: flexibel modelgebruik, schematoepassing (en flexibel rekenen daarbij)

De vorige indicator wees uit, dat Carliens schematiseringsproces betrekkelijk star was. Een enkele maal vertoonde een oplossingsproces wel eens een verrassende wending. Met name het slechten van numerieke obstakels ging haar soms goed af, net zo als het verwerpen van een stap in de schematisering ten gunste van een meer passende. In dit verband dient ook nog het

vulmachineprobleem genoemd te worden. Carlien koos als enige – samen met Frans – voor de verhoudingstabel als schematiseringsvorm.
Wat het toepassen van de getallenlijn aangaat speelde de kwestie punt-interval. (§ 4.3 p.102) haar geruime tijd parten. In de retentietoets aan het begin van het tweede onderzoeksjaar wist zij van de getallenlijn geen adequaat gebruik te maken, omdat zij de uitkomsten van een verdelingssituatie als intervallen invulde op een getallenlijn waarop de eenheden als punten waren aangegeven.
Het gebruik van de getallenlijn is voor Carlien problematisch gebleven. Zij maakte er spontaan geen gebruik van of zij paste het lijnstuk als model toe.
Tegen het einde van het tweede onderzoeksjaar, bijvoorbeeld toen gevraagd werd de uitkomst van $2\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ te schatten en vervolgens meer nauwkeurig te bepalen met steun van de getallenlijn, begon zij met $2\frac{1}{2}$ te representeren door lijnstukken, dus duidelijk geen aaneengesloten getallenlijn. Behalve de genoemde vaardigheid in het vinden van een uitweg via getalobstakels en het weten wanneer een bepaald schema toe te passen, is er één kwestie die karakteristiek was voor Carliens aanpak in het algemeen. Zij zocht namelijk meestal een uitweg in het visualiseren van een vraagstuk met verdeeltekeningen. Herhaaldelijk paste zij deze methode toe. Dit ging dan gepaard met een zekere op inzicht berustende souplesse, zoals bijvoorbeeld blijkt uit de wijze waarop zij – het was na zeven maanden – $\textcircled{14}{}_{8}$ en $\textcircled{18}{}_{10}$ als verdeelsituaties met elkaar vergeleek:





De verdeling voor $\textcircled{18}{}_{10}$, niet tot het einde toe uitgevoerd, wijst op de nodige wendbaarheid van haar breukbegrip. Uit de wijze, waarop zij daarna de verschillende partiële uitkomsten samenstelt, blijkt, dat het begrip mentaal operationeel is.

ad 4: het zich voorstellen van formele problemen
Bij de beschouwing van de vorige indicator bleek, dat Carlien lange tijd toegaf aan de neiging min of meer formeel gestelde problemen te concretiseren. Zij had klaarblijkelijk behoefte aan zichtbaar materiaal, waarmee zij zich een voorstelling kon maken van wat er gevraagd werd. Wanneer van haar een

voorstelling gevraagd werd, gaf zij er een verdeeltekening bij, zoals in haar monografie voor $1\frac{1}{6}$.

6 kinderen verdelen 7 pannekoeken

Ging het om het vergelijken van situaties of het onder voorwaarden wijzigen ervan – zoals onder de eerste indicator uiteengezet – dan kon Carlien zich in kwalitatieve zin de uitkomsten en consequenties heel goed voorstellen.
Kortom, uit Carliens werk sprak een duidelijke behoefte aan het zich kunnen voorstellen van situaties. Daarvoor riep ze verdeeltekeningen als bemiddelaars te hulp, omdat haar eigen vermogen daartoe tekort schoot. Dit sprak bijvoorbeeld ook uit haar redeneringen om IN-distractorfouten te ontmaskeren. Een vraag als: 'Waarom kan $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ niet gelijk zijn aan $\frac{2}{5}$?', beantwoordde zij op formele gronden: 'Omdat je niet zò mag optellen.' Voor de mentale constructie van een voorstelling waarom het niet mocht, had ze steeds steun van buitenaf nodig.

ad 5: eigen constructies en produkties op symbolisch niveau
In het algemeen hadden de eigen constructies en produkties van Carlien iets plichtmatigs, voorzover deze het symbolische niveau betroffen. In het kiezen van schema's en modellen gedroeg Carlien zich wat vrijer.

We geven ook voor Carlien een chronologische impressie.
Na $3\frac{1}{2}$ *maand*: vrije produktie
Carlien levert een indrukwekkende prestatie: méér dan 20 sommen, zoals bijvoorbeeld: $\frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$; $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$; $\frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{2}{4}$.
Haar werk kan gekenschetst worden door:
— het toepassen van de bewerkingen optellen en aftrekken met
— halven, kwarten en achtsten, onder
— toepassing van onderlinge gelijkwaardigheid en
— de inverse relatie tussen de toegepaste bewerkingen.

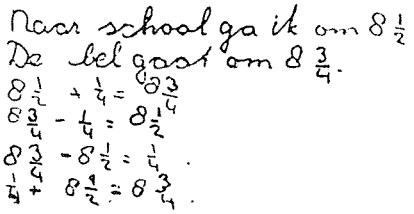
Twee maanden later: monografie voor $\textcircled{\frac{5}{8}}$
Voor het verdelen op z'n Frans, het ging om $\textcircled{\frac{5}{8}}$, noteert Carlien de volgende tussenstanden:
$\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$, $2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ $(\frac{2}{8})$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$, $3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$; $4 \times \frac{1}{8} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$, $\frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$, $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.

Het multiplicatief samenstellen, de toepassing van gelijkwaardigheden en het uitgaan van een voorafgaande tussenstand zijn de opmerkelijke trekken in haar werk.

Een maand later: ordeningsmonografie
Carlien construeert op grond van het vergelijken van $\textcircled{5}_4$ en $\textcircled{3}_4$ met (voorgeschreven) ondersteuning van de getallenlijn – met als extra voor $\textcircled{5}_4$ een verdeeltekening – de volgende ordeningsmonografie:
$1\frac{1}{4}$ is meer dan $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = 1\frac{1}{4}$ $1\frac{1}{4} > \frac{3}{4}$ (gelijk maken)
$1\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$
$1\frac{1}{4} - \frac{3}{4} =$

Een maand later: opnieuw een ordeningsmonografie
Dit keer voor $\textcircled{5}_4$ en $\textcircled{9}_8$. Haar werk was minder gevarieerd dan dat van een maand of een week ervoor. Zij 'vertaalde' uitspraken als '$1\frac{1}{4}$ is $\frac{1}{8}$ meer dan $1\frac{1}{8}$' niet in passende 'sommen'.

Twee weken later: dagverhaal met tijdlijn en sommen
Eerder al maakten we melding van het feit, dat Carlien in dit geval de formele notatie in gemengde getallen wist toe te passen. Aan het vermengen van notatiesystemen leek zij geen behoefte te hebben. De uitspraken werden naar behoren op de getallenlijn gevisualiseerd en twee uitspraken bracht Carlien op gevarieerde wijze door middel van sommen met elkaar in verband.
Bijvoorbeeld:



Vijf maanden later: constructieve vulling van de getallenlijn
Het ging om 'drie dropveters verdelen onder vier kinderen'. Carlien vulde de getallenlijn vrij globaal in zonder verdere steunpunten. Het door haar voortgebrachte monografische materiaal was aanzienlijk minder gevarieerd dan dat ze bijvoorbeeld destijds voor $\textcircled{5}_8$ produceerde.
Zij maakte vrijwel uitsluitend optelsommen, paste geen gelijkwaardigheden toe en stelde ook betrekkingen samen, die buiten de orde waren, zoals $\frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{6}{4}$ en $\frac{5}{4} + \frac{4}{4} = \frac{9}{4}$. De bouwsteen was immers $\frac{3}{4}$. Haar monografie met $\frac{3}{8}$ als bouwsteen was weer wat gevarieerder door toepassing van vooraf-

gaande tussenresultaten en het vermenigvuldigen. Kortom, er zat niet echt systeem in haar werk.

Vijf maanden later: verkeerslicht
Voor het verkeerslicht $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ ontspoorde Carlien in de tafel van $1\frac{11}{12}$ bij drie keer. Zij vereenvoudigde zonder tussennotaties wel door helen uithalen, maar paste bijvoorbeeld voor $3\frac{10}{12}$ niet $3\frac{5}{6}$ als schuilnaam toe. De '$x \times 60$-sommen inspireerden Carlien tot een redelijke produktie met $\frac{1}{10} \times 60$ tot en met $\frac{4}{10} \times 60$ en overeenkomstige opgaven voor $\frac{1}{12}$ tot en met $\frac{4}{12}$, $\frac{1}{20}$ tot en met $\frac{4}{20}$ en $\frac{1}{30}$ tot en met $\frac{4}{30}$.

Vanaf een maand later: monografieën
Aan Carliens werk lagen de volgende produktiemethoden ten grondslag:
— variatie in bewerking; in elke monografie paste Carlien de hoofdbewerkingen toe, uitgezonderd het delen;
— het tweezijdig toepassen van schuilnamen, namelijk 'vervangen door' en 'opvatten als'; zij bracht hiermee een zekere systematiek in haar produkties; $\frac{5}{6}$ legde zij bijvoorbeeld o.a. uiteen in $\frac{1}{6} + \frac{2}{3}$, $\frac{2}{12} + \frac{4}{6}$ en $\frac{4}{24} + \frac{8}{12}$;
— het (incidenteel) toepassen van de commutatieve wet of een andere eigenschap; bijvoorbeeld $1\frac{1}{8} = 9 \times \frac{1}{8}$ en $1\frac{1}{8} = 4\frac{1}{2} \times \frac{2}{8}$; hiermee vergiste zij zich nogal eens, bijvoorbeeld $\frac{5}{6} = 5 \times \frac{1}{6}$ en $\frac{5}{6} = 5 \times \frac{2}{3}$.

Een half jaar later: proefwerk Land van Samen (LvS)
Carlien produceerde een omvangrijk en gevarieerd proefwerk, dat kan worden gekenschetst door:
— veel opgaven voor het oefenen van de vier hoofdbewerkingen, ook het delen is ruimschoots vertegenwoordigd;
— veel vertaalopgaven naar het LvS toe, optellen, aftrekken en vermenigvuldigen, toegelicht met een voorbeeld:
$2 + 3 = 5$ en $\frac{4}{2} + \frac{6}{2} = \frac{10}{2}$;
— een enkel toepassingsvraagstuk (eerlijk verdelen);
— enkele opdrachten tot constructies en vrije produkties, waaronder mooie vragen als:

maak een land van Samen somen waar 3/4 uit komt.

(in enkele gevallen ging het om de constructie van tabellen).

Alle niet in tekst gestelde opgaven, 29 in getal, maakte zij ook zelf en zo goed als feilloos, ook de delingen. Vragen naar regels stelde zij niet en evenals Alwyn ging ook zij de grenzen van het LvS te buiten.

Voor het zelf ontwikkelen van een methode voor de bewerkingen bleef het bij uitwerkingen in visueel materiaal, wat het delen aangaat. Voor het vermenigvuldigen kon zij als diverse anderen, het inzichtelijk uiteenleggen onder respectering van de distributiviteit over de optelling toepassen. Aan het einde van het onderzoek waren haar methoden voor de bewerkingen nog niet geformaliseerd, blijkens haar reacties op de kale opgaven in de slottoets.

Samenvatting

Uitkomsten van vraagstukken waren voor Carlien methode onafhankelijk vanaf het begin. Zij liep weliswaar enkele malen in de val met IN-distractorfouten, maar dit herstelde zij weer, zodra een gevisualiseerde oplossing was voortgebracht. Het was alsof zij zich liet overbluffen door dergelijke fouten in plaats van op haar inzichten te vertrouwen. Wat haar inzichten aangaat was Carlien lange tijd materiaalafhankelijk. Dat wil zeggen gedurig visualiseerde zij problemen om zich er een voorstelling van te kunnen maken. Dit gold niet het verhoudingsredeneren in kwalitatieve zin. Dat ging haar zonder plaatjes ook goed af. Onjuiste additieve redeneringen kwamen niet voor, ook niet in de fase van de numerieke behandeling van verhoudingen door voortschrijding in schematisering. Voor dit laatste leverde Carlien overigens geen opmerkelijke bijdrage aan de collectieve inspanning. Voor de constructie van boomschema's bleef zij in feite vasthouden aan slechts één type van verkortingen. Haar schematiseren met verhoudingstabellen verliep wat wisselvalliger, gekenmerkt door overproduktie en verkorting. Zij volgde daarbij overigens slechts na, wat door anderen was aangereikt.

Zo tegen het einde van haar leerproces is er sprake van een zekere doorbraak. Zij weet dan de toepassing van de tabel en de daarin uit te voeren bewerkingen naar het gestelde probleem te voegen.

Met het kiezen van schematiseringen bij vraagstukken had Carlien weinig moeite. Voor het overige bestond Carliens flexibele modeltoepassing hierin, dat zij systematisch vraagstukken visualiseerde met cirkels en soms met lijnstukken. Het lange tijd hieraan vasthouden vormt een aanwijzing, dat de eerste schreden op de weg van het verticale mathematiseren door Carlien moeilijk gezet konden worden. Zij had er behoefte aan langere tijd in het grensgebied van realiteit en wiskunde te vertoeven. Mede hierdoor mochten van haar geen belangwekkende bijdragen aan het verticale mathematiseringsproces verwacht worden. Haar constructies en produkties bleven ruimschoots binnen de marges van wat de groep als geheel vermocht. Het was allemaal wat plichtmatig, op zeker spelend, de feiten volgend, al moet gezegd, dat Carlien met name in het vrije produceren zowel qua omvang van het werk als qua variëteit soms opmerkelijk voor de dag kwam.

Neen, Carliens bijdragen aan het onderwijsleerproces lagen vooral op verbaal terrein. Haar term 'schuilnaam' voor equivalentie bijvoorbeeld, had een beslissende invloed op de onderlinge communicatie.

Clara (9;4) – (11;8)

Algemeen

Naar de onderwijsimpressie uitwees, droeg Clara herhaaldelijk bij aan het onderwijsleerproces; meestal - net als Carlien - in reproduktieve zin, een enkele maal ook constructief. Clara was een allervriendelijkst meisje, van wie de cognitieve mogelijkheden niet zo gemakkelijk peilbaar waren. Samen met Carlien deed zij dikwijls een beroep op de leraar, vrijwel steeds om hulp.

Was het onzekerheid? Of was haar grondhouding op het krijgen van aandacht gericht? Wellicht ook was het Carliens onzekerheid, die in dit soort gevallen de doorslag gaf. Hoe het ook zij, Clara slaagde erin een tweeslachtige indruk te wekken. Een goede leerling aan de ene kant, vooral wanneer het op het verbaliseren aankwam van bepaalde kwesties en voor het overige, zoals het omkeren of vereenvoudigen van problemen, het zelf bedenken van voorbeelden of dergelijke bevestigde zij steeds het oordeel van haar respectieve leraren: 'Durft niet veel'. Het gedurende lange tijd vasthouden aan het concrete was ook voor haar typerend. Clara nam dus een afwachtende houding aan, wanneer het op initiatieven tot iets nieuws aankwam. Zij werkte betrekkelijk traag. Zij maakte, wat werktempo betreft, nog net deel uit van de achterhoede van de groep, samen met Carlien, Margreet, Mark en Michael. Meestal hoorde Nanja ook nog tot de bezemwagenploeg. Dwongen de omstandigheden Clara tot kleur bekennen, bijvoorbeeld wanneer een IN-distractordilemma haar voor het blok zette, dan ging zij een enkele maal hierin ook mee. Vermoedelijk uit onzekerheid, maar niet omdat haar breukbegrip niet tegen de situatie was opgewassen. En ook haar behoefte aan aandacht mogen we niet uit het oog verliezen als verklaringsbron voor haar aarzelen of ontsporen. Clara voltooide haar basisschoolopleiding in de rol van kamermeisje in een hotel in de musical op de afscheidsavond, een rol die bij haar paste. Met de CITO-eindtoets 1986 basisonderwijs behaalde zij voor het onderdeel rekenen een percentielscore van 100 en voor taal en informatieverwerking beide 77. Zij had dus ook alle 27 opgaven voor breuken en verhoudingen correct.

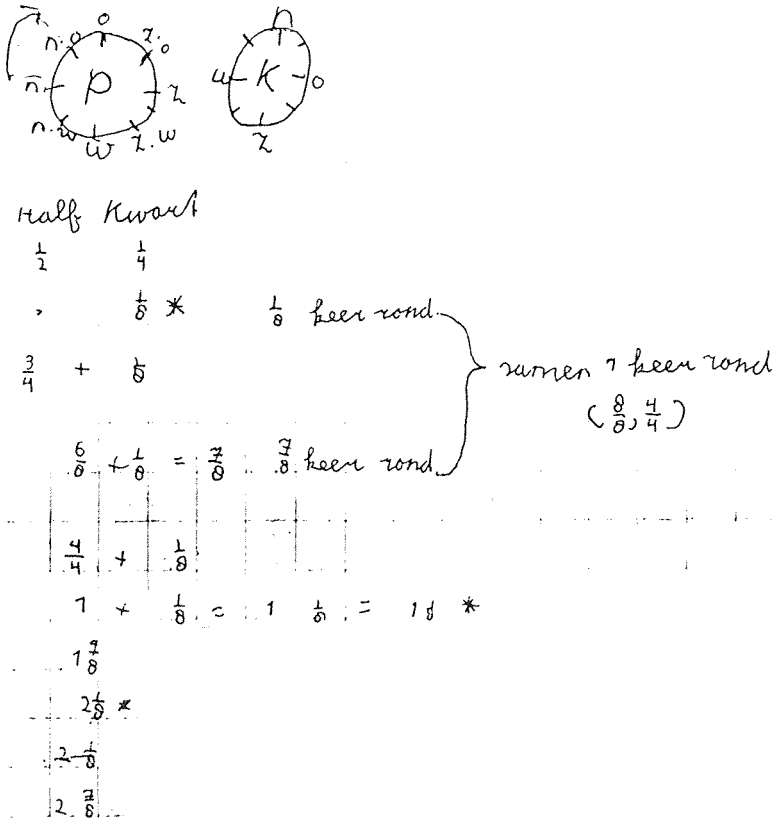
Zij klasseerde zich tenslotte voor de brug naar het rijk van HAVO en VWO. Of dit geen brug te ver is, zal de tijd uitwijzen.

Specifiek

ad 1: begripsverwerving en IN-distractoren

In de eerste inspanningen tot het horizontaal mathematiseren had Clara een constructief aandeel. Zij vond dat het eerlijke in breukverwekkend verdelen zich zou moeten kenmerken door 'ieder evenveel' en niet op smaak zou moeten berusten. Zij had inbreng in het verkorten van uitkomsten van verdelingen, bijvoorbeeld $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ vervangen door $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Overigens zaten er in dit prille stadium van het leerproces ook wel wat moeilijkheden

bij haar. Dat een verdeelde eenheid (een hele) door het getal 1 vertegenwoordigd kon worden, vond zij 'moeilijk'. Zij stond hierin niet alleen. Zij hield het liever op $\frac{8}{8}$ of $\frac{4}{4}$ omdat dergelijke notaties nog de verdeling van de eenheid weerspiegelden. Overigens wist Clara betrekkelijk gauw raad met de bruken van het herhaald halveren en kon zij die later goed toepassen, zoals uit haar werk in verband met 'Gooilust' blijkt:



Zij bezigde geruime tijd de terminologie van 'halven, kwarten en halve kwarten' om haar werken met achtsten inzichtelijk te ondersteunen. Ook wist zij zich een voorstelling van verdeelsituaties te maken en hoe daarin handig verdeeld zou kunnen worden.

Voor acht kinderen die ieder $\frac{3}{4}$ kregen, stelde zij (zich) voor ieder een hele te geven en vervolgens ieder weer $\frac{1}{4}$ te laten inleveren. Dat was haar manier om op 'zes met z'n achten' uit te komen. Zo ging het voort. Het hecht verbinden van situatie en uitkomst, bijvoorbeeld $\textcircled{3}_{4}$ <-> $\frac{3}{4}$ zonder bemiddelende werkzaamheden deed Clara betrekkelijk vlot. Was het om het vergelijken

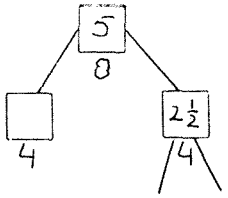
van situaties te doen, dan riep zij - net als Carlien - de bemiddelende steun van getekende verdelingen in. Steeds gaf Clara er blijk van goed te kunnen *volgen* waarom het ging.
Dit kon overigens niet verhoeden, dat zij enkele malen zwichtte voor IN-distractorfouten. Onmiddellijk daarna kwam zij dan in conflict met haar eigen standpunt omdat een alternatieve oplossingsweg een met de oorspronkelijke conflicterende oplossing opleverde.
Zo bijvoorbeeld bij de vraag naar het verband tussen $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ en $\frac{2}{5}$ (§ 4.3 p.92). 'Ja', vond Clara op het eerste gezicht, vanwege 1 + 1 = 2 en 2 + 3 = 5. 'Nee', zei ze daarna desgevraagd zich de betekenis realiserende, 'want $\frac{2}{5}$ -> $\frac{2}{5}$ en $\frac{2}{5}$ is minder dan $\frac{1}{2}$.'
Bij de reconstructie van het verdeelverhaal, waarin ieder $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ kreeg, besliste Clara aanvankelijk 7 verdelers (2 + 5), hetgeen eveneens als een IN-distractoruiting moet worden gezien. De reconstructie van een schema van tafelschikkingen bracht haar tot het inzicht dat er geen 7 maar 10 verdelers waren (§ 4.3 p.123).
Voor het overige was Clara betrekkelijk weerbaar tegen IN-distractorfouten. In het algemeen waren uitkomsten voor haar methode-onafhankelijk. Vanaf het begin was haar schriftelijke werk van dergelijke fouten vrij. Wat het vergelijken van situaties aangaat, geldt iets overeenkomstigs. Dit is in overeenstemming met het feit, dat haar schriftelijke werk al steeds meer kwaliteit had dan haar mondelinge reacties. Daarin was zij nogal aarzelend, faalangstig zo leek het wel.
In eerste instantie maakte Clara tekeningen van verdelingen om uitkomsten te bepalen. Voor $\frac{3}{5}$ en $\frac{5}{8}$ maakte zij globale verdelingen (eerst ieder $\frac{1}{2}$ etc.), $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ was volgens Clara groter dan $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$, omdat $\frac{1}{8}$ verwees naar minder verdelers per hele dan $\frac{1}{10}$.
Het kwalitatief vergelijken van weg-tijd-kwesties of koffiesterktevraagstukken vertoonde aanvankelijk wat oneffenheden. Zo had Clara soms moeite met het in te nemen relatieve standpunt, zij verwisselde dan de getallen in verhoudingsparen. 'x keer zo slap of sterk als ...' vatte zij aanvankelijk additief op.
Het voortbrengen van nieuwe situaties uit gegeven onder voorwaarde, ging haar wel goed af, al streefde zij bij de koffie bijvoorbeeld verschillen in zowel schepjes als kopjes tegelijkertijd na (§ 4.3 p.93). Weg-duur-problemen leek Clara eerst wat uit de weg te gaan (omdat zij daarbij geen tekening met verdelingen kon maken?). Later, toen het behalve op het ordenen ook op de bepaling van het verschil aankwam, beperkte zij zich soms tot kwalitatief

ordenen, bijvoorbeeld voor de koffie $\frac{16}{6}$ en $\frac{10}{4}$.

16 schepjes voor 6 kopjes is sterker want
want je doet 6 schepjes meer en 2 kopjes meer
dus 16 met zes 6 is sterker

Nog wat later paste zij ook tabellen toe. In haar conclusies gaf zij de vastgestelde verschillen steeds absoluut weer of beperkte zij zich tot kwalitatieve uitspraken.
Het geheel overziende komen we tot de slotsom dat - enkele minder sterke momenten in het eerste deel van haar leerproces daargelaten - Clara in het algemeen situaties en hun opbrengsten op juiste wijze relatief wist te interpreteren. Haar noties van breuk en verhouding waren nagenoeg opgewassen tegen de beschouwde verleiders.

ad 2: voortschrijden in schematiseren
Het schematiseren met de tafelschikkingsboom kwam voor Clara wat moeizaam op gang. Ze had zelf de Smickel wel eens bezocht. Dus waren voor haar de tafels rechthoekig en stonden ze los van elkaar. Dit obstakel was echter snel genomen en al spoedig tekende Clara heuse schema's, waarin zij als verkorting het weglaten van overtollige takken praktiseerde. Zo'n drie weken nadat het symbool met bijpassend schema bedacht was, paste Clara nog een verkorting toe, namelijk het niet meer invullen van die tafeltjes, waarmee zij haar schema toch niet voortzette, dus:



Zij tekende overigens nog wel vierkante tafeltjes doch ruilde die de eerstvolgende gelegenheid in voor ronde. Op nieuwe verkortingen kwam Clara daarna niet meer. Het weglaten van takken paste zij vervolgens systematisch toe. Ook wist zij op een goede manier gebruik te maken van dit schema in dienst van het vergelijken van situaties (§ 4.3 p.92). Haar behoefte aan het concretiseren van situaties door verdelingen te tekenen raakte hiermee wat op de achtergrond. Liep zij door de keuze van een minder passende opdeling vast in het schema door onoverkomelijke getalobstakels dan legde zij zich daarbij niet neer. Zij zocht dan naar nieuwe mogelijkheden en probeerde die ook uit (zie ook de volgende indicator). De verwerking van het computerprogramma - samen met Carlien - leverde voor Clara op dit punt geen nieuwe inzichten op:

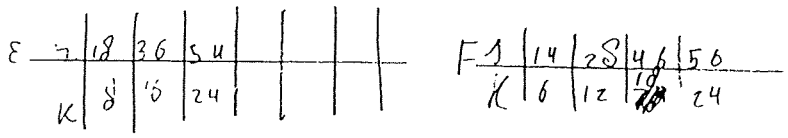
met de computer heb ik geleerd hoe je makelijk
kan dus verdelen.

In het schematiseren met de verhoudingstabel neigde Clara er eerst toe paren door herhaald verdubbelen te genereren, doch niet geheel zuiver. Ze voegde er wel eens een enkele tussenstap aan toe. Bijvoorbeeld voor de sterkte van koffie 4S : 3K maakte zij de volgende sterktetabel:

4	8	16	20	32
3	6	12	15	24

Clara gebruikte in dit stadium zowel boom als tabel. Dit hing ervan af of een situatie tot lagere termen teruggebracht of tot hogere opgevoerd moest worden.

Om de koffies $\frac{18}{8}$ en $\frac{14}{6}$ te kunnen vergelijken - het was inmiddels drie maanden later - maakte Clara tabellen tot en met paren, die in één component overeenstemden:



Dit verschijnsel beheerste vervolgens Clara's schematiseren met verhoudingstabellen, telkens afgesloten met een absoluut verschil.

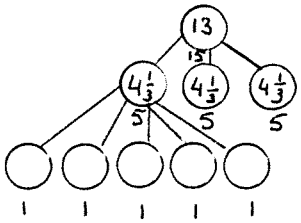
Een enkele maal - zoals we hebben laten zien - voltrok het vergelijken zich zonder tussenkomst van enig schematiseringsmiddel. Vergeleken met het leerproces van de gehele groep bleef Clara ruimschoots binnen de marges daarvan.

ad 3: flexibel modelgebruik, schematoepassing (en flexibel rekenen daarbij)

Clara had geen uitzonderlijk schematiseringsproces, naar het voorgaande uitwees.

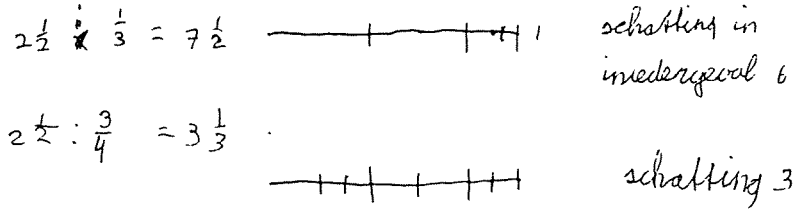
In haar omgaan met het schema voor het tafelschikken weerklonk - afgezien van de verkortingen - wel enige souplesse. Herhaalde malen wist zij zich uit een impasse te bevrijden door in het schema op een meer bij de getallen passende opdeling over te gaan.

Bijvoorbeeld: in de retentietoets zag Clara's schema om $\frac{13}{15}$ te kunnen vergelijken met $\frac{4}{5}$ er zo uit:



nadat zij eerst een tweedeling en een (mislukte) driedeling had geprobeerd. Ook ondersteunde zij nogal eens haar werkzaamheden met tekeningen van verdelingen. Het voltrekken van globale verdelingen vooral, ging haar goed af. Bijvoorbeeld $\textcircled{5}_{16}$.

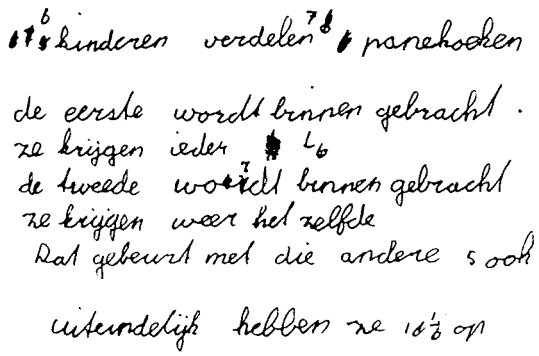
De laatste eenheid verdeelde zij niet verder dan in achten en zij besliste: ieder krijgt meer dan $\frac{1}{4}$. Bij activiteiten met de getallenlijn leek Clara meer naar het gebruik van lijnstukken als visualiseringsmiddel te neigen. Vier maanden na voorgaande activiteiten verwerkte Clara de vermenigvuldigingstafel van $1\frac{3}{4}$ voor een verkeerslicht op de getallenlijn. Zij noteerde er uitsluitend $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$, etc. bij onder weglating van de helen. Dit wijst op bovengenoemde neiging; de getallenlijn wordt steeds lokaal als lijnstuk beschouwd. Weer enkele maanden later - het liep nu tegen het einde van het tweede onderzoeksjaar - schatte Clara de uitkomsten van delingen (§ 4.3 p.132).



Uit het werk blijkt, dat eerder sprake is van aaneengesloten lijnstukken dan van de getallenlijn die wordt toegepast.
Clara wist - met uitzondering van de getallenlijn - dus op een betrekkelijk efficiënte wijze met de aangereikte middelen tot verwiskundigen om te springen, zonder dat er nu direct sprake was van een opmerkelijke flexibiliteit in modelgebruik en schema toepassing.

ad 4: het zich voorstellen van formele problemen
Weliswaar in geringere mate dan Carlien, gaf ook Clara lange tijd gevolg aan haar behoefte min of meer formeel gestelde problemen te concretiseren. Neem bijvoorbeeld de verwerking van het computerprogramma. Bij het bouwen van een schema voor $\textcircled{45}_{27}$ stuitte Clara na twee opdelingen in drieën op $\textcircled{5}_{3}$OO.
Om de volgende stap in het schema te kunnen zetten, vatte zij de 'tafeltjes' in het schema op het scherm even op als pizza's. Zij verwisselde daarbij prompt de respectieve aantallen vanwege de drie tafels en de drie verdelers, dus deelde zij door vijf. Door de behoefte aan voorstelling, aan con-

creetheid, raakte het zich realiseren van de situatie wat op de achtergrond. Behalve door visualiseren kon Clara zich ook verbaal een voorstelling van een probleem maken. Bij haar monografie voor $1\frac{1}{6}$ maakte Clara het volgende verhaal:



Eerder zette zij ook het vulmachineprobleem verbaal naar haar hand.
Ging het om het vergelijken van situaties of het onder voorwaarden wijzigen ervan, dan stemde Clara's bekwaamheid met die van Carlien overeen. Ook zij kon zich vooral in kwalitatieve zin de consequenties en uitkomsten van zeker ingrijpen heel goed voorstellen. Het moet gezegd, dat de mate van formaliteit van dergelijke kwesties aanvechtbaar is vanwege de gebruikte symbolen $\frac{x}{y}$ en $\frac{p}{q}$. Er was hooguit sprake van functioneren op het tweede niveau.
Voor delingen met (voorgeschreven) toepassing van de getallenlijn maakte Clara blijkens het vorige punt een lijnstukkenvisualisering. Echter, vragen als '$\frac{3}{4} : \frac{1}{8} =$; bedenk hierbij een verhaaltje', ging zij uit de weg.
Samengevat komt het erop neer, dat ook uit Clara's werk een duidelijke behoefte sprak zich de dingen te kunnen voorstellen. Visualiseren en verbaliseren waren voor haar daartoe de geëigende middelen. Dat laatste paste wel bij haar, want haar vermogen tot verbaliseren was naar de mening van haar respectieve leraren door de jaren heen 'vrij goed' geweest. Soms was hulp van buitenaf nodig, zoals voor de kwestie '$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ en $\frac{2}{5}$', waarop zij eerst puur formeel reageerde.

ad 5: eigen constructies en produkties op symbolisch niveau
In het voorgaande is reeds het nodige aangaande Clara's vermogen tot construeren door concretiseren, visualiseren, schematiseren en symboliseren aan de orde geweest. Onze aandacht richt zich in dit geval vooral weer op produkties op symbolisch niveau.
Vooral tegen het einde van het onderzoek bracht Clara op dit punt het nodige in. Zij doorzag bijvoorbeeld de mogelijkheden van schuilnamen als produktiemethoden voor monografieën (§ 4.3 p.127). Overigens had de toepassing

ervan door haarzelf een ad-hoc-karakter. Er zat in dit opzicht weinig lijn in haar werk.

Na $3\frac{1}{2}$ *maand:* vrije produktie

Naar omvang bemeten zat Clara met haar prestatie in de achterhoede, slechts acht sommen, maar wel van kwaliteit.

Bijvoorbeeld $8 \times \frac{2}{4} = \frac{16}{4} = 4$; $2 \times \frac{5}{8} = \frac{5}{4}$; $\frac{4}{4} - \frac{1}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$.

Haar werk kenmerkte zich door:

— het toepassen van de bewerkingen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met
— halven, kwarten en achtsten onder
— toepassing van onderlinge gelijkwaardigheid.

Twee maanden later: monografie voor $\textcircled{5}_8$

Voor $\textcircled{5}_8$ verdeelt Clara eerst globaal en vervolgens eenheidsgewijs. Bij het noteren van de tussenstanden begaat zij een systematische fout.

Na 2p = $\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$ t/m

Na 5p = $\frac{1}{8} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{8}$.

Verder is het gebruikmaken van een voorgaand resultaat de opvallendste trek in haar werk.

Een maand later: ordeningsmonografie

Clara vergeleek $\textcircled{5}_4$ en $\textcircled{3}_4$ met elkaar. Voor $\textcircled{5}_4$ maakte zij een boomschema en zette de uitkomst voor ieder op de getallenlijn. Ieders portie in $\textcircled{3}_4$ stelde zij zonder hulpmiddelen vast. Zij bekroonde haar werk met deze ordeningsmonografie:

$1\frac{1}{4}$ is meer dan $\frac{3}{4}$ $\quad$ $1\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$1\frac{1}{4} > \frac{3}{4}$ $\quad$ $1\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

$1\frac{1}{4}$ is $\frac{2}{4}$ meer dan $\frac{3}{4}$ $\quad$ $\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = 1\frac{1}{4}$ $\quad$ (gelijk maken)

Een maand later: opnieuw een ordeningsmonografie

Voor $\textcircled{5}_4$ en $\textcircled{6}_8$ dit keer. Het betrof een eerste opdracht. Geen nood in tijd dus. Haar werk gaf er blijk van. Vergeleken met de vorige keer was er sprake van een nieuw element, namelijk het opnemen van ongelijkheden naar twee kanten:

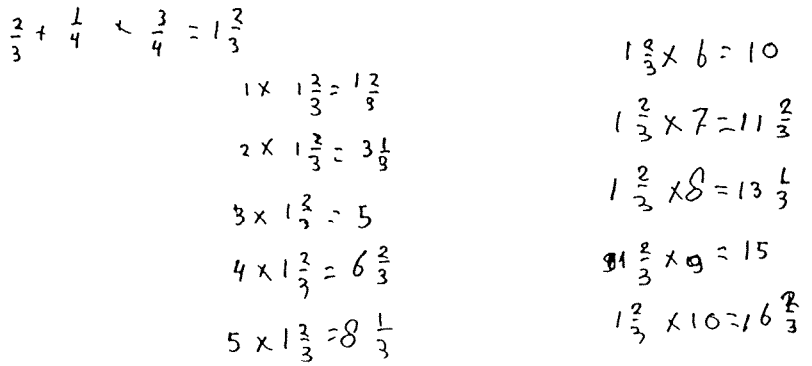
$\frac{5}{4}$ is meer dan $\frac{6}{8}$ $\quad$ $\frac{6}{8}$ is minder dan $\frac{5}{4}$

$\frac{5}{4} > \frac{6}{8}$ $\quad$ $\frac{6}{8} < \frac{5}{4}$

met alle monografische consequenties van dien.

Vijf maanden later: constructieve vulling van de getallenlijn
'Drie dropveters verdelen onder vier en later ook nog onder acht kinderen', dat was het uitgangspunt. Extra steunpunten maakte Clara niet op de getallenlijn. Het voortgebrachte monografische materiaal vertoonde dezelfde trekken als eerdere produkties: vrijwel geen omzettingen in gelijkwaardige breuken, overigens wèl multiplicatieve verkortingen en gebruik maken van voorafgaande uitkomsten.
Zij stelde ook betrekkingen als de volgende samen:
$2 - \frac{1}{2} = \frac{6}{4}$ (bij $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$ en $2 \times \frac{3}{4}$) of $3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$ (bij $3 \times \frac{3}{4}$), waarin dus de bouwsteen $\frac{3}{4}$ niet steeds even duidelijk herkenbaar was. Haar materiaal voor $\frac{3}{8}$ vertoonde overeenkomstige trekken, zij het dat $\frac{3}{8}$ als bouwsteen nu steeds zichtbaar bleef.

Vier maanden later: verkeerslicht
Clara stelde de vermenigvuldigingstafel samen voor het verkeerslicht:
$\frac{2}{3}$ minuut groen, $\frac{1}{4}$ geel, $\frac{3}{4}$ rood.



Vanaf een maand later: monografieën
Aan Clara's werk lagen de volgende methoden van voortbrenging ten grondslag:
— variatie in bewerking; zij paste steeds de hoofdbewerkingen toe, uitgezonderd het delen en maakte daarmee ook samenstellingen, bijvoorbeeld $1\frac{1}{4} = 6 \times \frac{2}{4} - 1\frac{3}{4}$;
— het tweezijdig gebruik van schuilnamen, doch niet systematisch zoals Carlien bijvoorbeeld deed;
— de toepassing van eigenschappen als de commutatieve of het halveren-verdubbelen in een produkt, bijvoorbeeld $\frac{6}{8} = 6 \times \frac{1}{8}$ en $\frac{6}{8} = 3 \times \frac{1}{4}$ in de monografie voor $\frac{6}{8}$.

Ook hierin zat weinig systeem. Soms, zoals met het voorbeeld het geval is, was er sprake van directe opvolgers in de monografie, een andere keer daarentegen kon er van alles tussen dergelijke betrekkingen zitten.

Een half jaar later: proefwerk Land van Samen (LvS)
Het proefwerk was - door tempobeslommeringen - bescheiden van omvang, maar wel gevarieerd. Bovendien weerspiegelde de laatste zet een veelbelovend vervolg, maar deze zou altijd onder couvert blijven. Het bleef bij een afgebroken partij. Het betrof een regelopdracht voor het optellen.
De kenmerken ervan waren:

— relatief veel opgaven voor het oefenen van de vier hoofdbewerkingen in het LvS, opgaven die ze zelf ook maakte, correct, ook de delingen, bijvoorbeeld $\frac{40}{5} : \frac{20}{5} = \frac{2}{1}$; $\frac{16}{4} : \frac{8}{4} = \frac{2}{1}$, etc. (het ging steeds om gelijknamige gevallen);
— vertaalopdrachten naar het LvS toe (uitsluitend optellen);
— een enkele toepassingsvraag, met het oog op de definiëring van een getal in het LvS:

•als er 16 pannekoeken worden binnen gebracht en je bent met zen 4 hoeveel krijgt ieder? in het land van samen?

— enkele opdrachten tot constructie en vrije produktie, bijvoorbeeld constructie van een tabel, eindigend op $\frac{40}{20}$, of het optellen van twee gelijknamige getallen met het voorschrift van een extra uitkomst met afwijkende noemer.

De grenzen van het LvS ging Clara overigens niet te buiten.

Zelf een methode ontwikkelen voor een bewerking, bijvoorbeeld vermenigvuldigen, lukte haar in zekere zin. Het bleef echter bij inzichtelijk opereren onder toepassing van de distributieve wet (§ 4.3 p.133). Voor het delen ontwikkelde zij zelf geen methode anders dan uitrekenend en uitmetend met lijnstukken (§ 4.3 p.132). Het formele opereren met breuken ging haar aan het einde van het onderzoek ook betrekkelijk goed af. Zij vergiste zich bijvoorbeeld wel eens doordat zij tussenresultaten in haar werkgeheugen parkeerde in plaats van deze te noteren.

In de vergelijkende toets bijvoorbeeld berekende zij $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{2}$ en $1\frac{1}{4} : \frac{6}{12} = \frac{2\frac{1}{2}}{1}$ correct. Met $2\frac{3}{4} : 1\frac{2}{3}$ = liep het mis door voornoemde vergissing.

Samenvatting
Dicht bij de realiteit voelde Clara zich goed thuis. In haar mathematiseringsproces wilde zij daar lange tijd vertoeven. Naar dit eerste

niveau toe leverde zij enkele constructieve bijdragen aan het mathematiseren. Toch volgde zij meestal in plaats van voorop te lopen. Enkele malen werd gezwicht voor IN-distractoren e.d. Desondanks kostte het loskomen van het eerste niveau haar - in dit opzicht - geen overmatige inspanning. Haar schriftelijke werk vertoonde nimmer dergelijke fouten.
Overigens bestond bij Clara lange tijd de behoefte vanuit het tweede niveau weer verbinding met de realiteit te leggen. Zij deed dit door vergelijkingsproblemen te visualiseren of bepaalde standaardprocedures verbaal in een reële context te verankeren, bijvoorbeeld middels het Franse verdelen. Of door haar taalgebruik. Bij het toepassen van de breuken voor het herhaald halveren op het tweede niveau verliep de verbinding tussen vierden en achtsten voor haar via omschrijvingen als 'halve kwart' voor een achtste.
De stijgingskracht in niveau via het schematiseren was middelmatig. Het tafelschikken was aanvankelijk sterk contextgebonden. Op den duur werd het verkorten door overbodige takken te snoeien, systematisch toegepast.
Het feit dat zij zich in haar werkzaamheden in toenemende mate van relaties in plaats van concretiseringen bediende, valt af te leiden uit het feit, dat haar neiging tot het tekenen van verdelingen allengs naar de achtergrond verdween. Een aanwijzing hiertoe vormt ook haar handelwijze in geval zij bij het schematiseren in een impasse kwam. Zij zocht dan een uitweg door naar andere getalrelaties om te zien en paste die vervolgens ook toe.
Het schematiseren met de verhoudingstabel weerspiegelt iets overeenkomstigs. Dit stond in dienst van het genereren van de eerste de beste verhoudingsparen, die in een component overeenstemden, waardoor het beslissen over verschillen eenvoudig werd. Het schematiseren voltrok zich dus grotendeels op het tweede niveau met aanvankelijk verbindingen met het eerste door de toegepaste concretiseringen. Formeel gestelde problemen, zoals kale deelsommen, werden aanvankelijk in lijnstukken gematerialiseerd. Soms was er sprake van ad hoc-modelgebruik, zoals tijdens de verwerking van het computerprogramma. Het concretiseren van formele opgaven als '$\frac{3}{4} : \frac{1}{8}$' met een verhaal werden overgeslagen, althans zo leek het. Het beschouwde leerproces was zeker nog niet aan een afronding toe. Formele problemen kon Clara onvoldoende onderbouwen met de gelegde concrete basis, wat niet wegneemt, dat zij alle toepassingsproblemen in de afsluitende toets op één na correct behandelde. Het formele opereren verliep eveneens vrijwel probleemloos.
De aard en kwaliteit van het leerproces tegen het einde van het onderzoek contrasteren duidelijk met wat er aan voorafging. Het derde niveau met zijn formele verbanden lijkt dan ruimschoots betreden. Zij doorziet die verbanden en kan ze ook toepassen. Dit heeft mogelijk een stuk zekerheid gebracht voor haar.

Frans (10;4) – (12;8)

Algemeen

Frans' bijdrage aan het onderwijsleerproces stond reeds model toen het op de selectie van indicatoren aankwam. We leerden hem kennen als een jongen die meestal goed meedeed. Hij maakte een wat sombere, soms nerveuze indruk. Hij had vooral op 't laatst van het onderzoek iets slungelachtigs. Hoewel hij verbaal bepaald niet uitblonk, was zijn bijdrage tijdens de interactieve delen van het onderwijsleerproces van betere kwaliteit dan zijn schriftelijke werk.

Het werken op papier, hoewel in de regel van aanvaardbaar gehalte, lag hem niet zó. Zijn bijdragen aan de voortgang van het leerproces betroffen vooral het verticaal mathematiseren. Daarvoor moest hij echter eerst zelf de nodige obstakels overmeesteren, zoals nog zal blijken.

In wezen was Frans een onzekere jongen, die weliswaar graag opviel in positieve zin, zolang het maar niet gek was. Het gebarend schatten leek in dit verband de grens voor hem. Hij leek zijn eenheden daarbij zo te kiezen, dat het gevraagde gebaar onmogelijk werd, bijvoorbeeld bij 'kwesties groter dan één' een vadem als eenheid kiezen.

Hij meende soms met Stef te kunnen rivaliseren, en stak hem die ene keer dan ook de loef af, toen beiden als marktkooplieden naar de onthulling van hun uiterste bod toewerkten naar het 'grootste' verdeelverhaaltje voor $\frac{1}{4}$. Dit escaleerde in:

Stef: Honderdduizend met vierhonderdduizend.
Frans: Tweehonderdduizend met achthonderdduizend.
Stef: Eén miljoen met vier miljoen.
Frans: Eén keer oneindig met vier keer oneindig?

Hij had een creatieve inbreng, zoals ook zijn respectieve leraren stelden. Hij deed actief mee in het zoeken naar oplossingen en gaf gedurig, ook ongevraagd, 'schoten voor de boeg'.

Een schriftelijke opdracht van enige omvang kon hem echter letterlijk van zijn stuk brengen.

Het werken op papier maakte hem onzeker, of was het omgekeerd?

In de interviews leek het er geregeld op, dat zijn werkgeheugen snel was overbelast. Voortbrengselen van zijn mentale inspanningen leken te vervluchtigen als ether in een hete oven.

Vooral allerlei conventies in verband met notatiekwesties braken hem voortdurend op. Het duurde ruimschoots een jaar, voordat hij niet meer struikelde over dergelijke zaken.

Zijn loopbaan op de Fatima-Jozefschool werd besloten als Amerikaans toerist in de musical 'De luie lift', voor hem een kwestie van accent. Hij legde zijn schroom voor deze gelegenheid volledig af en gedroeg zich als 'Frankie goes to Hollywood', samen met zijn toneeleega.

In het onderdeel rekenen van de CITO-eindtoets 1986 voor het

basisonderwijs maakte hij van de 27 opgaven voor breuken en verhoudingen er 24 goed.
Hij scoorde op de onderdelen taal, rekenen en informatieverwerking van deze toets resp. de percentielen 43,75 en 77 en ging op in de gelederen van een scholengemeenschap voor LBO/MAVO.

Specifiek
ad 1: begripsverwerving en IN-distractoren
De eerste stappen op de weg van verwijdering van de werkelijkheid werden betrekkelijk moeizaam gezet. Dit betrof bijvoorbeeld de modelvorming. De tekeningen vertoonden realistische trekken: echte dropstaven in plaats van stroken, appels met steeltjes en hun halven met klokhuis en pitten in plaats van cirkels, vierkanten of rechthoeken. Hij identificeerde na enkele maanden 'een kwart' en 'één vierde' met elkaar. Aan zo'n bewustmakingsmoment bestond kennelijk behoefte. Het werken met de breuken van het herhaalde halveren werd ondersteund met de terminologie van kwarten, halve kwarten e.d. Hij brak echter zijn hoofd over de symbolische weergave van uitkomsten van verdelingen. Conventies stelde hij in dit opzicht aan de kaak. De volgende bloemlezing illustreert dit.
Drie dropstaven werden op de volgende manier verdeeld in vieren , waarbij hij 'drie keer een kwart' schreef als $\frac{3\times1}{4}$.

Een week later was er sprake van '$\frac{1}{2}$ fe $\frac{1}{4}$' voor $\frac{1}{8}$.

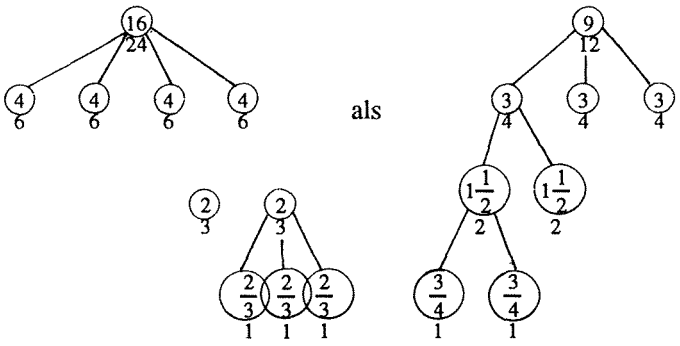
Ruim een maand later bouwde hij de tafel voor $1\frac{1}{4}$, achtereenvolgens noterend $1\frac{4}{1}$, $3\frac{3}{4}$, 5 en $6\frac{4}{1}$. Bij dezelfde gelegenheid bleek hij overigens met halven, kwarten, achtsten en hun onderlinge uitwisselbaarheid heel aardig uit de voeten te kunnen.

Twee en een halve maand later werd voor $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ resp. $3|\frac{1}{8}$ en $5\frac{1}{8}$ genoteerd, daarmee $\frac{3}{8}$ en $\frac{5}{8}$ bedoelend. En zo ging het maar door.

Meer dan een jaar na aanvang van het onderzoek werd nog $10\frac{1}{3}$ geschreven terwijl $\frac{10}{3}$ bedoeld werd en hij bovendien heel goed de verschillende waarden van beide notaties kende.
Daar stond tegenover, dat hij – in interactieve lessituaties – allerlei verbanden (door)zag en generaliseerde. Verdeelsituatie $\textcircled{3}\frac{}{4}$ en uitkomst $\frac{3}{4}$ vormden al gauw een hechte eenheid voor hem, waarbij $\textcircled{3}\frac{}{4}$ dan bovendien een hele reeks 'tafeltjes' vertegenwoordigde. Voor het gelijkwaardig verklaren van breuken (als uitkomsten) werden soms originele redeneringen door hem gevolgd, bijvoorbeeld '$\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$, want 1 hele = $\frac{8}{8}$, dat is $\frac{2}{8}$ meer dan $\frac{6}{8}$; $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ en 1 hele $-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$'.

Er ontwikkelden zich betrekkelijk hechte noties voor breuken; het symboliseren, dat was de cruciale kwestie. Dit bleek uit de weerstand tegen IN-distractoren. Op enkele kleine uitzonderingen na werd nimmer voor dit soort fouten gezwicht, althans beslist niet in schriftelijk werk. De verleiding was uitsluitend onweerstaanbaar wanneer uitgelokt in interviews.
Telkens kwam hij – desgewenst – in conflict met zijn oplossing of hij weerlegde spontaan (en beargumenteerd) wat er eerst fout gegaan was.
Zoals eerder vermeld, verliep het vergelijken van situaties en het beslissen over de (on)gelijkwaardigheid ervan in het algemeen correct. Hij was zich bewust van de verschillende mogelijkheden tot het innemen van een relatief standpunt bij gekoppelde grootheden en van de consequenties daarvan voor de symbolische weergave.
Foutief additief redeneren kon niet in het leerproces worden geobserveerd.

ad 2: voortschrijden in schematiseren
De impressie van het onderwijs wees al uit, dat Frans aangaande de constructie van schema's voor het tafelschikken en verhoudingstabellen aanvankelijk tot de koplopers behoorde. Hij doorzag niet alleen direct de generatieve potentie van het boomschema tot voortbrenging van gelijkwaardige tafelschikkingen, maar ook de mogelijkheid om deze 'kracht' zuinig toe te passen door het aanbrengen van verkortingen. Nemen we deze kwestie wat nauwgezetter in ogenschouw, dan kan er het volgende van gezegd worden.
Verkortingen hadden vanaf het begin de overhand op de constructie van schema's voor het tafelschikken. Eerst betrof dit het weglaten van overbodige takken. Dit voltrok zich voornamelijk systematisch, zij het, dat de ene keer het schema rechts en dan weer links werd vervolgd, dus zowel



Het opdelen in meer dan twee takken werd na enkele maanden eveneens systematisch toegepast. Had zijn eerste keuze bij de instap iets 'onhandigs', dan ging hij de numeriek-schematische consequenties hiervan niet uit de weg, bijvoorbeeld:
Voor $\frac{30}{24}$ koos hij resp. voor een 4-, een 2- en een 3-deling onder weglating van misbare takken; bijgevolg moest $7\frac{1}{2}$ worden gehalveerd en vervolgens

$3\frac{3}{4}$ in drieën gedeeld. En dit bracht hij er goed af.
Van het computerprogramma leerde Frans naar zijn zeggen niets.
De constructie van schema's voor het tafelschikken beinvloedde aanvankelijk het schematiseren met de verhoudingstabel, althans zo leek het.
Halverwege het tweede onderzoeksjaar, toen dit proces was ingezet, werden voor $\frac{(18)}{8}$ en $\frac{(14)}{6}$ tabellen samengesteld, aldus:

18	36	72	90	en	14	28	42	56
8	16	32	40		6	12	18	24

't Ging om koffiesterkte.
Er werd opnieuw begonnen, maar nu herhaald halverend:

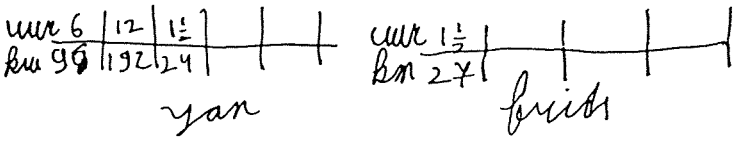
18	9	$4\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	en	14	7	$3\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$
8	4	2	1		6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

Een conclusie omtrent het sterkteverschil werd niet getrokken.
Het leek erop alsof de mogelijkheden van deze tabel werden afgetast om vervolgens dit schematiseringsmiddel naar zijn hand te zetten. Dit bleek hieruit dat er in dit stadium weinig lijn in zijn werk zat. Nu eens puilden de tabellen uit van overproduktie aan gegevens die hij verder niet benutte voor de beantwoording van de betrokken kwestie. Dan weer zag hij van tabellen af en zette de gegevens rechtstreeks om in getallenparen die in één component overeenstemden. (Maar, we moeten voorzichtig zijn met Frans als het om lijn in zijn werk gaat.)
De volgende ervaring wijst overigens ook in de veronderstelde richting. Het was een week na voorgaande ervaringen. Voor verdeelsituaties met $1\frac{1}{3}$ als uitkomst werd een tabel samengesteld:

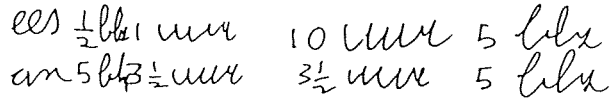
$1\frac{1}{3}$	4	8	12	16	32	128	256
1	3	6	9	12	24	96	192

met als opvallendste trek het overschakelen op een andere regelmaat vanaf het vijfde paar.
Voor het vergelijken van de sterkte van koffie werden bij die gelegenheid tabellen gemaakt, doch niet ingevuld en zonder uitkomst.
Vanaf dit moment lijkt het erop, dat Frans' analytische instelling de overhand begint te krijgen. Hij past uitsluitend nog tabellen toe, die vrijwel tot het uiterste verkort zijn.
Een week na voorgaande ervaring werd bijvoorbeeld het volgende werk geleverd:

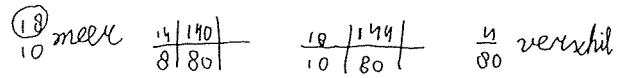
Jan fietst in 6 uur 96 km. Frits fietst in $1\frac{1}{2}$ uur 27 km.
Vergelijk Jan en Frits op hun snelheid. Wie is het snelst? Verschil?



Bedenk zelf zo'n som met twee kinderen en hun *lees*snelheid.



Vergelijk $\frac{14}{8}$ en $\frac{18}{10}$. (Wat krijgt ieder? Waar krijg je meer? Verschil?)



Bij dergelijke korte tabellen is het daarna gebleven. In de toets van het vergelijkend onderzoek waren ook die niet meer nodig. In feite paste hij daar rechtstreeks de kgv-methode toe om situaties op dezelfde noemer te zetten om ze te kunnen vergelijken.
Al met al werd aanzienlijk bijgedragen aan het schematiseringsproces van de groep met name op het punt van het verkorten van de verhoudingstabellen.

ad 3: flexibel modelgebruik, schematoepassing (en flexibel rekenen daarbij)

Zoals bleek kon Frans vrij snel de gezamenlijk voortgebrachte schematiseringsmiddelen naar zijn hand zetten; dit gold vooral de verhoudingstabel na een overigens aarzelend en zoekend begin.
Bij de constructie van de schema's voor het tafelschikken zocht hij alras naar een zo efficiënt mogelijke instap, gezien de gegeven getallen. Pakte dit eens een keer wat minder gelukkig uit, dan was zijn vermogen om met getallen, ook breuken, om te gaan, meestal toereikend om niet in een impasse te geraken.
Een enkele maal koos Frans spontaan voor de verhoudingstabel als middel tot schematiseren. Van het flexibel toepassen van visuele modellen was nauwelijks sprake.
Aanvankelijk vertoonden zijn visualiseringen realistische trekjes, zoals we gemeld hebben.
Soms vertoonde zijn werk ook later dit verschijnsel nog, bijvoorbeeld aan het einde van het tweede onderzoeksjaar, toen hij een verdeelprobleem handelend over flessen ook met een tekening van flessen visualiseerde. Ook tekende hij nog lang poppetjes in verdeelsituaties.

Pas in de afsluitende toets is iets van visueel modelgebruik bespeurbaar: cirkels representeerden repen.
Frans leek beter te kunnen omspringen met visuele modellen van meer formeel karakter zoals bijvoorbeeld het aftrekken van ongelijknamige breuken met de getallenlijn met daarop een handig gekozen eenheid of het vermenigvuldigen van breuken met een handig te kiezen rechthoek (= reep) als onderliggend model. Echter, Frans had een uitgesproken voorkeur voor getallen, getuige zijn analytische instelling. Dit wettigt de kanttekening dat hij wellicht daarom raad wist met de modellen in plaats dat deze het opereren ondersteunden.
Voor de getallenlijn zou dit dan in het bijzonder gelden. In de slottoets bijvoorbeeld paste hij de rechthoek in ieder geval als ondersteunend model toe. Voor het bepalen van lengten van delen van de destijds door Peter Brokken vervaardigde tandpastasliert bracht Frans geld als model in.
In het algemeen lag het schematiseren met getallen hem echter heel wat beter dan het visualieren met modellen. Zijn handigheid in het omgaan met kleine getallen was hieraan mede debet.

ad 4: het zich voorstellen van formele problemen
Al na enkele maanden wist Frans betrekkelijk moeiteloos sommetjes te bedenken bij $2\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$ e.d., bijvoorbeeld:
$3 \times 1\frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$ en $1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$.
Een verhaal daarbij verzinnen over stukjes van de beruchte tandpastasliert lukt wel, doch gaat hem niet bepaald gemakkelijk af. Zoals steeds verloopt voor hem het verbaliseren moeizaam zodra er meer dan drie woorden in het geding zijn. Uit ervaring weet hij, dat het meestal kort en bondig kan, zoals die keer lang geleden dat '6 sinaasappels voor 3 gulden' met '8 voor 6' werden vergeleken.[14]
Het vernemen van het tweede gegeven ontlokte hem een verontwaardigd en van onmiskenbaar Amsterdamse intonatie: 'Wàt 'n àfzetter!'
Deze keer ging het ongeveer zó: Peter poetst 's morgens en ..... en ... eh ..... en 's middags en ... eh ..... dan ..... nog ..... een keer ..... 's avonds'.
Het produceren van varianten op een gegeven opgave ging hem goed af. Bij 'ieder krijgt $\frac{1}{2}$' werden bijvoorbeeld verdeelverhaaltjes bedacht.
Frans generaliseerde al na een enkel geval voor het aantal verdelers 'gewoon het dubbele' van het aantal pannekoeken. De groep bedacht vervolgens heel moeizaam een verhaaltje bij '$7\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 15$' ($7\frac{1}{2}$ pannekoek, wanneer ieder $\frac{1}{2}$ krijgt kun je 15 kinderen wat geven). De deling wordt door Frans moeiteloos omgezet in $7\frac{1}{2} : 15 = \frac{1}{2}$ en $2 \times 7\frac{1}{2} = 15$, doch de bijpassende verhaaltjes laat hij maar liever aan de anderen over. Gedurig leverde hij der-

gelijke bijdragen. Of daaraan voorstellingen te pas kwamen is moeilijk te achterhalen. Hij leek aan voorstellingen niet zo'n dringende behoefte te hebben.

De meer besproken kwestie van $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ en het tafeltje $\frac{2}{5}$ slechtte hij met een redenering, die neerkwam op:

$\frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1$ en $\frac{2}{5} \rightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$, dus $\frac{2}{5} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Zo gaf hij er halverwege het tweede onderzoeksjaar ook blijk van de 'vankeer' – kwestie (§ 4.3 p.94) te hebben overmeesterd.

Achteraf bezien moeten we stellen, dat de geschiktste voorstelling voor Frans de symbolische was. Wellicht voelde hij zich daarom lange tijd niet helemaal op zijn gemak, want juist met het symboliseren kwam hij in aanvaring met allerlei conventies, die er op dit punt heersten.

ad 5: eigen constructies en produkties op symbolisch niveau

Eenmaal wegwijs in de dwaaltuin van notaties, voelde hij zich op het symbolische niveau goed thuis. Naar reeds vermeld was hij steeds op zoek naar principes of methoden om monografieën systematisch te kunnen voortbrengen.

Beschouwen we zijn leerproces op dit punt wat nader, dan kan er het volgende van gezegd worden.

Na $3\frac{1}{2}$ *maand:* vrije produktie

Deze kenmerkte zich door overmoed in een zekere chaos. Het mooie van zo'n bijdrage is, dat door de overmoed de grenzen van het toelaatbare, op het punt van algebraïsche conventies bijvoorbeeld, ruimschoots kunnen worden overschreden. Dit was hier het geval ten aanzien van de combinatie van bewerkingen met veronachtzaming van de noodzakelijke toepassing van haakjes, het ongeoorloofd schakelen van het = -teken e.d.

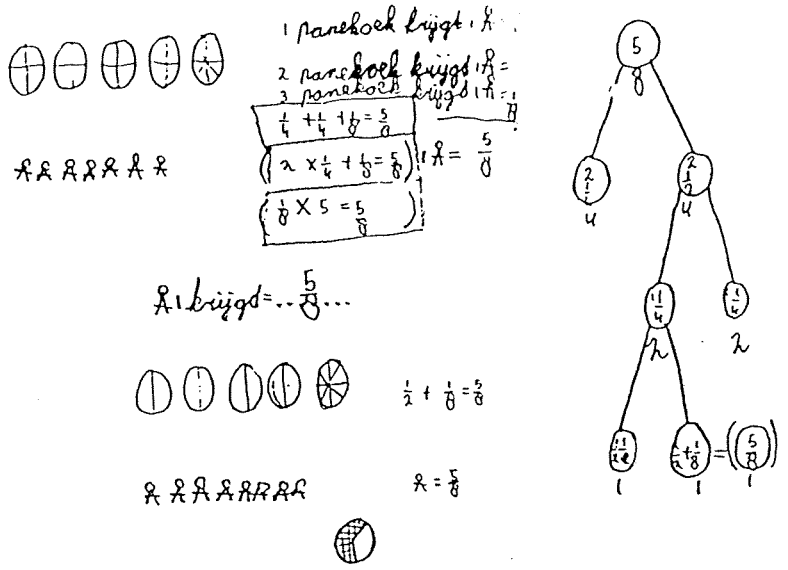
Afgezien daarvan profileerde zijn werk zich door:

— toepassing van de vier hoofdbewerkingen, met
— halven, kwarten en achtsten, onder
— toepassing van onderlinge gelijkwaardigheid.

Een voorbeeld, waarbij haakjes gedacht, doch niet genoteerd werden, was:

$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{2}{4} \times 4 = 3$.

Een maand later: exploratie van $\textcircled{5}{8}$



Het werk laat zien, dat in de variëteit van aanpakken de monografische registratie van het verdelen op z'n Frans, waarom het hier ook begonnen was, er uiteindelijk bij ingeschoten is. Het tekenen van de verdelers is karakteristiek. Behalve Frans deed alleen Helga dit.

Een maand later: ordeningsmonografie

Frans vergeleek $\textcircled{5}{4}$ en $\textcircled{3}{4}$, waarbij hij zo mogelijk nog grondiger te werk ging dan in de vorige kwestie.

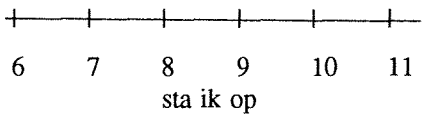
Hij construeerde een ongesnoeide boom voor $\textcircled{5}{4}$, verdeelde globaal en eenheidsgewijs, plaatste de uitkomsten correct op de getallenlijn en stelde vervolgens een ordeningsmonografie samen vergelijkbaar met wat eerder van anderen in dit opzicht werd weergegeven.

In de hierna volgende weken werden nog verschillende ordeningsmonografieën samengesteld. Kenmerkend voor het werk van Frans was de efficiënte toepassing van het schema voor de tafelschikkingen om gegeven situaties van enige numerieke omvang in hun eenvoudigste gedaante te ontmaskeren. Opmerkelijk was ook de wijze, waarop daarbij met equivalenties werd omgesprongen. Bijvoorbeeld: om $\textcircled{15}{12}$ en $\textcircled{6}{8}$ met elkaar te vergelijken werd gesteld $\textcircled{15}{12} = \textcircled{10}{8}$, dus $\frac{15}{12}$ is meer dan $\frac{6}{8}$.

Een maand later: dagverhaal met tijdlijn en passende sommen

De gebeurtenissen in het dagverhaal werden beklemtoond, dat wil zeggen,

ondergebracht in de tijdlijn en voorzien van een beknopte toelichting:



Het vaststellen van numerieke betrekkingen in symbolen speelde hem parten. Dit werd zowel tijdens de les, als in zijn werk manifest.
Bijvoorbeeld: $8\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}9$, dat stond voor: 'Om kwart over acht ga ik naar school, ik doe er een kwartier over, dus dan ben ik er om half negen.'

Vijf maanden later: constructieve vulling van de getallenlijn
Kinderen die dropveters verdeelden waren het uitgangspunt. Er was sprake van efficiënte gebruikmaking van de getallenlijn. Extra steunpunten had hij daarbij niet nodig.
Het voortgebrachte monografische materiaal was weer karakteristiek voor Frans. Op zijn manier streefde hij weer uiterste verkortingen na, zoals bleek uit de rechtstreekse toepassing van schuilnamen zonder tussennotaties, bijvoorbeeld: $2 \times \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$ en uit het veelvuldig multiplicatief verkorten van additieve betrekkingen. Tegelijkertijd was er weer dat chaotische, dat Frans' werk weerspiegelde. Voordat een bepaald kenmerk tot methode voor meer systematische produktie verheven kon worden, schakelde hij al weer over op iets anders. Dit behoeft overigens niet in tegenspraak te zijn met de geclaimde systematiek voor hem. Hij leek mogelijkheden af te tasten, steeds impulsief ingaand op spontaan waargenomen verbanden, voordat hij tot het uitzetten van een meer vaste koers kwam. Ook bij het schematiseren met de verhoudingstabel hebben we dat van hem gezien.

Vier maanden later: verkeerslicht
Frans maakt het begin van de vermenigvuldigingstafel voor het verkeerslicht: groen $\frac{2}{3}$ min. geel $\frac{1}{2}$ min. en rood $\frac{3}{4}$ min.
Dit gebeurde correct tot en met vier keer $1\frac{11}{12}$, waarbij hij telkens $\frac{12}{12}$ omzette in een hele.
De '$x \times 60$' sommen werden met betrekkelijk voor de hand liggende produkties uitgebreid, zoals $\frac{1}{10}$ t/m $\frac{3}{10} \times 60$ en evenzo met $\frac{1}{20}$ en $\frac{1}{60}$.

Vanaf één maand later: monografieën
In de meer systematische voortbrenging van monografieën leverde Frans wisselvallige prestaties, nu eens eentonig, dan weer chaotisch variërend. De eentonige monografieën kenmerkten zich nu juist wel door een grote mate van systematiek, bijvoorbeeld door gedurige toepassing van dezelfde eigenschap of regel.

Het werk kan worden gekenschetst door:
— variatie in bewerkingen, uitgezonderd het delen;
— veelvuldig tweezijdige toepassing van schuilnamen (in de les deed hij ook telkens voorstellen in die richting);
— toepassing van eigenschappen, bijvoorbeeld $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} = 2 - 1\frac{1}{4}$ etc.

Soms bouwde hij bijna volledig een monografie op dit principe (§ 4.3 p.126). Andere eigenschappen waarvan hij gebruik maakte waren de commutatieve wet en het halveren en verdubbelen van de respectieve factoren in een produkt van twee.
In het algemeen zat er weinig lijn in dit werk.

Een half jaar later: proefwerk Land van Samen (LvS)
Er wordt erg gevarieerd werk geleverd, doch betrekkelijk bescheiden van omvang. Hij rekende zijn eigen sommen niet uit.
De kenmerken ervan waren:
— zes opgaven voor het oefenen van de hoofdbewerkingen met ongelijknamige breuken; daarbij werd de tabel als schematiseringsmiddel voorgeschreven met het oog op het 'gelijk maken' naar zijn opgaven vermeldden;
— acht vertaalopgaven naar het LvS toe (+, × en :);
— vijf produktieopdrachten, waarvan enkele geheel open; één ervan bestemde hij voor zijn leraar en de onderzoeker, deze diende extra moeilijk te zijn.
Bij andere opgaven werd het visualiseren voorgeschreven of het bedenken van een verhaal, of, wanneer het zomaar LvS-sommen betrof de bewerking; en tenslotte
— een gevisualiseerde verdeelsituatie (6 pannekoeken en 7 kinderen) zonder nadere vraagstelling.

De grenzen van het LvS ging Frans naar bleek, royaal te buiten. Het zelf ontwikkelen van een methode voor het vermenigvuldigen lukte hem betrekkelijk goed. Dit geldt in zekere zin ook het optellen en aftrekken. Wat de laatste bewerkingen aangaat, kan gesteld, dat zijn neiging om te werken met equivalenties buiten de grenzen van wat er in het onderwijsleerproces aan de orde kwam, hieraan niet vreemd was.
Zo besliste hij bij het aftrekken onder toepassing van de getallenlijn niet zozeer op grond van een handig te kiezen eenheid, als wel op wat de getallen (de noemers) hem ingaven.
Dit afgaan op de bijzonderheid van de getallen kwam bij het vermenigvuldigen ook tot uiting.
Bijvoorbeeld bij $2\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$ = redeneerde hij : $\frac{1}{5} \times 2\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ en dat doe je 4 keer. Op overeenkomstige wijze ging hij dan bijvoorbeeld te werk voor
$2\frac{1}{2} \times 1\frac{4}{5} =$
Hij gaf bij het vermenigvuldigen trouwens de voorkeur aan de rechthoek

(reep) als model boven het rekenen met een handige prijs.
De methoden die hij toepaste waren nog steeds inzichtelijk, niet regelgestuurd. In dit opzicht paste hij voor de bewerking delen het uitmeten van lijnstukken toe.
Hij bleek in eerste instantie erg verrast door de uitkomst groter dan het deeltal, bijvoorbeeld voor $2\frac{1}{2} : \frac{1}{3} =$, waarmee het stereotype 'delen maakt kleiner' voor hem ontkracht werd.[15]
Het formele opereren met breuken ging hem aan het einde van het onderzoek minder goed af dan Clara bijvoorbeeld. In de vergelijkende toets maakte hij de vermenigvuldigingen en delingen niet.

Samenvatting
De wegen van het horizontaal en verticaal mathematiseren zaten aanvankelijk voor Frans vol hobbels en kuilen. In het horizontaal mathematiseren vormden de modelvorming en het verwerven van het notatiesysteem voor de breuken aanzienlijke obstakels voor hem. Zonder de nodige steun leek hij maar moeizaam los te kunnen komen van de realiteit, ook al gaf hij niet dikwijls toe aan de verleiders in $\mathbb{N}$ en dan nog uitsluitend uitgelokt in interviews.
Anderzijds moeten we stellen, dat het vergelijken van situaties en het redeneren met verhoudingen daarbij hem betrekkelijk gemakkelijk afgingen. In dit opzicht distantieerde hij zich wel betrekkelijk moeiteloos van de realiteit en voelde hij zich op het tweede niveau al ras goed thuis, zoals zijn manier van omspringen met equivalenties uitwees. De tragiek voor Frans, wanneer we daarvan mogen spreken, was zijn analytische instelling, waardoor hij betrekkelijk onbelemmerd moest kunnen doorstoten naar het tweede niveau, gepaard aan zijn moeite – zo niet zijn onvermogen – om snel het notatiesysteem voor de breuken onder de knie te krijgen. Dit speelde hem gedurig parten, alsook het gemak waarmee zijn geest produkten van mentale inspanning weer liet schieten.
Hierdoor kreeg zijn werk aanvankelijk iets impulsiefs en hadden zijn gedurige bijdragen aan het vertikaal mathematiseren het karakter van incidenten, die buiten hem om tot systeem gesmeed moesten worden. De voortbrengselen op monografisch terrein en aanvankelijk ook het voortschrijden in schematiseren getuigden hiervan. Al moet gezegd, dat hij er in slaagde met het schematiseren op een vaste koers te komen om vervolgens rechtstreeks op het derde niveau af te stevenen. Met andere woorden, na een fase van parkeren in het grensgebied van de twee eerste niveaus, was de stijgingskracht daarin aanzienlijk. Op het derde niveau lag zijn kracht vooral in het doen van kleine, lokale constructies, bijvoorbeeld van varianten op één opgave.
Van flexibele modeltoepassing is slechts incidenteel sprake. Zijn kennis van en inzicht in getallen boden voldoende mogelijkheden om numerieke obstakels tijdens het schematiseren het hoofd te bieden. Veel behoefte aan concrete voorstellingen leek er bij hem niet te bestaan. Het verbaal

concretiseren van formeel gestelde problemen liet hij liever aan anderen over. Het was alsof de realiteit als bron en toepassingsgebied en het symbolisch werken op het tweede en derde niveau voor hem twee gescheiden werelden waren, althans wat de breuken aangaat.
Met verhoudingen lag dit anders. Daarmee kon hij beter uit de voeten. Zijn leerproces was aan het einde van het onderzoek nog niet af. Dit geldt zowel het formaliseren van het systeem – waaraan hij overigens wel volledig zou kunnen toekomen – als de verbindingen ervan met de realiteit.

Helga (9;2) – (11;6)

Algemeen
Helga was een stille, die dikwijls onopgemerkt bleef in de les. Zij was traag. Zij leek iets bedeesd-ernstigs te hebben en nam dikwijls een afwachtende houding aan. Dat kon echter ook een kwestie van berekening zijn, omdat zij tegelijk ook over van alles en nog wat een eigen mening had. Dit betekende, dat zij niet alles over haar kant liet gaan. Zij nam het bijvoorbeeld op voor degenen die de omelet op een afwijkende manier verdeelden. Met een 'oneerlijk' had het merendeel van de groep deze oplossingen buiten de discussie willen plaatsen (§ 4.3 p.72). Aanvankelijk ging Helga heel aarzelend te werk en toonde zij zich onzeker. Zij wilde dan ook wel tussentijds met haar werk bij de leraar komen om te zien of het goed was. Tegen het einde van het eerste onderzoeksjaar – zij was intussen een flink stuk uit de kluiten gewassen – ging zij zich met wat meer zekerheid gedragen. In het algemeen bleek haar schuchtere ernst echter de overhand houden. Daarbij maakte zij bovendien soms een wat afwezige indruk, net of zij er niet bij was en wegmijmerde in de ernst van haar nog jonge bestaan. Na zulke momenten gaf zij er dan blijk van zich pas na een uitvoerig uiteengezet voorbeeld te realiseren wat de essentie van het vraagstuk of verschijnsel in kwestie was. Dit kon ook dan gebeuren, wanneer zij kort daarvoor op eigen kracht in lastiger situaties, dieper inzicht had getoond. Doorgaans kon zij niet voor lange tijd op eigen kracht met de aandacht bij het onderwijsleerproces blijven, maar was hiervoor hulp van buitenaf nodig. Zij speelde er dus niet echt een actieve rol in en zou uit zichzelf niet gauw met voorbeelden komen, hoewel – zoals we gezien hebben – zij de volgens haar onterechte afwijzing van de oplossing van een ander niet over haar kant liet gaan. Haar instelling was in het algemeen meer op het visueel-concrete gericht dan analytisch bepaald. Ondanks haar neiging tot absentie werkte zij op papier door de bank genomen goed gemotiveerd en betrekkelijk zelfstandig. Zij kon de dingen aardig onder woorden brengen. Haar inbreng in het onderwijsleerproces lag vooral op het gebied van de voorbeelden in gesymboliseerde vorm, hoewel zij soms in andere kwesties toonde vooruit te kunnen denken, zoals het voor- of doorzien van de bedoelingen van bepaalde activiteiten in 'Gooilust'. Volgzaam als Helga was, kon zij niet tegelijk ook koploper zijn, wat het in gang houden van het onderwijsleerproces aangaat.

Voor de CITO-eindtoets basisonderwijs 1986, had zij op de onderdelen taal, rekenen en informatieverwerking in deze volgorde, percentielscores van 96, 80 en 61. De 27 opgaven voor breuken en wat dies meer zij, had zij allemaal goed. In de musical op de afscheidsavond was het haar taak de luie lift weer in beweging te krijgen. Zij acteerde als liftmonteur, maar dit was slechts schijn. Want, achter deze vermomming ging 'een stille' schuil, geroepen om duisterder zaken tot klaarheid te brengen. Zij werd – tenslotte – brugklasser op een scholengemeenschap voor HAVO/VWO.

Specifiek

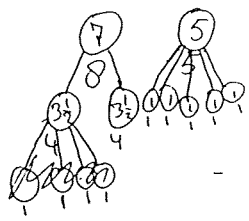
ad 1: begripsverwerving en IN-distractoren

Het horizontaal mathematiseren in dienst van de constitutie van het mentaal object breuk voltrok zich met niet al te grote problemen. Van allerlei kleine obstakels zoals bijvoorbeeld Kevin, Margreet, Michael en Nanja op hun leerweg vonden, was bij haar geen, of slechts in geringe mate sprake. Haar tekeningen vertoonden in het begin en een enkele keer ook later, kleine realistische trekjes. Het waren nog geen modellen. Het breukverwekkend verdelen echter was van meet af aan model. Stilzwijgend respecteerde zij als vanzelfsprekend kenmerken als de gelijkwaardigheid van eenheden en delen. Aanvankelijk schreef zij, ondanks dat bepaalde notaties in symboolvorm haar bekend waren, uitkomsten voluit: 'een halve en een kwart, Anja krijgt driekwart.' Overgang op verkorte notatie in symboolvorm was ook voor haar in dit stadium geen vanzelfsprekende zaak, hoewel zij – met enige begeleiding – haar eigen teksten wel kon omzetten (§ 4.3 p.73). De noties van breuk in ontwikkeling waren aanvankelijk sterk gebonden aan de context van verdeelsituaties. Daardoor kon het gebeuren, dat zij – evenals enkele anderen zoals Margreet en Michael – er moeite mee had de breuk in breekrelaties in andere situaties vast te stellen, zoals bijvoorbeeld de delen van een uur als baktijden in 'De Smickel' (§ 4.3 p.96).

Dit alles kon echter niet verhoeden dat zij enkele malen overstag ging voor een IN-distractorfout, tot aan het einde van het leerproces toe.

Bijvoorbeeld:

$$\frac{3\frac{1}{2}}{4} - \frac{1}{1} = \frac{2\frac{1}{2}}{3}$$



Joke denkt $\frac{7}{8} - \frac{5}{5} = \frac{2}{3}$

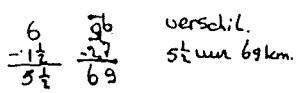
► Wat vind jij? Goed of Fout? *goed*

► Laat weer zien (of vertel) waarom je het goed of fout vindt.

want als ik een boom maak dan kan ik het ervan afpreken en dan ~~er~~ komt er $\frac{2}{3}$.

Ook bij het behandelen van bijvoorbeeld $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$ als portie, waarvoor een passende verdeelsituatie geconstrueerd moest worden, neigde zij er aanvankelijk toe 4 + 3 verdelers te beslissen. In een later stadium wist zij echter heel goed haar multiplicatieve benadering in een dergelijk geval te ver(ant)woorden (§ 4.3 p.117).
Het denken in verhoudingen voor het klaren van vergelijkingskwesties ging haar in het algemeen goed af. Zij leek zich ten volle te realiseren, dat van haar in deze een relatief standpunt gevraagd werd. Voor het bedenken van slappere koffie dan 3 S : 4 K bijvoorbeeld, merkte zij op: 'Twee schepjes erin doen', in tweede instantie aanvullend met '... en de kopjes hetzelfde laten of er méér water in doen.' Het veranderen van situaties werd volgens zekere systematiek voltrokken (variëren zowel in één als in beide componenten van de verhoudingsparen).
Voor het vergelijken en ordenen van verdeelsituaties was zij al snel in staat de ontwikkelde wiskundige middelen doelmatig in te zetten, zoals het schema voor de tafelschikkingen. Incidenteel deed zich bij het verhoudingsgewijs vergelijken wel eens een IN-distractorfout voor in de vorm van het foutieve additieve redeneren. Bijvoorbeeld:

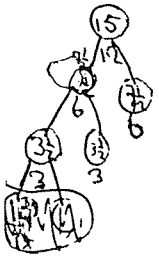
Jan fietst in 6 uur 96 km. Frits fietst in $1\frac{1}{2}$ uur 27 km. Wie gaat harder? Verschil?



We hebben de indruk, dat voor deze fouten en die in de breuken, voor Helga van toepassing is dat mede de numerieke complexiteit van de gegeven of zelf-voortgebrachte situatie, gevestigde inzichten even overschaduwde, waardoor de geobserveerde fouten ontstonden.[16]
Het gegeven voorbeeld viel in het prille stadium van het schematiseren met de verhoudingstabel, wat haar toen nog niet zo goed afging. Haar foutieve redenering toegepast op een soortgelijke kwestie met eenvoudiger getallen ontkrachtte zij onmiddellijk als 'fout!'
We komen tot de slotsom, dat de noties voor breuk en verhouding zich zonder al te veel hinderlijke bijverschijnselen ontwikkelden en dat de IN-distractorfouten die er werden gemaakt, vooral het gevolg geweest zullen zijn van de numerieke complexiteit van de situaties, waarin zij ontstonden, zowel voor 'breuk' als voor 'verhouding'. Haar onzekerheid zal wellicht aan het zich enkele malen manifesteren van dit verschijnsel mede debet zijn geweest.

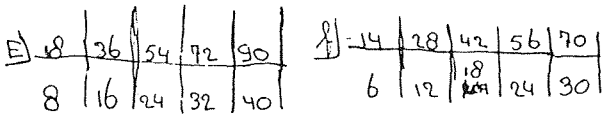
ad 2: voortschrijden in schematiseren
Het symbool voor de tafelschikking wordt vrij snel rechtstreeks vertaald in ieders portie $\textcircled{3}_{4} \rightarrow \frac{3}{4}$. Het schema voor de tafelschikkingen wordt aanvankelijk niet verkort. Na slechts enkele ervaringen worden overtollige takken weggelaten. Dit gebeurt meteen systematisch. Het herhaald halveren is het grondpatroon waarop de schema's gebouwd worden. Ook de verdelers

moeten het daarbij soms ontgelden en worden in stukken uiteengelegd. Bijvoorbeeld:

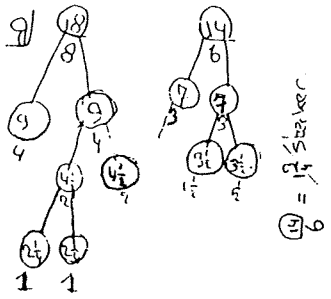


Dit wordt dan vervolgens weer hersteld. Zoiets gebeurde wel meer, inclusief het herstel. Zij realiseert zich dus de betekenis van de getallen in de context, waaraan ze ontleend zijn. Het zoeken van een uitweg uit eventuele numerieke obstakels in het schema in het tekenen van verdelingen is eveneens kenmerkend voor haar werkwijze in dit stadium. Zo'n drie maanden na de introductie doet de meerdeling aarzelend zijn intrede in haar schematiseringsproces. Deze aarzeling hield gedurende de rest van het leerproces stand. Enkele uitzonderingen daargelaten wordt er op veilig gespeeld en houdt zij het op het herhaalde halveren, dat wil zeggen tot aan de verwerking van het computerprogramma. Naar aanleiding daarvan stelt zij: 'Ik heb geleerd dat je niet altijd twee tafeltjes hoeft te maken maar ook negen tafeltjes.'

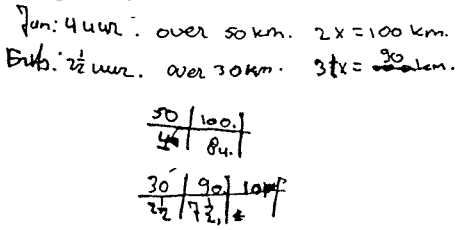
Het schematiseren met de verhoudingstabel komt aanzienlijk moeizamer op gang, vergeleken met het andere schema. Via het herhaald verdubbelen wordt er ingestapt ondanks de wetenschap dat het gezochte doel zo voorbij gesprongen kan worden. Er volgt een periode waarin het schema voor de tafelschikkingen blijft domineren. Zij doorziet klaarblijkelijk de mogelijkheden ervan, bijvoorbeeld het genereren van gelijkwaardige paren verhoudingsgetallen. Zij paste het namelijk ook spontaan toe, wanneer dit niet zo voor de hand liggend was, zoals in haar al geciteerde poging tot overmeestering van een IN-distractorfout. Of zij viel op dit schema terug, wanneer zij uit daartoe geconstrueerde tabellen niet een gevraagde ordening kon afleiden.



Bovendien was het schema voor de tafelschikkingen van invloed op het tabelgebruik in deze zin, dat de laatste bij herhaling afdalend naar lagere termen werd ingevuld.



De eerste maanden na voorgaande ervaring blijven boomschema en verhoudingstabel afwisselend optrekken in het leerproces, waarbij blijkt dat de mogelijkheden van het laatste schema geleidelijk aan doorgrond worden. Zij probeert zo nu en dan, zij het weer met de nodige aarzeling, enige verkorting in de tabellen te brengen, bijvoorbeeld:



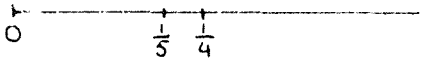
In de slottoets en in enkele toepassingsvraagstukken kort daarvoor, weet zij van onverkorte tabellen efficiënt gebruik te maken voor het oplossen van enkele vergelijkingsvraagstukken (aantal-prijs; weg-tijd en verdeelsituaties). Voor de betrokken kwesties in de slottoets voltrekt zij eerst verdelingen aan lijnstukken om ieders portie in de beide gegeven situaties te kunnen vaststellen. Ze verdeelt op z'n Frans. De conclusies, die zij aan dergelijke kwesties verbindt zijn of kwalitatief van aard, of absoluut kwantitatief, bijvoorbeeld 'Piet is tien minuten sneller'.

Al met al vertoont het beschouwde schematiseringsproces de nodige aarzelingen. Weliswaar is er een zekere stijgingskracht vanuit gegaan; enkele malen gaf Helga er blijk van in te zien, dat met de schema's materiaal op het tweede niveau kon worden voortgebracht. Wat het inzetten van de schema's aangaat voor het oplossen van vergelijkingskwesties, dit lukte voor de tafelschikkingsboom vrij direct. De verhoudingstabel kon pas na meer dan een jaar doelmatig voor overeenkomstige kwesties worden ingezet. Het proces van het schematiseren was weinig stabiel. In het schema van het tafelschikken werden de meest gangbare verkortingen slechts schoorvoetend toegepast.

ad 3: flexibel modelgebruik, schematoepassing (en flexibel rekenen daarbij)

Naar reeds vermeld werd, paste Helga het schema van het tafelschikken enkele malen ook betrekkelijk onverwacht toe. In dit verband verwijzen we nogmaals naar beide voorgaande indicatoren. Iets overeenkomstigs geldt voor de verhoudingstabel aan het einde van het leerproces. Voor de contextloze vraagstukken in de slottoets werd dit schematiseringsmiddel eveneens enkele malen spontaan ingezet. In het algemeen wist Helga betrekkelijk gemakkelijk om te springen met enkele van de visuele modellen en met name met het schema van de tafelschikkingen. Herhaaldelijk kwam het voor, dat ondersteunende verdeeltekeningen gemaakt werden, nu eens met cirkels, dan weer met lijnstukken, die zij de ene keer globaal en dan weer op z'n Frans verdeelde. Voor het schema voor de tafelschikkingen zat de souplesse – zoals we gezien hebben – niet zozeer in het constructieproces. Dit verliep lange tijd volgens het stramien herhaald halveren en eenzijdig verkorten door takken kappen. Neen, de wendbaarheid zat in het toepassen van dit schema, ook voor die situaties, waarin dit minder voor de hand liggend was. Voor de getallenlijn lag dit anders, nu eens erg functioneel en dan weer volkomen onbruikbaar, afhankelijk van de beschikbaarheid van ruitjespapier.

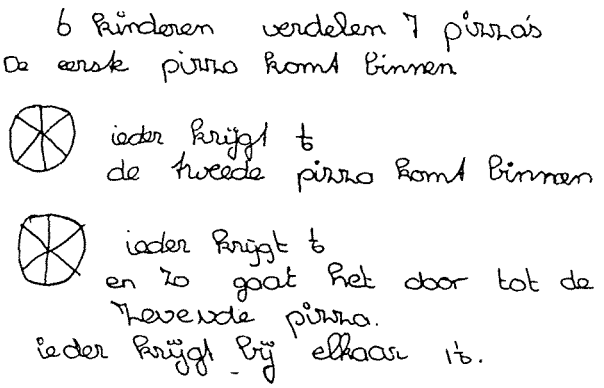
Zij bouwde aanvankelijk de getallenlijn met 'dropvetereenheden'. Voor het bepalen van verschillen tussen porties functioneert de getallenlijn goed via de methode van het kiezen van een handige eenheid, d.w.z. in eenvoudige gevallen (bijvoorbeeld $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$). Is er sprake van verfijndere verschillen, bijvoorbeeld van $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{5}$ dan komt zij gemakkelijk in conflict door te grote onnauwkeurigheid:



Voor $\frac{1}{5}$ beslissen, dat hier $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ drie keer opgaat, heeft zowel 15 als 16 van deze verschillen in de eenheid tot gevolg. Dit kon volgens haar niet, want zij beschouwde uitkomsten wel als methode-onafhankelijk. De werkzaamheden van het constructief vullen van de getallenlijn met monografisch materiaal voor bepaalde bouwstenen, worden onder de vijfde indicator beschreven.

Resumerend komen we tot de slotsom, dat Helga een zekere souplesse aan de dag legde, wat de toepassing van het schema van de tafelschikkingen aangaat en van enkele visuele modellen. Aan het einde van het leerproces leek zij met de verhoudingstabel ook op dit spoor te komen. Overigens kan een deel van deze souplesse verklaard worden door het vastlopen van oplossingsprocessen, waarvan terugval in oplossingsniveau dan het gevolg was. Dit gold echter lang niet alle geobserveerde gevallen.

ad 4: het zich voorstellen van formele problemen
Helga bewoog zich – zoals het voorgaande uitwees – nog voornamelijk op het tweede niveau. Tot en met de slottoets had zij gedurig overstapjes nodig naar het concrete, eerste niveau; stapjes die zij overigens eigener beweging zette. Het bedenken van een verhaaltje voor een vraagstuk als $2\frac{1}{2} : \frac{1}{3} =$ was – ook voor Helga – een geschikt middel om zich de betekenis ervan te realiseren (§ 4.3 p.132). Werden haar schriftelijk dergelijke vragen gesteld, dan sloeg zij deze over; tenzij het om eenvoudige kwesties ging, zoals bijvoorbeeld:



In haar LvS-proefwerk legde zij een sterke verbinding met het concrete, door hetzij naar verdeelverhaaltjes hetzij naar tekeningen bij haar vraagstukken te vragen. Er kwam geen deling in voor. In de slottoets liet zij de vermenigvuldigingen en delingen met en van gemengde getallen zitten en berekende zij $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ via een staartdeling met kommagetallen. Mede gelet op de aandacht, die er aan de regelontwikkeling inmiddels was besteed, was zij dus aan het formaliseren van deze bewerkingen nog niet toe. In feite is deze indicator nog te prematuur voor Helga's leeproces, dat op het punt van het formaliseren nog nauwelijks op gang lijkt te zijn gekomen.

ad 5: eigen constructies en produkties op symbolisch niveau
Op dit punt was er sprake van enige inbreng in het onderwijsleerproces (§ 4.3 p.133). Doorgaans waren de produkties bescheiden van omvang, al gaf het daarop uitzonderingen, zoals bijvoorbeeld het proefwerk van het LvS. Toegespitst op de daartoe onderscheiden onderdelen, zag het leerproces er als volgt uit.

Na $3\frac{1}{2}$ *maand:* de eerste vrije produktie
Enkele trekken ervan waren:
— het uitsluitend toepassen van het optellen, met
— halven, kwarten en achtsten, onder het
— tweezijdig toepassen van schuilnamen, bijvoorbeeld $\frac{4}{8} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1\frac{1}{2}$.

Verder profileerde het werk zich door een mengvorm van symbooltoepassing en voluit schrijven, bijvoorbeeld $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{1}{4}$ en een halve kwart ($\frac{1}{8}$). Interessant aan deze laatste expressie is de poging van het op dezelfde noemer zetten, zonder dat dit volledig door haar in cijfers kan worden uitgedrukt. Dergelijk *partieel* samenstellen van breuken deed zich vaker voor in haar werk (en in dat van anderen). Het weerspiegelt (een bepaald stadium in) het verticaal mathematiseren, bijvoorbeeld eerst halven en kwarten (kunnen) samenstellen, vervolgens de achtsten erbij betrekken, dan halven en kwarten met vervolgens derden erbij enz., totdat zich een algemene methode van op gelijke noemers zetten ontwikkeld heeft.

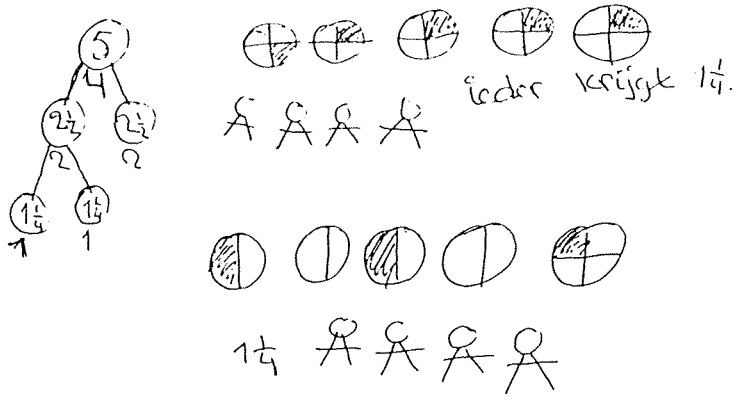
Twee maanden later: exploratie van $\frac{5}{8}$

Deze produktie kwam sterk overeen met de reeds geciteerde voor $\frac{6}{8}$ (§ 4.3 p.83).

Zij voegde – vergeleken daarmee – een globale verdeling toe en verkortte het herhaald bijtellen van $\frac{1}{8}$ ook tot multiplicatieve betrekkingen, namelijk: $1 \times \frac{1}{8}$ tot en met $5 \times \frac{1}{8}$. Het toepassen van schuilnamen bleef achterwege en de constructie van het schema van het tafelschikken stagneerde.

Een maand later: ordeningsmonografie

$\frac{5}{4}$ en $\frac{3}{4}$ werden met elkaar vergeleken. Helga's behoefte aan concreetheid bleek o.a. hieruit, dat zij in het inleidende werk in haar getekende verdelingen ook nog de verdelers representeerde.



Het leerproces was toen al zeven maanden aan de gang. De voortgebrachte ordeningsmonografie was nagenoeg dezelfde als die van Clara. Alleen zij verving $\frac{2}{4}$ ook nog door $\frac{1}{2}$. Bij volgende gelegenheden ging zij op overeenkomstige wijze te werk, zij het dat de vastgestelde ongelijkheden nu tweezij-

dig werden uitgewerkt. Het verschil las zij soms af van de getallenlijn door te schatten. Dit pakte niet altijd goed uit, zoals we al hebben laten zien aan de hand van een voorbeeld. Iets dergelijks kwam dus wel vaker voor. Later werd equivalentie toegepast om een veronderstelde ordening op juistheid te verifiëren. Zij produceerde bijvoorbeeld zelf:

(Stel:) $1\frac{5}{6}$ is groter dan $1\frac{2}{3}$,

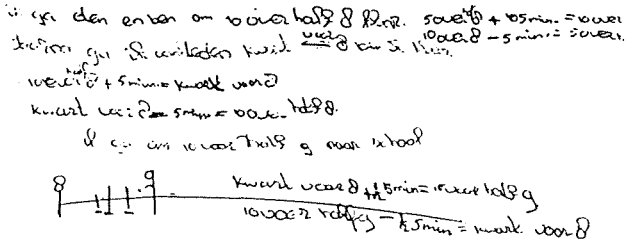
(dan:) $1\frac{10}{12}$ is groter dan $1\frac{8}{12}$.

Dat klopt, dus was de veronderstelling correct.

Twee maanden later: eigen produktie dagindeling

Helga volgde haar dagindeling zo werkelijkheidsgetrouw, dat zij verstrikt raakte in een zodanig verfijnd verhaal, dat beschrijving ervan op de getallenlijn en in betrekkingen op grote moeilijkheden stuitte.

Bijvoorbeeld: Mijn moeder komt boven om mij te wekken om half 8. Ik blijf nog even liggen en ben om vijf over half 8 beneden, enz.



Vijf maanden later: constructieve vulling van de getallenlijn

Helga verzuimde aanvankelijk de gegeven breuken als bouwstenen voor het voort te brengen monografisch materiaal te gebruiken. De constructie van de verschillende getallenlijnen gebeurde afwisselend zonder en met steunpunten. Voor de getallenlijn met $\frac{3}{8}$ als bouwsteen ging zij bij de volgende stap na $1\frac{7}{8}$ over op 2, vermoedelijk een hele eventjes op 10 (achtsten) stellend.

Het geproduceerde monografische materiaal kenmerkte zich door toenemende beknoptheid. Tenslotte bracht ze slechts de hoogst noodzakelijke additieve en multiplicatieve betrekkingen voort, zoals $\frac{3}{8} + \frac{3}{8}$; $2 \times \frac{3}{8}$ etc., zonder zich verder nog met mogelijke verkortingen of uitkomsten in te laten.

Vier maanden later: verkeerslicht

Voor het verkeerslicht $(\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ wordt op grond van herhaald bijtellen correct het eerste stuk van de tafel van vermenigvuldiging samengesteld. Alleen bij het uithalen van de helen vergist zij zich vanaf het derde produkt. Van de extra '$x \times 60$'-opgaven maakt zij niet veel, laat staan, dat zij aan eigen produktie toekomt. Opeenvolgende tegenstrijdigheden als $\frac{1}{4} \times 60 = 25$ en $\frac{3}{4} \times 60 = 45$, ontsnapten aan haar aandacht.

Vanaf twee maanden later: monografieën
Helga's prestaties waren in dit opzicht wisselvallig en gekenmerkt door:
— toepassen van het optellen, aftrekken en vermenigvuldigen;
— tweezijdige toepassing van schuilnamen;
— toepassing van eigenschappen als de commutativiteit van de optelling en vermenigvuldiging of het verdubbelen en halveren van de factoren in een vermenigvuldiging van twee factoren.

Op den duur ontwikkelt zij lokaal enige systematiek door zeker produktiemethode niet onmiddellijk weer te laten varen.
Bijvoorbeeld:

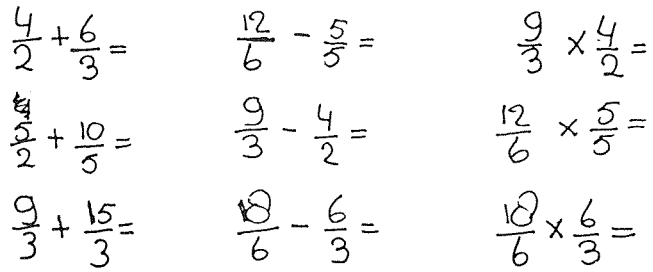
$\frac{10}{12} = 1 - \frac{2}{12}$ $\qquad$ $\frac{10}{12} = \frac{2}{12} + \frac{8}{12}$

$\frac{10}{12} = \frac{12}{12} - \frac{2}{12}$ $\qquad$ $\frac{10}{12} = \frac{2}{12} + \frac{16}{24}$

$\frac{10}{12} = \frac{12}{12} - \frac{4}{24}$ $\qquad$ $\frac{10}{12} = \frac{4}{24} + \frac{16}{24}$

De monografieën droegen vooral bij aan de produktie van equivalente breuken op het tweede niveau.

Een half jaar later: proefwerk Land van Samen (LvS)
Naar al vermeld werd had Helga een voor haar doen omvangrijke produktie, waarin zij door te vragen naar 'verhaaltjes' en 'tekeningen' de verbinding met het concrete nadrukkelijk gerealiseerd wilde zien. Bovendien was het werk redelijk gevarieerd. Zij maakte overigens geen enkele van haar eigen opgaven. Meer toegespitst op specifieke kenmerken kwam haar proefwerk op het volgende neer:
— relatief veel opgaven voor het oefenen van het optellen, aftrekken en vermenigvuldigen in het LvS, met gelijknamige en ongelijknamige getallen (uit het Land van Samen) en ook met breuken:



— relatief veel opdrachten tot produktie van een tekening, een verhaaltje of beide bij contextloze vraagstukken;
— relatief veel opgaven tot het bepalen van gehele schuilnamen voor LvS-getallen en omgekeerd, waarbij één opdracht tot constructie van een tabel;
— een vrije produktie-opdracht voor opgaven met de drie reeds genoemde hoofdbewerkingen.

De prestaties in het zelf construeren van methoden voor de hoofdbewerkingen waren bescheiden. Onder de vierde indicator werd reeds gewag gemaakt van het nog niet toe zijn aan het formaliseren van bewerkingen als vermenigvuldigen en delen. De prestaties in de slottoets in dit opzicht bevestigen dit. Eenvoudige aftrekkingen en delingen wist zij wel aan getallenlijnen op ruitjes papier of lijnstukken te voltrekken. Op eigen methoden voor deze bewerkingen kwam zij niet.

Een vermenigvuldiging als $2\frac{1}{2} \times 1\frac{4}{5}$ wist zij correct uit te werken, de distributiviteit toepassend en gebruik makend van haar uitkomst voor $2\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5}$ of 2.

Al met al had het werken op symbolisch niveau iets moeizaams voor Helga. Zij boekte weliswaar vooruitgang in het verticaal mathematiseren, maar voortvarend ging dit allerminst.

Samenvatting

Helga's activiteiten speelden zich vrijwel uitsluitend af op de eerste twee niveaus. Noties voor breuk en verhouding ontwikkelden zich zonder al te veel hinderlijke bijverschijnselen, hoewel er wel enige IN-distractorfouten werden gemaakt.

Er was sprake van een zekere voortschrijding in schematiseren, al was het aarzelend. Het schema van de tafelschikkingen had een zekere stijgingskracht. Het verticaal mathematiseren met dit werktuig reikte vooralsnog niet verder dan het tweede niveau. Zij was er zich overigens bewust van dergelijk materiaal met dit schema te kunnen voortbrengen, getuige de flexibiliteit waarmee zij dit middel soms inzette, juist met het oog daarop. De verhoudingstabel was lange tijd een stuurloos vehikel op haar leerweg. Pas in de laatste maanden kon zij er een zekere koers mee volgen.

Met een zekere wendbaarheid werden eveneens bepaalde visuele modellen toegepast. In het verschiet van haar leerproces gloorde het formele, maar zij was hieraan nog nauwelijks toegekomen. Bijgevolg kon er van gemaakte voorstellingen bij formele problemen nog weinig melding worden gemaakt. Het vermogen tot het denken in materiaal op het tweede niveau nam duidelijk toe. Anderzijds werd ook bij herhaling binnen eenzelfde probleemoplossingsproces een terugval in niveau waargenomen tot in de slottoets toe.

Wat de eigen constructies en produkties op symbolisch niveau aangaat, deze waren van gemiddeld gehalte.

Met name in de monografieën zien we naar het einde toe herhaaldelijk het lokaal toepassen van eenzelfde produktiemethode, waardoor er een zekere systematiek in het werk komt.

Henk (10;6) – (12;10)

Algemeen

Henk gedroeg zich als een gezeglijke jongen, die steeds goed, soms zelfs overijverig deelnam aan het onderwijsleerproces. Voor hem was het dus dubbel jammer, wanneer hij door onduidelijkheden in het al te experimentele materiaal in de fout ging. Hij wilde de dingen zo graag goed doen. Zo serieus speelde hij op de dingen in, dat de gedachte aan onzorgvuldigheid bij zijn opdrachtgevers niet bij hem opkwam.

Zijn deelname voltrok zich op een onopvallende, vanzelfsprekende manier. Hij leverde op gezette tijden zijn bijdragen, doch in de interactieve gedeelten van het onderwijs manifesteerde hij zich betrekkelijk bescheiden. Dit leek ook moeilijk anders te kunnen, want taal was zijn zwakke punt. Het verwoorden van iets bracht hij er slecht af. Daardoor had zijn inbreng in de interactieve lesgedeelten iets moeizaams.

Dit speelde hem soms zó parten, dat hij dan in de verwoording van zijn inzicht volledig vastliep, terwijl zijn gedrag dit inzicht weerspiegelde en dit bovendien door de schriftelijke neerslag van zijn denken werd bevestigd. Dit had hem onzeker gemaakt, waardoor hij behoefte toonde aan bevestiging.

Dit uitte zich in het graag tussentijds laten zien van zijn werk met de vraag of het zo goed was, ook al had hij daarvan eerder reeds de bevestiging gekregen. Zijn onzekerheid had ook de overhand in de interviews. Hij kon vergissinkjes produceren aan de lopende band en er in afwisseling daarmee ook blijk van geven over een hechte parate kennis van de breuken te beschikken.

Henk was in de eerste plaats wat analytisch ingesteld. Zijn aandacht richtte zich op het rekenaspect, de algoritmen.

Op het eerste niveau, dicht bij de realiteit, kon hij weliswaar goed uit de voeten, maar hij was geneigd meteen door te stoten naar het formeel-symbolische niveau. Wanneer hij maar even kans zag een probleem zuiver numeriek aan te vatten, negeerde hij prompt de mogelijkheden die de beschikbare schema's en modellen hem boden. Henk was op zijn manier een echte regelzoeker. Op dat terrein leverde hij ook de belangrijkste bijdragen in het verticale mathematiseringsproces.

Henk bekroonde zijn schoolcarriere als een wat aarzelende, te vriendelijke hoteleigenaar in de afscheidsmusical, gelukkig bijgestaan door een meer doortastende eega.

In de CITO-eindtoets voor het basisonderwijs 1986 had hij 22 van de 27 opgaven voor breuken correct. Met de percentielen 51, 75, 67 op de onderdelen taal, rekenen en informatieverwerking in deze toets, trad hij toe tot het gilde der MAVO-ers, alwaar zijn nieuwe leermeesters opnieuw zullen kunnen ontdekken, dat Henk in staat is onbedoeld een betere indruk te maken dan zijn feitelijke mogelijkheden uitwijzen.

Toegespitst op de geselecteerde kenmerken tekent zijn leerproces zich als volgt af.

Specifiek

ad 1: begripsverwerving en IN-distractoren

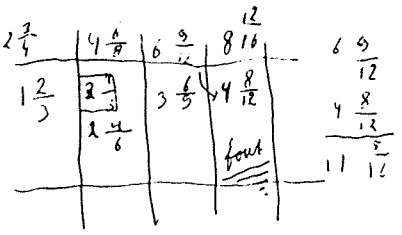
Aan het hele proces van omvorming van realistische visualiseringen tot schematische modellen droeg Henk belangrijk bij.

Nog maar nauwelijks was het terrein voor een eerste verkenning betreden of hij sprak openlijk zijn voorkeur uit voor meer schematische tekeningen 'omdat je daarin makkelijker kunt verdelen'. Zichzelf kon hij het bij dergelijke kwesties echter erg lastig maken. Zo probeerde hij bijvoorbeeld de vijf eieren van de omelet, waarvoor Margreet het recept gaf, weer over de vier delen ervan te verdelen. Bovendien had hij in die prille begintijd nog wat problemen met de terminologie. Hij noemde halven kwarten en omgekeerd en aanvankelijk schreef hij de breuknamen voluit.

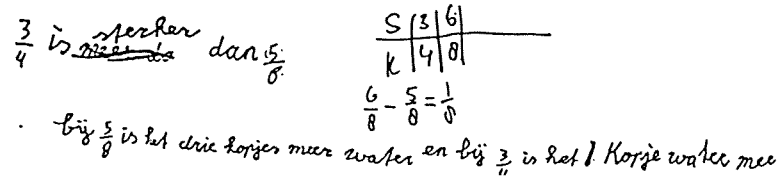
Net als anderen, bijvoorbeeld Clara, had hij er moeite mee 'een hele' door 'één' te vertegenwoordigen.

Dit waren echter de schermutselingen, die bij de start hoorden. Na enkele maanden leek hij goed op koers te liggen. Hij had de hand in het vinden van verdelingen, althans deed wel eens voorstellen in die richting en kwam op gezette tijden zo nu en dan te voorschijn als iemand die 'het doorhad'. Zo besliste hij (ongevraagd) voor Stefs schema voor koffiesterkte (§ 4.3 p.91) dat het steeds om gelijk sterke koffie ging. Maar het was evengoed mogelijk, dat hij zich verloor in het bewerken van de gegeven getallen en dan verviel in foutieve redeneerfouten bij het oplossen van verhoudingsproblemen of in IN-distractorfouten (§ 4.3 p.112).

Zijn hele leerproces had dit tweeslachtige. Zelfs in de afsluitende, vergelijkende toets kwam een dergelijke fout voor, waardoor het goede idee, voor het delen van breuken de verhoudingstabel toe te passen, op niets uitliep.



Voor het vergelijken van situaties richtte hij zich op verschillen tussen de getallen binnen de gegeven paren. Zijn conclusies onthulden dit soms:



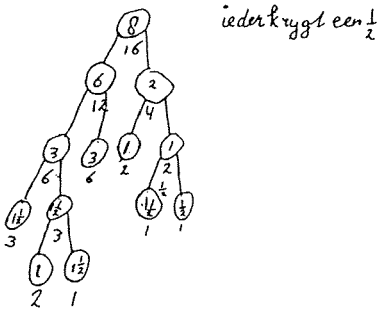
Vanaf halverwege het tweede onderzoeksjaar was Henks werk van de besproken fouten vrij, op de geciteerde fout in de vergelijkende toets na.

Een incident?

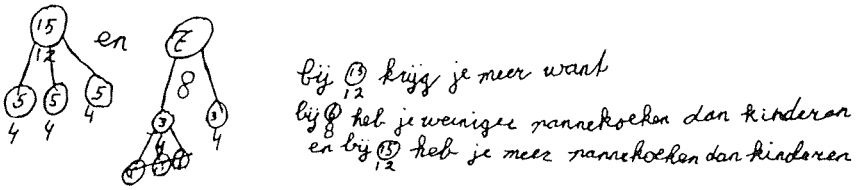
Dit neemt overigens de tweeslachtige indruk niet weg, die hij tot dan aan de dag legde. Overigens kwam hij na een dergelijke fout in de meeste gevallen wel in conflict met zijn eigen werk.

ad 2: voortschrijden in schematiseren

Het construeren van schema's voor het tafelschikken ging Henk betrekkelijk gemakkelijk af. Verkorten door het snoeien van takken paste hij vanaf de invoering toe. Opmerkelijk waren in dit stadium zijn verdelingen in ongelijke, maar wel gelijkwaardige tafels, bijvoorbeeld:



Ook weerspiegelde dit onderdeel in Henks werk kritisch volgen van het eigen handelen. Verscheidene keren zette hij zijn schema's voor het oplossen van vergelijkingsvraagstukken door tot in overtollig materiaal, realiseerde zich dit en verwijderde het dan door het uit te gummen of door te strepen.



Uit het geciteerde werk blijkt bovendien, dat aan de toegepaste schematisering een correcte conclusie werd verbonden.

Andere verkortingen, die later in zijn werk hun intrede deden, waren het toepassen van meerdelingen als eerste stap, zij het wat aarzelender en minder systematisch dan het verkorten door het weglaten van overbodige takken, en het niet invullen van tafeltjes, waarmee het schema toch niet vervolgd zou worden, een verschijnsel, dat vanaf het begin van het tweede onderzoeksjaar herhaaldelijk in zijn werk opduikt.

Hij leek ook heel goed te beseffen waarom het in deze ging, want na het verwerken van het computerprogramma stelde hij.

Je leerde hoe je ze moest verdelen en hoe je een boom kunt maken zonder een hele boel zijtakken.

Liep hij in zijn schema vast door ongeschikte keuzen en niet te nemen getal-obstakels, dan liet hij het er soms ook bijzitten. Andere keren stuurde hij rechtstreeks op conclusies aan onder het voorbijgaan aan schematisering of berekening.

Die van de eerste keer is wel sterker omdat ze bij de eerste keer heel veel schepjes in heel weinig koppjes en bij de tweede keer doen ze heel veel schepjes in veel koppjes

Hij vergeleek hier koffie:

S	10	en	S	16
K	4		K	6

Men kan dus ook niet verwachten, dat het schematiseren met verhoudingstabellen een strak patroon te zien zal geven. Het toepassen van dit middel tot schematiseren kenmerkte zich vanaf het begin eveneens door een zekere wisselvalligheid, zoals hierna zal blijken.
Evenals Frans lijkt hij de mogelijkheden ervan af te tasten. Overigens is het de vraag of hij, wat hij construeerde, wel steeds nodig had. Zo stelde hij eens tegen het einde van het eerste onderzoeksjaar tabellen samen teneinde $\frac{4}{5}$ en $\frac{6}{8}$ met elkaar te kunnen vergelijken. Koffie maken was de context. In zijn tabel voor $\frac{3}{4}$ (in plaats van $\frac{6}{8}$) nam hij een verdubbelingssprong, daarmee juist $|\frac{15}{20}|$ overslaand. In de ordeningsmonografie die volgde wist hij desondanks het sterkte verschil juist te beslissen: $\frac{4}{5} - \frac{1}{20} = \frac{6}{8}$.
Bevestigde de constructie van de tabellen eerder zijn volgzaamheid dan dat ze zijn operationele mogelijkheden met breuken en verhoudingen weerspiegelden? Gelet op de algemene indruk die hij maakte wel.
Een half jaar na deze ervaring past hij het herhaalde verdubbelen toe om $\frac{18}{8}$ en $\frac{14}{6}$ gemakkelijker vergelijkbaar te maken en verbond daaraan de conclusie '$\frac{18}{8}$ is $\frac{4}{2}$ meer dan $\frac{14}{6}$'(!)
Kort daarvoor echter zette hij $\frac{30}{18}$ en $\frac{22}{12}$ rechtstreeks om in $\frac{60}{36}$ en $\frac{66}{36}$ en stelde het verschil correct op $\frac{6}{36}$. Geen peil op te trekken dus.
In de verwerking van de toepassingsvraagstukken aan het einde van het tweede onderzoeksjaar ging hij weer aan het schematiseren en rekenen voorbij. In de vergelijkende toets aan het einde van het onderzoek bracht hij verkorte tabellen voort door tweemaal te verdubbelen. Zijn conclusies waren correct.
Tot een echt systematische methode kwam het in dit geval niet bij hem. Na de toets verviel hij weer in minder doelgerichte tabellen.

ad 3: flexibel modelgebruik, schematoepassing (en flexibel rekenen daarbij)

In de vergelijkende eindtoets paste Henk spontaan de verhoudingstabel toe voor het delen van breuken. Iets dergelijks had hij al wel eerder gedaan, bijvoorbeeld de tafel van vermenigvuldiging voor $1\frac{3}{4}$ verwerkte hij aldus:

tafel	1 x $1\frac{3}{4}$	2 x $1\frac{3}{4}$	-	-
=	$1\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{2}$	-	-

Dit wijst op een zekere souplesse in het kunnen toepassen van dit schema. De manier waarop hij het schema voor het tafelschikken toepaste om vergelijkingsvraagstukken op te lossen wees ook in die richting, met name de herhaaldelijk uitgevoerde correctie op algoritmisch gedrag, overtollig materiaal tot gevolg hebbend dat dan weer verwijderd werd of uitgewist.

Nog meer typerend was Henks gerichtheid op het overslaan van schema's en vooral modellen.

Zo verliepen de activiteiten met de getallenlijn voor hem moeizaam. De punt-interval-kwestie speelde hem parten (§ 4.3 p.102).

Bij de constructieve opbouw ervan werkte hij aanvankelijk met afzonderlijke lijnstukken op rij. Geruime tijd later (een half jaar) was er voor het bepalen van verschillen van ongelijknamige breuken slechts sprake van een a posteriori toepassing van de getallenlijn, in die zin, dat hij het met de getallen alleen ook wel af kon en dus plichtmatig van de getallenlijn gebruik maakte.

Voor de constructie van een methode voor het delen van breuken reeg hij strookjes aaneen in plaats van uit te gaan van een getallenlijn (§ 4.3 p.132).

In het algemeen gebruikte Henk visuele modellen niet op een flexibele manier. De enige opmerkelijke prestatie van hem op dit punt was zijn pleidooi in het begin voor schematische in plaats van realistische tekeningen vanwege het gemak ervan bij het verdelen.

Met de aangereikte schema's wist hij wel met de nodige souplesse om te gaan, al dient gezegd, dat het schema voor het tafelschikken hem beter lag dan de verhoudingstabel. Het vergelijken van situaties in andere contexten dan het verdelen ging hem niet bepaald gemakkelijk af – naar bleek – en vormde een bron van fouten. Dit zal mede op zijn schematiseringsproces invloed hebben uitgeoefend. Evenzo als Henks gerichtheid op algoritmen verklaart, dat zijn bedrevenheid in het schematiseren groter was dan in het visualiseren.

ad 4: het zich voorstellen van formele problemen

Henk kon zich stellig een bepaalde voorstelling van een formeel gesteld probleem maken in het laatste deel van zijn leerproces (§ 4.3 p.132). Zijn zoeken naar een methode voor het delen wees dit eveneens uit (§ 4.3 p.132).

Daar hielp het maken van een voorstelling juist heel sterk om het vraagstuk te verhelderen. Bij die gelegenheid toonde hij trouwens ook goed in de symboliek van de tafeltjes met hun uitkomsten te kunnen denken. $\frac{2}{3}$ verbond hij moeiteloos met $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}$ en hij bracht voor de constructie van tafeltjes met de helft of het dubbele van $\frac{2}{3}$ denkpatronen voort als $\frac{2}{3} \rightarrow \frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3} \rightarrow \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{4}{3}$. Het kan natuurlijk opnieuw een kwestie van volgzaamheid geweest zijn.
Buiten de context van verdeelsituaties leek hij zich eerst altijd even te moeten oriënteren of anders gezegd: voelde hij zich even ontheemd.
Een half jaar voor voorgaande ervaringen bijvoorbeeld moest hij zich in constructieve zin voor $\frac{18}{8} \rightarrow$ 't ging om koffie zetten – eerst weer realiseren: 18 schepjes, 8 kopjes, via 4 kopjes, hoeveel schepjes voor even sterke koffie?, voordat hij hiermee aan de slag kon.
Binnen de context van verdeelsituaties kon hij zich dus betrekkelijk gemakkelijk een voorstelling bij formele problemen maken.
Buiten dit vertrouwde gebied evenwel was het mathematiseren nog in volle gang en waren zijn activiteiten nog hecht verankerd in het tweede niveau.

ad 5: eigen constructies en produkties op symbolisch niveau
Op dit terrein manifesteerde Henk zich het krachtigst. De meeste optredens van Henk in de onderwijsimpressie schaarden zich onder deze kop: zijn inbreng in de kwestie van de bewerkingen en de regels daarvoor (§ 4.3 p.136 en p.138).
Ook zijn leerproces zullen we op dit punt nader uit een zetten.

Na $3\frac{1}{2}$ *maand* : eerste eigen produktie
Qua omvang was Henks produktie gemiddeld te noemen (12 sommen). Zijn werk onderscheidde zich door:
— het op een enkele uitzondering na toepassen van de bewerkingen optellen en aftrekken uitsluitend in samengestelde opgaven als
$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$; $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ etc. (§ 4.3 p.78)
met
— halven, kwarten en achtsten, onder
— impliciete toepassing van onderlinge gelijkwaardigheid; en
— de inverse relatie tussen beide bewerkingen onder gebruikmaking van eerder vastgestelde betrekkingen, bijvoorbeeld:
$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \rightarrow 5 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 4$ en
$\frac{1}{2} + 5 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 6$.

Twee maanden later: exploratie van $\frac{5}{8}$

Henk verdeelt globaal en op z'n Frans aan vierkanten. Evenals Carlien paste hij in het monografische materiaal voor het eenheidsgewijze verdelen incidenteel schuilnamen toe alsmede het gebruik maken van voorgaande tussénresultaten en het multiplicatief samenstellen.
Bijvoorbeeld:
$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 2 \times \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; $\frac{2}{8} + \frac{1}{8} = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = \frac{2}{4}$ (!);
$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 4 \times \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{3}{4}$ (!) enz., de gemaakte vergissing wordt vanaf de tweede betrekking tot het einde toe doorgezet.

Twee maanden later: vergelijken

Henk construeert op grond van het vergelijken van $\frac{5}{4}$ en $\frac{3}{4}$ met gesuggereerde ondersteuning van de getallenlijn – met als extra van hem voor $\frac{5}{4}$ een 'boompje' – de volgende ordeningsmonografie.

$1\frac{1}{4}$ is meer dan $\frac{3}{4}$;

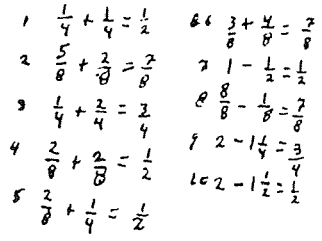
$1\frac{1}{4}$ is $\frac{2}{4}$ meer dan $\frac{3}{4}$
$1\frac{1}{4} > \frac{3}{4}$ $1\frac{1}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$
$1\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4}$
$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = 1\frac{1}{4}$ (gelijk maken)

Een maand later: opnieuw ordeningsmonografie

Dit keer ging het om $\frac{5}{4}$ en $\frac{9}{8}$. Zonder hulpmiddelen zette Henk de situaties rechtstreeks om in hun respectieve uitkomsten en situeerde deze vervolgens correct op de getallenlijn.
In de ordeningsmonografie werkte hij nu de ongelijkheid naar twee kanten toe uit.

Drie en een halve maand later: eigen produktie naar aanleiding van een verdeelopgave als bij de eerste eigen produktie

Henk gehoorzaamt de opdracht en bedenkt tien betrekkingen. Vergeleken met toen is nu van samengestelde opgaven geen sprake meer. Wel beperkt hij zich opnieuw tot optellen en aftrekken maar met een veel nadrukkelijker rol voor schuilnamen:



Anderhalve maand later: constructieve vulling getallenlijn

Naar reeds vermeld, ging Henk uit van afzonderlijke lijnstukken. Dit betrof een voorbeeldsituatie (1 dropveter verdelen met 4 kinderen). Het geheel werd voorzien van redelijk omvangrijk monografisch materiaal.
Voor de eerst gegeven situatie (3D : 4K) construeerde hij wél een getallenlijn, voorzag de gezochte punten resp. van $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{4}$ en $\frac{9}{4}$ als etiket en probeerde deze op allerlei manieren uiteen te leggen.
Voor $\frac{9}{4}$ had hij bijvoorbeeld:

$1 + 1 + \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$2 + \frac{1}{4}$

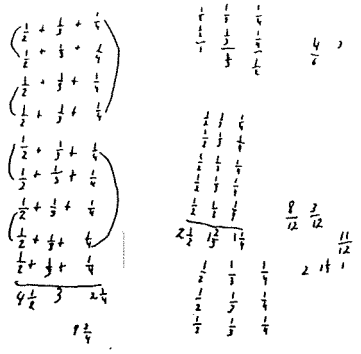
$3 \times \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$

Dit wijst erop, dat het pas later tot hem doordrong dat $\frac{3}{4}$, en later $\frac{3}{8}$, de bouwstenen voor het voort te brengen monografische materiaal dienen te zijn.
Voor $\frac{3}{8}$ beperkte hij zich tot additieve en multiplicatieve betrekkingen met hun uitkomsten voluit in achtsten bij de getallenlijn.

Vier en een halve maand later: symbolische reconstructie van een verdeelsituatie

Iemands portie was $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. Hoeveel verdelers waren er en hoeveel verdeelden zij samen, of om welk tafeltje ging het, zo luidde de vraag.
In zijn gefaseerde poging tot reconstructie van de situatie werd heel wat ondernomen, zoals het volgende te zien geeft. In eerste instantie werd het veronderstelde aantal porties additief vastgesteld (2 + 3 + 4).
Het daarna doorgaan duidt op een cognitief conflict; het kwam immers niet mooi uit!



Het toepassen van schuilnamen is opvallend. $1\frac{1}{12}$ werd uiteindelijk als portie voor ieder vermeld bij de opgave. Henk verbond dit overigens niet met $\frac{13}{12}$.

Twee weken later: verkeerslicht

Voor het verkeerslicht ($\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$) ontdekte Henk de regelmaat in de bijpassende tafel doch maakte deze door een vergissing nog mooier dan hij in feite was ($1\frac{11}{12}$, $3\frac{10}{12}$, $4\frac{9}{12}$, $5\frac{8}{12}$). Schuilnamen paste hij verder niet toe.

De '$\frac{1}{x} \times 60$'-sommen inspireerden hem tot twee volledige tafels van vermenigvuldiging, namelijk, die voor $\frac{1}{10}$ t/m $\frac{10}{10} \times 60$ en $\frac{1}{12}$ t/m $\frac{12}{12} \times 60$ en had hij een beginnetje gemaakt met die van $\frac{1}{20} \times 60$.

Vanaf een maand later: monografieën

In Henks werk konden de volgende methoden van produktie worden onderkend:

— het variëren van de bewerking; in vrijwel iedere monografie paste hij het optellen, aftrekken en vermenigvuldigen toe (§ 4.3 p.128)

— het tweezijdig toepassen van schuilnamen, bijvoorbeeld:
$\frac{6}{8} = \frac{6}{8} \times 1$ en $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} \times 1$ vs. $\frac{6}{8} = 3 \times \frac{1}{4}$ en $\frac{6}{8} = 3 \times \frac{2}{8}$

— het toepassen van de commutatieve wet of andere eigenschappen, zoals in het voorgaande punt al bleek; nog een voorbeeld:
$\frac{10}{12} = 10 \times \frac{1}{12} = 5 \times \frac{2}{12} = 2 \times \frac{5}{12}$

— in vrijwel alle monografieën starten met een uiteenlegging, geïnspireerd op het Franse verdelen, dus bijvoorbeeld:
$1\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, $\frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ etc.

Er zit weinig progressie in het werk. Van meet af is het van boven gemiddeld gehalte geweest.

Een half jaar later: proefwerk Land van Samen (LvS)

Henks deelname beperkte zich tot het staartje van de les, zijn produktie was dienovereenkomstig. Wel vatte hij onmiddellijk de bedoeling. Van het LvS trok hij zich weinig aan. Hij bedacht 'gewoon' opgaven voor breuken, namelijk:

— een open produktieopdracht;

— een lastige toepassingssituatie, namelijk '3 hele pannekoeken en nog $\frac{4}{6}$, dus $3\frac{4}{6}$' verdelen onder 6 kinderen; en

— twee samengestelde opgaven, waarin de uitkomsten een optelling, twee

aftrekkingen, een vermenigvuldiging en twee delingen per drietal moesten worden samengenomen en vervolgens deze uitkomsten opnieuw;
— een produktieopdracht tot drie (ver)deelopgaven met voorgeschreven uitkomst ($1\frac{1}{3}$).

Wat het zelf construeren van een methode voor een bewerking aangaat, kan gesteld dat Henk in dit opzicht wel iets presteerde. Voor het aftrekken en optellen is deze kwestie niet nauwkeurig te achterhalen, al wezen zijn eigen produkties uit, dat hij op zeker moment die bewerkingen kon uitvoeren, volgens een regel ook al had het onderwijsleerproces in dit opzicht niets aangereikt.
Tijdens de verwerking van het LvS verwoordde Henk de regel voor het optellen. Al vermenigvuldigend bleek hij heel flexibel met breuken te kunnen omgaan (§ 4.3 p.133). Wel eerbiedigde hij niet in alle gevallen de distributieve wet van het vermenigvuldigen over het optellen.
Voor het LvS verwoordde Henk de 'stop-regel' (§ 4.3 p.140), waaruit bleek, dat hij een methode voor het vermenigvuldigen had (in)gezien.
Wat het delen aangaat vermelden we nogmaals Henks greep naar de verhoudingstabel in de afsluitende toets; een goede greep, die helaas smoorde in een IN-distractor incident.
Mede gelet op de aarzelingen en wisselvalligheden in zijn leerproces, leverde Henk hier opmerkelijke prestaties.

Samenvatting
Henks kracht was gelegen in het verticaal mathematiseren. Hij neigde ertoe, wanneer hij eenmaal vertrouwd was met een context, direct door te stoten naar het formeel-symbolische niveau.
Bijgevolg had zijn mathematiseringsproces buiten de contexten van de verdeelsitaties om iets moeizaams. Het vergelijken en ordenen van situaties aldaar liep nogal eens vast in foutieve additieve redeneringen en ook maakte hij de nodige IN-distractorfouten in het rekenen met breuken. Door zijn wat analytische instelling richtte zijn voorkeur zich op het schematiseren met tafelschikkingen en verhoudingstabel.
Daarbij leek hij er maar uiterst moeizaam in te slagen de toepassing van genoemde schema's tot meer algemene methode te verheffen. Het schema voor de tafelschikkingen was voor hem lange tijd sterk situatiegebonden, ondanks het feit dat hij de transfer ervan naar koffiesterkte doorzag, zoals eerder gemeld werd. Binnen de oorspronkelijke context was er sprake van de nodige stijgingskracht met dit schema. Voor de verhoudingstabel lag dit minder duidelijk al toonde hij een voorkeur voor het herhaald verdubbelen, eventueel verkort.
Afgezien van zijn idee omtrent schematische tekeningen voltrok het loskomen van het eerste niveau zich voor Henk voornamelijk numeriek-schematisch. Van flexibele modeltoepassing kan dan ook niet gesproken

worden.
In het schematiseren legde hij wel enige souplesse aan de dag, doch de meest opmerkelijke prestaties leverde hij in dit opzicht in feite op het formeel symbolische niveau, zoals met name zijn methode van vermenigvuldigen weerspiegelde.
De context van verdeelsituaties was voor hem als voorstellingskader bruikbaar. Van hieruit had hij ruimschoots het derde niveau overmeesterd. Daarbuiten echter, in andere realiteiten, vertoefde hij nog uitgesproken op het tweede nivau, ingeklemd tussen concreet en formeel-symbolisch.
Activiteiten gericht op de generalisatie van de aangereikte schematiseringen zouden aan zijn stijgingskracht nieuwe impulsen kunnen geven en ook hier het fungeren op het derde niveau kunnen bevorderen.
Zijn bijdragen aan de constructie van methoden voor het uitvoeren van de verschillende hoofdbewerkingen wijzen uit, dat er mogelijkheden zijn in dit opzicht.

Kevin (10;3) – (12;7)

Algemeen
Kevin was een jongen met beperkte mogelijkheden, die met onderkoelde belangstelling het onderwijs volgde, omdat het nu eenmaal moest. Plezier had hij er meestal niet in. Het kostte dan ook de nodige moeite hem tot enige inbreng te bewegen. Zijn lichaam en geest waren meestal op bilocatie. In die toestand leidde hij ook anderen af en praatte overmatig. Hij kon dan – meestal samen met Mark – de voortgang van het onderwijsleerproces behoorlijk ophouden. Was een felle terechtwijzing van de leraar het gevolg dan kon hij hierop tweeërlei reageren, namelijk instemmend, gevolgd door loyaliteit en inzet of hevig verontwaardigd; er viel dan weinig meer met hem te beginnen.
Sloeg het vonkje van de motivatie wel over dan kon hij soms anticiperen op kwesties, die nog in het verschiet van het besprokene besloten lagen. Op zulke momenten durfde hij ook tegen de opinie van jongens met meer leergezag in te gaan; hij stond dan voor zijn afwijkende standpunt. Had hij eenmaal een bepaald inzicht verworven en ontdekte hij in de les daarvoor een mogelijkheid tot toepassing, dan was hij er erg op gebrand de groep deelgenoot hiervan te maken.
In wezen was Kevin een erg onzekere jongen, die bij de geringste twijfel aan de juistheid van zijn inzichten in de bedoelingen van een opgeworpen kwestie, het liet afweten. Vòòr en samen met hem moest dus telkens opnieuw het verloren gegane contact met de leergang hersteld worden. Buiten hem om waren er ook oorzaken hiervoor in het onderwijsproces gelegen, bijvoorbeeld door te snelle opeenvolging of het onzorgvuldig stellen van vragen (§ 4.3 p.90).
Kevin was ingesteld op het visuele, kon redelijk verbaliseren, maar zijn analyserend vermogen was erg bescheiden. In het verleden bleek dit reeds.

Het uiteenleggen van een natuurlijk getal naar zijn op plaatswaarde berustende onderdelen, kostte hem lange tijd moeite. Net als Margreet werd Kevin bij iedere omkering voor een mentale krachttoer geplaatst, die hij op het eerste gezicht beslist niet kon volbrengen. Pas na het nodige geaarzel en getob liet zijn bewustzijn schoorvoetend het besef toe wat er aan de hand zou kunnen zijn.
In het algemeen was Kevin te weinig reflectief ingesteld. Hij kwam dan ook niet zo gauw met zichzelf in conflict door een uitkomst, die strijdig was met de betrokken vraagstelling. Hij verwisselde bijvoorbeeld steevast getallen in zijn schema's, de pizza's en hun verdelers, de schepjes en de kopjes, de wegen en de tijden, enz., zonder dit te merken. Anders gezegd, zijn vermogen zich de dingen te realiseren was beperkt, zijn geest was vluchtig. Daarom was het nodig, dat hij dicht bij de realiteit met zijn concrete bronnen verbleef. Zijn optreden in de onderwijsimpressie wijst dit uit. Het merendeel van de observaties van hem brengt zijn moeiten met het horizontale mathematiseren tot uitdrukking. Hij was lange tijd onmachtig zich aan de concrete bronnen te ontworstelen, zoals de beschrijving van zijn leerproces zal uitwijzen.

In het onderdeel rekenen van de CITO-toets 1986 had hij 17 van de 27 opgaven voor breuken e.d. correct. Voor het geheel zou zijn percentielscore in de buurt van de 22 gelegen hebben.
In de CITO-toets 1987 scoorde hij voor taal, rekenen en informatieverwerking achtereenvolgens de percentielen 39, 57 en 19.

Specifiek
ad 1: begripsverwerving en IN-distractoren
Het loskomen van de werkelijkheid wierp dus de nodige obstakels op. In het begin uitte zich dit in zijn voorkeur voor tekeningen met realistische trekjes. Dit stond de modelvorming in de weg. Het kostte hem moeite zich de taal voor het beschrijven van zijn activiteiten te verwerven (§ 4.3 p.76), dit betrof vooral ook de notatie van breuken (teller en noemer verwisselen). Hij werd eveneens gehinderd door de rangtelwoordkwestie en sprak na een voltrokken verdeling aanvankelijk van 'het eerste deel', 'het tweede deel', enz. Bij het voltrekken van verdelingen in tekeningen zoekt hij in het begin zijn houvast in het trekken van verbindingslijnen van de verdelers naar de hun toe te wijzen delen (§ 4.3 p.81). Dat er door verdelingen relaties als $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ zichtbaar tot stand gebracht worden, ontgaat hem, althans hij geeft er geen blijk van ze te zien. Het duurt ruim een jaar, voordat hij deel-geheel-relaties door middel van een breuk ook in minder vertrouwde gevallen kan beschrijven.
Zelfs in de meest eenvoudige gevallen had Kevin geen verweer tegen zijn neiging tot het maken van IN-distractorfouten, bijvoorbeeld $1 + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$ (1 + 1 = 2 en de 4 blijft zo) (§ 4.3 p.73). Deze neiging hield lang stand. Anderhalf jaar na de start van het experiment bestond ze nog steeds. Voor elke

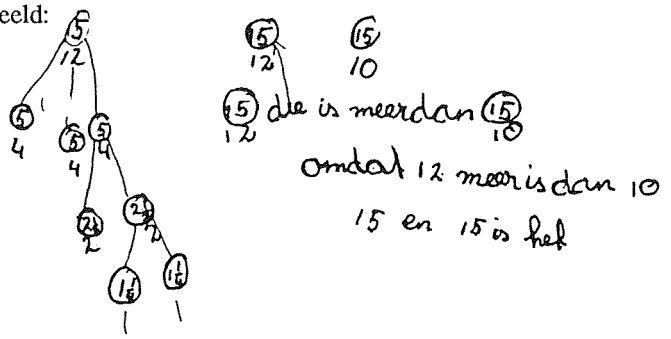
bewerking moest er telkens met dezelfde intensiteit tegen ten strijde getrokken worden. Dat wil zeggen, kwam Kevin in aanvaring met zijn onjuiste uitkomsten voor bijvoorbeeld ordeningen, optel- of aftrekopgaven door afwijkende uitkomsten via alternatieve, dichter bij het concrete gelegen, oplossingen, dan kon hij voor het vermenigvuldigen weer even onbevangen in deze val trappen. Tegen het einde van het onderzoek wordt zijn werk distractorvrij.

Voor het oplossen van vergelijkingsproblemen vertoonde zijn leerproces overeenkomstige trekken. Wat verdeelsituaties aangaat, zag hij na een half jaar voor eenvoudige gevallen wel in dat deze door verhoudingsconstantie als gelijkwaardig konden worden geklassificeerd. Voor de eenvoudigste gevallen kon hij na een jaar eveneens verband leggen tussen situaties, in symbolen gegeven, en (geschatte) uitkomsten.

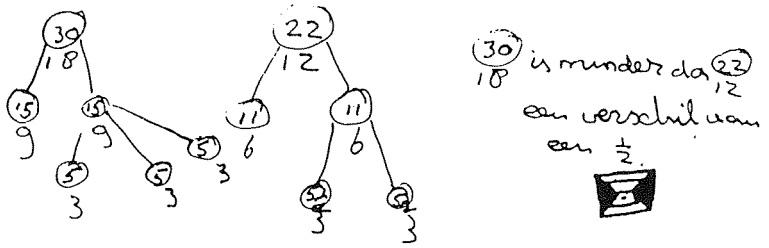
Buiten de context van de verdeelsituaties verviel hij lange tijd in het onjuiste, additieve redeneren, nam hij dus geen verhoudingsconstantie in acht, indien dit geboden was.

Zo verbond hij de ene keer bij het vergelijken van koffie, de sterkte met de grootste getallen of met het grootste aantal schepjes en het sterkteverschil met het verschil van de aantallen schepjes (§ 4.3 p.90). Ook noemde hij bijvoorbeeld 4S : 10K *vijf* keer zo slap als 4S : 5K. Waren er minder doorzichtige of minder vertrouwde verdeelsituaties in het spel door de grootte van de getallen, dan verloor hij ook het verhoudingsaspect uit het oog.

Bijvoorbeeld:



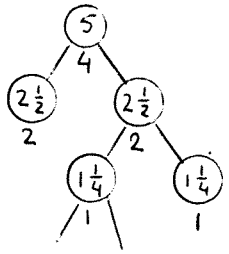
Wanneer het onderzoek op weg is naar zijn afronding, kan hij zo nu en dan een gevraagde vergelijking voltrekken onder toepassing van één van de beschikbare schema's en met een absoluut verschil als conclusie:



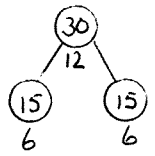
Het zich stellen op het standpunt van verhouding – zo wijst het voorgaande uit – was buitengewoon moeilijk voor Kevin, zeker, wanneer door de toegepaste symbolen en schema's de realiteit al wat losgelaten werd. De volgende indicator zal uitwijzen hoe Kevin de binding met de realiteit steeds weer zocht. In dit opzicht had zijn leerproces veel weg van dat van Margreet, al moet gezegd, dat Kevin zich op het punt van de ℕ-distractoren nog onbuigzamer toonde dan zij.

ad 2: voortschrijden in schematiseren

Het schematiseringsproces van Kevin weerspiegelde eveneens het moeizaam afstand nemen van de concrete werkelijkheid. Zo begon de constructie van het schema voor de tafelschikkingen voor hem met het tekenen van losse 'tafels' (§ 4.3 p.86). De overgang op een schema voltrekt zich daarna snel. Aanvankelijk verkort hij zijn schema's niet, doch na enkele ervaringen begint ook hij met het weglaten van takken. Het te ver doorschieten in de schema's weerspiegelt vervolgens zijn bedrevenheid ermee. Ook de verdelers – in geval die er zijn – ondergaan dan soms het breukverwekkend verdelen, tenzij hij zichzelf nog juist bijtijds een halt toeroept:

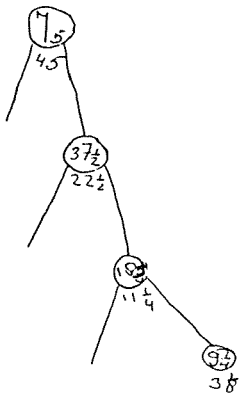


Ook voor het oplossen van vergelijkingsvraagstukken vertoont hij deze neiging tot produktie van overbodig materiaal. Opmerkelijker is echter, dat hij in het eerste onderzoeksjaar steeds een uitweg zoekt in het verdelen van visuele modellen, althans de constructie van schema's met dergelijke middelen ondersteunt, wanneer het op het invullen van de getallen aankomt.
Dat in:

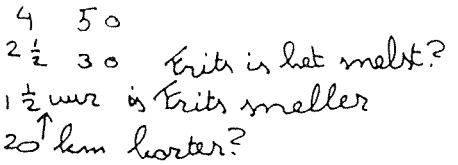


de beide kleinere tafels weer bijeengeschoven kunnen worden tot $\frac{30}{12}$ blijkt een geweldige ontdekking voor hem (§ 4.3 p.87); een kwestie van omkeren, zoals gezegd geen sinecure voor Kevin. Het herhaalde halveren, waarop de schemabouw meestal berust, ruilt hij zo nu en dan in voor een meerdelige instap. Het weglaten of niet meer invullen van te missen tafeltjes komt eveneens op gezette tijden in zijn werk voor, niet dat er sprake is van systematische toepassing van deze verkortingen. Met het snoeien van takken

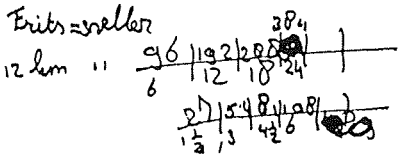
in de boomschema's was dit na enkele maanden vanaf de introductie wel het geval. Wanneer het eerste onderzoeksjaar zijn eindstation nadert, doet ook de verhoudingstabel zijn intrede in zijn werk. Tegelijk met het andere schema treedt deze dan enige tijd op in zijn leerproces.
Voor het schema van het tafelschikken doen zich geen nieuwe ontwikkelingen meer voor. Na het computerprogramma construeert Kevin:



desgevraagd toevoegend niet te weten, wat hij ermee geleerd heeft. Het schematiseren met de verhoudingstabel voltrekt zich eveneens wat wisselvallig en kenmerkt zich niet door al te grote efficiency.
Nu eens probeert hij de gegevens van een vraagstuk zonder tussenkomst van een schema te vergelijken:



Dan weer gaat hij wel met tabellen te werk:

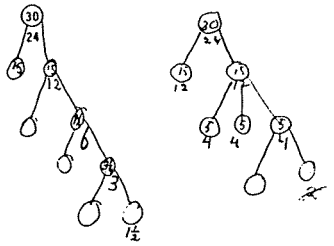


Kevins wijze van omgaan met vergelijkingsvraagstukken, zoals beschreven onder indicator (1) wordt er in manifest.
Verdere voortgang in het schematiseren met de verhoudingstabel zat er niet in.
Aan het einde van het tweede onderzoeksjaar construeerde hij in enkele toepassingsvraagstukken zowel voor een verdeel- als voor een vergelijkingsvraagstuk een schema voor het tafelschikken. In de vergelijkende toets aan het eind van het onderzoek bleef het gebruik van schema's achterwege.

Het schema voor het tafelschikken had enige stijgingskracht voor hem, doch van de verhoudingstabel ging niet zozeer die werking uit. De over het geheel genomen moeizame voortgang in schematiseren is dus in overeenstemming met Kevins gehechtheid aan het concrete niveau.

ad 3: flexibel modelgebruik, schematoepassing (en flexibel rekenen daarbij)

Kevin bleek flexibel genoeg om in geval van een impasse tijdens de schemaconstructie om te zien naar visualiseringsmiddelen teneinde het einde van zijn weg naar een oplossing te bereiken. Een enkele maal – het gebeurt in het tweede jaar – zoekt hij een uitweg binnen dezelfde schematisering:



De toegepaste verkortingen bij het schematiseren met de tafelschikkingen getuigen ook van enige souplesse in dit verband. Soms zat hij er wat tegenaan, zoals die keer dat hij 'een boompje' voor een weg-tijd-vraagstuk opperde, maar hieraan zelf geen uitvoering kon geven (§ 4.3 p.109). Een andere keer was het echt prijs, bijvoorbeeld toen hij de peilschaal van de vulmachine omzette in een dubbelschalige getallenlijn (§ 4.3 p.130).

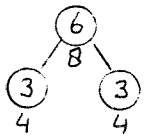
Wat de getallenlijn aangaat, daarmee sprong hij wat globaal om. Bij de constructieve invulling ervan (Frans verdelen; verkeerslicht e.d.) hield de voortgang in sprongen geen gelijke tred met de numerieke progressie. Desgevraagd gaf hij er blijk van heel goed te weten dat deze discrepantie ongepast was.

Voor het overige was van flexibel modelgebruik of schematoepassing niets bespeurbaar in zijn leerproces. Deze indicator vormt – in combinatie met beide voorgaande – een aanwijzing, dat Kevin het vooral van het concrete en van de schema's en modellen moest hebben. Het geforceerd werken op symbolisch niveau ging hem niet goed af. Daarin waren zijn bronnen van misverstand en onbegrip vooral gelegen, mede veroorzaakt door Kevins gebrekkige vermogen grootheidswaarden in relatie tot elkaar te beschouwen, laat staan te variëren.

ad 4: het zich voorstellen van formele problemen

De voorgaande indicatoren weerspiegelen overduidelijk een leerproces, dat zich op de eerste twee niveaus afspeelt. Aan het zich voorstellen van problemen op formeel-symbolisch niveau was hij dus nog niet toe. Werd een probleem in symbolische vorm gegeven, zonder enige binding met de

concrete werkelijkheid, dan zwichtte hij gemakkelijk en hardnekkig voor IN-distractorfouten. Een uitzondering hierop vormden vraagstukken met het symbool $\frac{a}{b}$ dat het situatiemodel van het tafelschikken nog weerspiegelt. Maar zelfs dan nog moest hij soms aangespoord worden de betekenis ervan tot zijn realistische oorsprong terug te voeren.
Bijvoorbeeld $\frac{6}{8}$. Bedenk een tafeltje, waar ieder de helft krijgt. Vatte hij dit op als: 'Bedenk de helft van dit tafeltje, dan volgde er prompt: $\frac{3}{4}$.
Werd hij dan nog eens met zijn neus op de feiten van de vraagstelling gedrukt, bijvoorbeeld via



dan redeneerde hij $\frac{6}{8}$ Frans verdelen $\frac{6}{8} : 2 = \frac{3}{8} \rightarrow \frac{3}{8}$. Verloor hij dan niet al te snel de greep op zijn concentratie, dan kon hij zelfs uit de voeten met $\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$ = via de redenering $\frac{4}{5}$ hoort bij $\frac{4}{5}$ en $\frac{4}{5}$: $2 = \frac{2}{5} \rightarrow \frac{2}{5}$, er tevens blijk van gevend het nodige van de 'van-keer' kwestie doorzien te hebben. Tot het zelfstandig maken van een voorstelling bij een probleem op formeel-symbolisch niveau was Kevin dus niet in staat. Zijn leerproces vormt een aanwijzing, dat met name het proces van symboliseren uiterst hecht in de realistische bron verankerd zou moeten zijn – voor hem althans.

ad 5: eigen constructies en produkties op symbolisch niveau
Mede gelet op wat voor indicator (1) beschreven werd, kan ervan worden uitgegaan, dat het doen van constructies en produkties in symboolvorm steeds en over lange tijd een hachelijke onderneming zou zijn vanwege het IN-disctractorgevaar. Aan de andere kant zou het voortbrengen van dergelijk materiaal juist de diagnostische functie kunnen hebben waarvan we eerder gewag maakten (§ 3.2).
Ondanks de weerbarstigheid van de breuken in symboolvorm, kreeg het tweede niveau toch allengs wat inhoud. Zo gaf hij er in het laatste gedeelte van het onderzoek blijk van aan monografieën te kunnen bijdragen (§ 4.3 p.127), waarbij hij ook relaties wist voort te brengen als '$\frac{5}{6}$ is schuilnaam voor $\frac{10}{12}$' (§ 4.3 p.129). Op de lange termijn beschouwd hield zijn leerproces het volgende in.

Na $3\frac{1}{2}$ *maand*: vrije produktie
Het werk sprong er vooral uit door:
— distractorfouten (7 van de 10 opgaven). Dit gebeurde ondanks het feit

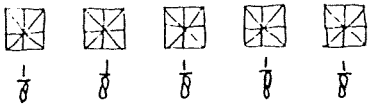
dat hij in een interview van een week ervoor al op indringende wijze met dit fenomeen geconfronteerd was. Hij had bijvoorbeeld op rij: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$; $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$; $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$!

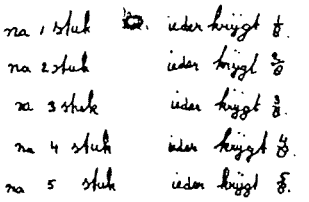
— het op een enkele uitzondering na toepassen van alleen de bewerking optellen, met

— voornamelijk halven, kwarten en achtsten, afgezien van afwijkende distractoruitkomsten, bijvoorbeeld $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{2}{2}=\frac{7}{10}$.

Twee maanden later: exploratie van $\frac{5}{8}$

Er wordt globaal en Frans verdeeld aan vierkanten. In de monografische weergave van het laatste wordt volstaan met:

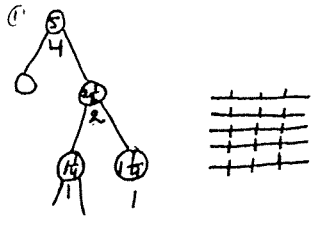


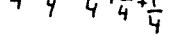


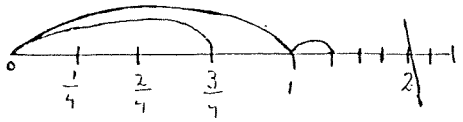
gevolgd door enkele betrekkingen met achtsten, overigens zonder verband met het Franse verdelen. Dit verschijnsel op grond van dergelijke vragen passende betrekkingen op symbolisch niveau te construeren kwam vaker in zijn werk voor.

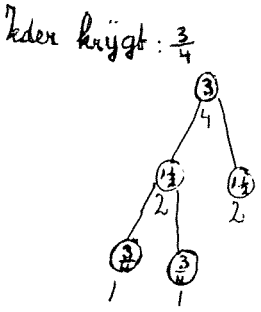
Twee maanden later: vergelijken

Het ging om $\frac{5}{4}$ en $\frac{3}{4}$. Eerst werd er voorbereidend werk gedaan.

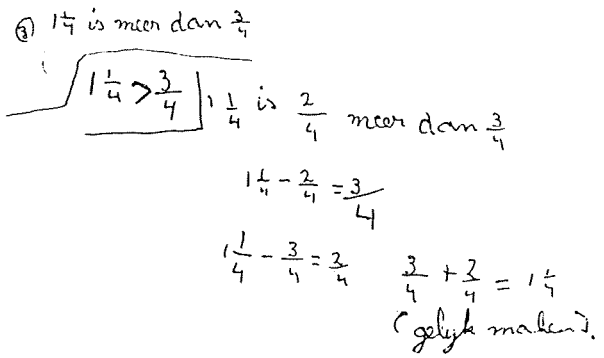








Daarna werd de volgende ordeningsmonografie samengesteld.



Merk op hoe hij in de voorbereiding het schema met een getekende verdeling aanvult en hoe hij het vervolgens niet zo nauw neemt met de eenheden op de getallenlijn.

Een maand later: opnieuw ordeningsmonografie
Dit keer ging het om ⑤/4 en ⑥/8. Beide situaties werden rechtstreeks omgezet in hun uitkomsten (resp. $\frac{5}{4}$ ($1\frac{1}{4}$) en $\frac{6}{8}$ ($\frac{3}{4}$)). De gevraagde monografie bleef beperkt tot ongelijkheden naar twee kanten. De betrekkingen met verschillen en 'gelijk maken' bleven dus achterwege.

Twee weken later: eigen produktie dagindeling
De uiterst beknopt beschreven gebeurtenissen van de dagindeling (wakker, hond uitlaten enz.) werden door middel van pijlen verbonden met de tijdlijn. Door enkele betrekkingen werden deze gebeurtenissen in één richting met elkaar in verband gebracht, aldus $7 + \frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$; $7\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 8$; $8\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 8\frac{3}{4}$ (resp. 'wakker' (7), 'hond uitlaten' ($7\frac{1}{2}$) e.d.).

Vijf maanden later: constructieve vulling getallenlijn
Kevin ging globaal, zonder steunpunten te werk. In het monografische materiaal werden geen equivalenties toegepast. Wel was het IN-distractorvrij en maakte hij enkele buiten de orde betrekkingen als $\frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{6}{4}$ of $\frac{5}{4} + \frac{4}{4} = \frac{9}{4}$. De bouwsteen $\frac{3}{4}$ werd dus niet consequent gebruikt. Tot multiplicatieve verkortingen kwam het niet.

$4\frac{1}{2}$ maand later: de tafel van $2\frac{1}{4}$
Deze wordt op correcte wijze geproduceerd. $\frac{2}{4}$ in uitkomsten is steeds meteen in $\frac{1}{2}$ omgezet. De sprongen op de getallenlijn houden echter geen gelijke tred met de groei van deze uitkomsten, zoals al eerder gemeld.

Twee weken later: verkeerslicht

Voor het verkeerslicht ($\frac{2}{3}$,$\frac{1}{2}$,$\frac{3}{4}$) werd het begin van de tafel van $1\frac{11}{12}$ opgebouwd. De vergissing, gemaakt in het tweede produkt ($3\frac{22}{12}$), werkte in de volgende uitkomsten door. Hij ging dus via herhaald optellen te werk. Het uithalen van de helen bleef achterwege. Hij produceerde zelf vier '$\frac{1}{x}$ × 60'-sommen namelijk $\frac{1}{10} \times 60 = 6$, en net zo met $\frac{2}{10}$,$\frac{4}{10}$ en $\frac{10}{10}$, allemaal correct.

Vanaf een maand later: monografieën

Het werk kan worden gekenschetst door de volgende methoden van produktie:

— het variëren van de bewerking, waarbij het optellen de andere (aftrekken en vermenigvuldigen) sterk domineerde;

— het heel bescheiden, maar overigens wèl tweezijdig toepassen van schuilnamen, bijvoorbeeld $\frac{3}{4} = 1 - \frac{2}{8}$ naast $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$, maar ook $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$;

— het toepassen van de commutatieve wet voor het optellen en vermenigvuldigen, alsook nog een eigenschap van het aftrekken, namelijk $a - b = (a + p) - (b + p)$;

— in de meeste monografieën beginnen met een uiteenlegging geïnspireerd op het Franse verdelen, bijvoorbeeld voor
$\frac{7}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$.

Hieruit leidde hij systematisch nieuwe betrekkingen af, namelijk:

$\frac{2}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$

$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ enz.

Soms week hij hiervan af door een toenemend aantal 'eenheden', rechtstreeks samen te stellen.

Bijvoorbeeld voor $\frac{9}{8}$:

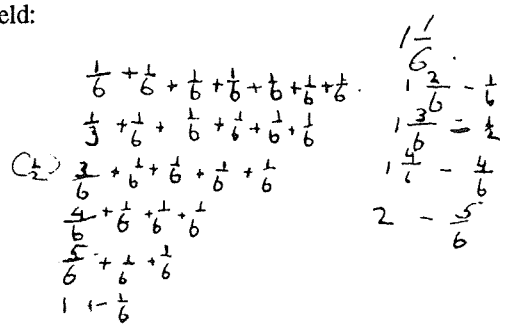
$\frac{8}{8} + \frac{1}{8}$

$\frac{7}{8} + \frac{2}{8}$ enz.

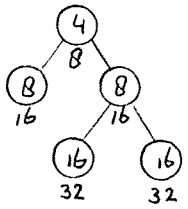
Een enkele maal was een distractorfout klaarblijkelijk onvermijdelijk voor hem: $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$. Dergelijke incidenten waren echter een uitzondering. Kevin beperkte zich in het algemeen tot uiterst eenvoudige monografieën.

Er zat in deze zin wat progressie in, dat hij vanaf zeker moment méér dan één produktiemethode binnen eenzelfde monografie systematisch kon toepassen.

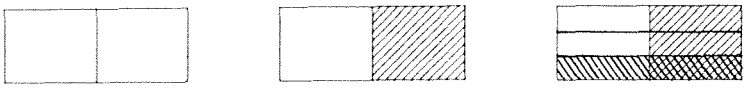
Bijvoorbeeld:



Een half jaar later: proefwerk Land van Samen
Kevin wist niet goed raad met deze opdracht. Zijn werk bevatte:
— een verdeelsituatie waaraan een gegeven ontbrak, met Frans verdelen en de vraag naar ieders portie;
— enkele schuilnaamopgaven, die hij zelf voor een deel onjuist maakte, bijvoorbeeld $\frac{2}{5} = \frac{1}{10}$; $\frac{2}{3} = \frac{1}{6}$;
— enkele opdrachten tot constructie van schema's voor het tafelschikken, bijvoorbeeld: 'Maak nu een boom van (4)/8.' Hij grondvest zijn boom dit keer op het herhaald verdubbelen in plaats van halveren:



Het schema getuigt wederom van zijn zwakte bij omkeringen.
Zijn produktie ging dus in feite aan het Land van Samen voorbij. Hij zocht het in zijn hele leerproces.
Voor het zelf construeren van methoden voor bewerkingen werden enkele bescheiden prestaties geleverd, d.w.z. afgezien van wat hij aan onjuiste 'regels' voortbracht. Voor $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ en $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$, voortkomend uit het verdelen van velletjes papier, noteerde hij $\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{5}$. Desgevraagd stelde hij zijn standpunt bij:

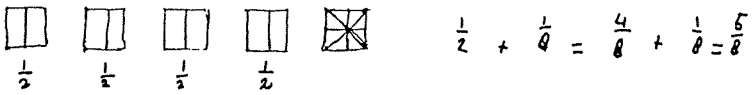


$\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Na nog een voorbeeld met stambreuken 'regelde' hij al: 'Boven hetzelfde en onder keer', dit na $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12}$ bijstellend tot: 'Oh, boven ook keer'. Een week later, toen dergelijke voorbeelden opnieuw in de les voorkwamen en hij – na een tip van de leraar – zich de toepasbaarheid van *zijn* regel bewust werd (daarvoor toonde hij complete desinteresse), was hij ineens vol belangstelling. Hij wil graag aan anderen laten horen wat hij in zijn mars heeft. Hij vergist zich eerst en beslist voor $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ tot $\frac{3}{12}$ (tellers opgeteld!), maar hij herstelt dit op eigen kracht.

Tegen het einde van het tweede jaar weet hij zelf voor opgaven als $\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$ en $2\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$ de uitkomsten voort te brengen via $2 \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$ en $\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$ (zie (4)).

Voor de overige bewerkingen hebben we niets van dien aard kunnen waarnemen anders dan in de gevallen voor het herhaald halveren en dan nog sterk verbonden met de concrete bron, dus nog ver van een regel verwijderd. Bijvoorbeeld:



Werken op symbolisch niveau was niet bepaald Kevins kracht. Gelet op de beschouwde indicator wordt dit door zijn leerproces weerspiegeld.

Samenvatting

Het loskomen van de werkelijkheid was een moeizame aangelegenheid. Vooral de taal en de symbolen van de breuken veroorzaakten de nodige last, die zich gedurig ontlaadde in IN-distractorfouten. Deze hielden lang stand. Verwante fouten in het verhoudingsredeneren hielden hiermee gelijke tred, doordat het standpunt van verhouding zich zo moeizaam liet innemen. Het schematiseringsproces weerspiegelde deze gehechtheid aan de concrete bron eveneens. Van het schema voor het tafelschikken ging wel enige stijgingskracht uit, al moest aanvankelijk veelvuldig worden omgezien naar een concrete uitweg in geval er zich obstakels voordeden. Het snoeien van takken werd tot systematische verkorting temidden van nog enkele verkortingen met een ad hoc karakter.

In het schematiseren met de verhoudingstabel deed zich geen progressie voor. In enkele gevallen kwam hij voor het oplossen van een toepassingsvraagstuk tot – voor hem – verrassende modelkeuze, al moest het soms bij een suggestie blijven, die voor hemzelf onuitvoerbaar was.

Met dit al is zijn vermogen tot het soepel omgaan met visuele modellen en schema's getekend. Door zijn globaal-visuele instelling lagen daar overigens wel zijn voorkeuren.

Symboliseren was het zwakke punt. Tot het op eigen kracht maken van een voorstelling van een formeel gegeven probleem bleek hij niet in staat. Zijn leerproces had, wat het symboliseren aangaat, nog hechter verankerd moeten zijn in de concrete bronnen van het inzicht en aanzienlijk sterker gericht op het verwerven van vaardigheid hierin op uiteenlopende onderdelen.
De eigen constructies en produkties op symbolisch niveau weerspiegelen wederom Kevins moeiten om met symbolen los van enige concrete werkelijkheid betekenisvol te kunnen omgaan. Het symbool voor het tafelschikken voldeed in dit opzicht nog het beste vanwege zijn directe binding met de context van verdeelsituaties. Al met al lijken we met Kevin met een leerling te doen te hebben, voor wie het evenmin zin heeft voor breuken, verhoudingen e.d. doelen, gesitueerd op het formeel-symbolische niveau, na te streven.
Kevin verliet de basisschool niet tegelijk met de anderen omdat het wenselijk was het programma voor groep zeven nogmaals te doen, samen met Mark.

Margreet (10;8) – (13;0)

Algemeen
Margreet was een onopvallend meisje. Zij deed haar uiterste best en stelde zich steeds heel welwillend op. In de verslagen van de meeste lessen zou zij ontbroken hebben, wanneer zij door de leraar niet regelmatig bij de activiteiten was betrokken. Voor een deel moet dit aan haar faalangst worden toegeschreven. Zij was heel terughoudend als het om het presenteren van haar ideeën of haar werk ging. Het gebeurde sporadisch dat Margreet hiertoe zelf het initiatief nam in de les. Dit betekende overigens niet dat zij volslagen passief was. Het spontaan visualiseren doortrok gedurende een aanzienlijk deel van het onderwijsleerproces haar werk. In dit opzicht was zij dus zeker niet besluiteloos. Er gaapte een dikwijls nauwelijks te nemen afgrond tussen het doen van iets en dit daarna verwoorden, zeker in het begin. In het verbaliseren blonk zij dus niet bepaald uit, evenmin als in het bedenken en inbrengen van voorbeelden. Zij leek heel sterk gebonden aan wat zij zich moeizaam verworven had. Haar weten en kunnen paste zij ook toe in gevallen waarin het niet paste. Zij leek in dit opzicht geprogrammeerd om vanuit haar kennen en kunnen te moeten reageren ongeacht de gestelde vraag of het opgeworpen probleem. 'Klikte' het wel, dan was dat meegenomen.
Nog anders gezegd, datgene wat zij ingezien en begrepen had bleef voor haar het lokale, specifieke, contextgebonden karakter lange tijd zozeer behouden, dat daardoor de overdraagbaarheid naar analoge, laat staan verwante of enigszins nieuwe situaties, vrijwel niet mogelijk was. Desondanks was er sprake van een leerproces, al ging het nog zo moeizaam. Soms deed zij iets verrassends, waaruit een schoorvoetend afstand nemen tot de werkelijkheid sprak. Meestal echter weerspiegelde haar werk een schreeuwende behoefte

aan concreetheid. Iedere poging tot verwijdering van de werkelijkheid kwam voor haar vrijwel altijd voorbarig en geforceerd. Alles wat maar zweemde naar een omkering, zoals bijvoorbeeld het denken vanuit een gevisualiseerde portie voor ieder naar een passend verdeelverhaal, brak haar op.
Haar werkgeheugen leek nauwelijks enige capaciteit te hebben. Haar geest was niet toegerust om procedures van enkele stapjes zonder externe hulpmiddelen vast te houden, laat staan deze te verwoorden of eventueel op schrift in enigerlei vorm weer te geven. Aan Margreet is in het onderwijsleerproces onvoldoende recht gedaan. Hoe zij desondanks en haarsondanks toch iets leerde en traag maar gestaag notie voor notie vooruitgang boekte, moge blijken uit het volgende. In de afscheidsmusical was Margreet kamermeisje-receptioniste, een rol waarin zij zonder meer verraste.
Op de onderdelen taal, rekenen en informatieverwerking van de CITO-eindtoets voor het basisonderwijs scoorde zij op rij percentielen van 72, 41 en 67. In de beide rekentoetsen had zij 20 van de 27 opgaven voor breuken, verhoudingen e.d. correct.
Zij werd toegelaten tot de brugklas van een scholengemeenschap voor LBO/MAVO.

Specifiek
ad 1: begripsverwerving en IN-distractoren
Margreet was één van de leerlingen voor wie een kwestie als '3 dropveters verdelen onder 4 kinderen' al te abstract was. Zonder naam-houvast wist zij hieraan in het begin niet te beginnen. Dit werkte geruime tijd door. Bij het voltrekken van verdelingen wees zij dan de porties toe aan de verdelers door middel van symbolen, beginletters van voornamen of cijfers. Een dergelijke activiteit kon overigens al stranden in storende materiaalfactoren, zoals bijvoorbeeld de ruitjes op het papier. Ook de naamgeving van de delen was problematisch. De rangtelwoordbetekenis van breuknamen stoorde haar. Dienovereenkomstig sprak zij na een verdeling in vieren bijvoorbeeld van het eerste deel, het tweede deel enz. Selectie van passende symbolen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, e.d. uit aangeboden alternatieven lukte snel, doch niet het actieve gebruik ervan. Hoewel werd aangesloten bij de onbelaste termen van het herhaalde halveren, kostte haar het taalaspect de nodige moeite in het begin. Zij sprak van 'een helft, een halve, een kwart, een anderhalf' etc. Het verdelen in achten lukte na anderhalve maand (§ 4.3 p.83). Margreet bracht het recept voor een omelet in, waarom het bij die gelegenheid ging. Het beschrijven van de verdeling ging nog niet. Zoiets vergde weken. Geruime tijd na de omelet verliep de beschrijving van het windroos verdelen nog uiterst stroef (§ 4.3 p.95). 'Een half kwart' e.d. lag haar beter dan $\frac{1}{8}$, $\frac{7}{8}$ e.d.
Dergelijk taalgebruik handhaafde zich geruime tijd in haar werk, vanaf zeker moment vermengd met symboolgebruik. De uitkomsten van het pizzaverhaal na $3\frac{1}{2}$ maand beschreef zij als '$\frac{1}{4}$, een halfe, één helft en één $\frac{1}{8}$; één helft en

één $\frac{1}{8}$' (§ 4.3 p.76).

Margreet verviel dikwijls in ℕ-distractorfouten tot aan het einde van het tweede onderzoeksjaar toe. Aanvankelijk waren uitkomsten zelfs methode-afhankelijk voor haar. Een cognitief conflict bleef uit, wanneer zij al tekenend liet zien, dat $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, nadat eerst $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ berekend was. Dit kon volgens haar allebei, vanwege de verschillende methoden. Na verloop van tijd echter kon zij mentaal over eenvoudige feiten van het herhaald halveren beschikken, zoals $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Daarmee weerlegde zij dan $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$. Doordat er regelmatig aandacht besteed werd aan dergelijke kwesties liet Margreet toch langzaam maar zeker in haar bewustzijn toe, wat in dit opzicht wél en niet 'mocht'.

Zij probeerde dan ook tegen de aandrang tot het maken van zo'n fout te vechten. Zo vergeleek zij halverwege het tweede onderzoeksjaar $\textcircled{3}_5$ met $\textcircled{5}_8$ door eerst globaal te verdelen, waarbij zij het benoemen van $\frac{1}{10}$ in ① ① ① nog niet zonder hulp kon. $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ dreigde tot de grootste portie verklaard te worden.

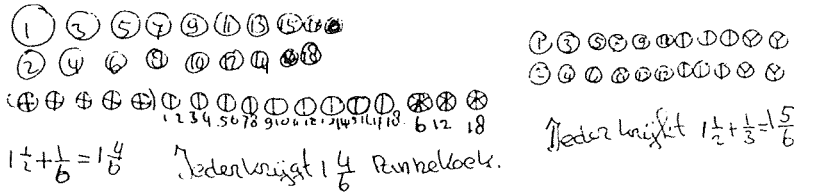
Margreet: 'Bij $\textcircled{3}_5$ krijg je meer, omdat zo'n stukje (zij wijst aan) ...', aarzelt even en beslist dan: 'Oh nee, $\frac{1}{8}$ (in $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ voor $\textcircled{5}_8$) is groter, dus hier krijg je meer.'

Desgevraagd bevestigt zij, dat de 10 (groter dan 8) de boosdoener dreigde te worden, maar dat zij bijtijds *zag*, dat de stukjes van $\frac{1}{10}$ kleiner waren. Dat was, wat zij lange tijd deed, haar oordelen vormen op grond van wat in het verdelen van materiaal zichtbaar werd. Zij kon dus nog niet beslissen op grond van redeneringen als bijvoorbeeld: 'een hele met meer (10) verdelers (dan 8), dus krijg je minder.' Een maand of zeven later lukte dit wel en kon zij bijvoorbeeld *uitleggen* dat $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ aan verdeelsituaties als:

1 P : 2 K en 1 P : 3 K.

Overigens was de geschetste werkwijze typisch Margreets manier om vergelijkingsproblemen op te lossen. Zij concretiseerde verdeelsituaties in verdeeltekeningen en besliste dan op grond van de zichtbaar gemaakte porties voor ieder. Vijf maanden na de geschetste ervaring deed zij dit nog steeds.

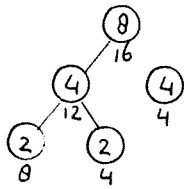
Bijvoorbeeld:



Vanzelfsprekend probeerde zij ook mee te doen aan de overige zaken in het onderwijsleerproces. Zodra evenwel uit het haar vertrouwde wereldje van de verdeelsituaties werd gestapt, gedroeg Margreet zich als ontheemd.
In het geval van een probleem van een schaatswedstrijd, kon zij zich aanvankelijk weinig tot niets voorstellen, laat staan met de ontwikkelde schematiseringsmiddelen een vergelijking voltrekken. Werd naderhand in een interview nogmaals een door de onderzoeker gestuurde poging ondernomen, dan zocht Margreet prompt haar uitweg in het onjuist additief redeneren, daarmee de gevraagde verhoudingsconstantie in de wind slaand. Ook het vergelijken van koffie op sterkte, of het zelf bedenken van slappere dan wel sterkere koffie dan bijvoorbeeld 3 S : 4 K lukte aanvankelijk niet. Kortom, een gesymboliseerde werkelijkheid was lange tijd onverklaarbaar voor haar. Van het concrete moest zij het hebben. Lange tijd moest zij kunnen *zien* wat zich voltrok aan zelf uitgevoerde operaties om daaruit de resultaten te kunnen aflezen. De weerbarstigheid van IN-distractorfouten in haar werk wijst uit hoe hecht haar activiteiten met de realiteit verbonden moesten zijn, of, anders gezegd, hoezeer zij lange tijd onmachtig was in dit opzicht met een in symbolen vertegenwoordigde werkelijkheid om te kunnen gaan.

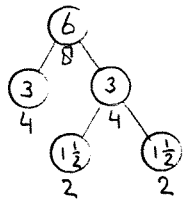
ad 2: voortschrijden in schematiseren
Het voorgaande weerspiegelt dat nauwelijks verwacht mocht worden dat de ontwikkelde schematiseringsmiddelen voor Margreet garant konden staan voor de nodige stijgingskracht naar verder van de realistische bron verwijderde niveaus van mathematiseren. Het schematiseren met de tafelschikkingen verliep aanvankelijk uiterst moeizaam. Dit kwam tot uitdrukking in:
— het visualiseren van de tafeltjes voordat op een schema werd overgegaan;

— het niet in acht nemen van de verhoudingsconstantie:

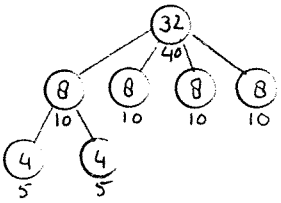


Margreet had dus nog niet begrepen, ondanks de hieraan gewijde les, waaraan ze deelnam, dat met het schema in de portie voor ieder gelijkwaardige tafeltjes konden worden voortgebracht, in tegenstelling tot Frans bijvoorbeeld, die dit direct doorzag.
— het veronachtzamen van de betekenis van de getallen, waardoor ook de verdelers het in de beschouwde situatie moesten ontgelden en in stukken uiteenvallen; dit deed zij bij herhaling (de constructie van een schema vulde haar mentale capaciteit kennelijk zozeer op, dat er geen marges voor controle op dit handelen meer overbleven).
Later, in het schematiseren met de verhoudingstabel deed dit verschijnsel

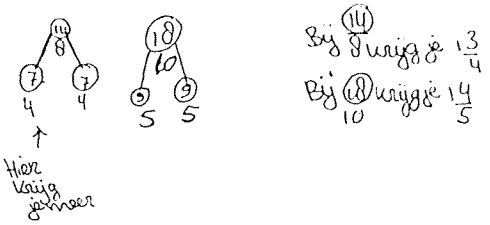
zich opnieuw voor. Geleidelijk aan vindt er toch ook bij Margreet enige voortschrijding in schematiseren plaats. Na enkele weken begon zij met het weglaten van takken. Twee maanden na introductie bouwde zij voor $\frac{6}{8}$ de volgende boom.



Ook paste zij niet uitsluitend tweedelingen toe, zelfs vóórdat enkele mogelijkheden tot verkorten in de les besproken waren, op grond van wat de groep in dit opzicht had voortgebracht. Vier maanden na de introductie maakte zij het volgende schema, zonder hieraan overigens een conclusie te verbinden:



Het weglaten van overtollige takken en het nastreven van meerdelingen als instap paste zij zo'n half jaar na de invoering geregeld toe. Na ruim anderhalf jaar was zij in staat het schema te gebruiken bij het oplossen van een vergelijkingsvraag:



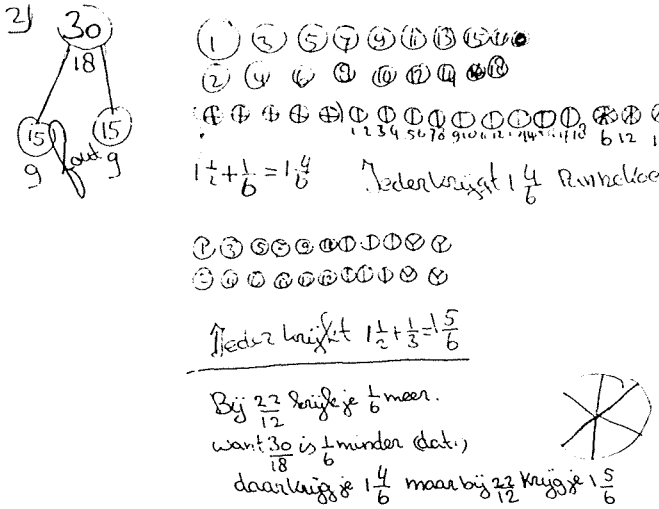
overigens met onjuiste gevolgtrekking.
Tenslotte was zij zich ervan bewust waarom het ging. Het computerprogramma ontlokte aan haar de volgende reflectie:

Je leerde van de comuts computer hoe je kon verdelen en of je meer tafels moest invullen ja en nee. en welke je weg kon laten.

Het schematiseren met de verhoudingstabel kenmerkte zich niet door verkortingen. Onder inachtname van verhoudingsconstantie werden door Margreet tabellen ingevuld. Dikwijls verviel zij in fouten net zo als in de boomschema's. Voor beide schematiseringen geldt, dat zij er gedurende het hele leerproces niet eenmaal in is geslaagd daarmee een

vergelijkingsvraagstuk volledig, dus inclusief de vaststelling van het (relatieve) verschil, tot een goed einde te brengen.
In de afsluitende toets maakte Margreet voor het vergelijkingsprobleem getekende verdelingen.

ad 3: flexibel modelgebruik, schematoepassing (en flexibel rekenen daarbij)
Blijkens het voorgaande heeft deze indicator nauwelijks betekenis voor Margreets leerproces. Hoe moet men dit echter in overeenstemming met de feiten kenschetsen? Deze wezen immers ook uit dat er van absolute starheid geen sprake was. In dit opzicht kan gedacht worden aan de wijze van omgaan met het schema voor de tafelschikkingen, maar eerder nog aan de manier waarop Margreet situaties naar haar hand wist te zetten in verdeeltekeningen. Op dit punt was haar leerproces het meest wendbaar. Gedurig maakte zij ondersteunende verdeeltekeningen in haar werk of greep zij daarop terug, wanneer het schematiseren in een impasse geraakte. Anderhalf jaar na aanvang van het onderzoek lukte haar het vergelijken van $\frac{22}{12}$ en $\frac{30}{18}$ onder toepassing van het schema voor het tafelschikken niet. Dus werden globale verdelingen getekend:



En, naar blijkt, betrekkelijk efficiënt.
Tot het einde toe hield zij dit vol, zoals we in verband met de vergelijkende toets al vermeldden.

ad 4: het zich voorstellen van formele problemen
Margreets neiging tot concretiseren wijst erop, dat zij op het eerste niveau kòn en ook wilde werken. Verstrikte zij zich in getalrelaties op het tweede niveau, dan was terugkeer naar het eerste voor haar een noodzaak. Vandaaruit bracht zij dan weer welgemoed materiaal voor het tweede niveau

voort, zoals haar laatst geciteerde werk uitwijst.
Ergo, de beschouwde indicator heeft eveneens alleen toepassingswaarde voor het leerproces van Margreet in ontkennende zin. Tegen het einde van het tweede onderzoeksjaar is zij zover, dat in de eenvoudigste gevallen in relaties kan worden gedacht tussen tafeltjes en uitkomsten. De vraag naar een tafeltje met de halve portie van $\textcircled{2}/4$ beantwoordt zij via portie – halve portie – tafeltje aldus $\textcircled{2}/4 \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, daarvan de helft is $\frac{1}{4} \rightarrow \textcircled{1}/4$. Aan het zich maken van enige voorstelling bij een formeel gesteld probleem is Margreet niet toegekomen in haar leerproces.

ad 5: eigen constructies en produkties op symbolisch niveau
In het construeren van verdelingen raakte Margreet hoe langer hoe meer bedreven. Dit werd voor haar een methode van probleem oplossen, waarop zij steeds meer vertrouwde. Op het symbolische niveau raakte Margreet maar moeilijk thuis. Zij zocht haar houvast in het concrete, waardoor zij soms overeenkomstige notatiestrubbelingen ondervond als Frans. Vertrouwde tijduitspraken kon zij niet negeren tijdens het maken van haar dagverhaal, getuige $7\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}7$ en $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}7 = 7\frac{1}{4}$. Dikwijls waren constructies en produkties op het symbolische niveau te hoog gegrepen. Toch slaagde zij er ook hier in langzaam doch gestaag enige vooruitgang te bevechten. Haar leerproces vertoonde in dit opzicht de volgende trekken.

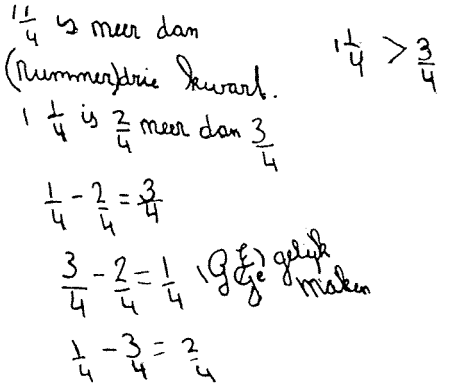
Na $3\frac{1}{2}$ *maand:* vrije produktie
Enkele opvallende kenmerken van haar werk waren:
— het schakelen van sommen in strijd met de transitiviteit van de gelijkheid, bijvoorbeeld $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$;
— het maken van IN-distractorfouten als $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ en $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ (een conflict bleef uit, terwijl haar werk toch ook $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ bevatte).
Voor het overige profileerde zich dit werk door:
— toepassing van uitsluitend optellen en aftrekken, met
— halven en kwarten, onder impliciete
— toepassing van gelijkwaardigheid in een enkel geval.

Twee maanden later: exploratie van $\textcircled{5}/8$
Margreet weet zowel een globale als een Franse verdeling te tekenen. In de eerste verdeling vindt de toewijzing van de porties plaats door toekenning van rangnummers aan de verdelers en dienovereenkomstig aan de porties. In de beschrijving van de eenheidsgewijze verdeling negeert zij aanvankelijk het totaal van ieders portie na elke pizza, die zij overigens door middel van vierkanten weergeeft. Dan volgen puur additieve beschrijvingen, waarin enkele equivalenties worden toegepast, aldus:

$\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ en $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ en $\frac{1}{8}$.

Een maand later: ordeningsmonografie

$\textcircled{5}_{4}$ en $\textcircled{3}_{4}$ werden vergeleken. Hoezeer het werken op symbolisch niveau Margreet handicapte blijkt uit het volgende. Na het inleidende werk (boom voor $\textcircled{5}_{4}$, spontaan!) ook nog een tabel en vaststelling van ieders portie in beide gevallen (voor $\textcircled{3}_{4}$ rechtstreeks met weergave op de getallenlijn), wordt de volgende ordeningsmonografie voortgebracht.



Bij een volgende gelegenheid beperkte zij zich – overigens correct – tot de ordeningsbetrekkingen onder weglating van de 'sommen' ($\frac{6}{8} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$; $1\frac{1}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$ e.d.).

Vijf maanden later: constructieve vulling van de getallenlijn

Om dropveters verdelende kinderen ging het. Margreet construeerde eerst geen getallenlijn, doch niet samenhangende lijnstukken.

Het monografische materiaal dat werd voortgebracht kenmerkte zich door:

— een overweldigende additieve start, waarin geleidelijk aan
— wat multiplicatieve verkortingen werden toegepast waarbij
— uitkomsten als $3 \times \frac{3}{8}$ en $4 \times \frac{3}{8}$ enz. niet vervangen werden door schrijfwijzen als $\frac{9}{8}$ $(= 1\frac{1}{8})$, $\frac{12}{8}$ $(=1\frac{4}{8} = 1\frac{1}{2})$, enz.

Vier maanden later: verkeerslicht

Voor het verkeerslicht $(\frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ wordt op grond van het herhaald optellen een correcte vermenigvuldigingstafel van $1\frac{2}{3}$ samengesteld.

Een maand later met een soortgelijke activiteit voor het verkeerslicht $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ maakt zij bij herhaling een distractorfout door zowel teller als

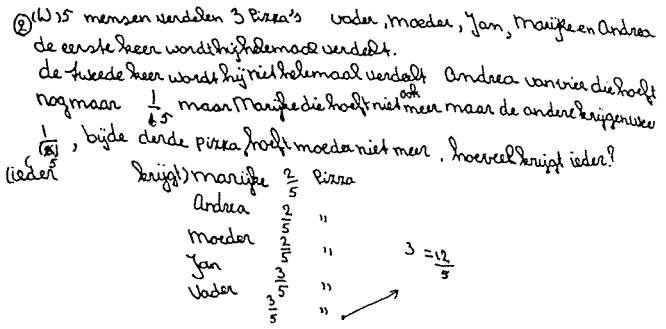
noemer van $1\frac{11}{12}$ met de gegeven factor te vermenigvuldigen.

Vanaf twee maanden later: monografieën
Margreets prestaties waren op dit punt bescheiden en gekenmerkt door:
— overheersende toepassing van het optellen en aftrekken en slechts in eenvoudige gevallen van het vermenigvuldigen, bijvoorbeeld $\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$; $\frac{6}{8} = 6 \times \frac{1}{8}$; $\frac{6}{8} = 3 \times \frac{1}{4}$; $\frac{6}{8} = 1 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$; $1\frac{1}{4} = 5 \times \frac{1}{4}$ e.d.
— tweezijdige toepassing van schuilnamen voor de eenvoudige breuken van het herhaalde halveren; voor het overige *geen* omzetting in met de gegeven breuken gelijkwaardige.
N.B. Merk op dat het herhaald halveren nu dus pas op het tweede niveau begint te functioneren voor Margreet.
— het incidenteel toepassen van eigenschappen, bijvoorbeeld $1\frac{1}{4} = 5 \times \frac{1}{4}$ en $1\frac{1}{4} = 10 \times \frac{1}{8}$.

In het algemeen zat er geen lijn in dit werk, werden veel vergissingen begaan, en werkte een monografie soms na in de volgende, waardoor betrekkingen konden ontstaan als $1 \times \frac{10}{12} = \frac{7}{8}$.
Deze laatste betrekking weerspiegelt tevens Margreets grote moeite met omkeringen. In plaats van uiteen te leggen, dus $\frac{10}{12} = \ldots$, was Margreet steeds geneigd, vooral in de gevallen buiten het herhaalde halveren om, de kwestie om te keren, dus samen te stellen $\frac{6}{12} + \frac{4}{12} = \frac{10}{12}$, $\frac{10}{12} - \frac{0}{12} = \frac{10}{12}$ enz.

Een half jaar later: proefwerk Land van Samen (LvS)
Zoals in de onderwijsimpressie al werd weergegeven tastte Margreet aanvankelijk volkomen mis, wanneer zij LvS-opgaven maakte (§ 4.3 p.137). Het symbolische niveau leek opnieuw te hoog gegrepen voor haar. Geleidelijk aan werd ook hier vooruitgang geboekt (§ 4.3. p.138). Tenslotte wist zij ook voorbeelden die aan een vooraf bepaalde voorwaarde voldeden, in te brengen (§ 4.3. p.139).
Haar proefwerk was redelijk gevarieerd en van heel behoorlijke omvang, zeker voor haar doen. Alleen de eenvoudiger opgaven rekende zij ook zelf uit.
De kenmerken van het werk waren:
— veel sommen voor het oefenen van de vier hoofdbewerkingen, ook samengestelde, zoals $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{2}{4}$; $\frac{1}{2} \times \frac{1}{8} : \frac{2}{4}$; $\frac{1}{2} : \frac{1}{8} \times \frac{2}{4}$

— drie toepassingsproblemen in de sfeer van het verdelen, waaronder dit complexe verdeelverhaal



waarvan één vergezeld van een in blokjes verdeelde reep
— vertaalopdrachten naar het LvS toe ontbraken, evenals uitnodigingen tot eigen constructies en produkties.

Door ook opgaven met echte breuken te geven overschreed zij de grenzen van het LvS. Aan het zelf ontwikkelen van een methode voor één van de bewerkingen kwam Margreet niet toe.

Samenvatting

Margreets activiteiten waren gedurende heel lange tijd sterk verankerd in het concrete niveau. Hoe moeilijk het voor haar was hiervan los te komen bewees de hardnekkigheid waarmee gedurende lange tijd IN-distractorfouten gemaakt werden.

Het verwerven van inzicht in de onderlinge relaties van symbolisch materiaal, dat zij voortbracht met name door het tekenen van verdelingen, verliep uiterst moeizaam.

Het horizontaal mathematiseren strandde in feite steeds in het door haar voortgebrachte materiaal. Aan verticaal mathematiseren kwam zij daardoor nauwelijks toe.

Het schematiseren, hoewel zij daarin enige voortgang boekte, werkte evenmin niveauverhogend. Weliswaar bracht zij met horten en stoten materiaal op het tweede niveau voort, doch dit had voor haar slechts betekenis binnen het schematiseren zelf. Nimmer slaagde zij erin een toepassingsprobleem al schematiserend tot een goed einde te brengen. Zich een voorstelling maken bij formeel gestelde problemen kon zij niet. Voor flexibel modelgebruik en schematoepassing geldt, dat zij niet volledig verstarde in maniertjes. Uit het betrekkelijk efficiënt toepassen van het tekenen en verdelen bleek dit, alsook in het uitwijken naar dit middel in geval een toegepaste schemavorm strandde op numerieke obstakels.

Dit bij herhaling geobserveerde gedrag van het terugvallen op het vertrouwde wijst er overigens op, dat zij het uiteindelijke doel het gegeven vraagstuk op te lossen, niet uit het oog verloor.

Het werken op symbolisch niveau was lange tijd te hoog gegrepen. Pas tegen het einde van het onderzoek wist zij er enigszins raad mee. Op het tweede niveau wist zij tenslotte immers enkele lokale verbanden mentaal toe te passen, voornamelijk verband houdend met de eenvoudigste breuken van het herhaald halveren. Op dit tweede niveau overigens en dan nog hecht verbonden met de realistische bron, ligt o.i. voor Margreet ook het eindniveau. Verder zou het onderwijs met haar niet moeten gaan, dat wil zeggen niet proberen de breuken op een formeel niveau te behandelen.

Marja (9;2) – (11;6)

Algemeen
Lief en volgzaam, dat was ze. Loyaal en zonder reserves volgde zij de lessen. Vanuit die intentie droeg zij bij. Een pioniersrol was dus niet voor haar weggelegd. Toch was haar bijdrage aan het onderwijsleerproces waardevol. Er ging een zekere rust van haar uit. Geduldig deed zij altijd mee, ook wanneer de problemen in kwestie voor haar open deuren (geworden) waren.
Omdat zij eerst en vooral ingesteld was op het visueel-concrete, droeg zij inhoudelijk met name bij aan het horizontaal mathematiseren, zowel in het begin van het onderwijsleerproces als later bij de toepassingen. De behoefte haar werk op schematisch-symbolisch niveau in deze periode visueel te ondersteunen, weerspiegelt deze voorkeur. En een zekere noodzaak hiertoe bestond ook door haar matige bekwaamheid de dingen te verwoorden, ook al wist zij in latere stadia van het leerproces soms redelijk efficiënt uiting te geven aan haar inzichten.
Het tweede niveau was voor haar echt de springplank tussen het concrete eerste en het formeel-symbolische derde niveau. Geruime tijd was zij in haar aanloop gevangen en hield het concrete niveau haar vast totdat zij – zo halverwege het experiment – betrekkelijk definitief de sprong naar het formeel-symbolische niveau waagde en daar toen ook aardig uit de voeten kon.
Vooral de opdrachten tot eigen constructies en produkties boden ruimte aan haar overijver. Zij bracht dan meer voort dan er van haar gevraagd werd.
Raakte zij in haar eigen constructies en produkties verstrikt, iets dat zich in het schematiseren nogal eens afspeelde, dan zocht zij afwisselend haar uitweg door de ene keer betrekkelijk snel de hulp van de leraar in te roepen en een volgende keer zelf de impasse door nieuwe initiatieven te doorbreken. Zij was niet altijd even precies wat de uitvoering van haar werk aangaat, om niet te zeggen dat enige onzorgvuldigheid haar daarbij niet vreemd was. Ook die dwong haar op gezette tijden haar zaakjes over te doen.

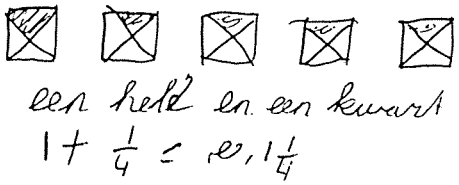
Op de CITO-eindtoets 1986 scoorde zij voor taal, rekenen en informatieverwerking achtereenvolgens de volgende percentielen: 77, 84 en 95. In de beide rekenonderdelen had zij 23 van de 27 opgaven voor breuken en verwante gebieden correct. In de musical op de afscheidsavond was zij de

getrouwe steun en toeverlaat van hotelbaas Henk, ja soms zelfs meer dan dat. Zij werd toegelaten tot een scholengemeenschap voor HAVO/VWO.

Specifiek

ad 1: begripsverwerving en IN-distractoren

De onderwijsimpressie wees Marja's hang naar het concrete al uit, zij het dat zij geen moeite had af te zien van realistische trekken in haar verdeeltekeningen. Zij was er zich al gauw van bewust, dat het niet nodig was echte eieren te tekenen en dat pizza's ook best vierkant konden zijn (§ 4.3 p.73). Zij had in het begin net als Margreet behoefte aan naamhouvast bij het maken van verdelingen op papier, althans zij had er aanvankelijk moeite mee aan een dergelijke opdracht zonder dat gegeven te beginnen. De eerste tijd schreef zij de uitkomsten van dergelijke activiteiten voluit, daarbij terminologie als 'halve kwart' e.d. toepassend. Toch kon zij dergelijke verwoordingen ook wel in rekensymbolen weergeven, soms verkort, bijvoorbeeld:



Een enkele maal wisselde zij 'onderweg' van eenheid, die verdeeld werd. Zij sprak dan bijvoorbeeld van 'anderhalf', terwijl er van 'anderhalve kwart' sprake was.

Zij ontwikkelt echter vrij (voor)spoedig een hecht breukbegrip, dat in het herhaald halveren met zijn breukensysteem een gedegen fundament krijgt èn in het visueel-concrete, waartoe zij aanvankelijk steeds neigt. Het zwichten voor IN-distractorfouten deed zij dan ook nauwelijks. Slechts twee momenten van zwakte konden in dit opzicht worden opgetekend. Het ene eindigde trouwens sterk (§ 4.3 p.92). Alleen tijdens de reconstructie van een verdeelsituatie op grond van de uitkomst $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, voorspelde zij in eerste instantie vijf verdelers om deze later weer te weerleggen. Eerder merkten we al op, dat dit één van de meest bedrieglijke distractorvallen is.

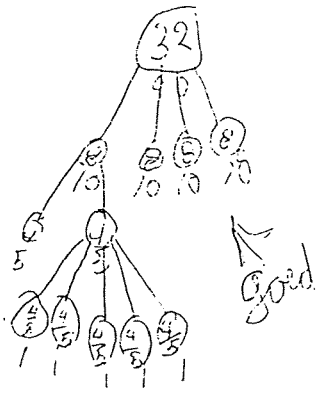
Overigens ontkrachtte Marja na het eerste onderzoeksjaar IN-distractorfouten steeds met haar heldere inzicht, bijvoorbeeld:

$\frac{7}{8} - \frac{5}{5} = \frac{2}{3}$ is fout, want $\frac{5}{5}$ is 1 hele en $\frac{7}{8}$ is minder.

Haar verhoudingsredeneren was helemaal smetteloos, omdat dit zich nimmer waarneembaar volgens onjuist standpunt voltrok. Waar de meerderheid van de leerlingen bijvoorbeeld geneigd was in geval van de koffiekwestie 4S : 10K vijf keer zo slap te verklaren als 4S : 5K, weet Marja (samen met Stef) niet alleen het juiste multiplicatieve standpunt in te nemen, doch dit ook nog in relatieve zin te ver(ant)woorden: '10 kopjes is twee keer 5 kopjes, en de

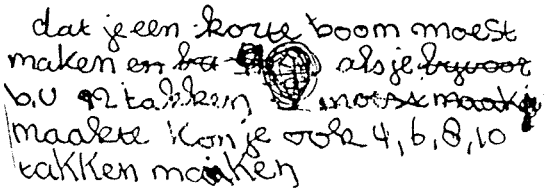
schepjes zijn hetzelfde, dus twee keer zo slap'.
In dit verband draagt zij met haar ideeën ook bij aan methoden om gegeven situaties systematisch te veranderen, gehoorzamend aan een gegeven voorwaarde (bijvoorbeeld sterker/slapper in geval van de koffie). Ook doorziet zij snel – en geeft daaraan ook uiting – dat situaties, die in één component overeenstemmen veel gemakkelijker te vergelijken en te ordenen zijn dan wanneer dit niet het geval is.
Het moge duidelijk zijn, dat gedurende het hele leerproces van Marja het inzicht in de breuken en verhoudingen de overhand had in haar werkzaamheden.

ad 2: voortschrijden in schematiseren
De schema's voor het tafelschikken die aanvankelijk geconstrueerd werden, getuigden opnieuw van een voorkeur voor het concrete.
Marja situeerde de 'tafels' in haar schema volgens zekere voorgestelde realiteit, met als gevolg een octopusachtige vormgeving (§ 4.3 p.86); schema's nog zonder verkortingen, waarin alle takken volledig verfijnd werden uitgewerkt, met als direct gevolg, dat een schema verstikte in een wirwar van takken. Tweede en eventueel zelfs derde pogingen eindigden dan meestal bevredigender. In het begin ondersteunde zij dit werk met verdeeltekeningen. Al na een enkele ervaring zet zich het verkortingsproces in, het weglaten van takken. Dit gebeurt nog niet systematisch. Zij vervalt regelmatig nog in volledige uitwerkingen. Na een maand wordt deze verkorting meer systematisch toegepast. Daarna duurt het nog enkele maanden voordat van het tweedelen als instap in het schema wordt afgestapt ten gunste van een min of meer systematische toepassing van de meerdelige instap, indien mogelijk.
Vier maanden na de introductie construeert zij in verband met koffiesterkte na twee verworpen probeersels:

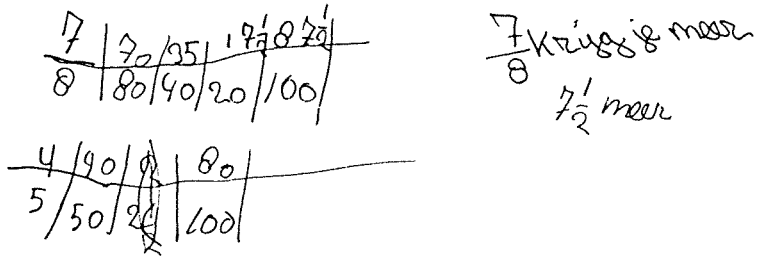


Na deze ervaring verschuift het accent in het leerproces naar de verhoudingstabel. Voor zover zij nog schema's voor het tafelschikken construeert, hebben deze een denkmodelfunctie voor het (re)construeren van

situaties. Dit blijkt bijvoorbeeld uit de onvolledigheid van zowel het schema als de invulling.
Na het verwerken van het computerprogramma stelt zij:



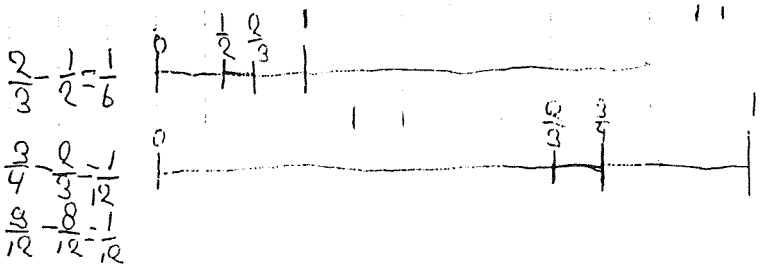
Het schematiseren met de verhoudingstabel weerspiegelt wat eerder over Marja's inzichten in verhoudingen is gezegd. Zij werkt vanaf het begin naar gemakkelijk vergelijkbare situaties toe. Alleen het trekken van conclusies uit haar tabelwerk is lange tijd niet eensluidend en varieert van absoluut kwalitatieve en kwantitatieve tot relatief kwantitatieve uitkomsten.
Later – het loopt tegen het einde van het tweede onderzoeksjaar – wordt in de tabellen niet alleen 'opgeklommen' naar hogere termen binnen de voort te brengen klasse, maar ook 'afgedaald', als bij het schema voor het tafelschikken. In feite past zij steeds gevarieerder de eigenschappen van de verhoudingsgetrouwe afbeelding toe, die in het spel is. [17] Dit kan het verkortingsproces zowel stagneren als bevorderen, zoals uit het volgende voorbeeld blijkt:



Het betrof dropveters verdelende kinderen.
De toepassing van de verhoudingstabel gebeurt in het resterende deel van het onderzoek betrekkelijk efficiënt en aangepast aan de vraagstukken, d.w.z. nu eens werkt zij 'omhoog', bijvoorbeeld het vergelijkingsvraagstuk in de eindtoets lost zij op die manier met uiterst verkorte tabellen op, dan weer daalt zij af en reduceert gegeven verhoudingen tot lagere termen.
Al met al verloopt het schematiseringsproces betrekkelijk efficiënt, zij het niet altijd gevolgd door eenduidige conclusies.

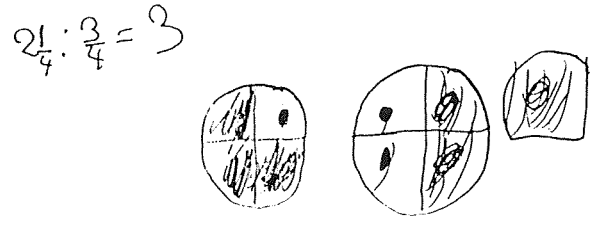
ad 3: flexibel modelgebruik, schematoepassing (en flexibel rekenen daarbij)
Onder de voorgaande indicator kwam al tot uitdrukking hoe Marja op betrekkelijk flexibele wijze met de ontwikkelde schematiseringen kon omgaan. Dit gold speciaal de verhoudingstabel. Het schema voor het tafelschikken riep zij soms te hulp zonder verdere aanwijzingen hieromtrent. Ook bleek bij

herhaling de denkmodelfunctie van dit schema voor haar.
In het toepassen van visuele modellen was zij evenmin star. Zij was zich snel de modelfunctie van visualiseringen bewust en door haar voorkeur voor het concreet-visuele wist zij meestal wel raad met de voorgelegde toepassingsvraagstukjes, door deze om te zetten in en op te lossen met een visueel model, al moet gezegd, dat zij soms in heel primitieve visualiseringen verviel, alsof ze de model functie ervan even inruilde voor meer realistische trekjes.
Met de getallenlijn sprong Marja wat slordig om bij het constructief vullen ervan. Daardoor fungeerde deze voor haar meer als middel om globale ordeningen van uitkomsten te beslissen dan als middel om met de vereiste precisie verschillen te bepalen.
Wellicht mede daardoor gaf zij bij het 'opereren langs een omweg' de voorkeur aan het rekenen met prijzen boven het toepassen van de getallenlijn (§ 4.3 p.117). Op ruitjespapier kan zij overigens ook best met de getallenlijn uit de voeten in deze kwestie.



We komen tot de slotsom, dat het leerproces van Marja stellig de nodige buigzaamheid had aangaande het schematiseren en het toepassen van modellen. Om dit leerproces echter volledig recht te doen mag niet onvermeld blijven, dat er dikwijls ook iets primitiefs zat in haar werk. Kortom, haar leerproces had op dit punt iets wisselvalligs.

ad 4: het zich voorstellen van formele problemen
Tot dusver is gebleken dat Marja zich wel iets kon voorstellen bij een formeel gesteld probleem. Te denken valt in dit verband bijvoorbeeld aan de wijze, waarop zij de onjuistheid van $\frac{7}{8} - \frac{5}{5} = \frac{2}{3}$ aan het licht bracht.
Zulks gold – tegen het einde van het onderzoek – ook andere bewerkingen, bijvoorbeeld:



Wij zouden willen concluderen: typisch Marja.
Zij zocht het in visuele voorstellingen. Het geven van verhaaltjes bij formele sommen liet ze, zoals haar proefwerk voor het Land van Samen bijvoorbeeld uitwees, aan anderen over.
Het concrete verdelen was de voedingsbodem bij uitstek voor de voorstellingen die zij maakte.

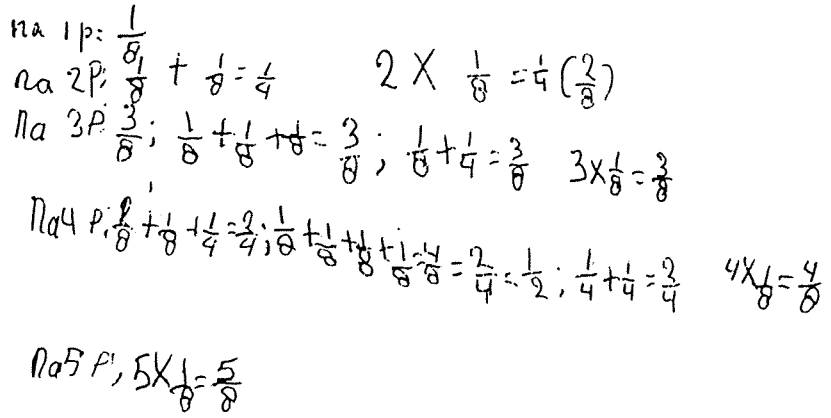
ad 5: eigen constructies en produkties op symbolisch niveau
Dit lag Marja wel. Deze vorm van werken fungeerde als uitlaatklep voor haar ijver; zo leek het althans. De onderwijsimpressie geeft al weer, hoe Marja het voortbrengen van regels voor produkties op symbolisch niveau niet alleen kon volgen, doch daaraan ook bijdragen leverde.
Hoe stond het met haar eigen produkties in dit opzicht?

Na $3\frac{1}{2}$ *maand:* de eerste vrije produktie

Enkele in het oog springende trekken ervan waren:
— het voluit schrijven van een klein deel der uitkomsten, bijvoorbeeld: $3 \times \frac{1}{2}$ = anderhalf;
— het toepassen van de bewerkingen optellen en vermenigvuldigen; met
— uitsluitend halven en kwarten; onder
— tweezijdige toepassing van schuilnamen, waarbij
— uitkomsten niet in alle gevallen tot het uiterste verkort werden, bijvoorbeeld $\frac{3}{4} + \frac{2}{2} = 1 + \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = 1 + \frac{1}{4}$.

Na twee maanden: exploratie van $\frac{5}{8}$

Marja tekent zowel een globale als een Franse verdeling. Het monografische materiaal voor het Franse verdelen ziet er als volgt uit:



Opmerkelijk hierin zijn de multiplicatieve verkortingen en het – in enkele gevallen – rechtstreeks omzetten in schuilnamen.

Een maand later: ordeningsmonografie
Het betrof $\frac{5}{4}$ en $\frac{3}{4}$. De produktie – evenals het voortgebrachte hulpmateriaal – is overeenkomstig aan wat eerder o.a. bij Frans werd beschreven. Dit geldt ook de volgende van dergelijke monografieën: betrekkelijk omvangrijk materiaal, een wat plichtmatige uitwerking van ongelijkheden naar twee kanten met alle betrekkingen vandien, onder voorbijgaan van mogelijkheden tot het toepassen van schuilnamen.

Een maand later: dagverhaal met tijdlijn en passende sommen
In de onderwijsimpressie werd deze produktie gedeeltelijk opgenomen (§ 4.3 p.106). Indrukwekkend was vooral de omvang ervan, gemeten naar de beperkte produktietijd. Kenmerkend is verder het strikt voldoen aan de trits gebeurtenis-tijdlijn– numerieke betrekkingen.

Vijf maanden later: constructieve vulling van de getallenlijn
Het instapvoorbeeld wordt ruim opgezet met extra monografisch materiaal bij de getallenlijn, bijvoorbeeld voor $\frac{6}{4}$:

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$; $\frac{2}{4}+\frac{2}{4}+\frac{2}{4}$;

$6\times\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}$;

$\frac{5}{4}+\frac{1}{4}$.

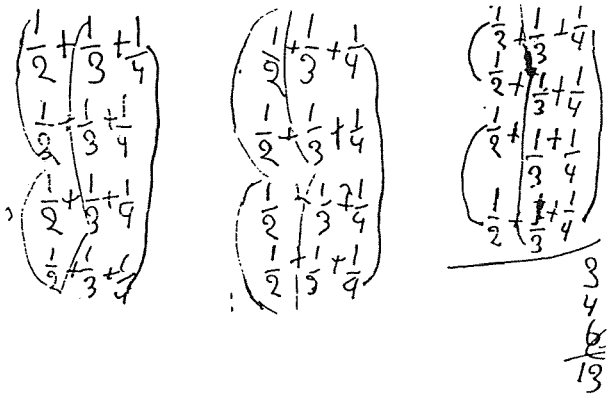
Later gebruikt zij slechts de uitkomsten van de situaties ($\frac{3}{4}$ en $\frac{3}{8}$) als bouwstenen, zich beperkend tot numerieke weergaven als:

$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$

$3\times\frac{3}{4}$

$2+\frac{1}{4}=2\frac{1}{4}$.

Bij de getallenlijn, voorafgegaan door afzonderlijke lijnstukken, worden de meest vereenvoudigde uitkomsten genoteerd. Gehele aantallen doen dienst als steunpunten.



$3\frac{1}{2}$ *maand later:* reconstructie verdeelsituatie

Ieder krijgt $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. Gevraagd: het aantal verdelers en het aantal stuks eetwaar.

Na een poging die smoort in geknoei, wordt bovenstaande produktie voortgebracht. Opmerkelijk is het structureren binnen de portie van de groep, gericht op het 'mooi' uitkomen. In haar conclusie (op een ander blad) vergist zij zich en vat 13 op als het aantal verdelers, terwijl zij 12 porties heeft samengesteld.

Twee weken later: verkeerslicht

De voortgebrachte tafel van vermenigvuldiging voor het verkeerslicht $(\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ spoort vanaf het derde produkt niet meer met de juiste uitkomsten. Herhaald bijtellen van $1\frac{11}{12}$ was de toegepaste methode net als in andere gevallen. De gegeven '$x \times 60$'-opgaven ondergaan een uitbreiding met $\frac{1}{10}$ tot en met $\frac{4}{10} \times 60$ en idem voor $\frac{1}{12}$ tot en met $\frac{4}{12}$, $\frac{1}{20}$ tot en met $\frac{4}{20}$ en $\frac{1}{30}$ tot en met $\frac{4}{30}$.

Vanaf twee maanden later: monografieën

De onderwijsimpressie bevatte een monografie van Marja (§ 4.3 p.127) en gaf de inbreng in een andere weer (§ 4.3 p.128). De geciteerde monografie kan maatgevend genoemd worden voor wat in dit opzicht gepresteerd werd. De volgende produktiemethoden konden worden onderkend:

— het variëren van de bewerkingen, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en (later) in enkele gevallen ook het delen, bijvoorbeeld:
$1\frac{1}{6} = 3\frac{3}{6} : 3 = 5\frac{5}{6} : 5 = 7 : 6 = 70 : 60$;

— het tweezijdig interpreteren van schuilnaam, in enkele gevallen binnen eenzelfde betrekking, bijvoorbeeld $\frac{6}{8} = \frac{4}{16} + \frac{1}{2}$ en $\frac{6}{8} = \frac{8}{16} + \frac{1}{4}$;

— het gebruikmaken van eigenschappen, bijvoorbeeld de commutativiteit van de vermenigvuldiging, ook als volgt $\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$, maar ook $1 \times \frac{3}{4}$, het halveren en verdubbelen van de factoren in een produkt of – zoals onder de eerste categorie al genoemd – het ophogen van deeltal en deler in een deling met dezelfde factor, bijvoorbeeld:
$1\frac{1}{8} = 9 \times \frac{1}{8} = 4\frac{1}{2} \times \frac{2}{8}$ en $1\frac{1}{8} = 2\frac{1}{4} : 2 = 4\frac{2}{4} : 4$.

Bij dit soort produktiemethoden verviel zij soms in fouten als gevolg van blinde routine; fouten die de facto als IN-distractorfouten zijn aan te merken;

een signaal, dat niet alleen het concrete houvast (even) zoek was, bijvoorbeeld:

$\frac{7}{8} = \quad 7 \times \frac{1}{8} \qquad 21 \times \frac{4}{16}$

$\qquad 14 \times \frac{2}{16} \qquad 28 \times \frac{8}{16}$,

maar ook de toegepaste regel.
Anders gezegd: regelgestuurde produktie verstikte voor Marja kennelijk het inzicht.

Over het algemeen is het voortgebrachte materiaal qua variëteit van toegepaste produktiemethoden bovengemiddeld te noemen doch tegelijkertijd kenmerkt het zich nog door geringe stabiliteit. Het enige dat daarvan getuigt is haar instap in een monografie via een uiteenlegging van de gegeven breuk volgens het Franse verdelen.

Een half jaar later: proefwerk Land van Samen (LvS)
Op twee plaatsen werd Marja's inbreng in de werkzaamheden in het Land van Samen gememoreerd (§ 4.3 p.136 en 138).

Globaal beschouwd viel haar eigen produktie uiteen in twee gedeelten, namelijk:

— opgaven voor het oefenen van de vier hoofdbewerkingen, die ze zelf ook maakte, grotendeels correct, op de twee deelsommen na. Bovendien stak in één geval het distractorspook de kop weer op ($\frac{11}{11} + \frac{11}{11} = \frac{22}{22}$); en

— opdrachten tot constructie en produktie van tekeningen en verhaaltjes bij enkele van de opgaven uit de andere categorieën van sommen onder gestelde voorwaarden, bijvoorbeeld: bedenk drie deelsommen.

Beide categorieën waren nagenoeg gelijk sterk vertegenwoordigd. Beide bevatten opgaven over de grenzen van het LvS heen, bijvoorbeeld:
$\frac{6}{9} \times \frac{5}{3} = \frac{30}{27}$, of: 'maak één lange LvS-som, bijvoorbeeld:
$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} : \frac{2}{4} =$
Voor het ontwikkelen van een eigen methode voor één van de hoofdbewerkingen werden wel enkele stappen in de goede richting gezet. Volgens het proefwerk voor het LvS en de inbreng dienaangaande (§ 4.3 p.143) leek de tijd rijp voor de ontwikkeling en toepassing van de regels.
Desondanks maande haar leerproces tot voorzichtigheid, vanwege het gevaar van forceren van formele niveaus. Juist bij haar!
Een voorbeeld. Zo lang de bewerking vermenigvuldigen nog een informeel karakter had, werd correct rekening gehouden met de distributiviteit ervan over de optelling.

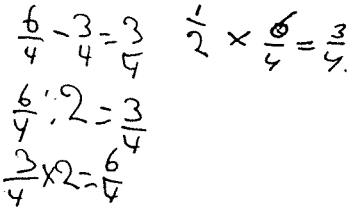
$2\frac{1}{2} \times 1\frac{4}{5} = 2\frac{8}{5}\ \frac{1}{2}\frac{2}{5} = 4\frac{1}{2}$

In de slottoets blijkt de inmiddels beschikbare regel dit inzicht verstopt te hebben en wordt genoemde wet veronachtzaamd.
Voor de overige operaties verwijzen we naar het geciteerde werk onder beide voorgaande indicatoren. De beste produktieprestaties waren op het tweede niveau gesitueerd, zolang er nog maar sprake was van een binding met de realiteit.
In dat opzicht kon Marja niet alleen bij een gegeven uitkomst een reeks van situaties met het tafeltjessymbool bedenken, maar deze ook moeiteloos met elkaar in verband brengen.

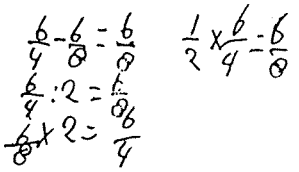
Bijvoorbeeld: $\textcircled{6}_4$ en $\textcircled{3}_4$, de kinderen hetzelfde, de helft op de tweede tafel, dus ...

$\textcircled{6}_4$ en $\textcircled{6}_8$, op tafel hetzelfde, meer kinderen bij de tweede, dus kleinere stukken.

Op grond hiervan vindt de constructie van betrekkingen die de geformuleerde relaties tot uitdrukking brengen en preciseren zonder moeite plaats:



Al met al komen we tot de slotsom dat Marja's eigen constructies op dit punt òf inzichtelijk (informeel) waren, d.w.z. gebaseerd op aanwezige noties voor breuken en de betrokken operatie, al dan niet gepaard aan visuele ondersteuning.



Het doorstoten naar regels voor het vermenigvuldigen en delen voltrok zich te geforceerd.

Samenvatting
Lange tijd waren de activiteiten van Marja verankerd in het concreet visuele en dienden dit ook te zijn vanwege haar voorkeur daarvoor. Het loslaten van het eerste niveau lukte best, zolang zij maar mogelijkheden had zonodig zelf die band weer te herstellen door bijvoorbeeld haar activiteiten visueel te ondersteunen.
Voor het tafelschikken ging dergelijke steun van het symbool zelf uit, door zijn visuele beeld de achterliggende werkelijkheid oproepend.

Werd Marja gevangen in regels, wat enkele keren gebeurde, dan ontspoorde zij prompt in IN-distractorfouten; zelfs aan het einde – Land van Samen – gebeurde dit, al moet dit beschouwd worden als een minder gelukkig voorval, gelet op het overige werk. Zolang het inzicht in concrete breuken en verhoudingen maar ongestoord de overhand kon hebben en ongedwongen kon gedijen, was er niets aan de hand. Van het schematiseren ging een zekere stijgingskracht uit, gelet op de progressie die kon worden opgetekend.
Het leerproces weerspiegelt in dit opzicht overigens geen stabiel beeld. Dit geldt ook de conclusies, die na het schematiseren werden getrokken. Ten aanzien van modelgebruik en schematoepassing vertoonde het beschouwde leerproces de nodige veerkracht, zij het dat het teruggrijpen op soms primitieve vormen van visualisering ook hier duidt op onvoldoende stabiliteit. Het krachtigste middel om zich een voorstelling van formele problemen te maken was het concrete verdelen aan visuele modellen.
De constructies en produkties op symbolisch niveau weerspiegelen grotendeels een zich bewegen op het tussenniveau. Het doorstoten naar formele regels kon zij weliswaar volgen en al volgend daaraan ook bijdragen, maar tegelijkertijd verstikten die regels haar inzichten enigszins, met name voor het vermenigvuldigen en delen. Dit was trouwens ook het geval wanneer de toegepaste produktiemethoden – althans enkele ervan – voor monografieën als regels de overhand kregen. Voor Marja zou een bredere, concrete oriënteringsbasis op zijn plaats zijn geweest.
Op het derde niveau was zij nog onvoldoende thuis en haar leerproces dus nog onaf in dit opzicht. Voor het overige zou de begeleiding van haar leerproces – zo dit al herhaalbaar was – meer afgestemd geweest moeten zijn op het bewustmaken en stabiliseren van haar efficiënte methoden en technieken.
Samengevat komt het erop neer, dat Marja vooral bedreven was in het horizontaal mathematiseren, terwijl zij voor de verticale component behoefte had aan externe steun en aan betrekkelijke rust in basiskampen op de twee eerste niveaus alvorens de klim naar de top van het formeel-symbolische met succes te kunnen volbrengen.

Mark (7;10) – (10;2)

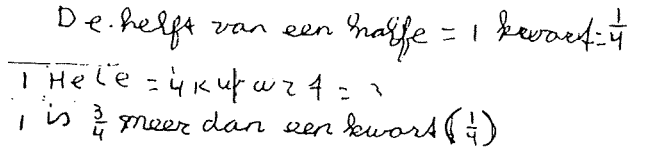
Algemeen
Mark is een gemakkelijk afleidbaar, uiterst kinderlijk, beweeglijk jongetje. Zo eentje met gebruiksaanwijzing; een kind dat wel wat kon, maar voortdurend het tegendeel beweerde.
Hij dwong gedurig de aandacht voor zich af en zou ongetwijfeld een gewichtiger rol in het onderwijsleerproces voor zich hebben opgeëist dan de onderwijsimpressie nu uitwijst wanneer al zijn tekenen van aanwezigheid daarin opgetekend waren.
Hij was zogezegd erg omgevinggevoelig, waarvan zijn motivatie en vermogen tot zelfwerkzaamheid rechtstreeks en beslissend afhankelijk waren.

Het geringste incident op het schoolplein kon in dit opzicht lang bij hem nawerken. Het was alles of niets met hem, van overactieve deelname aan, tot gedurige frustratie van het onderwijsleerproces. De metamorfose van de ene attitude in de andere kon zich in een oogwenk voltrekken. Hij kon zomaar weglopen van zijn plaats, bijvoorbeeld om de door de leraar aangewezen eenheid voor het gebarend schatten nauwkeurig na te doen, om daarmee vervolgens dan maar weer wat onnavolgbaar aan te modderen. Een andere keer zat hij hinderlijk nadrukkelijk van alles voor te zeggen, zelfs tot ergernis van zijn medeleerlingen. De leraar nam deze ongevraagde bijdrage dan maar op in de discussie door aan zo'n geërgerde leerling te vragen: 'Had-ie 't dan goed?' Dan weer veinsde hij – of misschien was het ook wel echt – volledig en almaar durend onbegrip. Dan kwam er niets uit zijn vingers.
Zat hij toevallig naast één van de autoriteiten van de klas en gedroeg hij zich niet al te kinderachtig, wat zeker terechtwijzing en afwijzing door buurman 'bolleboos' tot gevolg gehad zou hebben, dan kon dit heel stimulerend werken! Hij had er behoefte aan voor vol aangezien te worden, maar slaagde er steeds in met zijn gedrag het tegendeel te bereiken.
In het algemeen kon hij redelijk goed verbaliseren, was hij met de nodige stimulans bereid van alles te proberen en het geleerde toe te passen. Het zelf bedenken van voorbeelden slaagde het beste wanneer hij zijn leraar of onderzoeker helemaal voor zich alleen had.
Evenals Kevin verliet Mark de school niet tegelijk met de anderen, omdat het beter voor hem geacht werd groep zeven nogmaals te doen; kon hij wat bedaagder worden.
Hij nam slechts deel aan het onderdeel rekenen van de CITO-eindtoets basisonderwijs 1986, had daarin 19 van de 27 opgaven voor de breuken e.d. correct en hij zou voor dit hele onderdeel op een percentiel van circa 46 zijn uitgekomen.
In 1987 deed hij echt mee. Zijn scores voor taal, rekenen en informatieverwerking bedroegen achtereenvolgens 55, 80 en 81.
Ook Mark heeft ondanks zijn broze leerinstelling het nodige geleerd, zoals uit het volgende moge blijken.

Specifiek
ad 1: begripsverwerving en IN-distractoren

Het horizontale mathematiseren voltrekt zich op enkele onderscheiden aspecten heel gedifferentieerd.
Aanvankelijk worden realistische tekeningen gemaakt en Mark vindt ook dat het zo hoort en niet anders, zoals sommigen, onder wie Henk, beweren. In de klassediscussie wordt deze opvatting staande gehouden, maar later blijkt hij toch schematische eieren voor zijn geld gekozen te hebben. Dat weerhield hem overigens niet van het voltrekken van controversiële verdelingen – de nodige discussie teweegbrengend (§ 4.3 p.72) – met daarbij de eerste tijd

de taal van 'halven' en 'de helft van een halve' e.d. voluit toepassend.

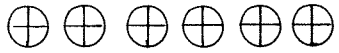


Op deze wijze ging hij nog even door. Wel zag hij daarbij kans voor 'een halve kwart' zelf het symbool '$\frac{\frac{1}{2}}{4}$' uit te vinden (§ 4.3 p.76).
Dergelijke notaties zou hij later nog vaker gebruiken tot in de slottoets toe.
Na dergelijke startrimpeltjes in zijn leerproces begon zich zijn breukbegrip wat 'gladder' te profileren, met soms daarin een merkwaardige dissonant.
Zo kon hij met de baktijden in minuutdelen voor de pannekoeken in 'De Smickel' goed overweg, daarbij zelfs handige strategietjes toepassend door bijvoorbeeld voor de 6-minuten-pannekoek te rekenen: 5 in een $\frac{1}{2}$ uur, 10 in 1 uur, dus $\frac{1}{10}$ deel van 1 uur.
Wat later was hij dan weer in staat het gearceerde deel van een rechthoek (reep) met $\frac{1}{6}$ deel – te omschrijven omdat het om 6 van de 15 blokjes ging, of veranderde hij van standpunt ten aanzien van de eenheid in situaties, waarin iets globaal verdeeld werd.
Tijdens het eerste onderzoeksjaar maakte Mark enkele malen een IN-distractorfout. Daarvan distantieerde hij zich echter in de regel door het opgeroepen conflict. Dit betekent overigens niet dat hij nu tegen dit euvel was opgewassen, zoals nog blijken zal.
Vergelijkingskwesties met verhoudingen geven min of meer hetzelfde beeld te zien. Verdeelsituaties weet hij op correcte wijze kwalitatief te ordenen door op de uitkomst voor ieder te letten (meer dan een hele, minder dan ... etc.), daarvoor maakt hij soms verdeeltekeningen. Kwalitatief ordenen voltrekt hij ook wel bij weg-tijd vraagstukken.
Bij het nastreven van meer numerieke precisie vervalt hij een enkele maal in een fout van additief redeneren, door de tweede component van de gegeven paren verhoudingsgetallen buiten beschouwing te laten bij de vaststelling van het verschil. Het beste werkte aanvankelijk nog het zelf voortbrengen van situaties. Voor de koffiekwestie is er zelfs sprake van iets strategisch door slechts in één component te variëren 3S ÷ 4K → 3S ÷ 5K.
2S ÷ 4K. Daarbij brengen de inzichten van anderen hem overigens gemakkelijk van zijn stuk. '*Twee* keer zo slap' besliste hij eerst voor 4S ÷ 10K vergeleken met 4S ÷ 5K, om daarna het foutieve standpunt van de meerderheid alsnog tot het zijne te maken. *Twee* wordt ingeruild voor *vijf*.
Begint het schematiseren eenmaal wat vorm te krijgen dan gaat dit het oplossen van vergelijkingsproblemen beïnvloeden. Hij probeert met name het schema voor de tafelschikkingen toe te passen, nu eens met succes, tot en

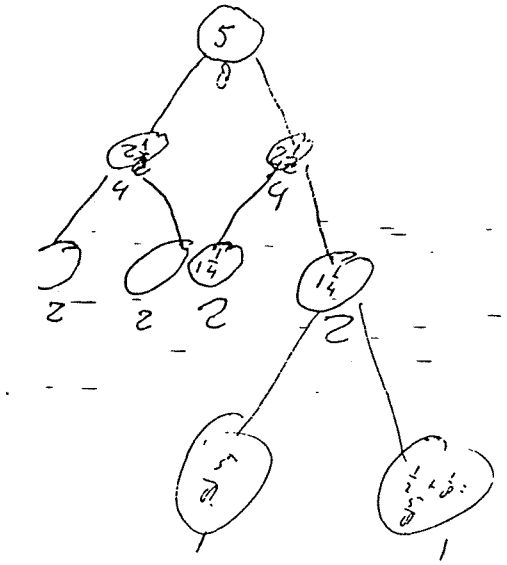
met het relatieve verschil toe, een andere keer volledig erin vastlopend. Al met al is er sprake van een betrekkelijk instabiel beeld. Weliswaar hebben zijn groeiende inzichten in breuken en verhoudingen meestal de overhand, maar soms zwicht hij voor de onderscheiden (en ook nog andere) fouten tot het einde toe.

ad 2: voortschrijden in schematiseren

Mark tekent bij de eerste gelegenheid die zich voordoet geen schema voor het tafelschikken. $\frac{30}{24}$ wordt met verdelen tot een uitkomst gebracht, door splitsing in $\frac{24}{24}$ en $\frac{6}{24}$ en door van de laatste de uitkomst via

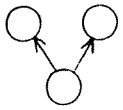
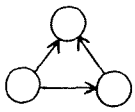
 te bepalen: $1 + \frac{1}{4}$.

Daarna maakt hij wel schema's en laat daarin terstond overtollige takken weg. Al na drie weken past hij dan nog een verkorting toe, namelijk het niet invullen van een deel der tafeltjes.



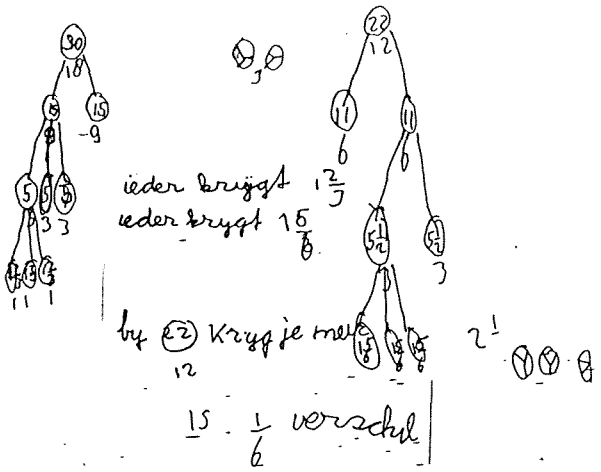
Dit schematiseren met tafelschikkingen boeit hem enige tijd. Hij weet bijvoorbeeld van de hele groep het beste raad met de vraag hoe een gegeven boom naar boven toe uit te breiden.

De meeste kinderen zijn geneigd aldus te werk te gaan

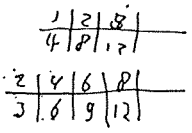
 in plaats van  .

Na zo'n drie maanden ervaring gaat hij ook op zoek naar een meerdelige instap. Het gebeurt dan meer dan eens, dat hij even het schematiseren verlaat om in een verdeeltekening iets uit te zoeken, of dat hij zijn schema of

een gedeelte ervan verwerpt en dan (deels) opnieuw begint, efficiënter.
Ondersteunende verdeeltekeningen maken werd door hem tot het einde toe gedaan.



Het voorbeeld wijst uit dat de ontwikkelde werktuigen hielpen om in vrij lastige vergelijkingskwesties orde te scheppen.
Verdere progressie zat er niet in het schematiseren met de tafelschikkingen.
Na het computerprogramma stelde hij globaal: 'Je leerde er verdelen en hoe je een boom kunt maken'.
Naar het middel van de verhoudingstabel greep Mark uit zichzelf vrijwel niet. In de enkele observaties die er zijn worden ze efficiënt toegepast



Bijvoorbeeld om $\frac{1}{4}$ en $\frac{2}{3}$ op te tellen. Hij kon echter ook toegeven aan een toevallige regelmaat in de tabel, die de verhoudingsconstantie aantastte, bijvoorbeeld in een tabel voor

$\frac{3}{4}$: $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 12 & 16 & 20 & 24 \\ \hline 16 & 20 & 24 & 28 \\ \hline \end{array}$ [18].

In een eenvoudig geval, daartoe uitgedaagd door de leraar, maakt hij de tabellen puur mentaal met inbegrip van een passende conclusie.
Voor het overige houdt hij het bij de schema's voor het tafelschikken, al dan niet ondersteund met getekende verdelingen, of hij zet gegeven situaties rechtstreeks om in direct vergelijkbare, om dan te vervolgen met verschilbepaling in één component van de voortgebrachte paren verhoudingsgetallen.
Samengevat komt het voorgaande erop neer, dat het schema voor het tafelschikken wel enige stijgingskracht uitstraalde, maar onder het veelvuldig

zoeken van enige binding met het concrete. Er werd tot het einde toe gependeld tussen het tweede en het concrete eerste niveau. Zelfs kon van enige terugval worden gesproken in verband met de verhoudingstabel. Mark pikte dit niet op als verkorte voortzetting van het schema voor het tafelschikken, terwijl dit laatste in het onderwijsleerproces vanzelfsprekend op de achtergrond raakte.

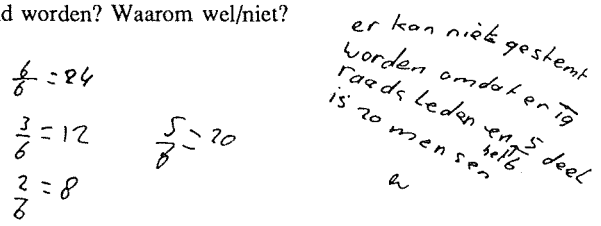
ad 3: flexibel modelgebruik, schematoepassing (en flexibel rekenen daarbij)

Het schema voor het tafelschikken en allerlei visuele modellen werden lange tijd in combinatie wendbaar toegepast. De visuele modellen weerspiegelen meestal de werkelijkheid, dus cirkels voor pannekoeken en pizza's, stroken voor dropstaven of zuurstokken etc.
In het gevarieerde modelgebruik op deze manier wordt dus de behoefte aan hechte binding met de realiteit manifest.
Het schema voor het tafelschikken wist hij uit zichzelf wel eens toe te passen, maar voor het overige was Mark ook dikwijls op structurerende hulp van buitenaf aangewezen.
De getallenlijn bijvoorbeeld functioneerde voor hem echt als middel om de plaatsing, ordening en verschilbepaling van breuken te beslissen, maar van enige flexibiliteit van zijn kant was hierbij geen sprake.
In de slottoets maakte hij doelmatig gebruik van het strokenmodel (globaal verdelen voor de vergelijkingskwestie).
Kortom, een zekere wendbaarheid ten aanzien van een deel van de voortgebrachte werktuigen kan hem niet worden ontzegd.

ad 4: Het zich voorstellen van formele problemen

De sterke behoefte van Mark aan visuele representaties bij het probleemoplossen bleek in het voorgaande zonneklaar. Dergelijk houvast aan het concrete was tot het einde toe nodig. In feite was hij er dus nog niet aan toe de gevraagde omkering te maken tot het ich voorstellen van een probleem op formeel-symbolisch niveau. De concrete werkelijkheid moest op enigerlei wijze vertegenwoordigd zijn of als zodanig worden opgeroepen in de vraagstellingen.
Zoiets voltrok zich bijvoorbeeld toen hem om een uitspraak gevraagd werd over $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ in relatie tot $\textcircled{2}$. Zich beroepend op het Franse verdelen – dat hij trouwens wel vaker observeerbaar te hulp riep – stelde hij vast dat $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ nu eenmaal niet hezelfde is als $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Overigens kon hij aan het einde van het tweede onderzoeksjaar met uitsluitend in symbolen gegeven breuken goed omgaan. De vraag is in hoeverre voorstellingen hierbij nog een rol speelden.
In het volgende toepassingsvraagstuk uit de slottoets werden breuken van een betekenis voorzien op grond van de gegeven context.

De gemeenteraad gaat stemmen over een heel belangrijke zaak. En als er over heel belangrijke zaken gestemd wordt, moet *minstens* $\frac{5}{6}$ deel van alle raadsleden aanwezig zijn. Nu zijn er 19 van de 24 raadsleden aanwezig.
> Kan er gestemd worden? Waarom wel/niet?



Men zou kunnen stellen dat hetzich voorstellen op het tweede niveau, getuige de laatste twee voorbeelden, goed functioneerde.
Ook konden vanuit dit niveau verbindingen met het formeel-symbolische gelegd worden door hem. Voor het vergelijkingsvraagstuk in dezelfde toets bijvoorbeeld werden zeven zuurstokken onder tien kinderen globaal verdeeld aan stroken, gesymboliseerd in $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ als ieders portie en met het oog op de conclusie omgezet in $\frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$.

Tenslotte noemen we één van de formeel gegeven opgaven in deze toets $1\frac{1}{4} + \frac{6}{12} =$, waarvoor Mark rekende $(\frac{6}{48} + \frac{6}{12})\ \frac{12}{60}$, tussen de haakjes correct en duidelijk IN-distractorbepaald. Zou hij zich hier wat voorgesteld hebben of de betekenis van de breuken gerealiseerd $(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{1}{5})$, dan was dit hier niet gebeurd.
We komen tot de slotsom, dat Mark aan het zich voorstellen van formele problemen nog niet toe was. Voor het merendeel bewoog hij zich tenslotte op het tweede niveau. Wel vertoonde zijn werk op het laatst hier en daar uitlopers naar het formeel-symbolische, zij het nog schoorvoetend. Het grensverkeer tussen de beide eerste niveaus was nog aanzienlijk intensiever in zijn leerproces.

ad 5: Eigen constructies en produkties op symbolisch niveau
In dit opzicht was er sprake van een gemiddeld leerproces, zij het dat de persoonlijkheid van Mark dikwijls een royale produktie in de weg stond.

Na $3\frac{1}{2}$ maand: vrije produktie
Deze was uiterst bescheiden en werd gekenmerkt door:
— het uitsluitend toepassen van het optellen, met
— halven, kwarten en achtsten, onder
— toepassing van onderlinge equivalentie, bijvoorbeeld:
$\frac{1}{2} + \frac{2}{8} + \frac{1}{4} = 1$; $\frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$.

Twee maanden later: exploratie van $\textcircled{5}_{8}$

Er wordt op z'n Frans en globaal verdeeld aan vierkanten. Voor een globale verdeling noteert Mark $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.

Het monografisch materiaal voor de andere verdeling vertoont twee kenmerken, namelijk:

— herhaald bijtellen van achtsten zonder vervanging door equivalente breuken, en

— het multiplicatief verkorten van het voorgaande materiaal tot $2 \times \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$ tot en met $5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$;

Het verkorte schema voor de tafelschikkingen werd reeds onder het schematiseren verwerkt.

Een maand later: vergelijken

Het ging om $\textcircled{5}_{4}$ en $\textcircled{3}_{4}$. Er werden schema's voor het tafelschikken geconstrueerd en voor $\textcircled{5}_{4}$ een passende verdeling gemaakt, globaal, aan lijnstukken; de beide uitkomsten kwamen op de getallenlijn en het geheel bracht de volgende ordeningsmonografie voort:

$1\frac{1}{4}$ is meer dan $\frac{3}{4}$

$1\frac{1}{4} > \frac{3}{4}$

$1\frac{1}{4}$ is $\frac{1}{2}$ meer dan $\frac{3}{4}$

$1\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ (gelijk maken)

Hij interpreteerde 'gelijk maken' dus niet als aan de kleinste portie iets toevoegen, zoals de meesten deden, maar van de grootste portie iets afhalen.

Later bepaalt hij in dergelijke gevallen rechtstreeks de uitkomsten van de gegeven situaties, stelt ongelijkheden op in twee richtingen, doch wil de betrekkingen nog wel eens achterwege laten of hij vergeet iets in de ordeningsuitspraken. Bijvoorbeeld een maand na voorgaande ervaring: $1\frac{1}{4}$ is $(\frac{1}{8})$ meer dan $1\frac{1}{8}$; $1\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = 1\frac{1}{8}$.

Een jaar later wist hij zelf door schuilnaamtoepassing de eveneens zelf gekozen gemengde getallen $1\frac{6}{7}$ en $1\frac{3}{4}$ te ordenen, aldus:

$1\frac{6}{7}$ is groter dan $1\frac{3}{4}$ (hypothese)

$1\frac{12}{14}$ $1\frac{6}{8}$

$1\frac{18}{21}$ $1\frac{9}{12}$

$1\frac{24}{28}$ $1\frac{12}{16}$

$1\frac{15}{20}$ $1\frac{18}{24}$ $1\frac{21}{28}$

Dus de veronderstelde ordening was juist.

Vier maanden later: eigen produktie bij verdeelsituatie
Het ging om een kwestie als waarmee dit overzicht werd begonnen. Er werd voldaan aan de vraag zelf ook tien van dergelijke sommen als voortkomend uit de voltrokken verdeling te produceren. Deze produktie heeft veel weg van de eerste, zij het dat voor het toepasen van gelijkwaardigheid (schuilnamen) meer mogelijkheden zijn benut.

Een maand later: constructieve vulling van de getallenlijn
Het wordt een efficiënte produktie deze keer:
— correcte invulling van de getallenlijn, met
— uiterst verkorte uitkomsten, en
— additief en multiplicatief monografisch materiaal, gebaseerd op de bouwstenen $\frac{3}{4}$ en $\frac{3}{8}$, bijvoorbeeld:

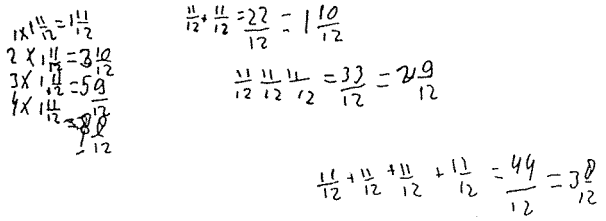
$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$

$2 \times \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$; $3 \times \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$,

in het geval van $\frac{3}{8}$ worden eveneens schuilnamen toegepast:

$\frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 2 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$.

Vijf maanden later: verkeerslicht $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$
Deze keer wordt het weer een heel acceptabele produktie in tegenstelling tot voorgaande gelegenheden, waarin hij in feite niets uitvoerde.
Hij geeft deze keer ook zijn aanpak van het herhaald optellen prijs:



Voor de '$x \times 60$'-sommen brengt hij niets nieuws voort.

Vanaf een maand later: monografieën
In het geproduceerde monografische materiaal tekent zich een zekere stroomlijning af.
Bepaalde produktiemethoden worden steeds consequenter toegepast. Mede door het lage werktempo is het gevolg wel toenemende eenzijdigheid, omdat Mark aan één hooguit twee principes per produktie toekomt.
Naar kenmerken getypeerd komt dit werk neer op:
— het variëren van de bewerking met het delen in een uitzonderingspositie; optellen en vermenigvuldigen hadden de overhand;

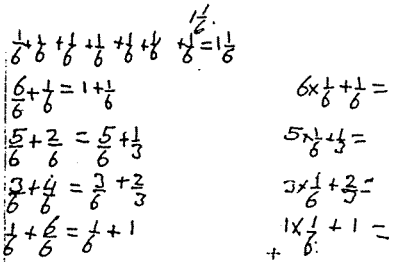
— het tweezijdig toepassen van schuilnamen;
— het gebruik maken van eigenschappen als de commutativiteit van het optellen en de distributiviteit van het vermenigvuldigen over het aftrekken.

In één geval baseerde hij een monografie nagenoeg volledig op de laatste eigenschap. Ook anderen waren in deze periode bewust op zoek naar dergelijke handigheden (§ 4.3, p.128).

Marks monografie voor $1\frac{1}{3}$ bevatte zeven betrekkingen van het type:

$a \times 1\frac{1}{3} - (a - 1) \times 1\frac{1}{3}$, bijvoorbeeld $10 \times 1\frac{1}{3} - 9 \times 1\frac{1}{3}$ e.d.

Tenslotte vermelden we, dat vrijwel alle monografieën de op het Franse verdelen berustende uiteenlegging in stambreuken bevatte, al dan niet als eerste:



Het gevraagde verhaaltje voor $1\frac{1}{6}$ ontbrak.

Een half jaar later: proefwerk Land van Samen

Mark zocht het vooral in toepassingsvraagstukken bij deze gelegenheid. Door de betrekkelijk omvangrijke verhalen die hij schreef en door zijn tempo bleef de produktie beperkt tot drie. In één geval verwees hij naar het Franse verdelen.

Er werden nog vier 'kale' vraagstukken aan toegevoegd, van elke hoofdbewerking eentje, met zowel Land van Samen-getallen als echte breuken.

Voor de hoofdbewerkingen kon Mark aan visueel materiaal wel uitkomsten

construeren.
Halverwege het tweede onderzoeksjaar wist hij desgevraagd het verschil van $\frac{3}{4}$ en $\frac{2}{3}$ te bepalen, uitgaande van het handig kiezen van een eenheid op een getallenlijn op ruitjespapier. De getallenlijnconstructie kreeg een vervolg in symboolvorm: $\frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$, gebaseerd op de aangebrachte verdeling.
Hij heeft geen voorkeur voor één van de methoden, handige eenheid op de getallenlijn of handige prijs, na enige ervaring met beide methoden.
Het vermogen om met equivalente breuken in symboolvorm om te gaan neemt vervolgens waarneembaar toe.
De reeds geciteerde ordening van $1\frac{6}{7}$ en $1\frac{3}{4}$ van enkele maanden na voorgaande ervaring weerspiegelt dit.
Een eenvoudige deling werd eveneens aan concreet materiaal voltrokken, bijvoorbeeld $2\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$ = door middel van uitmeten aan lijnstukken op ruitjespapier.
Voor het vermenigvuldigen werd in eenvoudige gevallen een procedure in symboolvorm geconstrueerd met distributiviteit als leidend beginsel.
Bijvoorbeeld:
$2\frac{1}{2} \times 1\frac{4}{5}$ via $2 \times 1\frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$, getuige $2\frac{1}{2} \times 1\frac{4}{5} = 2\frac{8}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = 4\frac{1}{2}$.
Behoudens het eerder genoemde IN-distractorgeval worden de 'kale' sommen in de slottoets heel behoorlijk gemaakt.
Constructies en produkties in symboolvorm hadden dus nog de nodige binding met het concrete.
Slechts de transformatie van breuken in ermee gelijkwaardige getuigt er zo nu en dan van dat de grensovergang naar het derde niveau zich heeft ingezet.

Samenvatting
Het proces van horizontaal mathematiseren voltrok zich niet bepaald voortvarend. Allerlei hindernissen moesten worden genomen. Tot het einde toe bleef de noodzaak bestaan het leerproces in het concrete in te bedden. Ondanks het gestaag groeiende inzicht in breuken en verhoudingen bleek dit tot het einde toe zwakke momenten te kennen. Het zwichten voor IN-distractoren was er het gevolg van. Het schema voor de tafelschikkingen had de nodige stijgingskracht. Door middel van de voortgang in het schematiseren ermee werden de banden met het concrete geleidelijk aan losser, en hier en daar misschien zelfs al verbroken. Met de verhoudingstabel lag dit totaal anders. In feite raakte Mark op dit punt op een dwaalspoor, althans raakte hij van de leerweg af. De andere schematiseringsvorm raakte op de achtergrond, waardoor er in zekere zin terugval in niveau optrad.
Het schematiseren werd ondersteund door visualiseren met verdeeltekeningen. In dienst van het schematiseren werd eveneens herhaaldelijk en observeerbaar

het middel van het Franse verdelen ingezet. In een zelf bedacht vraagstuk voor het Land van Samen verwees hij – bij wijze van suggestie – naar dit middel. De visuele modellen werden werkelijkheidsgetrouw gekozen. Het ogenschijnlijk gevarieerde modelgebruik verried dus in feite de gebondenheid van het leerproces aan het concrete.
Aan het maken van voorstellingen bij in formeel-symbolische vorm gestelde problemen was Mark nog niet toe, al moet gezegd dat hij op het tweede niveau in hechte samenhang met het concrete in dit opzicht een zekere souplesse aan de dag legde. Het pendelen tussen beide niveaus was de drijvende kracht achter zijn leerproces.
In de constructies en produkties van vraagstukken in symboolvorm kon een zekere gevoeligheid voor het toepassen van bepaalde beginselen worden waargenomen. Eenzijdigheid in de monografieën – mede door het trage werktempo – was er het gevolg van.
Wat de kwestie van de equivalentie van breuken aangaat, leek het derde niveau bereikt te zijn, zo niet betreden. Gelet op het verticale mathematiseren was het leerproces dus zeker nog onaf.

Michael (9;6) – (11;10)

Algemeen
Michael gedroeg zich onopvallend in het onderwijsleerproces. Zijn geest leek soms op een vrije vlinder die hij niet in zijn macht had. Bovendien maakte hij een trage indruk, wat niet bij zijn toentertijd kleine postuur paste. Communicatiestoornissen van hem met leraar of medeleerling kwamen geregeld voor. Hij leek een betoog altijd op enige denkstappen achterstand te volgen en verloor zodoende gemakkelijk de aansluiting bij de lesgang. Dit kwam ook tot uitdrukking in de voortbrengselen van zijn leerproces op schrift. Deze weerspiegelden nogal eens dat hij achter de feiten aanliep. Hij had het heel sterk nodig zich te realiseren wat er aan de hand was, om vervolgens met de nodige precisie te kunnen uitwerken wat er van hem gevraagd werd, maar dikwijls stond hij zelf een dergelijke gang van zaken in de weg. Slechts uiterst langzaam maakte Michael bescheiden vorderingen. Hij toonde zich daarbij sterk visueel ingesteld, had een matige bekwaamheid tot verbaliseren en ook zijn vermogen tot analyseren was niet bepaald sterk ontwikkeld. Door de jaren heen leverde hij weinig inbreng uit zichzelf. Zijn instelling was er één van afwachten, deels gevoed door onzekerheid, bang als hij was om iets verkeerds te zeggen. Zijn motivatie en zelfwerkzaamheid worden sterk bepaald door externe krachten. Omdat anderen het willen, volgt hij in redelijke mate vanuit zijn afwachtende positie toch het nodige oppikkend. Naar het oordeel van zijn respectieve leraren komt hij te voorschijn als een plichtmatige jongen, 'geen vlees en geen vis'. Voor de eindtoets basisonderwijs 1986 van het CITO scoorde hij voor taal, rekenen en informatieverwerking op rij de percentielen 62, 56 en 77. Voor de breuken en verwante gebieden in het onderdeel rekenen had hij 21 van de 27 opgaven

correct. Hij ontpopte zich in de musical op de afscheidsavond als een wat schuchtere pseudo oliesheik, te gast op de alles beheersende locatie met de werkschuwe lift en ging – ongetwijfeld onopvallend – op in een scholengemeenschap voor LBO/MAVO.

Specifiek

ad 1: begripsverwerving en IN-distractorfouten

Evenals Carlien was ook Michael verlegen met de kwestie van de tandpastasliert en de delen daarvan. Uitkomsten van verdelingen schreef hij aanvankelijk voluit verwoord en deels ook in gemengde taal, bijvoorbeeld '$\frac{3}{8}$ en een kwart'. Het feit, dat een hele vier kwarten of vierden bevat, betekent voor hem nog niet, dat dan een hele dus ook uit zes zesden enz. bestaat, d.w.z. wel in eenvoudige, zuivere gevallen, maar zodra er 'tijd', 'geld' of enige andere grootheid meedeed, werd het Michael al gauw te gecompliceerd en haalde hij de zaken door elkaar. Evenals Mark modderde hij ook maar wat aan wanneer er gebarend werd geschat. De relatie tussen het verdelen van één hele met zes kinderen en ieder krijgt $\frac{1}{6}$ deel kon alleen maar worden vastgesteld door de verdeling ook echt te doen. Zoals de onderwijsimpressie al uitwees (§ 4.3 p.78) was Michael uiterst gevoelig voor IN-distractoren. Samen met Kevin en Margreet toonde hij zich uiterst standvastig in het overstag gaan hiervoor. Anders gezegd: de mentale constitutie van het object breuk voltrok zich uiterst moeizaam en iedere poging los te komen van het concrete, eerste niveau ontaardde gedurig in dit verschijnsel. In dit opzicht stond Michaels leerproces model voor dat van de hele groep.[19] Zo wemelde zijn eerste vrije produktie van dergelijke fouten, al moet gezegd, dat Michael de proef, samengesteld uit de produkties van de groep – na een interview over deze kwestie – goed doorstond. Aanvankelijk was de opgebouwde weerstand van korte duur. Enige tijd later ging hij dan toch weer door de knieën voor genoemd verschijnsel. Na zeven maanden bijvoorbeeld neigt hij ertoe in $\frac{5}{6}$ méér te zien dan in $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, vanwege de grotere teller en noemer; dit ondanks het feit, dat hij zelf $\frac{5}{6}$ via tafelschikken uit $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ bepaald heeft en hij alle door hem geconstrueerde tafeltjes, namelijk $\underset{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$, $\underset{2}{1+\frac{2}{3}}$, $\frac{5}{6}$ gelijkwaardig verklaart.

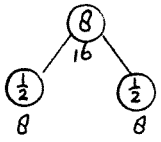
Na één jaar is het wel goed tot hem doorgedrongen, dat er kennelijk iets bijzonders aan de hand is met de nieuwe getallen.

'$\frac{7}{8}-\frac{5}{5} = \frac{2}{3}$.' 'Fout', zo meent hij, 'volgens mij trekt ze gewoon af!' Verder komt hij dan nog niet in zijn argumentatie. Wel blijkt hij er erg op gebrand niet meer in deze val te lopen. De groei van zijn inzichten houdt met het voorgaande gelijke tred. Het duurt bijna anderhalf jaar, voordat Michael het deel-geheel aspect van breuk onder de knie heeft.

Met de vergelijkingsproblemen was het al niet anders gesteld. Zodra deze in symboolvorm werden aangevat, raakte Michael verzeild in het moeras van het onjuiste, additieve verhoudingsredeneren, tenzij hij zijn heil zocht in gevisualiseerde uitwerkingen. Voor redeneringen van anderen is hij gevoelig op dit punt. Voor 4 S : 10 K en 4 S : 5 K gaf hij zijn onjuiste 'vijf keer zo slap'-standpunt prijs, na Marja over deze kwestie gehoord te hebben. Haar kijk op deze kwestie maakte hij tot de zijne.
In de context van de koffiesterkte kon hij constructief meedenken bij het opbouwen van klassen van gelijk sterke koffie (§ 4.3 p.90). Het op sterkte vergelijken bracht hij er aanvankelijk niet zo goed af. $\frac{18}{8}$ verklaarde hij $\frac{4}{2}$ sterker dan $\frac{14}{6}$. Begrijpelijk overigens voor iemand, die voor het vergelijken van verdeelsituaties aanvankelijk sociaal-emotionele argumenten hanteerde en de mathematische context hieraan ondergeschikt maakte (§ 4.3 p.89) en later hierbij overeenkomstige obstakels op zijn weg vond. Na anderhalf jaar bijvoorbeeld verklaarde hij $\frac{30}{18}$ voordeliger dan $\frac{22}{12}$, omdat 12 + 6 = 18, maar 22 + 6 nog geen 30!
Aan dergelijke ontsporingen zijn dan maandenlang tobberijen voorafgegaan met het tekenen van verdelingen en schemaconstructies, die nogal eens uitmondden in de op schrift gestelde verzuchting: 'Dit snap ik niet!'
Desondanks weet Michael zich op den duur te ontworstelen aan dit euvel. Luctor et emergo! Al lukt het hem niet zich helemaal te zuiveren. Samengevat moeten we vaststellen dat we hier te doen hebben met een weerbarstig verschijnsel in het leerproces van Michael. Dit rechtvaardigt de slotsom, dat werken op het eerste niveau over lange tijd conditio sine qua non was. Anders gezegd: het loskomen van het concrete niveau voltrok zich bij hem uiterst moeizaam.

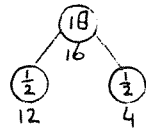
ad 2: voortschrijden in schematiseren

Ruim een half jaar na introductie kan Michael het symbool $\frac{x}{y}$ voor een verdeelsituatie koppelen aan de uitkomst $\frac{x}{y}$, eventueel met het Franse verdelen in een bemiddelende rol. Bij het genereren van equivalente tafeltjes moet eerst met sociaal-emotionele voorkeuren worden afgerekend (gezelligheidsoverweging, § 4.3 p.87).
Het horizontale mathematiseren ondervindt dus weerstand. Ook het construeren van schema's stuit in het begin op belemmeringen, bijvoorbeeld:

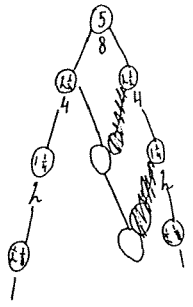


Wat in de tafeltjes is ingevuld, weerspiegelt het denken: 'Je neemt de helft voor ieder tafeltje'. Dit misverstand kwam voor in combinatie met niet

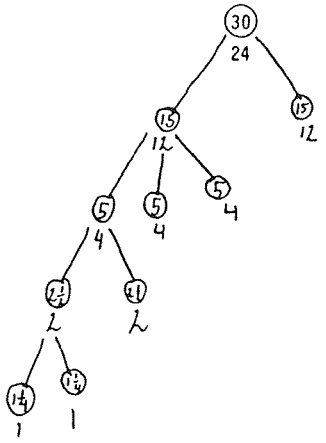
evenredig opdelen, dus bijvoorbeeld:



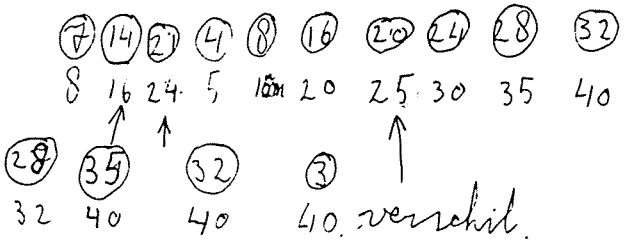
De porties ondergingen dus een andere verdeling dan de kinderen. Een duidelijk teken en het eerdergenoemde gezelligheidsargument wijst hier ook al op – dat het idee van de noodzakelijke verhoudingsconstantie om de eerlijkheid in het tafelschikken te waarborgen, nog niet mentaal had postgevat. Dit was overigens geen beletsel om in de beginperiode toch al verkortingen toe te passen, door takken in schema's weg te laten of eenmaal aangebrachte takken naderhand weer door te strepen.



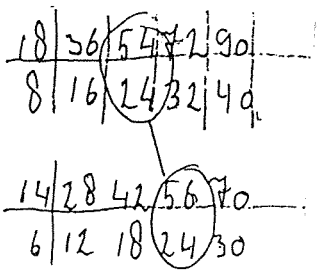
Er is sprake van nog een verkorting, het niet invullen van tafeltjes. Belangrijker is echter, dat het schema weerspiegelt dat Michael er eigenlijk nog niet goed raad mee wist. Of toch wel? Zo'n half jaar later richt hij zijn schema's opnieuw zo in. In de tussenliggende periode hadden ze echter meer de gedaante als bedoeld.

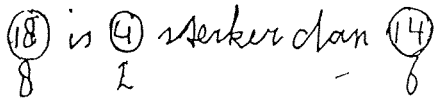


Bovendien toont dit tweede schema, dat ook hij het middel van de meerdelingen was gaan toepassen als verkorting. Vanaf drie maanden na de invoering werd deze verkorting systematisch toegepast. Mede gelet op de terugkeer van de voorlaatste schemavorm kan gesteld, dat Michael kennelijk bewust op zoek was naar alle mogelijke verkortingen. Hoewel hij na de verwerking van het computerprogramma verklaarde niet te weten waarom het ging, of wat hij geleerd had.
De effectiviteit van het schematiseren was echter (nog) niet bijster groot. Hoewel het schematiseren voor Michael geen doel in zichzelf was, liet hij het er op het punt van de uitkomsten nogal eens bij zitten of zat hij ernaast.
Na de invoering van de verhoudingstabel worden beide schema's toegepast. Later, het schema voor de tafelschikkingen is wat op de achtergrond geraakt, worden soms tabelachtige schema's geconstrueerd door het symbool voor de tafelschikking consequent te herhalen.



Merk op, hoe in dit geval ook het relatieve verschil juist beslist wordt; het betreft twee verdeelsituaties. Het schematiseren met de verhoudingstabel geeft overigens een minder stabiel beeld te zien dan met het andere schema.
De eerste constructies – het betreft drie vergelijkingskwesties – kenmerken zich door:
— tabellen voor beide situaties, met in één van beide een royale overproduktie die onbenut blijft;
— een verkorte tabel voor slechts één van de gegeven situaties, waarna het verschil tussen beide kan worden bepaald;
— zonder meer het verschil beslissen.
De beide laatste gevallen boden door de gegeven getallen ook de mogelijkheden tot de gesignaleerde, verkorte procedures.
Een volgende keer bouwde hij tabellen op het repeterend verdubbelen. Twee-en-een-halve maand later paste hij in feite een vorm van de kruisproduktmethode toe, dus in feite een uiterste verkorting om de vergelijking van $\frac{4}{5}$ en $\frac{13}{15}$ te voltrekken.[20]
Namelijk: 4S × 3 = 12 13
5K × 3 = 15.
Bij een volgende gelegenheid – drie maanden nadien, overigens met enige tussenliggende ervaring – kon hij dan weer gebruik maken van tabellen, zij het onverkort.

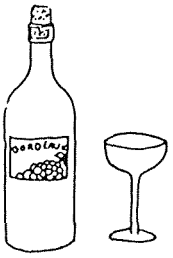


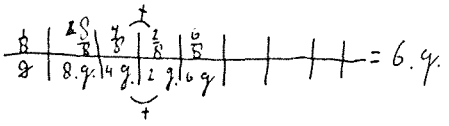


Opmerkelijk is de discrepantie tussen de geselecteerde getallenparen in de tabellen en het vastgestelde onjuiste niet-relatieve verschil. Zo gaat het door, met de ene keer het organiseren van een weg-tijd-kwestie in een matrixachtig schema', een volgende keer schema's voor het tafelschikken dan weer tabelachtige schema's met het symbool voor het tafelschikken, en tenslotte weer eens verhoudingstabellen. Met name in de slottoets wordt van dit middel op verrassende wijze gebruik gemaakt.

In een wijnglas gaat $\frac{1}{8}$ liter.

Hoeveel glazen kun je vullen met een fles van $\frac{3}{4}$ liter?

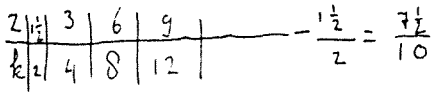




..6.. glazen.

'3 zuurstokken worden eerlijk verdeeld over een groep van 4 kinderen'.
'7 zuurstokken worden eerlijk verdeeld over een groep van 10 kinderen'.

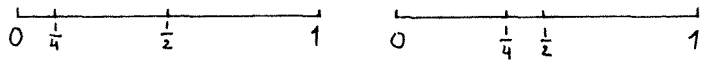
> Vergelijk: in welk groepje krijgt een kind meer:
in het groepje van 4 kinderen of in het groepje van 10 kinderen?
Hoeveel meer?



in het groepje a krijgt een kind meer hoeveel = $\frac{1}{2}$.

Beide oplossingen laten zien, dat het schema niet meer als generator van paren verhoudingsgetallen zonder meer wordt toegepast. Enkele van de eigenschappen worden benut die het verband tussen de in het spel zijnde grootheden definiëren.
We komen tot de slotsom, dat ondanks het wat chaotische beeld er van beide schema's toch een zekere stijgingskracht uitging met name in dienst van het zich bestendig vestigen op het tweede niveau.

ad 3: flexibel modelgebruik, schematoepassing (en flexibel rekenen daarbij)
In het toepassen van visuele modellen en schema's kon aan Michael een zekere wendbaarheid niet worden ontzegd. Aan de andere kant vertoonden zijn visualiseringen soms realistische trekjes, ook in de tweede helft van het leerproces.
Zoals de vorige indicator al uitwees kon de verhoudingstabel tenslotte met een zekere flexibiliteit worden toegepast. Daarenboven toonde hij diverse malen niet in een impasse, waarin hij zich werkte, te willen berusten. Nu eens werd in zo'n geval bij het schematiseren de hulp van visuele middelen ingeroepen, dan weer werd herstel gezocht in een opnieuw opgezet schema. Tot deze visuele ondersteuning dienden stroken, lijnstukken of cirkels. Naar de onderwijsimpressie uitwees, zette Michael de kwestie van de vulmachine naar zijn hand door het gegeven peilglas tweeschalig te maken (§ 4.3 p.130). De getallenlijn was soms een precisie-instrument constructief te vullen door nauwgezet uitmeten met behulp van de liniaal. Gebeurde zoiets op ruitjespapier, dan meende Michael onvoorwaardelijk deze structuur te moeten respecteren.



Hij neigde er dan toe bovenstaande tekeningen maar als juist te accepteren tegen beter weten in. De structuur van het papier had dan de overhand.
Als globaal ordeningsmiddel had de getallenlijn geen functie voor hem, hoewel hij er wel zo slordig mee kon om springen, dat de herhaalde sprongen voor een tafel van vermenigvuldiging niet spoorden met de uitkomsten. Bij navraag blijkt hij dan overigens wel beter te weten.
Al met al komen we ten aanzien van deze kwestie tot de slotsom, dat op bescheiden schaal sprake was van enige souplesse in het toepassen van visuele modellen en schema's, doch dat een deel van het leergedrag ook kan worden toegeschreven aan de instabiliteit van het leerproces. In de wijze van toepassen van de verhoudingstabel wordt de eerste vaststelling manifest, d.w.z. in de slottoets aan het eind van het leerproces. In dat opzicht lijkt hij op koers te varen.

ad 4: het zich voorstellen van formele problemen

De geciteerde oplossingen van Michael voor enkele vraagstukken in de slottoets wezen het al uit: op het tweede niveau was hij al aardig thuis. Er is een parallel met het leerproces van Mark aanwijsbaar. Zolang dit niveau op grond van het zelf verticaal mathematiseren slechts hier en daar schoorvoetend gerealiseerd wordt, bijvoorbeeld de omslag van intentionele naar extentionele begripsvorming voor de equivalentie van breuken, mag op het punt van het zich maken van een voorstelling bij een formeel symbolisch gesteld probleem, in dit stadium van het leerproces niet al te veel verwacht worden.[21] Voorzover er dan al sprake is van enige observaties op dit terrein, vormde het eerlijk verdelen de contextbron, waaruit geput werd. Tegen het einde van het eerste onderzoeksjaar volgde Michael voor het construeren van situaties onder voorwaarde, de volgende redeneerpatroontjes, bijvoorbeeld: $\textcircled{6}_{8} \rightarrow \frac{6}{8} : 2$ (de helft van $\frac{6}{8}$ samen nemen) $= \frac{3}{8} \rightarrow \textcircled{3}_{8}$. Na bijna anderhalf jaar zocht hij voor het vergelijken van $\textcircled{14}_{8}$ en $\textcircled{18}_{10}$ (wat krijgt ieder? waar krijg je meer? verschil?) een uitweg in het woord 'Pannekoeken?', stelde verschillen in de afzonderlijke componenten van de gegeven getallenparen vast en liet het er toen met een 'Dit snap ik niet!' bij zitten.

Hij probeerde zich dus een voorstelling bij het probleem te maken, maar slaagde daarin niet. In deze vorm was – in dit stadium – het probleem voor hem nog te formeel gesteld. Overigens wist hij twee maanden ervoor nog wel twee verschillende betekenissen aan het gebruikte symbool te geven.

In dezelfde tijd begon hij welgemoed aan een 'verhaaltje' bij $2\frac{1}{2} : \frac{1}{3} =$ 'Iemand heeft twee-en-een-halve dropveter en ...?' Het verhaaltje bleef in dezelfde verwarring steken als bij Henk. Door de dropveters in de vorm van stroken te gaan tekenen werd hij zich het gevraagde bewust: Wat zou $\frac{1}{3}$ moeten zijn? Kinderen die iets verdeelden, konden het niet zijn. Dus moest het wel een stukje dropveter zijn. Via zijn stroken van drie hokjes lang (toeval?), stelde hij de uitkomst op $7\frac{1}{2}$. Hij vond het niet vreemd, dat zijn uitkomst zoveel groter was dan het deeltal.

Tenslotte verwijzen we nog naar zijn verhaal bij $\frac{8}{4} + \frac{12}{4} = \frac{20}{4}$ in het Land van Samen, dat natuurlijk wel sterk met het eerlijk verdelen verbonden was (§ 4.3 p.136). Al met al komen we voor deze indicator tot de conclusie, dat wanneer op het tweede niveau de band met het concrete maar niet al te snel werd verbroken, Michael in staat was in een wat formeler stadium die weer op te roepen en voorstellingen te maken bij min of meer formeel gestelde problemen. Vanaf het derde niveau kon hiervan nog geen sprake zijn.

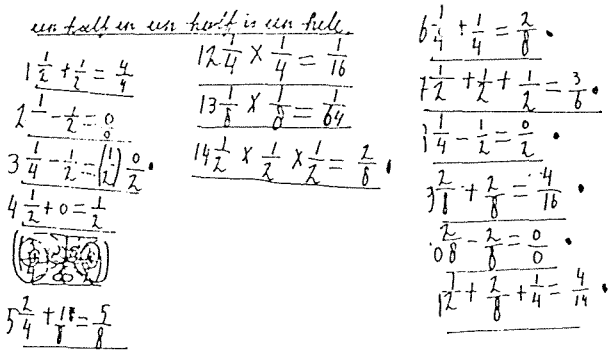
ad 5: eigen constructies en produkties op symbolisch niveau

Dergelijk werk lag Michael niet, vooral in het begin, vanwege de IN-distractoren die op de loer lagen en waardoor hij zich zo dikwijls liet

afleiden.

Na $3\frac{1}{2}$ *maand*: vrije produktie

Deze wemelde van de IN-distractorfouten. Hij verwierf er internationale bekendheid mee.[22] Zijn werk nemen we integraal op:



Er blijkt uit dat er – vergeleken met sommige anderen – ook weer verrassend goede dingen in zaten. Afgezien van allerlei onverklaarbare tegenstrijdigheden – vergelijk bijvoorbeeld de derde, de vijfde en de zesde opgave met elkaar – kan het werk worden gekenschetst door:

— het optellen neemt een dominante positie in naast het aftrekken en vermenigvuldigen;
— het gaat om halven, kwarten en achtsten, onder
— incidentele toepassing van gelijkwaardigheden, bijvoorbeeld $\frac{2}{4} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ en $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{4}$.

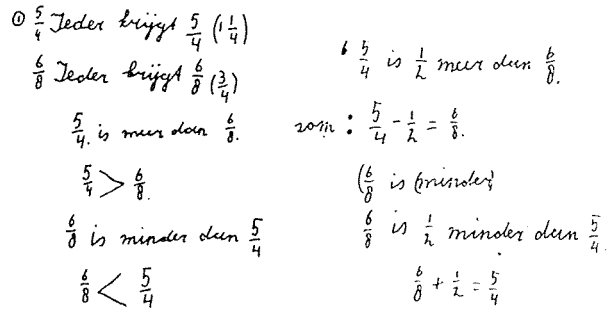
Twee maanden later: exploratie van $\frac{5}{8}$

Het schema voor het tafelschikken in deze kwestie werd onder de tweede indicator al weergegeven. Met de monografische beschrijving van het Franse verdelen wist hij nog niet goed raad. Hij tekende bij dit vraagstuk in totaal *zeventig* (!) cirkeltjes, waarvan hij een aanzienlijk deel verdeelde, bepaalde verdelingen weer verwierp en ook een deel van het – in het voren getekende (?) – materiaal. Hij verwarde duidelijk twee procedures met elkaar, namelijk het Franse verdelen en een toenemend aantal pizza's verdelen onder een in omvang toenemend gezelschap. Hij beschreef de uitkomst van de globale verdeling met '$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$'. Aan monografisch materiaal voor de andere verdeling had hij: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$; een duidelijk bewijs, dat hij de bedoeling en de effecten van het Franse verdelen nog niet in zijn geheel overzag. Later blijkt hij dit toch te hebben opgepikt, zoals de beschrijving onder de tweede indicator al uitwees.

Een maand later: vergelijken

$\frac{5}{4}$ en $\frac{3}{4}$ daar ging het om. Michael zet voor beide gevallen een gesnoeid boompje op, de eerste ondersteund door een globale verdeling aan lijnstukken. Beide uitkomsten zijn eveneens nauwkeurig op een getallenlijn geplaatst. De ordeningsmonografie lag in de lijn van wat de groep produceerde. Hij interpreteerde, evenals Mark, het 'gelijk maken' op basis van aftrekken.

Later bepaalde hij rechtstreeks uitkomsten van gegeven situaties en werkte de ongelijkheid tweezijdig uit. Een voorbeeld:

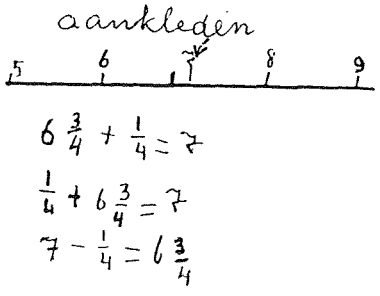


De betrekkingen die uitdrukking geven aan het in de ongelijkheden gestelde, wil hij ook wel weer eens weglaten. Soms vult hij de ongelijkheden in met het tafeltjessymbool in plaats van met de uitkomsten. Kortom, zijn werkzaamheden vertonen op dit punt een instabiel beeld. Een jaar later liep hij bijvoorbeeld vast in de ordening van de door hem zelf gekozen gemengde getallen $1\frac{2}{4}$ en $1\frac{1}{3}$.

Anderhalve maand later: eigen produktie dagindeling

Doordat rechtstreeks uit de eigen ervaringen kon worden geput, lag een dergelijke opdracht hem veel beter dan de andere produktie-opdrachten.

Hij beperkte zich overigens tot tijdsintervallen die met kwarten beschreven konden worden. Hij situeerde elke volgende gebeurtenis uit zijn dagverhaal op een afzonderlijk fragment van de tijdlijn, dat mee opschoof naarmate de dag vorderde. En hij voegde betrekkingen in zijn getallen aan de gebeurtenissen toe.



Vier maanden later: eigen produktie bij verdeelsituatie
Vergeleken met de overmoedige aanpak van destijds, hield Michael zich nu op de vlakte. Hij voldeed aan de gestelde eis van tien vraagstukken, maar beperkte zich tot optellen en aftrekken met halven en kwarten, paste gelijkwaardigheid toe en ontspoorde nergens.

Een maand later: constructieve vulling getallenlijn
Ook Michael levert een betrekkelijk efficiënte produktie, gekenmerkt door:
— correcte invulling van de getallenlijn;
— zonder verkorte uitkomsten, maar met
— additief en voor $\frac{3}{8}$ als bouwsteen uitsluitend multiplicatief monografisch materiaal, in het eerste geval nog niet geheel zuiver ten aanzien van de bouwsteen, bijvoorbeeld $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$ gevolgd door $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{5}{4}$;

Eerder werd al vermeld, dat de constructie van tafelprodukten – het ging bijvoorbeeld om die van $2\frac{1}{4}$ – op de getallenlijn niet spoorde met de overigens correcte uitkomsten.

Vijf maanden later: verkeerslicht $(\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{4})$

Michael maakt een correct begin met de tafel van $1\frac{11}{12}$, namelijk:

$1\frac{11}{12}$, $2\frac{22}{12}$, $3\frac{33}{12}$, $4\frac{44}{12}$.

Aan de eigen produktie van '$x \times 60$'-vraagstukken komt hij niet toe. Bij de gegeven opgaven van dit type blijkt nu eens wel en dan weer niet dat van iets als een reflectieve instelling sprake is. Zijn werk weerspiegelt eveneens – hij is de enige van de groep – dat hij met in symbolen gegeven operatoren niet goed raad weet.

Hij stelt bijvoorbeeld $\frac{1}{5} \times 60 = 5$ en realiseert door herhaald optellen via $\frac{2}{5},\frac{3}{5}$ enz. $\frac{6}{5} \times 60 = 30$. Dat zet hem kennelijk aan het denken, want hij spreekt de leraar erop aan en uit zijn twijfels ten aanzien van de juistheid ('t Is meer dan één keer). Met enige hulp (wijzerplaat en $\frac{1}{5}$ deel) wordt de zaak gerepareerd. Een dergelijk sluimerend cognitief conflict blijft echter uit in de volgende gevallen: $\frac{4}{6} \times 60 = 24$ gevolgd door $\frac{2}{3} \times 60 = 40$

en $\frac{2}{6} \times 60 = 12$, gevolgd door $\frac{1}{3} \times 60 = 20$.

Vanaf een maand later: monografieën
In het geproduceerde, vrije monografische materiaal is weinig systeem te ontdekken, hoewel er op den duur binnen eenzelfde monografie soms even een bepaalde produktiemethode wordt toegepast, bijvoorbeeld voor $1\frac{1}{6}$.

$7 \times \frac{1}{6} = 1\frac{1}{6}$ $\quad 5 \times \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = 1\frac{1}{6}$

$6 \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1\frac{1}{6}$ $\quad 4 \times \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = 1\frac{1}{6}$.

Naar algemene trekken gekenschetst onderscheidt dit werk zich door:

— het toepassen van het optellen, aftrekken en vermenigvuldigen;

— het tweezijdig toepassen van schuilnamen;

— het toepassen van allerlei eigenschappen als de commutatieve van het optellen en vermenigvuldigen, het halveren en verdubbelen van de factoren in een vermenigvuldiging, de distributieve wet van de vermenigvuldiging over de optelling, waarbij hij wel haakjes denkt, maar ze niet zet, bijvoorbeeld $\frac{6}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \times 2 + \frac{2}{8}$; $\frac{6}{8} = \frac{2}{8} - \frac{1}{8} \times 4 + \frac{2}{8}$;

— het maken van allerlei eigenaardige fouten, zoals:
$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{4}{6}$; $1\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{6}{3}$; $1\frac{1}{8} = \frac{1}{8} \times 9 = 1\frac{1}{8} \times 0$.

De variëteit van het begin ebt op den duur wat weg. Zijn werk wordt dan eenzijdiger. Hij geeft er duidelijk blijk van impulsen vanuit het onderwijsleerproces nodig te hebben. Na het gezamenlijk opzetten van een monografie in de les is er daarna in zijn werk een opleving bespeurbaar (meer systematische produktie).

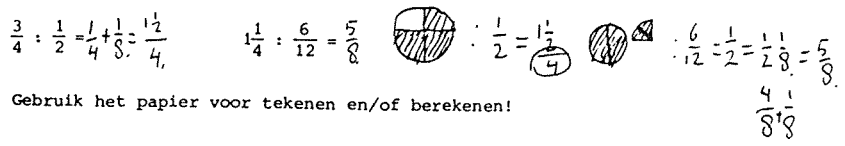
Een half jaar later: proefwerk Land van Samen

Van het hele werk straalt af, dat Michael de mogelijkheden van de verhoudingstabel als schematiseringsmiddel nu echt ontdekt lijkt te hebben. Bij veel opgaven, bijvoorbeeld het optellen van ongelijknamige breuken, plaatst hij voor de toekomstige maker open verhoudingstabellen. Verder produceerde hij twee toepassingsvraagstukken (verdeelsituaties) en nog allerlei vraagstukken in symboolvorm, waarbij ook 'stipsommen', bijvoorbeeld:

2 + 3 = 5 gevolgd door $\frac{4}{\cdot} + \frac{\cdot}{2} = \frac{5}{\cdot}$. Het delen komt niet voor en hij maakt zijn eigen opgaven ook niet. Wel is de omvang van de produktie – gemeten naar zijn mogelijkheden – aanzienlijk te noemen, namelijk 35 vraagstukken.

Wat het zelf construeren van methoden voor een hoofdbewerking aangaat, weet Michael voor het optellen, aftrekken en delen wel uitkomsten in visueel materiaal te construeren. Het enige geval waarmee hij in symbolen raad weet, is het vermenigvuldigen in eenvoudige gevallen, bijvoorbeeld:

$2\frac{1}{2} \times 1\frac{4}{5}$ = via $2\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$ (Michael zegt: Twee keer $\frac{4}{5}$ is $\frac{8}{5}$ en een half is $\frac{2}{5}$) en $2\frac{1}{2} \times 1\frac{4}{5}$ is $2\frac{1}{2}$ meer, dus $4\frac{1}{2}$. In de slottoets veronachtzaamde hij de distributiviteit weer, probeerde de delingen gedeeltelijk te visualiseren, zonder succes overigens.



Het optellen en aftrekken voltrok hij op symbolisch niveau.
De slotsom lijkt onderbouwd, dat het werken op symbolisch niveau niet geforceerd mocht worden. Wat het optellen en aftrekken aangaat, was hij er toe in staat. Voor de beide overige hoofdbewerkingen had hij nog een leerweg te gaan en was de regelgeving te vroeg gekomen.

Samenvatting
De eerste schreden op de mathematiseringsweg verliepen uiterst moeizaam. Zowel bij de constitutie van de notie breuk als bij het schematiseren moesten de nodige obstakels overwonnen worden. Vooral het loskomen van het eerste niveau was een precaire aangelegenheid. Het zich lange tijd manifesteren van IN-distractorfouten weerspiegelt dit. Ondanks het wat chaotische schematiseringsproces ging er toch een zekere stijgingskracht van de ontwikkelde schema's uit. In de laatste fase van het onderzoek komt zijn leerproces wat het schematiseren met de verhoudingstabel aangaat, op koers te liggen. Zijn aanpak van enkele toepassingsvraagstukjes in de slottoets en zijn proefwerk voor het Land van Samen getuigden hiervan. Zowel in het horizontaal als het verticaal mathematiseren was er op den duur op bescheiden schaal sprake van enige souplesse, waar het de toepassing van visuele modellen en schema's betrof, al moeten we voorzichtig zijn op dit punt, vanwege de instabiliteit van het leerproces als verklaringsgrond hiervoor, alsook de variatie in modelkeuze, die door de te sterke binding met de realiteit wordt ingegeven.
Het zich voorstellen van formele problemen kan nog nauwelijks worden geobserveerd, omdat Michaels leerproces nog hecht in het tweede niveau verankerd was. Slechts hier en daar werd het derde niveau bereikt. Het proces van verticaal mathematiseren was bij lange na nog niet voltooid.
In de slottoets liet Michael duidelijk zien, dat de regelgeving voor een deel der hoofdbewerkingen – voor hem althans – te prematuur was geweest. Zijn eigen vermogen het vermenigvuldigen in eenvoudige gevallen op symbolisch niveau inzichtelijk te voltrekken, was erdoor verstikt. Bovendien schreef hij in zijn proefwerk voor het Land van Samen 'gelijk maken' ook voor vermenigvuldigen voor en werkte dit zelf uit in tabellen; een teken, dat hij nog geen overzicht had over de regels voor de hoofdbewerkingen, ook al paste hij die voor het optellen en aftrekken in de slottoets correct toe.

Nanja (9;8) – (12;0)

Algemeen
Nanja is een goedmoedige dikzak met in het algemeen een gelijkmatig vrolijke instelling. Een enkele maal kon zij onherkenbaar furieus of intens verdrietig worden, wanneer de jongens haar al te intensief met haar omvang plaagden.
Qua mentale betrokkenheid bij het onderwijsleerproces had zij veel weg van kinderen als Alwyn, Kevin en Michael. Zij was snel afgeleid; ook tijdens

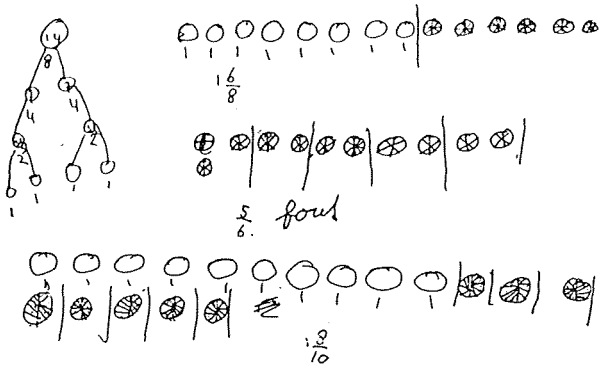
interviews raakte zij snel het spoor bijster, interviews die overigens merendeels een remediërend karakter hadden.
Slechts bij hoge uitzondering deed zij erg gemotiveerd mee, zoals bijvoorbeeld tijdens de verkenning van de wandelroute in 'Gooilust'. In het algemeen was zij matig gemotiveerd. Met haar vermogen tot zelfwerkzaamheid was het al niet anders. Die enkele keer dat zij het gevoel had goed werk geleverd te hebben, wilde zij dat ook graag tonen. In het algemeen was zij echter moeilijk bij de les te houden. Zij had in dezelfde mate behoefte aan concreetheid als Margreet, zoals het specifieke deel van dit portret zal uitwijzen. Zij was visueel ingesteld en kon gedurende lange tijd in feite niet buiten het (mentaal) handelen aan het visuele materiaal. Analytisch was zij zwak; naarmate de leergang vorderde en zich steeds meer op het tweede niveau ging afspelen, raakte Nanja enige tijd echt ontheemd. Het contact met het onderwijsleerproces was zoek voor haar, zij had haar greep erop volkomen verloren. In die tijd maakte zij een afgehaakte indruk en voor enige peilingsarbeid, waarop ieder goed scoorde, viel zij diep uit de toon, zelfs vergeleken met lotgenoten als Kevin, Margreet en Michael.
Verschillende van de interviews wezen overigens uit, dat voor een leerlinge als Nanja niets, maar dan ook absoluut niets aan beginsituatie mocht worden voorondersteld, d.w.z. dat ook de toegepaste contexten als het ware eerst ge(re)construeerd zouden moeten worden, alvorens daarin ook maar iets dat zweemde naar wiskundige activiteit voor haar zou kunnen plaatsvinden.
Omdat zij zich door de bank genomen passief opstelde, konden voor haar ten onrechte gemaakte vooronderstellingen gemakkelijk de overhand krijgen, waardoor zij haar leerspoor wel uit het oog moest verliezen. Van haar mocht dus geen inbreng verwacht worden op het terrein van zelf voorbeelden bedenken of dergelijke.
Haar vermogen tot verwoorden was redelijk. Het mag opmerkelijk worden genoemd, dat ondanks de impasse, waarin Nanja's leerproces enige tijd verkeerde, zij toch nog tot intens nadenken was te bewegen tijdens de produktie van het proefwerk voor het Land van Samen.
Voor de CITO-eindtoets basisonderwijs 1986 behaalde zij voor taal, rekenen en informatieverwerking percentielen van 43, 20 en 28. In het onderdeel rekenen had zij 15 van de 27 opgaven voor breuken e.d. correct.
In de musical op de afscheidsavond figureerde zij als hotelgast. Op dit kruispunt van haar schoolloopbaan ging zij de weg op van de Lagere Land- en Tuinbouwschool.

Specifiek
ad 1: begripsverwerving en IN-distractoren
De eerste schreden in het mathematiseren vergden veel tijd, omdat de eerste beginselen van het breukbegrip zich slechts moeizaam lieten overmeesteren.
Zij sprak van 'in' of 'door de helft doen' voor het in tweeën verdelen en vond dat persoonlijke smaak de overhand moest hebben om de eerlijkheid van het verdelen te definiëren en dus niet 'ieder evenveel'. Op den duur was

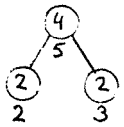
dat volgens haar eerlijker dan wanneer je al maar opgescheept werd met delen van eetwaar die je niet op prijs stelde.
'Drie keer een kwart' schreef zij als '$\times \frac{3}{4}$' en zij zag het verschil niet. Zij kwam in conflict met $2 \times \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$, omdat zij vond, dat het $6 \times \frac{1}{4}$ moest zijn en dat was niet hetzelfde voor haar.
Het was onverstandig dropveters niet eerst van hun kronkels te ontdoen, aleer tot tekenen en verdelen ervan over te gaan; gestrekte dropveters waren immers een stuk gemakkelijker. Tijdens zulk verdelen kon zij dan weer met zichzelf in de knoei komen; het verdelen in vieren bijvoorbeeld, moest daarvoor nu vier keer gesneden worden? Maar, dan ...???[23] Voor het verdelen in achten van een circulaire eenheid opperde zij overigens spontaan de klok als model, vanwege de kwartieren, dat waren al kwarten.[24] Het juiste relatieve standpunt kostte dan wel weer hoofdbrekens, Nanja neigde ertoe $\frac{1}{8}$ (een halve kwart) $\frac{1}{2}$ te noemen, iets wat zij wel vaker deed (§ 4.3 p.72).

Na twee maanden kan zij laten zien, dat een gehalveerde kwartstrook $\frac{1}{8}$ is en geeft zij er blijk van dat de elementaire breuknamen van het herhaald halveren nu een beetje inhoud voor haar beginnen te krijgen. Zo kon zij $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{4}$ wel met 2 en 4 verdelers in verband brengen, maar $\frac{2}{3}$ bijvoorbeeld (nog) niet met 3 (vanwege het niet-stambreuk zijn?). Uit een gevisualiseerde portie kon zij echter niet de verdeelsituatie reconstrueren, ook niet in de eenvoudigste gevallen. Soms leverde zij in deze beginfase een mooie prestatie, die ook van waarde was voor het leerproces van de hele groep.
Voor iemand die in de tweede ronde van een pizzaverdeelverhaal niet meer meedeed noteerde zij $\frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$ (§ 4.3 p.76). Ook herstelde zij spontaan een IN-distractorfout in haar eerste vrije produktie. Het betrof $\frac{8}{4} + \frac{8}{4} =$, waarvoor zij eerst $\frac{16}{8}$ schreef. Het werd uiteindelijk $\frac{16}{4}$ (§ 4.3 p.78).
Het zou lange tijd vergen voordat haar breukbegrip een beetje zat.
Veel later protesteerde zij bijvoorbeeld na vervanging van $\frac{6}{24}$ door $\frac{1}{4}$ tegen de beschrijving $\frac{7}{24}$ voor 7 van de 24. 'Je moet het toch in een deel zeggen?!'
Wat het maken van IN-distractorfouten aangaat, was Nanja's leerproces betrekkelijk zuiver, eigenlijk tegen wat men zou verwachten in. Weliswaar gaf zij wel eens toe aan deze verleiding, maar beslist niet in die mate als Margreet; voor Nanja waren uitkomsten in dit opzicht vermoedelijk methode-onafhankelijk (zie ook indicator 5). Het cognitieve conflict kwam wèl wanneer een gevisualiseerde oplossing van een vraagstuk of een uitnodiging tot bewustmaking van de betekenis van de gebruikte symbolen haar

met haar conflictueuze uitkomst confronteerde (§ 4.3 p.92).
Een voorbeeld van zo'n fout, overigens door de meester gemaakt, was voor de portie $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ beslissen tot 7 verdelers in de situatie van voor het verdelen.
Op den duur gaf het haar plezier te ervaren, dat haar weerbaarheid tegen dergelijke fouten groeide. Zo legde zij prachtig uit, waarom $\frac{4}{8}$ niet groter is dan $\frac{3}{5}$. 'Bij $\frac{3}{5}$ krijg je meer dan $\frac{1}{2}$ en bij $\frac{4}{8}$ krijg je precies een half'.
Tegen het einde van het tweede onderzoeksjaar ging zij er ook bij vertellen, waarom 'andere kinderen dan zij' tot zulke uitspraken kwamen: 'Sommigen denken dat $\frac{1}{3}$ groter is dan $\frac{1}{2}$, maar die kijken alleen maar naar de 3!'
Dit neemt overigens niet weg, dat zij – ook op de lange duur – momenten van zwakte kende. Twee weken voor de laatst geciteerde uitspraak besliste zij te gauw of de portie $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ voor iemand aan het tafeltje $\frac{2}{5}$ was. 'Ja, want als je $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ optelt krijgt je $\frac{2}{5}$.' Bij nader inzien moest dit dan weer worden herroepen.
Met de vergelijkingsproblemen was het ernstiger gesteld. Deze waren vermoedelijk de directe aanleiding tot de vermelde impasse in haar leerproces.
Verdeelsituaties als $\frac{x}{y}$ kon zij langs de weg der geleidelijkheid, die het Franse verdelen toch was, met hun uitkomsten $\frac{x}{y}$ in verband brengen. Het zelf bedenken van koffie, die sterker of slapper was dan gegeven koffie, lukte ook nog wel. Soms variëerde zij zelfs een der componenten systematisch met het oog hierop. Bijvoorbeeld sterker dan 3S : 4K; *4S* : 4K; *5S* : 4K; *6 S* : 4 K.
Doch al te dikwijls moest voor Nanja in vergelijkingskwesties worden vastgesteld: 'niet gemaakt', 'niet aan begonnen', of dergelijke. Dat het schematiseren eveneens uiterst moeizaam verliep, zal hieraan niet vreemd zijn.
Wat het vergelijken van verdeelsituaties aangaat, probeerde zij het er niet bij te laten zitten. Zij paste dan een oplossingsmethode toe, die zowel berustte op het schema van de tafelschikkingen als op getekende verdelingen. Een voorbeeld:

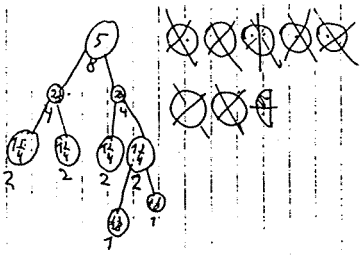


Het ging erom $\frac{14}{8}$ en $\frac{18}{10}$ te vergelijken. De boom voor $\frac{14}{8}$ weet zij niet te voltooien. Met verdelingen – in zekere zin een mengvorm van het globale en het Franse verdelen – lukt het vervolgens wel de uitkomsten te beslissen. Vergelijken blijft verder achterwege. Ook het omgekeerde kwam voor, d.w.z. starten met verdeeltekeningen en tussentijds overschakelen op schema's, bijvoorbeeld vanwege het (te) omvangrijke tekenwerk.
Nimmer kwam Nanja na dergelijk vergelijken tot andere dan kwalitatieve uitspraken omtrent de gevraagde ordening, en ook nog zonder nadere verantwoording. Bijgevolg kon zij dus ook niet betrapt worden op redeneringen, die tegen de vereiste verhoudingsconstantie indruisten. Voor het schematiseren kon dit wel, vanwege het maken van dergelijke fouten in het opsplitsen van de gegeven, of zelf voortgebrachte getallen, bijvoorbeeld:

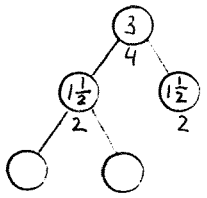


Het greep krijgen op breuk en verhouding – zo luidt de slotsom – voltrok zich uiterst moeizaam. Met name voor het vergelijken van situaties stuitte het leerproces lange tijd op onneembare barrières. Het betrekkelijk gematigd voorkomen van IN-distractorfouten kan voor 'verhouding' hieruit verklaard worden, dat Nanja aan het maken van dergelijke fouten veelal niet toekwam, omdat zij voordat dit kon gebeuren al in het oplossingsproces was vastgelopen.

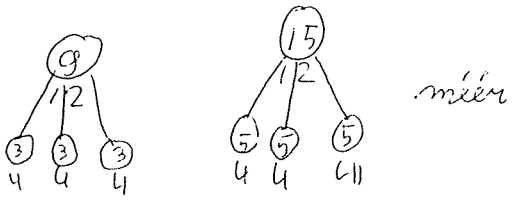
ad 2: voortschrijden in schematiseren
Het voltrekken van redeneringen aan situaties in gesymboliseerde vorm lukte vrijwel niet met Nanja. Een en ander moest wel tot gevolg hebben, dat ook van een behoorlijk schematiseringsproces nauwelijks sprake kon zijn, behalve in geval er enkelvoudige situaties bewerkt werden. Startproblemen zoals anderen die hadden, Michael bijvoorbeeld, kende Nanja vrijwel niet met het schema voor het tafelschikken. Zij begon onmiddellijk met op een betrekkelijk efficiënte manier takken weg te laten. In een interview gaf zij er desgevraagd ook blijk van, ondanks datgene wat hierover onder de vorige indicator vermeld werd, te begrijpen, dat het om gelijk eerlijke tafeltjes ging. Wel had zij het in de aanvangsfase heel erg nodig, het verdelen simultaan ook in visueel materiaal te kunnen voltrekken.



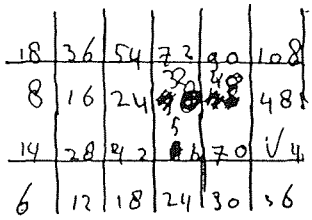
Een maand nadien begint Nanja, behalve het weglaten van takken in eenvoudige gevallen te bezuinigen op het invullen van de tafeltjes, vermoedelijk, omdat zij de uitkomst van de verdeling al weet, bijvoorbeeld:



Weer een maand later probeert zij in voor haar herkenbare gevallen ook eens een driedeling als instap, bijvoorbeeld voor $\frac{9}{12}$. Zij kan dan ook heel eenvoudige vergelijkingskwesties (van verdeelsituaties) aan, mits het na schematisering hooguit op een kwalitatieve ordening aankomt.
Tot verdere ontwikkelingen komt het niet. Lange tijd blijft zij deze schema's visueel ondersteunen. Geen enkele maal slaagt zij erin uitsluitend door middel van dit schema een vergelijkingskwestie tot een goede uitkomst te brengen.



Na verwerking van het computerprogramma weet zij geen uitdrukking te geven aan wat zij ervan geleerd heeft.
Het construeren van verhoudingstabellen had iets overeenkomstigs. Ook hier leek een dergelijke activiteit de beschikbare mentale capaciteit volledig in beslag te nemen. Dat wil zeggen, zij kon best een tabel, bijvoorbeeld voor $\frac{3}{4}$, voortbrengen maar dan meer als doel in zichzelf. Het geconstrueerde vervolgens inzetten voor een verder gelegen doel, daar kwam het niet zo eenvoudig van.
Halverwege het tweede onderzoeksjaar luidde de vraag: zijn $\frac{18}{8}$ en $\frac{14}{6}$ in balans of ...? Zij pakte deze kwestie op de volgende manier aan:



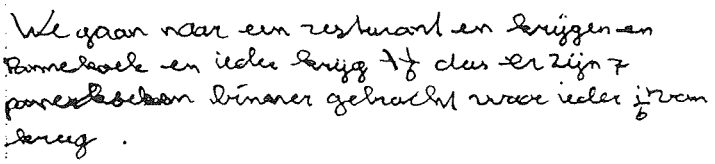
Uit de voortbrenging van getallenparen royaal voorbij $\frac{54}{24}$ en $\frac{56}{24}$, zonder

hiervan gebruik te maken voor een conclusie, blijkt dat Nanja het geconstrueerde schema (nog) niet doeltreffend kan benutten. De gevergde verhoudingsconstantie wordt wèl gerespecteerd. In het vervolg wisselen de tabel en het schema voor het tafelschikken elkaar af in haar werk.
In de slottoets verwerkt zij de vergelijkingskwestie overeenkomstig het zojuist geciteerde, dus correcte toepassing van deze tabellen, zonder verkortingen en met overtollig materiaal. Nog altijd vat zij de daarvoor in aanmerking komende getallenparen niet in het oog en concludeert zij onjuist.
Schematiseren diende dus hecht verbonden te zijn met concretiseren. Hoewel het schematiseren in dienst stond van het realiseren van materiaal op het tweede niveau, was het in zichzelf gekeerd en weinig doeltreffend. Tot de vaststelling van relatieve verschillen in vergelijkingskwesties leidde het toepassen van de verhoudingstabel niet, en het schema van de tafelschikkingen evenmin, althans zonder dat er verdelingen bij werden getekend. Ging het om kwalitatieve ordeningen dan lukte dat in eenvoudige gevallen wel. Die fase had voor haar aanzienlijk langer moeten duren. Het schematiseren met de tafelschikkingen onderging overigens wel enkele verkortingen. Al met al vertoont het schematiseren een heel instabiel beeld. De enige permanentie erin was onmacht.

ad 3: flexibel modelgebruik, schematoepassing (en flexibel rekenen daarbij)
Als enige souplesse kan aan Nanja worden toegekend, dat zij het globale en Franse verdelen wist samen te smeden tot een min of meer eigen methode van verdelen. Raakte zij in een impasse in geval zij verdeelsituaties vergeleek, dan zocht zij een uitweg in het tekenen van verdelingen of in het schematiseren met de tafelschikkingen al naar gelang zij haar startpunt in het schematiseren dan wel in het visualiseren gekozen had. Overige wapenfeiten voor deze indicator vermeldt haar conduitestaat niet.

ad 4: het zich voorstellen van formele problemen
Over deze kwestie kunnen we eveneens kort zijn. Nanja had een schreeuwende behoefte aan concreetheid. Lange mentale draagtijd was nodig om noties van enig duurzaam kaliber te kunnen baren. De vruchtbaarheid van haar geest was kwetsbaar, leek bijtijdse conceptie in de weg te staan.[25]
Aan het zich voorstellen van problemen, op formeel-symbolisch niveau gesteld, was zij bij lange na nog niet toe en zal zij ook niet toekomen, verwachten wij.
Een vergelijkingskwestie in symbolen voor het tafelschikken gesteld, was tot het einde toe te formeel, naar bleek. Wel wist zij op een gegeven ogenblik aan een breuk een zekere betekenis toe te kennen (§ 4.3 p.114), ook wanneer deze opging in een gemengd getal, getuige haar – overigens onvolledige –

verhaaltje bij de monografie voor $1\frac{1}{6}$.



Situaties in contexten en ook de contexten zelf, waarmee Nanja een zekere vertrouwdheid had, moesten eerst ge(re)construeerd worden, voordat zij er iets mee kon. Haar voorstellingsvermogen had als het ware een startmotor buiten haarzelf nodig. Aan een formeel-symbolisch probleem en het zich iets er bij voorstellen kwam zij dus zeker niet toe.

ad 5: eigen constructies en produkties op symbolisch niveau

Nanja ontwikkelde niet die bedrevenheid in het construeren van verdelingen als Margreet, maar dat zij er wel raad mee wist, menen we te hebben laten zien. Ook raakte zij op het symbolische niveau maar moeilijk thuis. Evenals Margreet werd zij in dit opzicht al gauw overvraagd. Desondanks slaagde ook zij erin enige voortgang te boeken.

Na $3\frac{1}{2}$*maand*: vrije produktie

Het opmerkelijkste wapenfeit erin was één spontaan weerlegde IN-distractorfout.

Kenmerkend waren verder:

— het voluit schrijven van enige betrekkingen, bijvoorbeeld: 'een $\frac{1}{2}$ en een $\frac{1}{2}$ = een 1';

— het uitsluitend toepassen van het optellen, met halven, kwarten en achtsten, met

— op één uitzondering na, *geen* schuilnaamgebruik.

In het tweede gedeelte vertoonde haar produktie enige systematiek, namelijk: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$; $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4}$; $\frac{4}{4} + \frac{4}{4} = \frac{8}{4}$; $\frac{8}{4} + \frac{8}{4} = \frac{16}{4}$.

Twee maanden later: exploratie van $\frac{5}{8}$

Het op grond van verdeeltekeningen geconstrueerde schema voor het tafelschikken werd reeds geciteerd. Nanja begon met een globale en deels een Franse verdeling. In de beschrijving ervan is uitsluitend het additieve standpunt vertegenwoordigd. Voor het gaan bezigen van multiplicatieve verbanden moet het verhaal van het Franse verdelen met klemtonen worden gezet: '... de tweede pannekoek ..., hoeveel *keer* heeft ieder nu $\frac{1}{8}$ gehad ...'.

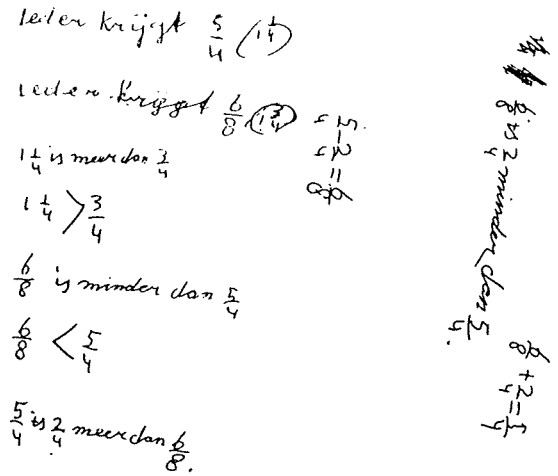
Nanja noteert dan trouwhartig, na 2 p: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$; $2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ ($\frac{2}{8}$).

Voor Nanja zijn uitkomsten nog niet helemaal methode-onafhankelijk. Zij

doet heel verrast wanneer zij met haar schema weer hetzelfde krijgt als na het (globale) verdelen.

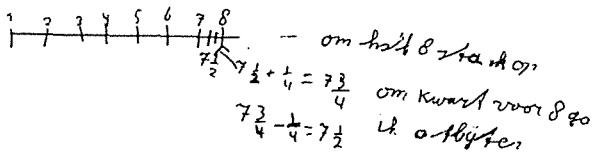
Een maand later: ordeningsmonografie
Het werk van Nanja is van beter gehalte dan dat van Margreet. Zij maakt boompjes voor $\frac{5}{4}$ en $\frac{6}{4}$. In de boom voor $\frac{5}{4}$ laat zij takken weg door middel van doorstrepen. In de boom voor $\frac{3}{4}$ laat zij de laatste tafeltjes open $\bigcirc$. De uitkomst $1\frac{1}{4}$ wordt globaal op de getallenlijn gezet. Wat het 'gelijkmaken' aangaat, deze terminologie verplaatste zij van $\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = 1\frac{1}{4}$ naar $1\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4}$ (invloed van haar omgeving(?)).

Een maand later: opnieuw ordeningsmonografie
Hoezeer het Nanja moeite kostte zich op haar werk te concentreren, blijkt uit deze produktie met correcties:



Voor Nanja een opmerkelijke produktie.

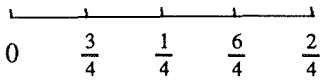
Twee weken later: dagindeling
Nanja kwam tot vier op de tijdlijn weergegeven gebeurtenissen, tussen welke de samenhang in betrekkingen werd vastgelegd, bijvoorbeeld:



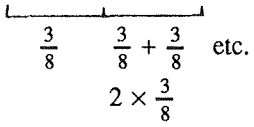
Beide laatste produkties wijzen uit, dat de eenvoudigste breuken van het herhaalde halveren zich tot een toepasbaar systeempje ontwikkeld hebben.

Vijf maanden later: constructieve vulling getallenlijn

Van deze opdracht komt niet veel terecht. Voor de 'bouwsteen' $\frac{3}{4}$ wordt de getallenlijn onjuist ingevuld, namelijk:



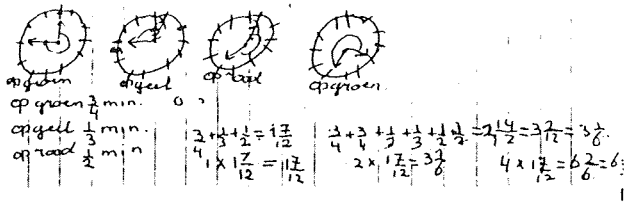
Het gegeven voorbeeld met $\frac{1}{4}$ als bouwsteen had klaarblijkelijk een te lang nabeeld. Er was alleen monografisch materiaal voor $\frac{6}{4}$, namelijk: $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$, $6 \times \frac{1}{4}$, $\frac{7}{4} - \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. Voor $\frac{3}{8}$ verkort zij alleen $\frac{3}{8} + \frac{3}{8}$ tot $2 \times \frac{3}{8}$. Van constructieve vulling van een getallenlijn kan niet worden gesproken. Zij heeft lijnstukken geschakeld, aldus:



Later verbetert het monografisch materiaal wèl enigszins bij dergelijke activiteiten, doch dan beperkt zij zich weer tot het additieve. De impulsen in dit opzicht vanuit het onderwijsleerproces waren voor haar dus ontoereikend geweest.

Vijf maanden later: verkeerslicht

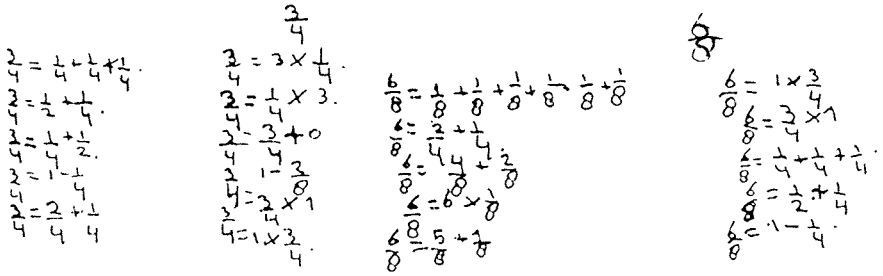
Alras wreekte zich de aanvankelijk te grote abstractie door de te grote distantie tot de context, waarin dergelijke kwesties werden gesteld. Althans voor haar. Alleen al het zich realiseren van de periodiciteit van de lichten vergde de nodige inspanning. Met haar in afzondering moest hierop uitvoerig worden ingegaan; terug naar wijzerplaten voor de respectieve kleuren met passende beschrijvingen.



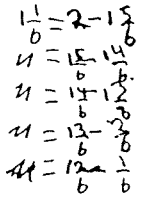
De bewust geworden periodiciteit omzetten in passende berekeningen vormde weer een probleem op zich. Nanja was geneigd het herhaalde optellen in zijn meest primitieve vorm toe te passen. Na de duur in minuten voor twee cycli groen-geel-rood berekend te hebben, wilde zij de duur voor vier cycli berekenen via bijvoegen van de duur van één cyclus en nogmaals.

Ondanks deze extra aandacht maakt zij er een volgende keer weer niets van. Dit treft ook de '$x \times 60$-sommen', om over de eigen produktie in verband daarmee dan maar helemaal te zwijgen.
Kortom, de breuk in de operator is nog niet operationeel voor vraagstukken in symboolvorm.

Vanaf twee maanden later: monografieën
De prestaties waren bescheiden. De monografieën lagen nog dicht tegen het concrete verdelen aan. Onveranderd begon zij met de uiteenlegging van de gegeven breuk volgens het Franse verdelen. Opmerkelijk was eveneens het werken volgens lokale systeempjes, bijvoorbeeld:
$1\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{2}{4}$; $1\frac{1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4}$; $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4} + 0$; $1\frac{1}{4} = 1\frac{1}{4} + 0$.
Om haar werk te kenschetsen nemen we de monografieën van twee gelijkwaardige breuken op waartussen zij verband legde, zoals blijkt:



De systematische produktie van een monografie met de voltallige groep had een zekere invloed op haar werk. De lokale systematiek als produktiemethode won erdoor aan invloed, maar kon tezelfdertijd haar inzichten weer overstemmen.
Bijvoorbeeld: tijdens de produktie van het volgende rijtje ontstond er kennelijk een conflict, gelet op de overgang op een gewijzigde systematiek; correctie bleef echter achterwege.



Haar constructies en produkties voltrokken zich hooguit op het tweede niveau. De vaardigheid in het omgaan met in cijfersymbolen gegeven breuken nam er wel door toe.

Een half jaar later: proefwerk Land van Samen
Er werd al melding van gemaakt hoe diep Nanja poogde met haar denken het geleerde in dit opzicht te peilen (§ 4.3 p.144). Overigens wees de

onderwijsimpressie toch al uit, hoezeer zij juist bij dit werk betrokken was (§ 4.3 p.135, 139). Aannemelijk is, dat zij haar hoop gevestigd had op regels. Daarmee zou zij dit moeilijke gebied wellicht kunnen gaan beheersen. Zij reageerde voorheen ook het meest verontwaardigd van allemaal, toen Kevin zijn regel voor het vermenigvuldigen in de les nog niet mocht prijsgeven.
Hoe zag haar werk eruit? Bescheiden van omvang. Zij gaf een voorbeeld van een uitgewerkte deling:

$$6 : 2 = 3$$

$$\frac{24}{4} : \frac{8}{4} = \frac{12}{4}$$

en voegde er zes vraagstukken aan toe om op dezelfde wijze behandeld te worden plus nog twee aftrekkingen.
Zij gaf één verdeelverhaaltje, een optelling en een vermenigvuldiging, deze laatste volgens de regel uitgevoerd. Aan regels was zij echter nog nauwelijks toe. In de slottoets sloeg zij alle contextloze vraagstukken over.
Het zelf construeren van een methode voor het voltrekken van één van de hoofdbewerkingen leverde niets op.
Al met al komen we tot de conclusie dat de eigen constructies en produkties wel enigszins hebben bijgedragen aan het verticaal mathematiseren in de zin van het constructief vullen van het tweede niveau voor heel simpele breuken, zij het uiterst moeizaam.
In feite vertoefde Nanja nog steeds in het grensgebied van het eerste en het tweede niveau. Tevens lijkt het weinig zinvol gezien haar leerproces te proberen verder met haar te komen.

Samenvatting
In het mathematiseren bleek elk stapje, hoe klein ook, een obstakel. Verliep de verwerving van het breukbegrip al uiterst moeizaam, voor verhouding liep het leerproces zelfs enige tijd vast. De grote boosdoener was het naar verhouding vergelijken van allerlei (verdeel)situaties. Van het schematiseren ging geringe stijgingskracht uit. Over lange periode diende het hecht verbonden te zijn met het concretiseren, was het nog in zichzelf gekeerd en weinig doeltreffend. Het schema van de tafelschikkingen kon Nanja toepassen met het oog op het kwalitatief ordenen van twee (verdeel)situaties in eenvoudige gevallen. Was meer numerieke precisie vereist, dan moest de voortbrenging van het schema visueel worden ondersteund. Wel paste ook Nanja in dit schema de meest gangbare verkortingen toe. Het schematiseren met de verhoudingstabel verkeerde nog in het primitiefste stadium en diende geen ander doel dan zichzelf.
In het visueel ondersteunen van het schematiseren met de tafelschikkingen door middel van getekende verdelingen was een min of meer eigen synthese herkenbaar van het globale en het Franse verdelen, gekenmerkt door distributie van helen voorzover mogelijk en vervolgens het verdelen van de resthelen op z'n Frans. Dergelijk verdelen en het schematiseren voor het tafelschikken werd in deze volgorde of omgekeerd toegepast, afhankelijk van het feit of in

het eerst gekozen oplossingsmiddel zich een onneembaar obstakel voordeed. Dit was nagenoeg de enige souplesse, die zich in haar leerproces voordeed. De dringende behoefte aan concreetheid stond ieder formaliseren in de weg. Wat de constructies en produkties in symboolvorm aangaat, deze waren in zoverre dienstbaar aan het verticaal mathematiseren, voorzover het het constructief vullen van het tweede niveau betrof en dan nog voor het eenvoudigste breukenarsenaal. Nanja verbleef in feite in het grensgebied van het concrete en het tweede niveau. Verder zou men met haar – gezien haar leerproces – ook niet moeten gaan.

Stef (9;10) – (12;2)

Algemeen
Stef was de primus inter pares. Hij was het jongetje dat alles wist, zonder daarbij overigens op een hinderlijke manier betweter te zijn. Weliswaar maakte hij op gezette tijden op een wat storende wijze zijn aanwezigheid kenbaar, maar de facto was Stef een verlegen, wat teruggetrokken jongen, die zich tijdens de individuele interviews heel timide gedroeg.
Hij was de drijvende kracht in het onderwijsleerproces. Van bezieling was echter geen sprake. Deelname aan interactieve lesgedeelten kostte geen moeite, dus dat deed hij volop, naar de onderwijsimpressie weerspiegelde. Echter, zich inspannen op papier was een heel andere kwestie. Dit deed hij maar matig, of eigenlijk liever helemaal niet. Hij was volledig ingesteld op het voldoen aan minimumeisen en zou uit zichzelf nooit eens iets extra's doen, zelfs niet, wanneer hij een aparte behandeling kreeg met aan zijn niveau aangepast werk, wat op gezette tijden het geval was. Dit betekende niet, dat hij onverschillig stond tegenover de probleemgebieden die aangekaart werden.
Verschillende keren sprak hij met een 'Dat vind ik leuk!', zijn waardering uit voor bepaalde contexten of vraagstukken; vooral weg-tijd- en snelheidskwesties boeiden hem. Soms moet hij zich echt intens verveeld hebben, wanneer het onderwijsleerproces zich maar moeizaam voortsleepte; dit stak hij dan ook niet onder stoelen of banken.
Hoewel er ongetwijfeld van een leerproces gesproken kan worden bij hem, doorzag hij de dingen veelal zo snel, dat het erop leek, alsof met het gegeven onderwijs werd afgetast, wat hij al lang wist en kon. Hij had een krachtige wiskundige attitude in de door Freudenthal beschreven betekenis.[26]
Hij nam bijvoorbeeld onjuiste zienswijzen of beschouwingen van medeleerlingen over, redeneerde daarop consequent door om tot een tegenspraak te geraken; zijn probleemoplossingsgedrag kenmerkte zich door systematiek, hij generaliseerde snel, maar strafte in dit opzicht voorbarige standpunten van anderen onmiddellijk af, zoals bijvoorbeeld de regel voor het delen in het Land van Samen, ontwikkeld voor gelijknamige getallen (§ 4.3 p.139). Hij kon adequate methoden bedenken om problemen aan te pakken, zoals de touwtjesmethode voor het meten van de wandelroute op de plattegrond van

'Gooilust'. Hij kon ogenschijnlijk moeiteloos uiteenlopende visuele modellen met elkaar in verband brengen (§ 4.3 p.104) , het schema voor de tafelschikkingen tot algemene methode verheffen door het toepasbaar te verklaren voor verwante en nieuwe vraagstukken. Ook met procedures in symboolvorm kon hij gemakkelijk overweg. Kortom, Stef was all-round. In alles was hij goed: analyseren, verbaliseren, generaliseren, problemen omkeren, vereenvoudigen, etc. De algemene indruk was en bleef echter: wat verstrooid en liever lui dan moe. Dit bleek ook uit de resultaten voor de CITO-eindtoets, waarop hij voor taal, rekenen en informatieverwerking beneden zijn stand resp. de percentielen 77, 84 en 90 scoorde. Van de 27 opgaven voor breuken e.d. in het onderdeel rekenen had hij er 26 goed. In de afscheidsmusical was hij te gast in het inmiddels beruchte hotel als schatrijke oliesheik uit het Golfstatenimperium. Hij speelde die rol verrassend. Daarna schaarde hij zich onder de brugklassers van een scholengemeenschap voor HAVO/VWO.

Specifiek

ad 1: begripsverwerving en IN-distractoren

Noties voor breuk en verhouding werden snel gevormd en waren in korte tijd, zo niet van stonde af aan operationeel. Het herhaald halveren beheerste hij in symboolvorm na minder dan tien lessen (§ 4.3 p.124), het vergelijken, ordenen en verschil bepalen van verdeelsituaties als $\frac{3}{5}$ en $\frac{5}{8}$ na minder dan twintig lessen. Hij begreep aanvankelijk als enige, dat het in dergelijke en andere situaties om een relatief standpunt ging (§ 4.3 p.110). Bijgevolg was hij bijvoorbeeld in staat zuinig en systematisch nieuwe verhoudingen onder zekere voorwaarden te genereren, mede doordat hij al heel gauw in equivalenties kon denken en daarvan de mogelijkheden doorzag o.a. in dienst van het opereren.

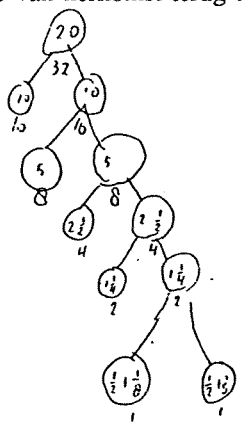
Voor IN-distractorfouten was er in zijn denken geen plaats. Deze heeft hij dan ook niet gemaakt, sterker nog, het kostte hem moeite de gedachtengang te reconstrueren die tot een dergelijke fout geleid had. Dit kwam omdat zulk een redeneertrant volkomen wezensvreemd was aan zijn eigen denken in dit opzicht.

ad 2: voortschrijden in schematiseren

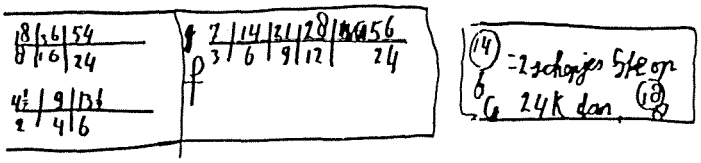
De mogelijkheden tot verkorten van het schema voor het tafelschikken werden snel doorzien, alsook de toepassingsmogelijkheden ervan. Reeds één week nadat het schema tot ontwikkeling was gekomen, werden niet alleen takken gekapt, maar ook de meervoudige instap toegepast om snel over uitkomsten te kunnen beschikken. Het niet invullen of het weglaten van overtollige tafeltjes komen daar dan nog als verkortingen bij.

Stef paste het schema gedurig efficiënt toe. Hij was ook in staat zelfstandig met dit schema terug te redeneren en door reconstructie een 'tafeltje van één'

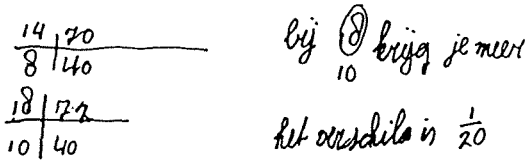
tot zijn mogelijke situatie van herkomst terug te voeren.



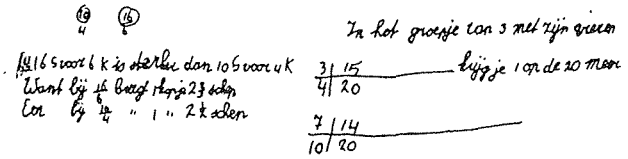
N.B. Indien bijgaand voorbeeld een rechtstreekse constructie was, dan zou Stef ongetwijfeld met een vierdeling begonnen zijn.
De omschakeling op de verhoudingstabel was een uitkomst voor hem. Hoewel hij in incidentele gevallen het boomschema bleef toepassen, ging zijn voorkeur onmiskenbaar naar de verhoudingstabel uit. Ook hiermee voltrok het schematiseringsproces zich voortvarend. Vrijwel vanaf het begin construeert Stef zo kort mogelijke tabellen in die zin, dat hij naar die getallenparen toewerkt, die in één component overeenstemmen. Vervolgens is er een korte periode waarin hij ook enkele 'tussenstappen' overslaat, bijvoorbeeld:



Stefs conclusie: $\frac{14}{6}$ is 2 schepjes sterker op 24 kopjes dan $\frac{18}{8}$. Daarna werkt hij vrijwel steeds met uiterst verkorte tabellen, d.w.z. de gegeven getallenparen worden rechtstreeks omgezet in direct vergelijkbare, dus in één component overeenstemmend, bijvoorbeeld:

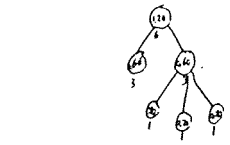


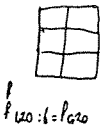
Na enkele maanden wisselt hij uiterst verkorte tabellen af met rechtstreekse berekeningen:



Vanaf de geregelde toepassing sinds het einde van het eerste onderzoeksjaar doorziet Stef allerlei relaties in de tabel en verwoordt die, bijvoorbeeld aangaande de relatieve toename van het verschil tussen de aantallen schepjes en kopjes in een koffiesterktetabel.
Er ging dus een geweldige stijgingskracht van de ontwikkelde schema's uit en Stef wist er uiterst efficiënt mee om te gaan, met name met de verhoudingstabel. In dit opzicht was het leerproces stabiel.

ad 3: flexibel modelgebruik, schematoepassing (en flexibel rekenen daarbij)
Het beschouwde leerproces was welhaast optimaal, ook op dit punt.
In het algemene gedeelte werden al enkele wapenfeiten vermeld, zoals:
— het moeiteloos met elkaar in verband brengen van verschillende visuele modellen;
— het verruimen van de toepassingsmogelijkheden van het schema voor de tafelschikkingen; hij paste het spontaan toe op koffiesterkte-situaties, weg-tijdkwesties en aantal-prijsproblemen.
Tevens hebben we laten zien, dat er van het schematiseren een geweldige stijgingskracht uitging. Hij wist de ontwikkelde wiskundige werktuigen in allerlei situaties naar zijn hand te zetten, ook wanneer dit voor niemand anders voor de hand lag, bijvoorbeeld:

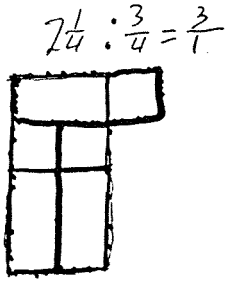




Het betreft de prijs van een glas melk uit een fles à f 1,20 van zes glazen.

ad 4: het zich voorstellen van formele problemen
Stef was de enige voor wie het progressief mathematiseren van de breuken vrijwel, maar niet helemaal, voltooid was. Hij was toe aan een formele beschouwing van de rationale getallen. Het IN-distractorgeval $\frac{7}{8} = \frac{5}{5} - \frac{2}{3}$

ontkrachtte hij bijvoorbeeld door te stellen dat de uitkomst $-\frac{1}{8}$ moest zijn. Gedurende het gehele leerproces bleek een zekere bedrevenheid in het weergeven in symbolen van operaties en uitkomsten, voltrokken en voortgebracht binnen contextsituaties. Omgekeerd kon hij vlot betrekkingen in symboolvorm beoordelen op hun betekenis binnen een bepaalde context.
Tijdens de voorbereiding van de eigen produktie van het dagverhaal bijvoorbeeld, handelde het op zeker moment om twee gebeurtenissen verbonden met de tijdstippen kwart voor zeven ($6\frac{3}{4}$) en kwart over acht ($8\frac{1}{4}$). De leraar vraagt om een betrekking die het interval tussen beide tijdstippen tot uitdrukking brengt.
Stef oppert $6\frac{3}{4} + \ldots = 8\frac{1}{4}$. Desgevraagd bedenken Margreet en Delilah er minsommen voor: $8\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2} = 6\frac{3}{4}$ en $8\frac{1}{4} - 6\frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$. Stef merkt dan op dat de leraar vroeg naar de verstreken tijd, dus geeft hij Delilah gelijk met haar gelijkheid.
Van de deling $2\frac{1}{4} : \frac{3}{4} =$ gaf hij desgevraagd de volgende voorstelling.



Dergelijke opdrachten waren gezien zijn leerproces al gauw wat achterhaald, omdat hij zich in het wereldje van de symbolen *zonder meer* ook heel gemakkelijk kon bewegen. Dit bleek bijvoorbeeld hieruit, dat hij opgaven als $2\frac{1}{4} + 1\frac{2}{3} = 3\frac{11}{12}$, $2\frac{1}{4} - 1\frac{2}{3} = \frac{7}{12}$ of $1\frac{2}{3} \times 1\frac{1}{4} = \frac{45}{12}$ uit het hoofd uitrekende, zonder tussenkomst van visueel materiaal of notaties tijdens de oplossing. Tenslotte vermelden we wat deze kwestie aangaat nog zijn monografie voor $1\frac{1}{6}$. Als laatste betrekking had hij daarin $1\frac{1}{6} = 28 \times \frac{1}{24}$, dus werd zijn verhaaltje voor $1\frac{1}{6}$ '28 pannekoeken verdelen met 24 kinderen'. Aan een formeel symbolische uitdrukking kon Stef dus zonder veel inspanning betekenis verlenen.

ad 5: eigen constructies en produkties op symbolisch niveau
Mede gelet op de algemene karakteristiek die we van Stef hebben gegeven, mogen geen indrukwekkende bijdragen van hem verwacht worden.

Uit het voorgaande sprak duidelijk, dat hij in het denken op symbolisch niveau al ras goed thuis was, gezien het gemak waarmee hij allerlei opgaven van buiten maakte. Gespecificeerd naar de diverse onderdelen zag zijn leerproces er als volgt uit.

Na $3\frac{1}{2}$ *maand*: vrije produktie

Deze profileerde zich door:

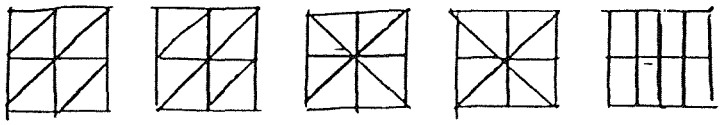
— toepassen van het optellen en aftrekken, ook in gedurige vorm, bijvoorbeeld: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{4}{8} - \frac{5}{8} + \frac{2}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$ $(\frac{6}{8})$ met

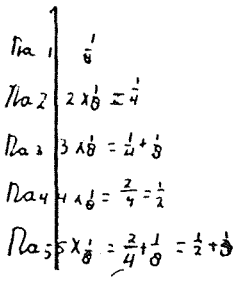
— halven, kwarten en achtsten, onder

— het veelvuldig tweezijdig toepassen van schuilnamen.

Twee maanden later: exploratie van $\textcircled{5}_{8}$

Van de Franse verdeling maakt Stef een mooi plaatje:





Aan monografisch materiaal heeft hij uitsluitend multiplicatieve betrekkingen, waarin hij de uitkomsten systematisch in vereenvoudigingen onderbrengt.

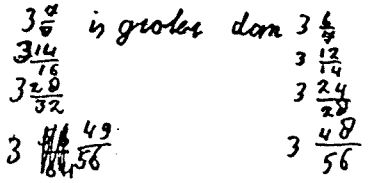
Een maand later: ordeningsmonografie

Vergeleken met de anderen is Stef het meest volledig in zijn monografie door uit '$1\frac{1}{4}$ is $\frac{1}{2}$ meer dan $\frac{3}{4}$' betrekkingen in twee versies af te leiden, namelijk $1\frac{1}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4}$, $\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = 1\frac{1}{4}$ en $\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}$. De beide laatste voorziet hij van de aanduiding 'gelijk maken'.

Op dezelfde dag weet hij de situaties $\textcircled{3}_{5}$ en $\textcircled{5}_{8}$ te ordenen en het verschil te bepalen (§ 4.3 p.124).

Ook in volgende ordeningsmonografieën werkt hij de ordeningsuitspraken die hij doet zo volledig mogelijk uit in passende betrekkingen. Halverwege het

tweede onderzoeksjaar bedenkt hij zelf de volgende:

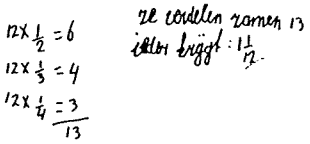


Anderhalve maand later: eigen produktie dagindeling
Stef komt aan slechts enkele gebeurtenissen toe met tijdstippen in halven en kwarten, die hij volledig (sommen en verschillen op twee manieren) in betrekkingen uitwerkt, waardoor het toch nog een produktie van redelijke omvang wordt.

Vijf maanden later: constructieve vulling getallenlijn
Naarmate het werk vordert gaan de multiplicatieve verkortingen overheersen. Er is sprake van correcte toepassing van de getallenlijn. Het werk heeft wel iets plichtmatigs. In de monografie met bouwsteen $\frac{3}{8}$ past hij geen enkele schuilnaam toe en zet hij de uitkomsten $\frac{9}{8}$, $\frac{12}{8}$ etc. niet om in gemengde getallen.
Ondanks de extra opdrachten die hij kreeg, was het aanbod grotendeels beneden zijn niveau. Met de breuken van het herhaald halveren kon hij inmiddels lezen en schrijven, dus had het werken ermee op de geschetste wijze niet zò veel zin meer. Het was namelijk in dezelfde periode dat hij ook al constructies voor bijvoorbeeld $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ kon bedenken (§ 4.3 p.122).

$3\frac{1}{2}$ *maand later*: reconstructie verdeelsituatie

Het ging om een portie van $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. Stef reconstrueerde een mogelijke situatie van herkomst op de volgende manier:

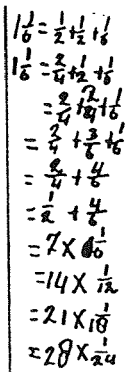


Merk op, hoe hij eerst begon met het noteren van de porties en al doende op andere gedachten kwam.

Na twee weken: verkeerslicht
Voor het verkeerslicht ($\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$) noteert Stef rechtstreeks de tafelprodukten met vereenvoudigde uitkomsten correct. Hij houdt daarbij de volgorde $1\frac{11}{12} \times 1$, $1\frac{11}{12} \times 2$ etc. aan. Aan eigen produktie van de '$x \times 60$'-vraagstukken leverde hij een bescheiden bijdrage, namelijk $\frac{1}{12} \times 60$ tot en met $\frac{3}{12} \times 60$ en

overeenkomstige rijtjes beginnend met $\frac{1}{10}$ en $\frac{1}{20}$. Tekenend voor zijn instelling was echter het rijtje $\frac{1}{1} \times 60 = 60$; $\frac{2}{1} \times 60 = 120$ en $\frac{3}{1} \times 60 = 180$.

Vanaf twee maanden later: monografieën
Stefs produkties waren eenzijdig en kenmerkten zich door:
— overheersende toepassing van het optellen en vermenigvuldigen; aftrekkingen kwamen sporadisch voor en het delen helemaal niet;
— tweezijdige toepassing van schuilnamen en
— het veelvuldig toepassen van de eigenschap, dat een produkt invariant is, wanneer men in een vermenigvuldiging van twee factoren de ene halveert en de andere verdubbelt .
Wel slaagde hij er vanaf het begin in een zekere systematiek in zijn produktiemethoden te brengen, bijvoorbeeld:



Een half jaar later: proefwerk Land van Samen (LvS)
Vergeleken met die van anderen is de omvang van Stefs produktie omgekeerd evenredig met zijn mogelijkheden. Hij bracht elf vraagstukken in symboolvorm voort, namelijk drie optellingen en twee opgaven met elk van de overige hoofdbewerkingen en twee schuilnaamopgaven, bijvoorbeeld $3 = \frac{?}{12}$, opgaven met echte LvS-getallen èn breuken, die hij zelf ook maakte, bijvoorbeeld $\frac{6}{3} : \frac{1}{4} = \frac{8}{1}$; $\frac{18}{3} : \frac{1}{8} = \frac{96}{2}$.
Voor het overige bracht hij nog een vertaalopdracht op van 'onze' getallen naar het LvS en tenslotte een mooi vergelijkingsvraagstuk:

Jan schaatst 20 km in 30 min
en Piet schaatst 30 km in 40 min Wie rijdt er harder en hoeveel

Voor alle vier de hoofdbewerkingen vond hij eigen methoden, zij het dat hij voor het delen pas echt goed op het spoor kwam door de gezamenlijke activiteit in verband met het LvS (§ 4.3 p.134), terwijl hij dit voor de overige bewerkingen zelfstandig deed. Omdat hij snel de mogelijkheden van het

omzetten in equivalenties doorzag, voltrok hij het vergelijken, ordenen en verschil bepalen op grond daarvan zelfstandig en naar analogie daarvan het optellen.
Zijn methode voor het vermenigvuldigen wortelde in verdeelsituaties (tafeltjes) en concreet verdelen, bijvoorbeeld $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ via $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} : 3 = \frac{1}{4}$, dus $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$, waarbij in een eerder stadium de tafeltjesnotatie bemiddelde om het denken te ondersteunen. Dat het proces van het formaliseren nog niet helemaal voltooid was, bleek uit de slottoets, waarin hij de contextloze vermenigvuldigingen volgens de regel deed en in een toepassingsvraagstuk over oppervlakte zijn 'oude' methode van distributie toepaste: $2\frac{1}{2} \times 1\frac{3}{4} = 3\frac{1}{2}\ (2 \times 1\frac{3}{4}) + \frac{7}{8}\ (\frac{1}{2} \times 1\frac{3}{4}) = 4\frac{3}{8}$. Bovendien maakte hij twee van de drie delingen inzichtelijk en paste hij voor de laatste deling een onjuiste regel toe.

Samenvatting
Het horizontaal en verticaal mathematiseren voltrok zich vrijwel rimpelloos. Van meet af aan beschikte Stef over een zodanig krachtig vermogen tot het in relatie tot elkaar beschouwen van grootheden en grootheidswaarden, dat hij zich de begrippen breuk en verhouding moeiteloos eigen maakte. Van het maken van ℕ-distractorfouten was dan ook geen sprake. Het proces van schematiseren werd voortvarend aangepakt. Er ging een aanzienlijke stijgingskracht van uit. Stef bereikte sneller dan wie ook vrijwel de hoogste graad van efficiency in het toepassen van beide schema's en doorzag alle relaties die het voortgebrachte materiaal op het tweede niveau beheersten. Zijn leerproces was ten aanzien van het schematiseren een toonbeeld van stabiliteit en wat het gebruik van modellen en schema's aangaat een toonbeeld van wendbaarheid.
Het leerproces weerspiegelde eveneens een zeker gemak, waarmee het denken zich bewoog van toepassingssituatie of context naar formule en omgekeerd, als ook binnen het formeel-symbolische systeem zelf. Het gemak waarmee na het eerste onderzoeksjaar allerlei bewerkingen uit het hoofd konden worden uitgevoerd, bevestigt het tweede deel van voorgaande uitspraak. Bovendien blijkt er de beschikbaarheid van een ruim bemeten werkgeheugen uit, aangezien bemiddelende tussenresultaten slechts mentaal werden geparkeerd en niet op schrift.
De eigen constructies en produkties op symbolisch niveau weerspiegelden nog het sterkst de zuinigheid waarmee Stef met zijn mentale krachten omsprong. Tijdens de tweede helft van het onderzoek hadden deze produkties overigens weinig betekenis meer voor het progressief mathematiseren, omdat voor hem toen al het derde niveau ruimschoots in ontginning was. Met name het voortbrengen van monografieën was voor hem niet meer dan toepassingsarbeid. Alleen voor het vermenigvuldigen en delen had het formaliseren zich nog niet tot in alle finesses voltrokken. Overigens zijn we

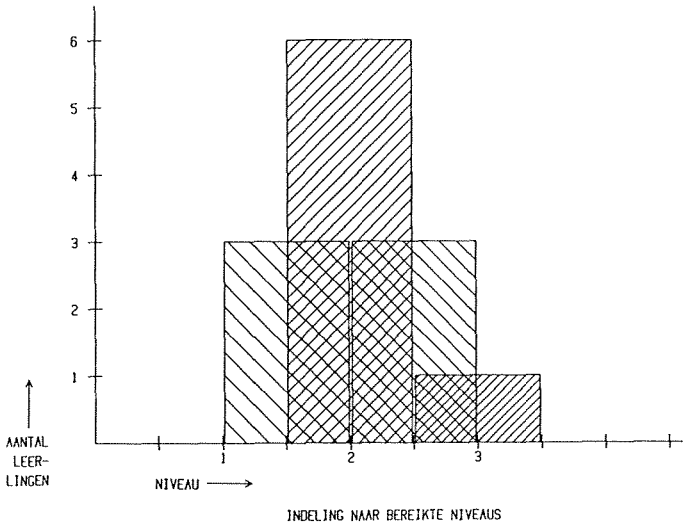
van mening dat met name Stef van de gemiddelde zwakte van de groep het slachtoffer is geworden. In een bekwame groep, waar een veel efficiënter onderwijsleerproces mogelijk zou zijn geweest, zou zijn leerproces nog veel aan sterkte en diepgang hebben kunnen winnen. Iedere uitdaging en competitie ontbrak nu.

5.4 Overzicht en uitzicht

De realisering van de beoogde 'groepsfoto met leerproces' is dan eindelijk een feit, of beter het materiaal op grond waarvan een groepsportret samenstelbaar wordt.
In hoofdstuk 4 werd het onderzoekskader voor de leerlingen geschetst, afgerond met een reflectie daarop met het oog op het mathematiseren (§. 4.4). In dit hoofdstuk volgden dus de individuele mathematiseringsprocessen, terwijl in de twee hierna volgende hoofdstukken de voltrokken standpuntverandering van onderwijsproces naar leerproces zal worden voltooid met een omzien naar het onderwijs in verband met de vraag naar de effecten ervan op de lange termijn.
Het zesde hoofdstuk richt zich in dit verband op een *interne* beschouwing, gericht op lengtedoorsneden van onderwijsproces en individuele leerprocessen op grond van vragen als: 'Wat heeft er gewerkt van het voorgestelde onderwijsaanbod?', of anders gezegd: 'Welke methoden en technieken sloegen bij de leerlingen aan voor hun breukenonderzoek?'
In het zevende hoofdstuk zal op grond van een *externe* beschouwing nogmaals op de effecten van het onderwijs worden ingegaan, door de prestaties van de onderzoeksgroep op een daartoe samengestelde toets te vergelijken met die van groepen leerlingen die met hetzij mechanistische hetzij met breukenprogramma's met realistische trekken zijn opgeleid.
Ook de resultaten van de CITO-eindtoets basisonderwijs 1986 zullen hiertoe dienen.
Wat hoofdstuk 6 aangaat zal tevens in het oog worden gevat in welke mate van gedifferentieerdheid zich het leerproces van de hele groep voltrokken heeft. Daarmee wordt dan ook de tweede betekenis van 'realistisch' in de titel van deze studie nader omschreven, namelijk wat in de aanloop naar onze probleemstelling als '... na te gaan hoe ver men met een jaargroep kinderen uit het basisonderwijs zou kunnen komen' naar voren werd gebracht (§ 2.3).

Welnu, vooruitlopend op een nadere uiteenzetting daarvan, geven we van de geobserveerde leerprocessen – bij wijze van samenvatting – een globaal overzicht. Afgestemd op de onderscheiden niveaus laat de groep zich op de

volgende wijze indelen:



Indeling naar bereikte niveaus op het moment van afronding van het onderzoek

Naar de leerlingportretten uitwezen kan het tweede niveau voor Kevin, Margreet en Nanja tevens eindniveau zijn. Zij onderhielden immers nog overduidelijk een pendel tussen de beide eerste niveaus in hun leerprocessen. Zes leerlingen waren er die zich betrekkelijk onbelemmerd op het tweede niveau bewogen met verbindingen naar het derde, zij het dat voor dit zestal – Alwyn, Carlien, Helga, Henk, Mark en Michael – zich in dit opzicht graduele verschillen in omvang en diepgang van bedoelde verbindingen met het derde niveau aftekenden. Zo onderhielden Mark en Michael betrekkelijk prille en broze connecties met het derde niveau, zich nog beperkend tot de kwestie van de equivalentie. Voor de overigen lagen deze verbindingen er duidelijker en zij – wellicht inclusief Mark – zouden de verdere formalisering van het systeem in een vervolgonderwijsleerproces kunnen voltrekken. Voor Michael maken we hierop een uitzondering, vanwege de vele obstakels die hij op zijn leerweg ontmoette.
Een volgende drietal – Clara, Frans en Marja – begon op het derde niveau al goed thuis te raken, waarmee niet gezegd wil zijn, dat hun leerprocessen in formaliserend opzicht al voltooid waren.
Tot eenzame hoogte tenslotte, reikte Stef. Op enkele kleine nuances na legde hij het derde niveau mentaal aan banden.

Noten hoofdstuk 5

1. Zie Streefland (1986).
2. Zie Streefland (1985) en (1986a).
   In genoemde publikaties wordt verwezen naar het werk van een hele reeks onderzoekers die aan dit verschijnsel aandacht hebben besteed. Enkelen van hen zijn: K.M.Hart (Engeland), R.Karplus (USA), G.Noelting (Canada) en G.Vergnaud (Frankrijk).
3. Zie Streefland (1985c) en (1986a).
   Het ingenomen standpunt wordt ondersteund door het werk van Noelting (1980), waarin uit protocollen van eenzelfde leerling valt af te leiden, dat in het ene geval een hoogwaardige verhoudingsredenering wordt gegeven, terwijl in het volgende geval voor een onjuiste additieve redenering wordt gekozen.
   Behalve de getallen kunnen ook andere aspecten van een probleem het inzicht van kinderen in de weg staan. Zo kritiseert Karplus (1979), natuurkundige van origine, Piagets theorievorming op het gebied van verhoudingen en het (lineaire) functiebegrip, vanwege de fysische complexiteit van Piagets vraagstellingen in het onderzoek, waarop die theorievorming was gebaseerd. Zie ook hoofdstuk 4, noot 51.
4. Streefland (1983a).
5. Zie Treffers (1987b) en Streefland (1985b).
   Het leren vermenigvuldigen volgens het progressief schematiseren van het herhaalde optellen kan resulteren in een standaardalgoritme voor cijferend vermenigvuldigen onder elkaar. Zie Treffers (1987b).
   Het leren aftrekken van ongelijknamige breuken volgens het progressief schematiseren met verhoudingstabellen kan resulteren in de standaardalgoritme volgens de kgv-methode. Zie Streefland (1983a) (1986d).
   De kwestie van het bestaan van informele oplossingsmethoden en de kracht ervan en de noodzaak tot aansluiting van het wiskundeonderwijs daarbij geniet een toenemende aandacht in de onderzoeksliteratuur.
   Zie in dit verband bijvoorbeeld Carraher (1986), Hart (1985), Streefland (1985c) (1986a,b), Ter Heege (1987), Treffers (1987b) en Van den Brink (in voorbereiding).
6. Zie Treffers (1987c).
7. Krutetskii (1976).
8. In verband met het visualiseren ter ondersteuning van het oplossen van wiskundige vraagstukken constateren Dreyfuss/Eisenberg (1986) ook een dergelijke tweedeling.
9. Freudenthal (1986)
   We sluiten ons met deze keuze bovendien aan bij Dreyfuss' en Eisenbergs conclusie aangaande het visualiseren bij het oplossen van wiskundevraagstukken. Zij bevelen namelijk aan: '... developing every topic with its analytical as well as with its visual aspects ...' (loc.cit.p.158).
10. § 3.2.
11. Freudenthal (1984) onderscheidt in zijn didactische fenomenologie verhoudingen *binnen* grootheden en *tussen* grootheden, resp, intern en extern genoemd. A. vergeleek $\textcircled{5}_{4}$ als paar met $\textcircled{5}_{8}$ en niet 5 met 5 en vervolgens 4 met 8. In het laatste geval zou hij op interne verhoudingen vergeleken hebben. Zie ook hoofdstuk 4.
12. Zie voor bedoelde eigenschappen Streefland (1985c) en Kirsch (1969).
13. Een van de toegangen tot het optellen van breuken was de beschouwing ervan als de inverse van het aftrekken. Voor de leerlingen kwam dit neer op het rechttrekken van vastgestelde verschillen in vergelijkingsvraagstukken, door hen ook wel 'gelijk maken' genoemd.
14. Zie Streefland (1984d).
15. Zie in dit verband bijvoorbeeld Bell e.a. (1981).
16. Zie Streefland (1984b)(1985c).
17. Zie Streefland (1985c).

18. Zie Streefland (1983a).
19. Zie in dit verband Streefland (1986f).
20. Zie Streefland (1985c).
21. Freudenthal (1973).
22. Zie Streefland (1986f).
23. Zie Piaget e.a. (1966) en Streefland (1979).
24. Zie Streefland (1978).
25. Beeld ontleend aan Thom (1973).
26. Zie voor de interpretatie van wiskundige attitude Freudenthal (1978).

6 Interne evaluatie van het leerproces

6.1 Inleiding en overzicht

In hoeverre zijn de geobserveerde en beschreven individuele leerprocessen door het gegeven onderwijs bepaald? En om welke kwaliteiten van deze leerprocessen gaat het dan? In welke opzichten is de leergang voor verbetering vatbaar?
Dat zijn kortweg de vragen waarop we ons hier richten.
Een belangrijke kwestie daarbij is met name de aard van de voortgang in het leerproces. Om die reden komt ons een analyse van de opbrengst van enkele in de tijd gespreide metingen als te grofmazig voor. Beslissende veranderingen in het (verticale) mathematiseringsproces kan men dan over het hoofd zien. Bovendien is zulk een opbrengst in de beschrijving van de leerlingportretten reeds grotendeels verwerkt. Ook worden enkele van bedoelde metingen, namelijk die met de ontwikkelde slottoets en de CITO-eindtoets 1986 voor het basisonderwijs op het onderdeel rekenen, in het vergelijkende deel van het onderzoek afzonderlijk beschouwd (hoofdstuk 7).
De aandacht richt zich hier dus op de gedurige voortgang van, dan wel stagnatie in het leerproces op lange termijn, door – o.a. – alle gedane constructies en produkties van de leerlingen in het oog te vatten en in ieder geval te voorkomen, dat een en ander door onvolledigheid vertekend zou worden weergegeven. Ook de mate waarin het leerproces van de groep zich differentieerde is daarbij van belang.
Als leidraad voor de voorgenomen evaluatie doen de indicatoren dienst, die als beschrijvingskader voor de individuele leerprocessen werden gebruikt (§ 5.2). Dit beschrijvingskader staat op zijn beurt weer in verbinding met de clusters van activiteiten, die de bouwstenen voor de globale leergangschets vormden (§ 4.2). Achtereenvolgens wordt het langlopende leerproces naar bedoelde indicatoren beschouwd (§ 6.2 t/m 6.6).
In deze interne evaluatie zal ook het niveautheoretische constructiemodel van § 3.2 aan een nader onderzoek worden onderworpen (§ 6.7). Met name op het onderscheiden niveau van de leergang kan dit model worden verfijnd, dan wel toegelicht, vanwege het zicht, dat met de interne evaluatie op het verticaal mathematiseren verkregen wordt.
Bij wijze van samenvatting zal op enkele meer algemene kwaliteiten van de individuele leerprocessen worden ingegaan, zoals (in)stabiliteit, het behandelen van impasses in oplossingsprocessen door de leerlingen en niveaureducties in verband daarmee[1] (§ 6.8). Tevens zal dan een overzicht van de consequenties van deze evaluatie voor de ontwikkelde leergang daarin worden opgenomen.

6.2 Het zwichten voor IN-distractoren en het opbouwen van weerstand ertegen

Naar de beschrijving van de individuele leerprocessen uitwees (§ 5.3) was deze indicator een krachtig, zij het indirect middel, om de hechtheid te duiden, waarmee een leerproces in het concrete eerste niveau lag ingebed en ook wel moest zijn in geval er van dit euvel sprake was. Het (te) voorbarig loskomen van de concrete bronnen door deze uitsluitend in symbolen te representeren had fouten op grond van dit verschijnsel tot gevolg. Het geleerde in verband met het rekenen met natuurlijke getallen en de 'zuigkracht' die daarvan uitgaat, ligt eraan ten grondslag, gepaard aan een breukbegrip in wording dat hiertegen nog niet is opgewassen. In de onderzoeksliteratuur worden dergelijke fouten veelvuldig gerapporteerd.[2]
In een langlopend individueel leerproces kunnen, naar de leerlingportretten uitwezen, vijf *niveaus van weerstand* tegen IN-distractoren worden onderscheiden.

Niveaus van weerstand tegen IN-distractoren

1. *Cognitief Conflict blijft uit (– CC)*
   De leerling raakt niet in een cognitief conflict in geval er met elkaar conflicterende uitkomsten op een en dezelfde vraagstelling zijn voortgebracht. Dit komt omdat de op verschillend niveau verkregen oplossingen als *methode-afhankelijk* worden beschouwd.
   Bijvoorbeeld:
   Een leerling beslist tot $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, terwijl hij daarna op grond van een verdeling op $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ uitkomt. Vanwege de verschillende methoden worden beide uitkomsten (als juist) aanvaard.[3]

2. *Cognitief Conflict voltrekt zich (+ CC)*
   De leerling raakt wel in een cognitief conflict, wanneer hij voor het onder punt 1. beschreven dilemma geplaatst wordt. De IN-distractoroplossing wordt dan alsnog als onjuist verworpen. Oplossingen worden als methode-onafhankelijk beschouwd.

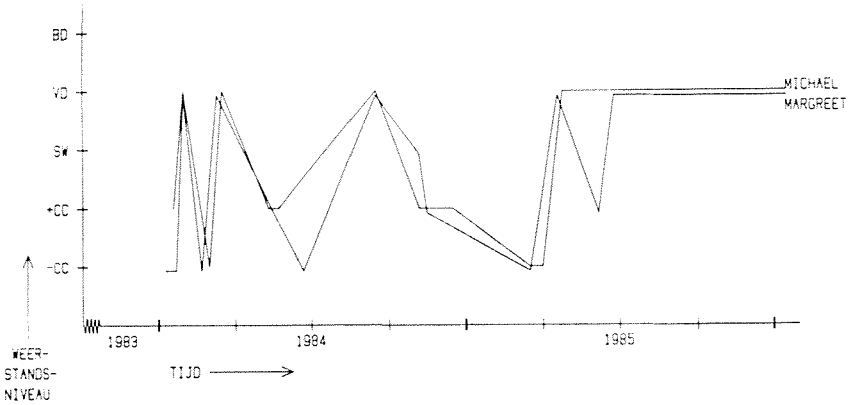
3. *Spontane weerlegging van IN-distractorfout (SW)*
   De leerling neigt – tijdens een interview of in schriftelijk werk – tot een IN-distractorfout of maakt een dergelijke fout en komt met zichzelf in conflict en weerlegt vervolgens spontaan deze fout. Deze weerlegging kan de vorm aannemen van afwijzing van de gemaakte fout zonder meer of afwijzing op grond van argumentatie en/of restauratie.

4. *Vrij van IN-distractoren (VD)*
   Het (schriftelijk) werk is vrij van IN-distractorfouten.
   Opmerking:

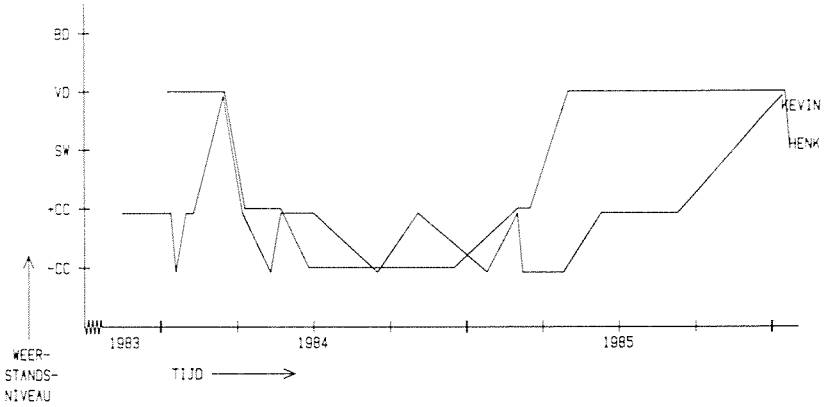
In geval zich wèl IN-distractorfouten in het werk voordoen, die niet op SW-niveau kunnen worden gescoord, zullen deze worden aangeduid met + CC of – CC, afhankelijk van wat interviews naar aanleiding van die fout(en) uitwezen.

5. *Bestand tegen IN-distractoren (BD)*
   De leerling is onder alle omstandigheden bestand tegen IN-distractoren. In geval het beschouwde verschijnsel zich in een individueel leerproces vanaf zeker moment niet meer voordoet, terwijl dit daarvoor wèl het geval was, zal de betrokken leerling vanaf *een jaar* nadien op BD-niveau worden ingeschaald. Met name de spreiding in de tijd van het vergelijken van situaties op relatieve verschillen in het onderwijsleerproces noopt tot zo'n lange periode.

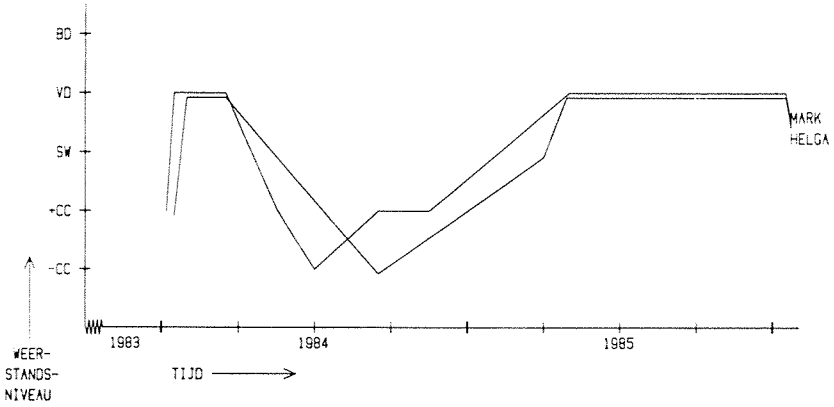
Grafisch beeld; onderwijsleerproces en leergang
Op grond van voorgaande niveaus, die een duidelijke toename in weerstand weerspiegelen tegen het beschouwde verschijnsel en waarmee de hechtheid van het verworven mentale object 'breuk' gelijke tred houdt, is het nu mogelijk het leerproces van iedere leerling grafisch in beeld te brengen.[4]



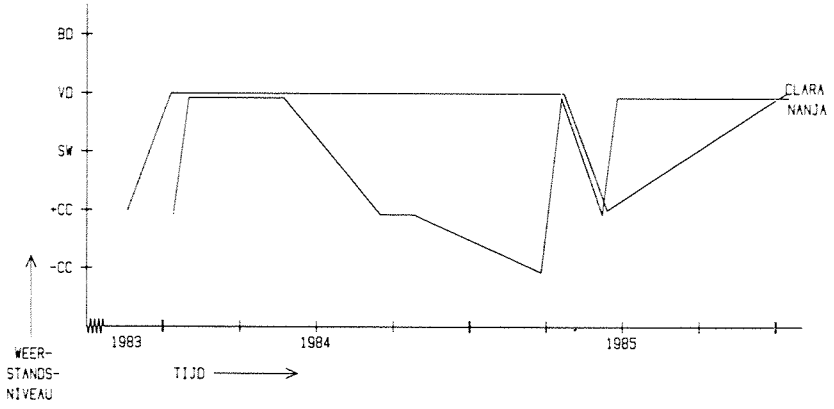
AANWEZIGHEID VAN IN-DISTRACTOREN
IN DE INDIVIDUELE LEERPROCESSEN



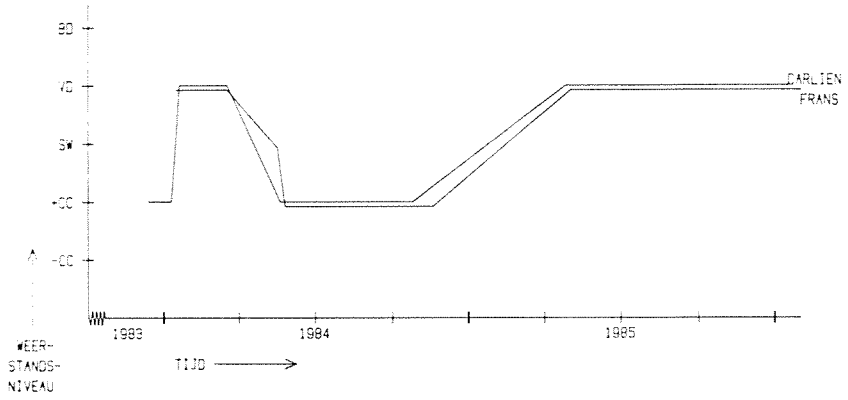
AANWEZIGHEID VAN IN-DISTRACTOREN
IN DE INDIVIDUELE LEERPROCESSEN



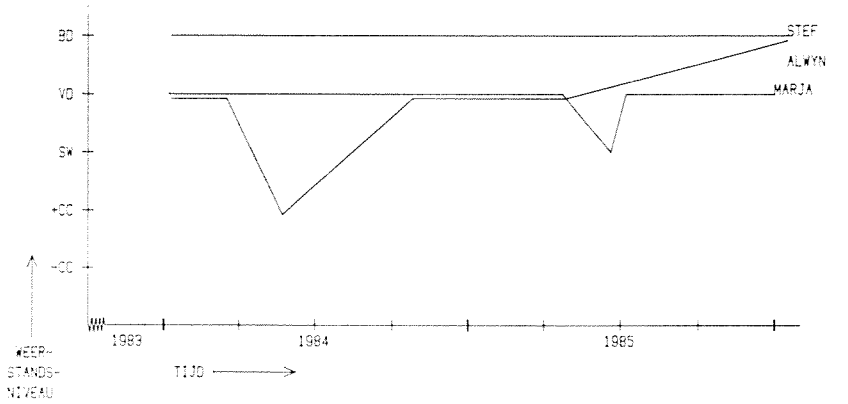
AANWEZIGHEID VAN IN-DISTRACTOREN
IN DE INDIVIDUELE LEERPROCESSEN



AANWEZIGHEID VAN IN-DISTRACTOREN
IN DE INDIVIDUELE LEERPROCESSEN

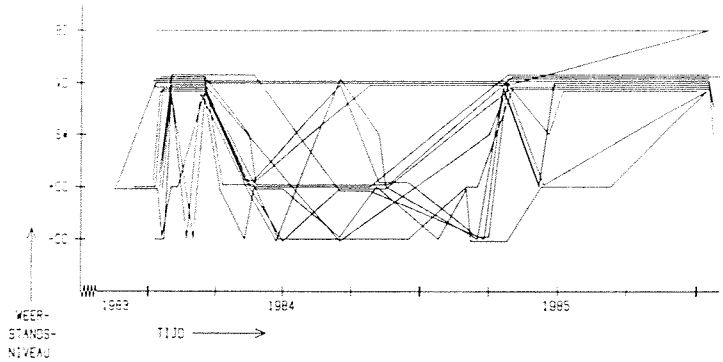


AANWEZIGHEID VAN IN-DISTRACTOREN
IN DE INDIVIDUELE LEERPROCESSEN



AANWEZIGHEID VAN IN-DISTRACTOREN
IN DE INDIVIDUELE LEERPROCESSEN

Het grafisch beeld van de ontwikkeling van weerstand tegen IN-distractoren van de gehele groep ziet er als volgt uit:



AANWEZIGHEID VAN IN-DISTRACTOREN
IN DE INDIVIDUELE LEERPROCESSEN

De grafiek van het groepsproces wijst uit, dat we te doen hebben met een weerbarstig verschijnsel. Dit ondanks het feit, dat het vanaf het begin van het onderwijsleerproces bestreden is. Globaal kunnen drie perioden in het onderwijsleerproces worden onderscheiden.
Bij de aanvang, wanneer de activiteiten nog hecht zijn ingebed in het concrete, doet het verschijnsel zich niet al te nadrukkelijk voor, behalve in de leerprocessen van enkele kinderen voor wie het verschijnsel op de lange duur nogal hardnekkig blijkt te zijn.
Later volgt een stadium waarin het leerproces van nagenoeg de voltallige groep zich over een langere periode in een kritisch stadium lijkt te bevinden.
Als voornaamste oorzaken hiervoor kunnen genoemd worden de moeite, waarmee het loskomen van het concrete niveau gepaard gaat ten gunste van het werken op het tweede niveau èn de gedurige confrontatie met vergelijkingsvraagstukken als ontegenzeggelijke bron van het onjuiste additieve redeneren met verhoudingen.
De terugval aan het eind ten slotte, na een periode van betrekkelijke stabiliteit in de leerprocessen van de meesten, kan worden verklaard vanuit het omzien naar regels voor het rekenen met breuken in de context van het Land van Samen die dan nog niet uitgekristalliseerd zijn tot algemene methoden.
Ook kan nog als verklaringsbron genoemd worden het zoeken van een uitweg bij het probleemoplossen in geval zich te complexe numerieke obstakels voordoen, waarbij de verworven inzichten uit het oog worden verloren.
Naar de laatste grafiek uitwijst is er een sterke differentiatie in de groep voor dit verschijnsel opgetreden.[5]
We menen hiermee te hebben aangetoond, dat het zich voordoen van IN-distractorfouten in het onderwijsleerproces voor breuken en verhoudingen een weerbarstig en onvermijdelijk verschijnsel is.
Gedurig zijn dergelijke fouten bestreden en is er gestreefd naar het vergroten van de weerstand van de leerlingen ertegen. Tegelijkertijd zijn er allerlei middelen in het onderwijsleerproces ontwikkeld, die bijdroegen tot de mentale constitutie van krachtige noties voor breuk en verhouding.
Bijvoorbeeld:
— langdurige aandacht voor het herhaald halveren;
— het globale, maar vooral het Franse verdelen, gepaard gaande met de systematische registratie van het voortgebrachte monografische materiaal; de ruime toepasbaarheid ervan verschafte dit middel de status van algemene methode, een zekerheid biedend situatiemodel (zie ook § 6.4.1);
— het tafelschikken, dat in symbool en schema zich eveneens als een krachtig denkmodel manifesteerde en dat – de reden waarom het in dit verband wordt genoemd – de potentie had tot voortbrenging van gelijkwaardige verhoudingen (zie ook § 6.4.1);
— de reconstructie van verdeelsituaties in symboolvorm.
Genoemde omstandigheden ondersteunen de conclusie omtrent IN-distractorfouten. Desondanks blijft de leergang op dit punt voor verbetering vatbaar (zie § 6.8).

6.3 Voortschrijden in schematiseren door verkorten

Het maken van een lengtedoorsnede van onderwijsproces en leerproces wat het schematiseren aangaat dwingt tot voorbijgaan aan finesses en tegelijkertijd tot het plaatsen van accenten bij niveauverhogingen die in § 5.3 nog te globaal zijn weergegeven. Reeds bij de definiëring van deze indicator (§ 5.2) werd de nauwe samenhang van het hier beschouwde schematiseren met het toepassen van basisvaardigheden in het rekenen genoemd. Dit laatste kan de verklaringsgrond zijn voor (ogenschijnlijke) sprongen in het leerproces en als zodanig een onbelemmerd zicht op de voortgang in het proces van schematiseren in de weg staan.
Het gaat hier om het schematiseren in dienst van het oplossen van vraagstukken, die uitnodigen tot het vergelijken, ordenen en het bepalen van het relatieve verschil van paren verhoudingsgetallen en niet om de vaardigheid van het schematiseren zelf.
Dit betekent dat het verkortingsproces voor het schematiseren van het tafelschikken al enigszins op gang gekomen kan zijn op het moment in het leerproces waar de beschrijving begint.
Opnieuw zal de voortgang in de individuele leerprocessen grafisch worden weergegeven.
Het is nu echter niet alleen een kwestie van simpele verandering in de tijd als bij de IN-distractoren. Centraal staat de indeling in de drie onderscheiden niveaus. Daaraan vallen echter belangrijke aspecten of dimensies te onderscheiden, zoals de verkortingen, die in het proces van schematiseren optreden en de mate waarin een oplossing terugverwijst naar een voorafgaand niveau.
Telkens zullen de opeenvolgende niveaus in globale termen nader worden getypeerd, per niveau direct gevolgd door een uitwerking van de eraan te onderscheiden aspecten.
Met de trits 'niveau-verkorting-verwijzing naar voorafgaand niveau' is tevens het gewicht van deze indicator geduid. Het proces van het verticale mathematiseren zal ermee voor een aanzienlijk deel kunnen worden beschreven.
Alleen daarom al zal dit meer beschrijvingsruimte vergen dan voorgaande indicator.

Niveaus van schematiseren

Het concrete niveau
Algemeen
Op dit niveau zijn de toegepaste wiskundige middelen nog hecht verankerd in de concrete bron, of beter, deze bevinden zich aldaar nog in het stadium van ontwikkeling. Er worden lokale ontdekkingen gedaan, lokale relaties gezien. Met name het symbool en – daarmee ook het schema voor het tafelschikken – verwijst aanvankelijk met metonymische nadruk naar de context van voortbrenging.

Verkortingen
Op alle te onderscheiden niveaus is het in principe mogelijk dat van schematische middelen gebruik wordt gemaakt.
Het is dus niet zo, dat de gevoerde niveau-indeling strikt samenvalt met de klassieke sequentie concreet-schematisch-abstract. Van doorslaggevende betekenis is namelijk ook de kwaliteit van de schematoepassing, eventuele verkortingen inbegrepen.
Op het concrete niveau kan een oplossing van een vraagstuk weliswaar getuigen van het grijpen naar schematische middelen, doch de facto wordt de oplossing in concreet materiaal gerealiseerd.

Verwijzing naar voorafgaand niveau
Wellicht is het beter te spreken van de mate waarin een oplossing verwijst naar de concrete onderlaag waarin het vraagstuk ligt ingebed, omdat in dit geval nog niet van het onderscheiden aspect sprake kan zijn. De volgende nuances kunnen hier worden aangebracht. Het oplossen van een probleem of vraagstelling voltrekt zich zeer nabij de realiteit of context. Bijvoorbeeld, er wordt nog echt verdeeld aan getekende objecten. Er kan dan een omslag plaats vinden van het verdelen, waarin de toegepaste procedure de oplossing stuurt, naar de gegeven getallen, die het proces van verdelen gaan beheersen, met een mengvorm van beide eventueel als tussenniveau (of -kwaliteit).
Het beslissende onderscheid is, of behalve het verdelen slechts het gegeven aantal deelhebbers al dan niet met name genoemd, het proces vorm geeft – het verdelen is dan dominant – of dat ook de andere grootheid, het aantal te verdelen objecten, tegelijkertijd in het oog gevat wordt en bijgevolg de uit te voeren verdelingen meebeheerst. Bij de laatste gang van zaken hoort het globale verdelen. Dit maakt het mogelijk – en geciteerde oplossingen weerspiegelen dit (§ 5.3) – op uitkomsten te anticiperen. Het schatten kan hierbij behulpzaam zijn.

Het tweede niveau
Algemeen
Het op het concrete niveau ontwikkelde schema voor het tafelschikken – en later ook de verhoudingstabel – wordt ingezet voor de oplossing van vergelijkingsvraagstukken. Indirect wordt het daarbij tot voorwerp van onderzoek gemaakt.
De doelmatigheid waarmee beide werktuigen worden gebruikt, kan toenemen naarmate het leerproces vordert. Dit kan zich manifesteren door het toepassen van verkortingen in de schema's, al dan niet gepaard gaande met rekenkundige handigheidjes.

Verkortingen
Op dit niveau van de schema's verdwijnen de concrete oplossingsmiddelen naar de achtergrond, hoewel daarvan nog wel gebruik kan worden gemaakt. Evenwel, de toegepaste schema's hebben de overhand in het

oplossingsproces. Strikt genomen stuurt het schema, evenals het verdelen op het concrete niveau, aanvankelijk het proces van oplossing door zuiver generator van paren equivalente verhoudingsgetallen te zijn. Het voortgaan in het schematiseren kan een wat langdradige aangelegenheid zijn. De toegepaste verkortingen, zo die er zijn, worden in deze fase in eerste instantie meer door het schema bepaald dan door de getallenparen die ermee moeten worden getransformeerd tot nieuwe, meer bruikbare, equivalente paren.
Voor het schema van de tafelschikkingen kan men hierbij denken aan het 'kappen van takken', het weglaten van 'tafeltjes' of het niet invullen ervan. De verhoudingstabel is beperkter aan dergelijke mogelijkheden tot zuiver schematisch verkorten. Te denken valt in dit verband aan het variëren van de tabellengte. Het toepassen van bij kinderen geliefde methoden als herhaald verdubbelen en halveren wordt overigens niet door de verhoudingstabel belemmerd.[6] Wat het herhaald halveren en verdubbelen betreft, voldoet ook het schema voor het tafelschikken hieraan.
Op dit niveau is het schema dus bepalend voor de gang van zaken in het oplossingsproces. Men zou kunnen stellen, dat het op het eerste niveau ontwikkelde schema voor het tafelschikken op dit niveau in zijn mogelijkheden als werktuig in dienst van het oplossen van vergelijkingsvraagstukken, dus onwillekeurig, voorwerp van onderzoek is. De schematische verkortingen die daarin kunnen worden toegepast preluderen niet alleen op de verhoudingstabel, waarin het proces van progressief schematiseren kan worden voortgezet – en dat bijgevolg op dit niveau iets later komt in de tijd – maar weerspiegelen tevens de technische bekwaamheid van de toepasser.
Er is sprake van een verandering van standpunt bij de toepasser, wanneer het schema niet meer *voor*schrijvend, doch *be*schrijvend wordt en verbanden tussen getallen, hun onderlinge relaties en verbindende regels het oplossingsproces gaan beheersen. Doet dit fenomeen van handig omgaan met de getallen zijn intrede in het leerproces en wordt het dominant ten opzichte van de schemavoering dan is dit het teken dat het tweede niveau nu voortvarend met materiaal gevuld kan gaan worden.
Een leerling kan dus pas dan verhoudingstabellen (of andere schema's) in een vergelijkingsvraagstuk efficiënt toepassen, wanneer niet uitsluitend het schematiseren de constructie van de oplossing stuurt, doch de gegeven getallenparen in het oog gevat (kunnen) worden. Deze gaan dan het oplossingsproces meebepalen en later zelfs domineren. Een leerling als Nanja bleek hiertoe niet of nauwelijks in staat gedurende haar hele leerproces. Het lijkt mogelijk de aandacht van leerlingen met dergelijke moeilijkheden enigszins te richten op het maken van bedoelde omslag (p.322).
Stroomlijning in het voortbrengen van materiaal op het tweede niveau biedt uitzicht op het realiseren van materiaal op het derde niveau.

Verwijzing naar voorafgaand niveau
Is de schematisering, bijvoorbeeld die van de tafelschikkingen dominant, dan kan toch de hulp van concreet materiaal worden ingeroepen om de oplossing

in wording schematisch te kunnen beslissen (§ 5.3; het leerproces van Mark). Vanaf zeker moment zijn het symbool en het schema voor het tafelschikken op zichzelf voldoende verwijzend om het zonder waarneembaar visueel materiaal te kunnen stellen.
Zoals eerder gesteld, is een volgende stap de omslag naar de getallen die het proces van schematiseren gaan beheersen. Heeft de overgang van het schema voor de tafelschikkingen op de verhoudingstabel zich eenmaal voltrokken, dan kan desgewenst op het eerste schema worden teruggegrepen of op concreet materiaal. In beide gevallen gebeurt dit uit behoefte aan contexthouvast (§ 5.3; de leerprocessen van Helga en Margreet).

Het derde niveau
Algemeen
De rekenkundige handigheidjes, die het schematiseren van het tweede niveau op den duur kunnen gaan kleuren, krijgen op dit niveau het karakter van formele regels, bijvoorbeeld het systematisch toepassen van de kgv-methode om ongelijknamige breuken of niet gelijkwaardige paren verhoudingsgetallen te vergelijken.
De formulering van een dergelijke regel kan – in dit onderzoek – als het hoogste niveau worden beschouwd. De schema's raken door de constitutie van zo'n regel op de achtergrond en kunnen tenslotte weer geheel verdwijnen.[7]

Verkortingen
Zoals gezegd zijn het nu dus in de eerste plaats de getalrelaties, die het oplossingsproces beheersen en wel die van geavanceerd karakter, nagenoeg tot standaardprocedures gestolde methoden, vormen van (persoonlijke) algoritmen of regels.
Er kunnen weliswaar nog schema's of rudimenten van schema's worden toegepast, doch deze verdwijnen op den duur vanzelf.
De kwaliteit van het oplossingsproces wordt bepaald door numerieke of inhoudelijke verkortingen in het laatste stadium en niet meer door schema's. Ze weerspiegelen de bekwaamheid tot theorievorming van de jonge breukenonderzoeker.
Bij wijze van voorbeelden kan men denken aan de systematische toepassing van de ggd-bepaalde instap in het schema voor het tafelschikken of het toepassen van de kgv-methode in verhoudingstabellen voor het oplossen van een vergelijkingskwestie. Dit betekent, dat tijdens de werkzaamheden aan een schema ook de overige getalgegevens onder de aandacht blijven.

Verwijzing naar voorafgaand niveau
Op het niveau van de getallenwereld kan teruggegrepen worden op concretiseringen zowel als schematiseringen (§ 5.3; het leerproces van Henk).

Karakteristiek van de niveaus

Op grond van het voorgaande komen we tot de volgende karakteristieken van de drie niveaus. Daarop gebaseerd zal de kwaliteit van het voortgaande schematiseren voor het oplossen van vergelijkingsvraagstukken grafisch worden weergegeven.

Behalve als drager van het algoritmiseringsproces voor verhoudingen kan de verhoudingstabel nog allerlei andere functies hebben. Deze bepalen mede de kwaliteit van het leerproces in dit opzicht. Bijvoorbeeld:

— de verhoudingstabel ondersteunt de begripsverwerving (verhouding als equivalentie relatie en – in samenhang daarmee – het begrip variabele);
— de verhoudingstabel draagt bij aan het loskomen van de contexten, waarin problemen gesteld zijn (unificerend schema);
— enz.[8]

Voor de volledigheid zij dit hier vermeld.

Het concrete niveau

De leerling voltrekt het oplossen van problemen in concreet materiaal. Een oplossing kan echter getuigen van het vruchteloos grijpen naar schematische middelen.

Symbool voor de niveau-aanduiding in de grafiek: 1

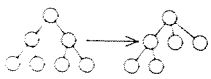
De verhoudingstabel plaatsen we tussen haakjes. Deze kan in oplossingen op dit niveau, die in een later stadium van het leerproces zijn voortgebracht, weliswaar voorkomen, maar te verwachten valt dit niet, mede gelet op de tafelschikkingsbron van herkomst.

Het tweede niveau

De leerling voltrekt het oplossen van problemen in schematisch materiaal. Een oplossing kan echter nog getuigen van het te hulp roepen van concreet materiaal.

De schema's met de allengs meer systematisch toegepaste verkortingen zijn echter dominant in het probleemoplossen. Terwijl het schematiseren steeds efficiënter wordt, krijgen handigheidjes van getalsmatige aard de overhand.

Symbool voor de niveau-aanduiding in de grafiek: 2



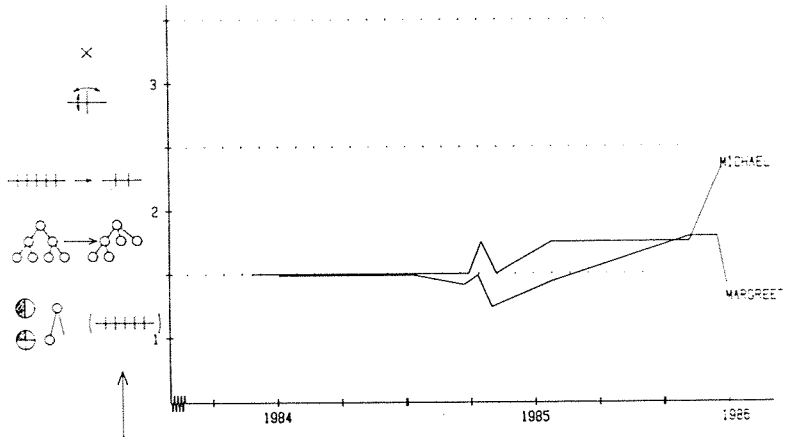
Het derde niveau

De leerling voltrekt het oplossen van problemen in de getallenwereld op grond van verbanden en regels. Daarbij kan schematisch materiaal eerst nog een steunfunctie vervullen. Op den duur verdwijnt dit echter uit de oplossingen. Er is tenslotte sprake van uiterst verkorte procedures die

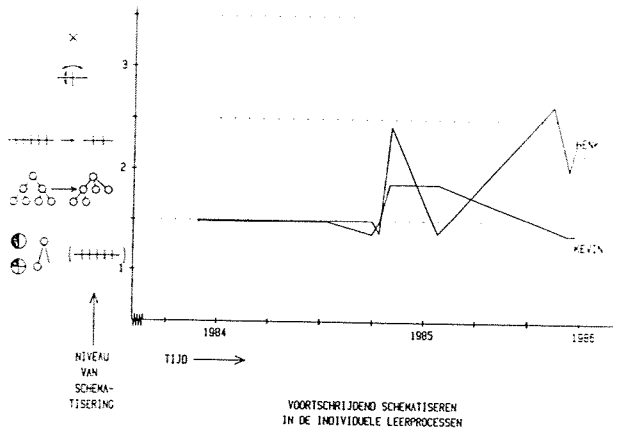
verwantschap vertonen met bijvoorbeeld de kgv-methode.
Symbool voor de niveau-aanduiding in de grafiek: × 3

De pijlen in de uiterst verkorte tabel weerspiegelen het systematisch benutten van operatoire verbanden tussen de getallen die in het spel zijn.[9]
Het zich vestigen op dit niveau vindt zijn bekroning in het expliciteren van de ontwikkelde regels door deze te verwoorden en het dominant worden ervan in het oplossen van dergelijke vraagstukken in het vervolg. Dit betekent, dat de regels en niet meer de gegeven getallen in een vraagstuk het uitgangspunt zijn (§ 5.3; het leerproces van Stef).

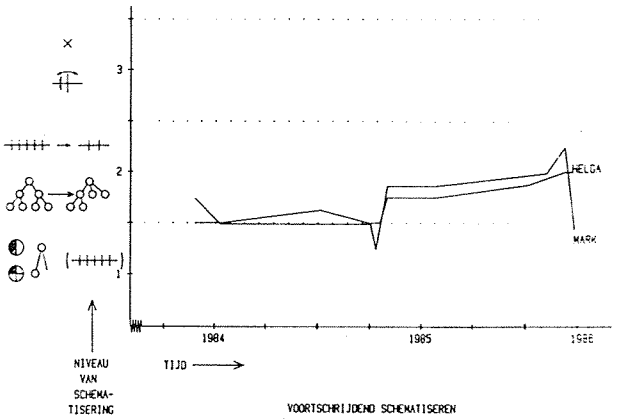
Grafisch beeld; onderwijsleerproces en leergang
Het geheel overziende komen we tot de slotsom, dat er binnen één niveau weer duidelijke kwaliteits-, zo men wil niveauverschillen, kunnen worden aangegeven.
Dit zal in de grafiek tot uitdrukking worden gebracht. Het éénduidig scoren van een bepaalde oplossing binnen één niveau kan bemoeilijkt worden, bijvoorbeeld door de eerder aangeroerde kwestie van de basisvaardigheden. Doet zich zoiets voor dan zal dit apart vermeld worden. Het ligt voor de hand in dat geval de 'naburige' niveaus in het beschouwde schematiseringsproces mede in de niveauscoring te betrekken.



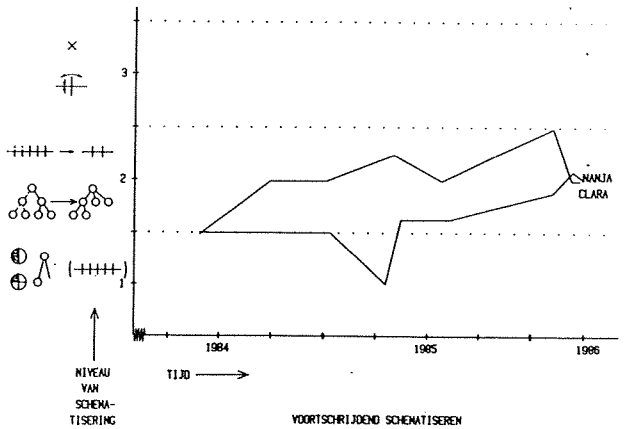
VOORTSCHRIJDEND SCHEMATISEREN
IN DE INDIVIDUELE LEERPROCESSEN



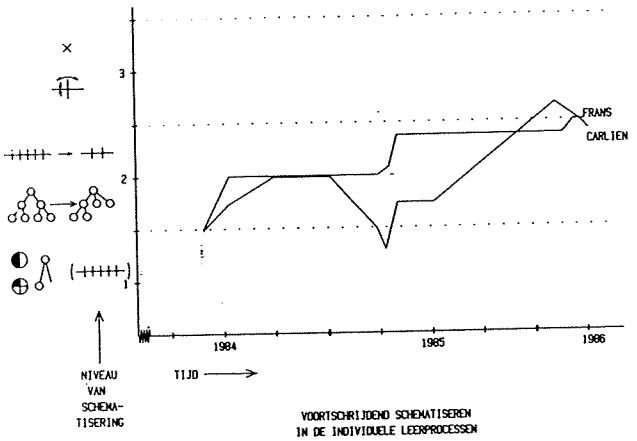
VOORTSCHRIJDEND SCHEMATISEREN
IN DE INDIVIDUELE LEERPROCESSEN

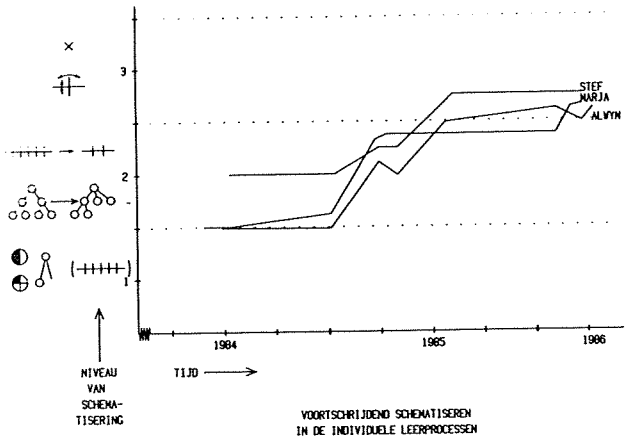


VOORTSCHRIJDEND SCHEMATISEREN
IN DE INDIVIDUELE LEERPROCESSEN

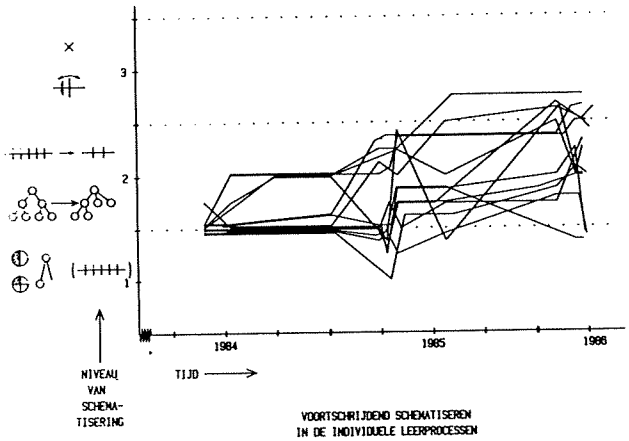


VOORTSCHRIJDEND SCHEMATISEREN
IN DE INDIVIDUELE LEERPROCESSEN





Het grafisch beeld van het schematiseringsproces van de gehele groep ziet er als volgt uit:



In de grafieken van het schematiseringsproces van Helga en Michael werd een niveaucorrectie aangebracht. Het betrof de toepassing van een vermenigvuldigingsregel voor een vraagstuk tijdens het eerste deel van het proces van schematiseren (§ 5.3). Van beide gaf het 'naburige' schematiseringsproces geen aanleiding tot scoring op, of in de buurt van het derde niveau.

De grafiek geeft aanleiding tot de volgende opmerkingen en conclusies. Voor een deel van de groep komt het schematiseren niet of nauwelijks en in een later stadium slechts uiterst schoorvoetend op gang. Dit bevat een aanwijzing dat het werken op het concrete niveau nog evenwichtiger zou moeten worden uitgelijnd, juist voor deze groep. De onderscheiden niveaus en subniveaus bieden hiertoe stellig aangrijpingspunten. Bovendien weerspiegelt dit grafische beeld van het collectieve leerproces de behoefte aan een houvast, dat de beginfase van het schematiseren, ook bij de tafelschikkingen, mentaal kan ondersteunen. Geld als model zou dit houvast wel eens kunnen bieden om te kunnen opstijgen uit het concrete op weg naar het schematiseren in zuivere vorm; geld als bemiddelend (mentaal) model ter vervanging van het gevisualiseerde. Bovendien zou in de leergang nog wat duidelijker kunnen worden ingespeeld op de verbinding van symbool en schema voor het tafelschikken met het concrete niveau, met name met de verschillende vormen van verdelen. We komen op deze kwestie nog terug in deze paragraaf.
Een belangrijke gevolgtrekking kan ook zijn, dat het schematiserend oplossen van vergelijkingsproblemen niet bepaald eenvoudig is voor leerlingen van deze leeftijd. De moeizame aanloop van een klein jaar voor nagenoeg de helft van de groep (Henk, Kevin, Margreet, Mark, Michael en Nanja) vertoont overeenkomst met de problemen die een toen nog vierde leerjaar (9 à 10 jaar; tegenwoordig zesde jaargroep) in eerder uitgevoerd onderzoek had met het schematiseren.[10] Dit bevat een aanwijzing voor de uitlijning van de leergang voor wat de te volgen sporen aangaat; namelijk het spoor van de verdeelsituaties en alles wat daarmee samenhangt zou pas dan verbreed moeten worden met vergelijkingskwesties over mengsels, afstand-tijd-vraagstukken e.d., nadat ruime ervaring is opgedaan met het vergelijken, ordenen en relatief verschil bepalen van (uitkomsten van) verdeelsituaties met daarmee nauw verbonden de ontwikkeling van de nodige wiskundige werktuigen en gereedschappen en de ontwikkeling van een zekere vaardigheid in het toepassen daarvan.
Tenslotte zouden leerlingen wat meer steun kunnen krijgen bij het leren voltrekken van de mentale omslag van schemagestuurde naar getalgestuurde oplossing.
Bijvoorbeeld: Vergelijk $\textcircled{\frac{3}{5}}$ en $\textcircled{\frac{5}{8}}$.

a. Maak eens een tabel voor $\textcircled{\frac{3}{5}}$. (Bedenk meer tafeltjes .....)

b. Idem met $\textcircled{\frac{5}{8}}$

c.

3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50						
8	10	24	32	40	48	56	64	72	80						

Vergelijk beide tabellen stap voor stap.
Welke paren zijn gemakkelijk vergelijkbaar?
Was dit ook niet van te voren te zien geweest?

d. Kan $\frac{12}{20}$ uit de tabel van $\frac{3}{5}$ ook gebruikt worden om met $\frac{5}{8}$ te vergelijken?
Hoe dan?

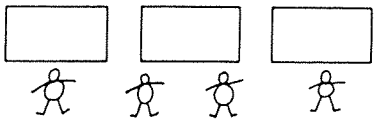
Deze kritische noten op de uitwerking van de ontwikkelde leergang, krijgen in het achtste hoofdstuk nog een vervolg.

Het overige deel van de groep volgt vrijwel direct het spoor van het voortschrijden in schematiseren. Er vindt een indrukwekkende niveaudifferentiatie plaats. Opmerkelijk is daarbij, dat zich terugval in niveau kan voordoen zonder dat dit overigens aanleiding tot stagnatie in het leerproces behoeft te betekenen.
Gelet op de vraag wat er van het onderwijsaanbod gewerkt heeft in het onderwijsleerproces kunnen – met in achtneming van de beschreven individuele leerprocessen – de volgende onderdelen genoemd worden:

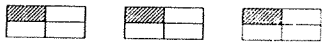
— het symbolisch onderscheid van situatie $\frac{x}{y}$ en uitkomst $\frac{x}{y}$ en tegelijkertijd de hechte samenhang ervan, die in het onderwijsleerproces werd nagestreefd, vormde een belangrijk denkkader voor met name de zwakke leerlingen;
— de tafelschikkingsboom bleek als generatief schema met mogelijkheden tot spontane verkorting te kunnen worden toegepast. De in § 3.3 gesignaleerde kloof tussen de concrete bronnen van het breukbegrip en het algoritmiseringsproces voor het aftrekken en optellen van ongelijknamige breuken door het schematiseren met de verhoudingstabel werd er voor een aanzienlijk deel mee gedicht. Bovendien werd de verstrengeling van de deelleergangen voor breuken en verhoudingen er inniger door en kon aan de verhoudingstabel een natuurlijke herkomst worden gegeven.
De stijgingskracht door het schematiseren met beide schema's – het werd reeds opgemerkt – zou nog kunnen worden bevorderd door geld als bemiddelend model een nog duidelijker rol in de leergang te doen spelen. Tevens zou met het oog op het vermijden van al te abrupte niveauovergangen in het onderwijsleerproces het principe van de 'telescoped reteaching' nog hechter in het materiaal gefundeerd kunnen worden.

Een voorbeeld met het tafeltjessymbool

Eerste niveau
Concreet verdelen, '3 repen onder 4 kinderen'

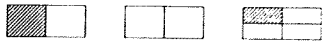


1. Frans verdelen



Ieder $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

2. Globaal verdelen



Ieder $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

Tweede niveau
Verdelen met de symbolen $\textcircled{\scriptstyle 3}_{4}$

1. Frans verdelen
   Eerst $\textcircled{\scriptstyle 1}_{4} \rightarrow \frac{1}{4}$, dan $\textcircled{\scriptstyle 1}_{4} \rightarrow \frac{1}{4}$, dan $\textcircled{\scriptstyle 1}_{4} \rightarrow \frac{1}{4}$.
   Ieder krijgt $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$
2. Globaal verdelen
   Eerst $\textcircled{\scriptstyle 2}_{4} \rightarrow \frac{2}{4}$ $(= \frac{1}{2})$ en dan $\textcircled{\scriptstyle 1}_{4} \rightarrow \frac{1}{4}$
   Ieder .....

Een gevolg van een dergelijke opbouw is, dat de produktie en verwerking van monografisch materiaal nog meer een methodisch karakter krijgen; tenslotte, hoewel deze kwestie in dit onderzoek wat onderbelicht bleef, werden eerdere uitkomsten van ontwikkelingsonderzoek naar voortschrijdend schematiseren met de verhoudingstabel bevestigd.
Deze bevestiging betrof niet alleen de gedurige voortgang in het schematiseren en de aard van de toegepaste verkortingen daarbij, maar ook de vraag of de gelegde concrete oriënteringsbasis toereikend was geweest.[11]
Het starten van het schematiseringsproces op een te smalle en te oppervlakkige concrete oriënteringsbasis wreekt zich later in het onderwijsleerproces. Het veroorzaakt uitstel voor het moment waarop het proces van progressief schematiseren zich de facto inzet. Met name voor de zwakkeren van de groep manifesteerde zich dit nog.

6.4 Modellen en schema's

6.4.1 Flexibel modelgebruik en schematoepassing

Modelontwikkeling en -toepassing
Wat deze kwestie aangaat is de leergang met zijn uitwerking in het onderwijsleerproces wellicht het meest voor verbetering vatbaar.
Daarin wordt manifest, dat in dit opzicht – misschien meer dan voor elk van de overige indicatoren – het verrichte onderzoek ontwikkelingsonderzoek is geweest. Ook voor de modelontwikkeling kan namelijk een proces van niveau-verhoging worden onderkend, zoals dit in de vorige paragraaf voor het voortschrijden in schematiseren werd uiteengezet.
Tijdens de uitvoering van het onderwijsexperiment bestond hierop niet of niet in voldoende mate zicht. Pas achteraf tekenden zich de niveaus af, toen de individuele leerprocessen, besloten in het verzamelde, ruw empirisch materiaal in volle omvang beschikbaar waren en op hun essentiële kwaliteiten konden worden ontleed.
Dus – achteraf bezien – tekenen de niveaus zich als volgt af.

Het concrete, eerste niveau
Op het concrete niveau worden de eerste schreden gezet op de weg van de modelontwikkeling.
In eerste instantie betreft het – als uiting van het zich inzetten van het horizontale mathematiseren – het achterwege laten van realistische trekjes in visualiseringen.
De werkelijkheid ondergaat als het ware een eerste modellering met het doel het voltrekken van het verdelen wat te vergemakkelijken. Daarbij kan het dan verder blijven.
Qua vormgeving blijven de 'modellen' dan echter de werkelijkheid weerspiegelen: cirkels voor pizza's en pannekoeken, rechthoeken voor repen, lijnstukken voor dropveters, enz.
Een volgende stap is, dat niet de vormverwantschap met objecten in de realiteit de keuze van het model bepaalt, maar de handzaamheid ervan met het oog op de verdelingen die voltrokken gaan worden. De toegepaste visualiseringen krijgen nu een echte modelfunctie; het model verwerft een zekere mate van onafhankelijkheid van de toepassingssituatie en er is – tot op zekere hoogte – sprake van onderlinge uitwisselbaarheid van modellen.
Vooruitlopende op het afzien van de vormverwantschap met de realiteit van het toe te passen visuele model kan bij de leerling bewust geworden zijn, dat zijn methode voor het verdelen in tweeën, vieren, achten, enz. niet alleen toepasbaar is op circulaire eenheden, maar ook op rechthoeken, vierkanten enz.[12]
Een gevolg kan zijn, dat bepaalde modellen de voorkeur gaan krijgen, omdat ze eenvoudiger naar de uit te voeren verdeling te voegen zijn.
Het 'afzien van' kan zich op dit niveau van modelvorming ook richten op de

context dan wel op de taal behorend bij een bepaalde context. Een voorbeeld is het spontaan toepassen van de klok als model. (De wijzerplaat als dynamisch circulair model voor pannekoek en pizza, waarbij de vormverwantschap intact blijft doch de context van het klokkijken met bijbehorende taal wordt overgedragen op het verdelen van genoemde eetwaar.)[13] Een ander voorbeeld is het toepassen van geld(swaarde) als model (4 kwartjes in een hele (gulden)).

Het tweede niveau
Op dit niveau worden de modellen (opnieuw) voorwerp van beschouwing en wel wat de dienstbaarheid ervan aangaat aan de voortbrenging van operatoire samenstellingen van breuken.
Weliswaar kan er op het concrete niveau reeds monografisch materiaal zijn voortgebracht, maar dit *beschrijft* 'slechts' het verdeelproces met uitkomst. Vanuit het standpunt van de lerende behoeft dus nog geen sprake te zijn van samenstellingen en uiteenleggingen *van breuken.*
Op het hier beschouwde niveau gaat het bijvoorbeeld om de vraag naar de geschiktheid van de getallenlijn als model voor het herhaald optellen of vermenigvuldigen van stambreuken of voor het optellen en aftrekken van ongelijknamige breuken, eventueel via het handig kiezen van een eenheid naar analogie van het handig kiezen van een prijs als bemiddelende methode voor het gelijknamig maken. Een ander voorbeeld is het rechthoeksmodel dat beschouwd wordt op zijn mogelijkheden als drager van het vermenigvuldigen van echte breuken en gemengde getallen.

Het derde niveau
Op dit niveau vindt de beschouwing van de visuele modellen in relatie tot het rekenen met breuken niet meer van 'binnenuit' plaats doch van 'bovenaf', dat wil zeggen vanuit het standpunt van het formele systeem.
Dus, de (regels voor de) bewerkingen vormen het uitgangspunt, met name de mate waarin deze met hun wetten en eigenschappen verwijzend zijn naar de modellen, waarin deze bewerkingen gematerialiseerd kunnen worden.
Bijvoorbeeld voor het vermenigvuldigen en de distributiviteit van de vermenigvuldiging over de optelling, de rechthoek als ondersteunend model onderkennen.

Wat het *schematiseren* aangaat, kunnen we kort zijn. Onder verwijzing naar § 6.3 zij hier nogmaals gewezen op het banen van een schematische uitweg om een obstakel, dat zich in een eerdere schematisering voordeed, uit de weg te gaan. Vijf leerlingen vertoonden dit gedrag (Clara, Frans, Helga, Marja en Mark; Kevin vertoonde dit gedrag in zekere zin ook, zij het in bescheiden mate). Dit gedrag werd in enkele gevallen voorafgegaan door toepassing van visuele middelen ter ondersteuning van het vinden van de schematische uitweg.
Bovendien konden één of beide schema's door de helft van de leerlingen

wendbaar worden toegepast, dat wil zeggen in situaties die geen directe aanwijzingen tot dergelijk schemagebruik bevatten.
Het laatste gedeelte van het schematiseringsproces van Mark, Michael en Nanja bevat aanwijzingen, dat ook dit in samenhang met de voortschrijdende modelvorming nog gerichter onderwerp van nadere beschouwing zou moeten zijn.

Onderwijsleerproces en de leergang
Analyseren we nu het onderwijsleerproces zoals dit zich heeft afgespeeld, dan bevatte dit activiteiten die verband hielden met elk van de onderscheiden niveaus. Voldoende zicht op de mogelijke voortgang naar volgende niveaus ontbrak echter. Daardoor kon niet worden gewaarborgd, dat de leerlingen zelfstandig de overgang naar een hoger niveau konden voltrekken.
Bovendien bleef het in beschouwing nemen van de eigen constructies en produkties in dit opzicht tot enkele incidenten beperkt. Dit gebeurde bijvoorbeeld wèl tijdens de introductie van de getallenlijn en toen enkele modellen onderling met elkaar in verband werden gebracht (§ 4.3).
De leergang zou een verbetering kunnen ondergaan door ervoor te zorgen dat de voortgang in het mathematiseren gericht op de vorming van modellen spoort met het voortschrijdende schematiseringsproces en dus met de niveaus waarop achtereenvolgens materiaal in symboolvorm wordt voortgebracht.
Bezien we de individuele leerprocessen naar de opbrengst die het onderwijs met de leergang in dit opzicht heeft teweeggebracht, dan zijn de volgende kwesties het waard te worden vermeld.

Het eerste niveau
Op het eerste niveau is in het algemeen de modelvorming goed op gang gekomen. Met name de overgang van realistische visualiseringen naar meer modelmatige kenschetste de eerste stap in het proces van horizontaal mathematiseren van de meeste leerlingen. Dit gold ook de volgende stap, namelijk het gaan afzien van de vormovereenkomst van de modellen in ontwikkeling met de werkelijkheid. In het in symbolen beschrijven van de voortgebrachte relaties in het visuele materiaal slaagde iedereen na verloop van tijd.

Het tweede niveau
Het schematiseren had op dit niveau de overhand – ook in het denken van de ontwikkelingsonderzoeker. In het onderwijsleerproces waren weliswaar momenten waarop ook de modelontwikkeling op dit niveau werd afgestemd, maar deze waren (te) schaars.
Wel bleek de modelvorming op het eerste niveau dermate hecht te zijn geweest, dat acht van de dertien leerlingen in geval van een impasse tijdens het schematisch oplossen van een vraagstuk zich met behulp van een visueel model eruit wisten te redden. Van deze acht waren er vijf, die bij stagnatie in een geschematiseerde oplossing het vanaf zeker moment opnieuw in een

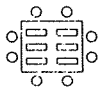
schematische oplossing zochten (zie § 4.3).

Het derde niveau
Op het grensvlak van het tweede niveau en het niveau van de getallenwereld en de formele regels werden de mogelijkheden nagegaan van geld als bemiddelend model (handige prijs), de getallenlijn (handige eenheid) en de rechthoek (oppervlakte, handige lengte en breedte in verband met de vorming en vaststelling van het produkt).
Deze bleken goede mogelijkheden in zich te dragen tot voortbrenging van materiaal op het tweede niveau alsook om het derde niveau in kaart te brengen en bovendien aan te sluiten bij uiteenlopende voorkeuren van de kinderen. Desondanks vermelden we dit met een zekere terughoudendheid, omdat het om onvoldoend diepgaande en betrekkelijk kortlopende explorations gaat. Nader onderzoek is hier dus gewenst, al was het maar om na te gaan of de beoogde *algoritmen* door de leerlingen gehaald worden, bijvoorbeeld die voor vermenigvuldigen mede op grond van de sequentie van de passende tegeltjes (§ 4.2).
Het eerder geuite pleidooi (§ 6.3) voor een meer structurele positie van geld als bemiddelend model in de leergang, berust niet alleen op de geobserveerde moeizaamheid waarmee – althans voor de helft van de deelnemende kinderen – het schematiseringsproces op gang kwam, maar ook op de waarneming dat geld in enkele gevallen spontaan als model gekozen werd om bepaalde kwesties tot klaarheid te brengen, en ook nog op de voorkeur, die een deel van de kinderen voor geld als model bij het 'rekenen met een omweg' uitsprak (§ 4.3).
Tevens noemen we in dit verband de spontane keuze van de klok als model. Deze keuze is in het onderwijsleerproces dat erop volgde afdoende gehonoreerd, met name in verband met de kwestie van de breuk in de operator (§ 4.3).
Aan de ontwikkelde context- of situatiemodellen vanuit modelsituaties in de werkelijkheid wordt een afzonderlijke paragraaf gewijd.

6.4.2 Situatiemodellen

Het gaat om het 'Franse' verdelen en het tafelschikken, die zich in de loop van het leerproces ontwikkelden van modelsituaties tot situatiemodellen.[14]
In verbinding met het denken op de twee eerste niveaus bleken deze voor vrijwel alle leerlingen krachtige middelen om dit te ondersteunen.
Ter illustratie van deze vaststelling noemen we:

Het concrete niveau
Het Franse verdelen ontpopte zich als zekerheid biedende standaardmethode om in 'kleine' verdeelsituaties de uitkomst te beslissen.
Het tafelschikken ontwikkelde zich tot methode om – op het niveau van het eerlijk verdelen – in de uitkomst gelijkwaardige verdeelsituaties als zodanig

te onderkennen.
Bijvoorbeeld de situatie  ontleden in en
om de uitkomst van de laatste (ieders portie) ook voor de eerste situatie geldig te kunnen verklaren.

Het tweede niveau
Met het Franse verdelen als standaardmethode kon systematisch monografisch materiaal in symboolvorm worden voortgebracht. Met name het samenstellen van een breuk uit eenheids- of stambreuken was een gewichtige activiteit met het oog op de begripsverwerving.[15] Immers, de noemer als beschrijver van de toegepaste maat in de betrokken situatie, en de teller als teller verwerven op ongekunstelde wijze en in nauwe samenhang er hun betekenis door.
Tenslotte bleek het Franse verdelen produktief bij het voortbrengen van monografieën, met name bij het begin, bijvoorbeeld met het uiteenleggen van $\frac{5}{6}$ in: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$.
De constructie van een symbool en schema voor het tafelschikken voltrok zich betrekkelijk probleemloos. Daaruit kon zich een proces van voortschrijdend schematiseren met dit schema ontwikkelen waaraan op de achtergrond het tafelschikken als situatiemodel mede richting gaf.
Er werd een hechte verbinding gelegd, althans nagestreefd, tussen situatie $\textcircled{\frac{x}{y}}$ en uitkomst $\frac{x}{y}$. Bovendien werd de mogelijkheid tot voortzetting van het Franse verdelen en globale verdelen in gesymboliseerde vorm op dit niveau opengehouden. Het schematiseren kon een vervolg krijgen doordat de verhoudingstabel voortkwam vanuit de verbinding van een uitkomst met passende situaties, bijvoorbeeld $\frac{1}{2} \rightarrow \textcircled{\frac{1}{2}}, \textcircled{\frac{2}{4}}, \textcircled{\frac{3}{6}}, \ldots$ alsook op basis van uiterst verkorte schema's voor het tafelschikken.

Op weg naar het derde niveau
Van belang was ook de voortbrenging van procedures en het vermijden van onjuiste procedures op de weg naar het derde niveau, met name uitgaande van het symbool (en het schema) voor het tafelschikken. Een mooi voorbeeld bleek de ontmaskering van $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ als IN-distractorfout via $\textcircled{\frac{2}{5}} \rightarrow \frac{2}{5}$ $(\frac{1}{5} + \frac{1}{5})$, waarbij het Franse verdelen als bemiddelaar tussen situatie en uitkomst kon worden toegepast. Ook noemen we in dit verband nog het manipuleren van situaties en het weergeven daarvan in betrekkingen in symboolvorm.
Bijvoorbeeld: Bedenk een tafeltje waar ieder maar $\frac{1}{3}$ deel krijgt van iemands portie bij $\textcircled{\frac{3}{4}}$.

$\frac{1}{3}$ van iemands portie bij $\textcircled{\frac{3}{4}}$:

$\textcircled{\frac{3}{4}} \overset{:3}{\rightarrow} \textcircled{\frac{1}{4}} \rightarrow \frac{1}{4}$, dus $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, maar ook

$\textcircled{\frac{3}{4}} \overset{:3}{\rightarrow} \textcircled{\frac{3}{12}} \rightarrow \frac{3}{12}$, dus $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{12}$ (zie ook § 4.3).

Kortom, de produktiemogelijkheden met behulp van beide situatiemodellen blijken veelomvattend te zijn en te reiken tot over de grens van tweede en derde niveau.

Het zijn beide cognitieve procesmodellen die zowel aan het horizontaal als het verticaal mathematiseren krachtige impulsen kunnen geven, doordat zij hun oorsprong hebben in contexten met een modelkarakter.[16]

In dit opzicht is dus de context van verdeelsituaties, ook met grotere aantallen, een rijke context gebleken.[17]

6.5 Het zich (eigen) maken van een voorstelling of representatie bij een formeel gesteld probleem

De ontwikkeling van voorstellingen en representaties

In de beschrijving van de individuele leerprocessen (§ 5.3) kwam reeds tot uitdrukking dat deze indicator niet los gezien kan worden van het verticale mathematiseringsproces dat de leerlingen doormaken.

Anders gezegd: de leerling zal zelf veelvuldig en gedurig materiaal in symbolen op de twee eerste niveaus hebben moeten voortbrengen en zal op eigen kracht tijdens het oplossen van toepassingsvraagstukken veelvuldig over en weer hebben moeten kunnen gaan van context naar wiskundige representatie in modellen en symbolen, alvorens überhaupt in staat te zijn in formeel symbolische vorm gestelde problemen van een voorstelling of representatie te voorzien.

Naar de samenvatting van de beschrijving der individuele leerprocessen reeds uitwees (§ 5.4) gold voor negen van de dertien leerlingen, dat hun leerproces zich voornamelijk nog op het eerste en/of tweede niveau afspeelde. De overigen waren, de één aanzienlijk meer gevorderd dan de ander, bezig zich in dit opzicht op het derde niveau te vestigen.

In dit geval speciaal wordt deze niveau-indeling dan nog doortrokken door persoonlijke voorkeuren van de leerlingen.

Niveaus, onderwijsleerproces en leergang

Wat de persoonlijke voorkeuren aangaat, voor enkelen bleek deze zich uitgesproken op het werken met materiaal in symboolvorm te richten. De zuigkracht van dergelijk materiaal, liefst met bewerkingsvoorschriften, was zo sterk (zij het dat er graduele verschillen waren) dat deze categorie van leerlingen ertoe neigde het visualiseren met modellen zowel als het schematiseren te minimaliseren zo niet – waar mogelijk – geheel achterwege te laten (§ 5.3; Alwyn, Frans, Henk).

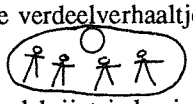
Er waren er nog meer, die ook behoefte toonden aan veronderstelde

zekerheid biedende regels, doch zij waren lange tijd slechts met moeite bij machte materiaal op het tweede niveau voort te brengen. Zij kwamen aan regels voor operaties en formeel werken dus niet toe, en zullen daaraan ook in de toekomst niet toekomen (§ 5.3; Kevin, Nanja).
Van vergelijkbaar kaliber was het leerproces van nog een leerling, maar dan zonder de uitgesproken voorkeur voor of het waarneembaar zoeken naar regels (§ 5.3; Margreet).
Een overeenkomstig beeld, doch van meer kwaliteit, vertoonden de leerprocessen, waarin het zich beroepen op visuele dan wel verbale voorstellingen tot uitdrukking kwam. De leerlingen die dit aangaat, verwijderden zich – de één wat sneller dan de ander – geleidelijk aan van het concrete en waren op den duur bij machte zich ook bij materiaal in symbolen op het tweede niveau voorstellingen of representaties te maken en in enkele gevallen al nagenoeg op het derde niveau (§ 5.3; Carlien, Clara, Helga, Marja).
Enkelen namen een soort tussenpositie in, vergeleken met de in het voorgaande genoemde groepjes.
Voor hen diende de concrete werkelijkheid lange tijd in de vraagstellingen vertegenwoordigd te zijn of als zodanig opgeroepen te worden (§ 5.3; Mark, Michael).
In dit opzicht hadden hun leerprocessen veel weg van dat van Kevin, zij het dat de beide anderen zich tenslotte verder van de concrete bronnen konden distantiëren, overigens met uiteenlopend perspectief op te realiseren eindniveaus.

We komen tot de slotsom dat deze indicator voor de leerprocessen van het grootste deel van de groep dezelfde indirectheid heeft als die van de IN-distractoren. Er kan namelijk mee worden nagegaan dat leerlingen aan het formeel-symbolische van het derde niveau nog niet toe zijn, of, anders gezegd, nog niet kunnen uitstijgen boven – het in veel gevallen – moeizaam bereikte tussenniveau.

Het verrichte ontwikkelingsonderzoek wees uit, dat het zich maken van een voorstelling bij een breuk of gemengd getal en bij een aftrekking of optelling zonder al te veel problemen realiseerbaar was voor vrijwel de voltallige groep. Voor een vermenigvuldiging en deling lag dit anders (§ 5.3). In het zich voorstellen van een vermenigvuldiging vormt de 'keer-van'-omslag een obstakel op de weg naar het concrete (§ 4.2.2; cluster 3); een kwestie die (nog) onvoldoende is onderzocht.
Voor de bewerking 'delen' wezen de opgedane ervaringen uit, dat het vertellen van een (verdeel)-verhaaltje bij wijze van voorstelling voor een formeel gestelde opgave een goed middel is voor de kinderen om zich de betekenis van in het bijzonder de deler te realiseren, alsook vertrouwd te raken met het idee dat delen niet per se kleiner behoeft te maken.
Behalve de constructie van vermenigvuldigingen en delingen voor vraagstukken in een (toepassings)context, zou ook het omgekeerde minder incidenteel

hebben moeten plaatsvinden.
Binnen het kader van de onderscheiden niveaus is ook hier een lange leerweg te gaan. Deze houdt verband met het kunnen omgaan met omkeringen, die naar werd beschreven vooral de zwakkere leerlingen voor problemen plaatsten (§ 5.3; Kevin, Margreet, Nanja).
Uit een breed spectrum van mogelijkheden lichten we de uitkomst van een verdeling om de achtereenvolgende niveaus die doorlopen kunnen worden, te duiden:

1. Iemand krijgt bij een verdeling van pizza's dit deel .
   Welke verdeelverhaaltjes horen hierbij?
    , enz.
   Hoeveel krijgt ieder in elk van de verhaaltjes wanneer er op z'n Frans verdeeld zou worden?
2. Iemand krijgt bij een verdeling $\frac{1}{4}$ pizza.
   Aan welk tafeltje kan hij gezeten hebben?
   $\frac{1}{4} \rightarrow \textcircled{1}_{4}, \textcircled{2}_{8}, \textcircled{3}_{12}, \ldots\ldots$
   Hoeveel krijgt ieder bij elk van de tafeltjes, wanneer er op z'n Frans verdeeld zou worden?

   Opmerking
   Met het oog op de inhoud van § 6.6 noemen we hier ook het interpreteren van in symboolvorm gegeven uitkomsten van verdelingen.
   Bijvoorbeeld: Bij een verdeling krijgt iemand $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$. Welk verdeelverhaal kan er gebeurd zijn? Idem met $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, $1-\frac{1}{4}$ enz.
3. Voor welke breuken is $\frac{1}{4}$ schuilnaam? (Welke breuken zijn gelijkwaardig met $\frac{1}{4}$?)
   $\{\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \ldots\ldots\}$. Noem een regel die beschrijft hoe je van een gegeven breuk daarmee gelijkwaardige kunt maken.

Het spreekt vanzelf dat hierin de niveau-indeling met betrekking tot de verwijzing naar de concrete onderlaag bij het schematiseren (§ 6.3) van toepassing is.
Immers, voor degene voor wie een methode van het verdelen nog dominant is voor het verwerken van verdeelsituaties, bijvoorbeeld het 'Franse' verdelen, zal het construeren van verdeelsituaties op grond van uitkomsten van het globale verdelen in symboolvorm, uiterst lastig, zo niet onmogelijk zijn.
De stand van zaken in een individueel leerproces is dus beslissend wanneer men zich afvraagt of dergelijke kwesties al dan niet kunnen worden opgeworpen in het onderwijsleerproces. In geval van het voorbeeld zal enige ervaring in het globale verdelen en het in symbolen beschrijven ervan,

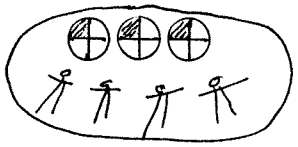
moeten zijn opgedaan.
Wat deze hele kwestie aangaat is al veel gerealiseerd in het leergangvoorstel (§ 4.2). Evenwel, de voorgestelde systematische opbouw van het zich maken van een voorstelling bij voortgebracht wiskundig materiaal op groeiende afstand van de realiteit zou nu meer methodisch kunnen worden gewaarborgd.
Het grensverkeer tussen het concrete en het tussenniveau zou daarbij voor de achterhoede van een leergroep moeten worden geïntensiveerd.

6.6 Constructies en produkties op symbolisch niveau

Voor deze kwestie richtte het ontwikkelingsonderzoek zich op hypothesevorming (§ 3.3). Nagegaan wordt hoe in materiaal als bedoeld zich niveauverhogingen kunnen manifesteren. De nadruk zal gelegd worden op de produktie van monografieën, waar nodig aangevuld met ander materiaal.
De hier beschouwde indicator verwijst rechtstreeks naar de onderwijskundige grondstelling die het hart vormt van de realistische wiskundeonderwijstheorie. Het moge duidelijk zijn dat de methodische verwezenlijking ervan alleen dan kans van slagen heeft, wanneer de activiteiten met het oog hierop hecht gefundeerd worden in het concrete niveau, of, beter nog, tot de directe nasleep van activiteiten aldaar behoren. Laten we daar dus beginnen.

Het concrete niveau

a. De voltrokken verdeling in een verdeelsituatie wordt beschreven.



Ieder krijgt: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$3 \times \frac{1}{4}$

$\frac{3}{4}$

Het teweeggebrachte monografische materiaal is zuiver beschrijvend. De bedoeling ervan op dit niveau is in eerste instantie min of meer alledaagse omschrijvingen voluit te leren vervangen door dergelijke betrekkingen in symboolvorm.
Dit betekent, dat niet alleen – bij wijze van omkering – verdeelsituaties uit dergelijk materiaal kunnen worden afgeleid, maar ook het voluit schrijven van dergelijke uitdrukkingen. Het prille symboolgebruik wordt dan hecht verbonden met het dagelijkse taalgebruik (van het herhaald halveren). 'Ieder krijgt een kwart van een pizza en nog een kwart en nog eens, dus drie keer een kwart van een pizza.'

b. Als voorgaande, waarbij het 'Franse' en het globale verdelen met tussenstanden wordt opgetekend (§ 4.2).
c. Idem, doch nu met meer divers materiaal en met reconstructie van de verdeelsituatie.

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ enz, maar ook
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $1 - \frac{1}{4}$, e.d.
Hoeveel krijgt ieder steeds? Welk verdeelverhaal hoort erbij?
Vanwege de hechte symboolkoppeling $\textcircled{3}_{4} \rightarrow \frac{3}{4}$ ligt hier een dwarsverbinding met het schematiseren voor het tafelschikken. Op dit niveau is – via de onderscheiden situatiemodellen – het materiaal nog sterk verwijzend naar (denkbeeldige) verdeelsituaties. De situatiemodellen in de verdeelsituaties zijn de produktiemethoden achter de monografieën.

Het tweede niveau
De model verdeelverhalen als methoden van produktie voor het monografische materiaal raken op de achtergrond en andere produktiemethoden vullen deze aan en komen er voor in de plaats, zoals bijvoorbeeld de tweezijdige toepassing van schuilnamen en de toepassing van de commutatieve eigenschappen van de optelling en vermenigvuldiging e.d.
Het uiteenleggen en samenstellen van breuken, die de toegepaste symbolen allengs zijn gaan vertegenwoordigen, voltrekt zich meer en meer op grond van genoemde methoden, hoewel niet alle sporen van het concrete niveau worden uitgewist.
Dit is zelfs niet wenselijk, omdat bijvoorbeeld de stambreuksgewijze uiteenlegging van een breuk verwijzend naar het 'Franse' verdelen een produktieve instap is (§ 6.4.1).
Namelijk: $\frac{5}{6} = \underbrace{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} + \underbrace{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times 5$
$= 1 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \times 1$

$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$$
$$= \frac{2}{6} + \frac{3}{6}$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad \text{enz.}$$

Op dit niveau kunnen de fundamenten gelegd worden voor de ontwikkeling van eigen methoden voor het opereren.
Het toepassen van equivalentie als produktiemethode kan in het voortbrengen van monografieën een krachtige ontwikkeling ondergaan. Opmerkelijk is bovendien, dat de diverse eigenschappen en wetten, zoals de commutatieve, niet pas achteraf hun stempel op het systeem gaan drukken als formaliserend sluitstuk, maar van binnenuit als methoden van produktie mee ontwikkeld worden om met toenemende verfijning het systeem der breuken formeel te organiseren.[18]

We maken hier even een zijstapje naar het tafeltjesymbool. Op dit niveau

zouden ook daarvoor uiteenleggingen kunnen worden verricht die verwijzen naar het gevarieerd opdienen en navenant verdelen (§ 4.2).
Bijvoorbeeld $\overset{\circ}{8}$. 8 kinderen wachten op hun bestelling van 6 pizza's. Eerst worden er 4 en daarna nog 2 opgediend, dus eerst $\textcircled{\tfrac{4}{8}}$ en later nog $\textcircled{\tfrac{2}{8}}$. Het groepje van 8 is *hetzelfde.*
Ieder kreeg dus eerst $\textcircled{\tfrac{4}{8}} \rightarrow \frac{4}{8}$ (of $\frac{1}{2}$) en daarna nog $\textcircled{\tfrac{2}{8}} \rightarrow \frac{2}{8}$ (of $\frac{1}{4}$), dus in totaal $\frac{4}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{8}$ ($\rightarrow \textcircled{\tfrac{6}{8}}$), dus geldt *in dit geval* $\textcircled{\tfrac{4}{8}} + \textcircled{\tfrac{2}{8}} = \textcircled{\tfrac{6}{8}}$, met als bewustmakingsmoment, dat + staat voor het samenvoegen van situaties, waarin alleen maar iets *op* en niet *rond* de tafel veranderde, wat bij het tafelschikken wèl het geval was. In dit geval veranderde er aan de groep verdelers niets.
Allerlei andere betrekkingen tussen 'porties', zoals $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6}{8}$ liggen nu binnen bereik.
In feite wortelt het idee van het Land van Samen (§§ 4.2 en 4.3) in het voorgaande.
De omvang van verdelersgroepen speelde er voor het ontwikkelen van regels voor het opereren met breuken een belangrijke rol.
Terug nu naar het spoor van de monografieën.

Het derde niveau
Op het derde niveau zal de aandacht zich binnen het gehele arsenaal aan produktiemethoden moeten gaan richten op die methoden, die bij het samenstellen en uiteenleggen van breuken de standaardmethoden of regels voor het opereren kunnen worden.
Het zijn nu niet meer de onderscheiden produktiemethoden die dominant zijn in het proces van voortbrenging, maar de aandacht richt zich eerst en vooral op de getallen die de situatie bepalen. Dit gebeurt dan in combinatie met een produktiemethode met het oog op het op de meest efficiënte wijze toepassen ervan. Zo'n uiterst verkorte of meest efficiënte methode verwerft dan de status van standaardprocedure of algoritme.
Bijvoorbeeld: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.
In welk 'breukenverhaal' hoort deze som? Welke regel pas je toe om dit te beslissen?
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \rightarrow \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$ (Regel: $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$ zijn schuilnamen, dus zoek het eerste getal, dat de tafel van 2 en 3 gemeen hebben. Dit is 6. Maak zoveel zesden als in $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$ schuilgaan, enz.)

Onderwijsleerproces en leergang
Het moet gezegd, dat ook voor dit onderdeel van de leergang de ontwikkeling van enkele vruchtbare ideeën wat laat op gang kwam. Bijvoorbeeld

het idee van het gedurig opslaan van voortgebracht monografisch materiaal in een speciaal schrift en het daarna telkens uitbreiden van en reflecteren op individuele monografieën zoals eerder werd geschetst (§ 4.3). Dit gebeurde dan met het oog op het bewustmaken van de toegepaste produktiemethoden en het scheppen van verbanden tussen de gebruikte bouwstenen in een monografie.[19]
Het onderzoek heeft ons inziens voldoende aanwijzingen opgeleverd om te kunnen veronderstellen dat het construeren en produceren van materiaal in symboolvorm, met name monografieën, het verticale mathematiseren gunstig beïnvloeden. En niet alleen dat. Er zijn eveneens sterke aanwijzingen, dat hier sprake is van een middel voor *alle* leerlingen om, ieder op zijn niveau, voortgang te boeken in het mathematiseren.
We nemen hier eerst alleen de eigen produktie van monografieën in beschouwing, omdat het constructieaspect bij de overige indicatoren, zoals bijvoorbeeld bij het voortgaande schematiseren, ruimschoots werd 'meegenomen'.
In het algemeen kan men stellen, dat het doen van eigen produkties in tweeërlei opzicht een evaluatieve functie heeft, namelijk:

1. ze houden de onderwijsgevende een spiegel voor aangaande het gegeven onderwijs, en
2. eigen produkties op formeel niveau nodigen de leerlingen uit tot reflectie op hun eigen leerproces.[20]

Dat het doen van vrije produkties geschikt zou zijn voor alle leerlingen lijkt gelogenstraft doordat er vier leerlingen in de onderzoeksgroep waren voor wie het werken met materiaal in symboolvorm nu niet bepaald zonder stagnaties verliep.
Het betrof Margreet, voor wie dit lange tijd te hoog was gegrepen, Kevin en Michael die ook in latere stadia van hun leerproces veel IN-distractorfouten maakten, en Nanja voor wie dergelijke arbeid op onoverkomenlijke obstakels leek te stuiten.
Desondanks zijn wij geneigd het eerder ingenomen standpunt in deze te handhaven.
Wat de eerste evaluatieve functie van het vrij produceren aangaat, bleek dat de operatie delen in het onderwijsleerproces onderbelicht bleef. Pas tegen het einde van het onderzoek kwam deze bewerking meer dan incidenteel voor in eigen produkties van leerlingen. Kan voor de vier genoemde leerlingen niet iets overeenkomstigs gelden met betrekking tot meer funderende kwesties op het concrete niveau? Bijvoorbeeld de zorgvuldigheid van uitlijning van de in onderwijsactiviteiten uitgewerkte onderdelen van de deelleergang, met name in de aanvangsfase. De verworven inzichten met betrekking tot de niveau-ontwikkeling voor bijvoorbeeld de modelvorming of de opbouw van weerstand tegen IN-distractoren kunnen nu worden verwerkt. Voor Kevin werd genoemd de grotere hechtheid waarmee het werken met materiaal in symboolvorm in de realistische bronnen verankerd zou moeten

zijn.
In het algemeen kan nog worden toegevoegd, dat in de hele uitlijning van de leergang de kwestie van de vaardigheid op tal van punten nadere aandacht verdient. Juist, wanneer activiteiten zich afspelen in het grensgebied van de twee eerste niveaus, zouden leerlingen als de genoemde ruime gelegenheid moeten krijgen zich de nodige vaardigheden eigen te maken.
Dit geldt bijvoorbeeld voor het maken van verdelingen voor gegeven en zelfbedachte situaties en het beschrijven ervan, voluit en in symbolen en omgekeerd, en ook voor het herhalen van deze activiteiten op iets grotere afstand van de concrete werkelijkheid.
Het zicht op de onderscheiden niveaus en niveauverhogingen bij de toegepaste indicatoren werd pas achteraf volledig helder. Vandaar, dat dergelijke kwesties ook pas nu kunnen worden onderkend.
Daarmee wil niet gezegd zijn, dat voor iedere leerling alle obstakels van de leerweg verwijderd kunnen worden; de breuken blijven – ook in de voorgestelde benadering – lastig. Wel kunnen middelen worden ontwikkeld om leerlingen als de genoemde in staat te stellen op wat langere termijn zelf de ondervonden obstakels op hun leerweg te leren overmeesteren.
Gelet op de vraag hoe het zelf produceren heeft uitgepakt, springen de volgende kwesties in het oog.

- Het zicht op de gelijkwaardigheid van breuken en de vaardigheid in het voortbrengen ervan nemen toe door de produktie van monografieën en de tweezijdige toepassing van schuilnamen daarbij. Dit geldt voor vrijwel alle leerlingen.
- Het optellen is de meest elementaire bewerking en voor een deel der leerlingen sterk dominant. Geleidelijk aan verbreedt zich echter het bewerkingspatroon van de meeste leerlingen, zij het dat het delen in een uitzonderingspositie blijft[21]; het leren innemen van een vermenigvuldigingsstandpunt – voor de meesten gold inderdaad dat dit echt moest worden geleerd – om herhaalde optellingen van hetzelfde, bijvoorbeeld bij de registratie van het 'Franse' verdelen, te kunnen verkorten, bleek voor tweederde deel van de leerlingen een middel tot bedoelde verbreding.
- Uiteenlopende eigenschappen, waarvan de commutativiteit van de optelling en vermenigvuldiging de meest elementaire waren, bleken voor vrijwel alle leerlingen en voor een aanzienlijk deel van hen in toenemende mate tot methoden van produktie van onderdelen van monografieën verheven te kunnen worden.

Het zelf ontwikkelen van methoden voor het uitvoeren van één of meer van de vier hoofdbewerkingen kon – voorafgaande aan het Land van Samen toen er dus nog geen aandacht aan formele regels was besteed – in de leerprocessen van tweederde deel van de deelnemende kinderen worden vastgesteld. Daarbij ging het in de meeste gevallen overigens wel om inzichtelijke methoden; soms nog dichtbij of zelfs aan concreet materiaal voltrokken en zeker

nog niet gestold tot algemeen toepasbare procedures volgens vaste regels.
Op de bekwaamheid tot het uitvoeren van bewerkingen in vraagstukken die louter in symboolvorm gesteld werden, gaan we in het volgende hoofdstuk in.

Tenslotte was er nog een veelheid van individuele eigenaardigheden in het verzamelde materiaal, zoals het starten van een monografie met een stambreuksgewijze uiteenlegging van de gegeven breuk, of het partieel samenstellen van breuken; bijvoorbeeld $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ via $\frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ en $\frac{7}{8} + \frac{1}{16}$ gespreid in de tijd uiteindelijk verkorten tot $\frac{15}{16}$. Dergelijke eigenaardigheden worden verder onbesproken gelaten.
We komen tot de slotsom dat de ontwikkelde leergang in zijn uitwerking verbeterd kan worden. Dit geldt de geleidelijke ontginning van de opeenvolgende niveaus, maar vooral het voltrekken van niveauverhogingen door de leerlingen zèlf.
Van vier leerlingen wezen de individuele leerprocessen uit, dat het verbreken van de banden met het concrete te weinig aan hen zelf werd overgelaten. Daardoor had het werken met materiaal in symboolvorm voor hen vrij lang iets geforceerds. Voor twee van hen ontlaadde zich dit gedurig in IN-distractorfouten.
Het produceren van monografisch materiaal zou – overeenkomstig de gegeven niveau-aanduiding – meer gedurig en systematisch kunnen plaatsvinden dan in dit onderzoek het geval is geweest. En de bewerking delen kan hechter in de leergang worden ingebed zonder onmiddellijk in rechtstreekse exercitie met regels te vervallen.
Ook in verband met bijvoorbeeld het schematiseren waren de eigen produkties onthullend. Zo ontdekte Michael tegen het eind van het onderzoek de waarde van de verhoudingstabel als oplossingsschema voor problemen. In zijn Land van Samen-proefwerk schreef hij de toepassing van dit middel aan de toekomstige maker ervan overvloedig voor. De manier, waarop hij de verhoudingstabel zelf in de slottoets toepaste, getuigt eveneens van het gestelde.
Het kon ook anders, zoals het leerpoces van Mark uitwees. Hij leek wat dit schema aangaat de boot volledig gemist te hebben.

6.7 Het niveautheoretisch kader en de leergangconstructie

Het constructiekader voor de leergang breuken zoals dit werd ontvouwd in § 3.2 kan nu verder worden uitgewerkt, of beter nog: een dergelijke verfijning ligt in de verrichte interne evaluatie besloten. Alleen het bedoelde niveautheoretische constructiemodel bleef daarbij tot dusverre buiten beschouwing. Dit wordt bij deze rechtgezet.
Enkele kanttekeningen zullen worden gemaakt aangaande:

— het horizontaal en verticaal mathematiseren;
— het les- en leergangnivean;
— de onderwijskundige grondstellingen van realistisch wiskundeonderwijs; en
— de niveautheorie binnen het geheel.
De kwestie van de theorie voor het onderwijzen en leren van breuken krijgt uitstel tot het slothoofdstuk.

Indelingen hebben dikwijls het bezwaar te onderscheiden en uiteen te leggen wat onverbrekelijk samenhangt. In dit opzicht heeft de interne evaluatie uitgewezen dat het indelen van het lesniveau bij het horizontale mathematiseren en van het leergangniveau bij het verticale mathematiseren zoals in het beschouwde constructiemodel, te grof is.
Immers, ook op het lesniveau kan zich verticaal mathematiseren voltrekken. Beide vormen van mathematiseren zijn niet strikt te scheiden.[22]
Welnu, dit overwegende kan van het door ons geschetste voortbrengingskader voor de leergang het volgende worden opgemerkt.

Niveautheoretisch conctructiemodel

1. *Het lesniveau*
   a. Constructie als onderwijsbeginsel
      Een leergang breuken voor het basisonderwijs kan metterdaad op grond van open, generatief materiaal worden uitgelijnd; materiaal dat in de realiteit als bron en toepassingsgebied is gesitueerd.
      De leergang kan hecht worden vervlochten met die voor verhoudingen.
      Eerst kunnen daartoe verdeelsituaties in het hart ervan worden gesitueerd en later vergelijkingsvraagstukken van verhoudingen in andere contexten.
      Het horizontale mathematiseren wordt gericht op:
      — de ontwikkeling van een breukentaal onder eerbiediging van de omgangstaal van in het bijzonder het herhaald halveren;
      — de constructie van het tafeltjessymbool als bouwsteen voor het eerste stadium van schematiseren met het tafelschikken in de rol van situatiemodel; (later gevolgd door het schematiseren met de verhoudingstabel);
      — de constructie van visuele modellen.
      In de latere toepassingen wordt met het horizontale mathematiseren aansluiting gezocht bij het stadium of niveau waarin zich het proces van verticaal mathematiseren dan steeds bevindt.
   b. Leren door constructies
      Samenwerking, onderhandeling en discussie kunnen gedurig plaats vinden om leermomenten op grond van de diverse constructies en eigen produkties te markeren.

2. *Het niveau van de leergang*
   a. Constructie als onderwijsprincipe op de lange termijn
      In het onderwijsleerproces (de leergang) kan uitgaande van lokale constructies en produkties van leerlingen inbreng plaats vinden.
      Het betreft:
      — de ontwikkeling van een breukentaal;
      — de onderscheiden vormen van verdelen;
      — de produktie van allerlei samenstellingen, uiteenleggingen en equivalenties van breuken door het verdelen gevarieerd toe te passen;
      — de geleidelijke ontwikkeling van modellen;
      — het voortgaande schematiseren;
      — de bestrijding van IN-distractoren;
      — de produktiemethoden voor monografieën;
      — de ontwikkeling van eigen methoden voor bewerkingen;
      — de inbreng met eigen constructies en produkties in toetsen en proefwerken.
   b. Leren door constructies op de lange duur
      De interactie als onderwijsmiddel om leermomenten op het lesniveau te bewerkstelligen kan op het leergangniveau vooral dienstbaar worden gemaakt aan het realiseren van leermomenten in dienst van het voortgaande mathematiseren in verticale zin.
      Individuele constructies en produkties kunnen de interactie voeden. De leraar kan daarbij zodanig regulerend optreden dat hij de inbreng van de leerlingen in de interactie op niveautheoretische overwegingen organiseert: eerst voorstellen op het concrete niveau ter discussie stellen en allengs nieuwe voorstellen in de interactie betrekken, die zich kenmerken door groeiende distantie van het concrete. De inbreng van de leerlingen wordt onderling vergeleken om zoveel mogelijk tot gemeengoed te worden en keuzen voor het vervolg van het leerproces te kunnen maken en verantwoorden.
      Met name het hele proces van symboolconstructie voor het tafelschikken, gevolgd door het voortgaande schematiseren en de ontwikkeling in de produktie van monografieën zijn mooie illustraties van deze interactie in dienst van het verticale mathematiseren.

Kortom, er heeft door het ontwikkelingsonderzoek een aanzienlijke verfijning van het toegepaste niveautheoretische constructiemodel plaatsgevonden.
Bovendien is het zicht op de samenhang binnen het model, d.w.z. de samenhang zo niet integratie van het onderwijzen en leren van breuken, sterk vergroot.
Immers, de in het beschouwde kader vervatte theorie voor realistisch wiskundeonderwijs begint tevens trekken van een leertheorie te vertonen.
Het gebruiken bijvoorbeeld van de realiteit als bron en toepassingsgebied kan men nu niet meer uitsluitend beschouwen vanuit onderwijsstandpunt. Vanuit

leerstandpunt tekent zich nu de mogelijkheid tot (verborgen) differentiatie af. De vraag namelijk of een realistisch probleem *bron* voor de begripsvorming dan wel *toepassing* is, hangt af van de stand van zaken in een individueel leerproces. Wordt het probleem door de lerende bewust tegemoet getreden met bepaalde begrippen, operaties of structuren die het onderwijs nastreeft als ordeningsmiddelen voor de verwerking van het betrokken vraagstuk, dan functioneert het als *toepassing*. Zo lang dit niet het geval is en het moet bijdragen aan de mentale constitutie van genoemde wiskundige ordeningsmiddelen, doet het dienst als bron.
Ook in deze zin zou nog op het hele constructiekader kunnen worden gereflecteerd.

6.8 Samenvatting en vooruitblik

Het praktische deel van onze probleemstelling behelsde het ontwikkelen van een leergang breuken voor het basisonderwijs (§ 2.4).
De interne of formatieve evaluatie leverde hiervoor grofweg twee soorten van gegevens op, namelijk informatie omtrent materiaal dat 'gewerkt' heeft en informatie over wat voor verbetering vatbaar is.
Op de eerste kwestie wordt in hoofdstuk 8 opnieuw ingegaan.
Bij het tweede gaat het vooral om zaken van macro-structurele aard, de globale uitlijning van de leergang betreffend.
In vrijwel alle gevallen komt het neer op het niet eerbiedigen op de lange termijn van de onderscheiden niveau-indelingen voor de verschillende indicatoren. Namelijk:

- Het werken op het concrete niveau kan nog evenwichtiger worden uitgelijnd (§ 6.2 en 6.3).
- De voortschrijdende niveau-verhoging in modelvorming en -toepassing dient beter afgestemd te worden op het voortschrijdende schematiseren en op de niveau-verhogingen, die zich in het werken met materiaal in symboolvorm kunnen voordoen (§ 6.4).
  Opmerking:
  Hieruit blijkt hoe buitengewoon complex het in deze studie beschouwde onderwijsleerproces in feite is. De gefragmenteerde beschrijving van de kwaliteit van het leerproces met behulp van enkele indicatoren zou dit niet mogen verbloemen.
- Het maken van een voorstelling bij wiskundig materiaal op groeiende afstand van de realiteit dient beter methodisch te worden gewaarborgd. Het grensverkeer bijvoorbeeld tussen de twee eerste niveaus zou geïntensiveerd kunnen worden. Ook kan meer methodisch aandacht worden besteed aan het concretiseren van uitsluitend in symbolen gestelde vermenigvuldigingen en delingen (§ 6.5).
- Het gedurig opslaan van monografieën zou hand in hand moeten gaan met voorgaande kwestie. Dit betekent dat de opeenvolgende niveaus geleidelijk met symbolisch materiaal worden gevuld. Vooral in het begin

zou dit nog hechter in de concrete bronnen moeten worden verankerd (§ 6.6).

- Voor geld als bemiddelend model zou een meer structurele plaats moeten worden ingeruimd (§ 6.3 en 6.4).
- De globale structuur van de leergang moet *tweesporig* zijn. Het eerste en funderende spoor van de verdeelsituaties kan pas dan verruimd worden met het tweede spoor van andere situaties (met verhoudingen), waarin deze een rol als toepassingsgebied gaan spelen voor het geleerde, wanneer voorgaande verbeteringsvoorstellen – hypothesen zo men wil – voor het hoofdspoor voor de beide eerste niveaus grotendeels zijn gerealiseerd, d.w.z., wanneer vergelijkingsvraagstukken een essentiële plaats krijgen in de leergang (§ 6.3).

Daarbij dient overigens opgemerkt te worden dat met kinderen van 7 à 8 jaar al heel wat voorbereidende activiteiten op het concrete niveau kunnen worden gedaan.

Voorgaande amendementen op de gebruikte uitwerking van de leergang zijn gebaseerd op de geobserveerde niveauverhogingen in de individuele leerprocessen, of juist op het uitblijven daarvan; het laatste geldt bijvoorbeeld deels voor het ontwikkelen en toepassen van visuele modellen.
De opgesomde wijzigingsvoorstellen zijn bedoeld om het zich voltrekken van de beschouwde niveauverhogingen in het voortgaande mathematiseren nog beter te waarborgen in geval het onderwijsleerproces herhaald zou worden met een dienovereenkomstig aangepaste uitwerking van de leergang.
Dit laat echter onverlet dat de individuele leerprocessen ook dan, evenals dit nu het geval was, perioden met een grote mate van instabiliteit kunnen vertonen. Een belangrijk deel der leerlingen bleek een betrekkelijk lange periode van oriëntatie en experiment nodig te hebben alvorens op koers te geraken.
Wij zijn van mening dat dit, gelet op de grote complexiteit van het onderwijsleerproces dat voert naar een operationeel breukbegrip, onvermijdelijk is.[23]
Het kenmerkende van genoemd verschijnsel in het leerproces is, dat het doen van stagnerende pogingen tot oplossing van vraagstukken op een te hoog niveau niet in een impasse behoeft te geraken. Negen van de dertien kinderen in ons onderzoek lieten zien, dat er dan een uitweg is, die zowel terugweg kan zijn (oplossing op lager niveau) als andere weg (oplossing op vergelijkbaar niveau). Zij legden zich dus niet bij impasses in een oplossingsproces neer, maar zochten en hervonden een uitweg in de concrete bronnen van hun inzicht.[24]
In hoofdstuk 8 komen we op deze kwestie nog terug.
Een ander kenmerk dat de beschouwde instabiliteit in het leerproces met zich meebrengt is de diep ingrijpende procesdifferentiatie die zich manifesteert.
Wil het onderwijsleerproces op de voorgestelde leest geschoeid, doelmatig beheerd kunnen worden dan is enig inzicht in de onderscheiden niveaus en

niveauverhogingen een voorwaarde, aangevuld met eventuele organisatorische maatregelen.[25]
Dit brengt ons bij het niveautheoretisch constructiemodel. Zowel de samenhang van de onderscheiden niveaus van les, leergang (en theorie) als het horizontaal en verticaal mathematiseren daarbinnen, konden in ruime mate worden verfijnd.
De kwestie van de theorie volgt overigens nog. Voor de externe of summatieve evaluatie, die eerst nog moet plaatsvinden, dient zich het volgende hoofdstuk aan.

Noten bij hoofdstuk 6

1. Deze algemene kwesties zouden ook in termen van reflectie beschouwd en geanalyseerd kunnen worden. De koerswijziging bijvoorbeeld na een dilemma in het oplossingsproces van een probleem (door het vastlopen vanwege onneembare getalobstakels bijvoorbeeld) gekenmerkt door het overgaan op een ander niveau van oplossing dan wel hernieuwde aanpak op gelijkblijvend niveau onder vermijding van genoemde obstakels is een voorbeeld van standpuntverandering, dat Freudenthal 'directed shifting' noemde. Het beoogde doel, het realiseren van de probleemoplossing wordt tijdens de geschetste koerswijziging (immers) niet uit het oog verloren.
   Het zou interessant zijn alle individuele leerprocessen nader op het verschijnsel reflectie te analyseren. Ook op dit punt moeten wij ons echter beperkingen opleggen (vergelijk hoofdstuk 2, § 2.4 en noot 33).
   Zie in verband met deze kwestie hoofdstuk 8 en Freudenthal (1978) (1979b) (1979c). Streefland (1980a) (1980c). Nelissen (1987) bevat een uitvoerig overzicht van literatuur over metacognitie en reflectie. In de beschrijving van zijn onderzoeksresultaten kiest hij echter voor een andere (arbitraire) niveau-indeling van reflectie dan die op grond van een analyse van vormen van 'shifting'.
2. Onder verwijzing naar hoofdstuk 5 in verband met het foutieve redeneren bij het vergelijken van verhoudingen volstaan we hier met het noemen van enkele recente publikaties. Hart (1985), Hasemann (1986a) (1986b). Overigens vindt in de literatuur in het algemeen nog steeds een aan het onderwerp gebonden beschouwing van deze kwestie plaats, dat wil zeggen, het foutieve, additieve redeneren bij verhoudingen wordt theoretisch niet in verband gebracht met IN-distractorfouten bij de breuken. Een uitzondering hierop vormt Noelting (1980), die met het oog op het leren van breuken en verhoudingen stelt, dat iemands operationele noties van natuurlijk getal een proces van 'adaptive restructuring' zouden moeten ondergaan.
3. Hasemann (1986a) observeerde dit verschijnsel eveneens. Ook voor Benny (hoofdstuk 1) bleken uitkomsten methode-afhankelijk te kunnen zijn.
4. De grafische weergave is mede geïnspireerd op het werk van Teule Sensacq en Vinrich (1982). Zie ook Streefland (1986f).
5. Er is sprake van spontane differentiatie. Dat dit tot '(zelf)determinatie' leidt, zoals Terwel (1986) stelt is niet veel meer dan een dooddoener, omdat men de facto voor iedere organisatievorm met elk curriculum tot genoemde vaststelling kan komen. Deze gaat bovendien voorbij aan het feit dat de aanlegdeterminatie van de leerling meebeslist over de manier waarop hij in een systeem, waarin spontane of leerprocesdifferentiatie wordt toegepast, zijn weg weet te vinden.
6. Zie in dit verband Streefland (1985c).
7. In Streefland (1983a) wijst onderzoek naar het progressief schematiseren met de verhoudingstabel dit uit.
8. Zie Streefland (1986a) in dit verband.
9. Zie Streefland (1985a) (1985c).
10. Zie Streefland (1983a).
11. Streefland (1982c) (1983a; hoofdstuk V).
12. Zie in dit verband Streefland (1978).
13. Dit kan, afhankelijk van de context van het leerproces en het (prille) stadium waarin dit verkeert, reflectie genoemd worden. De standpuntverandering waarom het gaat, betreft in dit geval 'parallel shifting', zoals Freudenthal deze vorm van standpuntverandering noemde. Zie ook noot 1. bij dit hoofdstuk.
14. Het verschijnsel van context- of situatiemodel is vrijwel uitsluitend onderkend binnen de realistische basisconceptie voor het wiskundeonderwijs. Dit is verklaarbaar vanwege de waardering, die er in deze theorie zowel voor het horizontaal als het verticaal mathematiseren is. In geen enkele andere richting is hiervan sprake. Juist in het horizontale en verticale mathematiseren vormen situatiemodellen niet alleen een verbindende schakel tussen beide

vormen van mathematiseren, maar tevens spelen ze hierin een beslissende rol op lange termijn.
Zie in dit verband Treffers (1987a), Streefland (1986b) (1987). Voorzover bekend, heeft alleen de Amerikaan Lesh situatiemodellen onderscheiden. Lesh (1984).

15. Ook Lesh e.a. (1983) hechten veel waarde aan dit aspect van de begripsverwerving.
16. Het zijn cognitieve procesmodellen als bedoeld door Greeno (1976), doch die het gekunstelde missen, dat zijn modellen voor de voortbrenging van equivalente breuken kenmerkte. Zie ook Treffers en Goffree (1985) en Streefland (1986b).
17. Voor de kwestie van de rijke context verwijzen we naar Treffers (1987a) en De Lange (1987; § 2.3). Laatstgenoemde spreekt in dit verband van contexten van de derde orde.
18. Deze omstandigheden maken dat het produceren van monografieën zich als *een* vruchtbare ingang tot de algebra voordoet. Zie in dit verband ook Streefland (1987b).
19. Er waren ook nog allerlei praktische belemmeringen die een optimaal verloop van het onderzoek in de weg stonden.
Bijvoorbeeld: het te laat gereedkomen van het computerprogramma, de soms langdurige onderbrekingen in de voortgang van het experiment, het ontbreken van de mogelijkheid om eens enkele lessen te groeperen op opeenvolgende dagen. Bovendien ging het om ontwikkelingsonderzoek waarin nu eenmaal de gang van het onderwijsleerproces niet op voorhand volledig bepaald kan zijn.
20. Zie in dit verband Treffers (1987a).
Confrey (1985) (1987), een overtuigd constructiviste, benadrukt eveneens de rol die reflectie bij het constructief leren van wiskunde kan spelen. Freudenthal (1979b) betoogde dat de brug tussen construeren en bewijzen in de wiskunde geslagen wordt door op het geconstrueerde te reflecteren.
21. Zie Streefland (1987b).
22. Zie in dit verband Freudenthal (1987), Streefland (1985b) en Treffers (1987a).
De Lange (1987; loc.cit.p.44) stelt in dit verband: 'A division of the clusters of activities of mathematization into two distinct components is rather arbitrary, to say the least ..... But a bipartition in a descriptive sense can be useful, not only to describe mathematization more clearly in concrete examples, but also to discriminate between different methodologies, ...' Hij beschouwde overigens het mathematiseren voornamelijk op lokaal niveau, binnen het oplossen van afzonderlijke, complexe problemen.
23. Zie in dit verband Lesh (1985), Streefland (1986f) en Treffers (1987a).
Deze kwestie van de instabiliteit in het leerproces kan ook beschouwd worden in termen van veldsturing en veld(on)afhankelijkheid of in termen van impulsiviteit en reflectieve instelling, zoals Radatz (1976) bijvoorbeeld deed. Overigens komt het ons zinvol voor deze kwestie vanuit individuele leerprocessen in een mathematisch-didactische context te beschouwen.
De genoemde psychologische begrippen zijn geen constanten in het leergedrag van kinderen (Streefland (1980c) en ondergaan op deze manier een specificatie waarmee het onderwijs zijn voordeel kan doen.
24. Freudenthal heeft het belang van het openhouden van de bronnen van het inzicht voor het leerproces bij herhaling beklemtoond.
25. Zie in dit verband de differentiatie-special van Willem Bartjens 5 (3), 1986.

7 Externe of summatieve evaluatie

7.1 Inleiding en overzicht

Zoals eerder werd voorzien (hoofdstukken 3 en 6) zullen de leerprestaties van de onderzoeksgroep worden vergeleken met die van groepen leerlingen, die met uiteenlopende alternatieve programma's voor breuken zijn opgeleid. Wellicht moeten we in dit verband stellen dat de kinderen slechts dienen als medium om een vergelijking van de ontwikkelde leergang met de andere programma's te kunnen maken. Voorgaande formulering betekent overigens een aanzienlijke simplificatie van onze intenties. In feite is de empirische rechtvaardiging van ons onderzoek ondoenlijk, of op zijn minst buitengewoon lastig. We raken hier aan de uiterst complexe problematiek van de doelstellingen van programma's, de vraag of programma's vergelijkbaar zijn op grond daarvan, de kwestie van de legitimiteit van toeschrijving van geconstateerde effecten aan het feitelijke onderwijs, en de verantwoording van de gebruikte instrumenten tegen deze achtergrond. In § 7.4 waar de gebruikte instrumenten verantwoord worden, zal in kort bestek nader op deze kwesties worden ingegaan.
Op voorhand kan worden gesteld, dat de beoogde summatieve evaluatie dus eerst en vooral begrepen dient te worden als empirisch sluitstuk van het verrichte ontwikkelingsonderzoek. In het bijzonder is het er dus om te doen de resultaten van dit onderzoeksdeel te beschouwen in het verlengde van de geobserveerde, individuele leerprocessen en van overige bedoelingen, die we met dit onderzoek hadden (hoofdstuk 2).
Dit betekent dat het in de eerste plaats gaat om:
— revisie van de leergang en
— bijdragen aan de theorievorming,
en dus niet zozeer om het vergelijken van toetsresultaten. Het is ook om die redenen, dat de omvang van de zogenoemde controlegroep (ca 200 leerlingen) van aanzienlijk meer gewicht moet zijn dan de experimentele groep (13 leerlingen). Bovendien dient een representatieve verscheidenheid aan gebruikte programma's vertegenwoordigd te zijn. Alleen dan immers kunnen bijzonderheden in oplossingsprocessen en uitkomsten die voortgebracht worden door de experimentele groep als effecten van het gevoerde programma worden aangemerkt voorzover deze binnen de grote controlegroep niet of nauwelijks voorkomen. In verband hiermee ligt het voor de hand in het bijzonder te letten op typen oplossingsprocessen en typen fouten, die door de experimentele groep, vergeleken met de controlegroep(en) gemaakt zijn.
De volgende methoden, behoudens de experimentele, zullen beknopt naar hun inhoud, voor zover het de deelleergang voor de breuken betreft, worden gekenschetst.

methode	n=
Rekenwerk (RW)	62 (3)*
De Wereld in Getallen (WIG)	15 (1)
Taltaal (TT)	76 (3)
Niveau Cursus Rekenen (NCR)	27 (1)
Naar Zelfstandig Rekenen (NZR)	22 (1)
Experimenteel Programma (EP)	13 (1)

* : tussen haakjes het aantal groepen.

Om toch enige indicatie te geven van de vergelijkbaarheid van de kwaliteit van de verschillende deelnemende groepen zal een overzicht gegeven worden van de scores met betrekking tot de weging van de leerlingen overeenkomstig de wet op het basisonderwijs.[1]
Behalve de reeds meer genoemde slottoets zullen ook de resultaten op de CITO-eindtoets basisonderwijs 1986 voor rekenen in de beschouwingen worden betrokken. Slechts van de slottoets zullen de items, met de daarop geboekte resultaten aan een nadere kwalitatieve analyse worden onderworpen.
Het ligt in de rede bij de voorgenomen vergelijking de eerder geselecteerde indicatoren opnieuw te benutten, indien en voorzover deze toepasbaar zijn bij beschouwing van de resultaten op de CITO-toets. Door de gesloten vraagvorm van deze toets en de uitkomst gerichte registratie van de resultaten is immers veel informatie inzake de oplossingsprocessen verloren gegaan.
De andere toets leent zich in deze veel meer voor een beschouwing van oplossingsprocessen. De toegepaste wiskundige middelen kunnen in samenhang met de uitkomsten aanwijzingen bevatten omtrent de effecten van de gebruikte onderwijsprogramma's. Men mag bijvoorbeeld niet verwachten, dat een naar de letter gevolgde leergang, waarin de verhoudingstabel ontbreekt, veelvuldige toepassing van de verhoudingstabel als effect zal sorteren.
Voor het overige zullen uitslagen hooguit in absolute en relatieve waarden (percentages) en voornamelijk in voetnoten worden opgenomen, dus met alle relativerende restricties vandien. De invloed van de leraren van de diverse groepen kan vanzelfsprekend niet (geheel) buiten beschouwing blijven. In de samenvattende conclusies zullen de geobserveerde effecten van de beschouwde programma's die in dit onderzoeksdeel een rol spelen, mede in dat licht worden bezien.

7.2 De groepen gewogen

Krachtens de wet op het basisonderwijs worden de kinderen 'gewogen'. Veel kinderen uit achterstandsituaties betekent extra formatie. De volgende 'gewogen' categorieën zijn voor ons onderzoek van belang.
a. een 'gewicht' van 1,25 wordt toegekend aan Nederlandse leerlingen. van

wie de ouder, die tevens kostwinner is, ongeschoolde arbeid verricht dan wel een opleiding lager dan het eindexamen LBO heeft;

b. 1,9 voor leerlingen als onder a, doch bovendien behorend tot een van de volgende groepen:
   — afkomstig uit een van de zogenaamde wervingslanden (Griekenland, Italië, Joegoslavië, Kaap-Verdië, Marokko, Portugal, Spanje, Tunesië, Turkije);
   — afkomstig uit Suriname of de Nederlandse Antillen;
   — afkomstig van de Molukse eilanden;
   — als vluchteling naar Nederland gekomen.

c. 1.00 alle overige leerlingen die niet behoren tot categorie a en die niet in een pleeggezin zijn ondergebracht omdat de ouder, tevens kostwinner, het schippersberoep uitoefent of van wie de ouders een trekkend bestaan leiden.

Afgaande op voornoemde criteria differentieerden de groepen met de diverse programma's zich als volgt:

methode of programma	aantal leerlingen per categorie			n=	gemiddelde score
	1,00	1,25	1,90		
Rekenwerk (RW)	15 (157)	41 (329)	14 (185)	70 (671)	1,33 (1,37)
De Wereld in Getallen (WIG)	10 (47)	7 (71)	4 (36)	21 (154)	1,25 (1,33)
Taltaal (TT)	62 (357)	16 (156)	10 (65)	88 (578)	1,15 (1,17)
Niveau Cursus Rekenen (NCR)	12 (66)	13 (92)	3 (33)	28 (191)	1,21 (1,28)
Naar Zelfstandig Rekenen (NZR)	10 (67)	10 (115)	3 (33)	23 (215)	1,23 (1,27)
Experimenteel Programma (EP)	4 (41)	9 (76)	- (24)	13 (141)	1,17 (1,29)

Weging van de deelnemende groepen met – tussen haakjes – de schoolscores.[2]

Het overzicht wijst uit, dat de groep die met Taltaal gewerkt heeft (drie scholen) de gunstigste positie bekleedt, terwijl de Rekenwerk-groep (drie scholen) in het tegendeel verkeert. De onderzoeksgroep neemt een tussenpositie in.[3]

7.3 De programma's vergeleken en getypeerd

7.3.1 Inleiding

De deelleergangen voor breuken in de diverse door de controlegroep gebruikte methoden zullen globaal met elkaar worden vergeleken en gekenschetst tegen de achtergrond van de typeringen van de breuken volgens de uiteenlopende basisconcepties (hoofdstuk 2).

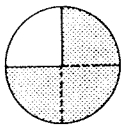
In het vergelijkende deel van het onderzoek is sprake van twee methoden van mechanistische snit, namelijk NCR en NZR.[4] De overige programma's, namelijk WIG, RW en TT, zijn van realistische signatuur.[5] Het gaat dus vooral om beide genoemde stromingen in het reken/wiskundeonderwijs (zie § 2.2.2 en 2.2.4).

Het structuralisme zal op de achtergrond zijn partijtje meeblazen omdat de gebruikte programma's zeker niet de geschetste ideaaltyperingen weerspiegelen (zie § 2.2.3). We plaatsen accenten bij ingrijpende punten van verschil of overeenkomst.

7.3.2 NCR en NZR

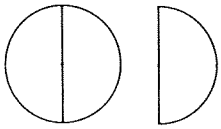
De instap in de breuken geschiedt via het verdelen *binnen* de eenheid, d.w.z. verdelen dat al voltrokken is ook in het circulaire materiaal van uniforme eenheid uit de breukendoos. Stapsgewijs ziet zo'n leergang er aldus uit.[6]

1.



1 vierde is wit
.... zijn gestreept.

2. 1 hele = 1 halve + ... 1 hele = 3 achtsten + ...
   2 vierden + ... = 1 hele. 6 achtsten + ... = 1 hele.
3. Teken zes cirkels en kleur daarvan:
   a. 1 vierde; b. 1 derde.
4. Als je van een taart vijf zesden afsnijdt, welk deel blijft er dan nog over?
   Hiermee is de introductie een feit. Op deze uiterst magere instap moet een uitbouw volgen, die slechts kan leiden tot exercitie binnen het systeem. Een enkele keer komt er een 'nieuw geval' bij, dat eerst weer even visueel gemaakt wordt, zoals:
5.



3 halven is *evenveel* als 1 hele + 1 halve.
Ook de breukencirkels worden in dit stadium nog steeds gebruikt, bijvoorbeeld om 'helen uit te halen':

6. 5 vierden = ; 8 achtsten = ; 6 derden =
   Nu kan er weer naar hartelust gerekend gaan worden:
7. 2 derden + 2 derden =
   1 hele + 1 derde =
   1 hele - 2 derden =

Tot aan de overgang op de formele breuknotatie telden we circa 160 opgaven van de types 2, 6 en 7 en van de overige typen bij elkaar nog geen tien opgaven.
Vanaf taak 55 volgt dan het formele breukrekenen in symbolen: helen uithalen ($\frac{1n}{x}$ =); helen omzetten in breuken (6 = $\frac{}{4}$), breuken ordenen ($\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$) etc. De rijen rijgen zich nu aaneen.

De ingrijpendste kenmerken van een dergelijke benadering, evenzovele verschillen met de realistische, zijn:

— reële situaties uit de werkelijkheid van en voor kinderen ontbreken; bijvoorbeeld de verkenning en bewerking van echte verdeelsituaties, het voltrekken van verdelingen daarin en het beschrijven van het verdelen en de uitkomsten;

— de indruk wordt gewekt, dat breukrekenen zoiets als rekenen met benoemde getallen is, bijvoorbeeld 3 vierden + 2 vierden = ... naar analogie van 3 km + 2 km = ...; dat breuk een relatiebeschrijver is en het doen postvatten van juist deze notie in het onderwijsleerproces, wordt dus sterk ondergraven; ook het werken met onveranderlijke eenheden in het breukendozenmateriaal draagt hiertoe bij; extreem gesteld: met dergelijke programma's leren de kinderen *niet* wat een breuk is;

— er wordt een allesbeheersende nadruk gelegd op het oefenen van de regels voor de bewerkingen, geval na geval, rij na rij, paragraaf na paragraaf; slechts één doel wordt er nagestreefd, namelijk geïsoleerde regelgerichte reproduktie van het systeem.

Dergelijke breukenleergangen omvatten zo'n 30% van het totale programma voor de drie hoogste leerjaren van de basisschool, gemeten naar het aantal pagina's.

Samengevat komt het erop neer, dat de kenmerken van de structuralistische benadering, namelijk accent op structuur, samenhang en het nastreven van inzicht volledig ontbreken.

7.3.3 De programma's met realistische trekken

WIG, RW en TT hebben realistische trekken in die zin, dat bijvoorbeeld reële verdeelproblemen dienst doen als bron voor de breuken en als toepassingsgebied. En niet alleen dat. Het meten dient ook als bron, zowel in TT als in RW. Aan de andere kant moet van deze beide programma's worden gesteld, dat zij te snel doorstoten naar te formele niveaus.[7]

Andere trekken van overeenkomst met de realistische basisconceptie zijn bijvoorbeeld het veelvuldig gebruik van schema's en visuele modellen. Zo komt in alle drie de beschouwde programma's de verhoudingstabel frequent voor en worden uiteenlopende visuele modellen veelvuldig toegepast, bijvoorbeeld de getallenlijn en het oppervlaktemodel.

Wat het nastreven van interne samenhang aangaat, zijn er eveneens trekken van gelijkenis, bijvoorbeeld de samenhang breuken-decimale breuken of breuken-procenten.[8] Bij genoemde samenhangen ligt het accent dan bijvoorbeeld op de toepassing van verhoudingstabellen met het oog op het organiseren en deels voortbrengen van equivalentieklassen.

Bijvoorbeeld:[9]

2 **Wie heeft er gelijk?**

a In de klas van Josien hebben 14 van de 25 kinderen een zwemdiploma.
In de klas van Joost hebben 13 van de 20 kinderen een zwemdiploma.
Josien vindt dat haar klas beter is in zwemmen dan de klas van Joost. Maar Joost is het daar niet mee eens.
Wie heeft er gelijk?
Neem de tabellen over en vul die in.

14					
25					

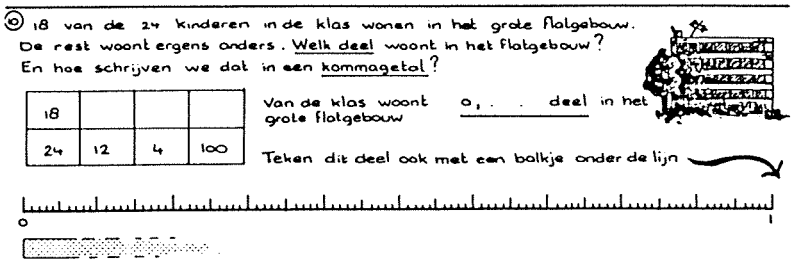
13					
20					

Vergelijk deze twee klassen eens met de Parkschool waar 60% van de kinderen een zwemdiploma heeft.

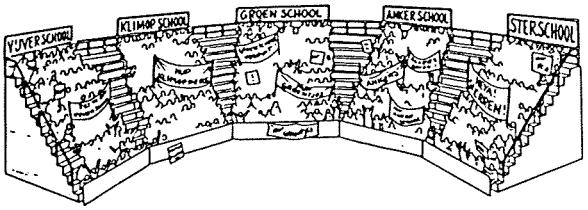
b Alwin en Annelies hebben beiden een spaarbankboekje.
Alwin heeft een jaar lang ƒ 300,— op zijn boekje staan.
Aan het eind van het jaar krijgt hij ƒ 15,— rente.
Annelies heeft er ƒ 500,— op staan en krijgt ƒ 20,— rente.
Annelies denkt dat ze meer rente krijgt dan Alwin.
Heeft ze gelijk?
Neem de tabellen over en vul die in.

15					
300					

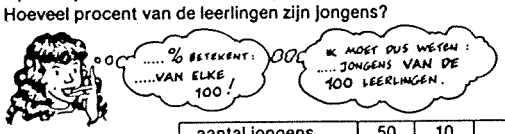
20					
500					



Vijf scholen houden in de sporthal een sportwedstrijd.



1 Op de Vijverschool zitten 75 meisjes en 50 jongens.
Hoeveel procent van de leerlingen zijn jongens?



aantal jongens	50	10		
aantal leerlingen				100

a Vul de tabel in.
b Hoeveel procent van de leerlingen zijn jongens?
c Hoeveel procent van de leerlingen zijn meisjes?
d Hoe groot is het percentage jongens en meisjes samen?
Kun je dat ook verklaren?

Ten aanzien van de drie methoden signaleert De Jong (1986;p.258,210-211,268) de volgende aandachtspunten:

over WIG

- De methode geeft veel mogelijkheden voor een *actieve inbreng* van de leerling. De handleiding biedt hiertoe tips die 'to the point' zijn.
- De methode biedt zinvolle mogelijkheden voor *gedifferentieerde leerprocessen.*
- Vooral in de onderbouw biedt de methode gelegenheid tot *actieve inbreng.*

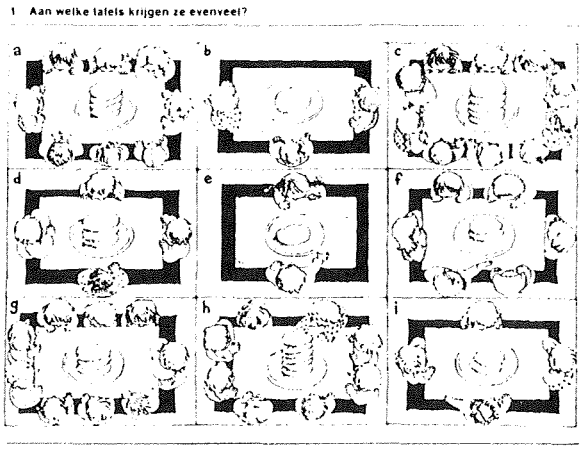
over TT

- Mogelijkheden tot *gedifferentieerd onderwijs* zijn zeker aanwezig. De differentiatievorm naar oplossingsniveau kan genoemd worden.

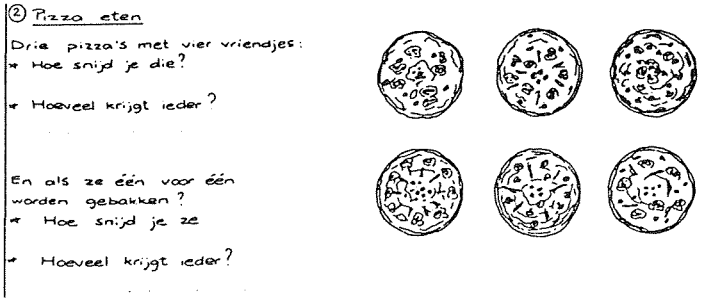
over RW

- De methode biedt mogelijkheden voor een *actieve inbreng* van de leerling.
- De methode biedt mogelijkheden voor *gedifferentieerde leerprocessen.* Bij de deelleergangen voor het cijferen wordt overigens een sterke sturing door de leerkracht verondersteld.

Bezien we de genoemde aandachtspunten nader, met een accent op de mogelijkheden tot actieve inbreng dan dringt zich ondanks het geconstateerde een ingrijpend verschil op van de drie programma's met de realistische stroming. De genoemde inbreng van leerlingen in hun eigen leerproces is namelijk niet methodisch nagestreefd. De genoemde vaststellingen gelden voornamelijk voor het lokale niveau met zijn gelegenheden voor het doen van kleine constructies. Voor de macro-uitlijning van de deelleergangen zijn aan deze mogelijkheden echter geen consequenties verbonden. Om dit te illustreren geven we eerst weer uit elk der beschouwde methoden een voorbeeld.



Het vergelijken van dergelijke situaties blijft beperkt tot een enkel incident, terwijl toch met de inbreng van kinderen van hieruit een mathematiseringsproces over langere termijn kan worden georganiseerd.[10]



Iets overeenkomstigs geldt het voltrekken en beschrijven van verdelingen als in het gegeven voorbeeld, ook hier niet veel meer dan een lokaal incident.[11] Tenslotte het voorbeeld uit Taltaal[12]:

Hoeveel mandarijnen liggen hier?
Optellen:
$1 + \frac{5}{9} + \frac{4}{9} + \frac{3}{9} = 1\frac{12}{9}$

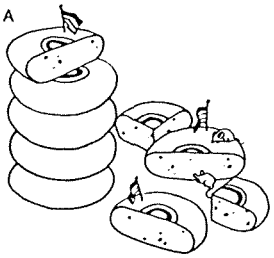
Helen eruit:
$1\frac{12}{9} = 2\frac{3}{9}$

Vereenvoudigen:
$2\frac{3}{9} = 2\frac{1}{3}$

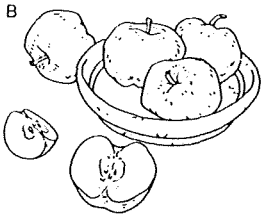
Er ligt dus $2\frac{1}{3}$ mandarijn.

1 Maak ook zulke rekenzinnen bij deze plaatjes.

A

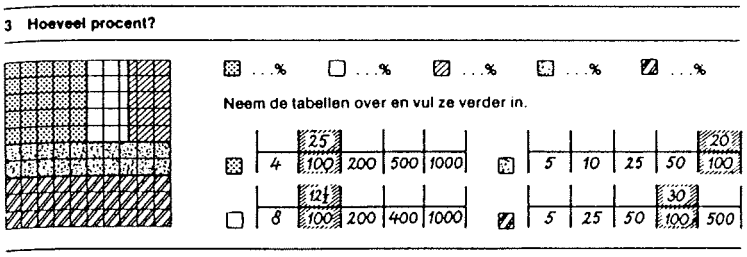


B



Ook het zelf beschrijven van situaties in rekenzinnen, uiterst essentieel in verband met het horizontaal mathematiseren (toepassen), blijft beperkt tot enkele van dergelijke situaties en is niet vanaf het begin methodisch verwerkt.
Men kan deze kwestie ook anders stellen. De wiskundige organisatie van situaties en de ontwikkeling en/of keuze van wiskundige middelen daarbij, alsmede de voortgang binnen de wiskunde zelf, wordt grotendeels voltrokken buiten de leerlingen om en ligt dus al in de boekjes vervat. Anders gezegd: aan het zèlf construeren, ordenen, symboliseren etc. komen de leerlingen ook met deze drie realistische trekken vertonende programma's niet toe.[13] Bijgevolg is de gelegenheid tot interactie over verschillende oplossingen en constructies lokaal van karakter en kan – door het niet eerbiedigen van de realistische grondstelling van vrije produkties en constructies – dus ook niet in dienst staan van het voortschrijdende mathematiseren.
De voortgang in het mathematiseren is de leerlingen dus uit handen genomen. Daardoor vinden in de drie beschouwde programma's te abrupte niveauverhogingen en formaliseringen plaats. In dit opzicht vertonen deze programma's vrij sterke structuralistische trekken, omdat op zulke momenten blijkt, dat de structuur van het systeem sterk dominant geweest is toen de inhoud werd uitgelijnd.

Een voorbeeld:



14

Vrijwel onmiddellijk na de introductie van het procentbegrip wordt deze opgave gegeven, die uitsluitend handelt over het voorgestructureerde normeren op honderd; behalve de distantie tot enige reële bron is er sprake van een omkering, namelijk de gerichtheid op de normering op 100, die de leerlingen, een enkele uitzondering daargelaten, onmogelijk in dit stadium al zelf voltrokken kunnen hebben.

a. *Breuken op de getallenlijn*

Teken een getallenlijn in je schrift over de gehele bladzijde. Deze loopt van tien tot vijftien.

Zet ook 11, 12, 13 en 14 op de goede plaats.

Zet nu de volgende breuken op de goede plaats:

$11\frac{1}{2}$, $13\frac{2}{3}$, $11\frac{3}{5}$, $10\frac{1}{5}$, $12\frac{3}{4}$, $10\frac{2}{3}$, $14\frac{1}{4}$, $13\frac{1}{3}$.

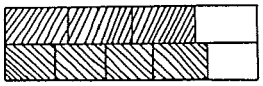
Let vooral op of $13\frac{1}{3}$ en $13\frac{2}{3}$ in goede verhouding staan, of $11\frac{1}{2}$ en $11\frac{3}{5}$ onderling goed staan.

Gebruik bij het vergelijken van de getallen eventueel je breukenstrookjes.

b. *Breuken en breukenstrookjes*

Vergelijk deze breuken met behulp van de breukenstrookjes.

Leg bijvoorbeeld voor de vergelijking $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$ de strook verdeeld in vieren naast de stroken verdeeld in vijven.

Welk deel is groter? 

Gebruik de tekens >, < en =.

$1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{4}{5}$	$4\frac{1}{4} \cdot 4\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}$	$3\frac{4}{5} \cdot 3\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{4} \cdot 5\frac{1}{3}$
$1\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{2} \cdot 4\frac{3}{6}$	$3\frac{1}{4} \cdot 3\frac{1}{5}$
$1\frac{3}{10} \cdot 1\frac{1}{2}$	$4\frac{7}{8} \cdot 4\frac{3}{4}$	$6\frac{1}{6} \cdot 6\frac{1}{5}$

15

Dit voorbeeld is in feite kenmerkend voor een structuralistische benadering. De breuken vormen het uitgangspunt en worden gematerialiseerd in getallenlijnen en stroken. Daarmee wordt het formele echter niet opgeheven. Voor het ordenen van $1\frac{1}{3}$ en $1\frac{4}{5}$ had de eerder geciteerde benadering (p.364) opnieuw kunnen worden benut. Namelijk: '3 kinderen verdelen 4 pizza's en 5 kinderen 9 pizza's. Maak een verdeling. Hoeveel krijgt een kind in elk groepje? In welk groepje het meest?' Hier wordt dus het geciteerde over Rekenwerk uit De Jong (1986) bevestigd. De deur naar het maken van IN-distractorfouten wordt hier wijd opengezet.

3 Neem de tabel over. Vul hem verder in:

	aantal figuurtjes	aantal kruisjes	deel kruisjes	deel rondjes
xxxoooo	7	3	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$
xxooooo				
xxxooooo				
xxxoo				
xxxxxoooo				
xxxxxxx				
xxooooooo				
xxxxxxoooo				
ooooxxxxxx				
oooooooooo				

16

Reeds enkele lessen na de start van de deelleergang in TT volgt deze opdracht. Gelet op het feit, dat enkele leerlingen in ons onderzoek een jaar nodig hadden voordat zij de breuk in de deel-geheel relatie algemeen konden toepassen komt deze formalisering te vroeg en bevestigt hetgeen van De Jong (1986) over TT aangaande deze kwestie werd geciteerd.

Het spreekt natuurlijk vanzelf, dat de samenstellers van deze programma's ook nog allerlei andere overwegingen hadden om de respectieve deelleergangen zó en niet anders uit te lijnen. Er kunnen overwegingen van innovatieve aard geweest zijn, op grond waarvan men niet al te revolutionair van de vigerende onderwijsinhoud voor rekenen wilde afwijken. Bovendien werd het beginsel van de eigen constructies en produkties evenmin methodisch gerespecteerd en gerealiseerd in het Wiskobasprogramma.[17]
Tenslotte moeten we, wat deze programma's betreft, nog een verschil in nagestreefde einddoelen vermelden ten aanzien van de vier hoofdbewerkingen.
RW gaat zonder terughouding op de vier hoofdbewerkingen in. TT gaat iets minder ver, door bij het delen slechts gehele delers te beschouwen.
WIG heeft nog een stapje teruggedaan en presenteert slechts die gevallen, waarin een deling van twee kleine gehele getallen in een breuk wordt omgezet, bijvoorbeeld $2 : 3 = \frac{2}{3}$; $5 : 2 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$.

WIG legt ook aan het vermenigvuldigen beperkingen op, door niet verder te gaan dan een breuk of gemengd getal te vermenigvuldigen met uitsluitend gehele getallen. De omvang van de aandacht voor de breuken in de drie methoden is vergelijkbaar met die in het experimentele programma. Gemiddeld zo eens per tien lessen is dit onderwerp expliciet aan de orde, hetgeen grofweg een halvering van de omvang betekent, vergeleken met mechanistische programma's.
In TT zijn de activiteiten ondergebracht in clusters van lessen. Dit is in WIG en RW in zekere zin ook het geval, zij het dat het clusters van beperktere omvang zijn. Het experimentele programma kon slechts les na les gespreid in de tijd worden afgewerkt met intervallen variërend van één week tot drie maanden (hoofdstuk 3).

7.4 De toetsen

Slottoets
Het vaststellen van de uitkomst voor de slottoets is geen eenvoudige zaak. Op het hoogste niveau van bedoelingen zijn de deelleergangen in het geding namelijk onvergelijkbaar. Immers, het leren mathematiseren als leidend beginsel achter het experimentele programma ontbreekt in de overige, ook die met een zweem van realisme (§ 7.3). Door zich daarop te richten, bijvoorbeeld te vragen naar vrije produktie van monografieën, sluit men de mogelijkheid tot selectie van een controlegroep bij voorbaat uit. De onderzoeker dient bij de samenstelling van de slottoets zijn constructiemodel voor dit ontwikkelingsonderzoek (hoofdstuk 3) dus geweld aan te doen, omdat geen recht kan worden gedaan aan het constructie- en produktiebeginsel. De samen te stellen toets kan geen afspiegeling vormen van het gerealiseerde onderwijs volgens de uitgewerkte leergang (zie ook § 7.6.3).
Vatten we echter doelstellingen van lager kaliber in het oog, met betrekking tot zuiver en toegepast rekenen, dan is er sprake van een doorsnede die voor empirische toetsing in aanmerking komt.[18]
Het is dus noodzakelijk de kwestie van de doelstellingen bij het toetsen te beschouwen. Er dient te worden vermeden, zoals in veel formatief en summatief evaluatie-onderzoek gebeurt, dat de intenties achter de gekozen toetsitems op de achtergrond blijven en dus verzwegen worden.[19] Bovendien vraagt één van de betekenissen van 'realistisch' in ons onderzoek, namelijk 'kijken hoever men met een groep basisschoolkinderen met de breuken kan komen' (hoofdstuk 2) om de vaststelling 'tot zover'. Deze constatering dient dan niet te berusten op interne argumenten, zoals dit bij het traceren en beschrijven van de individuele leerprocessen het geval was, maar dit moet ook met objectiverende argumenten van externe aard gestaafd worden.
Evenwel 'kijken hoe ver ... ' is hier aan een termijn gebonden, die met het oog op het leren mathematiseren kort genoemd moet worden.[20] Het breukpunt lag aan het einde van de basisschool.
Wat het schooltype aangaat is er mede in het licht van de vernieuwing van

het wiskundeonderwijs voor de leeftijdsgroep van 12-16 bezien, echter sprake van eindtermen, en: '*...de verbinding tussen passende eindtermen en toetsitems is problematisch, wanneer het om het kunnen toepassen van rekenkundige vaardigheden gaat, zijnde één van de hoofddoelstellingen van het reken/wiskundeonderwijs.*' Dit komt, omdat het begrip toepassen te veelomvattend is.[21]
Desondanks is gepoogd een slottoets samen te stellen, waarvan de inhoud niet 'in het voordeel' mag zijn van de experimentele groep noch van één van de overige groepen. Hiermee wordt dus de gedachte aan een doorsneetoets bevestigd. Dit alles overwegende, werd een toets gecomponeerd, die – ruwweg – voor eenderde gedeelte uit redactievraagstukjes bestond, bij wijze van toepassingen en voor het overige uit zuivere rekenvraagstukken. De kwestie van de breedheid van het toepassen werd hiermee eveneens vermeden. De toets onderging enkele screeningsronden door deskundigen en werd tevens in een voorafname getest op onduidelijkheden, dubbelzinnigheden in de formuleringen, (on)geschiktheid van bepaalde items en haalbaarheid in de tijd, in enkele brugklassen van een scholengemeenschap voor LEAO-MAVO, voordat de definitieve versie zijn beslag kreeg.[22]
In § 7.5 zullen de items met achterliggende bedoelingen op rij worden gezet. In de daarop volgende kwalitatieve analyse van de resultaten zullen de oplossingsprocessen beschouwd worden naar de toegepaste wiskundige werktuigen en niveaus van abstractie, dit alles met betrekking tot – en voorzover mogelijk – kennis, vaardigheden en inzichten, die werden toegepast.[23]

CITO-eindtoets basisonderwijs 1986
Met dezelfde intenties als hiervoor beschreven werd besloten eveneens van de CITO-eindtoets basisonderwijs 1986 gebruik te maken, en wel van het onderdeel rekenen. Omdat het – nogmaals – niet om een prestatievergelijking gaat, zullen we de uitkomsten op de CITO-toets letterlijk in de marges van dit hoofdstuk verwerken, dat wil zeggen in voetnoten. Deze toets is overigens minder geschikt voor een analyse als beoogd, vanwege de gesloten vraagvorm, waardoor informatie over oplossingsprocessen ontbreekt. Overigens kan deze toets mede een extra objectiverend tintje aan het verrichte ontwikkelingsonderzoek geven, vanwege de geschetste doorsnedefunctie die de CITO-toets eveneens heeft.[24] De resultaten op het onderdeel breuken met wiskundig verwante gebieden (verhoudingen, procenten) zullen apart worden vermeld.
Door de beschikbaarheid van de uitslag op deze toets voor een steekproef van 2240 leerlingen kunnen de bijzondere effecten van het onderwijs in het experiment ook 'landelijk' worden bezien.[25]

7.5 Uitkomsten

7.5.1 Inleiding

De uitslagen op de CITO-toets zullen in de marge worden meegenomen op

die plaatsen waar dit het best passend is. Van de slottoets zal item na item beschouwd worden met een weergave van de achterliggende intenties en een zo beknopt mogelijke kwalitatieve analyse van de oplossingsprocessen en uitkomsten. Voorzover relevant zullen de volgende kwaliteiten in het oog worden gevat: toepassing van een model, visueel dan wel voorgesteld, voorzover uit de neerslag van een oplossing afleidbaar; en verder de toepassing van een schema van handig rekenen of van een algoritme.
Tenslotte wordt het rechtstreeks dan wel niet beantwoorden beschouwd, alsook de (on)juistheid van de uitkomst en of er sprake is van een IN-distractorfout in de oplossing. Omdat een oplossing meer dan één van genoemde kwaliteiten kan weerspiegelen kunnen dubbelscores optreden. Bijvoorbeeld: het toepassen van een visueel model of schema gepaard aan handig rekenen. De *niet* dominante kwaliteiten van een oplossing(sproces) zullen tussen haakjes gescoord worden. Tevens zullen we – en wel in het bijzonder voor de experimentele groep – de in § 5.2 voorgenomen beschouwing van het oplossingsgedrag per leerling op een batterij van problemen hier verwerken. Tenslotte zij nog vermeld, dat alle deelnemende kinderen vooraf werden opgewekt, de beschikbare schrijf- en tekenruimte in de toets zoveel mogelijk te benutten bij het maken ervan en het nadenken over wat ze van breuken geleerd hadden. Door deze opwekking kunnen oplossingsprocessen en uitkomsten niveaus van kennis, vaardigheden en inzichten vertonen, die niet altijd het feitelijke niveau van de betrokken leerling weerspiegelen.

7.5.2 De slottoets, een kwalitatieve analyse

Item 1
Na een verjaardagsfeestje zijn er nog 8 repen chocolade over.
De jarige, Peter, besluit die repen eerlijk te verdelen met Anja en Wim.
▸ Hoeveel chocola krijgen Peter, Anja en Wim ieder?

Bedoelingen
Ook in het meest schrale mechanistische programma vindt de instap in de breuken plaats via het eerlijk verdelen, vandaar deze opgave in de slottoets.
Kennis, vaardigheden en inzicht worden gematerialiseerd in rechtstreekse uitkomsten (*weten*, dat $8 : 3 = 2\frac{2}{3}$), verdelen aan visuele modellen of op grond van een voorstelling (situatiemodel). Het vraagstuk verwijst dus naar indicator 3.
Opmerking: leerlingen die erg regelgericht zijn, kunnen hun toevlucht nemen tot de staartdeling eventueel met de uitkomst in een kommabreuk.

Resultaten

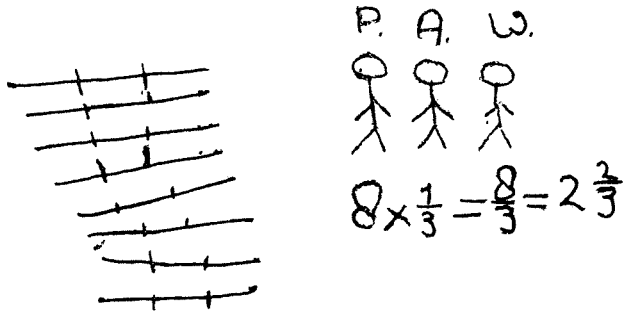
kenmerken van het oplossingsproces	aantal leerlingen					
	EP	RW	TT	WIG	NCR	NZR
(visueel) model	10	17	7	4	2	4
schema (tabel)						
handig rekenen						
rechtstreeks	2	26	42	5	12	13
algoritme (regel)	1	17	25	5	13	5
niet gemaakt		2	2	1		
totaal	13	62	76	15	27	22
IN-distractorfout						
uitkomst correct	9	31	54	5	13	11

Kwalitatieve beschouwing van de resultaten:

Experimentele groep

Twee leerlingen veranderden van eenheid bij de beschrijving, wisselden dus als het ware van relativerend standpunt; één leerling startte algoritmisch (staartdeling), raakte verstrikt in de repeterende decimale breuk en zocht daarna een uitweg in een gevisualiseerde oplossing; één leerling verdeelde een reep in twaalf stukjes en dichtte ieder 8×4 stukjes toe.[26]

De meeste oplossingen met visueel model weerspiegelen kennis, vaardigheid en inzicht op het concrete niveau. Een dergelijke kwalificatie valt pas nader te nuanceren indien een beschrijving van de concrete oplossing in symbolen is toegevoegd. Helga bijvoorbeeld tilde als sluitstuk haar concrete oplossing naar het tussenniveau.



Helga's oplossing

Controlegroep
Allereerst geven we de uitkomsten uit voorgaande tabel nogmaals in percentages weer en naar stroming ingedeeld.

kenmerken van het oplossingsproces	percentage leerlingen		
	experimenteel	realistisch	mechanistisch
(visueel) model	77	18	22
schema (tabel)			
handig rekenen			
rechtstreeks	15	48 (48)	51
algoritme (regel)	8	31	37
niet gemaakt		3	
totaal	100	100	100
IN-distractorfout			
uitkomst correct	69	59	49

Drie aspecten springen in het oog, namelijk het gebruik van visuele modellen, de rechtstreekse beantwoording en de toepassing van algoritmen.

Visuele modellen
In de helft van de gevallen dat de leerlingen een dergelijke oplossingsweg kozen, strandde de poging. Het visuele materiaal ondersteunde het denken onvoldoende of in het geheel niet. Een uitzondering vormde één 'Rekenwerk'-groep, waarvan zes van de negen leerlingen een geslaagde oplossing aan visueel materiaal voltrokken.
Ter vergelijking: de oplossingen van de experimentele groep weerspiegelden zonder uitzondering de ondersteunende functie van het toegepaste visuele model bij het denken.

Rechtstreekse uitkomst
Van beide groepen, de 'realisten' (r-groep) en de 'mechanisten' (m-groep) bepaalt ongeveer de helft van de leerlingen de uitkomst rechtstreeks, waarbij respectievelijk *drie kwart* en *de helft* van deze leerlingen de uitkomst *juist* heeft. Voor deze laatsten kan de directe gerichtheid op de uitkomst mede het gevolg zijn van een zekere onmacht naar (adequate) ondersteunende wiskundige middelen te grijpen, terwijl dit kennelijk wel nodig was.

Algoritme
Het veelvuldig toepassen van de staartdeling als oplossingsmethode, met uitkomsten in kommabreuken, bijvoorbeeld 2,7 (2,66 afgerond), 2,6 en $2{,}66\frac{2}{3}$ in *beide* groepen duidt op regelgerichtheid en een algoritmische instelling. De keuze van de juiste bewerking kan in dit geval nauwelijks als een positieve uiting van het horizontaal mathematiseren gezien worden. De keuze van het oplossingsproces en de daarbij toegepaste middelen getuigen niet bepaald van

een als positief te waarderen mathematische attitude.[27] Bovendien blijft deze instap op een te formeel niveau in effectiviteit achter bij de kennis, vaardigheden en inzichten die op de beide andere niveaus werden ingezet.

Item 2

Kok Eddie Bakker van restaurant de Echoput gebruikte veel room voor het maken van sauzen.
Hij gebruikte:

op maandag $1\frac{1}{2}$ liter room

op dinsdag $1\frac{3}{4}$ liter

op woensdag $1\frac{5}{8}$ liter

op donderdag $1\frac{1}{4}$ liter

op vrijdag $1\frac{7}{8}$ liter

► Hoeveel liter room gebruikte Kok Eddie in totaal?

Bedoelingen

Van het herhaald halveren met zijn 'kwarten' en 'halve kwarten' blijken vrijwel alle leerlingen vooraf de meeste informele en alledaagse kennis te bezitten.[28]
Dit vraagstuk is bedoeld om na te gaan in hoeverre de leerlingen met de drie eerste breuken van bedoeld systeem flexibel kunnen omgaan, handig rekenen dus (indicator 3). Voorzover er bij de gevraagde optelling IN-distractorfouten gemaakt worden, kan dus ook de eerste indicator in het geding zijn.
Kennis, vaardigheden en inzichten zullen in het algemeen worden gematerialiseerd op het tweede niveau, door het vraagstuk zo te structureren, dat $1\frac{3}{4}$ en $1\frac{1}{4}$ en de overige drie getallen eerst afzonderlijk worden samengesteld.
Opmerking: leerlingen die op regels zijn ingesteld, zullen een oplossing op het meer formele derde niveau produceren in de vorm van een omzetting in kommabreuken, dan wel gelijknamige breuken, gevolgd door optellen.
Dit nastreven van een oplossing op formeel niveau kan natuurlijk ook ontaarden in regels op basis van IN-distractorfouten.

Resultaten

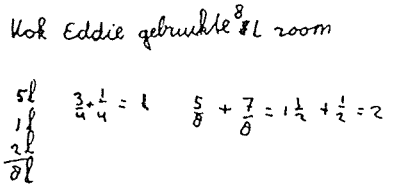
kenmerken van het oplossingsproces	aantal leerlingen					
	EP	RW	TT	WIG	NCR	NZR
(visueel) model	(1)					
schema (tabel)						
handig rekenen	9	3	2	1	2	1
rechtstreeks	2	23	22	5	9	5
algoritme (regel)	2	33	51	7	16	13
niet gemaakt		3	1	2		3
totaal	13	62	76	15	27	22
IN-distractorfout		3	1	2		3
uitkomst correct	9	33	54	6	12	8

Kwalitatieve beschouwing van de resultaten

Experimentele groep

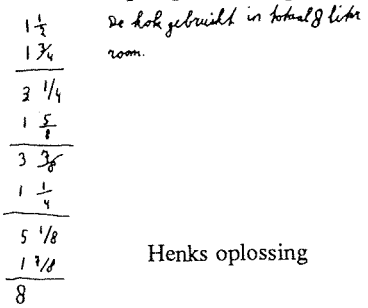
Opmerkelijk is de dominantie van het handig rekenen, dat in een enkel geval geschiedde in combinatie met de toepassing van een visueel model (tussen haakjes geplaatst vanwege de dominantie van het handig rekenen). Twee leerlingen gingen regelgericht te werk, maakten gelijknamig en telden op. In het algemeen bewoog de groep zich qua toegepaste kennis, vaardigheden en inzicht op het tussenniveau.

Het handig rekenen manifesteerde zich in het handig structureren van de opgave (kwarten en achtsten bij elkaar nemen) dat zoals uit Clara's oplossing blijkt, waarneembaar werd toegepast.



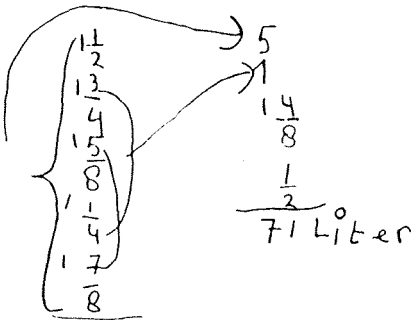
Clara's oplossing

Zes leerlingen gingen aldus te werk. Bij de drie overigen betrof de handigheid meer het moeiteloos omspringen met equivalenties, bijvoorbeeld



Henks oplossing

De onjuiste uitkomsten kunnen verklaard worden door vergissingen, gemaakt bij het structureren van de gegevens met het oog op het handig rekenen. Een voorbeeld:



Nanja's oplossing

Controlegroep
Opnieuw starten we met de uitkomsten uit voorgaande tabel in percentages en naar stroming ingedeeld.

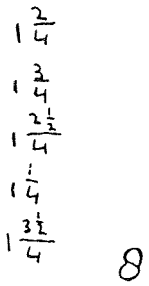
kenmerken van het oplossingsproces	percentage leerlingen		
	experimenteel	realistisch	mechanistisch
(visueel) model	(8)		
schema (tabel)			
handig rekenen	69	4	6
rechtstreeks	15	33	29
algoritme (regel)	15	59	59
niet gemaakt		4	6
totaal	99	100	100
IN-distractorfout		3	
uitkomst correct	69	61	41

Drie kenmerken van het oplossingsproces trekken de aandacht, namelijk het handig rekenen, de rechtstreekse beantwoording en het toepassen van een algoritme.

Handig rekenen
Dit is schaars vertegenwoordigd bij de controlegroep, zoals de cijfers tonen.

Algoritme
Het regelgericht rekenen daarentegen heeft opnieuw en in aanzienlijker mate dan dit bij het eerste vraagstuk het geval was, de oplossingsprocessen gedomineerd. Overigens kan een dergelijke oplossing best gebaseerd zijn op een ruime kijk op gelijkwaardigheid, zoals de illustratie laat zien.

oplossing 'leerling rekenwerk'



Een dergelijke oplossing kwam nog een enkele maal voor in het werk van een leerling uit de r-groep. Van de algoritmische oplossingen waren er resp. 15 en 1 (realistisch – mechanistisch) gebaseerd op het omzetten in kommabreuken en vervolgens optellen, de overige op het gelijknamig maken en optellen, waarbij behalve 8, ook 16, 32 en 40 als gemeenschappelijke noemers voorkwamen.

Rechtstreeks
Van de m-groep (21%) die zonder tussenkomst van wiskundige gereedschappen handelde had opnieuw een kwart de juiste uitkomst, terwijl voor de r-groep zich de half-om-half-verdeling (52%) als voor het vorige vraagstuk herhaalde.

Item 3

De gemeenteraad gaat stemmen over een heel belangrijke zaak.
Als er over heel belangrijke zaken gestemd wordt, moet *minstens* $\frac{5}{6}$ deel van alle raadsleden aanwezig zijn.
Nu zijn er 19 van de 24 raadsleden aanwezig.
▸ Kan er gestemd worden? Waarom wel/niet?

Bedoelingen
De breuk in een operator is een belangrijk aspect met het oog op de toepassingen, dat in alle beschouwde deelleergangen voorkomt.
Tevens kan dit vraagstuk aanleiding geven tot de constructie van betrekkingen, die berusten op de equivalentie van fracties dan wel op de operatie vermenigvuldigen, bijvoorbeeld $\frac{5}{6}$ en $\frac{19}{24}$ vergelijken of $\frac{5}{6} \times 24$ uitrekenen.
In de opbouw van de oplossing naar een uitkomst toe kan voor het handig rekenen weer een beslissende rol zijn weggelegd. Samengevat: in dit vraagstukje gaat het om de operationaliteit van het breukbegrip en zijn de indicatoren 1,3 en 5 in het spel.

Opmerking:

1. In de marge kan indicator 4 een rol spelen, voorzover het de interpretatie van constructies in symboolvorm binnen de gegeven context betreft.
2. Kennis, vaardigheden en inzicht zullen in de oplossingen vooral op het tussenniveau gematerialiseerd worden.
3. Oplossingen in de vorm van '24 : 6 = 4 × 5 = 20' weerspiegelen door het uiteenleggen van $\frac{5}{6}$ in twee afzonderlijke operatoren, dat het operatorbegrip voor breuken zich op formeel niveau beweegt.

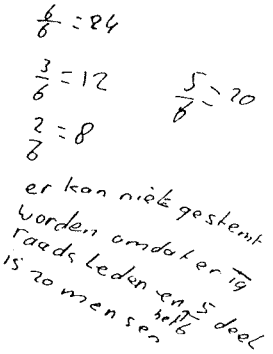
Resultaten

kenmerken van het oplossingsproces	aantal leerlingen					
	EP	RW	TT	WIG	NCR	NZR
(visueel) model	(1)			(1)		
schema (tabel)	1	7				
handig rekenen	9	9	27	3	6	1
rechtstreeks	1	34	42	9	14	11
algoritme (regel)		4	2	1	4	4
niet gemaakt	2	8	5	2	3	6
totaal	13	62	76	15	27	22
IN-distractorfout		2				
uitkomst correct	10	29	49	5	8	1

Kwalitatieve beschouwing van de resultaten:

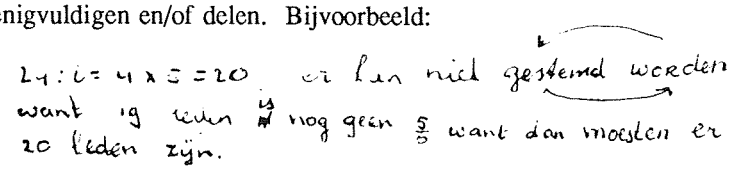
Experimentele groep

Het handig rekenen is opnieuw de opvallendste trek in het oplossingsproces. Van de negen leerlingen bouwden er zes hun oplossing op grond van equivalentie, resp. gevarieerd operatorgebruik. Een voorbeeld:



Marks oplossing

De overige drie construeerden betrekkingen gebaseerd op de bewerkingen vermenigvuldigen en/of delen. Bijvoorbeeld:



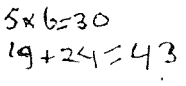
Alwyns oplossing

Deze leerlingen zijn dus in staat een breuk in een operator te behandelen als een samenstelling van twee operatoren, wat wijst op het bereikt hebben van het derde niveau.
Een aparte vermelding verdient nog het feit, dat alle negen leerlingen er blijk van gaven het vraagstuk te kunnen omzetten in wiskundig materiaal om dit vervolgens te gaan bewerken, ieder op eigen wijze.
Ook vermelden we nog de tabeltoepassing door één leerling, die zich daarbij van een visueel model bediende (vandaar de haakjes in de tabel). Ook was er een leerling die startte met een tabel, waarin percentages en decimale getallen werden toegepast en die er daarmee niet uitkwam, vervolgens een andere uitweg zocht en die ook ontdekte.

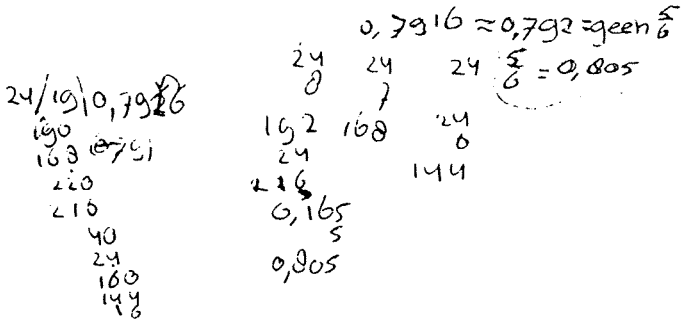
Controlegroep
Samengevat komen de uitkomsten neer op:

kenmerken van het oplossingsproces	percentage leerlingen		
	experimenteel	realistisch	mechanistisch
(visueel) model	(8)	(1)	
schema (tabel)	8	5	
handig rekenen	69	25	14
rechtstreeks	8	54	51
algoritme (regel)		5	16
niet gemaakt	15	10	18
totaal	100	99	99
IN-distractorfout		1	
uitkomst correct	77	54	18

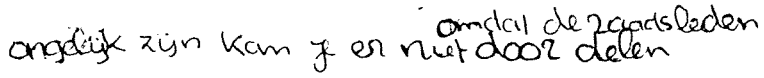
Het handig rekenen, de rechtstreekse beantwoording en de (on)juistheid van de uitkomst trekken de aandacht, waarbij het sterk achterblijvende resultaat van de m-groep opmerkelijk is. Kennelijk gaf dit vraagstuk aanleiding tot minder algoritmische exercities dan de vorige opgave.
Voorzover het voorkwam betrof het zich 'zomaar' verliezen in irrelevante bewerkingen, bijvoorbeeld:



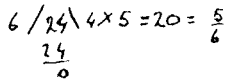
'blind opereren', of gebruikmaken van grove, algoritmische middelen



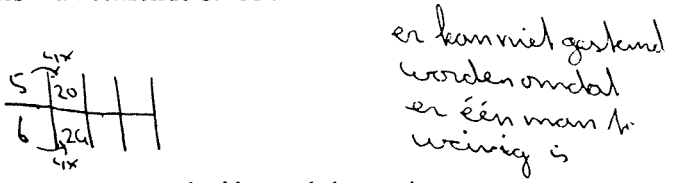
of het kwam tot een intentieverklaring



zonder dat hieraan uitvoering kon worden gegeven.
Ook waren er gevallen van algoritmische vormgeving van de oplossing, bijvoorbeeld:



Handig rekenen
De voor de experimentele groep onderscheiden typen oplossingen manifesteerden zich ook hier. Wat de r-groep aangaat in dezelfde '2 op 1-verdeling' en wat de m-groep betreft 'half om half'. In het laatste geval gaat het overigens om een groepje van bescheiden omvang.
Hoewel dit niet onder dit kenmerk werd gescoord, vermelden we hier ook nog de toepassing van de verhoudingstabel door een groepje van zeven 'Rekenwerkers' van eenzelfde school.



voorbeeld van tabeltoepassing

Rechtstreeks
Van de m-groep die de uitkomst trachtte te bepalen, althans zonder waarneembare wiskundige middelen, had slechts 20% deze correct. Voor de r-groep was de verdeling opnieuw 'half om half'.

Item 4

In een kookboek staat het volgende recept van uiensoep voor *8* personen:

8 personen	4 personen	6 personen
8 uien		
1 l water		
4 aromablokjes		
2 lepels boter		
$\frac{1}{2}$ l room		

- Moeder wil uiensoep maken voor *4* personen. Hoeveel uien, water, enz. heeft zij dan nodig?
- En als het voor *6* personen was?[29]

Bedoelingen

Dit vraagstuk beoogt wederom de aanwezigheid van een operationeel breukbegrip te toetsen. Het gaat om het vaststellen van breuken in eenvoudige verhoudingsrelaties, bijvoorbeeld vier personen is de helft van acht personen, en vervolgens deze als operator op het 'recept voor 8' laten werken (van alle ingrediënten de helft nemen). Dit aspect is echter grotendeels ondergeschikt (en bovendien is er een uitweg: delen door 2). Waar het op aankomt is de hoeveelheid room in de gevraagde recepten. Hierin schuilt namelijk een IN-distractorvalletje. Voor zes personen, het precieze midden houdend tussen vier en acht personen, kan immers een hoeveelheid room van $\frac{1}{3}$ liter beslist worden (in plaats van $\frac{3}{8}$ liter) vanwege de vermeende, precieze ligging tussen $\frac{1}{4}$ liter en $\frac{1}{2}$ liter.

Het is dus vooral de eerste indicator die in het geding is.

Kennis, vaardigheid en inzicht manifesteren zich vooral op het tweede niveau. Het veelvuldig zwichten voor de verborgen afleider kan erop wijzen dat het gevolgde onderwijs zich teveel op een (te) formeel niveau heeft afgespeeld.

Opmerking:

1. In de overzichten worden de resultaten op beide recepten afzonderlijk gescoord.
2. De aandacht spitst zich vooral toe op de genoemde IN-distractorkwestie.

Overige bijzonderheden worden slechts vermeld indien hiertoe gerede aanleiding bestaat, bijvoorbeeld het bepalen van het recept voor zes personen door die voor twee en vier personen samen te voegen.

Resultaten

kenmerken van het oplossingsproces	aantal leerlingen					
	EP	RW	TT	WIG	NCR	NZR
(visueel) model		1				
schema (tabel)						
handig rekenen		1	3			
rechtstreeks	13	58	66	14	27	21
algoritme (regel)		2	7	1		
niet gemaakt						1
totaal	13	62	76	15	27	22
IN-distractorfout	2	14	19	3	7	6
uitkomst correct	13 10	50 23	70 29	13 3	16 3	13 3

Kwalitatieve beschouwing van de resultaten

Experimentele groep

Gelet op de overweldigende dominantie van de directe oplossing ligt het voor de hand zowel voor de experimentele groep als voor de controlegroep een nadere analyse van de gemaakte fouten te maken, voorzover deze nog niet als IN-distractorfout in het overzicht zijn opgenomen.

Welnu, twee leerlingen van de onderzoeksgroep hadden hoeveelheden van $\frac{2}{3}$ resp. $\frac{1}{6}$ l room in het recept voor zes personen. Deze kunnen in de distractorsfeer liggen, doch de achterliggende redenering kan niet meer (met zekerheid) gereconstrueerd worden.

Bijvoorbeeld $\frac{1}{6}$ als volgt:

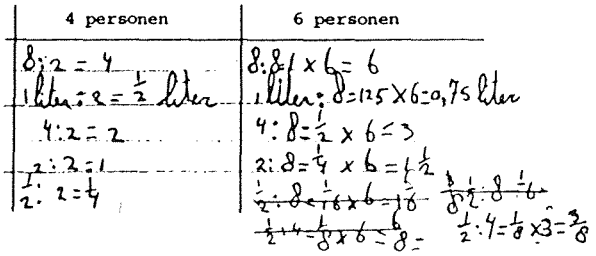
8 pers.	4 pers.	6 pers.
$\frac{1}{2}$ l	$\frac{1}{4}$ l	?

De leerling bepaalt het recept voor twee personen, na $\frac{1}{2}$ voor 8, $\frac{1}{4}$ voor 4, dus $\frac{1}{6}$ voor 2 en vult dit voor 6 personen in. Op deze wijze zou er dus van een IN-distractorfout sprake zijn.

Controlegroep
Samenvatting van de resultaten:

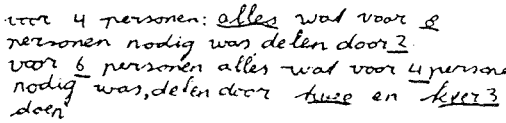
kenmerken van het oplossingsproces	percentage leerlingen		
	experimenteel	realistisch	mechanistisch
(visueel) model		1	
schema (tabel)			
handig rekenen		3	
rechtstreeks	100	90	98
algoritme (regel)		6	
niet gemaakt			
totaal	100	100	100
IN-distractorfout	15	23	27
uitkomst correct	100 77	87 36	59 12

Allereerst worden de regelgerichte en algoritmisch getinte oplossingen geïllustreerd. Deze waren in dit geval bescheiden van omvang en kwamen op het conto van de 'taltalers'.



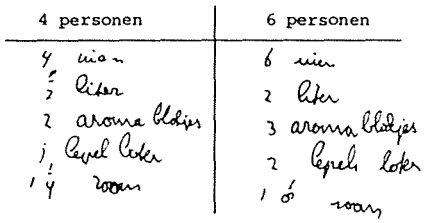
een gevarieerde oplossing: delen, regel van drie, decimale getallen

Het bij deze opgave toepassen van decimale getallen kwam nog een enkele keer voor. In een incidenteel geval werd de gevolgde procedure verwoord:



Gemaakte fouten
Opnieuw is het sterke achterblijven van de m-groep opmerkelijk en ook het vooroplopen in het zwichten voor IN-distractoren. De overige fouten kleuren een bont palet met de onbestemde kleur van het onverklaarbare naast menige bestemde kleur. Zoals daar zijn: fouten door kleine vergissingen, operatiefouten, zoals het recept voor 8 personen direct delen door 4 en/of 6 of vermenigvuldigen met 4 en/of 6, en ook het recept van 2 personen bepalen en dit opvatten als het recept voor 6 personen.

Met name het halveren van $\frac{1}{2}$ en het bepalen van het midden tussen $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{4}$ vormden de onoverkomelijke struikelblokken voor de meesten. (Een bewijs temeer hoe prille noties door het onderwijs weer verstikt kunnen worden. De meeste leerlingen hebben 'vroeger' immers zelf $\frac{1}{4}$ leren voortbrengen en benoemen als 'de helft van een halve ...'?)[30]
Overigens beperkten de genoemde bewerkingsfouten zich tot enkele incidenten.
Met name de onnavolgbare fouten waren dominant. Eén derde van deze fouten kwam op het conto van de m-groep.



voorbeeld van een onnavolgbare oplossing

Dergelijke fouten weerspiegelen vooral de onmacht van deze leerlingen structuur te geven aan hun handelen en de juiste middelen in te zetten.
Een deel van de fouten, zoals het (deels) weergeven van het recept voor 2 personen onder 6 personen getuigt van een op zichzelf correcte strategie. Wellicht schoot ook hier het werkgeheugen tekort of werd het gevraagde uit het oog verloren. De fouten van de r-groep stemmen met het voorgaande overeen, zij het, dat de verdeling over de soorten fouten nogal verschilde. Met name het aandeel van de fouten waarachter een nauwelijks bepaalbare redenering schuil ging lag – relatief gezien – vijf keer zo laag.
Tweederde deel van alle gemaakte fouten betroffen het eerder genoemde delen door 4 en/of 6, het opvatten van het recept voor 2 als het recept voor 6, hetgeen in feite kan neerkomen op een vergissing. Verwant hiermee – het betrof nagenoeg eenderde van de gevallen – was het niet voltooien van de strategie om het recept voor 6 personen uit dat voor 4 en 8 samen te bepalen en voor het ingrediënt room het bepalen van het gemiddelde achterwege te laten.
Voor deze deelgroep was het ingrediënt room eveneens het grote struikelblok en de frequentie van IN-distractorfouten week – relatief – maar weinig af van wat voor de groep met de andere methoden moest worden geconstateerd.

Item 5

In een wijnglas gaat $\frac{1}{8}$ liter.
Hoeveel glazen kun je vullen
met een fles van $\frac{3}{4}$ liter? ..... glazen.

Bedoelingen
Gelijkwaardigheid van de drie eerste breuken van het herhaald halveren vormt de kern van dit vraagstuk. Dit kan op uiteenlopende wijzen worden geoperationaliseerd, bijvoorbeeld: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = 6 \times \frac{1}{8}$, dus 6 glazen, of $6 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$ resp. $\frac{3}{4} : \frac{1}{8} = 6$.
Aldus verwijst het vraagstuk naar de indicatoren 1 en 5. Kennis, vaardigheid en inzicht zullen vooral op het tweede niveau in wiskundig materiaal hun beslag krijgen.

Opmerking:
1. Afhankelijk van het oplossingsproces van individuele leerlingen kunnen ook nog andere indicatoren in het geding zijn, bijvoorbeeld indicator 2 (schematiseren) (zie § 5.3; Michael).
2. De mogelijkheid bestaat, dat in de constructie van een betrekking in symboolvorm een IN-distractorfout insluipt, bijvoorbeeld $6 \times \frac{1}{8} = \frac{6}{48}$.
3. Dit nieuwe beroep op operationele kennis van het herhaald halveren biedt ruime mogelijkheid tot rechtstreekse oplossing van het vraagstuk.

Resultaten

kenmerken van het oplossingsproces	aantal leerlingen					
	EP	RW	TT	WIG	NCR	NZR
(visueel) model		1			2	
schema (tabel)	(1)					
handig rekenen	5	16	8	1	3	2
rechtstreeks	8	43	66	14	19	17
algoritme (regel)			2		2	3
niet gemaakt		2			1	
totaal	13	62	76	15	27	22
IN-distractorfout						
uitkomst correct	12	45	66	11	14	15

Kwalitatieve beschouwing van de resultaten

Experimentele groep
Het handig rekenen en de rechtstreekse beantwoording springen in het oog. Eén leerling paste, voor zijn doen heel handig met equivalenties omspringend, de verhoudingstabel toe. Zijn eerder geciteerde aanpak plaatsen we in het overzicht tussen haakjes (zie § 5.3; Michael). Onder de vaststelling dat dit vraagstuk met zijn gunstige uitslag niet erg discriminerend gewerkt heeft, al blijft de m-groep opnieuw aanzienlijk achter, gaan we op de genoemde aspecten in.[31]

Handig rekenen
De bij de bedoelingen in dit opzicht onderscheiden categorieën tekenden zich hierbij af, namelijk het toewerken naar een uitkomst. Drie leerlingen gingen op die manier te werk.

Margreet: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$,

$3 \times \frac{2}{8} = \frac{6}{8}$

Caroline: $\frac{1}{8}$ = 1 glas

$\frac{1}{4}$ = 2 glazen

$\frac{3}{4}$ = 6 glazen

en Michael met zijn tabeloplossing.
De twee anderen, Stef en Clara, zochten het in een meer formeel verkort operatoir verband: $6 \times \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Over de enige gemaakte fout valt verder niets op te merken.

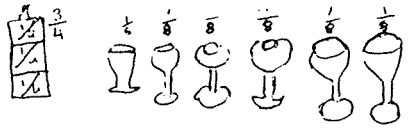
Controlegroep
Samenvatting van de resultaten:

kenmerken van het oplossingsproces	percentage leerlingen		
	experimenteel	realistisch	mechanistisch
(visueel) model		1	4
schema (tabel)	(8)		
handig rekenen	38	16	10
rechtstreeks	62	80	73
algoritme (regel)		1	10
niet gemaakt		1	2
totaal	100	99	99
IN-distractorfout			
uitkomst correct	92	80	59

Voor dit vraagstuk geldt dus een nog grotere dominantie van rechtstreekse oplossingen dan voor het vorige. Behalve dit beschouwen we ook hier het handig rekenen en voor de m-groep het visuele modelgebruik en de regeltoepassing.

Handig rekenen
Voor de m-groep betreft het in alle gevallen het via equivalenties naar een uitkomst toewerken. (In twee gevallen vindt de constructie plaats aan een

circulair modelletje , waarbij de stipjes in de achtsten duiden op tellen). Ook in de r-groep ging de voorkeur uit naar de geschetste, informele aanpak. Slechts $\frac{1}{3}$ deel van de handige rekenaars koos voor een meer formeel operatoir verband. Voor één Rekenwerkgroep waren beide voorkeuren evenwichtig verdeeld (6 om 6). In één geval was er sprake van een concrete, gevisualiseerde oplossing.



Van de vijf regelgerichte respectievelijk algoritmische oplossingen in de m-groep waren er drie ontaard.

Correct (2 maal): $4 / 8 \setminus 2$

$$\frac{8}{0} \quad \frac{3x}{6}$$

Ontaard:

$$\frac{1}{8} : \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{8} \times \frac{6}{8} = \frac{12}{64}, \text{ en}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{.}{4} = \frac{2}{4} = \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$$

$$\frac{6}{4} = 6 \text{ glazen } (!)^{32}$$

Rechtstreeks

Van de rechtstreekse antwoorden was voor de m-groep de helft correct. Van de r-groep, die het vraagstuk 'gewoon uit m'n hoofd' oploste, zoals één leerling schreef, zat een kwart ernaast. Opnieuw dus deze verdeling in het voordeel van de r-groep.

Kennis, vaardigheden en inzicht werden gematerialiseerd op de twee eerste niveaus en veelal met succes. Rechtstreekse beantwoording en instap op regelniveau waren de beide foutenbronnen.

Item 6

Vul in: 'meer dan', 'minder dan', of 'gelijk aan'.
Zet ook je redenering erbij.

$\frac{4}{10} + \frac{1}{10}$ is .....$\frac{1}{2}$, want .....

$\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ is .....$\frac{1}{2}$, want .....

$\frac{2}{5} + \frac{7}{10}$ is .....$\frac{1}{2}$, want .....

$1\frac{1}{4} + \frac{8}{12}$ is ..... 2, want .....

$4\frac{3}{8} + \frac{7}{8}$ is ..... 6, want .....

Bedoelingen

Afhankelijk van de accenten die in het onderwijsleerproces geplaatst zijn, kan het bij deze vraagstukjes om verschillende kwesties gaan. Enerzijds gaat het om de vraag of het breukbegrip in bepaalde vergelijkingskwesties met een dominante positie voor het optellen operationeel is op meer inzichtelijke basis. Anderzijds of het opereren meer regelgestuurd wordt (bijvoorbeeld gelijknamig maken). Dit houdt dus verband met de indicatoren 1 en 5, waarbij het gewicht van de eerste, door de mogelijkheid tot het maken van IN-distractorfouten, doorslaggevend is.
Voorzover leerlingen andere middelen inzetten voor hun oplossingen, kunnen ook nog andere indicatoren in het geding zijn.
Kennis, vaardigheden en inzicht zullen zich vooral manifesteren op het tweede (en derde) niveau.

Opmerkingen

1. De aard van de kwaliteit van aanwezige kennis, vaardigheden en inzicht hangt weer ten nauwste samen met het zwichten voor IN-distractoren.
2. Vanwege het vijfledige vraagstuk zullen de IN-distractorfouten niet alleen per leerling, maar – tussen haakjes – ook per onderdeel geteld worden. Bovendien zullen zowel de aangebrachte ordening als de argumentatie daarvoor afzonderlijk worden gescoord, zodat één leerling voor dit vraagstuk dus maximaal 'een tien' kan halen... De score geeft het gemiddeld aantal goed per leerling.

Resultaten

kenmerken van het oplossingsproces	(gemiddeld) aantal leerlingen					
	EP	RW	TT	WIG	NCR	NZR
(visueel) model	1 (2)	2			(1)	
schema (tabel)	(2)					
handig rekenen	9	(1)	3			
rechtstreeks		26	26	7	8	9
algoritme (regel)	3	32	46	8	18	13
niet gemaakt		2	1		1	
totaal	13	62	76	15	27	22
IN-distractorfout		6 (10)	6 (7)	1 (1)	3 (5)	6 (10)
gemiddeld correct per uitkomst	11,3	45	64,6	11,1	18,1	10,7

Kwalitatieve beschouwing van de resultaten

Experimentele groep
Handig rekenen springt eruit en zal nader worden geanalyseerd. In de groep van negen waren er enkelen die deels ook nog steun zochten bij een visueel model of een tabel, doch met een hoofdaccent op het handig rekenen; vandaar weer de grotere aantallen tussen haakjes bij deze kenmerken.

Handig rekenen
Dit manifesteerde zich vooral in de flexibele interpretatie van zowel de waarde als de verschijningsvorm van een breuk.
Bijvoorbeeld: '$\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ is minder dan $\frac{1}{2}$, want $\frac{2}{5}$ is bijna de helft, net ietsje te weinig en $\frac{3}{5}$ is weer wat teveel.' beweerde Margreet, of:

'$\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ is minder dan $\frac{1}{2}$, want $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ en $\frac{2\frac{1}{2}}{5}$ is de helft', stelde Clara, of

'$\frac{2}{5} + \frac{7}{10}$ is meer dan 1, want $\frac{2}{5} + \frac{7}{10}$ $(3\frac{1}{2}) = \frac{5\frac{1}{2}}{5}$ en $\frac{5}{5}$ is één', argumenteerde Kevin.

Zes van de negen leerlingen die handig rekenden, redeneerden op deze manier. Dit getuigt van de bekwaamheid tot flexibel normeren om de gevraagde vergelijking te kunnen voltrekken, zonder dat rigide navolging van regels het oplossingsproces behoeft te dicteren. IN-distractorfouten werden niet gemaakt.

Controlegroep
Samenvatting van de resultaten:

kenmerken van het oplossingsproces	(gemiddeld) percentage leerlingen		
	experimenteel	realistisch	mechanistisch
(visueel) model	8 (15)	1	2
schema (tabel)	(15)		
handig rekenen	29	2 (3)	
rechtstreeks		38	35
algoritme (regel)	23	56	63
niet gemaakt		2	
totaal	100	99	100
IN-distractorfout		8	18
gemiddeld correct per uitkomst	87	79	59

De algoritmische of regelgerichte benadering en de rechtstreekse beantwoording springen eruit.

In alle groepen, op één Taltaalgroep na, werden IN-distractorfouten gemaakt, zij het op betrekkelijk bescheiden schaal. We tekenen hierbij aan, dat een 'vereenvoudiging' als $\frac{2}{5} = \frac{1}{10}$ niet is meegeteld. Deze kan echter wel als zodanig worden aangemerkt vanwege de misvatting dat bij gelijkwaardige breuken het produkt van teller en noemer constant is. Zowel in de r- als in de m-groep kwam dit twee maal voor.

Algoritme (regel)
De volgende bloemlezing aan uitspraken weerspiegelt de algoritmische instelling van dit deel van de r-groep. Deze instelling doet zich ongeacht de gevolgde leergang voor. De kijk op de breuken hangt hiermee samen.
'$1\frac{1}{4} + \frac{8}{12}$ is minder dan 2, want $1\frac{1}{4} = 1\frac{3}{12}$; $1\frac{3}{12} + \frac{8}{12} = 1\frac{11}{12}$', kan karakteristiek worden genoemd voor de correcte regelgerichte benadering.
Verder konden in dit opzicht worden opgetekend: '$\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ is $\frac{2}{5}$, minder dan $\frac{1}{2}$, want $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$ en dat kun je niet verdelen.' Of:
'bij $\frac{5}{5}$ is er nooit een helft',
'5de kun je niet door twee delen',
'$\frac{2}{5}$ kun je niet door twee delen',
'omdat 5 met breuken niet deelbaar is',
'$\frac{1}{2}$ is in een kommagetal 0,50 en $\frac{2}{5}$ is in een kommagetal 0,40.'
Er waren ook minder 'zuinige' benaderingen.
'$\frac{2}{5} + \frac{7}{10}$ is meer dan 1, want $\frac{55}{50} = 1\frac{5}{50}$ en geen 1',
'$1\frac{1}{4} + \frac{8}{12}$ is $\frac{12}{46} + \frac{32}{46} = \frac{44}{46} < 2$' (rekenfout),
'$4\frac{3}{8} + \frac{7}{8}$ is meer dan 6, want $\frac{56}{64} + \frac{24}{64} = \frac{80}{64}$, $80 - 64 = 16$ hele $= \frac{20}{64}$,'
'$\frac{4}{10} + \frac{1}{10}$ is gelijk aan $\frac{1}{2}$, want 10 past $1 \times$ in 10 dus moet je ook 1×4 en 1×1 doen.'

Een enkele uitspraak bevatte een voorbarige generalisatie ten aanzien van het breukbegrip, bijvoorbeeld '$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$, want hoe kleiner de breuk, hoe groter de waarde, $\frac{1}{2}$ is dus meer waard.'

Een redenering, waarin bijvoorbeeld een breuk als $\frac{2\frac{1}{2}}{5}$ voorkwam, deed zich in vier gevallen voor.
In het algemeen kan gesteld worden dat de uitslag op dit onderdeel weerspiegelt, dat voor het merendeel van de leerlingen die onderwijs met een realistische methode gehad hebben, bij dergelijke vraagstukken een breuk niet meer

is dan een samengesteld getalobject – voor een deel van hen bestaande uit onsamenhangende delen – waarmee algoritmisch kan en dient te worden omgesprongen. Behalve de ℕ-distractoren moeten onjuist uitgevoerde regels (rekenfouten) als voornaamste foutenbronnen worden aangemerkt. De uitkomsten van de m-groep zijn hiermee in overeenstemming en weerspiegelen zo mogelijk een nog sterkere regelgerichtheid en algoritmische instelling, getuige het relatief grotere aantal ℕ-distractorfouten, dat gemaakt werd, waarin de omzetting $\frac{2}{5} = \frac{1}{10}$ en $\frac{7}{10} = \frac{14}{5}$ die beide éénmaal voorkwamen, niet meegerekend zijn.

'$\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ is minder dan $\frac{1}{2}$, want $2\frac{1}{2}$ 5de is pas een halve', getuigend van een flexibelere kijk op de breuken, kwam tweemaal voor.

Correct handelen, zonder dat de leerling wist, wat hij deed, kwam eveneens voor, bijvoorbeeld:

'$\frac{2}{5} + \frac{7}{10}$ is $\frac{4}{10} + \frac{7}{10} = \frac{11}{10}$ ...1, want weet ik niet sorry, ik kan er niets aan doen, ik probeer het tenminste.'

Anderen ontsnapten via déze logica:

'$\frac{2}{5} + \frac{7}{10}$ is meer dan 1, want 1 is minder.'

Deze uitkomsten komen er in feite op neer, dat – een enkele uitzondering daargelaten – breuk op het concrete niveau geen enkele betekenis heeft verworven, evenmin als op het tussenniveau.

Rechtstreeks

Bij dit kenmerk beschouwen we slechts de kwaliteit van de argumentatie op grond waarvan over de ordening beslist werd.

De 60 leerlingen van de r-groep, die rechtstreeks op dit onderdeel ingingen, maakten in 27% van de gevallen gebruik van onjuiste argumenten, waarvan in het voorgaande al een bloemlezing werd gegeven. Voor de m-groep bedroeg dit percentage 44.

Nog opmerkelijker waren in dit verband de aantallen leerlingen, die de argumentatie er volledig of deels bij lieten zitten.

In dit opzicht sprongen de m-groep en de Rekenwerkscholen van de r-groep eruit, waarvoor achtereenvolgens in 18 en 7 procent van de gevallen de argumentatie ontbrak, terwijl slechts enkelingen helemaal aan het vraagstuk voorbijgingen.[33]

Deze uitkomst vormt een aanwijzing, dat een instap op een te formeel niveau (m-groep) of het hiernaar te snel doorstoten (Rekenwerkgroep) althans voor een deel van de leerlingen tot negatieve effecten leidt.

Item 7

De poes van Paul gaat mee op vakantie. Ze gaan 12 dagen weg. De poes eet altijd kattevoer uit blik. Hij krijgt $\frac{3}{4}$ blikje per dag.

- Hoeveel blikjes moet Paul meenemen?
- Op welke dagen hoeft er geen aangebroken blikje met een rest kattevoer in de ijskast te worden gezet?

Bedoelingen

Dit vraagstuk vraagt om een symbolische constructie op het tussenniveau, bijvoorbeeld $\frac{3}{4} + ... + \frac{3}{4} = \frac{36}{4} = 9$, of $12 \times \frac{3}{4} = 9$ of $\frac{3}{4} \times 12 = 9$ èn $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 3$ of $4 \times \frac{3}{4} = 3$, dus op de vierde, achtste en twaalfde dag is er geen blikje met rest.

Op grond hiervan kunnen de breuken ook vermeden worden via een oplossing die begint met : 'in vier dagen drie blikken ... etc.' Het gaat dus om indicator 5. Andere indicatoren kunnen meespelen, afhankelijk van de visuele modellen of schema's, die worden toegepast, alsook de eerste indicator, voorzover er bij het opereren een IN-distractorfout gemaakt wordt, bijvoorbeeld $12 \times \frac{3}{4} = \frac{36}{48}$. Kennis, vaardigheden en inzicht kunnen zich dus op alle drie niveaus in de oplossingen manifesteren, doch vooral op het tweede niveau.

Opmerking:

Beide onderdelen worden, wat de uitkomst aangaat, afzonderlijk gescoord.

Resultaten

kenmerken van het oplossingsproces	aantal leerlingen					
	EP	RW	TT	WIG	NCR	NZR
(visueel) model	1 (2)	5				
schema (tabel)	1 (2)					
handig rekenen	5	13	11	2	5	2
rechtstreeks	3	26	37	11	11	15
algoritme (regel)	3	14	28	2	11	5
niet gemaakt		4				
totaal	13	62	76	15	27	22
IN-distractorfout	2	2	4	1		1
uitkomsten correct	9 8	43 27	58 35	9 4	17 5	13 1

Kwalitatieve beschouwing van de resultaten

Experimentele groep

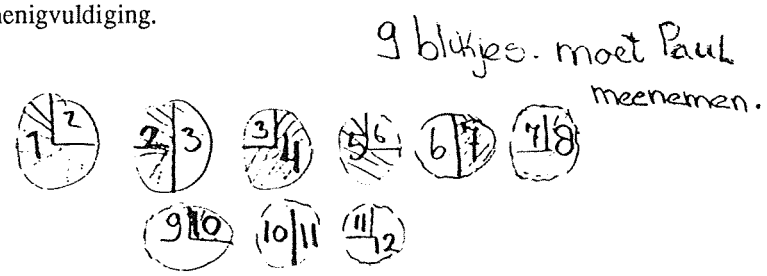
Handig rekenen springt er enigszins uit. We geven daaraan op de volgende manier nader inhoud. Het opstellen van een betrekking en het uitvoeren van de bewerking(en) daarin, zonder algoritmische middelen of organisatie. Bijvoorbeeld $12 \times \frac{3}{4}$ berekenen via $12 - 12 \times \frac{1}{4}$. Een strikte afscheiding tussen handig rekenen en regelgericht rekenen valt bij dit vraagstuk overigens eenvoudiger te maken wanneer een leerling in de fout gaat, bijvoorbeeld bij het opstellen van het operatoire verband. Dit kan dan de regelgerichtheid of algoritmische instelling van de opsteller verraden.

Handig rekenen

Eén leerling vermeed de breuken en redeneerde aldus:
'4 dagen = 3 blikjes
3 × 4 d = 12 dagen, 3 × 3b = 9 blikjes.'

Drie leerlingen vatten dit samen in $12 \times \frac{3}{4} = 9$.

Een leerling begon met herhaald optellen en verkortte 'onderweg' tot een vermenigvuldiging.



Wat Margreet deed in deze gevisualiseerde oplossing, werd door Michael met symbolen in een tabel georganiseerd.

Rechtstreeks

Drie leerlingen gaven rechtstreeks een correct antwoord op het eerste onderdeel. Tien leerlingen beantwoordden het tweede onderdeel rechtstreeks, waaronder voornoemde drie. Alleen deze zijn in het overzicht als zodanig gescoord, omdat de overigen hun oplossing van het eerste deel bij het tweede gebruikt kunnen hebben.

Algoritme (regel)

Een leerling rekende 12 × 0,75 onder elkaar uit, de beide overigen (Clara en Helga) vervielen in IN-distractorfouten, namelijk:

$\frac{3}{4} \times 12 = 10 \times \frac{3}{4} = \frac{30}{40} + 2 \times \frac{3}{4} = 1\frac{2}{4} + \frac{6}{8}$

met 30 6 $\quad 1\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$

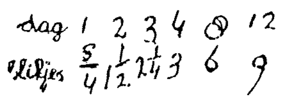
40 8

en $\frac{48}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{144}{8}$, $\frac{144}{8} = 18$ blikjes.

Controlegroep
Samenvatting van de resultaten:

kenmerken van het oplossingsproces	percentage leerlingen		
	experimenteel	realistisch	mechanistisch
(visueel) model	8 (15)	3	
schema (tabel)	8 (15)		
handig rekenen	38	17	14
rechtstreeks	23	48	53
algoritme (regel)	23	29	33
niet gemaakt		3	
totaal	100	100	100
IN-distractorfout	15	5	2
uitkomsten correct	69 62	72 43	61 12

Handig rekenen
De toegepaste methoden stemden overeen met die van de experimentele groep. Eenmaal kwam $12 - 12 \times \frac{1}{4} = 9$ als nieuwe oplossing voor, alsook een oplossing in tabelvorm:



Rechtstreeks
We beschrijven slechts het eerste onderdeel. Van deze categorie leerlingen had zo'n 40% de uitkomst onjuist. Voor de m-groep lag dit percentage op ruim 50. Een leerling meende: 'geen een, hij kan ze daar ook halen.'

Algoritme (regel)
Behalve de regels, die voerden tot IN-distractorfouten en neerkwamen op:
$12 \times \frac{3}{4} = \frac{36}{48}$ of $12 \times \frac{3}{4} = 12 \times 3 \times 4$ of $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, $\frac{6}{8} + \frac{6}{8} = \frac{12}{16}$
kwamen de volgende fouten voor:
$\frac{3}{4} = 3{,}4$ (5 maal),

$$\begin{array}{r} 12\ \text{x} \\ \hline 40{,}8 \end{array}$$

staartdeling voor 12 : 0,75; $\frac{3}{4} = 0{,}25 = 25$ / 1200\48

$$\begin{array}{r} 100 \\ \hline 200 \\ 200 \\ \hline 0 \end{array}$$

en $12 \times \frac{3}{4} = 12 : 3 = 9$.

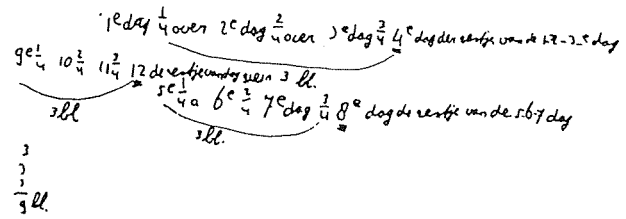
En om de dagen van de lege blikjes te bepalen $\frac{3}{4} : 9 = 3$.
Van de correcte algoritmische oplossingen kwam
0,75
12x

het frequentst voor (11 maal), d.w.z. in de r-groep en 2 maal als variant, namelijk $12 \times 75\%$.
Een andere vorm was 12 (5 leerlingen)

3x
—
4 / 36 \ 9
36
—
0

Deze laatste vorm wijst op een formele interpretatie van $\frac{3}{4}$ in een operator, vanwege de uiteenlegging in twee operatoren. Dit verschijnsel kwam bij de r-groep ook nog eenmaal voor in deze vorm: $12 \times 3 = 36 : 4 = 9$.
In de m-groep stemden de aanpakken met die van de r-groep overeen, zij het dat geen uitgesproken voorkeur voor één van de benaderingen kon worden vastgesteld.

Kennis, vaardigheden en inzicht werden op alle drie niveaus toegepast. Behalve de concrete oplossingen aan visuele modellen was er die van het voorgestelde verdelen, waarbij de 12 dagen successief werden langsgelopen:



Het discriminerend vermogen van dit vraagstuk was dus evenmin groot.

Item 8

'3 zuurstokken worden eerlijk verdeeld over een groep van 4 kinderen.'
'7 zuurstokken worden eerlijk verdeeld over een groep van 10 kinderen.'

► Vergelijk: in welk groepje krijgt een kind meer, in het groepje van 4 kinderen of in het groepje van 10 kinderen? Hoeveel meer?

Bedoelingen

Vergelijkingsproblemen komen niet in alle beschouwde methoden voor. Voor wat betreft het experimentele programma verwijst het vraagstuk naar indicator 1, in verband met het verhoudingsgetrouwe redeneren en de mogelijkheid tot het niet in acht nemen daarvan (IN--distractorfout) en met de mogelijkheden tot het inzetten van visuele modellen. Van indicator 2 kan sprake zijn wanneer de verhoudingstabel als schematiseringsmiddel wordt ingezet. Dit kan ook betekenen, indien deze methode uiterst verkort wordt toegepast, dat sprake is van een regel of algoritme (kgv-methode), dus indicator 5.

Voor enkele van de realistische programma's (RW, WIG) kunnen overeenkomstige overwegingen gelden, terwijl – en dit zou men ook algemeen kunnen stellen – dit vraagstuk, overeenkomstig item 1, nu twee verdeelsituaties geeft, die afzonderlijk behandeld en op hun uitkomsten vergeleken kunnen worden.

Bovendien gaat het hier om het normeren van situaties met het oog op het vergelijken ervan en de kwestie van het normeren komt in alle programma's in ieder geval voor in verband met procenten, het schaalbegrip en het optellen en aftrekken van ongelijknamige breuken. Voor de programma's waarin weinig of geen vergelijkingsvraagstukken voorkomen, kan dit vraagstuk dus toch met passende doelstellingen die worden nagestreefd in verband gebracht worden.

Kennis, vaardigheden en inzicht kunnen zich in de oplossingen weer op alle drie niveaus manifesteren.

Opmerking:

Mede gelet op de geformuleerde bedoelingen kunnen de oplossingen qua inzet van wiskundige middelen een rijk geschakeerd beeld opleveren.

Resultaten

kenmerken van het oplossingsproces	aantal leerlingen					
	EP	RW	TT	WIG	NCR	NZR
(visueel) model	2 (4)	3	7	1	1 (2)	6
schema (tabel)	8	5				
handig rekenen	(1)	3	3			
rechtstreeks	2	23	31	9	12	9
algoritme (regel)	1	19	31	4	11	5
niet gemaakt		9	4	1	3	2
totaal	13	62	76	15	27	22
IN-distractorfout		4	1			1
uitkomst correct	11	19	28	3	2	1

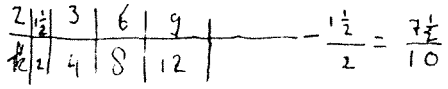
Kwalitatieve beschouwing van de resultaten

Experimentele groep
Dominant zijn de toepassing van visuele modellen en schema's, terwijl voor de controlegroep juist de rechtstreekse beantwoording en de algoritmische regeltoepassing in het oog springen. Op deze aspecten zal nader worden ingegaan.

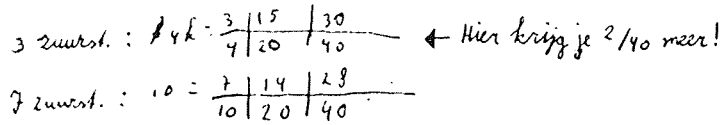
Visuele modellen
Vier leerlingen voltrokken eenheidsgewijze dan wel globale verdelingen. Twee van hen beschreven dit proces met breukenmateriaal op het tweede niveau (gelijknamig maken) en twee schakelden na het verdelen over op het schematiseren met de verhoudingstabel.

Verhoudingstabel
Drie leerlingen werkten toe naar '$\frac{15}{20}$ en $\frac{14}{20}$, terwijl één leerling de tabel voor $\frac{7}{10}$ met nog één getallenpaar uitbreidde.

Eén leerling volstond met een tabel voor $\frac{3}{4}$ en werkte daarmee op een handige manier naar $\frac{7\frac{1}{2}}{10}$ toe:



Bij één leerling was sprake van verkorte tabellen (het 'springen'):



en twee leerlingen pasten uiterst verkorte tabellen toe, rechtstreeks naar situaties met gemeenschappelijke 'noemers' toewerkend. De als regelgericht gescoorde oplossing stemde hiermee overeen, zij het dat niet meer met de tabel geschematiseerd werd.

Controlegroep
Samenvatting van de resultaten:

kenmerken van het oplossingsproces	percentage leerlingen		
	experimenteel	realistisch	mechanistisch
(visueel) model	15 (31)	7	14 (16)
schema (tabel)	62	3	
handig rekenen	(8)	4	
rechtstreeks	15	41	43
algoritme (regel)	8	35	33
niet gemaakt		9	10
totaal	100	99	100
IN-distractorfout		3	2
uitkomst correct	85	33	6

In het oog springen de rechtstreekse beantwoording en de door een algoritme of regel bepaalde oplossingen. We beschouwen deze aspecten nader en nog enkele overige.

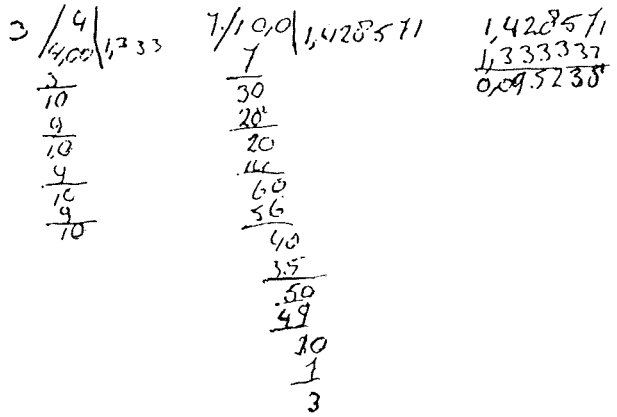
Rechtstreekse beantwoording
Dit vraagstuk bleek voor rechtstreekse beantwoording minder geschikt. Alle leerlingen van de m-groep, die aldus handelden hadden de uitkomst onjuist; van deze leerlingen van de r-groep had een kwart de uitkomst correct.

Voorzover er sprake was van $\frac{\cdot}{3}$, $\frac{\cdot}{7}$ en $\frac{\cdot}{21}$ in de uitkomsten – in tien gevallen deed zich dit voor – verrieden deze constructie van foutieve operatoire betrekkingen op grond van een onjuist relativerend standpunt. Onder het volgende hoofd wordt hierop nader ingegaan.

Algoritme (regel)
Een dergelijke aanpak was nagenoeg even sterk vertegenwoordigd als de vorige.
Binnen de m-groep bleek een voorkeur voor het normeren op 100, resp. het omzetten in percentages. De helft van de op regels gerichte leerlingen handelde aldus.

In de r-groep domineerde het gelijknamig maken ($\frac{1}{3}$ van de 'algoritmici') en kwam het omzetten in decimale breuken via een staartdeling als goede tweede uit de bus ($\frac{1}{4}$ van de gevallen).

Een ontsporing die er bij beide groepen uitsprong – en die zich bij de rechtstreekse beantwoording ook al aandiende – was de gegeven getallen in een onjuist verband plaatsen en via staartdelingen en decimale breuken of gewone breuken de uitkomst bepalen.

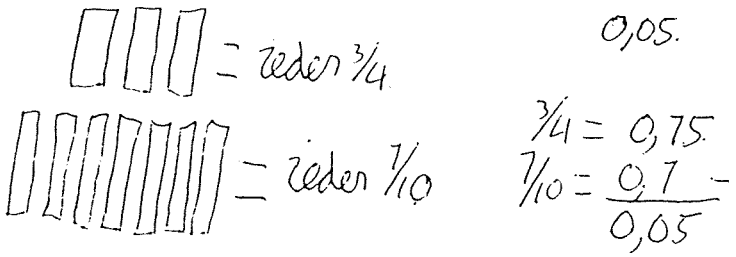


Dit verschijnsel deed zich zowel binnen de m-groep als binnen de r-groep in $\frac{1}{3}$ van de algoritmisch getinte oplossingen voor. De rechtstreekse beantwoording meegerekend handelde meer dan 15% van de leerlingen uit de controlegroep op deze manier (resp. 23 en 10 maal). Het is een aanpak die, afgezien van de algoritmische instelling van de uitvoerders, getuigt van een sterk verengde opvatting van het delen, namelijk 'het kleinste getal moet op het grotere, want delen maakt kleiner.'[34]

Overige aspecten

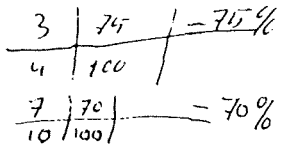
Voor een indruk van de overige kenmerken van het oplossingsproces, geven we van elk een voorbeeld van leerlingenwerk, alle uit de r-groep.

Visueel model

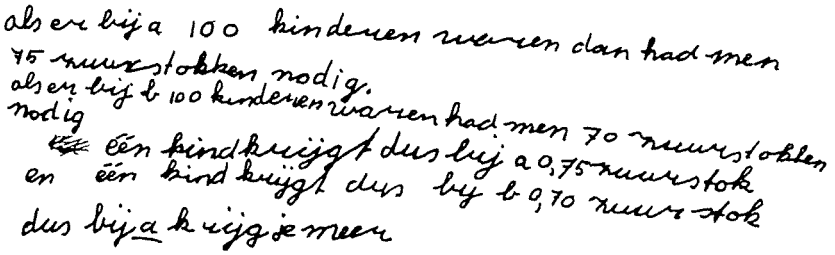


Deze oplossing weerspiegelt dat de maker het visuele materiaal slechts nodig had als startmotor voor het denken. Het bleek niet nodig de verdeling nog te voltrekken. Zich de situatie realiserend was voldoende om vervolgens op het tussenniveau de oplossing te beslissen door een normering op 100 via decimale breuken te bewerkstelligen.

Tabel



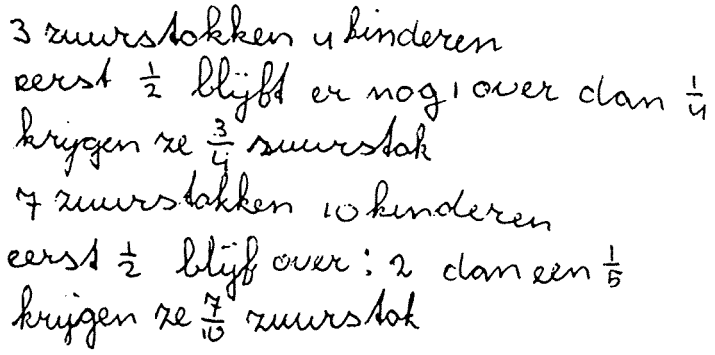
Een andere vorm van normeren op 100, door enkele leerlingen van eenzelfde Rekenwerkschool toegepast, werd in een verhoudingstabel georganiseerd en door één leerling bovendien nog eens mooi verwoord.



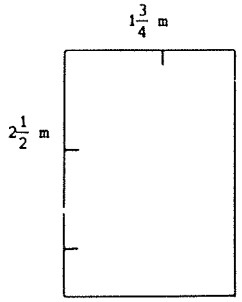
In dit geval werden behalve de kommagetallen ook nog percentages ingezet om de uitkomst te beslissen.

Voorgesteld model (globaal verdelen)

Tenslotte een voorbeeld van voorgesteld modelgebruik (globaal verdelen) waarbij de uitvoerder het visuele materiaal kan ontberen en fraai beschrijft hoe het verdeelproces zich kan voltrekken. De oplossing weerspiegelt een breukbegrip dat op het concrete en het tweede niveau uitstekend blijkt te kunnen functioneren.



Item 9



Een hal van een huis is $2\frac{1}{2}$ meter lang en $1\frac{3}{4}$ meter breed.
De vloer wordt belegd met nieuw parket (dat is mooi vloerhout, dat plankje voor plankje gelegd wordt).
Vader heeft voordelig een pakket gekocht waarmee hij 5 vierkante meter vloer kan beleggen.

► Hoeveel vierkante meter komt vader tekort of hoeveel vierkante meter houdt hij over?

Bedoelingen

Oppervlakte komt in alle beschouwde methoden en het experimentele programma voor. Dit wordt hier in een toepassingssituatie in verband gebracht met het vermenigvuldigen van twee breuken in gemengde getallen. In formele zin gaat dit de einddoelen van WIG enigszins te buiten. De gegeven vermenigvuldiging kan echter inzichtelijk worden uiteengelegd in bij de WIG-doelen passende deelproblemen op grond van distributiviteit.
Bovendien is een rechthoek met maatvoering toegevoegd, zodat ook aan dit visuele materiaal de bewerking kan worden voltrokken. Daarbij komt nog, dat het 'slechts' gaat om $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{4}$ in gemengde getallen, behorend tot het zo vertrouwde jargon van halven en kwarten.
Tenslotte kan ook nog een uitweg gezocht worden in decimale breuken om aan de gewone breuken te ontsnappen. Kennis, vaardigheid en inzicht kunnen zich op de drie onderscheiden niveaus in de oplossingen manifesteren, doch vooral op de beide eerste.

Opmerkingen

1. De veelzijdigheid van het oppervlaktebegrip wordt in het onderwijs onderschat. Dit gaat dikwijls gepaard met snelle tot zeer snelle regelgeving (oppervlakte is lengte keer breedte). Het idee van uitscheppen met een maat wordt genegeerd. Op grond hiervan valt te verwachten dat de leerlingen van de controlegroep dit in hun oplossingen zullen doen blijken. Daarbij kan – iets dat overigens ook op de experimentele groep van toepassing kan zijn – de verwisseling van oppervlakte en omtrek verstorend werken.

2. Voor de experimentele groep geldt, dat in de breukenleergang de kwestie van het vermenigvuldigen van breuken (in gemengde getallen) en oppervlakte wellicht te summier is aangepakt (§ 4.3) .
3. Degenen die trachten de uitkomst rechtstreeks te bepalen kunnen de distributiviteit geweld aandoen. Bijvoorbeeld $2\frac{1}{2} \times 1\frac{3}{4}$ $(2 \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4})$ of $2\frac{1}{2} \times 1\frac{3}{4} = 2\frac{3}{8}$ $(2 \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ en dat twee keer).

Resultaten

kenmerken van het oplossingsproces	aantal leerlingen					
	EP	RW	TT	WIG	NCR	NZR
(visueel) model	4 (5)	4	2	4	1	2
schema (tabel)						
handig rekenen	1		4			
rechtstreeks	1	17	21	10	11	9
algoritme (regel)	5	29	42		8	5
niet gemaakt	2	12	7	1	7	6
totaal	13	62	76	15	27	22
IN-distractorfout					1	
uitkomst correct	3	14	28	0	1	1

Kwalitatieve beschouwing van de resultaten

Bij dit vraagstuk blijken de resultaten dus duidelijk over de hele linie achter te blijven, ook voor de experimentele groep. De rechtstreekse en regelgerichte beantwoording domineren, terwijl zich voor de onderzoeksgroep een ruimer oplossingsarsenaal aftekent. De gevisualiseerde oplossingen zullen om die reden ook worden bekeken.
Voor de regelgerichte oplossingen kan onderscheid gemaakt worden tussen sturing door oppervlakte en/of omtrekregels voor de rechthoek en regels voor het breukrekenen.

Experimentele groep
Visueel model
Vijf leerlingen maakten een volledige of gedeeltelijke onderverdeling van de rechthoek, waarbij vier van hen zich vergisten. Slechts één leerling zag kans dit werk dienstbaar te maken aan het opstellen van een passende betrekking $2\frac{1}{2} \times 1\frac{3}{4} = 4\frac{3}{8}$ $(2 \times 1\frac{3}{4} = 3\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2} \times 1\frac{3}{4} = \frac{7}{8})$.

Rechtstreeks
De ene leerling 'bepaalde' de uitkomst op een decimale breuk die er nogal ver naast zat.

Algoritme (regel)
Twee leerlingen zetten de gegeven afmetingen om in kommabreuken en pasten daarop de algoritme van het vermenigvuldigen onder elkaar toe.[35]
Drie leerlingen lieten zich leiden door de regels van halve of hele omtrek en zaten er dus helemaal naast.

Controlegroep
Samenvatting van de resultaten:

kenmerken van het oplossingsproces	percentage leerlingen		
	experimenteel	realistisch	mechanistisch
(visueel) model	31 (38)	7	6
schema (tabel)			
handig rekenen	8	3	
rechtstreeks	8	31	41
algoritme (regel)	38	46	27
niet gemaakt	15	13	27
totaal	100	100	101
IN-distractorfout			2
uitkomst correct	23	27	4

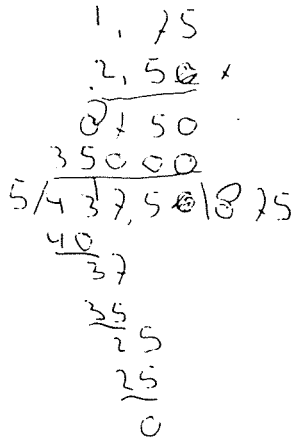
We beschouwen hier dezelfde kenmerken.

Rechtstreeks
Dit vraagstuk leende zich in feite niet tot rechstreekse beantwoording.
Van de m-groep had geen enkele leerling van deze categorie de uitkomst correct. Van de r-groep betrof dit slechts 8 van de 48 leerlingen. Bij 15 van de overige 40 leerlingen van deze 48 verwees de uitkomst naar een redenering op basis van omtrek, bijvoorbeeld over '$\frac{3}{4}$ m^2' ($2\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} = 4\frac{1}{4}$ en $5 - 4\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$), of 'tekort $3\frac{1}{2}$ m^2' ($2 \times 2\frac{1}{2} + 2 \times 1\frac{3}{4} = 8\frac{1}{2}$ en $8\frac{1}{2} - 5 = 3\frac{1}{2}$).
Voor de m-groep was dit aantal 8 van de 20, dus relatief het dubbele. Een overeenkomstige benadering kwam in de regelgerichte oplossingen eveneens sterk naar voren.

Visueel model
Geen enkele leerling slaagde erin een getekende oplossing met correcte beschrijving tot stand te brengen.

Algoritme (regel)
Binnen de r-groep was sprake van een duidelijke scheiding der geesten. In de oplossingen van de RW-leerlingen domineerde de toepassing van decimale breuken (20 van de 29 gevallen) en voor Taltaal was dit de gewone breukenoplossing met in 17 van de 42 gevallen regeltoepassing voor het vermenigvuldigen ($2\frac{1}{2} \times 1\frac{3}{4} = \frac{5}{2} \times \frac{7}{4}$ enz.). In de m-groep kwamen beide

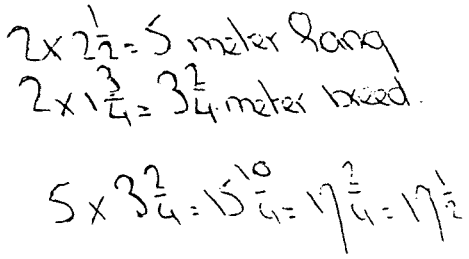
benaderingen elk drie keer voor; soms in de vorm van 'blind' rekenen:



In 19 gevallen werd 'gezondigd' tegen de distributieve eigenschap (17% van de fouten).

Bijvoorbeeld: $2\frac{1}{2} \times 1\frac{3}{4} = 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ of $2\frac{3}{8} + 2\frac{3}{8}$, waarbij een dergelijke ontsporing in enkele gevallen met regelfouten gepaard ging, bijvoorbeeld: $2\frac{2}{4} \times 2\frac{3}{4} = 2\frac{6}{4}$ (zie ook item 10).

In 12 gevallen werd de oplossing gezocht in het toepassen van de regels voor de hele of de halve omtrek (11% van de fouten), wat soms uitliep op een meervoudige regelgeving, namelijk voor omtrek, oppervlakte èn het breukrekenen:



Al met al moeten we concluderen dat wat de omtrekkwestie aangaat zowel experimentele als controlegroep zich in vergelijkbare mate onderscheiden.
Alleen de beschikbare visualisering werd door de experimentele groep iets efficiënter gebruikt, getuige de correcte oplossing en de enkelen die daar heel dichtbij waren. Overigens weerspiegelt deze uitkomst over de volle breedte dat in dit toepassingsvraagstuk twee gebieden (oppervlakte en breuken) werden kortgesloten, die zich beide lenen tot (te premature) regelgeving. De resultaten zijn er dan ook naar.

Item 10

$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$ $1\frac{1}{4} + \frac{6}{12} =$ $2\frac{3}{4} + 1\frac{2}{3} =$

$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} =$ $1\frac{1}{4} - \frac{6}{12} =$ $2\frac{3}{4} - 1\frac{2}{3} =$

$\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} =$ $1\frac{1}{4} \times \frac{6}{12} =$ $2\frac{3}{4} \times 1\frac{2}{3} =$

$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} =$ $1\frac{1}{4} : \frac{6}{12} =$ $2\frac{3}{4} : 1\frac{2}{3} =$

Gebruik het papier voor tekenen en/of berekenen!

Bedoelingen
Bij deze opgaven gaat het om het regelgeleid dan wel inzichtelijk opereren. Het eerste rijtje opgaven leent zich voor inzichtelijk oplossen door te visualiseren of relaties op het tweede niveau toe te passen. Wie inziet, dat in $\frac{6}{12}$ de breuk $\frac{1}{2}$ schuilgaat, kan ook het tweede rijtje tot de inzichtelijke proporties die voor het eerste kunnen gelden, terugbrengen. Degenen met een regelgerichte attitude kunnen door de '$\frac{6}{12}$' ook naar de regels worden 'toegezogen'.
Het laatste rijtje kan een sterker appèl doen op regels, alhoewel hier ook andere middelen ter beschikking (kunnen) staan, zoals het toepassen van visuele modellen of schema's.
Kennis, vaardigheden en inzicht kunnen zich dus op alle drie onderscheiden niveaus in de oplossingen manifesteren, doch vooral op het tweede en derde niveau.

Opmerkingen
1. Vergeleken met de overige groepen kunnen de experimentele groep en de WIG-groep op dit onderdeel wat achterblijven; de WIG-groep, omdat noch het delen van breuken, noch het vermenigvuldigen van breuken in gemengde getallen tot de einddoelen van de methode behoren (§ 7.3.3), de experimentele groep, omdat binnen het ontwikkelingsonderzoek niet op het ontwikkelen van vaardigheid in het toepassen van rekenregels voor breuken is geoefend.
2. Met de opgaven werd eveneens beoogd na te gaan, in hoeverre de leerlingen bij gemis aan vaste, ingeslepen procedures, bijvoorbeeld tot de ontdekking komend: 'ik weet niet meer hoe ik het vermenigvuldigen van breuken moet uitrekenen', zoals een leerling bij vraagstuk 9 stelde, desondanks toch deze opgaven zouden aanpakken. De WIG-groep kreeg van de desbetreffende leerkracht echter de opdracht alle vermenig-

vuldigingen en delingen over te slaan en miste dus deze kans. De resultaten worden voor alle vier bewerkingen tegelijk samengevat en besproken. Evenals bij item 6 is weer het gemiddeld aantal leerlingen met 12 goed geteld. Vanwege de verdeling hiervan over de operaties zijn deze gegevens apart toegevoegd. IN-distractorfouten en andere regelfouten zullen vanzelfsprekend bij dit onderdeel de nodige aandacht krijgen. Bij het scoren onder 'rechtstreeks' of 'algoritme (regel)' geeft datgene wat dominant was de doorslag.

Resultaten

kenmerken van het oplossingsproces	(gemiddeld) aantal leerlingen					
	EP	RW	TT	WIG	NCR	NZR
(visueel) model	2 (3)	5 (7)	1	(1)	2	(1)
schema (tabel)	2 (3)	1 (2)				
handig rekenen						
rechtstreeks	4 (7)	11	8 (9)	8	2	
algoritme (regel)	4 (9)	43	67 (69)	6	23	22
niet gemaakt	1	2		1		
totaal	13	62	76	15	27	22
IN-distractorfout	2	5	2	2	5	1
gemiddeld correct, per uitkomst	6,9	27,4	48,4	3,4	9,3	8,6
gemiddeld correct,	+ − × :	+ − × :	+ − × :	+ − × :	+ − × :	+ − × :
per bewerking	10 10 4,3 3,3	40,7 39,3 15,3 14,3	65,7 65 39,7 23,3	9,3 7,7 - -	15 15 5,7 1,7	14 11,7 6,3 2,3

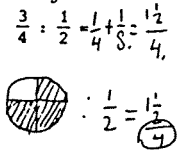
Kwalitatieve beschouwing van de resultaten

Experimentele groep

De veelzijdige benadering van de experimentele groep is vergeleken met de controlegroep, opnieuw opmerkelijk. We gaan enkele kenmerken na.

Visueel model

Het zoeken naar concrete oplossingen en het toepassen van niet of onvoldoende doorgronde regels lijken elkaar niet te verdragen.



Het voorbeeld van Michael toont dat het beschrijven van de oplossing blijkbaar op moeilijkheden stuit. Het is illustratief voor de overige.

Schema (tabel)

Dit werktuig werd door drie leerlingen ingezet, met name door Henk bij het delen, waarbij hij overigens tot een IN-distractorfout verviel. Twee leerlingen maakten van tabellen een efficiënt en meervoudig gebruik in dienst van de produktie van equivalente breuken.

Handig rekenen
Dit viel hier moeilijk te scoren en werd dus ondergebracht bij de categorie 'rechtstreeks'.

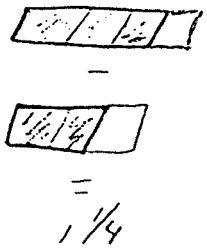
Algoritme (regel)
Hierbij trad, zoals de aantallen correcte uitkomsten al aangeven, een scheiding op tussen het optellen en aftrekken en de beide overige bewerkingen. Het optellen en aftrekken werd in het algemeen beheerst. Voor het vermenigvuldigen en delen is dit geenszins het geval; integendeel, dat wil zeggen voorzover het om de toepassing van vaste regels gaat.
Gelet op de beide eerste rijtjes losten 9 van de 13 leerlingen één of meer van deze vraagstukjes met succes op. Voor het laatste rijtje slaagden slechts twee leerlingen erin nog iets aan deze uitslag in positieve zin te veranderen.
De uitwerkingen van enkelen weerspiegelden het geleerde in het Land van Samen.

Bijvoorbeeld: $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1\frac{1}{2}}{1} = \frac{3}{2}$ of $1\frac{1}{4} : \frac{6}{12} = \frac{2\frac{1}{2}}{1}$. Daarbij werd een enkele maal de distributiviteit geweld aangedaan; bijvoorbeeld: $2\frac{3}{4} : 1\frac{2}{3} = 2\frac{1\frac{1}{2}}{1\frac{1}{3}}$; ook bij het vermenigvuldigen van gemengde getallen was dit een enkele maal de oorzaak van een fout.

Controlegroep
Samenvatting van de resultaten:

kenmerken van het oplossingsproces	(gemiddeld) percentage leerlingen		
	experimenteel	realistisch	mechanistisch
(visueel) model	15 (23)	4 (5)	4 (6)
schema (tabel)	15 (23)	1 (1)	
handig rekenen			
rechtstreeks	31 (54)	18 (18)	4
algoritme (regel)	31 (69)	76 (77)	92
niet gemaakt	8	2	
totaal	100	101	100
IN-distractorfout	15	6	12
gemiddeld correct, per uitkomst	53	52	39
gemiddeld correct, per bewerking	+ − × :	+ − × :	+ − × :
	77 77 33 26	76 73 36 25	59 54 24 8

Algoritme (regel)
De dominantie van de regeltoepassing geldt voor de volledige controlegroep. Alleen binnen de Rekenwerkgroep pasten vijf leerlingen visuele modellen toe, overigens zonder succes (zie het voorbeeld: $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = 1\frac{1}{4}$).



Wat het optellen en aftrekken aangaat, kan voor de r-groep een vergelijkbare beheersing worden vastgesteld als voor de experimentele groep het geval was. De m-groep blijft ten opzichte hiervan al duidelijk achter. Negen leerlingen van de r-groep en vijf leerlingen van de m-groep zorgden gezamenlijk voor 37 IN-distractorfouten. Letten we voor beide groepen op het vermenigvuldigen en delen, daarbij weer onderscheid makend tussen de beide eerste rijtjes en het laatste, dan geldt dat ca. driekwart van de leerlingen (73%) van de beide eerste rijtjes één of meer opgaven correct had. Voor de m-groep bedroeg dit ruim de helft (57%). Dit laatste betekent dus, dat voor 43% van de m-groep en 27% van de r-groep opgaven als $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} =$ en $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} =$ geen concrete achtergrond in het herhaald halveren meer hebben.

Uit uitkomsten als $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ blijkt dit. Dergelijke fouten zijn bij de IN-distractorfouten overigens niet meegerekend. Binnen de r-groep was er een aanzienlijk verschil tussen de TT- en de RW-groep. Van de laatste kon 32% niets met de vermenigvuldigingen en delingen van de eerste twee rijtjes beginnen. Voor de TT-groep was dit slechts 5%. Gezien tegen de achtergrond van de 'weging' van de leerlingen (§ 7.2) vormt dit een bevestiging van onze onderzoeksuitkomst, namelijk dat het forceren van formeel, regelgestuurd breukrekenen in het onderwijsleerproces voor zwakke leerlingen averechts werkt.

Voor het overige was blind regelgestuurd gedrag over de volle breedte van de groep sterk vertegenwoordigd.

Het naar believen 'wegstrepen', bijvoorbeeld $2\frac{3}{4} : 1\frac{2}{3} = 2\frac{1}{2}$, 'omkeren', bijvoorbeeld $2\frac{3}{4} : 1\frac{2}{3} = 2\frac{3}{4} \times 1\frac{3}{2}$ of $2\frac{3}{4} \times 1\frac{2}{3} = 2\frac{4}{3} \times \frac{3}{8} = 2\frac{7}{24}$, het onverachtzamen van de distributiviteit, bijvoorbeeld $2\frac{3}{4} \times 1\frac{2}{3} = 2\frac{6}{12} = 2\frac{1}{2}$, kwamen veelvuldig voor, alsmede het uitzetten van een koers naar ander gegist bestek, met soms een verrassende wending, bijvoorbeeld:
$1\frac{1}{4} \times \frac{6}{12} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32} = \frac{5}{8}$.

Aparte vermelding verdient nog het optellen bij het vermenigvuldigen. Karakteristiek voor dit verschijnsel is de 'oplossing' $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{4}$.

Van de m-groep verviel 49% van de leerlingen in deze fout. Voor de r-groep bedroeg dit 20% en voor de experimentele groep één leerling (8%).

7.6 Samenvatting en conclusies

7.6.1 Inleiding

Allereerst zullen de in het voorgaande geschetste resultaten voor de afzonderlijke leerlingen van de onderzoeksgroep worden bezien naar oplossingsgedrag en de kwaliteiten daarvan over de volledige slottoets (zie hoofdstuk 5).
Vervolgens worden deze bevindingen vergeleken met de controlegroep naar aanleiding van de vraag door welke kwaliteiten het oplossingsgedrag van de onderzoeksgroep zich onderscheidt van dat van de controlegroep, en of dit aan het gegeven onderwijs kan worden toegeschreven.
In de marge nemen we daarbij de resultaten op de CITO-eindtoets voor het basisonderwijs 1986 mee. Het geheel wordt met enkele gevolgtrekkingen besloten.

7.6.2 Samenvatting van de resultaten van de experimentele groep

In totaal werden in de slottoets tien items op 32 onderdelen gescoord.
De vraagstukken waren, ingedeeld naar toepassingsvraagstukken en 'kale' sommen:

leerling	toepassingen correct	kale sommen correct	percentage correct
Alwyn	9	16	78
Carlien	8	15	72
Clara	8	21	91
Frans	8	12	63
Helga	9	16	78
Henk	8	19	84
Kevin	5	11	50
Margreet	6	14	63
Marja	7	15	69
Mark	7	17	75
Michael	5	14	59
Nanja	4	7	34
Stef	10	19	91
$\overline{m}$	7,2	15	70

Beschouwen we de prestaties van de individuele leerlingen naar de kenmerken van de oplossingsprocessen, d.w.z. naar de toegepaste middelen, dan kan het volgende worden vastgesteld:

	kenmerken oplossingsproces							
leerling	visueel model	voorgesteld model	schema tabel	handig rekenen	recht-streeks	algoritme regel	IN-distractor fout	niet gemaakt
Alwyn	9°			3	1,2,4,5, 7,8,10*	6,10*		
Carlien		1°	8	3,5,7	4,10*	2,6,10*		9°
Clara	1		8	2,3,5,6	4,6,10	7°,9,10	7°	
Frans	1,9°			2,7*	3,4,5,6, 10°	8		
Helga	1,8		3,6,8, 10*	1,2,3,6	4,5,6,7°, 10*	6,9,10*	7°	
Henk	9°		7,8,10*	2,3,4,5, 6,7	6,10*	1°,10*	10*	
Kevin				6	1,2°,4*, 5°,6,7,8	9°,10°		3°
Margreet	1,2°,3,6, 7*,8°,10*		3	2°,5,6, 8°	4,10*	3,6		9°
Marja	1,7,8°, 9°,10°		8°,10°	3,6,7	4,5,6	2°,10°		
Mark	1,8			2,3,6,8	4*,5,6, 10*	7*,9°,10*	10*	
Michael	1°,6*,10*		5,7°,8	2,3°,4,6*	4,6*,10*	9°,10*		
Nanja	1°		6*,8	2°,6*	4*,5,6*, 7*	9°		3°,10°
Stef	1,9		8	5,6,7	2,3,4,6, 10	10		

° : uitkomst onjuist (of geen uitkomst).
* : uitkomsten tenminste voor de helft correct.

Verschillen met eerdere uitkomsten worden hieruit verklaard, dat nu op alle middelen die per vraagstuk ingezet zijn, gescoord is.
Het overzicht laat zien, dat het onderwijs op de attitude van Kevin geen aanwijsbare invloed heeft gehad. (Hij was het minst gemotiveerd. Zie § 5.3.) Iets dergelijks geldt voor Alwyn ook. Zijn gerichtheid op getallen en regels heeft de overhand behouden.
Voor de rest van de groep kan men stellen dat het veelzijdige onderwijsaanbod in de geest van realistisch wiskundeonderwijs geleid heeft tot breed inzetbare kennis en inzichten en ruim toepasbare wiskundige middelen van uiteenlopend niveau. Met name de prestaties van Margreet en Michael mogen in dit opzicht opmerkelijk worden genoemd.
Bovendien blijkt, dat de deelgroep die aanwijsbaar van het onderwijs profiteerde, grofweg uiteenvalt in een groepje, dat waar nodig, vasthoudt aan het concreet-visuele en een meer analytisch ingesteld groepje, gericht op getallen, hun samenhangen en bewerkingsmogelijkheden. Vrijwel allen hebben geleerd een voorgelegde situatie te beoordelen op de inzet van hùn passende wiskundige middelen, bijvoorbeeld handig rekenen. De neiging tot het onmiddellijk grijpen naar grove, algoritmische middelen, kwam vrijwel niet voor.
De hypothese lijkt voldoende omkleed, om te kunnen stellen dat het doen

van eigen contructies en vrije produkties als structureel bestanddeel van het realistisch wiskundeonderwijsleerproces de (wiskundige) attitude van de meeste leerlingen in de experimentele groep gunstig beïnvloed heeft.
Steun hieraan wordt ook verleend door de samengevatte resultaten te vergelijken met die van de controlegroep.

kenmerken van het oplossingsproces	gemiddeld door een leerling toegepast	
	experimentele groep	controle groep
(visueel) model	2,2	0,5
schema (tabel)	1,3	-
handig rekenen	3	0,6
rechtstreeks	3	4,8
algoritme (regel)	1,9	3,5
uitkomst correct	22,3 (70%)	18,2 (57%)
IN-distractorfout	0,5	0,7

In bovenstaande samenvatting is het onderscheid tussen r- en m-groep vervallen, omdat er, gelet op de kenmerken van het oplossingsproces, zoals het voorgaande uitwees, geen noemenswaardig onderscheid was.
Bovendien naar de verrichte methodenanalyse uitwees (§ 7.3), bevatte geen enkele van de in de controlegroep gebruikte programma's een realistische deelleergang voor de breuken.

7.6.3 Conclusies

- Ondanks de vele amendementen op de leergang met zijn uitwerking (hoofdstuk 6) kan worden vastgesteld, dat het ermee gerealiseerde onderwijs tot resultaten geleid heeft, die in het algemeen gunstig afsteken bij de resultaten die met uiteenlopende bestaande programma's behaald worden.[36]
- Blijkens de resultaten van de controlegroep op de items 1,7,8,9 en 10, is het heel natuurlijk voor althans een deel van deze groep, naar oplossingen te zoeken via visualiseringen. Het feit, dat dit in de meeste gevallen niet tot succes leidde, toont aan, dat in het onderwijsleerproces van deze groep, niet of niet voldoende aan deze behoefte (neiging) is tegemoet gekomen, of, anders gezegd, het visueel-concrete was voor de controlegroep in constructieve zin vanaf het begin een gepasseerd niveau.
- Gemeten naar de in het onderwijsleerproces ontwikkelde attitude kon de controlegroep als eenheid worden beschouwd, gezien de sterke op regels en algoritmen gerichte instelling. Desondanks was er toch een ingrijpend verschil tussen de realistische groep en de mechanistische groep. In alle gevallen bleek de realistische groep aanzienlijk beter te scoren dan de mechanistische groep, wanneer zonder tussenkomst van wiskundige hulpmiddelen werd afgegaan op de uitkomst van vraagstukken.

Dit wijst erop, dat de gedurige confrontatie met in een context gesitueerde problemen op den duur effect heeft, ongeacht de wijze waarop het onderwijsleerproces verder is ingericht. Hetzelfde geldt in vrijwel even sterke mate voor het kale rekenen met breuken, gelet op het aanzienlijke verschil tussen realistische en mechanistische groep in de behandeling van de bewerking vermenigvuldigen.[37]

- Op het punt van het handig rekenen blijft de controlegroep dramatisch achter bij de experimentele groep. Omgekeerd leidde de algoritmische instelling en de dominerende neiging tot regeltoepassing van de controlegroep niet tot voordeel ten opzichte van de experimentele groep.
  Dit vormt mede een aanwijzing, dat het *leerkrachtgedrag* van grote invloed is, omdat zeker in de realistische programma's aandacht aan handig rekenen wordt besteed. Aanwijzingen voor de invloed van het leerkrachtgedrag vormen o.a. ook de volgende constateringen:
  — van de WIG-groep paste geen enkele leerling de verhoudingstabel toe, terwijl dit schematiseringsmiddel een structureel bestanddeel in de leergangen voor breuken, verhoudingen en procenten in deze methode is.[38]
  — van de Rekenwerkgroep, die uit achtste groepen van drie verschillende scholen was samengesteld, onderscheidde zich er één, waar het ging om het gebruik van visuele modellen en de verhoudingstabel, terwijl dit op grond van het programma voor alle drie de groepen het geval geweest had moeten zijn.
  Wij zijn geneigd beide effecten voor een belangrijk deel aan leerkrachtgedrag toe te schrijven; zo ook het volgende:
  — van de Taltaalgroep, die eveneens uit achtste groepen van drie scholen was samengesteld, onderscheidde zich één groep – dominant, waar het om de wegingsgetallen ging (§ 7.2) – door een sterk overheersende regelgerichtheid bij de items 6 en 10. Van deze groep, 40 leerlingen sterk, zag de helft bijvoorbeeld niet, dat $\frac{1}{2}$ anderhalf keer in $\frac{3}{4}$ opgaat. Men berekende $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{\not 4} \times \frac{\not 2^{1}}{1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.
  Een en ander betekent, dat – voorzichtig – gesteld moet worden, dat ook de realistische methoden voor mechanistisch, althans sterk regel- en algoritme gestuurd onderwijs gebruikt zijn.
  Omgekeerd dient gesteld, dat het onderwijsgedrag van de in het ontwikkelingsonderzoek deelnemende leraren, die in de loop der jaren wèl de vereiste attitude voor realistisch wiskundeonderwijs ontwikkeld hebben, mede van invloed is geweest op de uitkomsten van dit onderzoek.[39]
- Wanneer men mechanistisch onderwijs paart aan een mechanistische methode, dan zijn de effecten van het onderwijs wel erg schamel, ook op die onderdelen, waar alle tijd, moeite en energie in geïnvesteerd zijn, namelijk de 'kale' sommetjes. De resultaten van de mechanistische groep

wijzen dit uit. Het gemiddeld aantal correcte uitkomsten bedroeg 13,5 (42%), een sterk achterblijvend resultaat, vergeleken met de realistische groep 19,7 (62%) en de experimentele groep 22,3 (70%).

- IN-distractorfouten zijn onvermijdelijk, zelfs, wanneer men ze in het onderwijsleerproces bestrijdt. Hun voorkomen wijst op het geforceerde verbreken van de banden met de bronnen van inzicht, zo daar ooit echt uit geput is. Het geeft te denken, dat in de experimentele groep juist twee leerlingen tot een dergelijke fout vervielen, die in hun voorafgaande leerproces van de nodige weerstand tegen deze verleiders hadden blijk gegeven.
- In samenhang met het voorgaande kan gesteld worden, dat een instap op het tweede of derde niveau blinde regelexercitie tot gevolg heeft, met name voor de zwakke leerlingen. Oorspronkelijke inzichten (in het herhaald halveren bijvoorbeeld) en attituden (de spontane neiging tot visualiseren) worden erdoor verstikt.
- Het vermenigvuldigen van breuken via de oppervlaktebenadering dient realistisch en ongedwongen in de leergang te worden verwerkt. Gebleken is dat wanneer twee onderwerpen worden samengebracht, die elk afzonderlijk het gevaar van voorbarige regelgeving en formalisme in zich bergen, dit voor hun verweving in dubbel opzicht geldt. Om deze reden was item 9 voor alle leerlingen een onthullend vraagstuk.
- Op de tijd die in de basisschool aan de breuken besteed wordt, kan vergeleken met de investeringen die mechanistische programma's in dit opzicht vragen, zeker de helft bezuinigd worden.

7.7 Realistisch en mechanistisch, verschil in effecten?

In feite behoeft dat niet meer de vraag te zijn. Dat de effecten die realistisch en mechanistisch reken-wiskundeonderwijs tot gevolg hebben wel een wereld van verschil moeten vertonen, ligt voor de hand. In het volgende wordt dit (nog eens) plausibel gemaakt.
Het begint met het verslag van een les op de Fatima Jozefschool, alwaar het onderzoek plaatsvond: ''k Ben in Parijs geweest' (eerder gepubliceerd in 'Willem Bartjens' 6 (4)).
Een leraar van groep 8 van een school met een mechanistische methode deed ook iets met hetzelfde probleem volgens de instructies:
— Probleem aanbieden (verhaal).
— Gezamenlijk de gegevens eruit halen (noteren op het bord).
— Het probleem *individueel* verwerken.
— Oplossingen innemen en nabespreken.
We vergelijken de uitkomsten van de toetslessen.

Realistisch
De kinderen van groep 8 van de Fatima Jozefschool worden apart gezet.
Onder verwijzing naar een vorig probleem legt de leraar uit:

'We willen kijken of bij een volgend probleem – en ik zeg het maar vast, het is een heel pittig probleem voor groep 8 – ieder een geheel eigen oplossing kan vinden. Daarom heb ik jullie apart gezet.'
Veertien kinderen zijn aanwezig. Twee absent.

L.: Ik ging eens met de auto naar Parijs. Ik ging weg met een volle tank. (De tank bleek met enige nadruk vol.) Mijn vrouw zat naast me met de kaart op haar knieën. Op zeker moment wilde ze stoppen om te picknicken. Ze had trek gekregen. Dat deden we dus. We hadden ongeveer $\frac{2}{3}$ van de afstand afgelegd. Mijn vrouw stapte met het picknickmandje uit en ik keek ...

Ll.: Op de kilometerteller? Of op de benzinemeter?

L.: Juist. Ik zag – tot mijn verbazing – dat de tank nog voor 'n kwart gevuld was.
Dit zijn de gegevens!

Enkelen doen al schoten voor de boeg.

Ll.: Je moet de afstand nog weten!

Ll.: Je moet de inhoud van de tank weten.

L.: Laten we eerst eens kijken wat we weten.

De kinderen dragen gretig aan (de leraar noteert op het bord):

1. Volle tank ($\frac{4}{4}$). De meesten hebben er al $\frac{4}{4}$ achter gezet of het erbij gedacht – naar hun zeggen – in verband met het gegeven van de kwart tank.
2. $\frac{2}{3}$ deel van de afstand.
3. Tank $\frac{1}{4}$ vol.

L.: Welke vragen zou je hierbij kunnen bedenken? De leraar verzamelt op het bord.

Ll.: Hoeveel heb ik nodig voor de rest van de afstand? (a)

Ll.: Als de tank leeg is welk deel van de afstand heb ik dan afgelegd? (b)

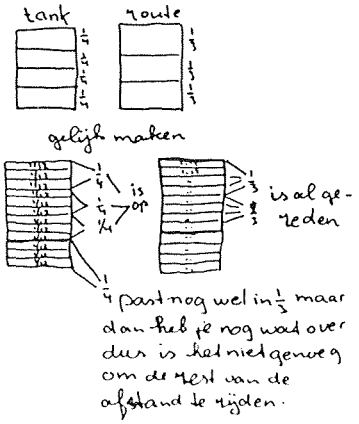
L.: Wat zal ik gedacht hebben, toen ik de benzinemeter zag?

Ll.: *Red ik het nog met de benzine die ik heb?* (c)

L.: Precies. Red ik het wèl of red ik het niet? Daar gaat het om! En ... als je a. of b. weet, weet je c. ook.

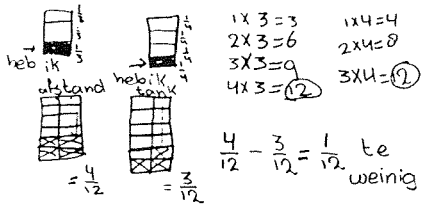
L.: Dus: moet ik bij het volgende tankstation tanken of kan ik doorrijden? Meer gegevens krijg je niet. Bedenk één oplossing en nog een andere manier. Je mag zelf weten of het met breuken, met verhoudingen of met een tekening is.
Dit is de bedoeling:
Wanneer kinderen volgend jaar mijn manier niet snappen, dan kan ik misschien jullie manieren gebruiken.
Daarom heb ik veel verschillende oplossingen nodig.

Welgemoed gaan *alle* kinderen, zonder uitzondering, aan het werk. Kort daarna gaat de leraar weg om een kopje thee te halen. In de vijf minuten die hij wegblijft behouden concentratie en motivatie de overhand. Niemand laat zich afleiden of wordt overmand door de behoefte aan ruggespraak of uitvluchten.
Wanneer de leraar terug is, loopt hij rond om zo hier en daar een aanwijzing te geven. Strikt nodig is het echter niet. Dan, met nog een kwart van de tijdtank gevuld, wordt de apotheose ingeluid. Veel pro's voor 'ik red het niet' maar ook enkele contra's. Een korte inventarisatie volgt. Afgesproken wordt dat in het werk niets meer wordt veranderd. Tenslotte moet authentiek materiaal zijn authenticiteit behouden.
'Hij redt het niet' beweert Donja. Zij heeft een getekende oplossing.



Bij het bord legt zij het nog eens uit. Wil je de tank en de route gelijk maken, dan moet het 12 stukjes worden en dan blijkt dat je in de tank juist één zo'n stukje tekort komt.

Leila heeft ook een getekende oplossing. Zij laat niet *in* maar *buiten* de tekeningen om nog eens zien waarom er in 12 stukjes kon worden verdeeld, zodat het precies uitkwam.



Opmerking: De vraag is welke betekenis heeft deze uitkomst voor de betrokken leerling. Immers: op 8 delen afstand zijn 9 delen tankinhoud gebruikt,

een tekort van $\frac{1}{8}$ wat ook voor het geheel geldt.

Het is vanzelfsprekend dat niet ieders oplossing goed is. Degenen, die het nog meer fout hebben gedaan, kunnen profiteren van de oplossingen van Donja en Leila, want die laten in ieder geval precies zien hoe het zit.

'Hij redt het niet', beweert ook Anthony. Op het bord maakt de leraar de gedachtengang zichtbaar die zijn stellingname kracht moet bijzetten.

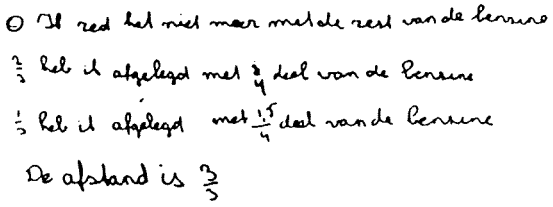
$\frac{2}{3}$ van de afstand gedaan: $\frac{3}{4}$ van de tank gebruikt;

$\frac{1}{3}$ van de afstand moet nog: $\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{8}$ (of $\frac{1\frac{1}{2}}{4}$)van de tank nodig.

Optellen: voor de hele afstand heeft hij $1\frac{1}{8}$ tank nodig ($\frac{6}{8} + \frac{3}{8} = 1\frac{1}{8}$).

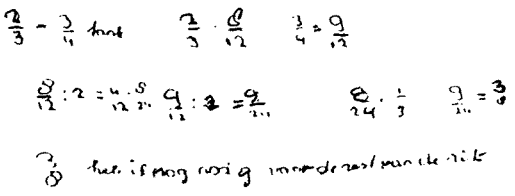
Dus hij komt $\frac{1}{8}$ tank tekort en redt het niet.

Op papier deed Menno iets overeenkomstigs. Zijn gedachtengang ziet er aldus uit.

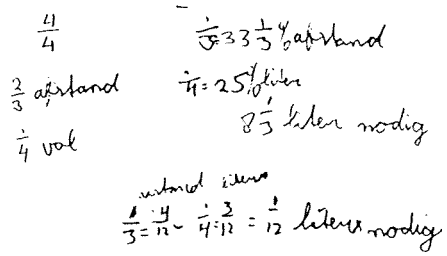


Zo laat Bart met gelijkwaardige breuken zien dat hij voor de rest van de rit nog $\frac{3}{8}$ tank nodig heeft, terwijl er nog maar $\frac{1}{4}$ tank beschikbaar is.

Dus hij redt het niet.

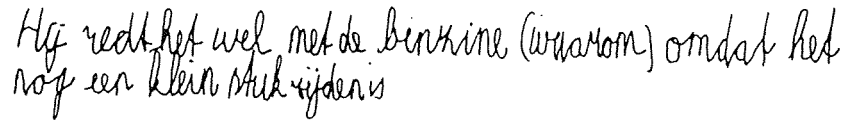


Zhang, voor wie onze taal nog veel te machtig is, zoekt het in de complementen: $\frac{1}{3}$ van de afstand en $\frac{1}{4}$ van de tank; hij stelt via procenten èn gelijkwaardigheid vast – twee oplossingen dus – dat het verschil in het nadeel van de tankinhoud uitvalt, maar weet dat op papier nog niet precies tot uitdrukking te brengen.

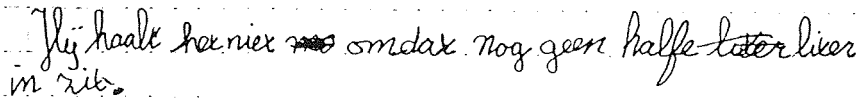


De 14 kinderen bedachten met elkaar 22 oplossingen, waaronder 16 goede! In het voorgaande zijn voorbeelden uit iedere categorie gegeven.
Dan is het voorbij. Het oorspronkelijke werk wordt ingeleverd om in de annalen van het realistische wiskundeonderwijs te worden bijgeplakt en beschreven.

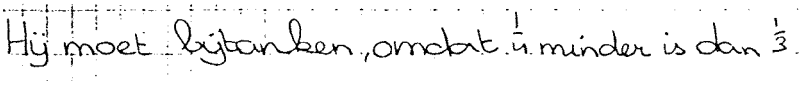
Mechanistisch
Achttien kinderen van een met een mechanistische methode onderwezen groep bogen zich dus ook over de gestelde kwestie.
Eén leerling gaf geen oplossing. Van de overige 17 kinderen waren er 5 die meenden dat bijtanken niet nodig was.
De argumentatie kwam neer op.



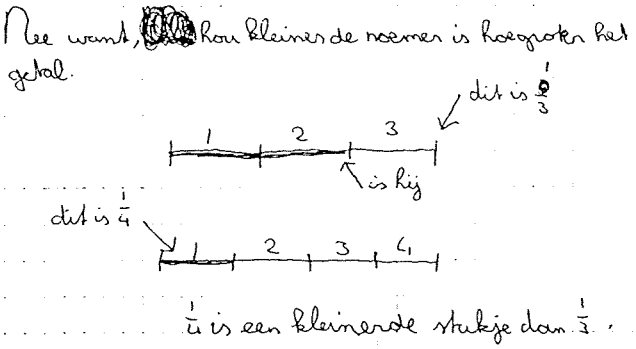
Van degenen die meenden dat de automobilist het zonder bijtanken niet zou halen, waren er acht die argumenten aanvoerden als:



Vier leerlingen waren er tenslotte die bij hun argumentatie de gegevens uit het vraagstuk gebruikten, dus iets van hun breukenkennis konden toepassen, waarvan drie op de volgende manier.



Eén leerling kwam met een gevisualieerde oplossing.



Niemand deed een preciezere uitspraak over deze kwestie. Slechts vier leerlingen pasten dus iets toe van wat zij in drie jaar van de breuken leerden.

7.8 Vooruitblik

We keren terug tot ons uitgangspunt, de probleemstelling waarin het grofweg om twee kwesties ging, namelijk de ontwikkeling van een nieuwe leergang voor het onderwijzen (en leren) van breuken en om theorievorming hieromtrent.
In het volgende hoofdstuk zal de theoretische reflectie plaatsvinden, die we menen te kunnen voltrekken op grond van het verrichte ontwikkelingsonderzoek met zijn opbrengst.
Van de onderwijspraktijk kan en mag niet verwacht worden, dat het onderwijs in de breuken onder vergelijkbare condities als in dit onderzoek zal worden gegeven, ook al waren deze nog verre van ideaal. Het is om die reden dat in een nawoord een aanbeveling voor het onderwijs in de breuken zal worden gedaan die wel haalbaar moet worden geacht, en waarbij recht wordt gedaan aan al die elementen in de ontwikkelde leergang die samen de status van 'beproefde methode' verdienen.

Noten bij hoofdstuk 7

1. Deze wegingsgetallen deden dienst voor de vaststelling van het aantal leerkrachten van de deelnemende scholen voor het schooljaar '85 - '86 waarin het vergelijkende onderzoek werd verricht.
2. Er kunnen verschillen zijn vergeleken met de aantallen deelnemers aan de toetsen door ziekte e.d.
3. We brengen hier nogmaals de eerder vermelde DAT-scores in herinnering in verband met de weging van de experimentele groep (hoofdstuk 3, noot 30).
4. Voor uitvoeriger informatie omtrent deze methoden verwijzen we naar De Jong (1986), waarin ook de bibliografische gegevens verwerkt zijn (p. 183 en p.241).
5. Zie in dit verband De Jong (1986; p.206, 254, 264).
6. De hier gegeven analyse berust op de bespreking van deze methoden in De Jong e.a. (1984; loc. cit. p.21). De benadering in NZR kan op ondergeschikte details afwijken.
7. De Jong (1986) '*In een vrij vroeg stadium wordt geformaliseerd*' (loc. cit. p.267). '*Voor de meeste leerlingen gaat de leergang te ver.*' (loc. cit. p.209).
8. We dienen met dergelijke vaststellingen echter voorzichtig te zijn, omdat bedoelde samenhangen op formeel-structurele gronden kunnen zijn afgedwongen. Zie in dit verband bijvoorbeeld De Jong (1986; p.209) waar over TT wordt gezegd: '*De kommagetallen worden per definite geïntroduceerd.*'
9. De voorbeelden zijn achtereenvolgens ontleend aan: WIG, deeltje 5A, p.11; van verhoudingen (fracties) naar percentages, RW 5 deel I, p.178, experimentele versie (Opmerking: ten tijde van publikatie van dit onderzoek verscheen RW in meer definitieve vorm bij uitgeverij De Ruiter te Gorinchem.), TT deel 9, p.26.
10. Streefland (1983a) en deze publikatie.
11. Onder verwijzing naar noot 8 dient te worden opgemerkt dat belangrijke leergangen in RW, waaronder die van de breuken voorafgaande aan de definitieve publikatie nog een revisieronde ondergaan.
12. De geciteerde voorbeelden zijn op rij ontleend aan WIG, deel 4B, p.82, RW 3, deel 2, p.461, experimentele versie en TT, deel 8, p.13.
13. Er wordt wel gesteld dat methoden als de genoemde, neiging tot realisme hebben. Zie Freudenthal (1987; p.11).
14. WIG, deel 5A, p.13.
15. RW 4, deel 1, p.165-166, experimentele versie.
16. TT, deel 7, p.9
17. Zie hiervoor de door Wiskobas gepubliceerde leerplandelen, in het bijzonder leerplandeel 2, Wiskobasteam (1975).
18. Zie in dit verband Freudenthal (1987; p.11).
19. Zie in dit verband Gravemeijer (1987; p.54).
20. Zie Freudenthal (1987; p.11).
21. Treffers (1987c) Beschrijvingen in eindtermen in bundel Toetsconferentie OW & OC en Gravemeijer (1987).
22. Proefversies van de toets werden gescreend door H.Freudenthal, F.Goffree, K.B.Koster, E.W.A. de Moor, J.M.C.Nelissen, A.Treffers en E.J.Wijdeveld.
    Eén van de beoordelaars kwalificeerde de toets als 'mechanistisch', waaruit men voorzichtig mag concluderen, dat deze dus niet op het experimentele programma was afgestemd.
    De proefafname kon plaatsvinden in enkele brugklassen van de scholengemeenschap 'Lunetten' voor LEAO/MAVO te Utrecht dankzij de medewerking van W.M.G.Querelle.
23. Zie in dit verband Treffers (1987c).
24. Freudenthal (1987).
25. Omdat niet alle aan het vergelijkende onderzoek deelnemende scholen eveneens deelnemers aan de CITO-eindtoets 1986 waren, diende dit dus apart te worden georganiseerd. Om die reden kwam voor ongeveer de helft van de leerlingen van de controlegroep slechts de uitslag

op het onderdeel rekenen beschikbaar, terwijl van de andere helft ook de uitslag op de onderdelen taal en informatieverwerking beschikbaar kwam.

26. Deze op zichzelf correcte oplossing werd niet als zodanig meegeteld.
27. 'Wiskundige attitude' bedoeld als eerder gedefinieerd op grond van Freudenthal (1978), Streefland (1980a) en Treffers (1987a) en Van der Waerden (1950).
28. Vraagstuk ontleend aan Hart (1980).
    Zie in dit verband ook Streefland (1985c).
29. De kennis die kinderen van het herhaald halveren hebben klinkt dikwijls door in gepubliceerd onderzoeksmateriaal.
    Zie in dit verband bijvoorbeeld Behr e.a. (1983), Lesh e.a. (1983), Hunting (1986), Piaget e.a. (1966).
30. Zie in verband met dit vraagstuk ook het geruchtmakende onderzoek van Jacobs (1987) (Rekenen op de PABO), waarin dit item eveneens gebruikt werd. Het bleek overigens een weinig discriminerend vraagstuk te zijn, in die zin, dat het vraagstuk hoofdzakelijk aanleiding gaf tot rechtstreekse beantwoording.
31. Alleen de uitkomst zou als juist gescoord zijn. Dit doet de vraag rijzen: Wat is een antwoord op een multiple choice item waard? Querelle (1984).
32. Hiermee wordt de in § 7.3 gekritiseerde benadering van het ordenen van breuken in RW (experimentele versie) dus ondersteund.
33. Zie in dit verband Bell (1980), Hart (1981).
34. De eenzijdigheid van benadering van het oppervlaktebegrip in het traditionele rekenonderwijs en doelformuleringen alsook de rijkdom en veelzijdigheid van dit begrip zijn in vele toonaarden benadrukt in publikaties. Zie in dit verband achtereenvolgens Treffers (1980), Freudenthal (1978b), Ter Heege en De Moor (1977), De Jong (ed.) (1978).
35. Dat de resultaten van de experimentele groep achterblijven bij de controlegroep, wijzen de resultaten op de CITO-eindtoets voor het basisonderwijs 1986 op het onderdeel rekenen uit. Enkele van deze resultaten waren:

Rekenen 1986	gemiddeld aantal uitkomsten correct (max. 60)
Experimentele groep	50 (84%)
Controlegroep	38 (64%)
r-groep	40 (67%)
m-groep	33 (55%)
Landelijke steekproef n = 2240	43 (72%)

N.B. Voor de totale groep 8, waarvan de experimentele groep deel uitmaakte, bedroeg dit percentage 74.

Beschouwen we binnen deze uitkomsten het eerder onderscheiden cluster van 27 opgaven aangaande breuken, verhoudingen en procenten, dan tekent zich de volgende uitslag af.

	gemiddeld aantal uitkomsten correct van 'de 27'
Experimentele groep	23,5 (87%)
Controlegroep	16 (59%)
r-groep	16,7 (62%)
m-groep	13,7 (51%)
Landelijke steekproef n = 2240	18,7 (69%)

Volledigheidshalve vermelden we ook nog de uitslagen op de beide overige toetsonderdelen.

Taal	gemiddeld aantal uitkomsten correct (max. 60)	
Experimentele *groep**	50,2	(83,7%)
*Controlegroep***	40,1	(66,9%)
r-groep (N_r = 62)	41,6	(69%)
m-groep (N_m = 47)	38,1	(64%)
Landelijke steekproef n = 2240	45,8	(76%)

* voor 2 leerlingen betreft het de resultaten op de CITO-eindtoets 1987.
** voorzover meegedaan; het betreft 1 Taltaalschool, de WIG-school, en de mechaniste groep (n = 111).

N.B. Voor de totale groep 8, waarvan de experimentele groep deel uitmaakte, bedroeg dit percentage 82.

Informatieverwerking	gemiddeld aantal uitkomsten corect (max. 60)
Experimentele *groep**	51,1 (85%)
*Controlegroep***	39,1 (65%)
r-groep (N_r = 62)	40,2 (70%)
m-groep (N_m = 47)	37,6 (63%)
Landelijke steekproef n = 2240	44,4 (74%)

N.B. Voor de totale groep 8, waarvan de experimentele groep deel uitmaakte, bedroeg dit percentage 79.

36. Deze onderzoeksuitkomst logenstraft dus de conclusies van Harskamp en Sühre (1986, p.79): 'Het onderzoek waarover hier is gerapporteerd heeft laten zien, *dat verschil in rekenmethode nauwelijks invloed heeft op de rekenprestaties* en de rekenattitude van de leerlingen .' (curs. L.S.)
Opmerking: Harskamp en Sühre strijken in deze conclusie overigens de aanzienlijke verschillen glad tussen methoden, bijvoorbeeld met betrekking tot voldoende slaagpercentages op de CITO- en de RION-toets. De meest rigide mechanistische methoden zoals NCR en NZR bleken er ook hier in negatieve zin sterk uit te springen (ibid, p.39-40).
37. Overigens was deze methode nog maar sinds een half jaar op de betrokken school ingevoerd.

8 Theoretische terugblik

8.1 Inleiding en overzicht

In de geest van de niveautheorie dient het handelen tijdens het ontwikkelingsonderzoek en de beschrijving daarvan, nu in het denken een vervolg te krijgen met het oog op niveauverhoging en dus theorie. Eerder werd gesteld dat het niveau van de theorie bepaald wordt door de mate van organisatie van en reflectie op wat zich op les- en leergangniveau in het ontwikkelingsonderzoek heeft afgespeeld (§ 3.2). Dergelijke werkzaamheden werden voor een aanzienlijk deel reeds voorbereid en verricht door in de interne evaluatie ook het niveautheoretisch constructiemodel voor de leergang mede te betrekken (§ 6.7).
Daarin werd zelfs gesproken van de integratie van onderwijzen en leren, geïllustreerd aan de onderwijskundige grondstelling van de realiteit als bron en toepassingsgebied, die nu dus ook als leertheoretische grondstelling bleek te kunnen worden opgevat.
In objectieve zin gaat het om het ontvouwen van theorie zoals deze in de ontwikkelde deelleergang en afgeleid daarvan in het onderwijsexperiment werd uitgewerkt: theorie van en voor het onderwijzen van breuken. In subjectieve zin gaat het om theorie van en voor het leren van de breuken zoals deze door de leerlingen is geconstrueerd en om het objectiveren daarvan. Anders gezegd: wanneer iets zús onderwezen wordt, pakt het leren zó uit, maar ook, wanneer het leren op deze wijze uitpakt, dient het onderwijzen op gene wijze te worden vervolgd of bijgesteld.
Het gaat hier om een domeinspecifieke theorie die overigens in een meer algemeen theoretisch kader zou kunnen worden ingepast. Bijvoorbeeld in het raamwerk van de informatieverwerkingstheorie of in dat van de handelingstheorie. Nu is een dergelijke inpassing van een specifieke in een meer algemene theorie niet zonder problemen. In het volgende zullen we dit kort toelichten.

Laten we eerst eens positie kiezen binnen de benadering van de informatieverwerking, dit ondanks het feit dat deze keuze dan nog niet eenduidig vastligt.[1]. Er wordt binnen de informatieverwerkingstheorieën wel onderscheid gemaakt tussen declaratieve kennis voor het bouwen van semantische netwerken en procedurele kennis voor het definiëren van produktieregels voor zulke kennis (hoewel dit onderscheid hier en daar ook fel wordt bestreden!). Leinhardt en Smith (1985) geven nader inhoud aan dit begrippenkader met de breuken als leerdomein. Zij gaan daarbij uit van de expertise van leerkrachten, wier kennis van de breuken als formeel kan worden gekenschetst. De voorgestane instap in het gebied ligt vrijwel op het derde niveau. De opvattingen variëren per leerkracht van mechanistisch tot structuralistisch. Hoe komt het, zo kan men zich afvragen, dat het realisme niet vertegenwoordigd is?[2] Uit de semantische netwerken en produktieregels

die deze onderzoekers ontwikkelden blijkt hun voorkeur voor de structuralistische benadering. Zo hier en daar is nog sprake van wat mechanistische terminologie, zoals 'wegstrepen', dat staat voor het vereenvoudigen van breuken in stroomdiagrammen voor de bewerkingen, waarin dit toepassing vindt (ibid p.265). Het ontvouwde theoretische raamwerk vertoont tekortkomingen.[3]
Het relatieve aspect van breuk, bijvoorbeeld het verhoudingsaspect, wordt veronachtzaamd.[4] Bovendien gaat men voorbij aan de mogelijkheid dat procedurele kennis in een leerproces op den duur tot declaratieve kennis wordt of kan worden, met voortgaand mathematiseren als bemiddelaar tussen beide.
Het mathematisch-didactisch ontoereikend zijn van het onderzoek van Leinhardt en Smith raakt de kern van de kwestie die we hier op het oog hebben.[5] De vraag is namelijk of een grondiger vakdidactische doordenking binnen hetzelfde algemene kader niet tot een andere opzet en andere uitkomsten van het beschouwde onderzoek geleid zou hebben. Het antwoord op deze vraag luidt bevestigend, naar onze studie uitwijst. Er is geen sprake van een *eenduidige* afleiding vanuit de algemene onderwijstheorie naar de vakspecifieke keuze. Kortom, er is ruimte voor verschillende mogelijkheden van wiskundeonderwijsontwikkeling.
Dit maakt duidelijk dat men, van welke algemene theoretische kaders men ook uitgaat, steeds zijn vakspecifieke keuzen zal moeten verantwoorden.[6] Dat hebben genoemde auteurs blijkens het voorgaande niet of in te geringe mate gedaan. Maar dat wil uiteraard nog niet zeggen dat realistische inpassing ook niet mogelijk zou zijn. Naar onze mening is dit niet uitgesloten, al zijn er problemen, omdat met name het constructiebeginsel in de door ons opgevatte zin zich moeilijk verdraagt met de conceptie van informatieverwerking.[7]

Ook met de handelingstheorie kunnen verbanden gelegd worden. Sterker nog, Van Oers (1987, p.360) stelt dat de realistische wiskundeonderwijstheorie er exact kan worden ingepast.

> 'De keuze voor juist deze stroming als exemplarisch object van reconstructief theoretisch onderzoek binnen ons eigen researchprogramma heeft de volgende grondslag. Eén van de meest frappante ontdekkingen bij de beschrijving van de op Leont'ev gebaseerde algemene begripsvormingstheorie was, dat de hoofdmomenten daarvan vrijwel zonder uitzondering een concrete pendant vonden in het kader van het 'realistische reken-wiskundeonderwijs'.
>
> 'Dit is des te frappanter als wij ons realiseren dat deze stroming niet teruggrijpt op de cultuurhistorische theorie, ja soms zelfs wat argwanend staat tegenover psychologische theorievorming over leren en begripsvorming. Deze harmonie gaat zelfs zover dat wij geneigd zijn om de resultaten van deze stroming te beschouwen als een bevestiging van onze psychologisch-didactische theorie over begripsvorming voor wat het reken-wiskundeonderwijs aangaat. Het is een wetenschappelijke zeldzaamheid om de ondersteuning voor een theorie met empirische en praktijkgegevens zomaar op een presenteerblaadje aangereikt te krijgen.'

De fout die Van Oers hier ons inziens maakt is, dat hij wat al te gretig realistisch wiskundeonderwijs als concretisering van de op Leont'ev gebaseerde algemene begripsvormingstheorie aanmerkt, als zou er sprake kunnen zijn van eenduidige samenhang en afleiding van het specifieke uit het algemene.
Is het niet frappant dat juist in het land waar de bronnen voor de door Van Oers beschouwde, algemene begripsvormingstheorie rijkelijk vloeiden, nimmer realistische wiskundeonderwijsontwikkeling heeft plaatsgevonden? De vakdidactische keuzen die binnen de sovjetpsychologische traditie gedaan worden in dit opzicht, zijn structuralistisch te noemen.[8]
Dit vormt een bewijs temeer dat bij het betrekken van een algemene onderwijstheoretische uitgangsstelling tevens het veld binnen de domeinspecifieke gezichtshoek in kaart moet worden gebracht. Van eenduidige afleiding van het één uit het ander of soortgelijke inpassing omgekeerd, kan geen sprake zijn.
Verantwoording van de vakspecifieke keuze blijft dus nodig. In de volgende paragrafen vindt een nadere uitwerking hiervan plaats.

Het gaat om 'theorie *van*' die deels ook 'theorie *voor*' zal moeten zijn, naar nog zal blijken, realistische theorie, relevant en met waarheidsgehalte.[9] De omslag van 'van' in 'voor' wordt empirisch onderbouwd (§ 8.2). Ook enkele meer algemene aspecten van de voortschrijding in het mathematiseren zullen mede worden gekenschetst (§ 8.2.4).
In een nawoord zal in globale termen een haalbaar geachte leergang voor het onderwijs worden geschetst.

8.2 Breuken onderwijzen en leren

8.2.1 Inleiding

In de vier voorgaande hoofdstukken is al heel wat theorie voor de dag gekomen voor het onderwijzen van breuken. Deze beschrijving achteraf zal zich in hoofdzaak richten op het onderwijzen, zo hier en daar gepaard gaande met aspecten van het leren.
Anders gezegd: in de beschrijving zullen de didactische fenomenologie en het voortschrijdende mathematiseren volgens de niveautheorie geïntegreerd aan de orde komen.[10]
Overigens betekent dit niet, dat de theorie louter descriptief kan zijn. Uitgaan van de niveautheorie bijvoorbeeld brengt met zich mee dat een normatief theoretisch kader wordt binnengehaald (Treffers, 1987a, hoofdstuk VII).
De praktijk wees immers uit, dat het veronachtzamen of volledig negeren van het concrete niveau – althans voor een aanzienlijk deel van de leerlingen – leidt tot aanwijsbaar defecte leerprocessen of zelfs het volledig uitblijven daarvan.[11]
De theorie is dus in zoverre normatief, dat grondige ontginning van het eerste

niveau een eerste vereiste is om so-wie-so aan hogere niveaus toe te komen. Voor het bouwrijp maken is de didactische fenomenologie de geëigende – heuristische – methode.
Die onderdelen van het concrete niveau zullen in de eerste plaats de aandacht op zich vestigen, welke een bron tot verticaal mathematiseren zijn; anders gezegd: welke tot voertuig kunnen dienen om hogere niveaus te bereiken.
Dit betekent ook, desnoods stilzwijgend – en deze studie wees dit al veelvuldig uit – een leertheoretische positie innemen. Het is er immers niet om begonnen een zekere status quo vast te stellen. Het gaat er om de gang van het leren door de breuken heen te funderen. Om die reden wordt de gang van het *onderwijzen* concreet gemaakt in een *leer*gang (§ 4.2).
Het gaat in ons geval dus om het scheppen van mogelijkheden, waardoor de leerlingen kunnen *voortgaan* in het vormen van modellen, het bouwen van schema's, het construeren van symbolen en betrekkingen in symbolen, in het schematiseren enz. Omdat het hart van de benadering de inbreng door eigen constructies en produkties is, worden de leerlingen dus veeleer beschouwd als modelbouwers dan als processors. Ook om die reden is een beschrijvingskader binnen de informatieverwerkingstheorie niet erg passend. Het leren dient mede in het licht van het constructivisme te worden bezien.[12]

8.2.2 Het eerste niveau rijk gevuld

De zo noodzakelijke ontginning van het concrete niveau zal in de eerste plaats gericht moeten zijn op het voortbrengen van materiaal met een sterk signaalkarakter, materiaal dat naar contextsituaties verwijst. Bedoeld materiaal krijgt ten slotte (o.a.) zijn wiskundige neerslag in samenstellingen en uiteenleggingen van breuken in symbolen. Breuken als $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$ en $1\frac{1}{4}$ dienen dus echte symbolen te worden met behoud van hun verwijzende functie. Het opereren kan slechts dan werkelijk opereren worden, omdat de breuken nog 'ergens' voor staan.
Het beoogde materiaal zal zo rijk en divers moeten zijn, dat een hecht fundament wordt gelegd – een ruime oriënteringsbasis – waarop het breukenbouwwerk naar de tweede en derde laag kan worden opgetrokken. Om dit te bereiken zal er in eerste instantie moeten worden uitgegaan van het eerlijk verdelen in verdeelsituaties.
'18 repen verdelen onder 24 kinderen'
Het verdelen brengt de objecten en de deelnemers op ongekunstelde wijze met elkaar in verband. Door gevarieerd opdienen (en verdelen) en gevarieerd tafelschikken (en verdelen) worden afgeleide situaties geconstrueerd (cluster 1 en 2; § 4.2.2). Daarin zal het wezenlijke van de oorspronkelijke samenhang steeds moeten worden meegedacht – behoud van verhoudingen – wil de eerlijkheid van het verdelen tenminste niet worden aangetast. Het opdienen en tafelschikken zijn dus bij uitstek de middelen om een gegeven verdeelsituatie vanuit verschillende gezichtshoeken 'open te breken'.
Een en ander heeft tot opbrengst:

— de constructie van het symbool: $\frac{(18)}{24}$; dit visuele beeld verwijst (aanvankelijk) sterk naar de context, namelijk 24 kinderen *om* de tafel en 18 repen er*op*; een metonymia dus met het vereiste signaalkarakter;
— de ontwikkeling van modelsituaties tot situatiemodellen; de eenheidsgewijze (of globale) verwerking van wat op tafel komt en het tafelschikken (en verdelen) alsook de symbolische en schematische registratie hiervan.

Hierdoor voltrekt zich de constitutie van het mentale object breuk, nauw met verhouding verbonden. Telkens opnieuw dient immers de relatie tussen 'het opgediende' en 'een passend aantal verdelers' mentaal te worden geconstrueerd.
Door het eerlijk verdelen, eenheidsgewijs en globaal, worden bedoelde relaties in een veelheid van verschijningsvormen op de individuele porties overgedragen, erin gematerialiseerd.
'Ieder krijgt $\frac{5}{8}$ .....'
Zodoende wordt $\frac{5}{8}$ hecht verbonden met bepaalde voorstellingen; op grond van het 'Franse' verdelen: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ en het globale verdelen, bijvoorbeeld eerst ieder $\frac{1}{2}$ en dan nog $\frac{1}{8}$. Dit is 'ruim $\frac{1}{2}$', zodat het schatten vooraf kan bemiddelen tussen situatie en uitkomst. De vertrouwde breuken, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, ... worden tot ankerpunten bij het schatten. Er ontstaat op deze manier een betekenisvolle verbintenis tussen $\frac{(5)}{8}$ en $\frac{5}{8}$.
De mate van concreetheid wordt vooral bepaald door de voorstellingen die kunnen worden opgeroepen. Het handelen kan mentaal worden voltrokken, ondersteund door begeleidende acties op papier, tekenen, modelvormen, verdelen, beschrijven in symbolen, enz.

Op deze wijze wordt een overdadige bron aan mogelijkheden aangesproken voor het met vrucht in cultuur brengen van het concrete niveau.
Het horizontale mathematiseren wordt in gang gezet als ook het verticale mathematiseren.
De fundamenten voor de hogere niveaus (hoofdstuk 6) worden gelegd met:
— de vorming van visuele modellen; het exploreren van verdeelsituaties op papier noopt tot visuele en symbolische representatie. Dit kan met toenemende doelmatigheid gebeuren. Doordat de realiteit een rijke variëteit aan vormen van te verdelen objecten herbergt, kunnen modellen zich rijk geschakeerd ontwikkelen (lineair (strook, getallenlijn), circulair, rechthoek (oppervlakte), ...);
— de symbolische representatie van het verdelen heeft door de verscheidenheid aan mogelijkheden (kleine) monografieën als beschrijvingskader tot gevolg; breuken worden als relatiebeschrijvers opgaand in

samenstellingen en uiteenleggingen voortgebracht. De scheiding tussen begripsvorming en opereren, kenmerkend in tot dusverre gebruikelijke benaderingen vervalt; begripsverwerving en inzichtelijk opereren trekken eendrachtig op in het leerproces.

— het opbouwen van weerstand tegen de neiging tot het maken van IN-distractorfouten ligt niet alleen in het voortbrengen van bouwstenen voor de verwerving van een hecht breukbegrip besloten. Ook het begeleiden hiervan met het opbouwen van weerstand tegen dit weerbarstige fenomeen is noodzakelijk.
Er zijn voorbeelden van activiteiten beschikbaar die rechtstreeks bijdragen aan de beoogde weerbaarheid zoals de reconstructie van een verdeelsituatie op grond van een gegeven, samengestelde uitkomst (§ 4.3);

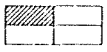
— het equivalentiebegrip is wijd werkzaam in de voorgestelde benadering en dient dit ook te zijn; behalve gelijkwaardigheden als $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} =$ ..... (en $\textcircled{1}_{2} = \textcircled{2}_{4} = \textcircled{3}_{6} =$ .....) betreft het ook equivalenties als $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ e.d. Voorheen werden deze uitsluitend met rekenregels aan symbolisch materiaal afgedwongen.[13]
Het begrip 'schuilnaam' verleent dit verschijnsel verbaal houvast voor de leerlingen en vereenvoudigt de onderlinge communicatie hierover;

— het vergelijken en ordenen van verdeelsituaties zijn gedurende lange tijd kernactiviteiten, die aanleiding geven tot een proces van verticaal mathematiseren. De leergangen voor breuken en verhoudingen worden er hecht door verweven. Het verticale mathematiseren voert tot de relatieve verschilbepaling van (ongelijknamige) verhoudingen en breuken.
Het mathematisch-didactische dilemma van de macro-structurele uitlijning van breuken en verhoudingen is ermee opgelost.;[14]

— met het tafelschikken en de symboolconstructie daarvoor wordt de basis gelegd voor een proces van progressief schematiseren door verkorten;

— door van meet af aan een (grootheids)waarde toe te kennen aan wat 'op tafel' komt en daarop de verdeelbreuken te laten werken krijgen breuken in operatoren betekenis. Bovendien wordt hiermee een basis gelegd voor het opereren via bemiddelende grootheden. Al in het stadium van het vergelijken en ordenen van situaties kan geld een bemiddelende rol vervullen. Daarmee worden tevens toegangen tot de decimale breuken verschaft. Door deze binding aan grootheden wordt bovendien gedurig bijgedragen aan de mogelijkheid tot het zich voorstellen, zich realiseren van situaties.

Voordat het voorgaande in termen van de ontwikkelde clusters als bouwstenen voor de leergang (§ 4.3) en indicatoren om de kwaliteit van de individuele leerprocessen te beschrijven (§ 5.2) wordt samengevat, worden eerst nog twee algemene aspecten van de leergangopbouw bekeken.

Over het eerste kunnen we kort zijn. Het symbool voor de tafelschikkingen met verdeelsituaties en het schematiseren in verband daarmee hebben zo hun beperkingen naar meetsituaties toe. Na een zorgvuldige uitlijning van dit spoor zal de leergang nieuwe impulsen moeten krijgen. Een tweede spoor met andere dan verdeelsituaties zal moeten worden gelegd (zie § 8.2.3).
Het tweede, uiterst essentiële aspect behelst het principe van *het omzien om vooruit te blikken* dat alle opgesomde kwesties doortrekt. Het door constructies en produkties voortgebrachte materiaal grijpt namelijk niet alleen vooruit op wat nog in het verschiet van de leergang besloten ligt.[15] Iedere stap vooruit op de leerweg betekent de facto ook een omzien naar de concrete bronnen van het inzicht.
Een voorbeeld:
Iemand kreeg bij een verdeling  ($1\frac{1}{4}$ reep).
Aan welk tafeltje kan hij gezeten hebben?
De vraagstelling lokt op ongekunstelde wijze de omzetting van een gemengd getal in een breuk (>1) uit (§ 4.2.2, cluster 2). Belangrijker is echter, dat het omzien naar het tafeltje met de oorspronkelijke verdeelsituatie de functie heeft om vooruit te grijpen waar het op equivalentie aankomt. Geschikt bevonden tafeltjes als $\frac{(5)}{4}$, $\frac{(10)}{8}$, ... kunnen middels het Franse verdelen weer verbonden worden met $\frac{5}{4}$, $\frac{10}{8}$, ...
Ergo: $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ en $\frac{10}{8} = 1\frac{2}{8} = 1\frac{1}{4}$ enz.

Samengevat komt het erop neer, dat voor de rijke ontginning van het concrete niveau de onderwijskundige grondstellingen van realistisch wiskundeonderwijs, geconcretiseerd in de clusters van activiteiten als bouwstenen voor een leergang en de indicatoren om de kwaliteit van de voortgang in het leerproces te beschrijven, als volgt samengaan.

Onderwijskundige grondstellingen	Onderwijsproces: clusters van activiteiten	Leerproces: indicatoren
de realiteit als bron (en toepassingsgebied)	• opdienen, tafelschikken en verdelen in verdeelsituaties (1 en 2); • opereren via een bemiddelende grootheid (3)	• begripsverwerving en N-distractoren (1)
symbolen, diagrammen, schema's en modellen	• symbool voor het tafelschikken (2) • breukentaalontwikkeling (1, 2 en 3) • start modelontwikkeling (1, 2 en 3)	• leren omgaan met de breukentaal (1) • flexibele modelkeuze bij het verdelen (3)
inbreng door constructies en produkties	• verdeelsituaties beschrijven met kleine monografieën (4) • als bij symbolen, schema's etc. (1, 2 en 3)	• begripsverwerving en N-distractoren; het leren omgaan met de breukentaal (1) • flexibele modelkeuze bij het verdelen (3)
interactie	clusters 1, 2 en 3	indicatoren 1 en 3
verstrengeling van leerlijnen	— breuken en verhoudingen (1, 2 en 3) — breuken en kommagetallen (3)	indicatoren 1 en 3

8.2.3 Naar hogere niveaus

In het aanvangsonderwijs worden het getalbegrip en de hoofdbewerkingen in realiteiten ingebed. Deze gang van zaken geniet de instemming van didactici, ook internationaal.[16] De realiteit wordt aangegrepen om allerlei betrekkingen te leren zien en toepassen.

Het inzetten door de leerlingen van informele werkwijzen en persoonlijke strategieën wordt er door bevorderd. Ook kunnen realiteiten de bron zijn voor symbolen, diagrammen, schema's en modellen, die de leerweg van 'het lagere naar het hogere' mee helpen traceren.

In § 8.2.2 werd een overeenkomstige benadering van de breuken in het onderwijs theoretisch gefundeerd. Tot de kernelementen ervan behoorden de situatiemodellen. Deze zullen blijken te kunnen bemiddelen bij de overgang van het concrete naar het tussenniveau. Beide genoemde situatiemodellen zijn sterk produktief.

Het tafelschikken is bron voor de constructie van een passend symbool, voor het (voortschrijdend) schematiseren en biedt aangrijpingspunten voor het opereren met breuken.

Het Franse (en globale) verdelen is van invloed op de vorming van visuele modellen door de dynamiek van het successieve verdelen. Er worden samenstellingen en uiteenleggingen van breuken door voortgebracht, tezamen 'kleine' monografieën vormend. Teller en noemer van een breuk verwerven er als zodanig hun betekenis door.

Bij het betreden en binnendringen van het tussenniveau kan het leerproces tekenen van instabiliteit vertonen. Door de realistische benadering zijn er immers steeds toevallige, lokale factoren in het onderwijsmateriaal, die hun invloed op de individuele leerprocessen kunnen doen gelden.[17]
Bedoelde instabiliteit kan zich uiten door:
— het teruggaan naar een lager niveau;
— het ontsporen bij het schematiseren;
— het onzeker zijn bij het kiezen van modellen en het toepassen van schema's;
— het zich voordoen van onwaarschijnlijke sprongen in het leerproces (hoofdstukken 5 en 6).

Kortom, er kan sprake zijn van een zekere stuurloosheid in het leerproces, vooraleer een meer vaste koers wordt uitgezet.
Daarmee zal in het op weg gaan naar hogere niveaus dus rekening moeten worden gehouden bij het oogsten van leerresultaten. De geobserveerde individuele leerprocessen ondersteunen een dergelijke stellingname vanwege de richting en stijgingskracht, die er op den duur in kon worden onderkend (hoofdstukken 5 en 6).
Van het voortschrijden in mathematiseren zullen we de belangrijkste onderdelen opsommen. Eerst echter dient vastgesteld – bij wijze van aanbeveling – dat voor de breuken in het basisonderwijs geen hoger dan het tweede niveau zou moeten worden nagestreefd.
Ten eerste niet, omdat uit dit onderzoek is gebleken, dat het formele niveau van de vaksystematiek voor de meeste leerlingen van de onderzoeksgroep onhaalbaar is gebleken en ten tweede niet door de mogelijkheid van een realistische benadering met eigen constructies en produkties leerlingen toch de gelegenheid hebben op eigen kracht (op deelaspecten) het derde niveau te bereiken. Iets dergelijks zou men bij het formuleren van een eindniveau voor de basisschool in de vorm van streefdoelen kunnen concretiseren.
Wat het voortgaande mathematiseren aangaat richt de aandacht zich op die aspecten, welke in de interne evaluatie omstandig beschouwd zijn (hoofdstuk 6). Het geheel wordt weer op overeenkomstige wijze als in § 8.2.2 samengevat.

Vergelijken
Het vergelijken van situaties, waarin twee of meer grootheden of grootheidswaarden in enigerlei verband met elkaar staan is een uiterst essentiële activiteit. In de natuur- en scheikunde, biologie, aardrijkskunde, economie en wiskunde van het vervolgonderwijs zijn ruime toepassingsgebieden hiervan aanwijsbaar. Ook op het niveau van de basisschool zijn dergelijke problemen belangrijk. De leerlijnen voor breuken en verhoudingen kunnen erdoor worden verstrengeld. Enkele meer algemene kwesties in verband hiermee zullen in § 8.2.4 worden beschouwd.
In dit geval gaat het o.m. om de volgende aspecten van het mathematiseren:

— met het vergelijken en ordenen van (verdeel) situaties (pizza's, repen, dropveters .....) als $\frac{3}{5}$ en $\frac{5}{8}$ kan al worden begonnen met leerlingen van de middengroepen (9 à 10 jaar), namelijk met de prijs per stuk als bemiddelaar. 'Wie het meeste eet, betaalt het meest' (hoofdstuk 4).

Daar ligt het aangrijpingspunt voor een verticaal mathematiseringsproces met als stadia:

— het ordenen van *situaties* met behulp van een gegeven prijs per eenheid;
— het ordenen van *situaties* met behulp van een zelf te kiezen handige prijs per eenheid;
— het ordenen van de *uitkomsten* van (verdeel)situaties (de porties voor ieder) door het met toenemende doelmatigheid kiezen van een handige prijs per eenheid;
— de ordening van breuken en verhoudingen via de kleinste handige prijs; het prijsidee wordt geleidelijk aan teruggedrongen en de prijs krijgt de functie van 'kleinste gemeenschappelijke noemer';
— het aftrekken van ongelijknamige breuken en het bepalen van het relatieve verschil van 'ongelijknamige' verhoudingen door de kgv-regel toe te passen;
— het expliciteren, formuleren en toepassen van de kgv-regel.

Het is nodig bij voorgaande sequentie de volgende opmerkingen te maken.

Opmerkingen

1. Met het oog op de voortschrijdende modelvorming kan met de getallenlijn als model een soortgelijke sequentie worden opgezet voor het optellen van ongelijknamige breuken. De gegeven en de te kiezen handige prijs worden in dit geval vervangen door een gegeven of handige verfijning waarop de eenheid op de getallenlijn gekozen wordt (hoofdstuk 4).
2. Er zijn contexten met een 'vaste prijs' die in dit verband belangrijk zijn. Bijvoorbeeld de 60 (minuten, seconden) voor de baktijden in de 'Smickel' en het watertrappen (diploma zwemmen) (hoofdstuk 4).
   Deze kunnen niet alleen opgaan in de geschetste uitlijningen. Ze dienen ook voor het realiseren van leerdoelen als 'het toepassen van breuken in operatoren op grootheidswaarden en aantallen', gematerialiseerd in bijvoorbeeld $\frac{3}{5} \times 60 =$; $1\frac{1}{3} \times 60 =$ [18].
3. De geschetste uitlijning voor het vergelijken enz. van situaties dient te worden ondersteund met schematische middelen.
   Daarin voltrekt zich een proces van voortschrijdend schematiseren door verkorten.
   Dergelijk schematiseren weerspiegelt niveauverhogingen doordat tijdens het schematiseren de (spontane) verkortingen van karakter veranderen. De produktieve kracht van het situatiemodel van het tafelschikken wordt overgedragen op de toegepaste schema's. Aldus wordt bereikt, dat steunend op de concrete bron, met name op het tussenniveau materiaal wordt voortgebracht met in het verschiet uiterste verkortingen die formele regels

als de kgv-methode weerspiegelen (hoofdstukken 5 en 6).

4. Op een gegeven moment moet het onderwijsleerproces meersporig worden (§ 4.2.2). Het ene spoor van de verdeelsituaties dient vanaf zeker moment te worden uitgebreid met andere verhoudingssituaties (mengsels, kwesties van aantal en prijs, gewicht en prijs, vreemd geld, afstand en tijd en recepten) waardoor de toepasbaarheid van de ontwikkelde middelen en methoden een algemeen karakter verwerft.
   Voorwaarde hiervoor is het op koers liggen bij het schematiseren, dat wil zeggen de schema's in een vergelijkingsprobleem op het tweede niveau van de getalverbanden kunnen toepassen (hoofdstuk 6).
   Tot zover de opmerkingen.

Enkelvoudige situaties

Het voortgaande mathematiseren heeft de volgende kenmerken:

— het voortgebrachte symbolische materiaal in samenstellingen wordt met toenemende mate verkort;
— er worden kleine monografieën voortgebracht die later bewerkt en uitgebreid worden; de status van het materiaal verandert geleidelijk van zuiver situatiebeschrijvend in ècht, symbolisch breukenmateriaal. Daarbij worden eigenschappen en wetten in toenemende mate als produktiemethoden toegepast, als ook het variëren van de operatie en equivalenties.[19]

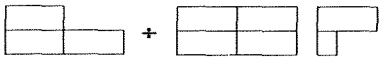
In het steeds gevarieerder voortbrengen van monografieën met toenemende systematiek komt de voortgang in het mathematiseren tot uitdrukking. Methoden voor bewerkingen kunnen eraan worden ontleend.
Eigenschappen en wetten worden zodoende in toenemende mate ingezet om het voortgebrachte wiskundige materiaal 'definitief' te organiseren.
Tezelfder tijd zouden dergelijke ervaringen moeten dienen als één van de ingangen tot de algebra. Het eens gerealiseerde derde niveau van het rekensysteem zal één van de bronnen voor het concrete, eerste niveau worden alwaar de algebraïsering dient te worden ingezet.[20]

Voortschrijdend modelleren (vermenigvuldigen en delen)

In het voorgaande kwam al tot uitdrukking hoe de weg naar een regel voor het optellen van ongelijknamige breuken voortschrijdend op de getallenlijn kan worden gemodelleerd.
Een verwante sequentie kan eveneens worden opgezet voor het vermenigvuldigen van breuken met de rechthoek als ondersteunend model (§ 4.2). Hiervan dienen de mogelijkheden en effecten grondiger en meer systematisch te worden nagegaan dan in dit onderzoek is gebeurd.
Te verwachten valt echter, dat het ondersteunende model na aanvankelijke precisie steeds globaler zal worden ingevuld, waarbij de getallen gaan domineren. De regel, die in het visuele materiaal wordt voorgetekend, wordt dan op het numerieke materiaal overgedragen (§ 4.2). Vanzelfsprekend dient de methode van de bemiddelende grootheid bij deze operatie niet uit het oog

te worden verloren.

Ook het delen dient volgens die methode te worden aangepakt.
Anderzijds heeft het delen zijn wortels in het verdelen en meten met variërende delen en maten.
In de beschrijving daarvan doen zich op de uitkomst gelijkwaardige delingen voor. Daarin weerspiegelt zich de methode van de handige prijs. Beide bronnen vloeien in de verhoudingstabel samen, waarin informele methoden kunnen worden geformaliseerd.
Bijvoorbeeld

$\frac{3}{4} : 1\frac{1}{3} =$ 

Ook hier blijkt de methode van de 'passende tegel' toepassing te vinden. Wijst men deze als eenheid aan, dan gaat de deling over in 9 : 16 =

De eerste figuur beslaat $\frac{9}{16}$ deel van de tweede.
In tabel:

$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{4}$	9
$1\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	4	16

×3 ×4

De regelgeving voor het delen in het Land van Samen werd mede hierop gebaseerd.

Ook hier kenmerkt de voortgang zich door het omzien naar de concrete bronnen met het oog op het vooruitblikken naar niveaus die steeds gemakkelijker binnen bereik komen. Dit alles dient mede om de voorstellingen die zich op het concrete niveau vormen te kunnen blijven vasthouden.

Samengevat tekent zich het volgende af:

Onderwijskundige grondstellingen	Onderwijsproces: clusters van activiteiten	Leerproces: indicatoren
realiteit als bron en toepassingsgebied	— vergelijken, ordenen en relatief verschil bepalen van situaties (1 en 2) — voortgaande exploratie van enkelvoudige situaties (1 en 2)	— begripsverwerving en IN-distractoren (1)
symbolen, diagrammen, schema's en modellen	— vergelijken, ordenen en relatief verschilbepalen van situaties (1 en 2); — opereren via een bemiddelende grootheid (3); — de ontwikkeling van methoden voor de hoofdbewerkingen (4); — omzien naar regels voor de hoofdbewerkingen (5)	— voortschrijdend schematiseren (2); — voortschrijdend modelleren (3) (getallenlijn, rechthoek, situatiemodellen).
inbreng door constructies en produkties	— de ontwikkeling van methoden voor de hoofdbewerkingen (4 en 5); — monografieën (4 en 5).	— het zich maken van een voorstelling bij een formeel probleem (4); — eigen produkties op symbolisch niveau (5)
interactie	clusters 1, 2, 3, 4 en 5	indicatoren 1, 2, 3, 4 en 5
verstrengeling van leerlijnen	— breuken en verhoudingen en kommagetallen (1, 2, 3)	— begripsverwerving en IN-distractoren (1)

8.2.4 Algemene kenmerken van het verticaal mathematiseren

Het verschijnsel van de IN-distractoren kreeg in dit onderzoek een ruimere betekenis dan onderzoekers tot dusver er in het algemeen in hun publikaties aan geven.

Deze ruimere betekenis kwam hierop neer, dat allerlei bewerkingsfouten in het breukrekenen *èn* het verhoudingsrekenen als uiting van hetzelfde fenomeen werden beschouwd, namelijk het veronachtzamen van het relatie-aspect in breuk en verhouding onder dwang van ontoereikend inzicht dan wel te formele of te gecompliceerde numerieke probleemkenmerken.

Eerst en vooral menen we daarom te moeten stellen, dat *aan het breukrekenen op zichzelf weinig belang moet worden gehecht.* Om de breuken gaat het niet. De vervlechting van breuken en verhoudingen beoogde vooral de essentie waarop het aankomt te beklemtonen, namelijk het (leren) mathematiseren van verbanden en relaties. Anders gezegd: het komt aan op het wiskundig leren verwerken van situaties waarin grootheden op deze of gene wijze functioneel zijn samengebracht of als zodanig moeten worden beschouwd.[21] Dit laatste aspect laat zich omschrijven als het leren innemen van een relatief standpunt, 'naar verhouding', 'verhoudingsgewijs', 'in

verhouding tot', 'in relatie met', 'als deel van'. Daarmee wordt een belangrijke voorwaarde vervuld voor het mathematiseringsproces dat men op het oog heeft.
Wie bijvoorbeeld de bevolkingsaantallen van naties zonder meer vergelijkt (en ordent) beschouwt deze uitomsten van het tellen als absolute gegevens; wie deze gegevens echter in verband brengt met de omvang van de betrokken landen stuurt aan op bevolkingsdichtheid en neemt dus een relatief standpunt in: zoveel inwoners per vierkante kilometer; het kan echter ook omgekeerd: zoveel oppervlak(te) per inwoner.
Dienovereenkomstig kan men een geldbedrag op zichzelf beschouwen, maar ook in relatie tot vreemde munt. Wie zich van het koersstandpunt van de eigen bank naar dat van de buitenlandse bank ten opzichte van de eigen munteenheid kan verplaatsen en omgekeerd, zal tijdens zijn vakantie minder moeite met het omrekenen van zijn geld hebben dan wie gebonden is aan het eigen standpunt. Zo kan men doorgaan met aantallen en prijzen, gewichten en prijzen, wegen en tijden, snelheden en tijden enz.
Het eenmaal ingenomen standpunt, de relatieve beschouwing, waarvan men uitgaat, leidt tot een bepaalde normering:
n_1 inwoners per vierkante kilometer tegenover n_2 vierkante (kilo)meter per inwoner, of
x_1 lires per gulden tegenover x_2 gulden(s) per 1(000) lire(s);
y_1 sinaasappels per gulden tegenover y_2 gulden per sinaasappel, enz.
Ook de leerlingen kunnen zich bewust worden van de verwantschap van IN-distractorfouten bij breuken en verhoudingen – althans dit kan worden nagestreefd in het lange termijn leerproces. Het leren zien van 'beide' foutensoorten als indruisend tegen een relatief standpunt berust dan op unificatie door abstractie en generalisatie.
In het proces van mathematiseren van dergelijke verbanden gaat het om het zodanig *normeren* dat gelijkheid in één component wordt bereikt, waardoor het vergelijken en ordenen eenvoudig met de bepaling van het (relatieve) verschil kan worden bekroond. Juist hier liggen toepassingsmogelijkheden voor de breuken naar het ontwikkelingsonderzoek uitwees. De resultaten op item 8 in de slottoets wezen uit, dat bij dergelijke vraagstukken uiteenlopende methoden en middelen in dienst van het normeren kunnen worden ingezet. Het op dezelfde noemer zetten van breuken en fracties, met het stellen op 100 of dergelijke als verbijzonderingen daarvan en het vervolgens omzetten in percentages, kommabreuken (en schaal), blijken evenzovele methoden om dergelijke vergelijkingsproblemen (bij schaal van werkelijkheid en kaart) op te lossen.
Verwante of overeenkomstige realiteit dient voor alle genoemde methoden van normering als bron en toepassingsgebied. Daarin worden symbolen, schema's en modellen voortgebracht en vindt ontginning door eigen constructies en produkties plaats.
Aldus is a priori al de nodige samenhang (verstrengeling van leerlijnen) van genoemde methoden gewaarborgd. Juist hier wordt de functie van de

interactie in dienst van het voorgaande mathematiseren nog eens extra duidelijk. Immers het gegeven realistische onderwijsaanbod heeft een gevarieerd oplossingsaanbod tot gevolg.[22] In de interactie worden deze onderling vergeleken en bediscussieerd. Bijgevolg zullen het op dezelfde noemer brengen van ongelijknamige breuken of fracties, het stellen op 100, het omzetten op grond daarvan in percentages of kommabreuken allengs als uiteenlopende verschijningsvormen van eenzelfde wiskundige methode gaan worden beschouwd.
Aldus draagt de interactie bij tot het *unificeren* van deze methoden. Dit betekent afzien van bijzondere kenmerken en gaat dus gepaard met *abstraheren* en *generaliseren*. Daar, waar in vraagstukken of probleemsituaties de beoogde normering niet is voorgeschreven, staat het de leerling vrij, deze zelf te kiezen en aldus eveneens ervaring in het specificeren op te doen.[23]
In voorgaand proces wordt het unificeren van breuken, fracties en verhoudingen als wiskundige werktuigen vanzelf 'meegenomen'.

In de in deze studie voorgestelde benadering wordt aan het ontwikkelen van een wiskundige attitude in de geest van Freudenthals opvattingen daarover voortdurend gewerkt. De wiskundige organisatie van realistische probleemsituaties vraagt steeds om schatten, zelf structureren, symboliseren, modellen en schema's kiezen, enz.
De voortgang in het onderwijsleerproces draagt allerlei algemene kenmerken, die mede hun invloed op de ontwikkeling van het mentale handelen van de leerlingen doen gelden. Hierbij kan gedacht worden aan leermomenten door het reflecteren op eigen en andermans constructies en produkties, het gedurig omzien in dienst van het vooruitblikken, het veranderen van standpunt of het verleggen van de koers bij het probleem oplossen en het leren innemen van een relatief standpunt (zie ook hoofdstuk 6).
Uit een en ander blijkt hoe de meer algemene cognitieve processen en vaardigheden berusten op en voortspruiten uit een domeinspecifieke oriënteringsbasis (§ 8.1).
Overeenkomstige overwegingen als bij het normeren gelden ook voor het progressieve schematiseren met de tafelschikkingsboom en de verhoudingstabel en het progressief modelleren met getallenlijn en rechthoek, vergeleken met het progressief schematiseren bij het leren cijferen.
In ieder geval op het niveau van het didactiseren van de leraar, maar wellicht ook op dat van de leerling, kan opnieuw een bewustmakingsmoment optreden met unificerende gevolgen. Zowel in de voorbeelden van schematiseren bij breuken en verhoudingen als bij het cijferen, gaat het telkens om de organisatie van een wiskundige activiteit met toenemende doelmatigheid. Uiteindelijk monden deze uit in standaardprocedures. Althans deze mogelijkheid bestaat. Een leerling kan echter ook in minder verkorte stadia van schematiseren zijn eindniveaus bereiken, in termen van de niveautheorie op het tweede niveau.[24]

8.3 Besluit

Hiermee is de theoretische kring gesloten. Domeinspecifieke overwegingen aangaande breuken, ingekaderd in een theorie voor realistisch wiskundeonderwijs blijken een theoretische realiteit te weeg te brengen die relevant is, het nodige waarheidsgehalte bezit. Wat echter belangrijker is: er kunnen individuele leerprocessen mee worden beschreven en voorgeschreven. De specifieke en algemene kwaliteiten van dergelijke individuele leerprocessen hebben veel weg van wat het historische leerproces heeft vrijgegeven of zich als zodanig laat reconstrueren.
Dit betekent dat aan het leren van de breuken als individu niets menselijks vreemd is of behoeft te zijn.

Noten bij hoofdstuk 8

1. Zie Cobb (1987).
2. Thompson (1984) observeerde een breder spectrum aan visies op wiskunde en wiskundeonderwijs onder de leerkrachten dan Leinhardt en Smith. Zij ondervroeg hen hierover en volgde hun lespraktijk. Ook het realisme was in haar onderzoek vertegenwoordigd. Leinhardt en Smith streefden formele modellen na. Was daarin voor realisme geen plaats? Zie ook Cobb (1987).
3. Zie in dit verband ook Szetela (1986).
4. Zie bijvoorbeeld Leinhardt en Smith (1985, p.248).
5. Het is een teleurstellende ervaring te moeten constateren dat in feite geen enkele vooruitgang is geboekt in het domeinspecifieke denken van onderzoekers van de 'Pittsburgse school' sinds Greeno, met wie met name Leinhardt ook samen gepubliceerd heeft. Greeno publiceerde een decennium eerder zijn zogenoemde cognitieve procesmodellen voor equivalente breuken, waaraan dezelfde bezwaren kleefden als aan hetgeen Leinhardt en Smith te berde brachten in hun artikel. Greeno (1976).
   Zie in dit verband ook Streefland (1986b).
6. Zie in dit verband ook Lesh, Landau en Hamilton (1983) en Treffers (1987a, hfdst.VII).
   In verband met deze kwestie en curriculumontwikkeling aangaande de theoretische fundering daarvan, verwijzen we naar de discussie die hierover recentelijk in 'Pedagogische Studiën' is gevoerd tussen Knoers en Treffers. Zie Knoers (1986, 1987), Treffers (1986, 1987d) en ook Haenen en Van Oers (1986) en Streefland (1987a).
7. Het materialiseren van structuren in de geest van Dienes met het oog op het structureren door de leerlingen zèlf, zoals dit voorgestaan wordt, bevat namelijk tal van problemen. Freudenthal (1979a) noemt het gevaar van de valse concretiseringen. Dit zijn materialiseringen of representaties die de vertegenwoordigde wiskundige structuur niet volledig recht doen, dus geweld aandoen. Cobb (1987, p.27) vermeldt in dit verband het stilzwijgende overgaan van leerstandpunt naar onderwijsstandpunt door Resnick en anderen ('to shift from the actor's to the observer's point of view). Een gevolg hiervan is dat het veelvuldig toegepaste begrip representatie een dubbelzinnige betekenis krijgt, namelijk enerzijds *mentale* representatie (Vorstellung) en anderzijds materiële of onderwijskundige representatie (Darstellung). De afstemming van het een op het ander wordt binnen de cognitieve psychologie juist als problematisch ervaren. (Zie in dit verband Glaser (1984) en Wagner en Sternberg (1984).)
   De door Cobb geciteerde voorbeelden van Resnick en anderen, die structuralistisch van karakter zijn, vormen de oorzaak van de geschetste, stilzwijgende standpuntverandering. Het niet toereikend verantwoorden van de vakspecifieke keuzen blijkt de door Cobb gekritiseerde auteurs danig in de weg te zitten. Aldus wordt gehinkt op twee gedachten, namelijk kiezen voor het constructivistische uitgangspunt en tegelijkertijd erop vertrouwen dat het doorvertellen van door de leerkracht gelegde abstracte relaties ook door de leerlingen gezien zullen worden.
8. Zie in dit verband bijvoorbeeld Davydov (1969), Haenen en Van Oers (1986), Van Oers (1987) en Streefland (1979, 1980b, 1987a).
9. Zie in dit verband Freudenthal (1980, 1987) en Treffers (1980, 1987a, 1987d).
10. In termen van de tradities van de sovjetpsychologie en de taakanalyse in de psychologie betekent dit, dat elementen van een logische, psychologische en empirische analyse geintegreerd zullen worden beschreven. Zie § 3.7 en Treffers (1986).
11. De neveneffecten van zulk onderwijs in de vorm van aan de persoonlijkheid toegebrachte schade laten we hier verder ongemoeid. In de wereld van het lager beroepsonderwijs en de volwasseneneducatie heeft men echter al dikwijls de (blijvende) frustraties van het gedurig falen met de breuken en verwante onderwerpen kunnen constateren.
12. Zie over deze kwestie ook Treffers (1987, hoofdstuk VII).
13. Freudenthal (1984, hoofdstuk V).
14. Zie in dit verband Freudenthal (1984, hoofdstuk 5 en 6), Behr e.a. (1983) en Streefland

(1986b)

15. De kwestie van het anticiperende leren werd nader uitgewerkt in Streefland (1985a).
16. Zie in dit verband bijvoorbeeld Carpenter e.a. (1982) en De Corte en Verschaffel (1985) en Whitney (1986).
17. Aan een dergelijk verschijnsel in leerprocessen wordt o.a. aandacht besteed door Hart (1985), Lesh (1985) en Treffers (1987a). Zie ook hoofdstuk 6, § 6.8 en noot 22.
18. Zie 'Proeve van een nationaal programma voor rekenen/wiskunde op de basisschool', deel II (in voorbereiding).
19. Zie in dit verband ook Streefland (1987b) en Treffers (1987a).
20. Zie Treffers (1987a).
21. Zie in dit verband Freudenthal (1984, hoofdstukken 5 en 6), Streefland (1985c), De Vos (1985) en Koleza-Adam (1987).
22. Zie hoofdstuk 4, de kwalitatieve beschrijving van de oplossingen voor item 8 in de slottoets (hoofdstuk 7) en Baaij en Streefland (1987).
23. Zie in verband hiermee Freudenthal (1979d) en Van den Brink en Streefland (1982).
24. Over deze kwestie verwijzen we naar Streefland (1985b) en Treffers (1987b).

Nawoord

Een breukenleergang voor het basisonderwijs zou moeten aansturen op het kunnen oplossen van vraagstukken als de volgende.

1. In verschillende reclamecampagnes worden geluidscassettes aangeprezen;
   — twee halen, één betalen;
   — drie halen, twee betalen;
   — twee halen, de tweede voor de halve prijs.
   De bandjes verschillen niet in speelduur of kwaliteit.
   ► Welke aanbieding is het voordeligst?
2. Iemand vertrekt voor een lange autorit met volle tank. Nadat ongeveer tweederde van de afstand is afgelegd blijkt de benzinetank nog voor een kwart gevuld.
   ► Zal de automobilist nog moeten bijtanken of haalt hij het?
3. Iemand wil een vloer van $2\frac{1}{2}$ meter lang en $3\frac{1}{4}$ meter breed betegelen.
   ► Bedenk een passende tegel voor deze vloer.
   ► Hoeveel van zulke tegels zijn er nodig?
   ► Hoeveel vierkante meter is dat?
   ► Wat kosten de tegels als 1 vierkante meter *f* 16,00 kost?
4. Een wijnvat bevat 4000 liter wijn.
   ► Hoeveel flessen van $\frac{3}{4}$ liter kunnen eruit gevuld worden?

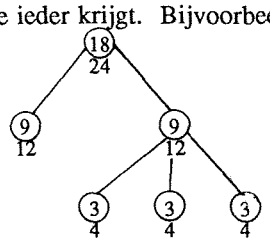
Om dit doel te bereiken zou de leerweg op de volgende fundamenten gebouwd moeten worden.
Aan de basis van alles, op het grondniveau, staat de omstandige verkenning van verdeelsituaties. Daarop volgt de laag van het bewerken langs een omweg, via bemiddelende grootheden. De verbindende specie wordt gevormd door de eigen constructies en produkties van de kinderen. Deze bestanddelen voor gefundeerd breukenonderwijs laten zich globaal als volgt kenschetsen.

Verdeelsituaties
Op het grondniveau valt de nadruk op verdeelsituaties. Deze geven aanleiding tot gevariëerd verdelen, tekenen en beschrijven, construeren dus. Er zijn verschillende middelen om verdeelsituaties in kleinere, meer handzame te ontleden. Dit kan worden aangepakt via gevariëerd opdienen en vervolgens verdelen of via het gevariëerd schikken van de verdelers om tafels en dienovereenkomstig verdelen. Dit betekent dat de genoemde middelen van opdienen en tafelschikken een gegeven verdeelsituatie toegankelijk maken voor de leerlingen, zowel via de eetwaar als via de verdelers.
'3 repen verdelen onder 4 kinderen'.
Eén voor één 'opdienen' en verdelen.
Ieder krijgt $\frac{1}{4}$ (reep) + $\frac{1}{4}$ (reep) + $\frac{1}{4}$ (reep) = $3 \times \frac{1}{4}$ (reep) = $\frac{3}{4}$ (reep), of

eerst twee serveren en daarna nog één.

Ieder krijgt $\frac{1}{2}$ (reep) + $\frac{1}{4}$ (reep) = $\frac{3}{4}$ reep, enz.

'3 repen verdelen onder 4 kinderen' – symbool $\frac{3}{4}$ – kan ontstaan zijn uit een veel grotere situatie, die door middel van het tafelschikken is uiteen gelegd in gelijk-eerlijke tafeltjes, dat wil zeggen gelijk-eerlijk gerekend naar de portie die ieder krijgt. Bijvoorbeeld:



Zulke tafeltjes kunnen met dergelijke schema's voor het tafelschikken worden voortgebracht.

Ze roepen allerlei vragen op als:

— aan welk tafeltje krijg je meer $\frac{3}{4}$ of $\frac{6}{8}$?

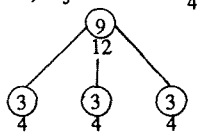
— hoe zit dat met $\frac{3}{5}$ en $\frac{5}{8}$?

— iemand krijgt $1\frac{1}{2}$; aan welk tafeltje kan hij gezeten hebben?

— kan iemand die $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ krijgt aan het tafeltje $\frac{2}{6}$ gezeten hebben?

De beschouwde grondslag dient voor het vestigen van het breukbegrip. Op deze manier krijgen kinderen in de gaten wat een breuk is.

$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$ enz. Verdeelsituaties brengen samenstellingen en uiteenleggingen van breuken voort als ook gelijkwaardige breuken. (Voor het verschijnsel gelijkwaardigheid wordt de term 'schuilnaam' ingevoerd.) De vestiging van het breukbegrip gaat op deze manier hand in hand met inzichtelijk, niet aan formele regels gebonden opereren. Het middel van het tafelschikken kan – blijkens de opgeroepen vragen in verband hiermee – mede in dienst gesteld worden van het vergelijken van situaties, bijvoorbeeld $\frac{3}{4}$ en $\frac{9}{12}$ via



Door deze gang van zaken worden breuken niet alleen hecht verbonden met verhoudingen. Er tekenen zich ook doorlopende lijnen in de leergang af.

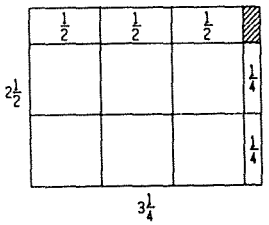
Bijvoorbeeld via verdelingen, gelijkwaardige verdelingen, ongelijkwaardige verdelingen op weg gaan naar het vergelijken, ordenen en (relatief) verschil bepalen van verdeelsituaties met hun uitkomsten. In het verschiet van een dergelijke uitlijning tekenen als natuurlijke, laatste stappen zich ten slotte het gelijknamig maken en het aftrekken en optellen volgens vaste regels af.

Constructie en produktie
Wat het zelf construeren en produceren aangaat valt er al heel wat te verrichten: Verdelingen, eenheidsgewijs en meer globaal, voltrekken aan allerlei materiaal; rechthoeken, cirkels, lijnstukken, stroken, welke weer staan voor repen, pizza's enz. En, deze verdelingen met hun uitkomsten beschrijven met een breukentaal in ontwikkeling. Breukenmateriaal dat bij verdelingen past wordt ook zelf geproduceerd. Er worden schema's voor het tafelschikken geconstrueerd. In de schema's kunnen verkortingen worden aangebracht. Met de verhoudingstabel, die in het verlengde van dit schema ligt, wordt hierop voortgebouwd.

Opereren met een omweg
Op voorgaande grondslag wordt die van het opereren langs een omweg gelegd, via bemiddelende grootheden, of beter erin vervlochten.
De repen, pizza's, dropveters enz., die het verdelen ondergaan, hebben nu eenmaal een lengte, gewicht, prijs of dergelijke.
Dit betekent, dat aan het gevariëerd verdelen, tekenen en beschrijven vrijwel vanaf het begin het 'betalen' kan worden toegevoegd. De breuken die door het verdelen zijn voortgebracht gaan dan dus (in *operatoren*) werken op de bijbehorende lengten, gewichten en prijzen.
Bijvoorbeeld: Bij de verdeling van 3 repen met 4 kinderen kreeg ieder $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ reep. Hoeveel betaalt ieder wanneer een reep 80 cent kost?
$\frac{1}{2} \times 80 = 40$ en $\frac{1}{4} \times 80 = 20$, samen dus 60 cent, maar dit is ook de prijs van $\frac{3}{4}$ reep.
Zo worden verbanden gelegd tussen breuken in samenstellingen als
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}, \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$, als ook
$2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4}$ enz. en hun uitkomsten.
Ook hier tekenen zich doorlopende lijnen af. Bijvoorbeeld bewerkingen uitvoeren met gegeven prijzen, door zelf een prijs te kiezen door zelf een zo klein en zo handig mogelijke prijs te kiezen. Dit mondt uit in regels die tenslotte verwoord en in uiteenlopende situaties toegepast worden.

Handige prijzen kunnen ook de vorm van visueel materiaal aannemen. Het opereren langs een omweg wortelt op die manier ook in de met zorg aangebrachte grondslag van de verdeelsituaties.
Bijvoorbeeld: Bij $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$ een handige 'reep' kiezen van 2 bij 5 blokjes en vervolgens daarvan passende delen afzonderen.

Dit visuele spoor is nodig. Met name de bewerking vermenigvuldigen vraagt naast het rekenen met handige prijzen om een goed eigen alternatief. De drie overige bewerkingen verenigen zich eendrachtig in een uitvoering via gemeenschappelijke noemers.
Voor het vermenigvuldigen tekent zich nog een doorlopende lijn af, die in ons derde voorbeeldvraagstuk ligt voorgetekend, namelijk via het schatten van de oppervlakte in grote tegels (vierkante meters), het verfijnen van de schatting door randstukken te benoemen en samen te voegen



het zoeken van een passende tegel ($\frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$) de oppervlakte precies bepalen in passende tegeltjes en omzetten in grote tegels (vierkante meters). Via een geschikte prijs per vierkante meter kan niet alleen een verbinding worden gelegd met de benadering van de bemiddelende grootheden, maar kan ook de uitkomst worden gecontroleerd.

Constructie en produktie
Ook in verband met deze funderende laag valt weer heel wat te construeren en te produceren voor de kinderen.
De kern wordt gevormd door het zelf meehelpen aan de constructie van methoden voor het uitvoeren van de vier hoofdbewerkingen met breuken via de methode van de handige 'prijs' in getal en visueel materiaal. De produktie van breukenmateriaal op grond van verdeelsituaties kan mede in dienst hiervan worden gesteld.
Terwijl zich dit alles afspeelt in dienst van het optrekken van het breukenbouwwerk gaat een gestage onderstroom van toepassingsvraagstukken gewoon voort. Met name het vergelijken, ordenen en het bepalen van het relatieve verschil in allerlei verhoudingenkwesties maakt hiervan deel uit: recepten, mengsels, weg-duurkwesties, aantal-prijs, gewicht en prijs, enz. De ontwikkelde schematische middelen zoals de verhoudingstabel, kunnen hiertoe worden ingezet. Het geleerde aan breuken vindt er niet alleen ruim toepassing, maar wordt er mede verder door ontwikkeld. Bovendien liggen hier belangrijke verbindingen met onderwerpen als procenten, decimale breuken en schaal.
Het gelijknamig maken van breuken en verhoudingen, het stellen op honderd van frakties met het oog op percentages of decimale breuken, het stellen op tien, honderd, enz. van maatverfijningen bij het meten, het stellen van

afmetingen in de werkelijkheid op zoveel kaartomvang gaan zich op den duur voordoen als uiteenlopende verschijningsvormen van eenzelfde wiskundige methode. Het is de bedoeling dat hiervoor de kiemen al in de concrete bronnen, in de funderende onderlagen gelegd worden.

Reflectie

Waarom is zo'n nieuwe leergang nu nodig, kan men zich afvragen. Wel, naar deze studie uitwees, kent het breukenonderwijs twee essentiële problemen. De hoofdbewerkingen zijn lastig om aan te leren en bovendien kent het toepassen ervan vele problemen. Ook volwassenen ondervinden dit zelf, bij de kansrekening bijvoorbeeld. Met twee dobbelstenen minstens één zes gooien ($\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = ?$) of met 6 personen 30 keer een baan huren waar 4 personen per keer kunnen spelen, hoe vaak speelt ieder?
Kinderen ondervinden soortgelijke problemen bij de voorbeeldvraagstukken over geluidsbandjes, de autorit en de benzine, e.d.
De winst van het leergangvoorstel ten opzichte van bestaande leergangen betreft niet alleen de breuken, maar ook verhoudingen en vooral de toepassingen.

Samenvatting

Samengevat komt de leergang hierop neer, dat met de grondelementen 'verdeelsituaties', 'opereren via een omweg' en 'eigen constructies en produkties' een in dubbel opzicht realistisch breukenbouwwerk kan worden opgetrokken, namelijk haalbaar en betekenisvol.
Dergelijk realisme houdt echter ook in, dat de formalisering van het voortgebrachte systeem in die takken van het voortgezet onderwijs plaatsvindt, waar dit zinvol is met het oog op het wiskundig vervolg.

Summary: realistic instruction of fractions

Research and development of a new program

The aim of this study was to produce a new curriculum for fractions as well as a theory on teaching and learning fractions within the broader framework of a theory on realistic mathematics instruction.
A group of primary school pupils was taught according to a prototype of this program for a number of years, in order to see how far one can progress in teaching fractions to such a group.
The present book on this author's activities offers a change of perspective from the selected learning group to the individual learning processes within that group. A similar change takes place on the level of the developer/researcher: the focus is shifted from the problem definition and the already available knowledge and materials to fresh knowledge and theory gained from the researcher's own learning process. The division and arrangement of the present book reflect this intention.

In chapter I the problem of fractions in instruction is pointed out and placed in an historical setting. The crux of the matter is the estrangement which arises between reality as source and domain of application of fractions and the theory behind it. This theory has now taken the place of the original source materials in the majority of textbooks, even those for young children. A situation has now arisen of putting the cart before the horse: this path in historical development has led to dead end, mechanistic instruction, estranged from reality.
Influenced by, among other things, the IOWO Wiskobas project, what originated as a modest counter-movement gained in strength. This counter-movement which, too, has its roots in an historical base, is still growing and is characterized by its sharp turn back towards reality. The undercurrents caused by the turbulence of these two streams can still be felt. In this force field the problem of fractions has been unduly neglected in spite of the pressing need for a solution. Indeed, even the most recent investigations into the teaching of fractions have produced rather pathetic results.

Chapter II offers various approaches to fractions, now placed against the background of the historical learning process. The structuralistic approach is distinguished by its orientation towards an insightful *reproduction* of the formal system. In the present research, however, a realistic approach has been chosen which is oriented towards an insightful *construction* of the system and which corresponds to the historical learning process. Taking an example from Papyrus Rhind (1700 BC), the instructional principles are unfolded which provide more substance to the insightful construction by a process of progressive mathematization. Exposed against this background framework are the intentions mentioned above of the development research in question.

If construction and production are to form the nucleus of the pupils' activities, then this must also be the case where the development-researcher is concerned. Chapter III sketches for this purpose the framework of level theory in which the activities to be performed - with construction as the central focus - are differentiated and structured.
These levels concern:
— the local or lesson level
— the global or course level
— the theory level.
Treffers' components of a theory of realistic mathematics education are integrated into this construction framework as follows:
— didactical phenomenology
— level theory (Van Hiele)
— progressive mathematization (horizontal as well as vertical).
This chapter also includes remarks on the following aspects:
— research design (observing long-term individual learning processes)
— methods (instructional experiments and interviews)
— selection of subjects and teachers
— the role of the researcher himself (the philosophical dilemma of participation and distance).
The development research and the results thereof are described in the following five chapters.

Chapter IV presents a global sketch of the course in question. One of its essential characteristics is the intertwining of fractions and ratio, another is the long-term view based on pupils' own contributions in the form of construction and production. This corresponds to the model of level theory for course construction described earlier.
The sketch is followed by a (stylized) impression of the actual instruction. Numerous student reactions are included, which lead to the shift in focus from the general instructional process to the individual learning processes. This impression is completed by a reflection on progressive mathematization, arranged according to the instructional principles mentioned earlier, namely:
— taking reality as source and domain of application
— developing symbols, schemas and visual models in the learning process
— stimulating the pupils' own constructions and productions
— developing learning strands (in particular the intertwining of fractions and ratios)
— promoting interaction, cooperation, negotiation, discussion.

In chapter V the shift from instructional to learning processes continues. The thirteen pupils who participated during the entire experiment are described in detail with regard to their individual learning processes. Based on the sketch of the course mentioned above, five criteria are distinguished and defined. These concern the progress of mathematization and the rise in the level of competence during the instruction processes and are subsequently applied

separately to each pupil as follows:

— weaknesses in coupling fractions and ratios such as from following additive rather than multiplicative reasoning (ℕ-distraction viz. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$) as a consequence of premature abstraction
— progress in mathematization (e.g. schematization)
— flexible application of (visual) models, schemas and clever reckoning
— representations of formal problems
— pupils' own constructions and productions on the symbolic level.

Considering the fact that the primary intent was to determine how far one can progress in fractions with a group of primary school children, the individual learning processes are therefore classified according to the levels reached and the degree of differentiation evolved.

Chapters VI and VII are concerned with evaluation, both formative and summative. Chapter VI deals with internal evaluation. The individual learning processes observed and described in chapter V are confronted with currently available instructional methods, keeping in mind the potential to improve the experimental course and to construct a theory. The criteria mentioned above play a crucial part here. Certain aspects of progress in mathematization can be represented graphically, such as the resistance to ℕ-distractors and progressive schematization. Internal evaluation contributes to closer specification in corroboration of Van Hiele's level theory, in this case regarding the instruction of fractions and ratio.

Chapter VII deals with comparative evaluation. The performance of the experimental group on an 'average' test that had been designed for this particular aim is compared with that of a rather large control group (more than 200 pupils) who had been instructed using a variety of existing courses (containing both realistic and mechanistic features). The comparison led to indications of how the experimental course could be improved, and at the same time testified in favour of learning mathematization. The scores on the CITO test 1986 at the end of primary education confirmed the conclusions with regard to external evaluation.
With respect to attitude, it may be stated that the pupils in the experimental group distinguished themselves by their flexibility, adroitness and insight, when compared to the general rigidity and tendency to stick to the algorithms as witnessed in the control group.

Chapter VIII, the final chapter, contains a theoretic reflection within the mathematical-didactical framework of description, although some connections are made with more general frameworks of cognitive and instructional psychology. A theory on realistic teaching and learning of fractions is developed. Lastly, a course in fractions, feasible for primary school, is proposed.

Literatuur

Aalst, H.F. van: *Waar doen we het eigenlijk voor?*, Eijkelhof, H.M.L. e.a. (red.), Op weg naar vernieuwing van het natuuronderwijs, 's Gravenhage 1986, 16-21.

Adda, J.: *L'Observation de Classes et le Paradoxe de l'Observateur*, Educational Studies in Mathematics 13, 1982, 21-32.

On the mathematics curriculum of the high school. Memorandum ondertekend door L.V. Ahlfors e.a., waaronder Coxeter, Courant, Kline, Polya, Sawyer, The Mathematics Teacher, LV(3), 1962, 191-195.

Baaij, J. en L. Streefland: *'k Ben in Parijs geweest*, Willem Bartjens 6(4), 1987, 170-173. (Zie appendix.)

Behr, M.J., G.W. Bright, I. Wachsmuth: *Number Line Representations of Fractions Proceedings of the Forth Annual Meeting of the North America Chapter*. PME, Athens, 1982, 106-119.

Behr, M.J., R. Lesh, Th.R, Post en E.A. Silver: *Rational Number Concepts*, R. Lesh e.a. (eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, New York 1983, 92-124.

Behr, M.J., I. Wachsmuth, Th.R. Post en R. Lesh: *Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical teaching Experiment*, Journal for Research in Mathematics Education 15(5), 1984, 323-342.

Bell, A.M., M. Swan en G. Taylor: *Choice of operation in verbal problems with decimal numbers*, Educational Studies in Mathematics 12, 1981, 399-421.

Bergervoet, P. e.a.: *De baas over de computer. Verslag van een ontwikkelingsonderzoek*, Utrecht 1986.

Bidwell, J.K.: *Share Five Chocolate Bars among Six Children*, Mathematics Teaching 99, 1982, 4-8.

Bishop, A.J. en F. Goffree: *Classroom Organisation and Dynamics*, B. Christiansen, A.G. Howson en M. Otte (eds.), Perspectives on Mathematics Education, Dordrecht 1986.

Boeke, K.: *Wij in het heelal - een heelal in ons. Twee tochten door macrocosmos en microcosmos*, Amsterdam, Purmerend z.j. (± 1957).

Bouman, P.J. en J.C. van Zelm: *De rekenkundige denkbaarheden in logischen samenhang met - als proeve van toegepaste logica - een rekenmethode voor de lagere school*, Amsterdam 1918.

Boyer, C.B.: *Viète's use of decimal fractions*, The Mathematics Teacher LV(2), 1962, 123-125.

Boenders, F.: *Denken in Tweespraak*, Amsterdam 1978.

Braunfeld, P. en M. Wolfe: *Fractions for low achievers*, The Arithmetic Teacher 13(8), 1966, 647-655.

Brink, F.J. van den: *In de trein ben ik 3*, Het Jonge Kind 9(3), 1981, 68-72.

Brink F.J. van den: *Mutual Observation*, For the Learning of Mathematics, 2(2), 1981, 29-30.

Brink, F.J. van den en L. Streefland: *Kroniek. Het PME (Psychology of Mathematics Education) Congres Antwerpen 1982*, Pedagogisch Studiën 60, 1983, 369-373.

Brink, F.J. van den: *Numbers in Contextual Frameworks*, Educational Studies in Mathematics 15, 1984, 239-257.

Brink, F.J. van den: *Class Arithmetic Books*, Proceedings of the Seventh Annual Meeting PME-NA, Columbus 1985, 282-286.

Brink, J. van den: *Children as arithmetic book authors*, For the learning of mathematics 7(2), 1987, 44-48.

Bunt, L.N.H.: *Van Ahmes tot Euclides*, Groningen 1968.

Cadot, J. en D. Vroegindeweij: *10 voor de basisvorming, onderzocht*, Utrecht 1986.

Carpenter, T.P. e.a.: *Results and Implications of the NAEP-Mathematics Assessments: Elementary School*, The Arithmetic Teacher 22(6), 1975, 438-450.

Carpenter, T.P. e.a.: *Results and Implications of the Second NAEP-Mathematics Assessments: Elementary School*, The Arithmetic Teacher 27(8), 1980, 10-12; 44-47.

Carpenter, T.P., J.M. Moser en T.A. Romberg (eds): *Addition and Subtraction: a cognitive perspective*, Hillsdale 1982.

Carpenter, T.P. e.a.: *Results of the Third NAEP-Mathematics Assessment: Secondary School*,

Mathematics teacher, 1983, 652-659.
Chaffe-Stengel, P.c. en N. Noddings: *Facilitating Symbolic Understanding of Fractions.* For the Learing of Mathematics 3(2), 1982, 42-48.
Cobb, P.: *Information-Processing Psychology and Mathematics Education - A Constructivist Perspective,* Journal of Mathematical Behavior 6, 1987, 3-40.
Confrey, J.: *Towards a framework for Constructivist Instruction,* L. Streefland (ed.), Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol I: Individual contributions, Utrecht 1985, 477-483.
Confrey, J.: *The constructivist.* J.C. Bergeron, N. Herscovics, C. Kieran, *Psychology of Mathematics Education* PME-XI, Montreal, 1987, Vol III, 307-317.
Corte, E. de en L. Verschaffel: *Oplossingsstrategieën bij eenvoudige redactieopgaven over optellen en aftrekken,* Pedagogische Studiën 62, 1985, 125-138.
Dam. J. van: *;De vernieuwde Cijfferinghe van Mr Willem Bartjens', hersteld, vermeerderd en verbeterd,* Amsterdam 1794.
Davis, P.J. en R. Hersh: *Erfahrung Mathematik,* Basel 1985.
Davis, R.B.: *Learning Mathematics. The Cognitive Science Approach to Mathematics Education,* London/Sydney 1984.
Davydov, V.V., Tsvetkovic, Z.: Psychologische mogelijkheden van jonge kinderen in het wiskundeonderwijs, Moskou, 1969.
Dekker, A. e.a.: *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas,* Utrecht 1981.
Diels, P.A. en J. Nauta: *Fundamenteel Rekenen,* Groningen 1936.
Dienes, Z.P.: *Fractions. An Operational Approach,* Parijs 1967.
Eicholz, R.E. en P.G. O'Daffer: *Elementary School Mathematics,* Menlo Park California/Reading Massachusetts, London 1968.
Erlwanger, S.H.: *Benny's conception of rules and answers in IPI-mathematics. Part I,* The Journal of Children's Mathematical Behavior, vol 1 nr 2, 1973, 7-26.
Erlwanger, S.H.: *Case studies of children's conceptions of mathematics. Part I.* The Journal of Children's Mathematical Behavior, vol 1 nr 3, 1975, 157-283.
Euclides 61(2), 1986. Hierin de bijdragen van Vredenduin, Schuring, Broekman en Weterings.
Eijkelhof, H.M.C. e.a. (red.): *Op weg naar vernieuwing van het natuurkunde-onderwijs,* 's Gravenhage 1986.
Feijs, E. en E. de Moor: *Het Kanaal (8). DE of HET algoritme,* PanamaPost 5(2), 1986, 24-27.
Feijs, E. e.a.: *Almanak reken-wiskundemethoden,* Utrecht 1987.
Freudenthal, H.: *Van Sterren tot inlegzolen,* Arnhem 1954.
Freudenthal, H.: *Why to teach mathematics so as to be useful,* Educational Studies in Mathematics 1(1,2), 1968, 38.
Freudenthal, H.: *Mathematics as an Educational Task,* 1973.
Freudenthal, H.: *Weeding and Sowing. Preface to a Science of Mathematics Education,* Dordrecht/Boston 1978[a].
Freudenthal, H.: *Oppervlakte als verschijnsel benaderd,* Jong, R. de (ed.), Oppervlakte (2), Leerplanpublikatie 9, Utrecht 1978[b], 107-120.
Freudenthal, H.: *Structuur der Wiskunde en Wiskundige structuren,* Pedagogische Studiën 56(2), 1979[a], 51-61.
Freudenthal, H.: *Konstruieren, Reflektieren, Beweisen in phänomenologischer Sicht,* Dörfler, W, en R. Fischer (eds.), Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Beweisen im Mathematikunterricht, Wien 1979[b].
Freudenthal, H.: *How does reflective Thinking develop,* Proceedings of the third International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Warwick 1979[c].
Freudenthal, H.: *Verhoudingen als verschijnsel,* Wiskrant 4(17), 1979[d], 5-9.
Freudenthal, H.: *Onderzoek in Onderwijs,* Pedamorfose 12(45), 1980, 5-9.
Freudenthal, H.: *Major Problems of mathematics education,* Educational Studies in Mathematics 12, 1981, 133-150.
Freudenthal, H.: *Is heuristic a singular or a plural?,* Hershkowitz, R. (ed.), Proceedings of the

seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Rehovot 1983[a], 38-50.
Freudenthal, H.: *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht 1983[b].
Freudenthal, H.: *Didactische Fenomenologie van Wiskundige Structuren*, Utrecht 1984.
Freudenthal, H.: *Brüche*, Mathematik Lehren 16, 1986, 3-7.
Freudenthal, H.: *Theorievorming bij het wiskundeonderwijs. Geraamte en Gereedschap*, Panama-Post 5(3), 1987, 4-15.
Gagné, R.M.: *Some Issues in the Psychology of Mathematics Instruction*, Journal for Research in Mathematics Education 14, 1983, 7-19.
Gillings, R.J.: *Problems 1 to 6 of the Rhind Mathematical Papyrus*, The Mathematics Teacher LV(1), 1962, 61-69.
Ginsberg, H.P. e.a.: *Protocol Methods in research on Mathematical Thinking*, H.P. Ginsberg (ed.), The Development of Mathematical Thinking, New York 1983, 8-46.
Glaser, R.: *Education and Thinking. The Role of Knowledge*, American Psychologist 39(2), 1984, 93-104.
Goffree, F.: *Leren onderwijzen met Wiskobas*, Utrecht 1979.
Goffree, F.: *Wiskunde Onderwijs en het dagelijks leven*, Enschede 1982.
Goffree, F.: *Benny, een zaak voor de Pabo*, Enschede 1984.
Goffree, F.: *Wiskunde & Didactiek*, derde deel, Groningen 1985[a].
Goffree, F.: *Ik was Wiskundeleraar*, Enschede 1985[b].
Goffree, F. (red.): *Onderzoek en (leerplan)ontwikkeling*, Enschede 1985[c].
Goffree, F.: *Rekenen, Realiteit en Rationaliteit*, Enschede 1986.
Gravemeijer, K.: *Three dimensions* – een model voor doel- en theoriebeschrijving –, PanamaPost 5(3), 1987, 46-56.
Greeno, J.G.: *Cognitive Objectives of Instruction: Theory of knowledge for solving problems and answering questions*, D. Klar (ed.), Cognition and Instruction, Hillsdale (N.Y.) 1976, 123-159.
Griesel, H.: *Eine verbandtheoretische Analyse der Bruchrechnung*, Mathematischphysikalische Semesterberichte, Band VI, 1959, 195-216.
Haenen, J. en B. van Oers: *De vorming van wetenschappelijke begrippen. Davydov op de basis-school*, Pedagogische Studiën 63, 1986, 445-455.
Harskamp, E.G. en C.J.M. Suhre: *Vergelijking van rekenmethoden in het basisonderwijs*, Groningen 1986.
Hart, K.: *Secondary School Children's Understanding of Ratio and Proportion*, University of London 1980 (dissertatie).
Hart, K.M.: *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, London 1981.
Hart, K.M.: *Untersuchungen über Schülerfehler*, der Mathematikunterricht 31(6), 1985, 26-37.
Hasemann, K.: *Die Beschreibung von Schülerfehlern mit kognitions-theoretischen Modellen*, Der Mathematikunterricht 31(6), 1985, 6-15.
Haseman, K.: *Mathematische Lernprozesse. Analysen mit Kognitionstheoretischen Modellen*, Braunschweig/Wiessbaden 1986[a].
Hasemann, K.: *Bruchvorstellung und die Addition von Bruchzahlen*, Mathematik Lehren 16, 1986[b], 16-19.
Have, P. ten: *Sociologisch Veldonderzoek*, Meppel 1977.
Hawkins, D.: *Nature, man and mathematics*, A.G. Howson (ed.), Development in Mathematical Education, Cambridge 1973, 115-136.
Heege, H. ter en E. de Moor: *Oppervlakte*, Leerplanpublikatie 7, Utrecht 1977. (Bijlage bij Wiskobas Bulletin 7(1/2), 1977.)
Heege, H. ter: *Een goed product. Onderzoek en ontwikkeling ten behoeve van een leergang vermenigvuldigen*, Enschede 1987.
Hiele, P.M. van: *Begrip en Inzicht*, Purmerend 1973.
Hiele, P.M. van: *Wie kann man im Mathematikunterricht den Denkstufen Rechnung tragen?* Educational Studies in Mathematics 7, 1976, 157-169.
Hiele, P.M. van: *De ontwikkeling van wiskundige grondbegrippen*, Pedagogisch Tijdschrift 9(6),

1984, 309-314.
Hilton, P.: *Do we still need to teach fractions?*, M. Zweng e.a. (eds), Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education, Boston, 1983, 37-41.
Howson, G., C. Keitel en J. Kilpatrick: *Curriculum Development in Mathematics*, London e.a. 1983.
Hunting, R.P.: *Rachel's Schemes For Constructing Fraction Knowledge*, Educational Studies in Mathematics 17, 1986, 49-66.
Jong, R. de (ed.): *Oppervlakte (2)*, Leerplanpublikatie 9, Utrecht 1978. (Bijlage bij Wiskobas Bulletin 7(5/6), 1978.)
Jong, R.A. e.a.: *Almanak reken/wiskundemethoden 1984*, Utrecht 1984.
Jong, R.A. de: *Wiskobas in Methoden*, Utrecht 1986.
Karplus, R. e.a.: *Proportional Reasoning and control of variables in seven countries*, J. Lockhead en J. Clement (eds.), Cognitive Process Instruction, Philadelphia Pennsylvania 1979, 47-105.
Kieren, T., D. Nelson en G. Smith: *Graphical Algorithms in Partioning Tasks*, The Journal of Mathematical Behavior 4, 1985, 24-36.
Kirsch, A.: *An analysis of commercial arithmetic*, Educational Studies in Mathematics 1, 1969, 300-311.
Knoers, A.M.P.: *Curriculum-ontwikkeling en leertheorie*, Pedagogisch Studiën 63, 1986, 195-204.
Knoers, A.M.P.: *Over leren en onderwijzen. Een tegenwerping*, Pedagogische Studiën 64, 1987, 90.
Koleza-Adam, E.: *Décalages cognitifs dans les problèmes de proportionnalité (préalables à toute séquence pour des élèves de 10-12 ans)*, Strasbourg 1987.
Kool, M.: *Die Edele Conste Arithmetica*, Scriptie: Geschiedenis van de Wiskunde. Deel I 16e eeuwse Rekenkunde. Bijlage bij deel I: Toelichting op de tekst van het Arithmetica-Tractaat (hs.2141 UB Gent). Deel II: Bronnenonderzoek, Schalkwijk 1984.
Krutetskii, V.A.: *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*, Chicago 1976.
Kruyskamp, C.H.A.: *Woordenboek der Nederlandsche Taal*. 's Gravenhage, Leiden, 1971.
Kuhn, T.S.: *De structuur van wetenschappelijke revoluties*, Meppel 1972.
Kühnel, J.: *Neubau des Rechenunterrichts*, Düsseldorf 1966 (eerste druk 1916).
Lakatos, I.: *Proofs and refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge (UK) 1977.
Lange Jzn, J. de: *Mathematics Insight and Meaning*, Utrecht 1987.
Lange Jzn, J. de en M. Kindt: *Exponenten en logarithmen*, Culemborg 1984.
Laycock, M.: *The Future of Fractions*, M. Zweng e.a. (eds), Proceedings of the Fourthe International Congress on Mathematical Education, Boston, 1983, 41-43.
Leinhardt, G. en D.A. Smith: *Expertise in Mathematics Instruction: Subject Matter Knowledge*, Journal of Educational Psychology 77(3), 1985, 247-271.
Lesh, R.M., M. Landau en E. Hamilton: *Conceptual Models and Applied Mathematical Problem-Solving Research*, R. Lesh en M. Landau (eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, 1983, 264-343.
Lesh, R.: *Conceptual Analayis of Mathematical Ideas and Problem Solving Processes*, Streefland, L. (ed.), Proceedings of the ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol II, 1985, 73-97.
Lijnse, P.: *Onderzoekt alle dingen en behoudt het goede*, Eijkelhof, H.M.C. e.a. (red.), Op weg naar vernieuwing van het natuurkundeonderwijs, 's Gravenhage 1986, 308-324.
Lijnse, P.: *Onderzoek, ontwikkeling en ontwikkelingsonderzoek in en na het het PLON*, Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs. PanamaPost 6(1), 1987, 35-44.
Meijer, H. en L. Streefland: *Elementair Wiskundig Rekenen*, Rapportboekje 3, Utrecht 1980, 78-96.
Nauta, L.W.: *Context of discovery and context of justification, notities in de marge van een onderzoek*, Kennis en Methode 1(1), 1977, 5-20.
Nienhuis, G.: *De eenheid van de natuurkunde*, Utrecht 1985. (Oratie uitgesproken op 10.6.1985.)
Noelting, G.: *The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept. Part I:*

Differentation of Stages, Educational Studies in Mathematics 11, 1980[a], 217-253.
Noelting, G.: *The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept. Part II: Problem-Structure at Successive Stages; Problem-solving Strategies and the mechanism of adaptive restructuring*, Educational Studies in Mathematics 11, 1980[b], 331-363.
Oers, B. van: *Activiteit en Begrip*. Proeve van een handelings-psychologische didactiek, Amsterdam, 1987.
Ormeling, F.J.: *Beeldvorming*, Utrecht, 1986 (oratie).
Payne, J.N.: *Sense and Nonsense about Fractions and Decimals*, The Arithmetic Teacher, jan. 1980, 5-7.
Payne, J.N.: *Ueber Schülerschwierigkeiten beim Bruch-zahlbegrif, beim Erweitern, Kürzen und Ordnen von Brüchen*, Der Mathematikunterricht 32(3), 1986, 53-57.
Pelgrum, W.J. e.a.: *Tweede Wiskunde Project*, TH Twente, afd. T.O., 1983.
Piaget, J., B. Inhelder en A. Szeminska: *The child's conception of geometry*, London 1966.
Piaget, J. e.a.: *Epistemology and psychology of functions*, Dordrecht/Boston 1977.
Piaget, J. en B. Inhelder: *La rêprêsentattion de l'espace chez l'enfant*, Paris 1981.
Pickert, G.: *Die Bruchrechnung als Operieren mit Abbildungen*, Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, Band XV, 1968, 32-47.
Post, Th.R., I. Wachsmuth, R. Lesh en M.J.Behr: *Order and Equivalence of Rational Numbers: A Cognitive Analysis*, Journal for Research in Mathematics Education 16(1), 1985, 18-37.
Querelle, W.M.G.: *Ach ja*, Nieuwe Wiskrant 4(1), 1984, 13-15.
Radatz, H.: *Individuum und Mathematikunterricht*, Hannover 1976.
Rengerink, J.: *De Staartdeling. Een geïntegreerde aanpak volgens het principe van progressieve schematisering*, Utrecht 1983.
Reijnders, J.M. en J. Snijders: *Functioneel Rekenen*, Amsterdam 1959.
Sawyer, W.W.: *Aanschouwelijk Algebra*, Utrecht/Antwerpen 1969.
Scholten, P.: *Open Kaart*, Den Haag 1978.
Schoonen, W. en H. Freudenthal: *Opa, wil je even een som geven?*, Trouw, bijlage over Onderwijs Opvoeding en Wetenschap, 3 juni 1987, 15.
Schuring, H.N.: *Enige resultaten van het Tweede Wiskunde Project*, Euclides 61(2), 1985, 57-61.
Skemp, R.R.: *Relational Understanding and Instrumental Understanding*, Mathematics Teaching, 1976, 20-26.
Skemp, R.R.: *Goals of learning and qualities of understanding*, Mathematics Teaching, 1979, 44-49.
Steffe, L.P. en P. Cobb: *The constructivist Researcher as teacher and Model Builder*, Journal for Research in Mathematics Education 14(2), 1983, 83-94.
Streefland, L.: *Some Observational Results Concerning The Mental Constitution of The Concept of Fraction*, Educational Studies in Mathematics 9, 1978, 51-73.
Streefland, L.: *Davydov, Piaget en de breuken*, Pedagogische Studiën 56, 1979, 289-307.
Streefland, L.: *Makro-structurele verkenningen voor het wiskundeonderwijs*, Utrecht 1980[a].
Streefland, L.: *Cognitieve ontwikkeling en wiskundeonderwijs*, Pedagogische Studiën 7/8, 1980[b], 344-358.
Streefland, L.: *Verhoudingen zoals kinderen (6-9) ze zien*, Utrecht 1980[c].
Streefland. L.: *Van Erathostenes tot CITO-toets*, Nieuwe Wiskrant 1(1), 1981[a], 34-41.
Streefland, L.: *CITO's kommagetalllen leerdoelgericht getoetst*, Willem Bartjens 1(1), 1981[b], 43-45.
Streefland, L.: *Subtracting fractions with different denominators*, Proceedings of the Fifth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol I, Grenoble 1981[c], 88-96.
Streefland, L.: *Verhoudingen per traditie*, Willem Bartjens 1(3), 1982[a], 150-160.
Streefland, L.: *Elementen en Principia van verhoudingen*, Nieuwe Wiskrant 1(4), 1982[b], 32-39.
Streefland, L.: *Subtracting Fractions with different Denominators*, Educational Studies in Mathematics 13, 1982[c], 233-255.
Streefland, L.: *The role of rough estimation in learning ratio and proportion - an exploratory research*, Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics

Education, Antwerp 1982[d], 193-200.
Streefland, L.: *Aanzet tot een nieuwe breukendidactiek volgens Wiskobas*, Utrecht 1983[a].
Streefland, L.: *Niveau Cursus Rekenen*, R.A. de Jong (ed.), Almanak reken/wiskundemethoden 1984, Utrecht 1983[b], 18-25.
Streefland, L.: *Ongelijknamige breuken aftrekken met een slakkengang*, Nieuwe Wiskrant 2(3), 1983[c], 3-9.
Streefland, L.: *Elementair Wiskundig Rekenen*, R.A. de Jong (ed.), Almanak reken/wiskundemethoden 1984, Utrecht 1984[a], 49-54.
Streefland, L.: *Dichtheden in leerprocessen*, Tijdschrift voor Didactiek der Natuurwetenschappen 2(2), 1984[b], 72-87.
Streefland, L.: *How to teach fractions so as to be useful*, Utrecht 1984[c].
Streefland, L.: *Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (Towards ... a theory). Part I: Reflections on a teaching experiment*, Educational Studies in Mathematics 15, 1984[d], 327-348.
Streefland, L.: *Vorgreifendes Lernen zum Steuern langfristiger Lernprozesse*, W. Dörfler en R. Fischer (eds.), Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik, Wien-Stuttgart 1985[a], 271-287.
Streefland, L.: *Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron*, Nieuwe Wiskrant 5(1), 1985[b], 60-68.
Streefland, L.: *Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (Towards ... a theory). Part II: The Outline of the long term learning process*, Educational Studies in Mathematics 16, 1985[c], 75-94.
Streefland, L.: *Verhouding in Onderzoek*, PanamaPost 4(2/3), 1986[a], 12-13; 11-21.
Streefland, L.: *Rational Analysis of Realistic Mathematics Education as a Theoretical Source for Psychology: Fractions as a Paradigm*, European Journal of Psychology of Education 1(2), 1986[b], 67-83.
Streefland, L.: *Differentiatie in 'rekenwerk'*, Willem Bartjens 5(3), 1986[c], 172-182.
Streefland, L.: *Ungleichnamige Brüche abziehen im Schneckentempo*, Mathematik Lehren 16, 1986[d], 12-16.
Streefland, L.: *Pizzas - Anregungen, ja schon für die Grundschule*, Mathematik Lehren 16, 1986[e], 8-12.
Streefland, L.: *Ueber die N-Verführer in der Bruchrechnung und Massnahmen zu ihrer Bekämpfung*, Der Mathematikunterricht 32(3), 1986[f], 45-52.
Streefland, L.: *Begripsvorming volgens de 'generalist' Davydov gespecialiseerd*, Pedagogische Studiën 64(6), 1987[a], 256-261.
Streefland, L.: *Free production of fraction monographs*, J.C. Bergeron e.a. (eds.), Psychology of Mathematics Education, PME-XI, vol I, Montréal 1987[b], 405-410.
Szetela, W.: *Bespreking van het artikel van Leinhardt & Smith (1985)*, Mathematics Education Information Report 19(3), 1986, 36-37.
Terwel, J.: *Observeren in het onderwijs. Theorie, methoden en kritiek*, Info 9(4), 1978.
Terwel, J.: *Onderwijs maken*, Harlingen 1984.
Terwel, J.: *Leren in coöperatieve groepen: Theorie en Onderzoek*, A. Reints en J.C. Voogt (red.), Naar beter Onderwijs, Tilburg 1986, 71-98.
Teule-Sensacq, P. en G. Vinrich: *Résolution de Problèmes de Division au cycle Elémentaire dans deux types de situation didactiques*, Educational Studies in Mathematics 13, 1982, 177-203.
Thom, R.: *Modern mathematics: does it exist?*, A.G. Howson (ed.), Developments in Mathematical Education, Cambridge 1973, 194-209.
Thompson, A.G.: *The Relationship of Teachers' Conceptions of Mathematics and Mathematics Teaching to Instructional Practice*, Educational Studies in Mathematics, 15 (1984), 105-127.
Tiemersma, D. en P. Wardekker: *Dit is Rekenen*, Groningen 1959.
Trafton, P.R.: *Estimation and Mental Arithmetic. Important Components of Computation, Developing Computational Skills*, N.C.T.M. 1978, 196-214.
Treffers, A.: *Wiskobas Doelgericht*, Utrecht 1978.

Treffers, A.: *Cito item dito,* Wiskobas Bulletin 9(6), 1980, 81-99.
Treffers, A.: *Reken-wiskundedidactiek in historisch perspectief,* E. de Moor (ed.), Panama Cursusboek 3, Utrecht 1985, 9-16.
Treffers, A.: *Rekenen in het IEA-onderzoek,* PanamaPost 4(2), 1986, 9-12.
Treffers, A. en E. de Moor: *10 voor de basisvorming rekenen/wiskunde,* Utrecht 1984.
Treffers, A. en F. Goffree: *Rational Analysis of Realistic Mathematics Education. The Wiskobas Program,* L. Streefland (ed.), Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol II, 1985, 97-123.
Treffers, A.: *Analyseren en ontwikkelen van reken/wiskundeonderwijs vanuit twee verschillende basisconcepties,* Pedagogische Studiën 63, 1986, 14-25.
Treffers, A.: *Three Dimensions. A model of goal and theory description in Mathematics Instruction - The Wiskobas Project,* Dordrecht 1987[a].
Treffers, A.: *Integrated Column Arithmetic According to Progressive Schematisation,* Educational Studies in Mathematics 18, 1987[b], 125-145.
Treffers, A.: *Beschrijvingen van eindtermen,* bundel Toetsconferentie OW & OC-Cito, Utrecht 1987[c].
Treffers, A.: *Leerplanontwikkeling volgens generalisten en specialisten. Een reactie,* Pedagogische Studiën 64(2), 1987[d], 84-89.
Usiskin, Z.P.: *The Future of Fractions,* Arithmetic Teacher, jan. 1979, 18-20.
Vergnaud, G.: *Multiplicative Structures,* R. Lesh en M. Landau (eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, New York 1983, 128-173.
Verschaffel, L.: *Toward an Instructional Theory of Problem Solving in Elementary School Children,* University of Leuven 1986.
Versluijs, J.: *De Methodiek van het rekenen,* Amsterdam 1899.
Verwijs, E. en J. Verdam: *Middelnederlandsch Woordenboek,* 's Gravenhage, 1927-1941.
Vos, W. de: *Corpusculum Delicti,* Utrecht 1985.
Waerden, B.L. van der: *Ontwakende Wetenschap,* Groningen 1950.
Wagner, R.K. en R.J. Sternberg: *Alternative Conceptions of Intelligence and Their Implications for Education,* Review of Educational Research 54(2), 1984, 179-223.
Wetenschappelijke Raad voor het Regeringsbeleid: *Basisvorming in het onderwijs,* 's Gravenhage 1986.
Whitney, H.: *Verantwoord wiskundeonderwijs,* Willem Bartjens 6(2), 1986, 88-97.
Wiskobasteam: *Overzicht van wiskundeonderwijs op de basisschool. Model voor een schoolwerkplan,* Utrecht 1975.
Wiskobasteam: *Rapportboekje 1,* Konferentieverslag Putten, Utrecht 1977.
Wiskobasteam: *Rapportboekje 2: Heroriëntering Onderwijzers 1968-1978,* Utrecht 1978.
Wiskobasteam: *Overzicht rekenmethoden anno 1980,* Utrecht 1980[a].
Wiskobasteam: *Onderzoek voor Wiskundeonderwijs,* Wiskobas Bulletin 9(4/5), 1980[b], 2-19.
Zijlstra, J.G.: *Rekenonderwijs in de lagere school,* Zutphen 1901.

Curriculum vitae

L.Streefland (1939) was na zijn opleiding tot onderwijzer werkzaam in diverse takken van onderwijs als onderwijzer, schoolleider en wiskundeleraar. Na voltooiing van zijn wiskundestudie (MO-B) werd hij in 1971 medewerker aan het Wiskobasproject van het IOWO (Instituut Ontwikkeling Wiskundeonderwijs) aan de Rijksuniversiteit Utrecht. Na voltooiing van zijn doctoraalstudie onderwijskunde en de opheffing van het IOWO (eind 1980) trad hij in dienst van de vakgroep OW & OC (Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijs Computercentrum) van de Faculteit voor Wiskunde en Informatica. Gedurende lange tijd heeft hij zich bezig gehouden met ontwikkelingsonderzoek met het oog op het traceren van lange termijn leerprocessen van basisschoolleerlingen voor probleemgebieden als breuken, verhoudingen en verwante terreinen, het ontwikkelen van nieuwe programma's hiervoor en theorievorming hieromtrent.
Van 1981 tot 1984 was hij lid van het International Committee for the Psychology of Mathematics Education (PME).
Momenteel levert hij bijdragen aan het formuleren van eindtermen voor het basisonderwijs en het opstellen van een proeve van een nationaal programma voor rekenen/wiskunde voor de basisschool.