

Doorgaande ontwikkelingen rekenen-wiskunde

M. van Zanten (red.)



Panama
Elsme, Universiteit Utrecht

Het moet en kan beter?!

Wat dan? Voor wie? En hoe?

A. van Streun

Voorzitter werkgroep rekenen & wiskunde

Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen.

1 oriëntatie

in het nieuws

Het onderwijs is in het nieuws. Er gaat geen week voorbij of er zijn alarmerende berichten over de kwaliteit van ons onderwijs, met name wat betreft taal en rekenen. Een troost voor de leraren is dat ook het onderwijsbeleid en het onderwijsmanagement forse kritiek krijgt. Dat is wel eens anders geweest! Nog niet zo lang geleden was alles wat slecht ging in het onderwijs de schuld van de leraren, die niet met hun tijd meegingen en nog ouderwets, ja zelfs soms klassikaal, les gaven. Alarmerende berichten leiden helaas veelal niet tot serieuzer onderzoek, maar tot vragen aan de minister. Wat denkt de minister aan deze 'kennelijk' rampzalige toestand te doen? En de (vorige) minister zoekt wijsheid en wint tijd door een commissie in te stellen. Deze keer werd het een breed samengestelde groep 'experts' uit alle sectoren van het onderwijs, zowel bestuurders als vakdeskundigen. In vier maanden tijd zijn de leerlijnen rekenen en wiskunde vanaf het primair onderwijs tot aan het hbo doorgelicht door een nog breder samengestelde werkgroep rekenen & wiskunde, waarin het po, vmbo, havo-vwo, mbo, pabo, hbo en wo door 'experts' waren vertegenwoordigd, evenals instituten als de SLO, het Fisme en het APS. Een werkgroep die ik mocht voorzitten. Het eindrapport 'Over de drempels met rekenen' is te vinden op de website van de SLO, evenals het algemene eindrapport over taal en rekenen (Expertgroep Doorlopende leerlijnen, 2008a, 2008b).

zorgpunten

We hebben gekeken naar de instroom op de pabo en geconstateerd dat een groot deel van die studenten de laatste zes jaar in vmbo en mbo niet meer hebben gerekend en daarvoor tot de veelal zwakke rekenaars behoorden. We hebben gekeken naar het verwante probleem van de uitstroom van het mbo naar het gehele hbo, waarvoor hetzelfde geldt. We hebben geconstateerd dat de instroom in havo-vwo niet op hun sterke en zwakke kanten in

het rekenen wordt aangesproken, zodat er van een doorlopende rekenlijn amper sprake is. We hebben de diverse Periodieke Peilingsonderzoeken voor het rekenen van de laatste twintig jaar naast elkaar gelegd om te zien wat er verbeterd en verslechterd is. Het onderzoeksrapport over tekortschietende rekenvaardigheden van verpleegkundigen (DUO Market Research, 2007) was aanleiding tot zorg, vooral onder de oudere leden van onze werkgroep.

lichtpunten

Er waren ook wel lichtpunten. De onderzoekers van het cohortenonderzoek van het GION, naar verluid het duurste langlopende onderwijsonderzoek in Nederland (Kuyper & Van der Werf, 2007), konden er niet onderuit; de prestaties van vijftienjarigen gingen er de laatste vijf jaar op het gebied van rekenen en wiskunde zelfs op vooruit! Met name was dat het geval op het vmbo. En wat te zeggen van PISA (Dekker e.a., 2006a, 2006b) en TIMSS (Vos, 2007a, 2007b)? Nederland staat voor rekenen-wiskunde onbetwist in de top vijf van de hele wereld. Maar ja, we zakten met de laatste PISA een beetje naar de vijfde plaats in de wereld en de tweede plaats in de OESO-landen. Herinnert u zich de negatieve krantenkoppen in december 2007 nog? Passen de conclusies uit empirisch onderzoek niet bij uw vooroordeel? Dan deugen de opgaven niet, de 'kale' reken- en wiskundesommen in TIMSS of de 'toegepaste' sommen in PISA, al naar gelang uw vooroordeel. Toch zijn bijna alle ontwikkelde westerse landen afgunstig op de positie van Nederland! Vooral onze zwakste groep doet het goed, want de spreiding in de Nederlandse resultaten is gering. Dat geldt door de jaren heen zowel voor TIMSS als PISA. De Vlaamse top scoort duidelijk beter dan de Nederlandse top. De Vlaamse minister van Onderwijs en Vorming merkt daarover in een persbericht van 4 december 2007 het volgende op:

Ik hecht een zeer groot belang aan deze internationale onderzoeken. Zij leveren een perspectief op de sterktes en zwaktes van ons onderwijsbestel. De titel van mijn beleidsnota in 2004, 'Vandaag kampioen in wiskunde, morgen ook in gelijke kansen', was rechtstreeks beïnvloed door de resultaten van PISA 2003. Deze toonden aan dat Vlaanderen in gemiddelde resultaten kwalitatief tot de internationale top behoort, maar dat er tegelijk een zeer grote en door sociaal-economische factoren bepaalde kloof bestaat tussen sterke en zwakke leerlingen. De nieuwe resultaten zijn een aanleiding om de analyse te bevestigen en te verbreden.¹

Wellicht dat onze minister op grond van het internationale onderzoek een beleidsnota moet uitbrengen onder de titel: 'Vandaag kampioen in gelijke kansen, morgen ook kampioen in wiskunde'.

twee sporen in het kennen en kunnen van rekenen en wiskunde

Een kenmerk van rekenen-wiskunde is de cumulatieve structuur van het vakgebied, waarin begrippen en rekenprocedures op elkaar voortbouwen. Een voorwaarde voor het kunnen verwerven van nieuwe kennis en vaardigheden is de 'beheersing' van de begrippen en methoden waarop wordt voortgebouwd. In de discussie binnen de Expertgroep, waarvan slechts enkele leden inhoudelijke kennis van rekenen-wiskunde hadden, bleek bij voortdurend dat deze cumulatieve structuur duidelijk en essentieel verschilt van de structuur en dus ook de didactiek van andere vakgebieden.

Het 'voortbouwen' op die bestaande kennis kan gaan in de richting van het 'functioneel gebruiken' in allerlei situaties uit het dagelijks leven, uit andere vakgebieden en uit praktijk- of beroepssituaties. Dat voortbouwen kan ook een verder verdiepen zijn van de bestaande kennis in de richting van formaliseren, abstraheren en generaliseren, aansluitend bij de wiskundevakken in het voortgezet onderwijs. Daarom zijn in het onderwijs voor het rekenen twee *sporen* onderscheiden met verschillende accenten, namelijk het *F-spoor* (fundamentele kwaliteit) met *functioneel gebruiken* als zwaartepunt en het *S-spoor* (streefkwaliteit), waarin het formaliseren, generaliseren en abstraheren een belangrijke rol speelt, samengevat met de term *verdiepen*.

wat? voor wie? waarom? hoe?

In dit artikel probeer ik duidelijk te maken welke argumentatie heeft geleid tot onze keuzen voor de inhoud van elk van de genoemde referentieniveaus (het 'wat') en geef ik aan waar onze keuze voor de verschillende doelgroepen op is gebaseerd (voor 'wie'). Dat viel onder de opdracht van de Expertgroep. Daarnaast ga ik in op het 'waarom' van de gekozen indeling van kennen en kunnen en geef ik aan langs welke weg mogelijkerwijs de gewenste verbetering tot stand kan worden gebracht (het 'hoe'). De probleemanalyse van die twee aspecten mag in deze conferentiebundel niet ontbreken en komt geheel en al voor mijn verantwoording, even als andere didactische beschouwingen.

2 ontijdig onderbroken en afgebroken leerlijnen

struikelend over drempels en klimmend uit ravijnen

De route van leerlingen door ons onderwijsstelsel blijkt inderdaad over drempels en door ravijnen te gaan. Veel van de rekenproblemen die in allerlei deelonderzoeken zijn geconstateerd zijn een rechtstreeks gevolg van de *defecten* in ons onderwijsstelsel. Neem bijvoorbeeld het feit dat de helft

van de gediplomeerden van de mbo-opleiding tot onderwijsassistent doorstroomt naar de pabo en daar een aanzienlijk deel van de groep eerstejaars pabo-studenten vormt. Die binnenstromende studenten hebben de laatste vier jaar op het mbo niet meer gerekend, want rekenen en/of wiskunde is daar geen onderdeel van het curriculum. Daarvoor heeft een deel van deze groep na twee jaar vmbo het vak wiskunde laten vallen en op die leeftijd van dertien à veertien jaar behoorden die leerlingen tot de zwakste rekenaars van de totale leerlingenpopulatie. Met andere woorden, na een zwakke start met de ontwikkeling van hun rekenvaardigheden hebben ze zes jaar niet meer gerekend. En zo komen ze aan bij de pabo! Welkom, goed gemotiveerd, maar met veel te weinig inhoudelijke bagage.

doorgaande rekenlijnen

Hetzelfde geldt natuurlijk voor de uitstroom van het mbo in de meeste andere sectoren, waar rekenen of wiskunde geen integraal onderdeel van het curriculum vormt. Wij bevelen aan dat alle vmbo-leerlingen, dus ook de 20 procent van de vmbo-leerlingen die nu het vak wiskunde laat vallen, minimaal het basale referentieniveau $2F$ (burgerschapsniveau) moet bereiken. Dat kan worden gerealiseerd door ze minimaal het rekendomein uit het vmbo examenprogramma wiskunde kader-beroeps te laten volgen. In het mbo moet minimaal dat niveau structureel worden onderhouden en voor de vierjarige mbo moet $2F$ worden uitgebreid tot referentieniveau $3F$. Op die manier moet de genoemde kloof van een zes jaar ontijdig onderbroken leerlijn rekenen worden gedicht.

Additioneel achten wij het wenselijk om een module 'Getallen' ($3S$) te ontwikkelen, die zowel in het mbo (de opleiding tot onderwijsassistent) als de bovenbouw havo-studenten de mogelijkheid biedt om zich in de vrije keuzeruimte beter voor te bereiden op de pabo dan met het uitgebreide burgerschapsniveau $3F$ mogelijk is. Wij achten een goede eigen rekenvaardigheid en inzicht in de structuur van de getallenwereld een noodzakelijke beginvoorwaarde voor het op niveau leren onderwijzen van rekenen in het basisonderwijs.

aansluiting primair onderwijs op havo-vwo

Ook bij de overgang van het basisonderwijs naar havo-vwo sluiten van beide kanten de leerlijnen rekenen en wiskunde niet goed aan. In de onderbouw havo-vwo wordt niet meer systematisch gewerkt aan het onderhouden en uitbreiden van de verworven kennis en vaardigheden op het gebied van het rekenen.

Op basis van de referentieniveaus moeten in nationaal en regionaal overleg tussen scholen voor basisonderwijs en voortgezet onderwijs die leerlijnen worden geharmoniseerd.

3 weten over weten: houding, motivatie, vertrouwen en reflectie

Op pagina 13 van het rapport 'Over de drempels met rekenen' lezen we het volgende:

In alle discussies over het kennen en kunnen van leerlingen, de toetsbare componenten van kennis en vaardigheden, moeten we niet vergeten dat voor een goede leeropbrengst het essentieel is dat leerlingen leren reflecteren op hun eigen kennis en aanpak en zelfvertrouwen ontwikkelen. Het gaat dan om het ontwikkelen van een positieve houding ten aanzien van het leren van rekenen en wiskunde; het is interessant, het geeft voldoening en ik kan het. Met recht kunnen deze streefdoelen zelfs voorwaardelijk worden genoemd voor het verwerven van de andere componenten van wat we leerlingen in onze scholen willen leren.

Of, zoals De Groot en Traas het in 1980 formuleren:

Een school waarin de leraren er niet in slagen leerlingen te laten ervaren dat leren leuk en bevredigend kan zijn, zo'n school deugt niet. Een belangrijker onderwijsdoelstelling dan 'leren leuk gaan vinden' zou ik niet weten. Lukt dat niet dan is eigenlijk alles verloren.

Onze meest beroemde schoolmeester is ongetwijfeld Theo Thijssen (1927), wiens boekje 'De gelukkige klas' in 2007 op grote schaal is verspreid. Op pagina 125 vertelt hij over de introductie van de decimale schrijfwijze van getallen. Ik citeer zijn afsluitend commentaar:

Zie, we hebben van de week nog wel wat anders gedaan. Maar de tiendelige breuken hebben alles overheerst, door het zo sterkend succes; het bijna tastbare succes dat de kinderziel behoeft voor zo'n groei.

Onderwijs dat niet het vertrouwen, het gevoel van succes, het idee van 'dit kan ik' weet te stimuleren, is voor leerlingen niet de moeite waard. Thijsen doet zijn didactisch geweten soms geweld aan om dat vertrouwen maar te kunnen bevorderen.

We kennen wereldwijd het tegengestelde effect van reken- en wiskundeonderwijs. Omstreeks 1970 (die goede oude tijd met opa's algoritmen en algebra in de scholen) heb ik een tiental jaren in totaal aan een duizend studenten van een mo-A pedagogiek opleiding statistiekonderwijs mogen verzorgen. Allemaal volwassenen, onderwijzers, kleuterleidsters en maatschappelijk werkers. In de eerste lesuren liet ik ze in groepen een angstschaal ontwerpen en zo kwamen alle verhalen over onbegrepen algoritmen en algebra boven. Zeker de helft keek vooraf vol angst naar dat wiskundevak statistiek. Dezelfde angst die jaren later twee meisjes bij de Gamma uitstraalden, toen ze de prijs van een regenpijp van drie meter lengte moesten uitrekenen, terwijl de prijs van vier meter negentien gulden

was (Van Streun, 2001)! We constateren dat het nieuwe wiskundeprogramma 12-16, tegelijk met de basisvorming ingevoerd, een veel positiever houding van leerlingen in het vmbo en de onderbouw havo-vwo ten opzichte van het schoolvak wiskunde teweeg heeft gebracht dan voorheen het geval was. Daar ligt voor die doelgroep in Nederland geen knelpunt.

4 rekening houden met verschillen

opa vertelt

Opa's zijn 'in', ze nemen de tijd om te luisteren, moet u maar denken. En in de didactiek van rekenen-wiskunde nemen ze weer een belangrijke plaats in. Mijn oratie sloot ik onder andere af met de volgende beschouwing (Van Streun, 2001):

Freudenthal wandelde met zijn kleinzoon Bastiaan en schreef daar een boek met didactische verhandelingen over. Met mijn kleinkinderen zaag ik bomen om en verjaag ik rovers uit het naburig bosje. Ik zie daar nog geen boek uit voortkomen.

Ik heb me bedacht! Het zal u niet zijn ontgaan dat J. van de Craats ten strijde is getrokken tegen een trend in het rekenen in het basisonderwijs. Kort samengevat gaat het om 'handige' methoden (handig staat tussen aanhalingstekens) als kolomsgewijs rekenen, de hapmethode en dergelijke versus het onderwijzen van de bekende algoritmen, uit te rekenen met pen en papier. Ik kom daar later nog op terug. Een andere opa, een creatieve en door mij zeer gerespecteerde rekendidacticus, W. Uittenbogaard (2007), heeft daar in het tijdschrift 'Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk' weer op gereageerd met zijn uitleg aan kleinkinderen.

Tja, het geval wil dat wij acht kleinkinderen hebben. Het is de kerstvakantie twee jaar geleden dat ik met mijn vier logeetjes, Sietze, tien jaar, zus Marieke, acht jaar, Adriaan, acht jaar en zus Melinda, zeven jaar in de auto op weg ben naar Speelstad Oranje. Het onderlinge gesprek gaat over rekenen en die oersaai sommen met bussen. Ik spits mijn oren.

Melinda zegt resoluut: 'Ik vind rekenen stom, ik wil er niet over praten.' Marieke meldt dat zij verhaaltjessommen stom vindt. Ik vraag: 'Bedoel je dat je ze moeilijk vindt?'

'Ja', zegt Marieke. 'Wat vind je moeilijk?'

'Kijk opa, ik kan in die verhaaltjes de som niet vinden.'

Een geniale analyse! De jongens snuiven dat ze die verhaaltjessommen schietgemakkelijk en oersaai vinden.

Dat kan ik niet op me laten zitten. Er schiet me een klassiek verhaal uit de didactische literatuur binnen. 'Sietze, Adriaan, dan heb ik nu voor jullie

een mooie som.' Oké, ze hebben er zin in! We zijn nog niet in Speelstad Oranje. 'Een reddingboot vaart uit met een kapitein en vier bemanningsleden. Ze redden 34 drenkelingen. Hoe oud is de kapitein?'

Adriaan zegt onmiddellijk: '39 jaar'.

Sietze kreunt en steunt en zegt dan verwijtend: 'Opa, dat kun je niet weten!'

In een notendop alle didactische problemen en mogelijkheden.

uitdagend versus versuffend rekenonderwijs

Rekening houden met verschillen, daar gaat het om. Er zijn leerlingen die bliksemsnel met getallen kunnen omgaan, op grond van een enkel voorbeeld kunnen generaliseren, al heel jong kunnen formaliseren en abstraheren. Wij denken dat die leerlingen, zeg de top-20, in de gangbare schoolpraktijk van het basisonderwijs pas op de plaats moeten maken en niet de bij hen passende ontwikkelingsmogelijkheden worden aangeboden. En dan bedoelen we niet wat extra sommetjes om ze bezig te houden. Aanbeveling 7 zegt dan ook:

Rekening houden met verschillen houdt voor rekenen & wiskunde ook in dat de leerlingen die beter kunnen abstraheren, formeel manipuleren en generaliseren dan de modale leerlingen in hun onderwijsgroep door het verdiepen worden uitgedaagd om in de beschikbare tijd hun plafond te benaderen.

Voor die groep hebben we geen referentieniveau geformuleerd, maar verwijzen we naar additief lesmateriaal van bijvoorbeeld 'Vierkant' en naar de publicatie van K. Buijs (2007).

het basale minimum

Het *F*-spoor (het 'basale minimum') loopt vanaf het basisniveau op twaalfjarige leeftijd (1*F*, fundamentele kwaliteit) naar het burgerschapsniveau op zestienjarige leeftijd (2*F*, fundamentele kwaliteit), met een mogelijke verbreding of toespitsing naar de leeftijd van omstreeks achttien jaar (3*F*, fundamentele kwaliteit). Niveau 2*F* beschouwen we als het minimale niveau dat alle Nederlanders zouden moeten beheersen om op het gebied van rekenen maatschappelijk goed te kunnen functioneren, samenvallend met het rekendomein van de huidige examenprogramma's wiskunde van het vmbo BB-KB.

Concentreren we ons op het uitstroomniveau van het basisonderwijs dan gaat het om het minimale niveau 1*F* dat nodig is om een goede start te kunnen maken in het vmbo BB of KB. In omvang gaat het om ruim 30 procent van de totale leerlingenpopulatie. In de doelbeschrijving en de voorbeelden van dit referentieniveau nemen we opgaven uit het 25^e percentiel (*P*25) van PPON 2004.

1F paraat hebben - getallen Optellen en aftrekken (waaronder ook verschil bepalen) met gehele getallen en eenvoudige decimale getallen: $235 + 349$; $1268 - 385$; $\text{€ } 2,50 + \text{€ } 1,25$
1F paraat hebben - getallen – delingen uit de tafels (tot en met tien) uit het hoofd kennen; – ook met complexere getallen en decimale getallen: $18 : 100$; $1,8 \times 100$; – volgorde van bewerkingen.
1F paraat hebben - getallen – vermenigvuldigen van een getal van twee cijfers met een getal van twee cijfers: $35 \times 67 =$; – getallen met maximaal drie cijfers delen door een getal met maximaal twee cijfers, al dan niet met een rest: $132 : 16 =$;
1F paraat hebben - getallen – vergelijken en ordenen van de grootte van eenvoudige breuken en deze in betekenisvolle situaties op de getallenlijn plaatsen; – optellen en aftrekken van veel voorkomende gelijknamige en ongelijknamige breuken binnen een betekenisvolle situatie op de getallenlijn plaatsen: $\frac{1}{4}$ liter is minder dan $\frac{1}{2}$ liter; – omzetten van eenvoudige breuken in decimale getallen: $\frac{1}{2} = 0,5$; $0,01 = \frac{1}{100}$; – optellen en aftrekken van veel voorkomende gelijknamige en ongelijknamige breuken binnen een betekenisvolle situatie: $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$; $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$.
1S paraat hebben - getallen – een geheel getal vermenigvuldigen met een breuk of omgekeerd; – vereenvoudigen en compliceren van breuken en breuken als gemengd getal opschrijven: $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$; $\frac{1}{5} = \frac{20}{100}$; $\frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$; – een breuk met een breuk vermenigvuldigen of een deel van een deel nemen, met name in situatie: $\frac{1}{2}$ deel van $\frac{1}{2}$ liter; – een geheel getal delen door een breuk of gemengd getal: $10 : 2\frac{1}{2}$; – een breuk of gemengd getal delen door een breuk, vooral binnen een situatie: $1\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ hoeveel pakjes van $\frac{1}{4}$ liter moet je kopen als je $1\frac{1}{2}$ slagroom nodig hebt?
1S paraat hebben - getallen Invuloefening: je mag de volgende symbolen gebruiken: $+$ (optellen), $-$ (aftrekken), $\times$ (vermenigvuldigen), $:$ (delen) (= is gelijk aan), $<$ (is kleiner dan) en $>$ (is groter dan). $\frac{1}{8} \dots \frac{1}{9} \qquad \frac{5}{7} \dots \frac{5}{9} = \frac{5}{72}$ $\frac{1}{a} \dots \frac{1}{(a+1)} \qquad \frac{1}{a} \dots \frac{1}{a} = \frac{2}{a}$

1F functioneel gebruiken - verhoudingen

- notatie van breuken (horizontale breukstreep), decimale getallen (kommagetal) en procenten (%) herkennen;
- taal van verhoudingen (per, op, van de);
- verhoudingen herkennen in verschillende dagelijkse situaties (recepten, snelheid, vergroten-verkleinen, schaal, enzovoort).

1S paraat hebben - verhoudingen

- procenten als decimale getallen (honderdsten);
- veel voorkomende omzettingen van percentages in breuken en omgekeerd.

1S functioneel gebruiken - verhoudingen

- breuken en procenten in elkaar omzetten;
- breuken benaderen als eindige decimale getallen;
- verhoudingen en breuken met een rekenmachine omzetten in een (afgerond) kommagetal.

1S weten waarom - verhoudingen

- relatie tussen breuken, verhoudingen en percentages;
- breuken omzetten in een kommagetal, eindig of oneindig.

1F paraat hebben - meten

- schattingen maken over afmetingen en hoeveelheden;
- oppervlakte benaderen via rooster;
- omtrek en oppervlakte berekenen van rechthoekige figuren;
- routes beschrijven en lezen op een kaart met behulp van een rooster.

1S weten waarom - meten

- formules voor het berekenen van oppervlakte en inhoud verklaren;
- beredeneren welke vergrotingsfactor nodig is om de ene (eenvoudige) figuur uit de andere te vormen;
- verschillende omtrek mogelijk bij gelijkblijvende oppervlakte.

1F functioneel gebruiken - verbanden

- kwantitatieve informatie uit tabellen en grafieken gebruiken om eenvoudige berekeningen uit te voeren en conclusies te trekken, bijvoorbeeld:
In welk jaar is het aantal auto's verdubbeld ten opzichte van het jaar?

1S weten waarom - verbanden

- op basis van een grafiek of diagram conclusies trekken over een situatie;
- op basis van een grafiek of diagram voorspellingen doen over een toekomstige situatie.

Bij een opgave P_{25} hoort de verwachting dat 25 procent van de totale leerlingpopulatie van groep 8 die opgave niet goed maakt. Onze keuze om als ondergrens van 1F een P_{25} -opgave aan te nemen, houdt een flinke ambitie in, want op dit moment beheerst het merendeel van de groep leerlingen die instroomt in vmbo BB-KB die opgave matig of onvoldoende. Dat moet beter, zo oordeelt de Expertgroep. Aanbeveling 15 stelt:

Het percentage leerlingen dat minimaal het referentieniveau 1F behaalt moet toenemen van 75% naar 85%.

het modale niveau

Het s-spoor (het modale niveau) loopt vanaf het streefniveau op twaalfjarige leeftijd (1S, streefkwiteit) naar het streefniveau op zestienjarige leeftijd 2S, met een mogelijke doorloop naar 3S, omstreeks achttien jaar. Dit andere spoor wordt in de bovenbouw van het basisonderwijs door het grootste deel van de leerlingenpopulatie gevolgd en het verzorgt mede de aansluiting op de wiskundevakken in vmbo TL en havo-vwo en op het gebruik van rekenen en wiskunde in andere vakken. We spreken dan over niveaus 1S (streefkwiteit), 2S (streefkwiteit) en 3S (streefkwiteit), die op elkaar aansluiten en die de fundamentele basisniveaus overlappen. (De terminologie van streefkwiteit is verwarrend, want het gaat bij rekenen om het modale niveau en niet over de top twintig.) Bij 3S gaat het om het (nieuw voorgestelde) rekendomein van het vak wiskunde A in de havo-bovenbouw of om enkele technische richtingen in het mbo. Bij de overgangen tussen schooltypen stappen leerlingen deels over van het ene spoor naar het andere spoor, bijvoorbeeld van 2S (vmbo-TL) naar 3F (mbo-4), maar ook van 2S (vmbo-TL) naar 3S (4 havo).

Letten we weer in het bijzonder op de uitstroom van het basisonderwijs, dan is niveau 1S bedoeld als de ondergrens voor de 65 procent van de leerlingenpopulatie, die instroomt in vmbo TL en havo-vwo. De ondergrens, want we hebben al eerder opgemerkt dat voor de top-20 een meer adequaat onderwijsaanbod moet komen. Voor het referentieniveau 1S is de inhoudelijke afweging dat leerlingen na het basisonderwijs met voldoende bagage kunnen instromen in vmbo-TL of havo-vwo om daar met vmbo TL af te ronden met 2S of in havo-vwo door te gaan naar 3S. Globaal gesproken nemen we voor 1S de opgaven uit het 50^e percentiel (P_{50}) van PPO 2004 als voorbeeld bij onze doelbeschrijvingen. Bij een P_{50} -opgave hoort de verwachting dat 50 procent die niet goed maakt. Die keuze om als ondergrens van 1S een P_{50} -opgave aan te nemen, houdt eveneens een flinke ambitie in, want op dit moment maakt bijna een vierde deel van de groep leerlingen die instroomt in vmbo-TL of havo-vwo die opgave niet goed. Ook dat moet beter, zo oordeelt de expertgroep:

Het percentage leerlingen dat minimaal het referentieniveau 1S behaalt moet toenemen van 50% naar 65%.

de onderstroom

Een schatting, gebaseerd op PPON en Leerling Volg Systeem (LVS), is dat 10 procent van de populatie in het basisonderwijs ook na de voorgestelde extra inspanning het basale niveau 1F niet zal halen. Onderzoek laat nu al zien dat deze leerlingen vanaf groep 6 te weinig leren, omdat zij de basale begrippen en vaardigheden uit de voorgaande jaren nog niet beheersen. Het onderwijsaanbod voor de gehele groep bouwt daar wel op voort, zodat zij alleen nog maar schijnresultaten kunnen boeken. Wij bevelen aan om voor deze groep in het basisonderwijs een afzonderlijk leertraject te ontwikkelen:

De ambitie van de Expertgroep is dat meer leerlingen de basiskwaliteit 1F zullen behalen dan nu het geval is. Voor de groep leerlingen die vanaf groep 6 in de ontwikkeling van hun rekenvaardigheid stagneert, moet een afzonderlijk leertraject worden ontwikkeld.

5 menselijke informatieverwerking

wetenschappelijke kennis

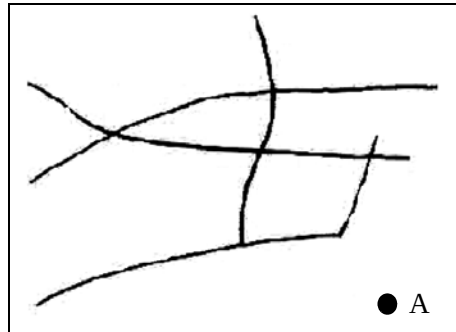
Voordat we verder gaan met de door ons gekozen zwaartepunten in de referentieniveaus is het noodzakelijk om iets te zeggen over het 'waarom' en het 'hoe'. We maken daarbij gebruik van de wetenschappelijk stevig gefundeerde kennis over het menselijk denken en de werking van het geheugen. Ter illustratie gebruiken we plaatjes van R. Skemp (1978), die hij dertig jaar geleden gebruikte bij zijn lezing op de jaarlijkse studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Skemp was een psycholoog, wiskundige en didacticus (1971) op wiens werk in Nederland door J. van Dormolen en andere wiskundededidactici is voortgebouwd (Van Dormolen, 1972; Tall & Thomas, 2002). Veel van wat hij indertijd al betoogde en opschreef is in deze dertig jaar bevestigd door psychologisch onderzoek naar het leren van mensen en de werking van het geheugen. Een standaardwerk als 'How people learn' (Bransford, Brown & Findell, 2000), ondersteunt zonder meer zijn betoog van dertig jaar geleden, evenals de recent verschenen overzichtspublicatie 'Adding it Up' (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001), toegespitst op wiskunde leren en onderwijzen.

wat weet je al?

A stelt een situatie, opgave, probleem voor (fig.1). Je neemt het waar, je

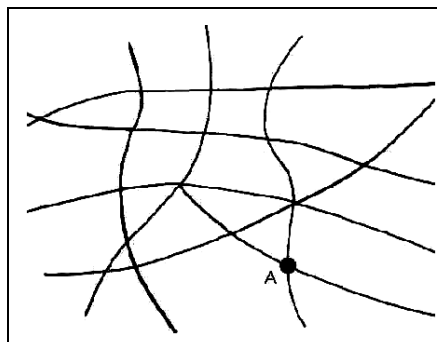
leest het en je ziet het, je moet er iets mee, je vraagt je af of je er iets over weet. Je werkgeheugen, dat is je actueel beschikbare geheugenruimte waarmee je denkt, neemt A op.

En het probeert een verbinding te leggen met je langetermijngeheugen. Je werkgeheugen is beperkt van omvang en je kunt maar een beperkt aantal eenheden tegelijk in de aandacht houden, aan werken. (Zie bijvoorbeeld 'Knowing what Students Know' (Pellegrino e.a., 2001)).



figuur 1

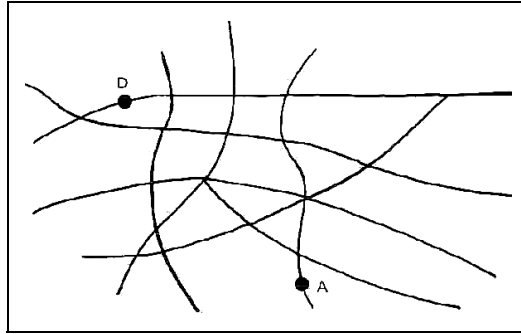
Het werkgeheugen wordt gebruikt om onmiddellijk informatie van de buitenwereld te *bewerken* en te *verwerken*, terwijl er voldoende bewijs beschikbaar is om aan te nemen dat het werkgeheugen input uit het langetermijn-geheugen kan ontvangen. De relatie tussen het probleem en het hopelijk bestaande schema in je lange termijn geheugen is nog niet gelegd. Probleemverkenning, de analyse van de gegeven situatie, heuristieken, plaatje schetsen, een getallenvoorbeeld proberen en dergelijke leiden tot een meer adequate *mentale voorstelling* van de probleemsituatie, waardoor de zoektocht naar relevante kennis meer succesvol kan zijn (fig.2).



figuur 2

een schema oproepen

Kennis is in het menselijk geheugen als het goed is opgeslagen in de vorm van zinvolle clusters, netwerken, knopen en verbindingen, schema's of welk woord je ook maar wilt gebruiken. Je identificeert probleem A, je herinnert je iets, je denkt te weten waar het mee te maken heeft, een eerste bijpassend schema wordt opgeroepen uit je lange termijngeheugen. Dit is nog globaal, je plaatst situatie A in een bepaald gebied van je geheugen waar je iets over weet (fig.3).



figuur 3

Hier gaat al vaak iets mis, als je geen aandacht hebt voor enige verkenning van het probleem, van de situatie. Voor veel leerlingen en /of studenten betekent deze fase soms het oproepen van een heel arm schema; iets van, oh ja, ik moet wegstrepen. Bijvoorbeeld:

$3 : \frac{1}{5}$ is? Delen door een breuk is iets omkeren en vermenigvuldigen, maar wat moet je omkeren?

Leerlingen produceren soms vijf verschillende antwoorden met diverse rekenregels. Of gaan ze terug naar de betekenis van delen: hoe vaak gaat $\frac{1}{5}$ in 3?

In een soort Pavlov-reactie kun je in je geheugen de opgave koppelen aan een rekentruc. Die associatieve koppeling zonder betekenis gaat alleen goed als direct na de training weer eenzelfde opgave volgt of de toets nog dezelfde week is. Het gaat al mis als er meerdere rekentrucs in aanmerking komen. Maar sommige leerlingen kunnen de diverse rekenoperaties wel goed uit elkaar houden. En in het onderwijs kun je expliciet werken aan overzichten van rekenregels gekoppeld aan de condities waarin ze van toepassing zijn.

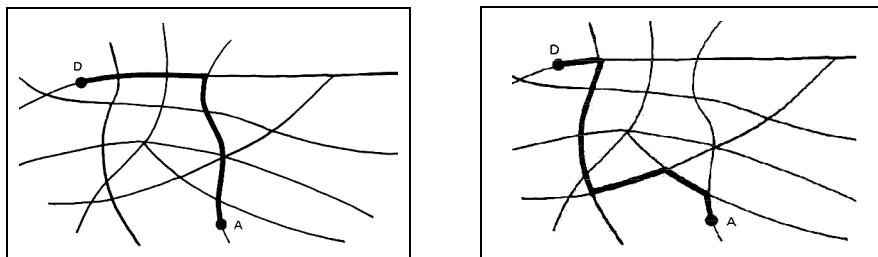
de weg zoeken in het schema

Ik ben in A en ik moet naar B. Hoe kom ik daar? Heb ik iets in huis, in mijn

lange termijn geheugen, waarmee ik die weg kan vinden? Soms moet ik een plan maken, bedenken wat ik achtereenvolgens moet doen. Hier zijn we al in het gebied van de probleemaanpak. Wat helpt mij om die weg te vinden?

oplossingswegen

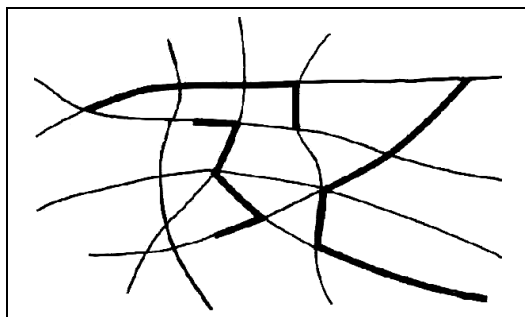
Het kan zo (fig.4a). maar het kan ook anders (fig.4b).



figuur 4a en figuur 4b

routines

Zo zijn er meerdere routes in een bepaald kennisgebied die vaak kunnen worden bewandeld. Dat zijn de routines, snel op te roepen, feilloos uit te voeren, gememoriseerd, een belangrijk facet van 'weten dat'; paraat hebben en paraat houden.

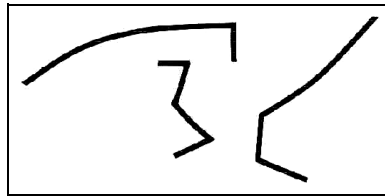


figuur 5

Kun je een probleem of situatie na verkenning direct koppelen aan een relevante routine om een deelhandeling bijna automatisch uit te voeren, dan houd je ruimte over in je werkgeheugen om aan het eigenlijke probleem te werken. Kun je dat niet en moet je ook die deelhandeling opnieuw heruitvinden, dan raak je intussen het zicht op het eigenlijke probleem kwijt. Want je werkgeheugen raakt overbelast (fig.5).

losgeraakte routines

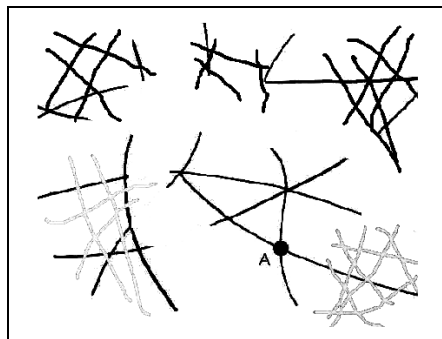
We komen nu bij een serieus didactisch probleem, dat Freudenthal in 1980 op het internationaal congres over wiskundeonderwijs tot een van de hoofdproblemen van de didactiek benoemde (Freudenthal, 1981).² Afzonderlijk trainen en oefenen, zonder samenhang met andere begrippen en methoden kan leiden tot onbegrip! En niet oefenen leidt tot een te zwakke beheersing. Links het voorbeeld, rechts 25 opgaven, werkt voor het inoefenen van de procedure, maar is niet wendbaar voor de situaties waarin je die procedure nodig hebt. Gevarieerd oefenen is nodig, het koppelen aan betekenissen, aan het grotere geheel, aan de situaties waarin de procedure wordt gebruikt. Toetsing van de routines in een wilde, steeds groeiende, verzameling opgaven en allerlei contexten (fig.6).



figuur 6

schema's rijk aan betekenis

Waarom moet rekenen-wiskunde een basisvak in elk algemeen vormend curriculum zijn? Over welke inhoud hebben we het dan eigenlijk? In de geschiedenis van het onderwijs in rekenen en wiskunde zijn daar verschillende antwoorden op gegeven. In Nederland hebben we al lang geleden gekozen voor een zwaar accent op het functioneren van de kennis en vaardigheden buiten het vakgebied.



figuur 7

De schoonheid van het getalsysteem, de historische waarde van de meet-

kunde, de culturele waarde, het leren redeneren of denken, het bleek voor rekenen en wiskunde niet genoeg voor de bepaling van de inhoud. Het rekenen stond heel lang in het teken van het cijferen; lange rijen berekeningen heel overzichtelijk en foutloos uitvoeren, want maatschappelijk was dat vroeger heel belangrijk (fig.7). Tegenwoordig ligt de nadruk veel meer bij het functioneel gebruiken van die kennis en routines in allerlei situaties. We weten al heel lang dat die transfer niet van zelf gaat en dat het strikt noodzakelijk is om die situaties ook te koppelen aan het cognitieve schema van de kern aan rekenkundige en wiskundige begrippen en operaties (fig.8).



figuur 8

Die terechte keuze voor het leggen van een stevige verbinding met de buitenwereld lijkt evenwel te leiden tot een voor leerlingen redelijk chaotisch beeld van wat er in wiskunde aan de orde is. De strakke structuur van de meeste wiskundige deelgebieden heeft de charme van de eenvoud en het overzicht, maar bleek in het verleden in de hoofden van de meeste leerlingen tot een afgesloten systeem te leiden, waardoor de transfer naar toegepaste situaties slecht verliep. Te verwachten, want in het cognitieve schema waren die situaties niet inbegrepen.

Op dit moment zien we een totaal door elkaar lopen van allerlei soorten opgaven, situaties, formele rekenregels, intuïtieve methoden, enzovoort. We werken in de onderwijspraktijk in het reken- en wiskundeonderwijs met schoolboeken en ander lesmateriaal waarin het zelfs voor experts lastig is om de kernen en doorlopende leerlijnen op te sporen. Laat staan voor de leerlingen. Dat brengt ons op de vraag hoe en wat we moeten onderwijzen, opdat de leerlingen optimaal een samenhangend en wendbaar schema aan begrippen, methoden en routines kunnen verwerven. Dat voert ons in dit artikel te ver.

6 weten dat, weten hoe, weten waarom

paraat hebben: weten dat

In de beschrijving van de referentieniveaus en de ambities hebben we elkaar in de werkgroep vanuit heel verschillende invalshoeken gevonden in de constatering dat het in alle sectoren van ons onderwijs in rekenen en wiskunde ontbreekt aan duidelijkheid over wat leerlingen 'paraat' moeten hebben. Zowel leraren als leerlingen slagen er veelal niet in om in de rijke hoeveelheid aan onderwerpen en situaties uit de huidige schoolboeken te identificeren wat de belangrijkste 'kernbegrippen' en 'rekenoperaties' zijn die leerlingen vanuit hun lange termijn geheugen onmiddellijk moeten kunnen actualiseren en toepassen. We hebben gezien dat het ontbreken van dat 'paraat hebben' tot gevolg heeft dat leerlingen al bij de verkenning van een probleem die feitelijke kennis moeten gaan heruitvinden, waardoor ze wegens de overbelasting van hun werkgeheugen het zicht op de eigenlijke situatie kwijt raken.

Hier ligt het belangrijkste aanknopingspunt voor een verbetering van de opbrengst van ons reken- en wiskundeonderwijs. Het opvoeren van het beheersingsniveau van een kern aan feiten, begrippen, rekenoperaties tot het niveau van 'paraat hebben' vereist de volgende onderwijsactiviteiten:

- 1 Identificatie van de kern die leerlingen paraat moeten hebben en houden.
- 2 Systematisch oefenen totdat het beheersingsniveau van paraat hebben is bereikt.
- 3 Systematisch diagnostisch toetsen om na te gaan of dat niveau nog aanwezig is.
- 4 Systematisch intern in de scholen onderhouden van die kern aan 'weten dat'.
- 5 Systematisch gebruiken van die kern in functionele situaties.

Ad 1: in de komende jaren zijn de referentieniveaus richtinggevend, omdat daar al het onderscheid naar beheersingsniveaus is gemaakt.

Ad 2: in het overzicht van de vorige paragraaf is voldoende duidelijk gemaakt dat het oefenen alleen maar zin heeft als het gekoppeld blijft aan het rijke schema, dus gekoppeld blijft aan de betekenissen en de situaties, waarin die kern aan kennis moet worden gebruikt.

Ad 3: diagnostisch toetsen kan op heel veel goede manieren, vanaf een rekendictee tot aan een mooi computerprogramma met ingebouwde feedback. De nadruk ligt uitdrukkelijk bij diagnostisch, dat wil zeggen toetsen om op te bouwen, vertrouwen te versterken en niet om af te rekenen.

Ad 4: het onderhouden door de jaren heen blijft vooral in het voortgezet onderwijs nogal eens achterwege. De instroom wordt niet gediagnosticeerd en het verloop door de jaren heen ook niet.

Ad 5: de volledige beheersing van die kern aan ‘weten dat’ is geen doel op zich, maar staat in functie van het daarmee kunnen aanpakken of oplossen van problemen, binnen het domein van rekenen en wiskunde of daarbuiten. Die activiteit hoort gekoppeld te blijven aan het oefenen en onderhouden.

functioneel gebruiken: weten hoe

Een tweede component van de kennis en vaardigheden die leerlingen moeten verwerven is natuurlijk het functioneel gebruiken van hun kennis, inzicht en vaardigheden in allerlei situaties. Het kunnen gebruiken van een basis aan kennis en vaardigheden van rekenen & wiskunde in verschillende situaties buiten dat vakgebied is een essentiële doelstelling van de algemene vorming en de belangrijkste component van de te verwerven competentie in rekenen & wiskunde voor alle vormen van onderwijs. Die noodzakelijke basis varieert in breedte, diepgang en abstractie voor vmbo, havo-vwo, type beroepsonderwijs en per sector. De term ‘gebruiken’ is verwant met het begrip ‘horizontaal mathematiseren’. Dan gaat het erom dat een situatie van buiten de wiskunde in wiskundige termen wordt vertaald. Dat stelt eisen aan de inhoud van het cognitieve schema van leerlingen en aan hun vermogen om een nieuw probleem aan te pakken. Van dit type opgaven uit de referentieniveaus mag worden verwacht dat leerlingen ze na wat gepuzzel over het algemeen goed maken. (We hebben in de werkgroep wel kennis genomen van het feit dat Nederlandse leerlingen in de verschillende internationale onderzoeken niet zo goed zijn in het oplossen van problemen die wat complexer zijn dan de simpele recht toe, recht aan opgaven.)

verdiepen: weten waarom

In de bovenbouw van het primair onderwijs tekenen zich al snel groepen leerlingen af die aan een enkel voorbeeld genoeg hebben om de onderliggende abstractie of regel of generalisatie te vatten. Leerlingen die aan een enkel voorbeeld het gemeenschappelijke in rekensituaties herkennen en die op grond van hun overzicht, hun inzicht, hun interpreteren van de betekenis, kunnen uitleggen waarom iets werkt of waar is of correct is. In potentie zijn dat kwaliteiten van leerlingen die het waard zijn om te worden gestimuleerd en ontwikkeld. De gangbare praktijk is dat die leerlingen pas op de plaats moeten maken voor de modale leerlingen die meer voorbeelden, oefeningen en verwerkingstijd nodig hebben. Dat geldt zeker voor het primair onderwijs, maar ook in de onderbouw van het voortgezet onderwijs wordt in de schaarse rekenlijnen zelden materiaal aangeboden dat dieper graaft als aanvulling op een horizontale verbreding.

Wij pleiten er daarom voor om in het onderwijsaanbod in de bovenbouw van het basisonderwijs en de onderbouw van havo-vwo deze groep leerlingen de kans te geven zich te 'verdiepen'. De term 'verdiepen' is verwant met het begrip 'verticaal mathematiseren'. Dan gaat het erom dat wiskundige verschijnselen met wiskundige middelen van hoger niveau worden geordend of georganiseerd. Denk bijvoorbeeld aan het bestuderen van de structuur van het getalsysteem, van de ligging van priemgetallen, van Egyptische breuken of van het voortzetten van meetkundige of getallenpatronen, enzovoort.

7 hoe nu verder?

stemmingmakerij?!

De discussies over de kwaliteit van het Nederlandse (reken)onderwijs kenmerken zich de laatste jaren helaas door het elkaar beschieten vanuit loopgraven. Enerzijds is er de heimwee naar vroeger, toen iedereen goed kon rekenen. Aanwijsbaar onjuist als je de hele populatie meeneemt en niet alleen de 12 procent die naar de hbs of het gymnasium ging of de 30 procent die de ulo bezocht. Stemmingmakerij als je niet meeweegt dat leerlingen heel veel andere vaardigheden verwerven die essentieel zijn voor hun functioneren in de moderne maatschappij. Veel opa's kunnen in dat opzicht beter in de leer bij hun kleinkinderen. Anderzijds lijkt de trend in alle schoolvakken eenzijdig te zijn doorgeschoten in de richting van 'zoek het maar uit' of 'zoek het maar op'. Het is hoog tijd om dierbare, didactische opvattingen die de laatste decennia opgeld deden eens kritisch tegen het licht te houden. Wat leveren ze in de praktijk aan opbrengsten op?

natuurlijk kan het beter!

Het is volstrekt helder dat de verkokering van ons onderwijsstelsel heeft geleid tot onaanvaardbare breuken in de doorgaande leerlijnen van leerlingen. Een verkokering die ook in de bestuurlijke organen tot en met het ministerie doorwerkt en het zelfs moeilijk maakt om er iets constructiefs aan te doen. Dat moet en kan nationaal en regionaal beter.

Daarnaast heeft de werkgroep (met expertise uit allerlei stromingen en sectoren) zich verenigd in de conclusie dat er veel meer helderheid moet komen in wat leerlingen op elk referentieniveau vlot moeten beheersen (paraat hebben) en functioneel moeten kunnen gebruiken. Een sterkere focus op de beschreven inhouden met de bijpassende beheersingsniveaus moet en kan op zich al tot betere resultaten leiden.

welke didactiek werkt wel?

Iedereen die onderwijs heeft 'genoten', heeft wel een mening over het onderwijzen, de didactiek. Ook in onze werkgroep liepen die meningen op microdidactisch niveau nogal uiteen. We zijn het eens over meer aandacht voor: paraat hebben, consolideren, onderhouden, memoriseren, overzichten maken, oefenen in gevarieerde situaties, vinger aan de pols houden, diagnostisch toetsen. Er moet meer onderzoek komen over de praktijk in de scholen. Wat gebeurt er echt met de rekenmethoden? En we moeten 'vondsten' uit een vernieuwde rekendidactiek eens goed op hun effecten onderzoeken (zie bijvoorbeeld het onderzoek van Van Putten (2005, 2006)).

opa vertelt verder

Eind groep 5 meldt Marieke mij dat ze een heel mager cijfer heeft voor rekenen. Het zit haar hoog en ze neemt het rekenschrift mee naar de camping in Frankrijk. Opa heeft er verstand van en die komt met zijn Otten ook een paar weken langs. Direct een van de eerste dagen komt het rekenschrift al tevoorschijn. Ze heeft de helft van alle minsommen fout. U kent dat wel, $83 - 27$. 'Kijk dat doe je zo, opa. Eerst vanaf links $80 - 20$ is 60. En dan $3 - 7$, dat kan niet, dus $7 - 3$ en dat wordt 64.' De leerkracht heeft alle fouten, een schrift vol, aangestreept, zonder dit neveneffect van kolomsgewijs aftrekken te constateren.

Begin groep 7. 'Hoe gaat het op school, Marieke?' Nu, dat is niet best, de klas verkeert in opperste verwarring. 'Kijk opa, de helft van de klas maakt nog steeds dezelfde fout die ik toen ook maakte. Ik heb mijn vriendjes uitgelegd dat het handiger is om ze onder elkaar te zetten en te lenen en dat doen ze nu allemaal goed.' Helaas de nieuwe meester, zo van de pabo, heeft het verboden om het zo te doen. 'Het moet met de getallenlijn' zegt hij. 'Hoe dan?', vraag ik. Na eindeloos gemodder weet Marieke mij uit te leggen hoe hij wil dat het met de getallenlijn moet.

Vraag: Is dat kolomsgewijs aftrekken wel een begrijpelijke procedure, die in de zin van Gal'perin uiteindelijk tot een verkorting kan leiden? (Uitten-bogaard (2007, 2008) betwijfelt dat, al vindt hij het wel een mooie 'vondst'.)

Onze schoondochter van Hongaarse afkomst, luistert mee. 'Wat doen jullie dat vreemd in Nederland.' 'Hoe doen jullie het dan in Hongarije?', vraag ik. ' $723 - 586$ wordt onder elkaar gezet en dan aanvullen. Van 6 naar 13 is 7, van 9 (!) naar 12 is 3 en van 6 naar 7 is 1, dus 137. Zo deed mijn bakker, die vroeger met de broodmand bij de deur kwam, het ook. En hoe!'

De jongens willen nu wel laten zien hoe zij delen. Dat aftrekken doen ze natuurlijk vlot onder elkaar.

Sietze, inmiddels groep 8, meldt dat hij een eigen methode heeft voor $4305 : 35$.

'Ik doe eerst maar eens $100 \times$, dan $20 \times$, dan $2 \times$ en ja nog een keer, dus 123.'

Adriaan past onmiddellijk het uiteindelijke algoritme toe en kan het uitlegen. De moeder van Sietze, als assistentaccountant dagelijks in de weer met getallen, volgt bewonderend de acties van de jongens en vraagt zich hardop af hoe zij dat ooit heeft geleerd. In ieder geval weet zij niet meer hoe dat met de hand moet!

Vraag: Lijkt het erop dat de zogenoemde 'hapmethode' zich wel goed leent voor een begrijpelijke procedure, die tot een verkorting kan leiden?

meester Jaap spreekt

Met instemming citeer ik J. Vriens (2007), schoolmeester in hart en nieren en auteur van de bekende 'Meester Jaap' boeken:

Ik heb veel enthousiaste meesters en juffen ontmoet die er iedere dag weer wat moois van maken en mét hun volle verstand en op hun éigen manier inhoud weten te geven aan onderwijsvernieuwing.

Docenten moeten boeiend en creatief les kunnen geven. Het hoeft niet altijd 'leuk' te zijn, maar wel goed, zodat leerlingen geprikkeld worden om verder te kijken dan hun neus lang is. Daarna kunnen ze dán zelf aan het werk gaan, met de leraar als coach.

Daarnaast worden jonge mensen via internet, iPod, televisie, mobieltjes, enzovoort overspoeld met informatie. Dan komt het écht aan op een inspirerende en vakbekwame leraar die hun leert hoofd- en bijzaken te onderscheiden.

noot

- 1 <http://www.ond.vlaanderen.be/nieuws/2007p/1204-PISA.htm>
- 2 ICME4, Berkeley, 1980.

literatuur

- Bransford, J.D., A.L. Brown & R. Cocking (eds). *How People Learn. Brain, Mind, Experience and School*. National Research Council. Washington: National Academy Press.
- Buijs, K. (2007). *Leerstofgebieden en voorbeeldopgaven voor de betere leerlingen van groep 7 en 8*. Enschede: SLO.
- Dekker, T., K. Lagerwaard, J. de Lange, e.a. (2006a). *Wiskundige geletterdheid volgens PISA - Hoe staat de vlag erbij? 1. Analyse*. Utrecht/Arnhem: Freudenthal Instituut/Citogroep.
- Dekker, T., K. Lagerwaard, J. de Lange, e.a. (2006b). *Wiskunde geletterdheid volgens PISA - Hoe staat de vlag erbij? 2. Opgaven*. Utrecht/Arnhem: Freudenthal Instituut/Citogroep.
- Dormolen, J. van (1972). *Didactiek van de wiskunde*. Utrecht: Oosthoek.
- DUO Market Research (2007). *Rekenvaardigheid verpleegkundigen*. Utrecht: DUO Market Research.
- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008a). *Over de drempels met taal en rekenen*. Enschede: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen.
- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008b). *Over de drempels met rekenen*. Con-

- solideren, onderhouden, gebruiken en verdiepen*. Enschede: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen.
- Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 133-150.
- Groot, A.D. de, & J.C. Traas (1980). *Onderwijs van binnen en van buiten*. Deventer Van Loghum Slaterus.
- Kilpatrick, J., J. Swafford & B. Findell (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington: National Research Council.
- Kuyper, H. & M.P.C. van der Werf (2007). *De resultaten van VOCL'93 en VOCL'99: Vergelijkende analyses van prestaties en rendement*. GION: Groningen.
- Pellegrino, J.W. e.a. (2001). *Knowing what Students Know*. Washington: National Research Council.
- Putten, C.M. van (2005). Strategiegebruik bij het oplossen van deelsommen. In: J. Janssen, F. van der Schoot, & B. Hemker. *Balans van het reken-wiskundeonderwijs op het einde van de basisschool 4*. PPON-reeks nr. 32. Arnhem: Cito, 125-131.
- Putten, C.M. van & M. Hickendorff (2006). Strategieën van leerlingen bij het beantwoorden van deelopgaven in de periodieke peilingen aan het eind van de basisschool van 2004 en 1997. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 25(2), 16-25.
- Skemp, R. (1971). *Wiskundig Denken*. Utrecht: Aula.
- Skemp, R. (1978). Inzicht, planning en het bijbrengen van routine. *Euclides*, 53(9), 397-408.
- Streun A. van (2001). *Het denken bevorderen*. Groningen: RUG (oratie).
<http://www.rug.nl/fwn/voorzieningen/ido/betadidactiek/Onderzoek/onderzoekers/annevanstreun/VanStreunOratie.pdf>.
- Tall, D. & M. Thomas (eds) (2002). *Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics. A tribute to Richard Skemp*. Australia: Post Pressed.
- Thijssen, T. (1927, 2007). *De gelukkige klas*. Amsterdam: CPNB.
- Uittenbogaard, W. (2007). *Hoe Juliette en Jonas leren rekenen. Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 26(1), 32-36.
- Uittenbogaard, W. (2008). Geen catechismus leren, maar nadenken. *Nieuw archief voor wiskunde* 5/9(1), 60-64.
- Vos, P. (2007a). Algebraprestaties van tweede-klassers. *Euclides*, 82(4), 129-132.
- Vos, P. (2007b). Rekenen door Nederlandse tweedeklassers in internationaal perspectief (1982-2003): Zijn de prestaties voor- of achteruit gegaan? *Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008b)*. *Over de drempels met rekenen. Consolideren, onderhouden, gebruiken en verdiepen*.
- Vriens, J. (2007). *Is de klas nog wel zo gelukkig?* Houten: Van Holkema & Warendorf.

Het voorkomen van ongecijferdheid

A. Treffers
Flsme, Universiteit Utrecht

1 inleiding

Exact twintig jaar geleden verscheen *Matilda*, het bekende kinderboek van Roald Dahl. Enkele fragmenten daaruit zijn een reactie op de toenmalige ontwikkelingen van het Engelse rekenonderwijs. Daarin werd destijds uitgedragen dat tafels en staartdelingen voortaan taboe zouden zijn en dat het werken met rekenmachines nu voorrang moest krijgen.

Ken je alle tafels tot en met die van twaalf?

Ja, juf.

Wat is zeven keer twaalf?

Vierentachtig, zei Matilda. (...)

Je zegt dat je het niet zo moeilijk vindt het ene getal met het andere te vermenigvuldigen, zei juffrouw Engel. Kun je dat een beetje duidelijker uitlegen?

O jee, zei Matilda. Dat denk ik eigenlijk niet.

Juffrouw Engel wachtte af. De klas zat stil te luisteren.

Bijvoorbeeld, zei juffrouw Engel, als ik je vroeg veertien en negentien te vermenigvuldigen. Nee, dat is te moeilijk.

Dat is tweehonderdzesenzestig, zei Matilda zachtjes.

Juffrouw Engel staarde haar aan. Ze pakte een potlood en rekende de som uit op een papiertje. Hoeveel zei je dat het was?, vroeg ze opkijkend.

Tweehonderdzesenzestig, zei Matilda. (...) Ik heb altijd tegen mezelf gezegd als zo'n klein rekenmachientje dat kan, waarom zou ik het dan ook niet kunnen?

Je hebt groot gelijk, zei juffrouw Engel. Rekenmachientjes zijn trouwens niet toegestaan op deze school ...

(Roald Dahl, 1988)

2 hoofdrekenen en schatten

Hoofdrekenen, cijferen en het gebruik van de rekenmachine, dat zijn de

kernpunten in het geciteerde fragment. En dat zijn sinds eind jaren tachtig tevens de centrale onderdelen van de internationale en nationale discussies over het rekenen - ook in Nederland.

Kunnen de kinderen tegenwoordig nog wel rekenen? In de volgende bewering kun je de bestaande twijfels daarover en de onverholen kritiek daarop concreet en kort als volgt samenvatten.

Yvonne rekt op haar rekenmachine

$715,347 + 589,2 + 4,553 = 13091$

Bij het opschrijven van het antwoord is ze de komma vergeten.

Wat moet het antwoord zijn?

‘Vroeger konden ze deze optelling precies berekenen en misschien niet zo goed schatten. Tegenwoordig kunnen ze wellicht wel schatten maar lukt exact becijferen niet meer.

Is deze bewering waar?’

Wel, de Yvonne-som is zowel in 1987 bij de eerste rekenpeiling als in de laatste peiling van 2004 individueel afgenomen. Het is de bedoeling dat deze opgave uit het hoofd wordt berekend. De goedscore in 1987 was 27 procent en in 2004 was dat 71 procent.

Analyse van de oplossingsprocedures laat zien dat in 1987 een op de drie leerlingen het antwoord 13,091 gaf, omdat de meeste getallen drie cijfers achter de komma hebben, terwijl in 2004 nog maar een op de tien zo redeneerde.

Voor domein (1), getalrelaties, hoofdrekenen en schattend rekenen als geheel, geldt dat de goedscores vanaf 1987 gemiddeld met ongeveer 15 procentpunten zijn toegenomen. De grotere aandacht die sindsdien aan deze rekenvaardigheden is besteed, heeft dus kennelijk vruchten afgeworpen.

3 cijferen

Het is echter de vraag of een en ander niet ten koste van domein (2), het cijferen, is gegaan. Kunnen de kinderen tegenwoordig bijvoorbeeld zo'n Yvonne-som nog wel precies op papier berekenen? De goedscores bij een soortgelijke som ' $37,5 + 224 + 3,36$ ' waren in 1987 en 2004 vrijwel gelijk, ongeveer 70 procent. Maar voor de totale opgavenverzameling van cijferend optellen en aftrekken geldt dit niet. Tot 1997 daalden de resultaten licht, maar niet significant, dat wil zeggen met iets minder dan 5 procentpunten. De vierde eindpeiling (2004) gaf echter een abrupte terugval van 10 procentpunten te zien. Abrupt, omdat die daling nog niet in de peiling van midden groep 8 had plaatsgevonden toen dezelfde scores werden gehaald als in de derde eindpeiling (1997).

Bij cijferend vermenigvuldigen en delen was in de periode 1987-1997 de

terugval 10 procentpunten. In de laatste peiling echter gingen de resultaten met maar liefst 20 procentpunten naar beneden. De prestatiecurve van 2004 is uitermate grillig: in de tweede helft van groep 7 was de stijging 10 procentpunten en in de eerste helft van groep 8 zelfs 20 procentpunten, waarna de resultaten in de tweede helft van groep 8 met 10 procentpunten daalden, terwijl dat bij hoofdrekenen en schatten niet gebeurde.

Wat is de oorzaak van dit verval in de laatste schoolperiode? Is het een gebrek aan voortgaande oefening of wellicht gebrek aan ambitie van de leerling om de toets zo goed mogelijk te maken? Niemand kan dit verklaren. En ook niemand weet of dit grillige verloop zich in de voorgaande peilingen heeft voorgedaan omdat toen de prestaties in groep 7 en midden groep 8 niet werden onderzocht.

Wat wél vaststaat is dat in vergelijking met de voorlaatste peiling een sterk toenemend percentage leerlingen de betreffende opgaven uit het hoofd berekende, wat de goedscore aanmerkelijk drukte, zoals uit de individuele toetsafnamen bleek.

Ondersteuning voor de interpretatie dat vooral het maken van opgaven zonder uitwerking bepalend is voor de daling in prestaties, kan ook ontleend worden aan de resultaten van de individuele afnamen. Bij deze individuele afnamen maakten leerlingen de opgaven wél met behulp van het opschrijven van een uitwerking. De geleverde prestaties waren aanzienlijk beter, terwijl de strategieën afzonderlijk niet succesvoller waren. Het lijkt er dus op dat zodra de leerlingen een uitwerking opschrijven bij een oplossing van een deelopgave, waartoe ze goed in staat lijken te zijn, de prestaties vanzelf beter uitpakken. (Van Putten & Hickendorff, 2006)

4 Proeve-visie op cijferen

Men zou verwachten dat vooral ook de introductie van realistische rekenwiskundemethoden debet aan de daling zou zijn, maar dat blijkt niet het geval - althans niet ten opzichte van 1997 en nauwelijks voor 1992. Toch wil ik in dit verband een kritische kanttekening bij de methoden plaatsen - een enkele uitzondering daargelaten. Ik ben namelijk van mening dat één (deel)leergang aanmerkelijk verbeterd kan worden, te weten die van het vermenigvuldigen van een ééncijfergetal met een meercijfergetal - hier kortweg één-keer-meer genoemd - dé sleutelopgave voor zowel cijferend vermenigvuldigen als kolomsgewijs staartdelen.

In de 'Proeve van een Nationaal Programma. Deel 2 Basisvaardigheden en Cijferen' wordt daarover het volgende geschreven:

Er is een exploratiespoor volgens welke met meercijferige getallen wordt gewerkt en gerekend aan de hand van elementaire contextproblemen. En er is een oefenspoor waarin met eenvoudige opgaven van één- met meercijfergetallen wordt vermenigvuldigd. Bij het exploreren wordt nog niet op de meest verkorte manier gerekend. Bij het oefenen wordt daarop wél geleidelijk aangestuurd, dus net als in de pure cijferaanpak. Het pure cijferen is echter éénsporig en bevat in feite alleen een oefenspoor dat uitgezet wordt met opgaven van oplopende moeilijkheid.

Er zijn echter ook wel éénsporige uitwerkingen van de combinatiemethode hoofdrekenen – cijferen die in feite alleen maar een exploratiespoor volgen. Een dergelijke aanpak leidt meestal niet tot een algoritme en is, afgezien daarvan, vaak ook weinig doelmatig opgezet. Slechts een tweesporige combinatieleergang, in welk van de voorgaande vormen ook gegoten, doet recht aan zowel aan het reconstructie- als het rekenconstructieprincipe. Het is naar onze mening dan ook eenzijdig en onverantwoord om het oefenaspect volledig overboord te gooien. (Treffers & De Moor, 1990, pag.213-214)

5 één-keer-meer

Hoe het inoefenen van één-keer-meer kan plaatsvinden wordt met de volgende serie problemen toegelicht.

We beschikken over de cijfers 2, 4, 6 en 8 die op de lege plaatsen van één-keer-drie ingevuld mogen worden.

$$\begin{array}{r} \dots \\ \hline \dots \end{array} \times$$

Neem bijvoorbeeld 2×468 en de gelijkwaardige optelling $468 + 468$.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 468 \\ \hline 2 \end{array} \times \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 468 \\ \hline 468 \\ 936 \end{array} +$$

Het inoefenen van één-keer-meer heeft pas zin als het cijferende optellen goed wordt beheerst. In het bovenstaande voorbeeld is de overeenkomst tussen deze twee cijferprocedures evident: de herhaalde kolomsgewijze optelling van de positiegetallen wordt omgezet in de bijbehorende ‘keertafel’.

Bij 2×486 doet zich hetzelfde voor.

Bij een ander voorbeeld uit de serie kan die verkorting uiteraard ook worden toegepast.

$$\begin{array}{r} 23 \\ 268 \\ 4 \times \\ \hline \dots \end{array} \quad \begin{array}{r} 23 \\ 268 \\ 268 \\ 268 \\ 268 + \\ \hline 1072 \end{array}$$

4×8 is 32, dat betekent 2 opschrijven 3 onthouden; 4×6 is 24 plus 3 is 27, dat betekent ...

Hoeveel andere één-keer-drie opgaven kunnen er nog met de getallen 2, 4, 6 en 8 worden gemaakt? De leerlingen krijgen de opdracht om zoveel mogelijk sommen te bedenken en uit te rekenen. Hoe beredeneer je dat het er bij elkaar genomen 24 zijn?

Een soortgelijke serie één-keer-drie opgaven kan bijvoorbeeld met de getallen 3, 5, 7 en 9 worden samengesteld.

Maar de leraar kan ook besluiten om na één-keer-drie met dezelfde cijfers 2, 4, 6 en 8 eerst opgaven van het type twee-keer-twee te exploreren.

$$\begin{array}{r} \dots \\ \dots \times \\ \hline \dots \end{array} \quad \begin{array}{r} 68 \\ 24 \times \\ \hline \dots \end{array}$$

In de nabespreking brengt de leraar de kwestie van één-keer-twee ter sprake die de leerlingen nu cijferend beheersen. Benutten ze deze vaardigheid bij 4×68 ? En hoe berekenen ze 20×68 ? De nulkwestie in relatie tot 2×68 wordt daarbij uitgebreid aan de orde gesteld: $20 \times ..$ heeft een uitkomst die 10 keer zo groot is als $2 \times ..$, dus daarom duikt bij het berekenen van de eerste opgave die nul achter de laatste uitkomst op. Eerst introduceert de leraar een uitgebreid notatieschema voor 24×68 en dan in twee stappen de compacte standaardnotatie.

Uitgebreid

$$\begin{array}{r} 68 \\ 24 \times \\ \hline \dots \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 68 \\ 4 \times \\ \hline 272 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 68 \\ 20 \times \\ \hline 1360 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 272 \\ 1360 + \\ \hline 1632 \end{array}$$

Compact

$$\begin{array}{r} 68 \\ 4 \times \\ \hline 272 \\ 1360 \\ \hline 1632 \end{array} \quad \begin{array}{r} 68 \\ 4 \times \\ \hline 272 \\ 1360 \\ \hline 1632 \end{array} \quad \begin{array}{r} 68 \\ 4 \times \\ \hline 272 \\ 1360 \\ \hline 1632 \end{array}$$

Ook nu staan weer 24 opgaven ter beschikking - of zo men wil 12 als de verwisselingschap wordt benut - om een en ander in te oefenen. Welk

product is het grootste en welk het kleinste? Kun je ook zonder het antwoord exact uitleggen waarom? Voortgezette oefening kan met andere series van vier of vijf getallen worden gemaakt.

Ziehier in kort bestek een mogelijke leergang cijferend vermenigvuldigen.

6 terug naar Matilda, terug in de tijd

Juffrouw Engel kan kennelijk niet volgen hoe Matilda 14×19 via $19 \times 14 = 20 \times 14 - 14$ berekent en controleert daarom de uitkomst schriftelijk met het standaardalgoritme.

Tot voor kort werd in het Engelse rekenprogramma nauwelijks of geen plaats voor hoofdrekenen en schattend rekenen ingeruimd – rekenen was voornamelijk of zelfs uitsluitend cijferen. Dit in tegenstelling tot de Nederlandse rekentraditie waarin naast de smalle cijferstroming ook altijd een brede hoofdrekenstroom zichtbaar bleef.¹ Die manifesteerde zich in de tweede helft van de vorige eeuw ondermeer in Diels en Nauta ('Fundamenteel Rekenen'), Reynders en Snijders ('Functioneel Rekenen'), Wanders en Bohnke ('Boeiend Rekenen'), Bruinsma c.s. ('Nieuw Rekenen') en Huitema c.s. ('De wereld in getallen').²

Het is interessant om de resultaten van de laatstgenoemde methoden ('Nieuw Rekenen' en 'De wereld in getallen' te vergelijken met die van de laatste dominante methoden uit de cijferrichting, 'Naar Zelfstandig Rekenen' en 'NiveauCursus Rekenen'. Interessant, omdat daaruit naar voren komt hoezeer de prestaties van de schrale cijferaars over de hele linie achterblijven bij die van de rijke rekenaars. Op alle 24 onderdelen uit de eerste drie peilingen scoren 'Nieuw Rekenen' en 'De wereld in getallen' hoger dan 'Naar Zelfstandig Rekenen' en 'Niveau Cursus Rekenen', meestal significant, en gemiddeld met een verschil van 0,4 standaarddeviatie, ongeveer 10 procentpunten. Daarbij scoort 'De wereld in getallen' op vrijwel alle onderdelen het beste.

Hoofdrekenen en schattend rekenen zitten goed leren cijferen en de toepasbaarheid ervan blijkbaar niet in de weg, integendeel.

Hoe komt het dan dat de prestaties bij het cijferen, met name in de laatste peiling, teruglopen. Wel dat heeft, zoals 'De wereld in getallen' laat zien in principe niets met de realistische rekendidactiek te maken, maar veeleer met de al dan niet nagestreefde doelstellingen. Niet iedere vernieuwde methode besteedt voldoende tijd - zeg bij elkaar genomen zo'n vijftig lessen - aan het systematisch en doelgericht aanleren van de standaardprocedures van het cijferen of varianten ervan, zoals bij het staartdelen. Ook beginnen verschillende methoden wel erg laat met cijferend vermenigvuldigen en delen, dat wil zeggen pas aan het einde van groep 7. In ieder geval

zijn de genoemde resultaten van 'Nieuw Rekenen' en 'De wereld in getallen' voldoende reden om het elementaire cijferen ook vandaag de dag niet te verwaarlozen.³ Omgekeerd zouden de genoemde resultaten van de methoden uit het overgangstijdvak tussen 'oud en nieuw' de huidige cijferlobby in Nederland te denken moeten geven ...

noten

- 1 De rekendidactische fundering van de genoemde 'hoofdreken-methoden' is behoudens de methode van Diels en Nauta ontleend aan L. van Gelder (1959). Van Gelder geeft niet alleen talrijke voorbeelden van hoofdrekenstrategieën, maar ook het kolomsgewijze staartdelen treft men in dit didactische standaardwerk aan. In de methode Boeiend Rekenen wordt deze 'nieuwe' staartdeling praktisch uitgewerkt. Trouwens, ook in het buitenland is deze kolomsgewijze staartdeling al sinds jaar en dag in gebruik.
- 2 Zie voor een nadere analyse van de genoemde methoden R.A. de Jong (1986). De huidige reken-wiskundemethoden vormen ten aanzien van het cijferen en speciaal het cijferende vermenigvuldigen geen eenheid. De leergangen van de twee huidige methoden met het grootste marktaandeel, 'Pluspunt' en 'De wereld in getallen', verschillen bijvoorbeeld aanzienlijk. 'Pluspunt' volgt, in Proeve-terminen gesteld, vooral het exploratietraject, terwijl 'De wereld in getallen' het cijferen tweesporig aanpakt en betrekkelijk veel aandacht aan het oefenen besteedt, te beginnen met één-keer-meer.
- 3 De vigerende ministeriële eindtermen bevatten ook doelstellingen voor het cijferen. Zie in dit verband de TAL-brochure (van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001). Cijferend vermenigvuldigen wordt hierin als een differentiële doelstelling aangemerkt die op driekwart van de leerlingen van toepassing is.

literatuur

- Dahl, R. (1988). *Matilda*. Baarn: Fontein.
- Gelder, L. van (1959). *Grondslagen van de rekendidactiek*. Groningen: Wolters.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den, K. Buys & A. Treffers (red.) (2001). *Kinderen leren rekenen. Tussendoelen annex leerlijnen. Hele getallen bovenbouw basisschool*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Janssen, J., F. van der Schoot, B. Hemker & N. Verhelst (1997). *Balans van het reken-wiskunde onderwijs aan het einde van de basisschool 3*. Arnhem: Cito.
- Janssen, J., F. van der Schoot & B. Hemker (2005). *PPON (periodieke peiling van het onderwijsniveau). Balans (32) van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4*. Arnhem: Cito Instituut voor toetsontwikkeling.
- Jong, R.A. de (1986). *Wiskobas in methoden*. Utrecht: OW&OC (proefschrift).
- Putten, C. M. van & M. Hickendorff (2006). Strategieën van leerlingen bij het beantwoorden van deelopgaven in de periodieke peilingen aan het eind van de basisschool van 2004 en 1997. *Panamapost. Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 25(2), 16-25.
- Treffers, A. & E. de Moor (1990). *Proeve van een Nationaal Programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2. Basisvaardigheden en Cijferen*. Tilburg: Zwijssen.

Vermenigvuldigen met meer-cijferige getallen

- pleidooi voor een kernleergang gestileerd hoofdrekenen -

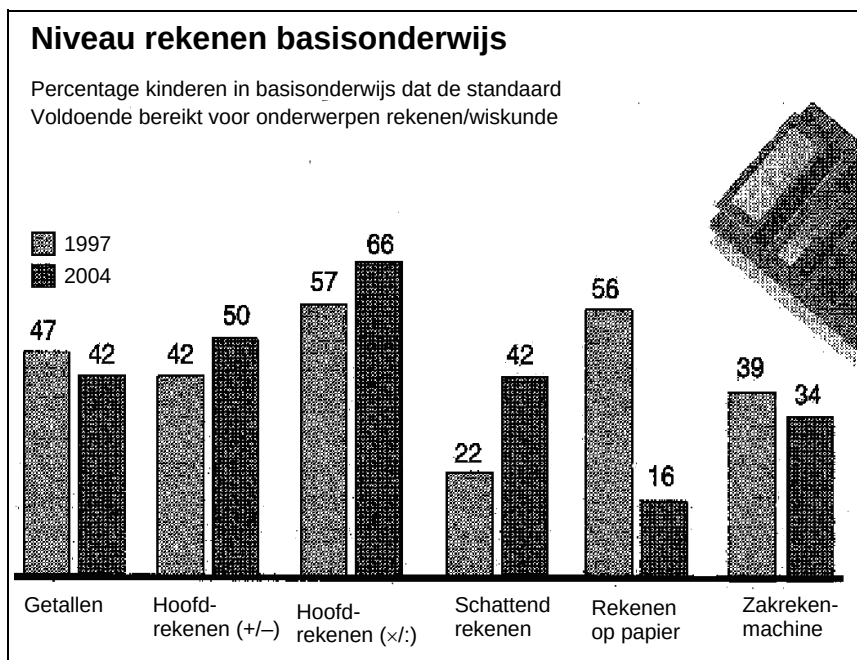
K. Buijs
SLO, Enschede

1 inleiding

Tegelijk met de activiteiten van de 'Expertgroep doorlopende leerlijnen taal en rekenen' heeft zich de afgelopen maanden een discussie voorgedaan over teruglopende resultaten van het reken-wiskundeonderwijs. Aanleiding voor deze discussie vormde een analyse van leerresultaten bij de PPON-peiling van 2004 (Janssen e.a., 2005). Volgens sommigen zou op grond van zo'n analyse geconstateerd moeten worden dat het reken-wiskundeonderwijs zich in een neerwaartse spiraal bevindt die nodig een halt moet worden toegeroepen (Van de Craats, 2007). Volgens anderen valt het erg mee en is er voornamelijk sprake van verschuivingen waarbij bepaalde leerstofgebieden een achteruitgang laten zien terwijl op andere gebieden juist sprake is van vooruitgang (Treffers, 2007). In het eindrapport van de Expertgroep (2008) wordt enerzijds aangegeven dat zich inderdaad verschuivingen voordoen en dat er niet gesproken kan worden van een teruggang over de hele linie. Maar anderzijds wordt ook duidelijk gemaakt dat er op enkele gebieden sprake is van een zorgwekkende achteruitgang die aanleiding geeft tot een bezinning op bepaalde inhouden en werkwijzen van het reken-wiskundeonderwijs. Deze achteruitgang heeft met name betrekking op het schriftelijke rekenen: het gebruik van standaardprocedures voor de vier hoofdbewerkingen, en dan nog in het bijzonder voor het vermenigvuldigen en delen.

In de dagbladers heeft een en ander tot ruime aandacht voor de kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs geleid. Tamelijk krasse uitspraken werden daarbij niet geschuwd. Zo wordt soms gesproken van 'Ramp in rekenen', 'Realistisch rekenen mislukt', en 'Rekenonderwijs ver onder de maat'. Bij de onderbouwing van dergelijke uitspraken lijkt men zich dan niet zozeer te baseren op een zorgvuldige vergelijking van resultaten bij PPON gedurende de afgelopen tien of vijftien jaar, maar op het percentage

leerlingen dat aan de door het Cito ontwikkelde standaarden voldoet (fig.1). Het is echter zeer de vraag in hoeverre deze standaarden - door het Cito ontwikkeld op basis van interviews met leraren en deskundigen - een geschikte graadmeter zijn om de kwaliteit van het onderwijs aan af te meten.



figuur 1: overzicht resultaten voor een aantal leerstofgebieden in termen van het door leerlingen behalen van de standaard 'voldoende' (uit: Janssen, e.a., 2005)

In deze bijdrage wordt nader ingegaan op een van de leerstofgebieden waar de achteruitgang zich het sterkste manifesteert, namelijk dat van het vermenigvuldigen met meercijferige getallen. Eerst wordt stilgestaan bij de vraag in hoeverre zich op dit gebied daadwerkelijk een substantiële daling van de resultaten voordoet.

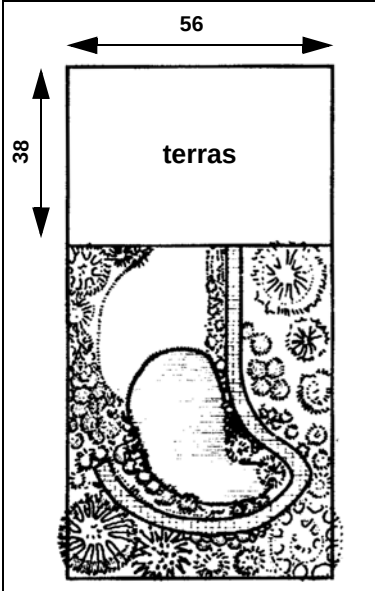
Vervolgens wordt besproken hoe een leergang eruit kan zien die er mogelijk toe zou kunnen bijdragen om een kentering teweeg te brengen in deesignaleerde daling. Daarbij wordt onder meer aangegeven wat voor contexten aan de orde kunnen komen, welke informele strategieën van leerlingen zijn te verwachten, en hoe deze strategieën in het onderwijs uitgebouwd kunnen worden tot efficiënte, notatieondersteunde rekenstrategieën in de sfeer van het gestileerde hoofdrekenen. De voorstellen die

daarbij gedaan worden, zijn gebaseerd op een (promotie)onderzoek waarmee de auteur de afgelopen jaren intensief is bezig geweest (Buijs, 2008).¹

2 teruglopende resultaten bij het meercijferige vermenigvuldigen

Dat er inderdaad sprake is van een vrij sterke achteruitgang op het gebied van het meercijferige vermenigvuldigen, blijkt wel als de resultaten op dit gebied zoals die uit de PPON van 2004 naar voren komen, nauwkeurig vergeleken worden met die uit 1997. Als voorbeeld nemen we twee opgaven die zowel in 1997 als in 2004 in de peiling zaten en waarvan de resultaten zowel voor 1997 als voor 2004 zijn geanalyseerd. Het betrof hier uiteraard opgaven waarbij leerlingen uitrekenpapier mochten gebruiken. De eerste opgave heeft betrekking op een pont die 56 keer vaart met 23 auto's aan boord, de tweede op een terras met 38 rijen van 56 steentjes (fig.2).

Op een pont kunnen in één keer 23 auto's vervoerd worden.
Hoeveel auto's kan die pont hoogstens vervoeren als hij 56 keer oversteekt?



Op het terras komen 38 rijen met steentjes te liggen.
In elke rij 56 steentjes.
Hoeveel steentjes zijn dat in totaal?

figuur 2: twee opgaven uit de Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau van het Cito waarvan de resultaten zowel voor 1997 als voor 2004 zijn geanalyseerd. Het betrof hier uiteraard opgaven waarbij leerlingen uitrekenpapier mochten gebruiken.

Om een nauwkeurig beeld van de resultaten voor deze twee opgaven te krijgen, zijn in het kader van het hierboven genoemde onderzoek alle toetsboekjes waarin deze opgaven voorkwamen geanalyseerd voor wat betreft goedscores en voor wat betreft de door de leerlingen in kwestie gehanteerde strategieën. Beide opgaven werden in beide jaren door ongeveer 500 leerlingen gemaakt. Uit de analyse blijkt in de eerste plaats dat de goedscores fors omlaag zijn gegaan. Bij de pontopgave bleek sprake te zijn van een daling van 77 procent naar 62 procent, en bij de terrasopgave van 75 procent naar 59 procent. Kijken we verder naar het soort van strategieën dat de leerlingen gebruikten, dan valt op dat het aantal leerlingen dat een cijferstrategie volgde wat omlaag is gegaan (voor beide opgaven gemiddeld ongeveer van 80 procent naar 70 procent) terwijl het aantal leerlingen dat een hoofdreenstrategie hanteerde wat omhoog is gegaan (gemiddeld ongeveer van 15 procent naar 25 procent). Voor beide categorieën strategieën is de goedscore omlaag gegaan. In figuur 3 zijn twee voorbeelden gegeven van hoofdreenstrategieën waarbij gebruik is gemaakt van passende hulpnotaties. Wellicht het meest in het oog springend hierbij is dat zich met name in de categorie hoofdreenstrategieën waarbij niet gebruik wordt gemaakt van hulpnotaties en alles dus direct uit het hoofd gedaan wordt, een opmerkelijke stijging voordoet.

The figure shows two handwritten calculations for 56×23 using the distributive property. The first calculation is written vertically, showing 230 repeated five times, summed to 1150 , and then 138 added to reach the final result 1288 . The second calculation shows 23 repeated five times, summed to 115 , and then 138 added to reach the final result 1288 .

figuur 3: geslaagde hulpnotaties bij de pontopgave
(56×23) uit de PPON van 2004

Bij de pontopgave is dit zelfs een spectaculaire stijging van 7 naar 21 procent van alle leerlingen, met een lage goedscore van respectievelijk 15 en 36 procent; bij de terrasopgave een (verwaarloosbare) toename van 15 naar 16 procent met eveneens een lage goedscore van respectievelijk 49 en 33 procent. Al met al betekent dit dat niet alleen de totale goedscore voor dit type opgaven beduidend is gedaald, maar ook dat het percentage leerlingen dat kennelijk niet in staat is zelf een passende hulpnotatie te beden-

ken en dus direct uit het hoofd rekent (met veelal geen goed resultaat) tamelijk gestegen is. De conclusie moet dan ook zijn dat het onderwijs er kennelijk niet in slaagt de leerlingen zodanig met dergelijke hulpnotaties vertrouwd te maken, dat ze deze bij een toets zonder meer inzetten. Dit beeld komt overeen met het door Van Putten en Hickendorff (2006) gesignaleerde beeld bij het delen, waar voor de beide ppon-onderzoeken van 1997 en 2004 eveneens een flinke daling van de goedscores werd geconstateerd terwijl zich een flinke stijging bleek voor te doen van het percentage leerlingen dat grotere deelopgaven zonder gebruik van hulpnotaties uit het hoofd oploste, eveneens met zeer magere resultaten.

3 mogelijke oorzaken van de achteruitgang

Nu is natuurlijk niet onmiddellijk duidelijk waar de oorzaken voor deze achteruitgang gezocht moeten worden. Het kan zijn dat de leergangen waarin het meercijferige vermenigvuldigen in realistische methoden aan de orde komt, op bepaalde punten nog tekort schieten. Maar het kan ook zijn dat er vooral sprake is van een implementatieprobleem waarbij leraren basisonderwijs er niet altijd in slagen om de betreffende leergang goed ten uitvoer te brengen. Verder zou het nog kunnen zijn, zoals door sommigen wordt gesuggereerd, dat de balans in het leerplan voor rekenen-wiskunde wat is doorgeschoten richting te nadrukkelijke aandacht voor hoofdrekenen onder relatieve verwaarlozing van het procedurele schriftelijke rekenen. Of zou wellicht meespelen, zoals in het rapport van de 'Expertgroep Doorlopende Leerlijnen' wordt gesuggereerd, dat er te weinig gericht wordt geoefend voor deze procedures? Hoe het ook zij, in het hierboven genoemde onderzoek is in ieder geval vast komen te staan dat de leergang rond het meercijferige vermenigvuldigen in de meest recente versie van realistische methoden enkele duidelijke tekortkomingen laten zien. Het valt buiten het bestek van dit artikel om hier uitgebreid op in te gaan, maar in z'n algemeenheid kan gesteld worden dat er in ieder geval drie aspecten van deze leergang zijn die voor verbetering in aanmerking komen, te weten:

- 1 Het feit dat er binnen het gebied van het meercijferige vermenigvuldigen soms niet goed wordt aangesloten bij de eigen informele kennis en strategieën van leerlingen.
- 2 Het feit dat de ontwikkeling van passende notatievormen bij de verkenning van dit leerstofgebied soms nogal tekort lijkt te schieten.
- 3 Het feit dat de overgang naar de standaardprocedure van het cijferen soms nogal geforceerd aandoet doordat deze procedure niet op een natuurlijke manier uit het voorafgaande voortvloeit.

Het lijkt aannemelijk dat juist de combinatie van deze tekortkomingen vooral voor zwakkere leerlingen ongunstig kan uitpakken. Een deel van deze leerlingen komt namelijk veelal niet tot volledige beheersing van de standaardprocedure van het cijferen. En als dan het gebruik van notatie-ondersteunde hoofdreenstrategieën in zoverre niet van de grond komt dat de leerlingen niet goed vertrouwd raken met het gebruik van passende hulpmiddelen, dan ligt het voor de hand dat een relatief grote groep leerlingen z'n toevlucht zoekt in strategieën waarbij direct uit het hoofd wordt gewerkt, met veelal ongunstige resultaten. De vraag dient zich dan aan hoe de opzet van de leergang rond het meercijferige vermenigvuldigen zodanig kan worden aangepast dat er beter wordt aangesloten bij de eigen informele noties en strategieën van leerlingen, en dat ze beter vertrouwd raken met het gebruik van geschikte hulpmiddelen om deze strategieën uit te bouwen tot efficiënte rekenstrategieën in de sfeer van het gestileerde hoofdreekenen.

4 veelgebruikte informele strategieën van leerlingen

Het is inmiddels goed gebruik in realistische reken-wiskundemethoden om bij de verkenning van een nieuw leerstofgebied het vertrekpunt te kiezen in contextproblemen waarin de betreffende getalsoort, bewerking of combinatie van bewerkingen besloten ligt. Voor het meercijferige vermenigvuldigen zijn dit veelal drie typen situaties, te weten:

- 1 Verhoudingssituaties, zoals 29 schoolboeken van 24 euro.
- 2 Groepjessituaties, zoals: 26 dozen met 48 potten appelmoes.
- 3 Rechthoeksituaties, zoals: een parkeerterrein met 54 rijen van 72 plaatsen.

Wat voor informele strategieën gebruiken leerlingen zoals als ze voor het eerst met dergelijke situaties geconfronteerd worden?

Om hierover iets meer te kunnen zeggen, wordt hieronder een overzicht gegeven van strategieën die in het kader van het bovengenoemde onderzoek aan het begin van een experimentele leergang bij de opgave naar voren kwamen. De in figuur 4 genoemde opgave werd aan een groep leerlingen voorgelegd in de eerste fase van een experimenteel leertraject rond vermenigvuldigen. De beschreven typen strategieën komen in hoge mate overeen met wat in enkele grote internationale onderzoeken is gevonden (zie bijvoorbeeld Ambrose e.a., 2003).

Uiteraard was er een groep leerlingen die nog niet uit zichzelf tot een oplossing bij deze opgave bleek te kunnen komen. Maar er bleek een grote groep leerlingen te zijn die daar op enigerlei wijze wel toe in staat was. Deze

oplossingen uit de categorie decimaal splitsen

De meest voorkomende en ook meest succesvolle strategie in deze categorie is die waarbij het eerste getal decimaal gesplitst wordt, zoals in het geval links in fig. 6 waarbij gerekend wordt via 10×24 , 10×24 en 9×24 . Verder is er de strategie waarbij beide getallen gesplitst worden en waarbij gerekend wordt via 10×20 , 10×4 , 9×20 en 9×4 . Zie het tweede voorbeeld in figuur 6. Behalve nog enkele andere typen strategieën in deze categorie, zoals die waarbij alleen het tweede getal decimaal gesplitst wordt, is er ook een strategie die per definitie onjuist is. Dat is de strategie waarbij de tientallen alleen met de tientallen vermenigvuldigd worden, en de eenheden alleen met de eenheden. De meest bekende vorm daarvan is die waarbij wordt gerekend via 20×20 en 9×4 , met 436 als uitkomst. In het derde voorbeeld is een variant hiervan opgenomen waarbij via 10×10 , 10×10 en 9×4 wordt gerekend. Dit type strategie bleek met name onder zwakkere leerlingen tamelijk frequent voor te komen.

The figure shows three separate pieces of paper, each labeled 'Kladblaadje' (scratch paper), containing handwritten calculations for the problem 29×24 .

- Top Left:** The student splits 29 into 10, 10, and 9. They calculate $10 \times 24 = 240$, $10 \times 24 = 240$, and $9 \times 24 = 216$. Then they sum these: $240 + 240 + 216 = 696$. The final answer is boxed as 696.
- Top Right:** The student splits both 29 and 24 into tens and units. They calculate $20 \times 20 = 400$, $20 \times 4 = 80$, $9 \times 20 = 180$, and $9 \times 4 = 36$. These are then summed vertically to get 696.
- Bottom Left:** The student splits 29 into 10, 10, and 9, and splits 24 into 10 and 14. They calculate $10 \times 10 = 100$, $10 \times 10 = 100$, and $9 \times 14 = 126$. These are summed to get 236.08 (likely a typo for 696).

figuur 6: drie voorbeelden van oplossingsstrategieën bij het boekenprobleem (29×24) uit de categorie decimaal splitsen

oplossingen uit de categorie varia-strategieën

Bij varia-strategieën gaat het om strategieën die in specifieke gevallen sterk voor de hand liggen omdat de getallen zich er bij uitstek toe lenen.

Het meest voor de hand liggende voorbeeld van zo'n strategie is die van het compenseren waarbij een van beide getallen 'rond' gemaakt wordt en waarbij het teveel gerekende er uiteindelijk weer wordt afgetrokken. Zie het voorbeeld links in figuur 7 waarbij wordt gerekend via $(30 \times 24) - (1 \times 24)$. Dit type strategie komt ook wel in een onjuiste vorm voor als bijvoorbeeld wordt gerekend via $(30 \times 24) - 1$ of $(30 \times 25) - 2$. Zie het voorbeeld rechts in figuur 7. Een ander type in deze categorie is die van het halveren-verdubbelen waarbij een opgave als 16×25 wordt uitgerekend via 8×50 en 4×100 . Deze strategie ligt bij de boekenopgave niet zo voor de hand.

<i>Kladblaadje</i> $10 \times 24 = 240$ $10 \times 24 = 240$ $10 \times 24 = 240$ $720 - 24 = 696$ <u>696</u>	<i>Kladblaadje</i> 29×24 $30 \times 25 = 750 - 2 = 748$
---	---

figuur 7: twee voorbeelden van oplossingsstrategieën bij het boekenprobleem (29×24) uit de categorie varia-strategieën

5 grondidee voor een leerlijn

Aan de voorbeelden uit de vorige paragraaf is te zien dat er niveauverschillen tussen de drie categorieën zijn. De strategieën waarbij sprake is van herhaald optellen, verdubbelen en groepjes maken, zijn duidelijk van een basaal, dicht bij de context aansluitend niveau. Voor de categorie van het decimaal splitsen geldt dat minder. Eigenlijk alleen het eerste type strategie uit deze categorie, namelijk die waarbij het eerste getal gesplitst wordt, sluit nog redelijk dicht bij de context aan omdat zij begrepen kan worden als '10 boeken van 24 euro, nog eens 10 boeken van 24 euro, en nog 9 boeken van 24 euro'. In die zin is deze strategie nog van een tamelijk basaal niveau. Maar voor de strategie waarbij beide getallen gesplitst worden, geldt dat veel minder - de getallen worden daarbij om zo te zeggen los gemaakt uit de context en op een meer formeel niveau bewerkt. En voor de categorie van de varia-strategieën geldt het zeker ook in mindere mate. Compenseren is een type strategie dat niet zo eenvoudig te doorzien is voor veel kinderen, getuige ook het soort van fout dat in het voorbeeld rechts in figuur 7 wordt gemaakt. Bovendien heeft deze strategie, net als die van het

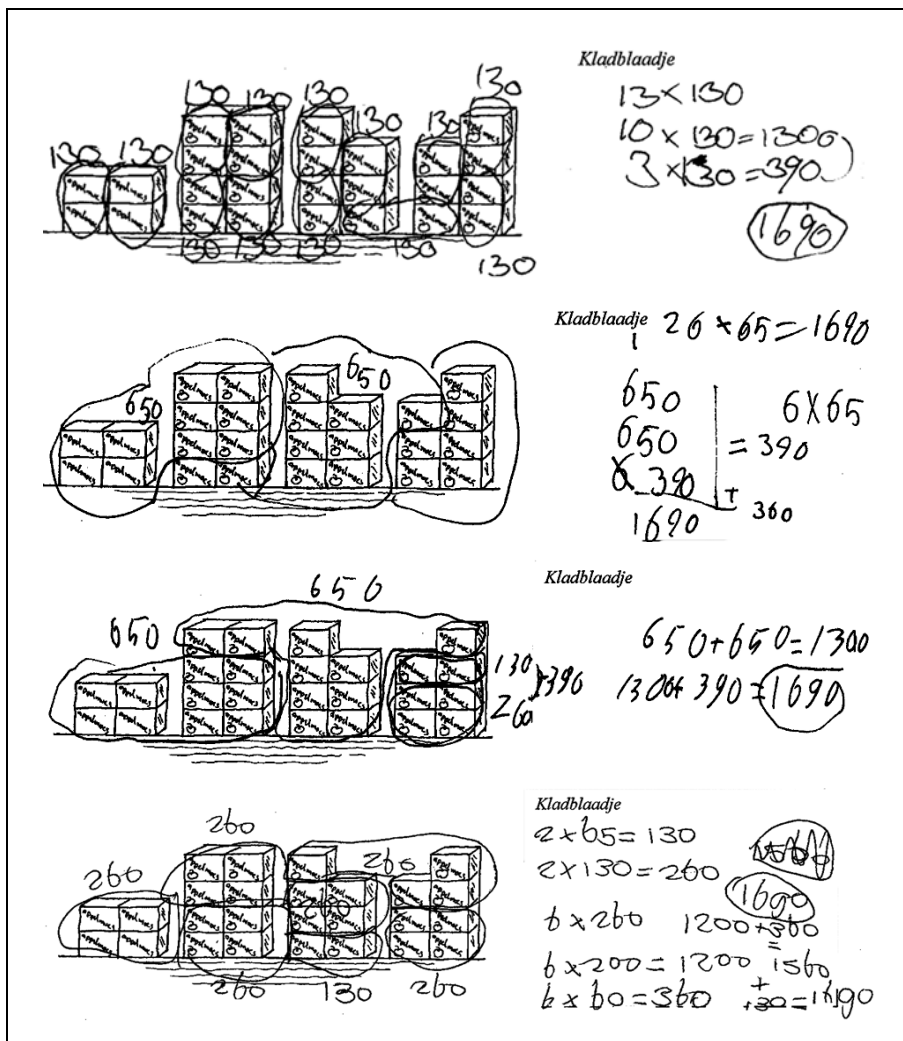
halveren-verdubbelen, het bezwaar dat zij alleen in bepaalde gevallen handig is, namelijk als de getallen in kwestie zich er voor lenen. Met de vaststelling van de verschillen in niveau tussen de drie categorieën oplossingsstrategieën dient zich een eerste aandachtspunt voor een leerlijn aan. Het beoogde onderwijsleerproces zou zich erop kunnen richten de leerlingen systematisch met de genoemde drie categorieën kennis te laten maken en ze daarmee een zekere vertrouwdheid te laten opbouwen.

Een tweede aandachtspunt voor de leerlijn is gelegen in het feit dat er goede mogelijkheden lijken om het onderwijsleerproces het karakter te geven van een proces van voortgaande verkorting en niveauverhoging waarbij strategieën uit de eerste categorie geleidelijk aan overgaan in strategieën uit de tweede categorie. Een sleutelrol kan daarbij zijn weggelegd voor de strategie waarbij het eerste getal decimaal wordt gesplitst, de zogenoemde S1-strategie (splitsen eerste getal). Zoals hierboven reeds is aangestipt, kan dit type strategie namelijk op een natuurlijke manier voortkomen uit allerlei vormen van herhaald optellen en verdubbelen. Dit kan met name bereikt worden indien de eigen strategieën van leerlingen zoals die zich in het eerste deel van de leergang voordoen, naast elkaar gelegd en met elkaar in verband gebracht worden. Stel dat zich tijdens een verwerking bij de opgave '26 dozen met 65 potten appelmoes' bijvoorbeeld de volgende typen strategieën voordoen (fig.8). Dan zou een overdenking van de overeenkomsten en verschillen tussen deze strategieën tot de bewustwording kunnen leiden dat het werken met groepen van 10 eigenlijk wel een hele handige werkwijze is die navolging verdient.

Van belang voor deze overgang is wel dat leerlingen de nulregel steeds beter doorzien en leren inzetten. Immers, je kunt als leerling het werken met groepen van 10 alleen maar als een handige verkorting ervaren, indien je begrijpt dat je een opgave als 10×65 of 10×124 handig kunt uitrekenen door een nul achter het vermenigvuldigtal te plaatsen. Is dat niet het geval, of durf je daar niet echt op te vertrouwen, dan zul je wellicht de voorkeur geven aan allerlei verdubbelingsstrategieën of groepjesstrategieën die je wel goed begrijpt.

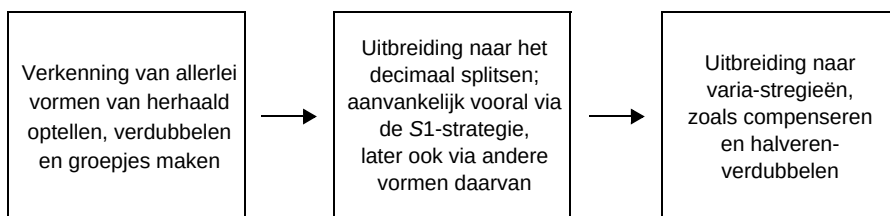
Een vierde aandachtspunt voor de leergang is verder nog dat het aanbeveling lijkt te verdienen om veel aandacht te besteden aan een zorgvuldige ontwikkeling van hulpsnotaties. De leerlingen kunnen hier zo mogelijk een actieve rol in spelen doordat ze gestimuleerd worden om zelf passende notatievormen te bedenken die aansluiten bij de eigen informele redeneringen en strategieën. Het lijkt van grote waarde dat een leerling in eerste instantie probeert om de eigen redenering zo goed mogelijk in een passende notatievorm vast te leggen, zodat ook ervaren wordt hoe zo'n notatie steun kan geven bij het uitwerken van een oplossing. Door deze notaties gezamenlijk uit te wisselen en te doordenken, kan bereikt worden dat ze een

basis vormen voor het doorzien van onderliggende wiskundige principes en eigenschappen zoals de nulregel. Daarmee kan de weg voor voortgaande verkorting en niveauverhoging steeds verder geplaveid worden, waarbij de gebruikte notaties van lieverlee steeds overzichtelijker en compacter worden. Dat kan gepaard gaan met een zekere homogenisering en uniformering.



figuur 8: vier voorbeelden van oplossingsstrategieën die zich tijdens een experimenteel onderwijsleerproces in een klas rond de opgave '26 dozen met 65 potten appelmoes' voordoen

Al met al leiden bovenstaande overwegingen tot de opzet van een leergang voor het domein van het meercijferige vermenigvuldigen waarbij in een eerste fase aansluiting wordt gezocht bij de eigen informele strategieën van leerlingen in de sfeer van herhaald optellen, verdubbelen en groepjes maken, en waarbij deze strategieën in de tweede fase uitgebouwd worden tot efficiënte notatieondersteunde hoofdrekenstrategieën in de sfeer van het decimaal splitsen. De strategie waarbij alleen het eerste getal gesplitst wordt, de S1-strategie, kan daarbij een tijdlang als een soort veilige basisstrategie fungeren. Pas als deze strategie voldoende beheerst wordt, kan een verdere verbreding richting andere vormen van decimaal splitsen plaatsvinden, en richting varia-strategieën. Gelet op deze centrale rol voor de S1-strategie, lijkt het aan te bevelen om als modelmatige ondersteuning in eerste instantie voor het groepjesmodel te kiezen. Naderhand kan ook het rechthoekmodel een rol spelen (fig.9).

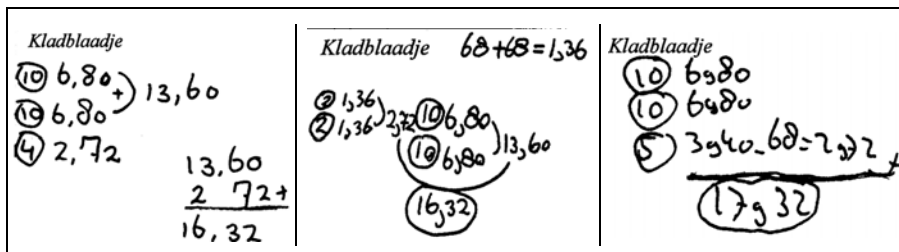


figuur 9: schematisch overzicht van de leerlijn

6 praktijkervaringen

In een uitgebreid onderwijsexperiment werd het hierboven in vogelvlucht weergegeven onderwijsleertraject op vijf scholen beproefd. Het valt buiten het bestek van dit artikel om uitgebreid stil te staan bij de resultaten van het experiment. Wel kan gesteld worden dat de resultaten in termen van bereikte goedscores aan het eind van de leergang, bestaande uit ruim vijftien lessen, zeer bevredigend waren met een gemiddelde goedscore van .84 (aanzienlijk hoger dus dan de resultaten bij de laatste PPON). Ook is vermeldenswaard dat zich juist op het gebied van het notatiegedrag van de leerlingen over het algemeen een voorspoedige ontwikkeling voordeed die in grote lijnen overeenkwam met wat de verwachtingen op dit gebied waren. Zo voltrok zich bij veel leerlingen een proces waarbij hulponotaties aanvankelijk nog tamelijk uitgebreid, omslachtig en divers waren terwijl deze gaandeweg steeds overzichtelijker en compacter werden. Met name het feit dat de leerlingen zich mede door de momenten van onderlinge uitwisseling

en doordenking goed bewust waren van de mogelijkheid om hun notaties zelf aan te passen en te verkorten, leek een belangrijke impuls in dit proces te geven. Hoewel dit niet specifiek onderzocht werd, lijken veel notaties ook duidelijk gezien te kunnen worden als een afspiegeling van toegenomen inzicht in de gehanteerde strategieën en de daarbij gebruikte wiskundige eigenschappen (fig.10).



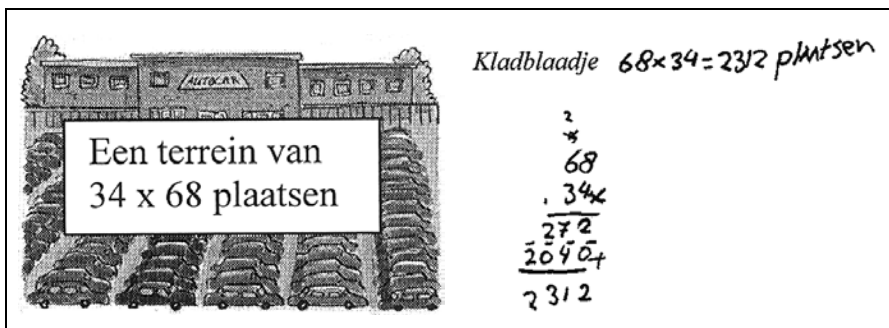
figuur 10: drie voorbeelden van notatieondersteunde oplossingswijzen bij een opgave rond 24 repen van 68 cent, afkomstig uit een toets die halverwege de experimentele leergang werd afgenomen

Er bleken echter ook bepaalde verwachtingen te zijn die niet helemaal goed uitkwamen. Dit geldt bijvoorbeeld voor het doorzien van de nulregel, dat voor een aantal leerlingen meer voeten in de aarde bleek te hebben dan van tevoren was ingeschat. Weliswaar waren er in het eerste gedeelte van de leergang enkele activiteiten opgenomen die gericht waren op een bewustmaking van deze regel, maar deze bleken niet toereikend om alle leerlingen de regel grondig te doen doorzien. Het kwam erop neer dat ongeveer halverwege de leergang voor sommige leerlingen de nulregel niet meer dan een soort ervaringsgegeven was waarop men niet durfde te vertrouwen om dit zonder meer in te zetten in allerlei situaties rond vermenigvuldigen.

Daarnaast bleek ook de hierboven reeds genoemde strategie van het 'verkeerd splitsen' (de vs-strategie) waarbij een opgave als 24×68 wordt uitgerekend via 20×60 en 4×8 (en varianten daarop), langduriger en hardnekkiger op te treden dan was verwacht. Kennelijk lukte het de betreffende leerlingen niet voldoende om te doorzien dat deze strategie, die ook in sommige buitenlandse onderzoeken wordt gemeld (Murray e.a., 1994), per definitie onjuist is. Een gebrek aan inzicht in de distributieve eigenschap (oftewel de verdeel-eigenschap) leek aan het gebruik van deze vs-strategie ten grondslag te liggen.

Een en ander leidde tot enkele tussentijdse bijstellingen in de experimentele leergang waardoor de genoemde zaken in het tweede deel van het onderwijsleertraject beter gingen functioneren. Uiteindelijk bleken vrijwel alle leerlingen grondig vertrouwd gemaakt te kunnen worden met het gebruik van efficiënte rekenstrategieën in de sfeer van het gestileerde hoofd-

rekenen, waarbij ze tot op zekere hoogte hun eigen, goed begrepen notaties bleven gebruiken. Wel deden zich ook aan het einde van het traject verschillen in oplossingsniveau voor, maar deze vormden geen beletsel om tamelijk efficiënt en effectief tot een oplossing te komen. Een klein deel van de leerlingen schakelde in dit laatste deel van het onderwijsleertraject overigens uit zichzelf over op de standaardprocedure van het cijferen (fig.11). Deze procedure bleek veelal thuis te zijn opgepikt. Er zijn echter geen aanwijzingen dat leerlingen die deze cijferprocedure gingen hanteren, tot betere resultaten kwamen dan de overgrote meerderheid der leerlingen die een strategie in de sfeer van het gestileerde hoofdrekenen bleef gebruiken.



figuur 11: voorbeeld van een leerling die aan het eind van de leergang de standaardprocedure van het cijferen gebruikt

7 besluit: wel of niet overstappen naar de cijferprocedure?

Nu zijn er wel degelijk argumenten om de leerlingen toch de overstap naar de cijferprocedure te laten maken. Immers, deze procedure is toch nog weer wat beknopter dan de genoemde notatieondersteunde hoofdrekenstrategieën. Zeker als de getallen steeds groter worden (87×94 , 348×67), werkt dat efficiënter. En als de cijferprocedure als sluitstuk van de leergang rond het meercijferige vermenigvuldigen wordt geïntroduceerd en ingeëfend, dan kan dat zeker voor de betere leerlingen een waardevolle verdieping van het leerproces met zich meebrengen. Daar komt nog bij dat het leren cijferen meer in het algemeen zo diep in de West-Europese onderwijs traditie verankerd ligt, dat het niet lijkt aan te bevelen om dit domein zonder pardon geheel en al overboord te gooien.

Aan de andere kant is de maatschappelijke relevantie van het goed en snel kunnen cijferen sterk gedaald. Vrijwel alle rekenhandelingen met wat ingewikkeldere getallen worden in onze maatschappij tegenwoordig op de re-

kenmachine uitgevoerd, en ook in het voortgezet onderwijs is de machine in hoge mate gemeengoed geworden. Daar komt nog bij dat een leergang waarin de nadruk ligt op het inzichtelijk verwerven van notatieondersteunde hoofdrekenstrategieën, in zoverre grote voordelen heeft dat daarmee de kennis van de leerlingen ten aanzien van fundamentele zaken zoals het inzichtelijk leren gebruiken van de S1-strategie en het leren doorzien van de nulregel en de distributieve eigenschap, sterk gestimuleerd wordt. Bovendien lijkt het gebruik van zulke strategieën in zoverre ook een belangrijke functie te kunnen hebben dat het gevoel voor de orde van grootte van uitkomsten en het leren gebruiken van handige schatstrategieën er krachtig door bevorderd lijkt te worden. Ook het verstandig omgaan met de rekenmachine kan zodoende beter voorbereid worden.

Al met al pleiten deze overwegingen voor een opzet van de leergang rond het meercijferige vermenigvuldigen waarbij de basis wordt gevormd door een kernleergang waarin het gestileerde hoofdrekenen centraal staat zoals dat in het bovenstaande beknopt is beschreven. Deze leergang kan ertoe leiden dat alle leerlingen grondig vertrouwd raken met het gebruik van de genoemde notatieondersteunde rekenstrategieën, en dus het door de Expertgroep doorlopende leerlijnen geformuleerde F1-niveau (het fundamentele niveau einde basisschool) zonder problemen halen. In aanvulling op deze kernleergang zou in het curriculum een differentieel leertraject opgenomen kunnen worden dat aansluit op de genoemde kernleergang en dat zich richt op het verwerven van de aloude cijferprocedure. Daarmee zou voor een deel van de leerlingen ook het S1-niveau (het streefniveau einde basisschool) gerealiseerd kunnen worden.

noot

- 1 Het proefschrift, resultaat van genoemde onderzoek, is inmiddels verkrijgbaar bij het Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education en bij de SLO (Nationaal Expertisecentrum Leerplanontwikkeling).

literatuur

- Ambrose, R., J.M. Baek & T.P. Carpenter (2003). Children's Invention of Multidigit Multiplication and Division Algorithms. In: Baroody, A.J. & A. Dowker (eds.). *The Development of Arithmetic Concepts and Skills*, Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 305-335.
- Buijs, K. (2008). *Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen*. Utrecht: FIsme (proefschrift).
- Craats, J. van de (2007). Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen. *Nieuw Archief voor de Wiskunde*, 5/8(2), 132-136.
- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008). *Over de drempels met taal en rekenen* (drie rapporten). Enschede: Expertgroep Doorlopende leerlijnen taal en reken..

- Janssen, J., F. van der Schoot & B. Hemker (2005). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4*. Arnhem: Cito.
- Murray, H., A. Olivier & P. Human (1994). Fifth graders multi-digit multiplication and division strategies after five years' problem-centered learning. *Proceedings of the Eighteenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 399-406.
- Putten, C.M. van & M. Hickendorff (2006). Strategieën van leerlingen bij het beantwoorden van deelopgaven in de periodieke peilingen aan het eind van de basisschool van 2004 en 1997. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek ontwikkeling, praktijk*, 25(2), 16-25.
- Treffers, A. (2007). De kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk* 26(4), 11-18.

Schets van een leerlijn

- vermenigvuldigen en delen voor kinderen van niveau 1F -

S. Huitema
uitgeverij Malmberg

1 inleiding

Als mij een jaar of zes geleden de vraag was gesteld wat doen we met het cijferen anno 2010, dan had ik gezegd: cijferen doen we dan niet meer. Dat is geweest, daar hebben we dan (allang) de zakrekenmachine of het mobieltje voor. Steek je energie maar in andere zaken, zoals schatten en toepassingen.

Maar mijn ervaringen met de begeleiding van een school voor speciaal onderwijs en een grote vmbo-school hebben mijn mening toch wat genuanceerd. Op deze scholen kreeg ik veel te maken met kinderen van tien tot veertien jaar bij wie het rekenproces toch niet zo gemakkelijk verliep. En bij wie ik tegelijkertijd het idee kreeg 'dat er meer in zat'. Uit mijn ervaringen met deze kinderen, springen er wat mij betreft een aantal dingen uit. In dit kader wil ik er vier noemen:

- onvoldoende beheersing van de basale vaardigheden (bij hoofdrekenen én cijferen);
- veel van deze kinderen zijn op zoek naar vastigheid, vaste oplossingsmanieren;
- veel van deze kinderen proberen zo lang mogelijk alles uit het hoofd te doen (iets op papier uitrekenen lijkt wel een teken van zwakte);
- Op het vmbo wordt alles al heel snel met de zakrekenmachine uitgerekend. Is dat alleen maar omdat het lekker handig is of komt dat ook door onvoldoende vaardigheid?

Deze ervaringen hebben mijn overtuiging dat cijferen z'n tijd heeft gehad aan het wankelen gebracht. Er is een groep kinderen dat aan het eind van de basisschool en in het vmbo het rekenen tot 1000 nog onvoldoende beheerst. Is het cijferen, naast heel basaal hoofdrekenen, dan misschien een mooie aanvulling op hun handelingsrepertoire? Ik denk het wel. Je kunt met de combinatie basaal hoofdrekenen en cijferen tegemoet komen aan een aantal van de genoemde problemen:

- vaste procedures: het cijferen kent vaste oplossingsmanieren;

- rekenen op papier: cijferen doe je op papier en dat geldt voor alle kinderen;
- de bewerkingen tot 1000 zijn dan toch nog voor alle kinderen haalbaar.

2 vaste oplossingsmanieren

Nogal wat kinderen in het basisonderwijs hebben baat bij (min of meer) vaste oplossingsmanieren. Die worden ondertussen in de meeste methoden ook wel aangegeven voor deze categorie kinderen, maar toch komt dat blijkbaar niet altijd tot zijn recht. Veel handig-reken-opgaven zijn niet zo besteed aan deze kinderen. Een sobere hoofdrekenlijn, waarin de nadruk ligt op die dingen die echt van belang zijn, zou voor deze kinderen bevrijdend kunnen werken. En als aanvulling daarop cijferen met niet al te grote getallen. Het voordeel van het cijferen is dat de oplossingsmanieren eenduidig zijn. En als deze dan ook nog aansluiten bij de oplossingsmanieren die bij het hoofdrekenen worden gebruikt, is er sprake van een echt doorgaande lijn.

3 cijferen doe je op papier

Ondanks dat alle methoden het gebruik van een kladblaadje of iets dergelijks aanbevelen, heerst er bij veel kinderen toch het idee dat je pas echt kunt rekenen als je het zoveel mogelijk uit je hoofd doet. Veel rekenzwakke kinderen moet je bijna dwingen iets op papier te zetten, want de andere kinderen doen dat ook niet. Bij het cijferen speelt dat probleem niet, alle kinderen rekenen op papier. Meer algemeen: Er moet voor alle kinderen een sfeer komen dat rekenen op papier prima is, ook bij toetsen.

4 bewerkingen tot 1000

Voor een aantal kinderen blijft het vlot optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen tot 1000 tot in de bovenbouw problematisch. Naast de heel basale vaardigheden, zoals het optellen en aftrekken tot en met 100 en de tafels van vermenigvuldiging, kan cijferen dan een prima aanvulling zijn. Het basale rekenen tot 1000 wordt dan voor een bepaalde groep kinderen alsnog haalbaar. En ze hoeven niet alles op de zakrekenmachine uit te rekenen, ze kunnen het ook vlot op papier.

5 leergangen voor kinderen van niveau 1 fundamentele kwaliteit

Voor de kinderen van niveau 1 fundamentele kwaliteit wil ik hieronder een voorstel doen voor een leergang vermenigvuldigen en delen. Door te kiezen voor een sobere, vrij strak opgezette leergang valt er voor deze groep kinderen nog heel wat leerwinst te behalen.

Schets van een leergang vermenigvuldigen

Voor kinderen van niveau 1 fundamentele kwaliteit

- Basale (hoofdreken)vaardigheden, de harde kern:
 - tafels van vermenigvuldiging tot en met 10;
 - 3×40 ; 40×3 ; 3×400 ; 400×3 ;
 - schatten: 3×395 is iets minder dan 1200 en $3 \times € 3,95$ is iets minder dan € 12,-;
 - 6×36 en 6×96 splitsend uitrekenen (deeltappen worden op een 'kladblaadje' genoteerd):

$ \begin{array}{c} 6 \times 46 = 240 + 36 = 276 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 40 \qquad 6 \end{array} $	$ \begin{array}{c} 6 \times 96 = 540 + 36 = 576 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 90 \qquad 6 \end{array} $
---	---

Door te kiezen voor splitsend rekenen kunnen alle vermenigvuldigingen op dezelfde manier worden opgelost. Zo kan tegemoet worden gekomen aan de 'vraag' van deze groep kinderen naar vaste oplossingsmanieren.

- Kolomsgewijs vermenigvuldigen (als logisch vervolg op het splitsend rekenen). In eerste instantie beperken tot 6×56 en 6×256 . Ook in geldsituaties ($6 \times € 2,56$).

$ \begin{array}{r} 6 \times 56 = \\ 6 \times 50 = 300 \\ 6 \times 6 = \underline{36} \\ 336 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 6 \times 256 = \\ 6 \times 200 = 1200 \\ 6 \times 50 = 300 \\ 6 \times 6 = \underline{ 36} \\ 1536 \end{array} $
--	--

De voordelen van kolomsgewijs vermenigvuldigen zijn:

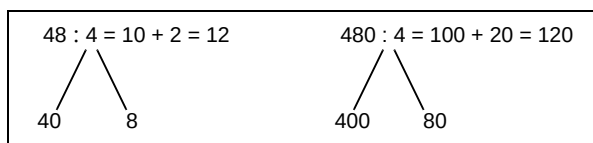
- de tafels van vermenigvuldiging worden blijvend geoefend;
 - veel aandacht voor het rekenen met nullen;
 - de werkwijze sluit naadloos aan bij het splitsend (hoofd)rekenen;
 - het basale optellen wordt geoefend.
- Groeimogelijkheid
 Voor kinderen uit deze groep die meer aankunnen: ook vermenigvuldigingen van het type 24×56 . De kinderen moeten dan 4×56 verkort

kunnen uitrekenen en dat is voor nogal wat kinderen uit deze groep lastig en zal langdurig en intensief ingeoeft moeten worden.

Schets van een leerlijn delen

Voor kinderen van niveau 1 fundamentele kwaliteit

- Basale (hoofdreken)vaardigheden, de harde kern:
 - tafels van vermenigvuldiging tot en met 10;
 - deeltafels zonder en met rest;
 - $240 : 3$; $240 : 30$; $2400 : 3$; $2400 : 30$; $2400 : 300$
 - schatten: $395 : 4 =$ ongeveer;
 - delingen als $48 : 4$ en $480 : 4$ splitsend uitrekenen (deeltappen worden op een ‘kladblaadje’ genoteerd):



- Herhaald aftrekken: deeltallen tot 1000 en delers van één cijfer, bijvoorbeeld $837 : 6$. Zo snel mogelijk komen tot de meest verkorte werkwijze. Voordelen van herhaald aftrekken zijn:
 - de tafels van vermenigvuldiging worden blijvend geoefend;
 - veel aandacht voor het rekenen met nullen;
 - schatten krijgt de nodige aandacht;
 - onmogelijke uitkomsten zijn vrijwel uitgesloten (er kunnen natuurlijk nog wel fouten worden gemaakt);
 - het basale aftrekken wordt geoefend.
- Beperking
 Voor de heel zwakke rekenaars is het waarschijnlijk verstandig het herhaald aftrekken (en ook het traditionele cijferen) maar helemaal te laten zitten. In de leergang ‘Zakrekenmachine’ moet er dan wel specifieke aandacht worden besteed aan de interpretatie van de rest bij een deling en het afronden van de uitkomsten.

6 besluit

Door uit te gaan van een sobere, strak uitgelijnde hoofdrekenlijn is er meer tijd voor herhaling en regelmatige inoefening. (Of om met Jolles te spreken: ‘Snoeien en mesten’)¹.

Een combinatie van basaal hoofdrekenen en ‘cijferen’ is een prima basis

voor kinderen van niveau 1, fundamentele kwaliteit. Deze twee deelleergangen sluiten vrijwel naadloos op elkaar aan en vullen elkaar heel mooi aan. De kinderen krijgen op die manier een groter handelingsrepertoire en worden zo minder afhankelijk van de zakrekenmachine. Bij grotere getallen en kommagetallen wordt 'natuurlijk' gebruik gemaakt van de zakrekenmachine. Op papier rekenen moet in alle situaties 'gewoon' worden. Dus ook in toetssituaties.

noot

- 1 'Over Brein & Leren en mogelijke bijdragen aan het reken-wiskundeonderwijs'. Lezing gehouden op de 26^{ste} Panama-conferentie.
Zie ook: www.hersenenenleren.nl/nieuws.php

Vijanden worden vrienden

- een beknopte leergang cijferend vermenigvuldigen -

W. Uittenbogaard
Flsme, Universiteit Utrecht

1 inleiding

Als kind van negen heb ik cijferend vermenigvuldigen geleerd van meester Prais. In de vierde klas. Hij was, zoals ik hem mij nu herinner, een 'echte' meester. Met veel bewondering denk ik aan hem terug. Hij kon ook zó mooi vertellen. Dat hij later ook met juf Oosterwelder ging trouwen (onze juf van klas één) vonden we schandelijk. Handen af van juf Oosterwelder.

Bij de introductie van het cijferend vermenigvuldigen zei hij: 'Vandaag komt het grote werk'. Hij deed voor en wij deden na. Ik denk dat hij niks uitlegde. Niet meer dan wat je moest doen. En we deden het na. Ik herinner me nog dat ik mijn vinger opstak en zei, dat er bij mij geen eind aan kwam. Ik ging namelijk de tussenantwoorden van een vermenigvuldiging weer vermenigvuldigen (fig.1). Nee, optellen van de tussenantwoorden volstond. Ik herinner mij dat ik dacht: is dat nou alles.

The image shows two handwritten multiplication problems side-by-side. The left problem is 359×27 . It shows the first multiplication $359 \times 7 = 2513$ and the second $359 \times 20 = 7180$. Below these, there is a plus sign and the number 9693, which is the sum of 2513 and 7180. The right problem is also 359×27 . It shows the same two intermediate products. Below them, there is a plus sign and the number 201040, which is the sum of 2513 and 7180. Below that, there is another plus sign and the number 251300, which is the sum of 201040 and 2513. Finally, at the bottom, there is a plus sign and the number 17591000, which is the sum of 251300 and 201040. This illustrates the process of repeatedly multiplying the intermediate results by the next digit of the multiplier.

figuur 1

Later in klas vijf: staartdelen en verder oefenen. Snel en foutloos, daar ging het om. Ik heb de juf van de vijfde of de meester van de zesde nog eens gevraagd waarom je dat allemaal moest leren. 'Voor later', was hun antwoord.

In de zesde klas begon de meester heel vaak op maandagmorgen met een willekeurig getal van negen cijfers met als tiende cijfer een nul en daaron-

der, rechts uitgelijnd hetzelfde willekeurige getal. Opdracht: tien keer aftrekken. Daar moest natuurlijk nul uitkomen. Ik herinner mij dat ik al nadacht over manieren om dat slim aan te pakken. Beginnen aan het eind, regels tellen en de nul vast opschrijven. Ook zorgen dat het bij vijf keer nog klopte (fig.2). De meester had hiervoor immers geen antwoordenboekje en ook geen rekenmachine (anno 1959).

$$\begin{array}{r}
 7934561820 \\
 \underline{793456182} \quad - \quad 1^x \\
 7141105638 \\
 \underline{793456182} \quad - \quad 2^x \\
 \vdots \\
 \underline{793456182} \quad - \quad 5^x \\
 3967280905 \\
 \vdots \\
 \underline{793456182} \quad - \quad 9^x \\
 \underline{793456182} \quad - \quad 10^x \\
 0
 \end{array}$$

figuur 2

Zo heb ik al die algoritmen geleerd. Door te oefenen. En ik heb ze later ook begrepen. Sommige voorstanders van het inzichtloos leren van algoritmen zeggen ook dat het inzicht gaandeweg komt. Dat gold voor mij. Maar zeker niet voor een groot deel van mijn klasgenoten. Niet dat ik mijn oud-klasgenoten daarop bevroegd heb. Ik ben ze allemaal uit het oog verloren. Maar ik weet het door al mijn ervaringen in het werken met kinderen in de afgelopen 38 jaar. Ook niet door mezelf als maatstaf te nemen: ik heb er later ook in doorgeleerd.

over later

Vergeet niet dat de wereld tot in de jaren tachtig van de vorige eeuw nog van pen en papier was. Winkels, bedrijven, overheid en scholen bedienden zich van administrateurs die goed met pen en papier konden rekenen. Hieronder als illustratie mijn loonstrookje, opgemaakt door de administrateur van de school (met potlood) en overgetypt door de administratie (fig.3). In de jaren tachtig deden computers hun intrede en kwamen ook de eerste rekenmachines beschikbaar (de TI-52 kostte bij introductie ongeveer duizend gulden). Zo'n machientje kost nu niet meer dan tien euro.

afdeling				van										t/m		19				lijst nr.	
werk maand nr.	dag	aanwezig nr.	over- vrij	over- vrij	over- vrij	over- vrij	over- vrij	over- vrij	over- vrij	over- vrij	over- vrij	over- vrij	over- vrij	over- vrij	over- vrij	over- vrij	over- vrij	over- vrij	over- vrij	over- vrij	over- vrij
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1001					658 00	654 52	71 40	71 36												395 97	Uittenbogaard
V.T.					394 80	394 80	48 56													394 80	Uittenbogaard

figuur 3: loonstrookje mei 1971 in guldens, met vakantietoeslag, samen bijna duizend guldens

over algoritmen

Wat is een algoritme? Voor mij een recept, zoals je een cake bakt. Het is dus niet een regel. Zoals $3 + 4 = 4 + 3$. Ook geen eigenschap, zoals $24 \times 25 = 12 \times 50$. Hoewel het onderscheid in regels en eigenschappen soms ook arbitrair is. Maar een algoritme is een opeenvolging van regels en voorschriften in een vaste volgorde. In Nederland noemen we het gebruik van algoritmen ook wel cijferen, als het om de hoofdbewerkingen gaat. Dat komt omdat onze traditionele algoritmen gebaseerd zijn op een aanpak van cijfer voor cijfer. Je kijkt niet naar een getal als geheel maar ontleedt dat getal in cijfers (zie ook figuur 1).

Toch zou ik het kolomsgewijs rekenen, zoals dat in alle reken-wiskunde-methoden vorm heeft gekregen ook cijferen willen noemen. Niet omdat daar gekozen wordt voor een aanpak van cijfer voor cijfer. Immers, daar wordt niet gekeken naar de waarde van cijfers, maar naar het hele getal. Maar omdat daar ook sprake is van een recept. Eerst dit, dan dat. Wel met de mogelijkheid tot allerlei verkortingen. En met de meest ultieme verkortingen is het weer een algoritme. Misschien dat het ook beter is om het woord cijferen, dat lekker kort is, ook maar net als in de rest van de wereld te vervangen door algoritmische aanpak, in tegenstelling tot wat we handig rekenen noemen of hoofdrekenen (fig.4).

Handwritten mathematical work showing the multiplication of 359 by 27, broken down into steps:

$$\begin{array}{r}
 359 \\
 \times 27 \\
 \hline
 6000 \quad \times \\
 1000 \\
 180 \\
 2100 \\
 380 \\
 \hline
 9000 \quad + \\
 500 \\
 190 \\
 \hline
 9690 \quad +
 \end{array}$$

On the right side, the multiplication is broken down into its components:

$$\begin{array}{l}
 20 \times 300 \\
 20 \times 50 \\
 20 \times 9 \\
 7 \times 300 \\
 7 \times 50 \\
 7 \times 9
 \end{array}$$

figuur 4

later ...

Is er enige aanleiding om kinderen van nu cijferalgoritmen te leren? Mijn antwoord is nee! Er is voor al die algoritmen geen later. Er is geen enkel beroep waarvoor je die algoritmen foutloos en snel moet beheersen. Voorlopig wel het beroep van leerkracht basisonderwijs en voortgezet onderwijs. Kennis van cultureel erfgoed. En natuurlijk studieobject, ook voor basisschoolleerlingen. Hoe deden mensen dat vroeger? Buitengewoon interessant natuurlijk. Egyptenaren, Grieken, Romeinen, Babyloniers en onze voorgangers in de zeventiende eeuw.

2 wat blijft er dan over en hoe moet het dan wel?

Hieronder een voorbeeld in tien stappen voor cijferend vermenigvuldigen. Min of meer als doel voor alle kinderen. Zouden alle kinderen zover kunnen komen? Ik denk van niet. Zover als kan, met inzicht. En anders maar met een rekenmachientje. Alleen vermenigvuldigen? Nee, dit betoog geldt voor de vier hoofdbewerkingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Ik beperk me hier tot het cijferend vermenigvuldigen. Ik zou voor de andere hoofdbewerkingen eenzelfde betoog kunnen opzetten.

Een klein lijstje met kale opgaven:

$$\begin{array}{l} 17 \times 237 \\ 10 \times 237 \\ 83 \times 346 \\ 100 \times 346 \\ 1000 \times 129 \end{array}$$

Alle vermenigvuldigingen met getallen van meer dan één cijfer lijken vijanden.

Zijn er misschien ook vrienden bij?

Ja, de $10 \times$, de $100 \times$ en de $1000 \times$.

En hoe je dat dan?

Door de nullen te verhuizen.

Dat is nog niet zo eenvoudig in te zien. Waarom is 10×237 hetzelfde als 1×2370 ? De geldcontext kan hier heel goed helpen. 10×7 : 10 briefjes van 7 is hetzelfde als 7 briefjes van 10 en dat is dan weer 1 briefje van 70. En werkt dat dan altijd? Ja, dat is ook een kwestie van oefenen en van uitproberen. Ook dit inzicht groeit langzaam. Al met al leidt dat tot een strategie:

stap 1: vrienden van 10

Nog een klein lijstje:

17×239	vijand
10×169	vriend van 10
27×153	vijand
20×60	?
40×70	?

Zijn er misschien nog nieuwe vrienden bij?

Ja, die 20×60 en die 40×70 .

En hoe doe je dat dan?

$$20 \times 60 = 2 \times 600 = 1200.$$

Ook hier kan de geldcontext je weer geweldig helpen. Ook hier kun je weer van 20 stapeltjes van 60 er 2 van 600 maken of 6 van 200.

Je kunt 2×6 doen plus twee nullen.

En werkt dat altijd? Ja, dat werkt altijd. En waarom dat zo werkt, dat is nog niet zo eenvoudig in te zien.

Mogelijk dat ook kale opgaven als $10 \times 2 \times 6 \times 10 = 2 \times 6 \times 10 \times 10 = 12 \times 100 = 1200$ kunnen helpen.

Een nieuwe strategie:

stap 2: tafels met nullen

Weer een lijstje:

27×473	vijand
100×73	vriend van 10

9×34	tafels met nullen
11×27	?
101×27	?

Zijn er nieuwe vrienden bij?

Misschien die 9×34 en die 11×27 .

Hoe doe je dat dan? Je herinnert je misschien de één keer meer en de één keer minder strategie bij het aanleren van de tafels.

$9 \times$ en $11 \times$ zijn allebei dicht bij $10 \times$.

$9 \times$ is één keer minder en $11 \times$ één keer meer: $340 - 34$ en $270 + 27$.

En die kunnen mét m'n hoofd. Dat hoeft ik echt niet onder elkaar te zetten.

Nog een strategie:

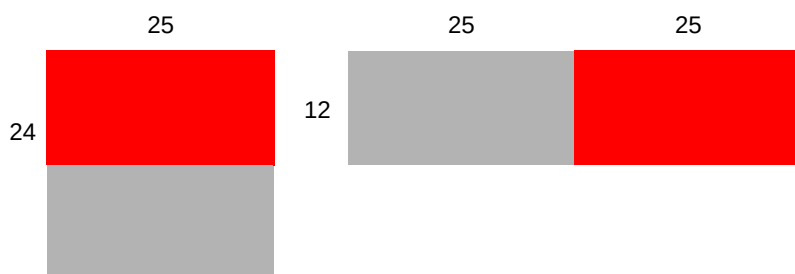
stap 3: bijna vrienden van 10

Eerst maar eens een poosje oefenen op deze drie strategieën. Herken ik ze ook allemaal?

100×69
 11×54
 37×83
 50×90

Goed naar de getallen kijken en dan je strategie bepalen.

Tafelkennis verbeteren en onderhouden!



figuur 5

Maar weer eens een lijstje:

24×25	?
12×35	?
14×55	?

Daar lijkt geen vriend bij, of toch? Hier kun je 12 rijen van 50 maken en dan ook nog eens 6 rijen van 100, dan wordt het een vriend van 10.

Wanneer werkt het en wanneer kun je dat gebruiken? Het komt door de 24 die even is en de 5 in 25 (fig.5).

Weer een nieuwe strategie:

stap 4: halveren en verdubbelen

Na vier stappen hebben we nu een mooi stelletje vrienden:

$$\begin{array}{l} 10 \times 37 \\ 9 \times 47 \\ 11 \times 67 \\ 200 \times 60 \\ 16 \times 35 \\ 1001 \times 123 \end{array}$$

Als je goed naar de getallen kijkt, kun je de bijpassende strategie kiezen en zo de uitkomst bepalen. Je zult dit met kinderen moeten oefenen en beoefenen. Dat gaat allemaal niet vanzelf. Posters met de strategieën in de klas en korte oefeningen waarbij je alleen de strategie hoeft te kiezen helpen mijn leerlingen buitengewoon.

$$7 \times 234$$

Wat te doen met deze vijand?

Is er iets aan te doen?

Ja hoor,

$$\begin{array}{ll} 7 \times 200 & \text{tafels met nullen} \\ 7 \times 30 & \text{tafels met nullen} \\ 7 \times 4 & \text{tafel} \end{array}$$

en dan optellen: $1400 + 210 + 28$, niet onder elkaar, maar mét je hoofd: $1610 + 28 = 1638$ (dit kan met rijgen heel eenvoudig, of anders handig splitsen: $28 + 10 + 1600$).

Ik zou niet verder willen gaan dan het vermenigvuldigen van ééncijferige getallen met twee- of driecijferige getallen.¹

Stap 5: goede kennissen

intermezzo

Met deze vijf stappen zouden we ons al heel aardig kunnen redden in het land van vermenigvuldigingen. Misschien niet alle kinderen van de basisschool, maar wel het overgrote deel. Zwakke rekenaars kunnen altijd terecht bij stap 9. Met een groot deel van de leerlingen kunnen nog heel veel stappen gezet worden. En met goede leerlingen nog veel meer. De volgende stappen laten daar iets van zien.

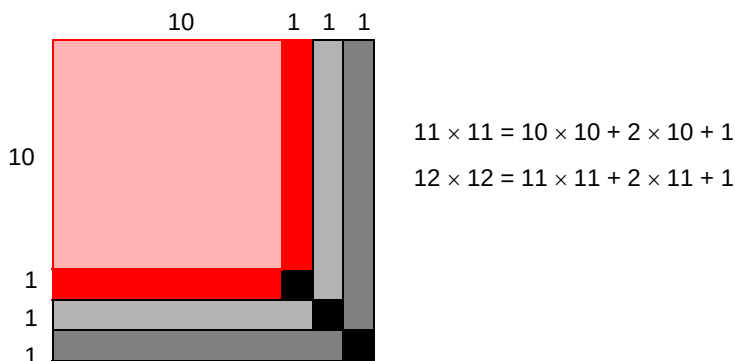
Zijn er nog meer vrienden?

Wat te denken van het volgende rijtje:

$$\begin{array}{l} 10 \times 10 \\ 11 \times 11 \\ 13 \times 13 \end{array}$$

.....
 20×20

Een onderzoek waard (fig.6).

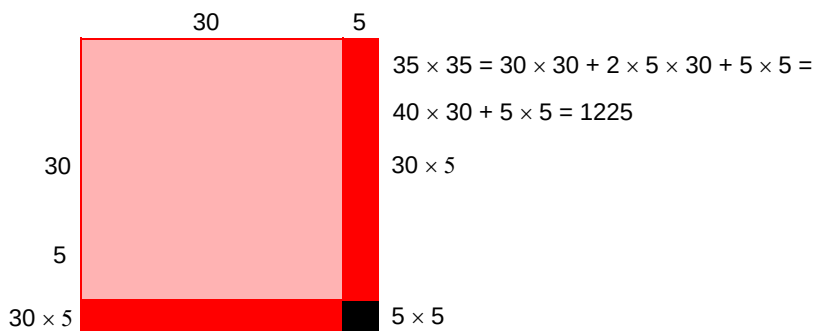


figuur 6

Probeer de antwoorden te memoriseren en ook het plaatje te begrijpen.
 31×31 zijn 30 rijtjes van 30 en dan nog een rijtje en een kolom van 30 en dan nog één extra: $900 + 30 + 30 + 1 = 961$. Dus:

stap 6: kwadraten zijn ook vrienden

En wat te denken van deze?



figuur 7

5 x 5
 15 x 15
 25 x 25
 35 x 35

 75 x 75
 (fig.7)

Niet als algoritme, maar als onderwerp van onderzoek. 75×75 ; 7×8 en dan 25 erachter: 5625. Hoe kan dat?

Patronen zoeken, regels vinden, begrijpen en toepassen:

stap 7: 'goeie' vrienden

De één heeft meer vrienden dan de ander.

Nog maar eens een lijstje:

$$\begin{aligned} 24 \times 12,5 &= 12 \times 25 = 6 \times 50 = 300 \\ 125 \times 840 &= 250 \times 420 = 500 \times 210 = 1000 \times 105 = 105.000 \\ 3 \times 210 &= 9 \times 70 = 630 \\ 3 \times 37 &= 111, \text{ dan weet je ook } 6 \times 37 \text{ en ook } 27 \times 37 = 999 \\ 7 \times 11 \times 13 &= 1001, \text{ een raar weetje} \\ 54 \times 56 &= 50 \times 60 + 4 \times 6; \text{ klopt het? altijd?} \end{aligned}$$

stap 8: verre vrienden

En de resterende vijanden?

$$\begin{array}{ll} 23 \times 347 & ? \\ 34 \times 273 & \end{array}$$

Met een rekenmachientje! En daar in het onderwijs genoeg tijd voor inruimen! Leerlingen vertrouwd maken met het gebruik van een rekenmachine. Zowel met de rekenmachine op de desktop van een computer als met de rekenmachine in elke mobiele telefoon. Daar is nog het nodige werk voor vereist. Sommige machientjes kennen geen regels voor volgorde van bewerkingen, andere wel.

Laat leerlingen in contact komen met allerlei verschillende machientjes, misschien uitgaande van één eenvoudig standaardapparaat in het klaslokaal. Dat kan zowel een apparaatje zijn in 25-voud, als een overhead-rekenmachientje, als een machientje op een elektronisch schoolbord.

stap 9: rekenmachine wordt vriend

Als we een grotere plaats voor het rekenmachientje willen inruimen is het ook noodzakelijk om meer tijd aan schattend rekenen te besteden. Wat is er te zeggen van het antwoord van 78×659 ? Het is minder dan 80×700 . Dat is 56 met drie nullen. Dus minder dan 56.000. Waarom eigenlijk minder? Het laatste cijfer is een 2, die komt van 8×9 .

En zo natuurlijk ook met opgaven als: $56,4 \times 107,5$. Ook hier weer genoeg onderwijstijd besteden aan hoe je dat allemaal doet. Intoetsen is één. Een schatting maken van het antwoord is twee. 60×100 : 6000. Laatste cijfer een nul. Maar waar staat die nul dan? De rekenmachine helpt natuurlijk: $56,4 \times 107,5 = 6063$. En waar is die nul dan? Allemaal onderzoeksvragen voor leerlingen. Uitzoeken; met pen en papier en met een rekenmachientje.

stap 10: schatten van vrienden

3 nawoord

Hoe meer vrienden, hoe makkelijker! Als je een beetje thuis bent in deze vriendenkring is het kiezen van een strategie niet zo moeilijk. Zwakke rekenaars zouden zich met een paar vrienden al heel erg thuis voelen. Je hebt daar géén standaardprocedures of kolomsgewijs rekenen voor nodig. Duidelijk zou moeten zijn dat er veel nadruk gelegd zou moeten worden op goede tafelkennis. Dus géén tafels met een rekenmachine. Laat in de klas leerlingen eigen namen voor strategieën bedenken. De namen die ik hier gebruik zijn ook ontleend aan eigen vondsten van kinderen. Maak als leerkracht steeds lijstjes met kale gemengde opgaven en laat kinderen aan het woord over mogelijke strategieën. Laat kinderen ook hun aanpakken gezamenlijk uitproberen.

Dit stappenplan lijkt hier en daar misschien kaal. Probeer als leerkracht ook steeds opgaven van betekenisvolle contexten te voorzien. Verlies als leerkracht niet uw geduld en vlucht niet in een aanpak met traditionele algoritmen. Uw geduld wordt beloond. Gebruik een rekenmachine met verstand: de beste rekenmachine zit in je hoofd!

waarom zo?

Op basis van twee jaar werken met grade 5 van River East Elementary School in Manhattan, New York. Met dank aan de kinderen en Peter Markovitz, de leerkracht. Met warmte denk ik terug aan hun gretigheid en enthousiasme om week na week wat nieuws te ontdekken.

voor wie?

Voor álle kinderen van de basisschool. Ieder naar z'n vermogen: met meer of minder vrienden. Uiteindelijk hoeft je geen vijanden te hebben: de rekenmachine kan heel makkelijk een goede vriend worden.

door wie?

Willem Uittenbogaard, opleider leerkrachten basisonderwijs

noot

- 1 Als je kinderen toch vermenigvuldigen met meercijferige getallen zou willen leren kun je niet beter terecht dan in het recente proefschrift van K. Buijs (2008). *Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen*. Utrecht: Flsme.

Standaardprocedures in het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool

- Peiling op de 26^{ste} Panama-conferentie -

Marc van Zanten
Panama/FIsme, Universiteit Utrecht

1 inleiding

Rekenen-wiskunde op de basisschool is een veelomvattend vakgebied. Kinderen die leren rekenen, leren niet alleen procedures zonder fouten uit te voeren, maar ze leren ook te begrijpen wat ze doen en waarom ze dat zo doen. Veel aandacht wordt - terecht - besteed aan hoofdrekenen en het aanleren van efficiënte en handige manieren waarop je getallen naar je hand kan zetten. Minder aandacht is er de laatste jaren uitgegaan naar het leren routinematig rekenen met standaardprocedures. Met name over de laatste leerstappen naar een verkorte standaardprocedure op formeel niveau zijn aanduidingen uit literatuur en onderzoek niet eenduidig. Wat is precies de rol van standaardprocedures binnen het huidige reken-wiskundeonderwijs?

Op de 26^{ste} Panama-conferentie is hieromtrent een interactieve plenaire sessie georganiseerd onder de titel 'Standaardprocedures in het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool'. De sessie spitte zich toe op vermenigvuldigen als paradigmatisch voorbeeld. Doel van dit programmaonderdeel was gezamenlijk na te denken over welke opgaventypen kinderen via standaardprocedures moeten leren oplossen en op welke wijze het onderwijsleerproces hiertoe kan worden vormgegeven.

Een en ander werd nadrukkelijk gerelateerd aan de onderscheiden niveaus eind basisschool, zoals aangeduid in het rapport 'Over de drempels met taal en rekenen' van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008a). In dit rapport worden aan het einde van de basisschool twee niveaus onderscheiden: fundamentele kwaliteit niveau 1 (1F) en streefkwaliteit niveau 1 (1s). De Expertgroep heeft deze niveaus als volgt omschreven:

Het eerste referentieniveau heeft betrekking op het primair onderwijs. Wat we voorstellen aan basiskennis en basisvaardigheden voor taal en rekenen zouden alle leerlingen dienen te beheersen aan het einde van de basisschool. Voor een grote groep zal dat het geval zijn. Voor een deel van de basisschoolleerlingen kan de lat wat hoger liggen. We vinden dat wenselijk

vanuit het perspectief van het bieden van uitdaging aan deze leerlingen. We hebben daarvoor een streefkwiteit ingevoerd die deels het volgende referentieniveau overlapt. (2008a, pag.22)

Het aantal leerlingen dat de niveaus 1F en 1S voor rekenen zou moeten behalen is door de Expertgroep als volgt bepaald:

Het percentage leerlingen dat minimaal het referentieniveau 1F behaalt moet toenemen van 75% naar 85%. Het percentage leerlingen dat minimaal het referentieniveau 1S behaalt moet toenemen van 50% naar 65%. (aanbeveling 6.13, pag.50)

De percentages 75 procent (het percentage leerlingen dat nu referentieniveau 1F behaalt) en 50 procent (het percentage dat nu niveau 1S behaalt) zijn afgeleid van het meest recente PPON-onderzoek voor rekenen-wiskunde (Janssen e.a., 2005). In het rapport van de Expertgroep worden de referentieniveau concreet geduid aan de hand van voorbeeldopgaven uit dit PPON-onderzoek. De voorbeeldopgaven van referentieniveau 1F werden bij het laatste PPON-onderzoek door 25 procent van de leerlingen niet goed gemaakt en de voorbeeldopgaven van referentieniveau 1S werden door 50 procent van de leerlingen niet goed gemaakt (Expertgroep Doorlopende Leerlijnen, 2008a, pag.50). Omdat het rapport net de voorgaande dag op de conferentie is uitgereikt - waardoor waarschijnlijk nog maar weinigen van de precieze omschrijvingen kennis zouden hebben genomen - is bij aanvang van deze sessie niveau 1F omschreven als hetgeen vrijwel alle leerlingen zouden moeten kunnen en kennen, en niveau 1S als hetgeen wenselijk is om na te streven voor zoveel mogelijk leerlingen.

2 opbouw van de sessie

Na de inleiding, verzorgd door A. Treffers (FISME), gaven K. Buijs (SLO), S. Huitema (Uitgeverij Malmberg) en W. Uittenbogaard (FISME) elk hun visie omtrent cijferend leren vermenigvuldigen. In deze conferentiebundel zijn deze bijdragen in de voorgaande vier hoofdstukken nader uitgewerkt. Naar aanleiding van de presentaties werden verschillende stellingen aan het conferentiepubliek voorgelegd.

Opleider op pabo of ROC	92 (53%)
Schoolbegeleider, onderwijsadviseur	32 (18%)
Onderzoeker	12 (7%)
Ontwikkelaar, auteur, uitgever	21 (12%)
Leerkracht, functionaris zorgverbreding, IB	8 (5%)
Anders	9 (5%)

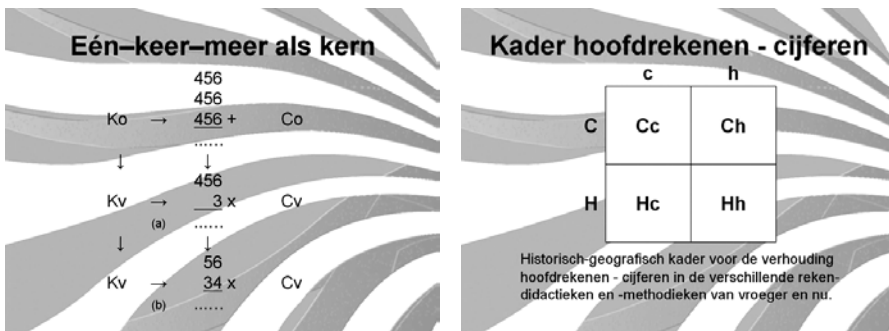
figuur 1

Met behulp van een zogenoemd *Interactive Voting System* werden de reacties van de aanwezige conferentiedeelnemers op de voorgelegde stellingen direct zichtbaar. Hierdoor ontstond direct een indruk van de opvattingen van de aanwezige inhoudsdeskundigen. Daarbij moet worden aangetekend dat soms onduidelijkheid optrad omtrent de gebruikte begrippen in de stellingen (hier wordt in paragraaf 8 nader op ingegaan). Van de conferentiedeelnemers deden er 174 mee aan de stemsessie. Deze waren als volgt verdeeld over de beroepsgroepen (fig.1). Personen die tot meerdere beroepsgroepen behoren werd gevraagd aan te geven wat zij hun hoofd-functie achtten.

3 inleiding vanuit historisch-didactisch perspectief

Treffers ging in de inleiding in op het historisch-didactisch perspectief van het leren van standaardprocedures en de verbinding daarbij tussen hoofd-rekenen en cijferen (zie voor de nadere uitwerking zijn artikel 'Het voorkomen van ongecijferdheid' op pagina 39 e.v.). Hij liet met voorbeelden uit Van Gelder (1964) zien dat het gebruik maken van de waarde van getallen in het onderwijsleerproces om te komen tot een verkorte cijferende aanpak (waarbij die waarde uiteindelijk geen rol meer speelt in het uitvoeren van de procedure), zoals dat plaatsvindt bij het tegenwoordige kolomsgewijs rekenen, ook in vroeger jaren al gebeurde.

Voor wat betreft het vermenigvuldigen stelt Treffers dat het vermenigvuldigen van een ééncijferig getal met een meercijferig getal, zoals 3×456 , de kern is die door alle basisschoolleerlingen cijferend moet kunnen worden opgelost. De cijferende oplossingsprocedure wordt opgebouwd vanuit het kolomsgewijs optellen, waarbij dus bij aanvang van de leergang de waarde van de getallen nog in beeld is. Het latere vermenigvuldigen van meercijferige met meercijferige getallen kan worden aangeleerd voortbouwend op de



figuur 2

verkorte cijfermatige aanpak die kinderen dan beheersen (fig.2).

Aansluitend op deze inleiding werd de mening van aanwezigen gepeild over dit ééncijferig maal meercijferig en meercijferig maal meercijferig vermenigvuldigen (fig.3). Een ruime meerderheid is van mening dat kinderen op niveau 1F ééncijferige maal meercijferige vermenigvuldigingen cijferend moeten kunnen oplossen. Wat minder aanwezigen - maar nog steeds een meerderheid - vinden dat dit eveneens geldt voor meercijferige maal meercijferige vermenigvuldigingen.

	Eens	Oneens
1 Opgaven van het type 3×456 moeten kinderen op niveau 1F cijferend kunnen berekenen.	86 %	14 %
2 Opgaven van het type 34×56 moeten kinderen op niveau 1F cijferend kunnen berekenen.	66 %	34 %

figuur 3

4 Bujs: pleidooi voor gestileerd hoofdrekenen

K. Bujs pleitte in zijn presentatie voor een leergang die sterk gebaseerd is op gestileerd hoofdrekenen (zie het artikel ‘Vermenigvuldigen met meercijferige getallen - een pleidooi voor een kernleergang gestileerd hoofdrekenen’ op pagina XX e.v.). Hij sluit daarmee aan op informele eigen aanpakken die kinderen hanteren, zoals verdubbelen, herhaald optellen, groepjes maken, het splitsen van het eerste getal van de vermenigvuldiging en compenseren. De onderscheiden strategieën verdeelt hij onder in drie typen: basaal (herhaald optellen, verdubbelen en groepjes maken), decimaal structurerend (via splitsen 1^o getal (S1-strat) - via splitsen beide getallen - via splitsen 2^o getal (S2-strat)) en handig/gevarieerd (compenseren, halveren-verdubbelen).

Drie typen strategieën:

- Handig/gevarieerd:**
 - Compenseren
 - Halveren-verdubbelen
- Decimaal structurerend:**
 - Via splitsen 1^o getal (S1-strat)
 - Via splitsen beide getallen
 - Via splitsen 2^o getal (S2-strat)
- Basaal:**
 - Herhaald optellen
 - Verdubbelen
 - Groepjes maken

Mogelijk onderwijsleertraject meercijferige vermenigvuldigen ('gestileerd hoofdrekenen')

- Systematische verkenning drie typen strategieën
- Accent op S1-strategie (en groepjesmodel) als veilige basisstrategie
- Ontwikkeling adequaat notatiegedrag (Van Putten & Hickendorff, 2006)
- Niveaueverhoging via toenemend inzicht in nulregel en verdeelingschap (rechthoekmodel)
- Kolomsgewijze procedure als einddoel

figuur 4

of van beide getallen), en handig en/of gevarieerd (compenseren en halveren-verdubbelen).

Een onderwijsleertraject voor het meercijferige vermenigvuldigen, aansluitend op gehanteerde informele aanpakken, kenmerkt zich volgens Buijs onder meer door een systematische verkenning van de drie typen strategieën en een accent op de strategie waarbij het eerste getal wordt gesplitst als veilige basisstrategie (fig.4). Buijs ziet de kolomsgewijze procedure als einddoel voor alle leerlingen (dus niveau 1F) en het cijferend vermenigvuldigen als differentieel doel voor leerlingen niveau 1S.

Naar aanleiding van het betoog van Buijs werden de aanwezigen vier stellingen voorgelegd, waarop als volgt werd gereageerd (figuur 5):

	Eens	Oneens
3 De verkenning van het meercijferige vermenigvuldigen kan een grote hoeveelheid rijke leerervaringen met zich meebrengen, en behoort daarom bij niveau 1F	86 %	14 %
4 Kennis omtrent het meercijferige vermenigvuldigen kan slechts gedijen indien deze wortelt in een goed ontwikkeld getalgevoel en indien deze hecht verbonden is met kennis omtrent basaal hoofdrekenen en schattend rekenen.	66 %	34 %
5 Een organisatorische opzet met elke week 2 dagen 'leerkrachtgebonden' lessen en 3 dagen 'leerkrachtvrije' lessen werkt meer in het algemeen belemmerend om het rekenen tot ontwikkeling te laten komen.	66 %	34 %
6 Bij het meercijferig vermenigvuldigen kan als einddoel een vorm van gestileerd hoofdrekenen worden aangehouden op niveau 1F.	66 %	34 %

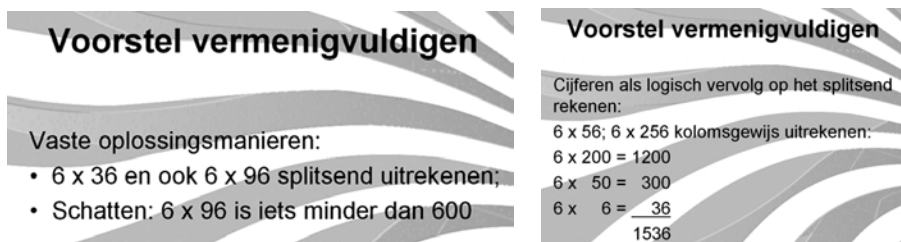
figuur 5

Buijs' betoog werd door de aanwezigen in grote lijnen onderschreven, gezien de instemmende reacties op de stellingen 3 en 4. Met stelling 3, over potentiële leerervaringen die kunnen worden opgedaan met meercijferig vermenigvuldigen, stemt een ruime meerderheid van de aanwezigen in. Met stelling 4, over het belang van getalgevoel en hoofdrekenen is vrijwel iedereen het eens. Ook Buijs' opvatting dat voor leerlingen niveau 1F een kolomsgewijze procedure volstaat wordt door een meerderheid onderschreven, getuige de stemming bij stelling 6 over gestileerd hoofdrekenen als einddoel voor niveau 1F.

Stelling 5 kan enigszins apart worden beschouwd. Deze stelling gaat namelijk niet over de opbouw van de leerlijn vermenigvuldigen zoals Buijs die schetst, maar 'meer in het algemeen' over de organisatorische opzet van reken-wiskundelessen. Een meerderheid van de aanwezigen stemt in met deze stelling, al is deze meerderheid niet zo ruim als bij de overige stellingen.

5 Huitema: houvast aan vaste oplossingsmanieren

S. Huitema vestigde in zijn bijdrage de aandacht op het belang van vaste oplossingsmanieren voor kinderen van niveau 1F (zie het artikel 'Schets van een leerlijn vermenigvuldigen en delen voor kinderen van niveau 1F' op pagina XX e.v.). Hij pleitte er voor om kinderen op fundamenteel niveau 1 te laten vermenigvuldigen volgens vaste oplossingsmanieren. Zo gaat een vermenigvuldiging van een ééncijferig met een meercijferig getal in eerste instantie altijd hoofdreenend met de splitsstrategie, ongeacht de getallen in de opgave, en later, als logisch vervolg daarop, kolomsgewijs (fig.6).



figuur 6

Huitema legde daarbij de nadruk op het belang van het laten rekenen op papier en van veel oefenen. Dat laatste niet alleen bij de overgang naar de verkorte (cijferende) uitrekenwijze van een vermenigvuldiging - die immers voor veel kinderen van dit niveau lastig is - maar ook al bij de voorgaande stappen (splitsend hoofdreenend vermenigvuldigen en kolomsgewijs vermenigvuldigen). Verder wees hij er op dat kinderen de overgang naar meercijferig maal meercijferig alleen kunnen maken als zij ééncijferig maal meercijferig al op de meest verkorte manier kunnen uitrekenen. Over delen hield Huitema een vergelijkbaar pleidooi, met de aantekening dat voor de zwakste rekenaars het herhaald aftrekken en het cijferend delen beter achterwege kan blijven. Aansluitend op de presentatie van Huitema werden de volgende drie stellingen voorgelegd, waar de aanwezigen als volgt op reageerden (fig.7):

	Eens	Oneens
7 Cijferen is een basale vaardigheid. Het behoort daarom tot niveau 1F	65 %	35 %
8 Cijferen komt tegemoet aan de behoefte aan vaste oplossingsmanieren van minder goede rekenaars	80 %	20 %
9 Gebruik voor delen op niveau 1F de zakrekenmachine. Laat de rest (cijferend / herhaald aftrekken) verder helemaal zitten	51 %	49 %

figuur 7

Huitema's stelling dat cijferen op zich een basale vaardigheid is, en daarom tot de stof van niveau 1F hoort, werd door een meerderheid van de aanwezigen onderschreven, evenals de stelling dat cijferen tegemoet komt aan de behoefte aan vaste oplossingsmanieren van minder goede rekenaars. Bij deze stellingen trad enige verwarring op onder de aanwezigen; niet voor iedereen was duidelijk in hoeverre de term 'cijferen' verwees naar hetgeen hieraan voorafgaand expliciet was betoogd, of dat werd verwezen naar de meest verkorte standaardalgoritmen in het algemeen. In hoeverre dit verschil in interpretatie van invloed is geweest op de uitslag van de stemming is niet na te gaan. Stelling 9, waarin wordt gesteld de rekenmachine te gebruiken voor delen op niveau 1F, was wel eenduidig interpreteerbaar. De meningen hierover waren echter sterk verdeeld.

6 Uittenbogaard: geen standaardalgoritmen, maar groeiend inzicht

W. Uittenbogaard verzorgde de laatste presentatie, waarin hij pleitte voor een alternatieve benadering voor het gebruik van standaardprocedures (zie het artikel 'Vijanden worden vrienden - een beknopte leergang cijferend vermenigvuldigen' op pagina XX e.v.). Anders dan bij de voorgaande presentaties werden de stellingen niet na afloop, maar gedurende het betoog aan de aanwezigen voorgelegd. Uittenbogaard wees er allereerst op dat er tegenwoordig geen maatschappelijke noodzaak meer is voor het kennen van de cijferalgoritmen, noch kolomsgewijs, noch de meest verkorte standaardwijze. Met zijn eerste stelling (stelling nummer 10): 'Stop met het aanleren van cijferalgoritmen', waren echter vrijwel alle aanwezigen het oneens (fig.8).

	Eens	Oneens
10 Stop met het aanleren van cijferalgoritmen	4 %	96%
11 Alle kinderen kunnen dit met inzicht leren	72 %	28 %
12 Standaardprocedures of kolomsgewijs rekenen zijn niet nodig	27 %	73 %

figuur 8

In plaats van voor het aanleren van standaardstrategieën voor vermenigvuldigen, pleitte Uittenbogaard voor het aanleren van verschillende aanpakken, met behulp van tafelkennis en getalinzicht. Hij benoemde deze als 'vrienden', waarmee kinderen vermenigvuldigingen, afhankelijk van de getallen, inzichtelijk op kunnen lossen.

Voor het vermenigvuldigen van ééncijferige getallen met meercijferige getallen, hebben kinderen genoeg aan het rekenen met nullen ('vrienden van tien' en 'tafels met nullen'), één keer minder en één keer meer ('bijna vrienden van tien') en halveren en verdubbelen, aldus Uittenbogaard (fig.9). Op

stelling 11: ‘Alle kinderen kunnen dit met inzicht leren’, reageerde een meerderheid van de aanwezigen instemmend (figuur 9).



figuur 9

Uittenbogaard vervolgde zijn betoog met het presenteren van nog meer ‘vrienden’, zoals kwadraten en compenseren, waarmee veel leerlingen steeds verder vaardig kunnen worden op het gebied van vermenigvuldigen. Ter besluit werd stelling 12: ‘Standaardprocedures of kolomsgewijs rekenen zijn niet nodig’ voorgelegd, een wat milder geformuleerde stelling dan het eerdere “Stop met het aanleren van cijferalgoritmen”. Weer is een meerderheid het oneens met de stelling, maar deze is beduidend minder groot dan bij stelling 10.

7 overkoepelende stellingen

Na de verschillende betogen zijn nog enkele overkoepelende stellingen aan de conferentiedeelnemers voorgelegd. Daarin werd in meer algemene zin gevraagd naar cijferalgoritmen en standaardprocedures en (nogmaals) naar enkele opgaventypen.

Over de stelling: ‘Cijferalgoritmen voor het meercijferig vermenigvuldigen verdienen een plaats op niveau 1F in het rekenwiskundeonderwijs” waren de meningen zeer verdeeld; iets meer dan de helft van de aanwezigen vond van niet, bijna de helft vond van wel (fig.10).

13 Cijferalgoritmes voor het meercijferige vermenigvuldigen verdienen een plaats op het niveau 1F in het reken-wiskundeonderwijs	
Ja, het brengt een grote hoeveelheid rijke leerervaringen met zich mee	76 %
Ja, het komt tegemoet aan de behoefte aan vaste oplossingsmanieren van minder goede rekenaars	19 %
Nee, we kunnen onze energie en tijd beter besteden	51 %

figuur 10

Op de stelling “Kinderen op niveau 1F moeten oefenen met verkorte standaardprocedures tot ze foutloos worden uitgevoerd” werd door de aanwezigen meer eenduidig gereageerd. Een ruime meerderheid koos het antwoordalternatief waarin wordt gesteld dat oefenen van procedures zonder inzicht zinloos is. Slechts 5 procent van de aanwezigen koos voor het antwoord dat inzicht bij oefenen gaandeweg vanzelf ontstaat (figuur 11).

14 Kinderen op niveau 1F moeten oefenen met verkorte standaardprocedures tot ze foutloos worden uitgevoerd.	
Nee, oefenen van procedures zonder inzicht is zinloos	76 %
Ja, zwakke rekenaars zijn daar zeker mee geholpen	19 %
Ja, inzicht ontstaat dan gaandeweg vanzelf wel bij de sterkere rekenaars	5 %

figuur 11

Dat de presentaties van de verschillende inleiders de aanwezigen aan het denken hebben gezet, bleek toen de eerste twee, nogmaals werden voorgelegd. Bij beide opgaventypen is het percentage aanwezigen dat vond dat kinderen op niveau 1F dit moeten kunnen, flink gedaald (fig.12).

	Eens	Oneens
15 Opgaven van het type 3×456 moeten kinderen op niveau 1F cijferend kunnen berekenen	66 % (was 86 %)	34 % (was 14 %)
16 Opgaven van het type 34×56 moeten kinderen op niveau 1F cijferend kunnen berekenen	45 % (was 66 %)	65 % (was 34 %)

figuur 12

Tot slot van de sessie zijn nog twee concrete voorbeeldopgaven, afkomstig uit de ‘Periodieke Peiling van het reken-wiskundeonderwijs’, domein ‘bewerkingen’ (Janssen e.a., 2005), voorgelegd. Het betrof een vermenigvuldigopgave (ééncijferig keer driecijferig) en een deelopgave (driecijferig gedeeld door tweecijferig):

Machteld bezorgt elke week 403 tijdschriften. Hoeveel tijdschriften bezorgt Machteld in 8 weken?

De Meibloem’ heeft 32 nieuwe geschiedenisboeken gekocht. De totaal prijs is 736 euro. Hoeveel is de prijs per boek? (Janssen e.a., 2005, pag102)

Volgens de standaarden van het PPON-onderzoek valt de vermenigvuldigopgave onder de ‘standaard minimum’. Dat betekent dat, volgens het bij dit PPON-onderzoek betrokken deskundigenpanel, 90 tot 95 procent van de leerlingen aan het einde van de basisschool deze opgave correct moet kunnen oplossen. De deelopgave valt onder de ‘standaard voldoende’, wat inhoudt dat volgens dit deskundigenpanel 70 tot 75 procent van de leerlin-

gen einde basisschool deze opgave correct moet kunnen oplossen (Janssen e.a., 2005). De vraag aan de aanwezige conferentiebezoekers was of en op welke wijze leerlingen op niveau 1F, respectievelijk 1S, deze opgaven naar hun opvatting zouden moeten kunnen oplossen. Dit werd zowel gevraagd voor de opgave in contextvorm als in kale vorm. Over de manier van oplossen werd steeds de volgende keuzemogelijkheid geboden:

- op een eigen manier, zonder dat vooraf precies wordt voorgeschreven welke manier;
- met een standaardprocedure, cijferend of anderszins, al dan niet verkort;
- met het meest verkorte cijferalgoritme.

In figuur 13 zijn de stemuitslagen voor de vermenigvuldigopgaven te zien. Een overgrote meerderheid van de aanwezigen vond dat alle leerlingen de opgave moeten kunnen oplossen. Dit komt overeen met het oordeel van het deskundigenpanel van het Cito PPON-onderzoek. Er was nauwelijks verschil van mening tussen de opgave in context of kaal. Wel was er verschil tussen het oordeel hierover voor wat betreft de verschillende niveaus. Een meerderheid vond dat voor niveau 1F, leerlingen de opgave (zowel in context als kaal) op hun eigen manier moeten kunnen oplossen. Voor niveau 1S waren de meningen over de manier van oplossen meer verdeeld, gezien de percentages bij de verschillende antwoordalternatieven (fig.13).

Machteld bezorgt elke week 403 tijdschriften. Hoeveel tijdschriften bezorgt Machteld in 8 weken?	8 x 403			
--	---------	--	--	--

17 Moeten kinderen op niveau 1F, respectievelijk 1S, deze opgave kunnen oplossen?	1F	1S	1F	1S
Ja, op hun eigen manier.	69 %	46 %	70 %	43 %
Ja, met een (verkorte) standaardprocedure.	26 %	39 %	25 %	44 %
Ja, met het meest verkorte cijferalgoritme.	3 %	13 %	4 %	13 %
Nee, dit hoeven ze op dit niveau niet te kunnen oplossen.	2 %	2 %	1 %	0 %

figuur 13

Figuur 14 toont de stemuitslagen van de stellingen over de deelopgaven. In vergelijking met de vermenigvuldigopgaven waren meer aanwezigen van mening dat leerlingen - vooral op niveau 1F - de deelopgaven niet hoeven te kunnen oplossen. Dat gold wat meer voor de opgave in kale vorm, dan in context. Ook was het verschil tussen niveau 1F en niveau 1S groter. Afgezien van het oordeel over de kale deelopgave voor niveau 1F, komt ook dit overeen met het oordeel van het deskundigenpanel van het Cito PPON-

onderzoek. Net als bij de oordelen over de vermenigvuldigopgaven, vond een meerderheid van de aanwezigen over deelopgaven dat deze op niveau 1F op een eigen manier moet kunnen worden opgelost. Voor niveau 1S liepen de meningen weer uiteen, getuige de percentages bij de verschillende antwoordalternatieven. Voor de deelopgaven werd wat minder vaak gekozen voor ‘het meest verkorte cijferalgoritme’ dan bij de vermenigvuldigopgaven, maar de verschillen waren niet groot (fig.14).

18 Moeten kinderen op niveau 1F, respectievelijk 1S, deze opgave kunnen oplossen?	De Meibloem heeft 32 nieuwe geschiedenisboeken gekocht. Hoeveel is de prijs per boek?			736 : 32			
	aantal	prijs/ stuk	totaal- prijs				
	32		€ 736,-				
				1F	1S	1F	1S
Ja, met een (verkorte) standaardprocedure				67 %	50 %	53 %	45 %
Ja, met het meest verkorte cijferalgoritme				15 %	43 %	16 %	40 %
Ja, op hun eigen manier				1 %	5 %	2 %	9 %
Nee, dit hoeven ze op dit niveau niet te kunnen oplossen				17 %	2 %	29 %	6 %

figuur 14

8 besluit

Op grond van de reacties op meerdere stellingen (met name stelling 7, 8, 10, 12, 17 en 18) kan in algemene zin worden geconcludeerd dat, volgens de opvattingen van de aanwezigen, standaardprocedures van belang zijn voor alle leerlingen. Over wat die standaardprocedures dan precies in (moeten) houden, werd echter verschillend gedacht. Het lijkt er op dat een meerderheid van de aanwezigen wel van mening is dat rekenaars niveau 1F gediend zijn met een vaststaande oplosprocedure (gezien de stemresultaten bij stelling 6, 8 en 12), maar dat dit niet automatisch het meest verkorte cijferalgoritme hoeft te zijn (gezien de stemming op het tweede antwoordalternatief bij stelling 13). De stemresultaten bij de stellingen 17 en 18, waarin de mening van de aanwezigen hieromtrent werd gevraagd met

betrekking tot concrete voorbeeldopgaven bevestigen dit beeld echter niet; voor niveau 1F werd daar vooral gekozen voor 'een eigen manier'. Dezelfde stellingen laten zien dat ook voor niveau 1S de meningen nog uiteen liepen.

Overigens wordt dit beeld verder diffuus door de verschillende invulling die door de sprekers werd gegeven aan de term 'cijferalgoritmen'. Zo schakeert Uittenbogaard hier ook het kolomsgewijs rekenen onder (zie ook pag.95? van deze bundel). Bovendien ontstond (in elk geval bij stelling 7 en 8) enige verwarring over wat nu precies wordt verstaan onder de gebruikte termen. Als in een dergelijke, gecontroleerde setting al zo makkelijk onduidelijkheid ontstaat omtrent begrippen als 'kolomsgewijs rekenen', 'cijferalgoritmen' en 'standaardprocedures', geeft dat aan hoe makkelijk er begripsverwarring kan ontstaan bij een breder, gemêleerde (onderwijs)publiek. Ook bij dergelijke ingeburgerde termen kan het blijkbaar voorkomen dat mensen er iets verschillends onder verstaan. Dat een meerderheid van de aanwezigen het eens was met de stelling 'Cijferen komt tegemoet aan de behoefte aan vaste oplossingsmanieren van minder goede rekenaars' (stelling 8) zou daarom wel eens eerder kunnen betekenen dat de meerderheid van de aanwezigen van mening is dat minder goede rekenaars behoefte hebben aan vaste oplossingsmanieren, dan dat men van mening is dat minder goede rekenaars gediend zijn bij leren cijferen.

De kwestie of, en in hoeverre, inzicht vooraf dient te gaan aan oefenen, kwam naar voren bij stelling 14; 'Kinderen op niveau 1F moeten oefenen met verkorte standaardprocedures tot ze foutloos worden uitgevoerd'. Over deze kwestie is geen feitelijke algemene kennis beschikbaar, maar zij speelt wel een rol bij de totstandkoming en formulering van de referentieniveaus uit het rapport van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen. Daarin wordt immers een onderscheid gemaakt tussen weten dat (paraat hebben), weten hoe (functioneel gebruiken) en weten waarom (begrijpen en verklaren) (2008b, pag.13 e.v.).

Een ruime meerderheid van de aanwezigen koos bij stelling 14 voor het antwoordalternatief dat stelt dat oefenen zonder inzicht zinloos is. Het lijkt erop, mede gezien de reacties op de eerdere stellingen 4 en 11, dat de aanwezige inhoudsdeskundigen in meerderheid van mening zijn dat oefenen mede gestoeld dient te zijn op inzicht. Overigens neemt ook de 'Expertgroep Doorlopende Leerlijnen' in deze kwestie een genuanceerd standpunt in. Bijvoorbeeld waar zij instemmend de 'National Research Council' van de Verenigde Staten aanhaalt:

Ten onrechte wordt vaardigheid soms tegenover inzicht geplaatst. Begrijpen maakt het leren van vaardigheden gemakkelijker, minder gevoelig voor fouten en het beklijft beter. Aan de andere kant is een zeker beheersingsniveau van vaardigheden noodzakelijk om nieuwe wiskundige begrippen en methoden met begrip te leren en ontwikkelen.

Zonder een goede routine stranden leerlingen bij het verdiepen van wiskundige ideeën of het oplossen van wiskundige problemen. De aandacht

die zij dan nodig hebben om hun resultaten uit te werken in plaats van die paraat op te roepen gaat ten koste van de aandacht voor de aanpak van het probleem of het zoeken naar onderliggende relaties.

Leerlingen die een vaardigheid zonder begrip leren hebben heel veel oefening nodig om de stappen niet te vergeten. Als leerlingen de operaties begrijpen, dan zijn ze beter in staat om ze te reconstrueren en in samenhang met andere operaties te zien.

Als vaardigheden zonder begrip worden geleerd, dan blijven het geïsoleerde brokjes kennis. Nieuwe begrippen of vaardigheden kunnen dan niet voortbouwen op een bestaand netwerk aan kennis. Dat leidt ertoe dat leerlingen voor elke kleine variatie in opgaven weer nieuwe oplossingsprocedures moeten leren. (2008b, pag.15 e.v.)

Onder de aanwezigen zijn verschillende beroepsgroepen vertegenwoordigd. Bij de meeste stellingen treden geen noemenswaardige verschillen op tussen de stemmingen van de verschillende beroepsgroepen. Het valt op dat er bij twee stellingen juist wel verschillen optreden. Met stelling 5 was van de beroepsgroep schoolbegeleiders en/of onderwijsadviseurs een (kleine) meerderheid het oneens met de stelling, terwijl de overige beroepsgroepen het juist in meerderheid eens waren met deze stelling. Met stelling 9 waren opleiders het in meerderheid oneens en de overige beroepsgroepen in meerderheid mee eens (figuur 15).

	schoolbegeleiders / onderwijsadviseurs		overig		totaal	
	eens	oneens	eens	oneens	eens	oneens
5 Een organisatorische opzet met elke week 2 dagen 'leerkrachtgebonden' lessen en 3 dagen 'leerkrachtvrije' lessen werkt meer in het algemeen belemmerend om het rekenen tot ontwikkeling te laten komen.	47 %	53 %	64 %	36 %	61 %	39 %
	opleiders		overig		totaal	
	eens	oneens	eens	oneens	eens	oneens
9 Gebruik voor delen op niveau 1F de zakrekenmachine. Laat de rest (cijferend delen en/of herhaald aftrekken) verder helemaal zitten						
	44 %	56 %	62 %	38 %	51 %	49 %

figuur 15

Vanwege de beperkingen van dit programmaonderdeel, zoals de relatief kleine aantallen aanwezige vertegenwoordigers van bepaalde beroepsgroepen (zie fig.1), vallen hier geen conclusies uit te trekken. Wel roept dit de vraag op of het beroepsperspectief van de verschillende onderscheiden beroepsgroepen, uitmaakt voor de opvattingen over bepaalde aspecten van het reken-wiskundeonderwijs. Het zou de moeite waard zijn dit nader te

onderzoeken. De bedoeling van dit programmaonderdeel was gezamenlijk na te denken over welke opgaventypen kinderen via standaardprocedures moeten leren oplossen en op welke wijze het onderwijsleerproces hiertoe kan worden vormgegeven. De reacties op de voorgelegde stellingen bieden enig zicht op de opvattingen van de aanwezige inhoudsdeskundigen over het leren van standaardprocedures. Over een aantal zaken lijkt globaal overeenstemming te zijn onder de aanwezigen, zoals de opvatting dat minder sterke rekenaars behoefte hebben aan vaste oplossingsprocedures, dat standaardprocedures niet noodzakelijk de (meest verkorte) cijferalgoritmen hoeven te zijn, en dat oefenen gebaseerd moet zijn op inzicht. Tegelijk zijn er genoeg stellingen waarop de reacties danig uiteenlopen. We moeten dan ook concluderen dat de discussie over de rol van standaardprocedures zeker nog niet beslecht is.

literatuur

- Buijs, K. (2008). Vermenigvuldigen met meercijferige getallen - pleidooi voor een kernleergang gestileerd hoofdrekenen (opgenomen in deze bundel)
- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen (2008a). *Over de drempels met taal en rekenen. Hoofdrapport*. Enschede: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen.
- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen (2008b). *Over de drempels met rekenen. Consolideren, onderhouden, gebruiken en verdiepen*. Enschede: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen.
- Gelder, L. van (1964). *Grondslagen van de rekendidactiek*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Huitema, S. (2008). Schets van een leerlijn vermenigvuldigen en delen voor kinderen van niveau 1F (opgenomen in deze bundel).
- Janssen, J., F. van der Schoot en B. Hemker (2005). *Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau. Balans [32] van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4*. Arnhem: Cito.
- Treffers, A. (2008). Het voorkomen van ongetuigdheid (opgenomen in deze bundel).
- Uittenbogaard, W. (2008). Vijanden worden vrienden – een beknopte leergang cijferend vermenigvuldigen (opgenomen in deze bundel).

De toekomst van het onderwijs in rekenen-wiskunde op de basisschool

- meningen van deelnemers aan de Panama-conferentie 2007 -

A.B. van Gool & J.B. den Hertog
Flsme, Universiteit Utrecht

1 inleiding

Naar aanleiding van klachten over het rekenniveau heeft het ministerie van OC&W in 2006 besloten om op gerichte wijze na te gaan welke leerstof er volgens de maatschappij en volgens de mensen die dagelijks betrokken zijn bij het onderwijs behandeld zou moeten worden in het basisonderwijs, en wat er eventueel zou kunnen worden geschrapt. Dit was mede aanleiding tot een enquête die werd gehouden onder de deelnemers van de Panama-conferentie in 2007. In dit artikel wordt verslag gedaan van de manier waarop deze enquête tot stand kwam en geven we een globale samenvatting van de resultaten.

Er kwamen geen al te grote meningsverschillen naar voren. Men onderschrijft in het algemeen de benaderingen zoals die de afgelopen jaren in de diverse TAL-brochures zijn aangegeven. De verschillen hadden veelal betrekking op detailkwesties en kwamen vooral tot uiting in de didactische keuzen die men gewend is te maken.

Met enige regelmaat lazen we de afgelopen jaren in de pers dat er klachten zijn over het niveau van het rekenen. Als het niet over de pabo-studenten gaat, dan zijn het wel de aankomende verpleegkundigen of de techniekstudenten die onvoldoende presteren. Als reactie hierop nodigde M. Zandbergen van het ministerie van OC&W in september 2006 het Cito, de NVORWO en het Flsme uit om gezamenlijk over de problematiek te overleggen. Het resultaat van dit overleg was het voornemen om enkele debatten te organiseren over de toekomst van het rekenonderwijs. De resultaten van de 'Periodieke Peiling van het OnderwijsNiveau' (PPON) rekenen-wiskunde (Jansen & Van der Schoot, 2005) werden hierbij als uitgangspunt genomen.

2 waar gaat het om?

Uit deze PPON blijkt dat er een vooruitgang is bij het inzicht in getallen en getalrelaties, bij hoofdrekenen, bij het schattend rekenen en bij procenten. Bij het onderdeel 'bewerkingen' (dat onder meer het cijferen omvat) is er echter een duidelijke achteruitgang te constateren. Deze verschuiving is overigens geheel in lijn met de trend in het onderwijs om meer aandacht te schenken aan globaal rekenen en minder in te zetten op puur instrumentele vaardigheden. Dit beeld lijkt te passen bij de ontwikkelingen in de maatschappij, waar handwerk meer en meer wordt vervangen door machinewerk. Bij het rekenen, thuis en op het werk, gaat het dan om zakrekenmachines, elektronische kassa's, *spreadsheets* en andere computertoeepassingen. Dit alles impliceert dat het accent niet langer noodzakelijkerwijs hoeft te liggen op het uitvoeren van berekeningen, maar meer zou moeten liggen op het aansturen van apparaten die berekeningen uitvoeren. Daarmee is vooral het denkwerk belangrijker geworden. Dit denkwerk betreft het kiezen van de juiste bewerkingen, het (globaal) controleren van bewerkingen en het voorspellen en interpreteren van resultaten.

Belangrijke vragen die zich opdringen als we nadenken over de toekomst van het rekenonderwijs zijn: Waar ligt de balans tussen instrumentele vaardigheden enerzijds en meer algemene competenties anderzijds? Welke onderdelen van rekenen-wiskunde in het basisonderwijs zouden prioriteit moeten krijgen, zodat de kwaliteit van het onderwijs ook in de toekomst gewaarborgd is? Hoe kunnen we zorgen dat er voldoende wordt geanticipeerd op de maatschappelijke en culturele ontwikkelingen?

Iedereen die zich betrokken voelt bij het rekenonderwijs heeft een bepaald beeld over wat rekenen en reken-wiskundeonderwijs zouden moeten inhouden. In de media is regelmatig discussie over wat rekenen niet is of wat het wel zou moeten zijn. Daaruit volgt dan weer een oordeel over wat leerlingen niet kunnen en wat ze wel zouden moeten kunnen. De conclusie van dit gesprek was dan ook dat het belangrijk is om na te gaan wat er volgens de maatschappij en volgens de mensen die dagelijks betrokken zijn bij het onderwijs, in het basisonderwijs behandeld zou moeten worden aan rekenen-wiskundige leerstof. Daarbij moet echter ook onderzocht worden wat volgens de algemene opinie eventueel uit het huidige programma zou moeten verdwijnen. Dit leidde ertoe dat deze kwesties zowel met docenten en beleidsmakers uit het onderwijs als met mensen uit andere beroepsgroepen werden besproken.

Om te beginnen was er op 18 december 2006 een bijeenkomst in Amersfoort, georganiseerd door het Cito, de SLO, het Fisme en de NVORWO, waar een eerste peiling plaatsvond met als inzet de hierboven genoemde vragen. Onder de aanwezigen waren vertegenwoordigers van verschillende onderwijsorganisaties, zoals het mbo en het praktijkonderwijs, maar ook waren er deelnemers met andere achtergronden, zoals een verpleegkundige, een planoloog, een accountant en een architect. Daarnaast was ook het 'Natio-

naal Instituut voor BUDgetvoorlichting' (NIBUD) vertegenwoordigd. Hier werd een uiteenzetting gegeven over de resultaten van de PPON rekenen-wiskunde door F. van der Schoot en J. Janssen van het Cito. Meerdere deelnemers waren nogal geschokt door deze presentatie. Ze vroegen zich af of er niet grondig onderzoek moet komen naar de zwakke resultaten. Toch gaven sommigen ook aan het kolomsgewijs rekenen niet zo effectief te vinden. Het merendeel vond dat er moet worden ingezet op didactische verbetering.

Uit de gedachtewisseling kwam sterk naar voren dat het globaal kunnen bepalen van het antwoord in toepassingssituaties belangrijk is voor leerlingen. Daarnaast werd ook het wiskundig goed kunnen interpreteren van toepassingssituaties nadrukkelijk genoemd. Dit betekent overigens niet dat precies rekenen irrelevant is. Al zat er enige ruimte in de antwoorden, soms werd cijferend rekenen op papier expliciet genoemd, soms werd het getalgebied aangeduid en soms kon bedoeld zijn dat het ook met de rekenmachine mag. In de persoonlijke conclusies was sprake van een grote veelkleurigheid. Het NIBUD vond bijvoorbeeld dat er gewerkt moet worden aan competenties die voor het latere leven van belang zijn. Anderen benadrukten weer het belang van adaptief onderwijs.

Op grond van de resultaten van deze eerste peiling organiseerden het Cito, de SLO, het FIsme, de NVORWO en Panama een enquête op de Panama-conferentie van 2007 te Noordwijkerhout. Het grootste deel van de deelnemers aan deze conferentie deed hieraan mee. Op de Panama-conferentie van 2008 is door A. van Gool en J. den Hertog verslag gedaan van de resultaten en is er tijdens een workshop verder over doorgesproken. In het vervolg van dit artikel doen we verslag van de enquête die gehouden is op de Panama-conferentie 2007. We wijzen trends aan in de antwoorden van de geënquêteerden en geven enkele overwegingen in discussie. Wij beseffen dat het indikken van de resultaten van deze enquête nauwelijks recht doet aan de grote inzet van degenen die de antwoorden hebben gegeven. Het liefst hadden we nog veel meer citaten gegeven om de nuances te laten zien. Het bestek van dit artikel laat het helaas niet toe.

Overigens heeft K. Gravemeijer (2007) stelling genomen in het debat over de kwaliteit en de toekomst van het Nederlandse rekenonderwijs met een artikel in dit tijdschrift, getiteld 'Reken-wiskundeonderwijs anno 2007 - tussen oude waarden en nieuwe uitdagingen'.

3 inhoudelijke opzet enquête

De centrale vraag die aan alle deelnemers is voorgelegd, was: 'Als er binnen het bestaande onderwijs nieuwe accenten zouden worden gelegd, waar vindt u dat die accenten moeten komen? Wat stelt u zich voor bij het herzien van het reken-wiskundeonderwijs?'

De verwachting was dat deze vraag te algemeen was om tot een zinvolle gedachtewisseling te komen. Daarom werden in het eerste gedeelte van de enquête vier domeinen centraal gesteld: 'vermenigvuldigen en delen', 'breuken, procenten en kommagetallen', 'meten' en 'rekenen en opschrijven'. In elk domein werden vervolgens enkele richtvragen geformuleerd. Bij deze vragen werden de resultaten van de eerdere peiling als uitgangspunt genomen.

Bij het vermenigvuldigen en delen is van belang dat er enerzijds een basisvaardigheid en dus een minimaal niveau zou moeten zijn. De vraag hierbij was: 'Wat vindt u dat de leerlingen op het gebied van vermenigvuldigen en delen zeker zouden moeten leren?' Anderzijds is het de vraag in hoeverre de grootte van de getallen een rol zal spelen en welke mate van beheersing nodig is om maatschappelijk goed te kunnen functioneren.

Dit leidde tot de volgende vraag: 'Maakt de grootte van de getallen voor uw antwoord uit? Welke mate van beheersing vindt u dat leerlingen zouden moeten hebben (bijvoorbeeld routinematig rekenen, redeneren, of echt probleem oplossen)?'

Breuken, procenten en kommagetallen spelen een belangrijke rol in de dagelijkse praktijk. Ook hier werd gevraagd wat volgens de mening van de deelnemers leerlingen zeker zouden moeten leren om goed voorbereid te zijn op later. Tevens werd gepeild welke mate van beheersing daarbij dan wenselijk zou zijn.

Wat betreft het meten is nog klemmender dat leerlingen in praktijksituaties grote moeite hebben met het toepassen van hun schoolkennis. Tijdens de bijeenkomst in Amersfoort in december 2006 was door verschillende deelnemers - vooral die uit het praktijkonderwijs - met klem naar voren gebracht hoe belangrijk het was dat leerlingen in staat zouden moeten zijn om allerlei meetsituaties te beheersen. Als voorbeeld werd daar genoemd: 'Bereken het aantal pakken laminaat dat je nodig hebt om de vloer van een kantoor te beleggen'. In de Panama-enquête zijn de volgende vragen opgenomen: 'Met welke maten zouden leerlingen vooral moeten werken? Wat voor soort problemen zouden ze dan tenminste moeten kunnen oplossen?'

In het PPON-rapport 2005 werd naar voren gebracht dat leerlingen teveel uit het hoofd rekenen zonder tussenresultaten op te schrijven, zelfs als ze expliciet werden gewezen op het gebruiken van een kladblaadje. Vandaar dat we nu de vraag stelden: 'Wat zouden de leerlingen eigenlijk moeten opschrijven?'

Daarna volgde een tweede gedeelte waarin we de deelnemers vroegen aan te geven welke accenten er in de toekomst in het rekenonderwijs zouden moeten worden gelegd. Ook hierbij werd getracht de gedachtewisseling wat te richten. Er werden daarom enkele onderwerpen gegeven zoals: beheersing van de algoritmen voor vermenigvuldigen en delen, het maken van aantekeningen bij handig rekenen, interpreteren van (complexere) context-opgaven, leren gebruiken van de zakrekenmachine, breuken, procenten en kommagetallen en meten.

Steeds meer wordt van mensen verwacht dat ze kunnen redeneren over gegevens en dat ze deze redeneringen ook kunnen onderbouwen. De maatschappelijke vraag naar wiskunde verplaatst zich dus steeds meer naar je aan de hand van gegevens kunnen voorstellen wat er in een situatie aan de hand is en dan kunnen redeneren over vragen in die situatie.

Ten slotte werden daarom ook specifiek reacties gevraagd wat betreft het 'redeneren over gegevens'.

Het derde en laatste onderdeel van de enquête was gericht op meningen rond het omgaan met de grote verschillen tussen leerlingen in het toekomstige onderwijs. Respondenten werd gevraagd hun mening te geven over enkele stellingen rond dit thema.

- Leerlingen die niet goed kunnen cijferen en niet uit de voeten kunnen met breuken, moet je niet lastig vallen met kommagetallen en procenten.
- Alle leerlingen moeten kennismaken met alle onderdelen en de CITO-eindscore moet worden aangevuld met een vaardigheidsprofiel.
- Zwakke leerlingen help je het beste door ze vaste procedures te leren.

De enquête werd afgesloten met een bladzijde waarop de deelnemers gevraagd werd om een conclusie te schrijven en een evaluatie te geven van de bijeenkomst met suggesties voor toekomstige discussies.

4 vormgeving

Tijdens de conferentie was er een uur de tijd genomen voor deze enquête. Alle deelnemers werden verdeeld over verschillende groepen. De hiervoor genoemde onderwerpen waren opgenomen in een boekje en we vroegen dit boekje te gebruiken voor het maken van aantekeningen en het na afloop in te leveren. Gezien de beperkte tijd hebben we vooraf de keuze gemaakt om de deelnemers niet alle vier de onderwerpen te laten bespreken, maar slechts twee van de vier. De ene helft deed de eerste twee onderwerpen, de andere de laatste twee. Om de gedachten te richten waren er bij elk onderdeel naast de al eerder genoemde richtvragen ook nog voorbeeldsituaties aangegeven, ook al beseften we dat deze vorm van sturing nadelen heeft. Het kan er immers toe leiden dat de deelnemers vooral het voorbeeld bespreken en niet de algemene vraag.

Uiteraard mochten de deelnemers met elkaar overleggen. Het ging immers niet om een schriftelijke overhoring, maar om een raadpleging waarbij de mening van een ieder zoveel mogelijk naar voren zou komen.

Ook hebben we gevraagd om de achtergrond aan te geven: leerkracht, schooladviseur, pabo-docent, onderzoeker of onderwijsontwikkelaar. Het stond de deelnemers vrij om al of niet hun naam te vermelden op het enquêteformulier.

Het is duidelijk dat er nogal wat sturing werd gegeven. Dat werd door sommige deelnemers gewaardeerd: 'Goeie manier om in kort tijdsbestek een eerste idee vanuit het veld te krijgen'. 'Belangrijk voor de toekomst!' Een ander: 'Sterke bijeenkomst. Goed om het veld te bevragen. Open discussie panel. Betrek absoluut het voortgezet onderwijs daarbij want rekenen stopt niet in groep 8'.

Andere deelnemers vonden het een 'schoolse' en onnatuurlijke benadering en gaven aan dat er ook te weinig tijd was om doordachte antwoorden te geven. 'Het lijkt wel basisonderwijs: Je moet heel veel maar je hebt weinig tijd'. En: 'Afraffelen! Zo moet dit niet! Kan topic zijn voor Panama-conferentie. Dit is niet constructief'. Menigeen vond dat het beter was geweest om voor een meer discussieachtige aanpak te kiezen, eventueel in kleinere groepen. 'Er was te weinig tijd voor overleg. Juist in overleg lukt het om scherper en meer genuanceerd te formuleren'.

Iemand schreef: 'Dit suggereert dat er discussie heeft plaatsgevonden! Dit was een enquête'. Het volgende commentaar spreekt boekdelen: 'Toekomstige "discussies", maar wij mochten eigenlijk niet discussiëren. Voor gegevens verzamelen is de serie vragen te open en onduidelijk. Ik heb medelijden met degene die hier iets mee moet doen. Sterkte!'

Inderdaad, het was niet gemakkelijk greep te krijgen op de resultaten. Velen lieten zich inderdaad sturen door de gegeven voorbeelden. Sommigen gingen bij de items niet verder dan het uitwerken van de rekenopgaven en ze gaven geen antwoord op de algemene vraag. Anderen gaven heel ruime of onduidelijke antwoorden die veel ruimte lieten voor verschillende interpretaties. Een ander aspect werd door een andere deelnemer aangegeven: 'We zijn het erg met elkaar eens. Dit lijkt me heel lastig te verwerken; het gaat alle kanten op'.

Wat betreft de gevolgde aanpak, alle opmerkingen van de deelnemers uit de boekjes zijn door medewerkers van het Fisme verwerkt in een *spreadsheet*. Daarbij bleek al snel dat het kwantificeren van de resultaten weinig zinvol was. Daarvoor liep de aard van de reacties teveel uiteen. Desondanks zal uit het vervolg echter ook blijken dat de standpunten op een aantal punten niet zo heel erg uiteenliepen. Hieronder geven we een globale samenvatting van de resultaten van de enquête die door ruim honderdvijftig personen is ingevuld.

5 de resultaten nader bekeken

Het algemene beeld dat uit de enquêteresultaten naar voren komt is dat men primair hecht aan functionele gecijferdheid. Kinderen moeten leren rekenen in praktische situaties en er moet gelet worden op het maatschappelijke nut van de berekeningen. Daarnaast vraagt men aandacht voor problemen, waarin meer zuiver mathematische kwesties aan de orde komen.

Wat betreft het vermenigvuldigen en delen concluderen de meesten dat er minder gealgoritmiseerd zou moeten worden. Kinderen moeten meer leren schatten, leren splitsen, kolomsgewijs rekenen en handige rekenstrategieën leren gebruiken. Parate kennis, basisvaardigheden en inzicht zijn belangrijk. Begripsvorming is essentieel. Kinderen moeten begrijpen wat het bijvoorbeeld betekent om te vermenigvuldigen en te delen zodat ze de noodzaak van deze bewerkingen in verschillende situaties kunnen herkennen en effectief kunnen handelen. Het komt er in de voorbeelden die respondenten geven, op neer dat het gaat om kritisch leren nadenken, zodat kinderen resultaten van bewerkingen juist kunnen inschatten.

In antwoorden op de vraag wat kinderen moeten leren op het gebied van breuken, procenten en kommagetallen, worden veelvuldig de woorden 'begrijpen' en 'inzicht' gebruikt. De reacties komen overeen met waar nu in het onderwijs ook de nadruk op ligt en die liggen in de lijn van wat er in de TAL-brochure over dit onderwerp is geschreven.

Men is dan ook vrijwel unaniem van mening dat alle kinderen, dus ook de minder goede rekenaars, met zowel breuken als kommagetallen en procenten kennis moeten hebben gemaakt. De relatie tussen breuken, kommagetallen, procenten en verhoudingen verdient meer aandacht met het oog op redzaamheid in het dagelijkse leven en de maatschappelijke relevantie van bijvoorbeeld procenten. Dit mag, wat de geënquêteerden betreft, ten koste gaan van het inoefenen van abstracte bewerkingen met breuken. Dit laatste hoeft niet door alle leerlingen beheerst te worden. Bij het antwoord op de vraag wat kinderen op het gebied van meten moeten leren, is het ijkpunt vrijwel steeds of maten herkenbaar zijn voor kinderen in de wereld waarin zij leven. Er worden verschillende soorten problemen op het gebied van meten genoemd waar kinderen mee in aanraking moeten komen.

- Problemen waarbij kinderen zelf metingen uitvoeren.
- Problemen waarbij kinderen referentiematen kunnen ontwikkelen.
- Echte, realistische problemen waarbij de uitkomsten van belang zijn, ertoe doen.
- Problemen waarmee kinderen redzaam worden op een aantal gebieden.
- Ten slotte moeten er problemen worden voorgelegd waarbij het interpreteren van meetgegevens aan de orde komt. Kan de informatie kloppen? Welke conclusies kun je trekken? Is de conclusie die getrokken wordt te rechtvaardigen op basis van de gepresenteerde gegevens? Kortom problemen die tot doel hebben om kinderen op te leiden tot kritische burgers.

Hier noemen we ter illustratie nog enkele voorbeelden van aanbevelingen die door de deelnemers werden gedaan. Hieruit wordt tevens de diversiteit van de opmerkingen duidelijk:

- Globaal rekenen is voldoende wanneer kinderen het exacte antwoord kunnen vinden met behulp van de rekenmachine die tegenwoordig in de mobiele telefoon is geïntegreerd.

- Superbelangrijk dus dit oefenen, waarbij de berekening niet geoefend en/of besproken wordt, maar alleen de strategie.
- Zeer gewenst in verband met opkomst van de gsm.
- Breuken begrijpen en kunnen vergelijken en gelijknamig maken!
- Veel aandacht aan meten besteden, mits gerelateerd aan maten in het dagelijkse leven, mm t/m km, cl t/m liter (en niet daarboven!), geen are en centiare.
- Heel veel grafieken en tabellen lezen.
- Samenvattend: minder precisie bij delen en vermenigvuldigen, drastisch verminderen breuken-inhoud ten gunste van rekenmachine en metriek stelsel en lezen van tabellen. We zouden heel simpel moeten afspreken wat verstaan wordt onder hoofdrekenen. Als dat duidelijk is, is de (tussen)notatie een vanzelfsprekende stap.
- Contextopgaven moeten de volgende kwalificaties hebben: a) semantiek die voldoende duidelijk is, b) belevingswereld van kind. Omdat er een grote diversiteit is tussen scholen in Nederland/Vlaanderen kan van tijd tot tijd de plank flink worden misgeslagen. Ervaring opdoen met (complexere) contextopgaven vereist dus onderwijs op maat voor de groep en het kind.
- Me dunkt dat de brochure van TAL: 'Breuken, procenten, enzovoort' hierover een goede richting geeft.

Hierna beschrijven we welke accentverschuivingen naar het idee van de deelnemers zouden kunnen leiden tot verbetering van de kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs. We nemen de aandachtspunten die in de enquête werden voorgesteld daarbij als uitgangspunt.

beheersing van de algoritmen voor vermenigvuldigen en delen

Over de algoritmen voor vermenigvuldigen en delen lijken de meningen op het eerste gezicht verdeeld, sommigen benadrukken het belang van algoritmische vaardigheden (tot aan de staartdeling toe), anderen vinden dat de tijdsinvestering nogal groot is voor wat het feitelijk oplevert. Het verschil van mening is echter te verklaren door te kijken naar het perspectief vanwaaruit wordt gekeken. Vanuit het gebruiksoogpunt wordt hier vaak aangegeven dat dit onderdeel in de toekomst minder aandacht zou mogen krijgen. Vanuit een meer wiskundige benadering zijn er respondenten die juist pleiten voor het handhaven van het cijferen.

6 meer aandacht

De deelnemers geven op verschillende punten aan meer aandacht in het reken-wiskundeonderwijs te willen geven. We noemen de vier belangrijkste.

– *Het maken van aantekeningen bij handig rekenen*

Dit is één van de aandachtspunten die volgens velen meer aandacht verdient in het toekomstige reken-wiskundeonderwijs. Een gedeelte van de respondenten benadrukt het belang van goede tussenstappen bij het uitrekenen, andere leggen de nadruk op het gebruik van kladpapier, het visualiseren en het neerleggen van gedachten op papier zodat er meer reflectief kan worden gehandeld.

– *Interpreteren van (complexere) contextopgaven*

Ook hieraan zou in de toekomst meer aandacht mogen worden besteed in het onderwijs. Het moet daarbij wel gaan om wiskundige complexiteit. Velen benadrukten dat het niet alleen een kwestie van moeilijke woorden zou moeten gaan. De contexten moeten voor kinderen voorstelbaar en actueel zijn. Alle resultaten overziend constateren we ook hier een verschil in benadering: enerzijds de gebruikswiskunde, leerlingen moeten gecijferde burgers worden, en aan de andere kant de mathematische kant van het reken-wiskundeonderwijs, *problemsolving*, mathematiseren, enzovoort.

– *Leren gebruiken van de zakrekenmachine*

Hier lopen de antwoorden uiteen van ‘ze leren het vanzelf wel, dat hoeft je dus in het onderwijs niet te doen’ tot ‘je kunt er niet omheen om er aandacht aan te besteden’. Het gebruik van de rekenmachine is onlosmakelijk verbonden met het schattend rekenen.

– *Redeneren over gegevens. Er moet meer aandacht komen voor het structureren, modelleren, grafisch en getalsmatig beschrijven in praktische domeinen*

Velen geven aan dat dit onderwerp in de toekomst beslist meer aandacht moet krijgen in het rekenwiskundeonderwijs. Het argument daarbij is, net als bij de interpretatie van contexten, dat het kunnen redeneren over gegevens in onze informatiemaatschappij bepalend is voor iemands sociale redzaamheid.

7 zwakke rekenaar

De reacties op de stelling ‘Zwakke leerlingen help je het beste door ze vaste procedures te leren’ leverden een interessante uitslag op. Slechts 30 procent is het oneens met deze stelling. Toch mag hier beslist niet uit geconcludeerd worden dat de andere 70 procent het met elkaar eens is. Er zijn globaal twee groepen te onderscheiden. De eerste groep vindt dat je zwakke rekenaars helpt door ze een vaste cijferprocedure op te leggen ‘van buitenaf’. Een groot aantal anderen vindt dat bij zwakke rekenaars de individuele voorkeurstrategie moet worden bepaald en dat die procedure vervol-

gens moet worden voorgeschreven. Er wordt nu dus geen methode van buitenaf opgelegd, maar de verwarring over de keuze van een strategie wordt wel weggenomen. Velen merkten nadrukkelijk op dat er alleen met vaste procedures mag worden gewerkt die door het kind begrepen worden. Er is in de antwoorden verwarring te constateren over het begrip 'vaste procedure'. Er zijn respondenten die direct aan cijferprocedures denken, terwijl andere opmerken dat er ook bij bijvoorbeeld strategieën voor het hoofdrekenen sprake kan zijn van vaste procedures.

8 conclusie

Uit de reacties komen geen al te grote meningsverschillen naar voren. Als het aan deze ervaringsdeskundigen ligt - leerkrachten, schooladviseurs, pabo-docenten, onderzoekers en onderwijsontwikkelaars -, dan worden de huidige benaderingen voortgezet. Vooral het werk van de TAL-groep dat is verwerkt in de zogeheten TAL-brochures heeft duidelijk wortel geschoten. De deelnemers vinden dat het rekenonderwijs vooral in moet zetten op het inzicht en op de betekenissen. Het onderwijs in het meten zou ook praktisch moeten zijn. Geen uitvoerige oefeningen in het metriek stelsel zonder daarbij te weten waar het eigenlijk om te doen is. Hoewel de meningen over het cijferen en het werken met algoritmen niet eenduidig waren, ziet men graag dat er niet te veel onderwijstijd aan wordt besteed. De verschillen tussen de deelnemers hebben meestal vooral betrekking op detailkwesties en gaan vooral ook over het maken van didactische keuzen. Op deze zaken kunnen wij in het bestek van dit artikel helaas niet dieper ingaan, omdat we dan veel meer papierruimte ter beschikking zouden moeten hebben. Wel maakt het duidelijk dat het in onze vakwereld lastig is om een scheiding te maken tussen wat de inhoud van het vak zou moeten zijn - de wiskunde - en de wijze waarop we dat in de didactiek hebben vertaald. Een dergelijke verwarring vertroebelt de discussies, ook in de communicatie naar de niet-vakwereld.

9 aanzet tot discussie

De hier beschreven enquête had een nogal sturend karakter. Hoewel het ideeën geeft over de opvattingen binnen deze groep - waarvan de meesten veel ervaring hebben met het realistische onderwijs in rekenen-wiskunde - is het de vraag of iedereen zich bewust was van de vraagstelling wat betreft het onderwijsbeleid: welke accenten zouden er gelegd moeten worden in het onderwijs van de toekomst? In de antwoorden horen we soms idealen, ja zelfs wensdromen doorklinken, zoals in de opmerkingen van een van de deelnemers:

Wat is voor welk kind nodig? Vervolgonderwijs. Dus als het niet noodzakelijk is om bepaalde kennis op te bouwen, dan dus ook niet doen. Zwakke leerlingen: Eigen oplossingsmethode. Indien dicht bij de context, dan zij dat zo. Geen vaste procedures opleggen.

In sommige antwoorden menen we frustratie te proeven van nog niet gehaalde doelen, zoals in:

Natuurlijk streef je naar het maximaal haalbare bij kinderen op alle domeinen. Je wilt dat kinderen zich een eigen manier aanleren, zelf hun kennisbasis/vaardigheden vormen en uitbreiden. Interactie (zowel horizontaal als verticaal/simultaan) is belangrijk. Diagnosticering van eventuele problematiek is van essentieel belang. Mag je accepteren dat leerlingen maar blijven aanmodderen?

Hoe het rekenonderwijs op de basisschool er over tien jaar uitziet, is nauwelijks te bepalen. Welke vingeroefening van futurologische aard je er ook op loslaat, er zijn teveel factoren die een rol spelen om te weten welke ontwikkelingen zullen plaatsvinden. Toch blijft de vraag: hoe te anticiperen? Waar gaan we naar toe met het rekenen - en niet te vergeten met de wiskunde? Deze vragen zijn niet los te zien van meer algemene vragen naar de betekenis van onderwijs. Respondenten die onderwijs vooral opvatten als instrument om kinderen op te leiden tot burgers die zich kunnen redden in de samenleving van morgen gaven andere antwoorden dan degenen die onderwijs ook zien als middel om cultuur over te dragen.

Het denken aan de toekomst dringt zich op als er zorgen zijn over de huidige toestand. En dat is al jaren het geval, want steeds worden we opgeschrikt door negatieve berichten in de pers over het niveau van de rekenvaardigheid. De suggestie wordt gewekt dat de kwaliteit van het Nederlandse rekenonderwijs steeds slechter wordt. Leerlingen beheersen de technieken en procedures van het rekenen onvoldoende. Ze zijn ook niet in staat om met algoritmen te werken. Veel leerlingen gebruiken nauwelijks kladpapier voor het noteren van tussenstappen. De boodschap daarbij is duidelijk: 'Er wordt maar wat gedaan'.

Niet zelden wordt daarbij teruggekeken naar het verleden. In de jaren vijftig van de vorige eeuw waren de leerlingen - met dank aan de Toetsnaald - in staat om op hoog niveau met getallen te goochelen. Staartdelingen werden uitgevoerd zonder dat er fouten werden gemaakt. Opa en oma weten je tenminste nog eens te verbazen met hun rekenkunsten. Van oma is dat iets minder zeker, want meisjes leerden ook nogal eens handwerken als jongens zich bogen over de zogenaamde vormsommen.

Ook onder de boodschap dat het vroeger allemaal beter was, ligt een opvatting over onderwijs. Verder lijkt hier ook sprake van een idealisering, waarbij louter wordt gekeken naar de maatschappelijke bovenlaag van de leerlingen die op weg naar het middelbaar onderwijs rekentechnieken - niet zelden op betekenisloze wijze - leerden toepassen.

Intussen zijn er al heel wat maatschappelijke ontwikkelingen geweest. Het onderwijs werd op de brede massa afgestemd, scholen hebben steeds meer

pedagogische en culturele taken toebedeeld gekregen. De leerlingen veranderden, zij leven in tegenstelling tot de oudere generaties van jongs af aan in een communicatiecultuur, waarin een groot beroep wordt gedaan op hun aandacht voor massamedia. Ook de leerstof is veranderd. Rekenen werd rekenen-wiskunde. Er zijn moderne rekenmethoden gekomen met een grootschalig aanbod aan diverse onderwerpen, waarbij vergeleken met de methoden van de jaren vijftig deze zich beperkten tot alleen maar het inoefenen van sommen en redactieopgaven.

Tijdens de Panama-conferentie 2008 hebben we tijdens een workshop met een groep deelnemers nagekaart over de enquête.

We constateerden dat er meer facetten zijn dan alleen de reken- en wiskunde-inhouden. Wat voor soort contexten zullen over tien jaar van nut zijn? Wat voor getallen spelen dan een rol (bij de computer spreken we al over gigabytes). Zou de manier waarop kinderen communiceren niet stevig veranderen? Zullen het type vragen en de manier waarop wordt gevraagd hetzelfde blijven? Komt er meer ruimte waarin leerlingen gaan conceptualiseren? En *last but not least*, het vakdidactische denken zal ook op grond van onderzoek veranderen.

10 ten slotte

Het is volstrekt zeker dat er wat gaat veranderen op het terrein van rekenen-wiskunde. Recent heeft de 'Expertgroep doorlopende leerlijnen taal en rekenen' - ofwel de 'commissie Meijerink' - haar visie gegeven op het rekenonderwijs. Hoewel nog niet duidelijk is of alle aanbevelingen door de bewindslieden zullen worden gevolgd, is nu al duidelijk dat er ingrijpende wijzigingen in het reken-wiskundeonderwijs zullen plaatsvinden. We hopen met dit verslag van de enquête, waarin de meningen van de ervaringsdeskundigen, opleiders, schooladviseurs en leerkrachten zijn verzameld, een waardevolle aanvulling te kunnen geven op het rapport van de commissie Meijerink, om zo een bijdrage te kunnen leveren aan de verbetering van het onderwijs.

literatuur

- Janssen, J., F. van der Schoot & B. Hemker (2005). *PPON (periodieke peiling van het onderwijsniveau). Balans (32) van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4*. Arnhem: Cito.
- Gravemeijer, K.P.E. (2007). Reken-wiskundeonderwijs anno 2007. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 26 (4), 3-10.
- TAL-team (2006). *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen. Tussendoele annex leerlijnen*. Groningen: Wolters Noordhoff.
- Expertgroep doorlopende leerlijnen taal en rekenen (2008). *Over de drempels met taal en rekenen*. Enschede: SLO.

Hoeveel probleemoplossingsopgaven zitten er in onze rekenwiskundemethoden?

A. Kolovou

Fisme, Universiteit Utrecht

M. van den Heuvel-Panhuizen

Fisme, Universiteit Utrecht/Humboldt Universiteit, Berlijn)

1 inleiding

Sinds 2004 wordt er in het POPO-project (Probleem Oplossen in het Primair Onderwijs) onderzoek gedaan naar het probleemoplossen door Nederlandse basisschoolleerlingen. De eerste resultaten lieten zien dat zelfs goede rekenaars van groep 6 hiermee grote moeite hadden (Van den Heuvel-Panhuizen & Bodin, 2004). Een volgende stap in het onderzoeksproject was te achterhalen waarom Nederlandse basisschoolleerlingen hierbij zo laag presteren. Om dit te weten te komen, zijn we gaan kijken naar de opgaven die de kinderen in de methoden aangeboden krijgen. Meer precies was onze onderzoeksvraag: Welk deel van het totale aanbod aan rekenopgaven in de reken-wiskundemethoden bestaat uit opgaven die vragen om probleemoplossen?

2 wat is probleemoplossen

Probleemoplossingsopgaven vragen meer van leerlingen dan het uitvoeren van bepaalde rekenprocedures. Bij het oplossen van problemen moeten de leerlingen zich er ook van bewust zijn hoe de getallen en de gegevens in de probleemsituatie samenhangen (O'Brien, 2007). Zij moeten het onderliggende patroon van het probleem kunnen vinden (Lesh & Zawojewski, 2007) of een model van de situatie kunnen construeren (Kilpatrick e.a., 2001). Dit alles betekent dat probleemoplossen als een hogere cognitieve activiteit moet worden beschouwd die strategisch denken met zich meebrengt. In veel gevallen vereist het oplossingsproces bovendien vaak meerdere stappen. De leerlingen moeten de probleemsituatie analyseren en

kunnen dan een oplossing op het spoor komen door bijvoorbeeld patronen te zoeken of systematisch mogelijkheden uit te proberen. Ze moeten daarbij relevante reken-wiskundige kennis mobiliseren en ten slotte hun denkwerk op de een of andere manier vastleggen. Een belangrijk kenmerk van probleemoplossingsopgaven is, dat het geen routineopgaven zijn. De opgaven moeten in zekere zin nieuw zijn voor de leerlingen, waarbij we ons er wel van bewust moeten zijn dat het onderscheid tussen routineopgaven en probleemoplossingsopgaven niet absoluut is (Zhu & Fan, 2006). Ook het ontwikkelingsniveau en de ervaring van de leerlingen zijn bepalend of een opgave een echte probleemoplossingsopgave is (Stein e.a., 2000).

3 methodeanalyse

geanalyseerde methoden

In de methodeanalyse hebben we de volgende methoden onderzocht: 'Pluspunt', 'De wereld in getallen', 'Rekenrijk', 'Talrijk', 'Wis en Reken' en 'Alles Telt'. Deze zes methoden dekken in totaal ongeveer 85 procent van het in Nederland in gebruik zijnde methodenbestand (Janssen e.a., 2005).

de analyse-eenheid

Bij de analyse hebben we de clusters van opgaven, waarin de opgaven in de reken-wiskundemethoden zijn geordend, als de analyse-eenheid genomen. Zo'n cluster kan bestaan uit een opgave of een paar rijtjes met sommen of een plaatje met een aantal vragen. Deze clusters kunnen als een didactische eenheid worden beschouwd, in de zin dat de opgaven van zo'n cluster bij elkaar horen en meestal een bepaalde leerinhoud behandelen.

categorieën van probleemoplossingsopgaven

Voor de methodeanalyse hebben we twee soorten probleemoplossingsopgaven onderscheiden: puzzelachtige opgaven en grijsgebiedopgaven.

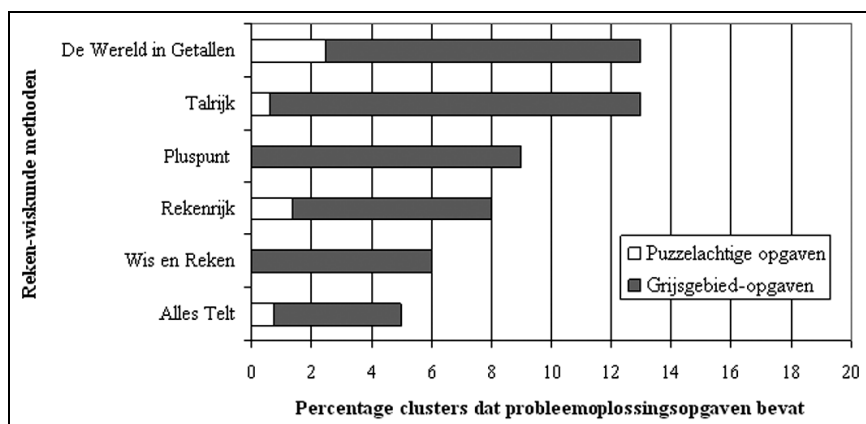
De puzzelachtige opgaven omvatten problemen die geen recht-toe-rechtaan oplossing hebben, maar strategisch denken en modelleeractiviteiten vereisen. Leerlingen kunnen deze opgaven aanpakken door een bepaalde oplossing uit te proberen (*trial-and-error*) of door naar een oplossing toe te werken door de getallen systematisch te variëren.

De grijsgebiedopgaven zijn geen echte puzzelachtige opgaven, maar ook geen echte routineopgaven. Ze kunnen strategisch denken voorbereiden en leerlingen op het spoor zetten van niet-routinematige aanpakken. Met andere woorden, grijsgebiedopgaven kunnen de ontwikkeling van probleemoplossingsstrategieën prikkelen.

Verder hebben we de twee categorieën van probleemoplossingsopgaven (puzzelachtige opgaven en grijsgebiedopgaven) nog in subcategorieën verdeeld. Bij de puzzelachtige opgaven hebben we een onderscheid gemaakt in 'contextproblemen' en 'problemen met kale getallen'. In beide subcategorieën vormen de vergelijkingen een hoofdgroep. Deze problemen zijn gebaseerd op een samenhang tussen twee of meer variabelen of tussen hoeveelheden. De categorie met grijsgebiedopgaven hebben we onderverdeeld in opgaven over 'getallen en bewerkingen', opgaven over 'patronen', en opgaven over 'combinatoriek'.

4 resultaten

Aan de hand van de onderscheiden categorieën van opgaven hebben we voor alle zes de methoden elk cluster van opgaven geënclassificeerd. Richtinggevend voor de classificatie was of het cluster een of meerdere puzzelachtige opgaven of grijsgebiedopgaven bevatte. Werden beide typen aangetroffen, dan werd de hoogste categorie als classificatie gebruikt. De uitkomst van dit analyseproces bracht aan het licht dat het aandeel puzzelachtige opgaven - de opgaven die echt probleemoplossen inhouden - zeer laag is (zie figuur 1).



figuur 1: percentage probleemoplossingsopgaven in zes reken-wiskundemethoden

Dit soort opgaven werd hoogstens in 2,4 procent van de clusters aangetroffen en dit was het geval in de methode 'De wereld in getallen'. De methode 'Rekenrijk' volgde met 1,4 procent, terwijl 'Talrijk' en 'Alles Telt' minder dan 1 procent puzzelachtige opgaven bevatten (respectievelijk 0,7 en 0,8 procent). In twee methoden, 'Pluspunt' en 'Wis en Reken' zijn helemaal

geen puzzelachtige opgaven gevonden. Ook als we de ruime categorie van probleemoplossingsopgaven bekijken (puzzelachtige opgaven en grijsgebiedopgaven) is de relatieve frequentie nog opmerkelijk laag. De methoden 'De wereld in getallen' en 'Talrijk' hebben het hoogste percentage probleemoplossingsopgaven: beide 13 procent. De andere methoden hebben minder dan 10 procent probleemoplossingsopgaven. 'Alles Telt' kwam met het kleinste percentage uit de bus: slechts 5 procent.

De resultaten tonen aan dat probleemoplossen en - in het bijzonder - de puzzelachtige opgaven een marginale plaats hebben in de zes onderzochte reken-wiskundemethoden. Voorts vonden we dat de probleemoplossingsopgaven in sommige methoden in het hoofdboek zijn opgenomen, terwijl ze in andere methoden in de kopieermap zitten. Bijvoorbeeld, in 'De wereld in getallen' bevindt 96 procent van de probleemoplossingsopgaven zich in het hoofdboek. Dit verschilt met 'Pluspunt', waar 22 procent van probleemoplossingsopgaven in het hoofdboek staat. In 'Talrijk' en in 'Rekenrijk' bevindt zich een vrij groot deel van de probleemoplossingsopgaven in de kopieerboeken (respectievelijk 43 en 46 procent). Het feit dat de probleemoplossingsopgaven in deze documenten te vinden zijn (die meestal als verrijkingsmateriaal bedoeld zijn) leidt ertoe dat niet alle leerlingen de kans zullen krijgen aan deze opgaven te werken.

5 conclusie en discussie

De percentages probleemoplossingsopgaven die we gevonden hebben in de zes onderzochte reken-wiskundemethoden waren teleurstellend laag. Een andere conclusie is nog dat de probleemoplossingsopgaven lang niet altijd in het hoofdboek zitten. In feite, moeten we ons serieus afvragen of de gemiddelde Nederlandse leerling in de reken-wiskundeles wel ooit met probleemoplossingsopgaven en in het bijzonder met puzzelachtige opgaven in aanraking komt.

Ofschoon de gevonden resultaten deze conclusie alleszins rechtvaardigen, kent ons onderzoek wel een aantal beperkingen. Op de eerste plaats hebben we in dit onderzoek additionele materialen buiten de analyse gehouden. Bekend is dat Nederlandse leraren hier veelvuldig gebruik van maken. Janssen e.a. (2005) geven aan dat dit geldt voor ongeveer tweederde van de leraren. Vanwege de grote diversiteit aan beschikbare, aanvullende materialen en de onduidelijkheid over wie, wat en met welk doel gebruikt, hebben we ons beperkt tot de analyse van de zes reken-wiskundemethoden. Nader beschouwd hoeft het weglaten van dit additionele materiaal onze conclusies niet erg vertekend te hebben, omdat dit additionele mate-

riaal meestal uit oefenmateriaal of remediëringmateriaal bestaat en niet uit niet-routinematige probleemoplossingsopgaven.

Een andere beperking van ons onderzoek is, dat we buiten beschouwing hebben gelaten hoe leraren de inhoud van de methoden interpreteren. Zoals Gilbert (geciteerd in Haggarty & Pepin, 2002) benadrukte, kan men er niet van uitgaan dat wat in de methoden aanwezig is, op dezelfde manier in de les wordt gerealiseerd. Daarop zou gecontroleerd moeten worden. In ons onderzoek hebben we dit niet gedaan. Het zou dus kunnen dat leraren het aanbod in de methoden aanpassen en probleemoplossingsopgaven toevoegen. De kans hierop is echter klein, gezien het feit dat het echte probleemoplossen niet in de kerndoelen is opgenomen en ook niet wordt getoetst in de Cito Eindtoets Basisonderwijs en de Cito-LOVS-toetsen. Daarom denken we dat de resultaten van onze methodeanalyse een goede indicator zijn voor de mate waarin het niet-routinematige probleemoplossen aandacht krijgt in het Nederlandse basisonderwijs. De gevonden lage percentages staan echter in schril contrast met het belang van probleemoplossen, dat leerlingen immers voorbereidt op het algebraïsche denken. Het opsporen van inconsistenties tussen wat we belangrijk vinden om onze leerlingen te leren en wat wordt aangeboden in de gebruikte lesmaterialen, is van essentieel belang om ons onderwijs te verbeteren. Wij zien methodeanalyse als een middel om belangrijke onderwerpen voor het reken-wiskundecurriculum onder de aandacht te brengen en bijgevolg als een essentieel instrument voor de verbetering van het onderwijs. Om dit potentieel te realiseren is verder onderzoek op het gebied van methodeanalyse nodig.

literatuur

- Gilbert, R. (1989) Text analysis and ideology critique of curricula r content. In: S. Castell, A. Luke & C. Luke (eds). *Language, Authority and Criticism: readings on the school textbook*. London: Falmer Press.
- Haggarty, L. & B. Pepin (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German Classrooms: Who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal*, 28(4), 567-590.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den & C. Bodin-Baarends (2004). All or nothing: Problem solving by high achievers in mathematics. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education*, 8(3), 115-121.
- Janssen, J., F. van der Schoot & B. Hemker (2005). *Periodieke peiling van het onderwijsniveau (PPON). Balans (32) van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4*. Arnhem: Cito.
- Kilpatrick, J., J. Swafford & B. Findell (eds.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Lesh, R. & J.S. Zawojewski (2007). Problem solving and modeling. In: F. K. Lester, Jr. (ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics*, 2, Charlotte, NC: Information Age Publishing, 763-804.

- O'Brien, T.C. & A. Moss (2007). What's basic in mathematics? *Mathematics Teaching*, 202, 26-27.
- Stein, M.K., S. Schwan, A. Henningsen & E. Silver (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction*. New York: Teachers College Press.
- Zhu, Y. & L. Fan (2006). Focus on the Representation of Problem Types in Intended Curriculum: A Comparison of Selected Mathematics Textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4), 609-626.

Empowerment bij reken- gesprekken

- pedagogisch-didactische fijn-afstemming bij leerlingen met rekenproblemen -

H. Logtenberg

Hs Windesheim, Opleidingen Speciale Onderwijszorg

1 inleiding

Hoe kun je als leerkracht in het primair onderwijs snel en effectief inzicht krijgen in specifieke ondersteunings- en instructiebehoeften bij leerlingen met rekenproblemen? Welke actieve rol en betekenisvolle input kan de leerling zelf spelen en leveren om tot meer rendement te komen? In samenwerking met een drietal studenten van de Windesheim Opleidingen Speciale Onderwijszorg heb ik een 'Protocol voor Rekengesprekken'¹ ontwikkeld, waarmee je als leerkracht op een snelle, handzame en effectieve manier inzicht kunt krijgen in de pedagogische en didactische problematiek van leerlingen met rekenproblemen.

2 welke leerlingen?

Naar analogie van het vanzogenoemde 'Organisatorisch Continuüm voor de zorgroute voor leerlingen met leesproblemen en dyslexie' (2005) hebben wij binnen onze opleidingen een zogenoemd Organisatorisch Continuüm voor de zorgroute van leerlingen met rekenproblemen en dyscalculie ontwikkeld (fig.1).

Leerlingen die voor het rekengesprek in aanmerking komen zijn de leerlingen van stap 5 in de zorgroute voor leerlingen met rekenproblemen en dyscalculie. Het gaat om de zwakste 10 procent leerlingen (zwak tot zeer zwakke leerlingen, leerlingen met een Citoscore *E*); leerlingen die gebaat zijn bij extra individuele instructie door een leerkracht en/of remedial teacher binnen of buiten de reguliere groep.

Het rekengesprek kan door de leerkracht en/of remedial teacher zelf worden afgenomen, binnen of buiten de eigen klassensituatie (dit zal afhan-

kelijk zijn van de eigen school- en klassensituatie). Voor het rekengesprek staat een tijdsduur van twintig á dertig minuten. Het Protocol is ontwikkeld voor leerlingen met rekenproblemen in de leeftijdsgroep negen tot twaalf jaar in het primair onderwijs. .

Stap	Inhoud
1	Kwaliteit instructiegedrag en klassenmanagement
2	Juiste uitvoering van effectieve methodes voor rekenen-wiskunde
3	Gebruik leerlingvolgsysteem voor reken-wiskunde
4	Vaststellen van potentiële uitvallers (zwakste 25 procent). Differentiatie bij het reken-wiskunde onderwijs. Aanpak binnen de klas
5	Vaststellen van leerlingen met ernstige rekenproblemen (zwakste 10%). Individuele instructie
6	Vaststellen van achterstand en hardnekkigheid van het leesprobleem; vermoeden van dyscalculie (± 5 procent)
7	Psychodiagnostisch onderzoek naar de ernstige rekenproblemen / dyscalculie
8	Gespecialiseerde behandeling
9	Coaching van de leerlingen met ernstige rekenproblemen / dyscalculie

figuur 1: zorgroute voor leerlingen met rekenproblemen en dyscalculie

Een dertigtal studenten van de 'Windesheim Opleidingen Speciale Onderwijszorg' hebben inmiddels met het Protocol gewerkt en geven aan dat het gebruikt kan worden voor leerlingen in het primair onderwijs vanaf groep 5, het voortgezet onderwijs tot en met de eerste twee leerjaren én het speciaal onderwijs bij een IQ van boven de zeventig en een redelijke mondelinge uitdrukkingsvaardigheid. De vragen blijken eenvoudig van aard te zijn, maar wel mogelijkheid tot verdieping te bieden. Een studente schrijft:

In januari 2008 heb ik een rekengesprek volgens het 'Protocol Rekengesprek' met *R.* gevoerd. Wat ik goed aan dit Protocol vind is dat je niet alleen onderzoekt hoe een leerling tegen het rekenen aankijkt ('moeilijke sommen vind ik irritant, oh nee ... ik moet weer rekenen, het lijkt dan alsof ik het haat') en waarbij ('van die hele hoge sommen, grote getallen!') en hoe ('vooraan zitten en bij de instructietafel, maar niet met *D.* die vindt rekenen gaaf, dan krijg ik soms een dom gevoel...Het fijnste met iemand net als ik.') de leerling graag geholpen wil worden, maar dat er rekening gehouden moet worden met de deskundigheid van de leerling zelf! Socrates noemde het de deskundigheid van de ander naar buiten halen, want wees ervan overtuigd dat de mens deskundig is over zichzelf. *R.* geeft in het gesprek precies aan wat hij moeilijk vindt en waar hij graag bij geholpen wil worden.

Het Protocol voor een rekengesprek kan als een aanvullend instrument

voor rekeninterventies gebruikt worden, niet als vervangend instrument voor uitgebreid diagnostisch onderzoek. Het rekengesprek is een ondersteunende interventie waarop vervolg-rekeninterventies mede gebaseerd kunnen worden.

3 onderbouwing

Uit nationale en internationale literatuur blijkt dat leerlingen te weinig betrokken worden als bron van informatie bij (reken)interventies. Rekers en Harinck (2004) valt het op dat een meerderheid van de remedial teachers het kind te weinig betreft bij de opzet, uitvoering en evaluatie van de handelingsplanning. Vragen als: 'wat ervaart het kind als probleem en hoe kijkt het kind tegen de problemen en oplossingen aan?', blijven liggen. Kaplan e.a. (2000) merken op dat we bij de rekenproblemen van de leerlingen méér moeten kijken vanuit het perspectief van de leerlingen. Anders leidt het rekenen voor leerlingen met rekenproblemen tot het uitvoeren van betekenisloze routines en onoverkomelijke obstakels, waardoor zij alleen maar negatieve rekenervaringen opdoen. Volgens Buschman (2001) gaat het bij het rekenonderzoek niet alleen om onderzoek naar de probleemoplossende houdingen, maar ook om gedragsaspecten en karaktertrekken (zoals geduld, volharding en positieve kijk) die van invloed kunnen zijn op de rekenprestaties. Het rekengesprek leent zich volgens Ginsburg (1997) ervoor om inzichten te genereren in het functioneren van het individuele kind, waardoor de kans op succesvolle afstemming op de rekenproblemen stijgt. De conclusies van Kaplan, Bushman en Ginsburg zijn rekeninhoudelijke aanjagers geweest voor het ontwikkelen van een Protocol voor een rekengesprek. In het Protocol zijn de conclusies van de Kaplan, Bushman en Ginsburg verwerkt in de items van de romp van het rekengesprek.

4 het rekengesprek

Voor de definiëring en opbouw van het rekengesprek hebben we bij de ontwikkeling van het Protocol gebruik gemaakt van het boek van Delfos (2005), 'Luister jij wel naar mij?' In het rekengesprek gaat het om de *empowerment* van de leerling zélf: de actieve rol die de leerling zélf kan hebben, en de betekenisvolle input die de leerling in de communicatie kan leveren. Het doel van het rekengesprek is om, door extra gebruik te maken van de deskundigheid van de leerling zélf, het stagnerende schoolse rekenproces bij de leerling een extra impuls te geven om weer op gang te komen

en/of beter te laten verlopen. Het gaat in het rekengesprek om een gesprek over rekenproblemen, waarbij we achter de mening en gevoelens van de leerling proberen te komen, maar óók om informatie van de leerling zélf met betrekking tot het rekenprobleem te krijgen.

De basisvoorwaarde voor een goed rekengesprek ligt in de attitude van de leerkracht. De leerkracht dient een sfeer te creëren van vertrouwen, waarin er warmte, respect, echtheid, acceptatie en belangstelling is voor de leerling. In deze attitude moet de grondhouding van de leerkracht naar voren komen: informatie uit het kind zélf laten komen. Daarnaast zijn kennis en inzicht in de ontwikkelingsfase van de leerling en de aard van communiceren van leerlingen van belang. Voor rekenen is het van belang dat de leerkracht kennis en inzicht heeft van de onderhavige rekenproblematiek. Delfos formuleert nog een aantal randvoorwaarden, het gesprekskader, waaraan voldaan dient te worden, wil het rekengesprek gaan lopen. Concreet gaat het hierbij om: het spreken van de taal van het kind, het bespreken met de leerling van de ruimte waarin het gesprek plaats vindt (de plek waar de leerling zich op zijn gemak voelt) en hoe het gesprek plaats vindt (zittend, wandelend, spelend), tweerichtingenverkeer (waarbij het vooral gaat om de mening, gevoelens en de informatie van het kind zélf) én kennis die het kind heeft over de aard van het gesprek.

Bij de gesprekstechnieken gaat het om de technieken bij de opbouw van het gesprek, het type vragen en het instrument om het gesprek gaande te houden. Het rekengesprek bestaat uit vijf fasen: voorbereiding, introductie, de startvraag, de romp en de afronding. In de handleiding bij het Protocol worden bij alle vijf onderdelen aanwijzingen en suggesties gegeven voor de uitwerking. Zo staan er bij de romp een achttal subitems, waarbij bij elk subitem concrete vragen zijn geformuleerd. Bijvoorbeeld bij het subitem algemeen: wat is voor jou belangrijk om goed te kunnen rekenen?; het subitem gevoel: wat heb je bij het maken van sommen wel eens heel erg leuk gevonden?; het subitem sommen: wat voor sommen doe je graag?; subitem manier van rekenen: hoe reken jij het liefst?; het subitem plek: op welke plek kun jij het beste rekenen? En zo verder. Het type vragen dat het meest toegepast wordt in het rekengesprek zijn de open-vragen, het doorvragen en het parafraseren (in eigen woorden herhalen wat de leerling op een vraag beantwoord heeft). Voor het op gang houden van het gesprek wordt gebruikt gemaakt van meta-communicatie, dat wil zeggen communicatie over de communicatie. Je gaat als gespreksleider als het ware 'boven het gesprek hangen' en benoemt de punten die je vergeten bent (reparatie), maar ook wat je denkt of voelt (check). Verder laat je de leerling weten wat je intenties zijn, dat je feedback van de leerling nodig hebt, maar dat de leerling ook mag zwijgen.

5 protocol

Het Protocol voor een rekengesprek bestaat in totaal uit vier onderdelen: handleiding, protocol, notatieformulier en samenvattingsformulier. In de handleiding worden summier de aanleiding, het doel, de uitgangspunten en instructies voor het rekengesprek geformuleerd. In het Protocol zelf worden, zoals eerder aangegeven, de vijf basisonderdelen van het gesprek uitgewerkt. Tijdens het gesprek kunnen er op het notatieformulier bij elk onderdeel van het rekengesprek (en deelvragen) antwoorden, reacties van de leerlingen zélf of opmerkingen van de leerkracht genoteerd worden (fig.2).

Gedeelte notatieformulier	
Startvraag	Opmerkingen
Waar denk je aan bij het woord rekenen?	
Sommen	Opmerkingen
Wat voor sommen doe je graag?	
Wat vind je makkelijk en wat vind je moeilijk bij rekenen?	
Manier van reken	Opmerkingen
Hoe reken jij het liefst?	
Wat voor materiaal gebruik jij het liefst?	

figuur 2

Het samenvattingsformulier bestaat uit vijf blokken. In de eerste drie blokken kan de leerkracht de ervaringen van de leerling, motivatie van de leerling én het beeld wat de leerling heeft van rekenen samenvatten. Op basis van deze samenvatting kan de leerkracht een soort ondersteunende mini-theorie formuleren waarop de vervolg-rekeninterventies gebaseerd zullen zijn. De mini-theorie is een veronderstelling gebaseerd op de uitkomsten van het rekengesprek, ervaring en literatuur. Op basis van de mini-theorie kan de leerkracht in het vierde blok hulpvragen van de leerling formuleren: bijv. de leerling heeft instructie, opdrachten, activiteiten, *feedback* nodig bij ... In het vijfde blok kan de leerkracht nog aanvullende opmerkingen verwerken naar aanleiding van het gesprek.

6 resultaten

Uit ons kleinschalig praktijkonderzoek (meervoudige *case study*) blijkt, dat leerlingen die een rekengesprek hebben gehad en waarvan de uitkomsten toegepast zijn in vervolg-rekeninterventies (bij het type sommen dat problemen oplevert) de rekenresultaten gemiddeld 25 procent méér stijgen, dan bij de leerlingen waarbij de vervolg-rekeninterventies níét gebaseerd zijn op een rekengesprek.

De waardering voor de vervolg-rekeninterventies blijken bij leerlingen die een rekengesprek hebben gehad hoger te zijn en aanzienlijk meer te zijn gestegen (ongeveer 65 procent) dan bij leerlingen die geen rekengesprek hebben gehad. Eerste reacties van Windesheim OSO-studenten die werken met het Protocol rekengesprek zijn bemoedigend. Studenten geven aan dat het lijn en structuur in het gesprek brengt en dat de spraakzaamheid van de leerling, doordat de leerling onderwijl ergens mee bezig is (bouwen, tekenen en kleuren, samen een spelletje doen) stijgt. Wel dient er in de romp van het gesprek meer ruimte te worden gereserveerd voor de diagnostische analyse van het rekenprobleem. Dit kan eenvoudig gedaan worden door het samen met de leerling een rekenprobleem te analyseren al of niet met behulp van rekenmateriaal. Omdat de vervolg-rekeninterventies door middel van het rekengesprek méér afgestemd kunnen worden op de totale rekenproblematiek én interesses van de leerlingen zie je het enthousiasme van de leerlingen voor het rekenen groeien.

Tijdens het praktijkonderzoek en de toepassing van het Protocol krijg ik door middel van video-opnamen en presentaties van studenten een indruk van het werken met het 'Protocol' rekengesprek. Wat opvalt is, dat leerkrachten creatief zijn in het vinden van oplossingen om leerlingen tijdens het gesprek met iets bezig te laten zijn. Je ziet leerlingen enthousiast bouwen met blokken, tekenen en kleuren of samen met de leerkracht een spelletje Memory spelen. Tussen het bouwen, tekenen en spelen door stelt de leerkracht de vragen (waarbij zo en dan het spel even wordt stil gelegd). Doordat de leerlingen met iets bezig zijn, wat hun aandacht vangt, leidt dit de aandacht wat af, van het voor hen soms zo beladen onderwerp 'rekenen'.

In de vervolg-rekeninterventies zie ik de uitkomsten van het rekengesprek terugkomen. Leerlingen werken aan een speciaal voor hen ontworpen boerderij-, paarden of voetbalspel. Doordat de rekenproblematiek verweven is in het interessegebied van de leerlingen gaan de leerlingen spelenderwijs met de rekenproblemen aan de gang. De motivatie van de leerling groeit, omdat er speciaal iets voor hem of haar gemaakt is. De leerkracht gaat op in het groeiende enthousiasme van de leerling en blijft dóór-ontwikkelen, totdat er een compleet spel ontstaat, klaar voor een presentatie aan een uitgeefster.

7 denken is een gesprek voeren

Tijdens een presentatie van een video-opname van het rekengesprek aan vakcollega's merkte één van de aanwezigen op, naar aanleiding van de vraag: 'Wat neem je waar bij het kind tijdens het rekengesprek?' of: 'Ik heb de leerling alleen nog maar horen hoesten!' Dat de introverte leerling langzaam aan het ontdoeien was tijdens het rekengesprek, begon te praten over rekenen en betrokken was geraakt bij het rekenprobleem, was de collega kennelijk ontgaan. Net als de metamorfose van de gespannen blik naar de ontspannen glimlach waarschijnlijk. Had de collega dit niet gezien, of was zijn focus op iets anders gericht? Wat een gemiste kans zou dit wellicht in de praktijk geweest kunnen zijn, om bij de positieve rekenervaringen van de leerling aan te sluiten. Want bij een rekengesprek activeer je het rekendenkwerk van de leerling én mobiliseer je de eigen krachten van de leerling om zodoende tot een verfijnde afstemming te komen bij vervolg-rekeninterventies, met de kans om tot betekenisvoller rekenonderwijs te komen bij de leerling met de specifieke ondersteunings- en instructiebehoefte.

noot

- 1 Het protocol is te vinden op www.fi.uu.nl/panama in het conferentiearchief 2008.

literatuur

- Buschman, L. (2001). Using student interviews to guide classroom instruction. *Teaching Children Mathematics*, 8(4), 222-227.
- Delfos, M. (2005). *Luister jij wel naar mij?* Amsterdam: Uitgeverij SWP.
- Ginsburg, H.P. *Entering the child's mind*. New York (US): Cambridge University Press.
- Kaplan, R.G., B. King, N. Dickens & V. Stanley (2000). *Teaching Children Mathematics*, february 2002, 406-411.
- Rekers, M. & F. Harinck (2004). Remedial Teaching: een kwestie van planmatig handelen. Of niet?. *Tijdschrift voor Remedial Teaching*, 12 (3), 4 - 10.
- Struiksma, A.J.C. (2005). *Organisatorisch Continuüm voor de zorgroute van leerlingen met leesproblemen en dyslexie*. 's Hertogenbosch: Masterplan Dyslexie.

Op zoek naar indicatoren van gecijferdheid

W. Oonk
Flsme, Universiteit Utrecht

1 inleiding

Er is de laatste jaren veel gediscussieerd en gepubliceerd over de gecijferdheid bij leerlingen, in het bijzonder over de mate van gecijferdheid van aanstaande leraren basisonderwijs. In het afgelopen jaar verschenen er ook weer diverse publicaties over dit onderwerp.

Zo schreef Garssen (2007) onder de titel 'Vraag jezelf eens wat af!', een artikel over een werkwijze voor de opleiding die beoogt de houding van pabo-studenten ten aanzien van gecijferdheid te veranderen. Die werkwijze zou dan een verandering teweeg moeten brengen van een formele, antwoordgerichte houding naar een nieuwsgierige, onderzoekende houding met betrekking tot reken-wiskundige aspecten in het dagelijks leven.

Hoogland en Meeder (2007) probeerden de discussie over gecijferdheid een impuls te geven door het in beeld brengen van een keur aan situaties waarin getallen, patronen en structuren een rol spelen, met als afsluiting een aantal vaak gestelde vragen over onderwijs op het gebied van gecijferdheid.

Van Zanten en Van den Brom-Snijders (2007) schreven over de consequenties van de invoer van de verplichte landelijke rekentoets voor pabo's. Doordat de meeste pabo's de tot dan toe gehanteerde toetsen - van een hoger niveau dan de nu verplichte toetsen - hebben afgeschaft, verwachten ze een niveauverlaging in plaats van een verhoging van rekenvaardigheid en gecijferdheid. Ze pleiten voor aanvullende toetsing van een adequaat niveau.

Oonk e.a. (2007) gaven een overzicht van vier eeuwen ontwikkeling van (onderwijs) in gecijferdheid. Zij sloten af met een perspectief voor de ontwikkeling van gecijferdheid bij pabo-studenten. Ze zien die ontwikkeling als een amalgaam van vier componenten, een groei in kennis, vaardigheid en houding die zich spiraalsgewijs ontwikkelt. Bij de ervaren leraar zouden de componenten gaandeweg als 'viercomponentenlijm' geïntegreerd moeten zijn.

De 'Panama Kerngroep Opleiders' besteedde vanzelfsprekend in haar publicatie 'Opleiden in geuren en kleuren' (Van Zanten & Van Gool, 2007) ook aandacht aan gecijferdheid. Door de casus van eerstejaarsstudente Aischa krijgt de lezer inzicht in de problemen die door Wiscat-pabotoets worden opgeworpen. De beide in het oog springende 'bakens' van het hoofdstuk over gecijferdheid, geven een korte samenvatting van de opvattingen die er bij de leden van de Kerngroep en ongetwijfeld bij het merendeel van de opleiders W&D leven omtrent de ontwikkeling van gecijferdheid bij aanstaande leraren. De volgende uitspraak van een opleider bij het eerste baken, spreekt wat dat betreft boekdelen:

Mijn ervaring is dat studenten die onvoldoende gecijferd zijn, hun leerlingen (onbewust) dwingen tot standaardaanpakken en zich vaak beperken tot een didactiek van voordoen en nadoen. (pag.47).

Zoals al blijkt uit de genoemde publicaties van het afgelopen jaar is er zo langzamerhand veel bekend over gecijferdheid. In alles wat er gezegd en geschreven wordt valt echter op dat er nog weinig duidelijkheid is over hoe je op denk- en handelingsniveau kunt waarnemen in hoeverre iemand gecijferd is. Wat zijn de indicatoren van gecijferdheid?

Tijdens de 26^{ste} Panama-conferentie heeft een werkgroep zich beziggehouden met dit onderwerp. De focus was daarbij gericht op indicatoren van gecijferdheid bij pabo-studenten. Aan de hand van opgaven uit het onderzoek 'Theorie in Praktijk' (TIP; Oonk, 2003, 2004) werd gezocht naar indicatoren van (on)gecijferdheid. Dat gebeurde in een meewerkpracticum, waarbij alternerend in kleine groepen gewerkt werd en plenair verslag werd gedaan en gediscussieerd. Het accent lag daarbij op de analyse van het studentenwerk en mogelijkheden om studenten tot niveauverhoging te brengen.

Hierna wordt allereerst kort aangegeven wat de plaats is van gecijferdheid in het onderzoek TIP en wordt enige informatie gegeven over welke aspecten van gecijferdheid daarbij een rol spelen. Vervolgens wordt aan de hand van enkele uitwerkingen van studenten een korte 'zoektocht' gemaakt naar indicatoren van gecijferdheid. Er wordt afgesloten met de schets van een perspectief voor de ontwikkeling van gecijferdheid voor aanstaande leraren.

2 niveaus van gecijferdheid en bijbehorende indicatoren

niveaus van gecijferdheid in recente literatuur

McIntosh e.a. (1992) spreken in het kader van de analyse van gecijferdheid

over drie dimensies van getalgevoeligheid: een getals-, een bewerkings- en een toepassingsdimensie. De derde en laatste dimensie bestrijkt onder meer het analyseren en correct oplossen van problemen en daarbij de kritische reflectie achteraf op het proces van redeneren en besluiten.

In de 'Proeve van een nationaal programma voor rekenen-wiskunde & didactiek op de pabo' (Goffree & Dolk, 1995), worden negen bakens beschreven in de lijn van rekenvaardig naar gecijferd door de gehele opleiding (pag.31-35); de bakens beschrijven een geheel van reken-wiskundige en didactische componenten van gecijferdheid.

Goffree (1995) onderscheidt drie niveaus van gecijferdheid, namelijk elementaire-, gevorderde- en professionele gecijferdheid. Op tenminste het niveau van elementaire gecijferdheid functioneert iedere burger die zich kan redden in veel voorkomende situaties in het dagelijks leven. Voor het niveau van gevorderde gecijferdheid verwijst Goffree naar het boek van Paulos (1989) en distilleert daaruit dertien bouwstenen die hij typeert als een geïntegreerd geheel van gezond verstand en wiskundekennis. Net als bij Paulos ligt er een tamelijk zwaar accent op statistisch denken en kansrekenen. Professionele gecijferdheid is het niveau waarop de beroepsuitoefenaar functioneert. Voor de leraar gaat het dan om de didactische component van de gecijferdheid.

Bokhove (1995) noemt - impliciet - een aantal aspecten van gecijferdheid naar aanleiding van zijn analyse van de oplossingsaanpakken van ruim honderd leerlingen in het PPON-onderzoek van 1992:

- kennis van getallen, getalrelaties, bewerkingen en oplossingsstrategieën en het vermogen om die kennis efficiënt en op het goede moment in te zetten;
- kennis van 'de wereld' en die kennis toepassen op basis van gezond-verstand-redeneren;
- het herkennen van (reken)bewerkingen in contexten en gebruikmaken van eigenschappen van die contexten (denk bijvoorbeeld aan geldcontexten);
- reflectie op antwoorden met het oog op de context, dat wil zeggen de antwoorden kunnen beoordelen op juistheid of waarschijnlijkheid en waar nodig het antwoord corrigeren;
- gebruikmaken van passende referenties, hulpcontexten en andere concretisering.

Bokhove vindt dat 'gecijferdheid op zeer veel niveaus beschouwd kan worden, met hele getallen, maar ook met breuken en kommagetallen' (pag.8). Hij staft zijn bewering met voorbeelden uit het 'Periodiek Peilingsonderzoek' (PPON), zoals de delingsalgoritme '2475 supporters vervoeren met bussen van 48 personen, hoeveel bussen nodig?' en de opgave ' $0,497 \times 48$ is ongeveer?'

Treffers (1995) spreekt over 'gradaties van gecijferdheid' (pag.13). Algemeen geldt volgens Treffers als criterium - voor wat hij als 'basale gecijferdheid' betitelt - dat men de betreffende getallen kan ordenen, kan plaatsen op de getallenlijn en zodoende een idee heeft van de orde van grootte van die getallen. Dat geldt dan in een bepaald getallengebied, bijvoorbeeld dat van de kommagetallen. Een ander criterium is dat men inzicht heeft in hoe de (basis)operaties met getallen uitwerken en dat men de relaties tussen die operaties doorziet. Een derde criterium is dat men de basisbewerkingen op de geëigende problemen kan toepassen, zowel globaal als precies rekenend, waarbij het resultaat op redelijkheid kan worden ingeschat.

Van Groenestijn (2002) benadert het concept gecijferdheid vanuit de optiek van de volwasseneneducatie. Zij onderscheidt drie niveaus van gecijferdheid: elementaire, functionele en optimale gecijferdheid. Iemand is elementair gecijferd als hij of zij beschikt over minimale rekenvaardigheid in combinatie met elementaire communicatieve vaardigheden om te kunnen functioneren in werk en persoonlijk leven; hulp van anderen is nodig in bepaalde situaties. Iemand die functioneel gecijferd is, kan zijn handelen flexibel aanpassen aan nieuwe ontwikkelingen in de maatschappij. Iemand is optimaal gecijferd als hij of zij beschikt over een breed scala van wiskundige kennis en vaardigheden, meer dan nodig om adequaat te kunnen handelen in het persoonlijk, professioneel en maatschappelijk leven en om kritisch te kunnen reflecteren op maatschappelijke ontwikkelingen. Goffree en Oonk (2004) hanteren in het boek 'Rekenvaardig. Op weg naar basale en professionele gecijferdheid' twee niveaus van gecijferdheid, zoals uit de titel al blijkt.

Basale gecijferdheid is het niveau van gecijferdheid dat de grondslag biedt voor het rekenen vanaf groep vijf van de basisschool en dat bovendien een basis vormt voor het rekenen in het leven van alledag. Het niveau van professionele gecijferdheid voor aanstaande leraren basisonderwijs wordt vooral bepaald door het vermogen om het eigen (reken)werk te verdiepen en didactisch te verrijken.

niveaus van gecijferdheid in het onderzoek TIP

In het onderzoek 'Theorie in Praktijk' (TIP) onder 269 studenten van elf pabo's, is na afloop van de onderzoeksmodule die de studenten werd aangeboden een 'peiling gecijferdheid' afgenomen. De peiling leverde informatie over het niveau van rekenvaardigheid c.q. gecijferdheid van de deelnemende studenten en over de mate waarin studenten zelf de moeilijkheid van de gebruikte opgaven inschatten. De uitkomsten van de peiling werden gebruikt voor het beantwoorden van een subvraag van het onderzoek, namelijk de vraag of er een significante correlatie bestaat tussen de mate van gecijferdheid van studenten en hun vermogen om didactische begrippen te

gebruiken in praktijksituaties. De peilingsopgaven waren afgeleid van de in het jaar van afname (2003) op pabo's veel gebruikte opgaven uit de publicatie 'Gecijferdheid' van de HBO-raad (Faes e.a., 1992), waaronder 'kale rekenopgaven', zoals $0,25 \times 2,5 \times 48000 =$. De opgaven zijn aangepast om ze geschikt te maken voor het peilen van aspecten van gecijferdheid, zoals het reflectief vermogen van studenten en hun wiskundige attitude. Vooral door de beide karakteristieken 'wiskundige attitude' en 'reflectief vermogen' wordt in het onderzoek TIP gecijferdheid onderscheiden van rekenvaardigheid. Rekenvaardigheid kan beschouwd worden als een - essentiële - basiscomponent van gecijferdheid. Hoewel er in de praktijk niet altijd een duidelijke scheidslijn is tussen die twee, gaat het bij rekenvaardigheid vooral om de vaardigheid in het gebruik van rekentechnieken en procedures om zo effectief en zo efficiënt mogelijk tot antwoorden van rekenproblemen te komen. In 'gecijferdheidssituaties' wordt - behalve op de rekenvaardigheid - een beroep gedaan op de wiskundige attitude van degenen die op de situatie moet inspelen en wordt het reflectieve vermogen ingezet om de situatie kritisch te interpreteren en om ook achteraf de gevonden oplossingen terug te kunnen koppelen naar consequenties voor de gegeven probleemsituatie.

Ten behoeve van het onderzoek werden zes niveaus van gecijferdheid beschreven. De niveaus worden voor een belangrijk deel medebepaald door de aard van de leerstofdomeinen, door moeilijkheidsgraad van de problemen die aan de orde (kunnen) komen en door de niveaus van oplossen. Zo wordt iemand die de opgave: 'Hoeveel kosten vier paar sokken van € 4,95' oplost door te redeneren: $4 \times € 5 - 4 \times € 0,05 = € 19,80$ geacht op een hoger niveau van gecijferdheid te functioneren dan degene die het probleem algoritmisch te lijf gaat met een cijferopgave.

Hierna worden drie competenties van gecijferdheid voor (aanstaande) leraren beschreven en daarna de zes niveaus met enkele voorbeelden van bijbehorende indicatoren. De indicatoren kunnen dienen als gereedschap voor het peilen van de gecijferdheid.

competenties van gecijferdheid

- 1 De student kan beschikken over de kennis en inzichten voor rekenen en wiskunde op het betreffende niveau (1 tot 6; zie volgende paragraaf) en beheerst de vaardigheden op dat niveau, inclusief het daarbij behorend gebruik van wiskundetaal en het niveau van wiskundig redeneren.
- 2 De student ontwikkelt een wiskundige attitude die groeit naar een (didactisch) ontwerpniveau (niveau 6).
- 3 De student beschikt over een reflectief vermogen dat hem of haar in

staat stelt de eigen oplossingen en het oplossingsgedrag in beschouwing te nemen, waar mogelijk in het perspectief van een verbeterde of alternatieve aanpak.

De drie competenties hangen nauw samen.

zes niveaus van gecijferdheid van pabo-studenten

niveau 1: eind groep 6

De kennis, vaardigheden en inzichten van niveau 1 en het bij dat niveau behorende gebruik van wiskundetaal en het niveau van wiskundig redeneren, zijn vergelijkbaar met het niveau eind groep zes. Deze vormen het fundament voor het verdere rekenen op de basisschool (niveau 90-100 procent PPON).

Voorbeeld van een indicator bij niveau 1

De student heeft bij het maken van berekeningen de tafels van vermenigvuldiging paraat.

niveau 2: eind groep 8

De kennis, vaardigheden en inzichten van niveau 2 en het bij dat niveau behorende gebruik van wiskundetaal en het niveau van wiskundig redeneren, zijn vergelijkbaar met het niveau eind groep acht (niveau 90-100 procent PPON).

Voorbeeld van een indicator bij niveau 2

De student begrijpt het verband tussen $0,75$, $\frac{3}{4}$ en 75 procent en weet op basis daarvan dat de prijs van $0,73$ kg kaas ongeveer driekwart van de kilogramprijs is en berekent dat dezelfde kaas bij een andere supermarkt duurder is (absoluut en in percentages).

niveau 3: start pabo

De student kan de eigen oplossing begrijpelijk verwoorden voor anderen (medestudenten, stagementor, opleider).

Voorbeeld van een indicator bij niveau 3

De student gebruikt handige strategieën bij het maken van de deling $1539 : 19$, controleert de eigen oplossing en legt uit hoe er gedacht is (staartdeling en schattend rekenen).

niveau 4: einde propedeuse

De student kan meerdere oplossingen en oplossingsstrategieën aangeven voor problemen die zich daartoe lenen. De student heeft een adequate wiskundige attitude en is in staat reflectieve oplossingen te verwoorden en te beschrijven.

Voorbeeld van een indicator bij niveau 4

De student kent meerdere oplossingen voor de opgave 'vijf repen verdelen met z'n zessen', beschrijft die oplossingen zowel mondeling als schriftelijk en markeert de verschillen tussen die oplossingen; de student toont een zekere mate van plezier en zelfvertrouwen (> 2 op een vijfpuntsschaal).

niveau 5: major

Reken-wiskundige verdieping en didactische verrijking. De student kan gebruik maken van passende referenties, hulpcontexten en andere concretisering en oplossingen beoordelen op juistheid of waarschijnlijkheid en waar nodig het antwoord corrigeren. De student heeft een adequate wiskundige attitude.

Voorbeeld van een indicator bij niveau 5

De student maakt een uitgebreide reflectieve oplossing bij het volgende probleem:

Tuincentrum A biedt zakken tuinaarde aan: vijf halen vier betalen; de concurrent, tuincentrum B biedt dezelfde zakken aan met de slogan: 'vier halen drie betalen'. Waar is de tuinaarde het goedkoopst? Hoeveel scheelt het per bedrijf procentueel? Hoe zit het als bij het bij tuincentrum A gaat om zakken van 30 liter die per zak € 1,50 kosten en bij centrum B om zakken van 40 liter die € 2,15 kosten?

Stel je voor dat je een driehoekige border van 3 m bij 4 m bij 5 m wilt op-hogen met 5 cm tuinaarde. Bij wie van de twee bedrijven ga je de tuinaarde kopen en wat gaat dat kosten?

De student past het probleem vervolgens aan voor zijn stagegroep 8 en noteert hints voor de leerlingen en anticipeert op mogelijke vragen en valkuilen.

niveau 6: bachelor

De student toont een vanzelfsprekende - niet-schoolse - aanpak van reken-wiskundeproblemen, ook van problemen uit het leven van alledag, bijvoorbeeld misverstanden of fouten in de media die reken-wiskundig verhelderd of gecorrigeerd kunnen worden. De student is in staat statistische gegevens logisch te interpreteren of te verwerken in grafieken. De student ziet samenhang tussen getallen en getalrelaties, bijvoorbeeld tijdens schattend rekenen (globaal rekenen) en precies berekenen. De student toont reflectief vermogen en een wiskundige attitude ook op (didactisch) ontwerpniveau.

Voorbeeld van een indicator bij niveau 6

De student maakt een kritische analyse van een krantenartikel over waterverbruik, bedenkt - en beantwoordt - naar aanleiding daarvan enkele

zelfgestelde vragen en bijbehorende opgaven. Ten slotte neemt de student het eigen oplossingsgedrag in beschouwing en bedenkt nog een alternatieve reactie op het oorspronkelijke commentaar, voorzien van didactische adviezen aan zichzelf. De student ontwerpt vervolgens bij het artikel een probleemsituatie voor groep acht en verdedigt in de teamvergadering van haar stageschool de plaats van het probleem in het programma, c.q. het curriculum van groep acht. De student kan anticiperen en inspelen op de leerprocessen van haar leerlingen.

voorbeelden bij de competenties 2 en 3

Hierna nog enkele voorbeelden van indicatoren bij de twee kerncompetenties van gecijferdheid competentie 2 (wiskundige attitude) en competentie 3 (reflectief vermogen).

Enkele voorbeelden van indicatoren bij competentie 2 (wiskundige attitude). De student:

- a heeft plezier in het maken van wiskundige opgaven;
- b gebruikt wiskundetaal correct en adequaat;
- c toont zelfvertrouwen tijdens het oplossen van (wiskundige) problemen;
- d als (b), ook in samenwerking met anderen;
- e herkent- en past wiskunde toe in dagelijkse situaties;
- f gebruikt 'mooie' getallen, handige strategieën of passende referentiematen;
- g zet passende materialen, schema's of modellen in bij het oplossen en uitleggen van de oplossingen;
- h volgt oplossingen cq redeneringen van anderen - medestudenten, leerlingen, experts - of zet die voort;
- i bedenkt meerdere oplossingsvarianten en past die toe;
- j toont creativiteit bij het oplossen van wiskundige problemen;
- k is kritisch op het gebruik van wiskunde in dagelijkse situaties, brengt correcties aan of verzint alternatieve aanpakken;

(Zie verder de bijlage: 'Overzicht wiskundige attitudes'; Oonk & De Goeij, 2006.)

Enkele voorbeelden van indicatoren bij competentie 3 (reflectief vermogen). De student:

- a verwoordt de eigen oplossing en legt die uit aan anderen;
- b volgt, analyseert en becommentarieert eigen oplossingen en die van anderen;
- c anticipeert op (on)mogelijkheden van strategieën of op consequenties van (onjuiste) redeneringen;
- d schrijft reflectieve oplossingen;

- e reflecteert op de eigen oplossing ten gunste van een betere- of alternatieve oplossing;
- f beschouwt het eigen oplossings*gedrag* kritisch;

3 naar een verfijning van de indicatoren

opdracht voor de werkgroep-participanten

Tijdens de werkgroepbijeenkomst op de Panama-conferentie werd naar verfijnde indicatoren van gecijferdheid gezocht aan de hand van uitwerkingen van de opgaven die door studenten gemaakt waren. Met 'verfijnd' wordt hier bedoeld een verfijning op denk- en handelingsniveau van de eerder genoemde indicatoren. Het zoeken naar indicatoren door de participanten van de workshop gebeurde in cycli van analyseren van studentenwerk in kleine groepen en het plenair bespreken van die analyses. De participanten werd gevraagd daarbij zoveel mogelijk de volgende werkwijze te volgen:

- probeer de gedachtegang van de student te achterhalen of althans vermoedens daarover uit te spreken;
- noem een paar indicatoren van (on)gecijferdheid die je als eerste te binnen schieten;
- geef een niveau-indicatie van de uitwerking. Dat kan een niveauaanduiding van 1 tot 6 zijn (zie voorbeelden), een cijfer (0 tot 10) of anderszins;
- geef een collegiaal 'hulpadvies' voor de opleider die deze student onder zijn of haar hoede heeft.

De plenaire discussies waren dermate intensief dat de bespreking van slechts enkele uitwerkingen al leidde tot een scala van mogelijke indicatoren. Als illustratie van de werkwijze tijdens de workshopbijeenkomst volgt hierna eerst informatie over de opdracht die de pabo-studenten kregen en daarna de analyse van een uitwerking van één van de studenten zoals die in de workshop plaats vond.

de opdracht voor de studenten

De eerste-, tweede- en derdejaarsstudenten kregen in het kader van het onderzoek TIP allemaal dezelfde tien opgaven. Om reflectie uit te lokken en een indruk te kunnen krijgen van de wiskundige attitude van de studenten werd bij elke opgave een zestal aanwijzingen gegeven voor het oplossen en uitwerken van de opgaven:

- noteer de volledige berekening;

- maak eventueel eerst een globale schatting te maken;
- licht die berekening waar mogelijk toe met hoe je gedacht hebt;
- zet erbij of je zeker bent van je antwoord en zo mogelijk waarom;
- zet erbij hoe je je antwoord gecontroleerd hebt en of je daardoor zekerder bent geworden;
- schrijf voor het geval je er niet uit bent gekomen wél op wat je allemaal geprobeerd hebt!

Verder werd hen gevraagd bij elke opgave een kruisje te plaatsen in een van de vakjes op een vijfpuntsschaal (fig.1).

Ik vond de opgave (plaats een kruisje in een van de vakjes):

☐

☐

☐

☐

☐

zeer moeilijkzeer gemakkelijk

figuur 1

Hoewel een combinatie van instrumenten als schriftelijk werk, observatie, interactie en interview natuurlijk de meest betrouwbare gegevens genereert, valt het op welke rijke opbrengst alleen schriftelijk werk al oplevert. Vooral de vraag aan studenten om zoveel mogelijk op te schrijven van hun denk- en rekenwerk, leverde veel op. In het kader van dit artikel is als illustratie van het analysewerk gekozen voor opgave 3, namelijk de ‘kale rekensom’ $0,25 \times 2,5 \times 4800 = .$ De opbrengst van deze ogenschijnlijk eenvoudige opgave geeft veel inzicht in het vermogen van studenten om handig te rekenen, een fundamentele basisconditie voor gecijferdheid. De grote opbrengst levert bovendien een rijke bron voor het zoeken naar indicatoren van gecijferdheid, doel van de werkgroep.

analyse van studentenwerk (1)

De student met de wat oneerbiedige onderzoeksnaam student 157, is een eerstejaarsstudent met vooropleiding ‘havo met wiskunde’. Deze student heeft een notie van ‘komma’s weg werken’ bij het delen met kommagetallen (fig.2). Maar dat loopt verkeerd af, want hij vermenigvuldigt alle drie factoren met 100, dus vermenigvuldigt in feite met $100 \times 100 \times 100$, maar deelt door $25 \times 25 \times 25$. De latere ‘200.000 teveel’ compenseert die fout niet, want dat was een aanvulling en geen factor. De strategie ‘komma’s weg werken’ kan vaak goed toegepast worden bij het delen van kommagetallen, omdat dan de ene factor tegen de ander wegvalt.

Zo is $2,5 : 0,05 = 250 : 5 = 50$; deeltal en deler beide met 100 vermenigvuldigen levert een gelijkwaardige en gemakkelijker uit te voeren deling op. Bij het vermenigvuldigen levert het zelden een voordeel op, omdat je grote

getallen moet gaan vermenigvuldigen en die weer moet delen door het product van alle factoren waarmee je eerst hebt vermenigvuldigd. Bij een strategie als halveren en verdubbelen ligt dat anders, daar gaat het uiteraard om vermenigvuldigen én delen.

St 157

Pabo-onderzoek TIP *Juli 2003, versie 3*

Opgave 3

Hoofdrekenen (dus niet onder elkaar zetten om te cijferen):
 $0,25 \times 2,5 \times 48000 =$

*Noteer je berekening en vertel vooral wat je erbij denkt als je (hoofd)rekent.
 Hoe kun je de uitkomst controleren? Zie verder nog eens de aanwijzingen op het voorblad.*

*eerst haal ik de komma's weg
 dus ik doe alle getallen $\times 100$.*

$25 \times 250 \times 4800000 =$ ff. afrekenen

$25 \times 250 \times 5000000 =$ dan : 25

$1 \times 10 \times 2000000 = 2000000$

*maar je hebt ~~2000000~~ 200000 te veel
 vermenigvuldigt dus moet je deze weer
 delen*

$2000000 : 200000 =$ dus 10

Ik vond opgave 3:
 (Plaats een kruisje in één van de 5 vakjes)

☐ zeer moeilijk ☒ ☐ ☐ ☐ ☒ zeer gemakkelijk

figuur 2

De analyse van wat bij deze student kennelijk aan inzicht en vaardigheid ontbreekt, verschaft tegelijkertijd een aantal indicatoren van handig rekenen c.q. gecijferdheid:

- inzicht in vermenigvuldigstructuren, hier in het bijzonder de toepassing van de commutatieve en de associatieve wet van vermenigvuldigen;
- handig rekenen bij het vermenigvuldigen met kommagetallen (bijvoorbeeld halveren en verdubbelen door $2,5 \times 48000 = 5 \times 24000 = 10 \times 12000 = 120000$ en daar een kwart van nemen);
- de relatie leggen tussen breuken en kommagetallen (bijvoorbeeld weten dat 0,25 is een vierde en dan eerst een kwart van 48000 nemen, daarna $2\frac{1}{2} \times 12000$);
- reflectie op de procedure, waardoor bijvoorbeeld de onmogelijkheid van een teveel afwijkend antwoord (in dit geval 10) ontdekt kan worden;

- de wiskundige attitude om handige strategieën in te zetten, zoals hier 0,25 als operator ($\frac{1}{4} \times$) gebruiken.

analyse van studentenwerk (2)

Student 220 is een eerstejaarsstudent met vooropleiding 'vwo met wiskunde'. Zij heeft weinig moeite met de opgave, al is haar oplossing wat omslachtig (fig.3). Je zou verwachten dat ze een vierde deel van 48000 vlot uit het hoofd zou kunnen uitrekenen. Het kan zijn dat ze het advies om haar gedachten op te schrijven op deze manier interpreteert. Hoe dan ook, ze noteert alle denkhandelingen correct; dat geldt ook voor de berekening van $12000 \times 2,5$. Verder controleert ze haar antwoord door te schatten; de keuze van 50.000 daarbij is begrijpelijk, maar 48000 nemen is gemakkelijker.

Pabo-onderzoek TIP *St. 220* *Juli 2003, versie 3*

Opgave 3

Hooftrekenen (dus niet onder elkaar zetten om te cijferen):
 $0,25 \times 2,5 \times 48000 =$

Noteer je berekening en vertel vooral wat je erbij denkt als je (hooft)rekent.
 Hoe kun je de uitkomst controleren? Zie verder nog eens de aanwijzingen op het voorblad.

$0,25 \times 2,5 \times 48000 = \dots$

$\frac{48000}{4} = \frac{40000}{4} + \frac{8000}{4} = 10000 + 2000 = 12000$

$12000 \times 2,5 = 12000 \times 2 + \frac{12000}{2} = 24000 + 6000 = 30000$

controle: schatten.

$50000 \times 2,5 = 100000 + 25000 = 125000$

$125000 \div 4 = 31250$, want $30 \times 4 = 120$

Ik vond opgave 3:
 (Plaats een kruisje in één van de 5 vakjes)

☐ zeer moeilijk ☐ ☐ ☐ ☒ zeer gemakkelijk

figuur 3

We kunnen naar aanleiding van deze uitwerking onder andere de volgende indicatoren aanwijzen:

- handig gebruik maken van de relatie tussen breuken en kommagetalen (een kwart van 48000 nemen);
- weten dat je eerst de factoren 0,25 en 48000 mag vermenigvuldigen;
- de wiskundige attitude om de rekenhandelingen nauwkeurig te (kunnen) noteren;

- het vermogen om het antwoord te controleren door het uitvoeren van een alternatieve berekening;
- schattend kunnen rekenen.

De tweede indicator: weten dat je eerst de factoren 0,25 en 48000 mag vermenigvuldigen, lijkt te berusten op vanzelfsprekende kennis en inzicht maar schijn bedriegt. In feite mag die vermenigvuldiging worden uitgevoerd op basis van achtereenvolgens de commutatieve wet ($0,25 \times 2,5 = 2,5 \times 0,25$) en de associatieve wet ($([2,5 \times 0,25] \times 48000 = 2,5 \times [0,25 \times 48000])$).

Het is zelfs vrijwel zeker zo dat drie van de vier studenten die hier genoemd worden hun oplossing goed of beter hadden kunnen maken als ze zich bewust waren van deze beide wetten!

analyse van studentenwerk (3)

Student 265 is een tweedejaarsstudent met vooropleiding 'mbo zonder wiskunde'. Deze studente maakt twee verschillende berekeningen en kiest uiteindelijk voor de eerste berekening. Het is niet duidelijk waar die keuze op gebaseerd is (fig.4).

Pabo-onderzoek TIP Juli 2003, versie 3

St 265

Opgave 3

Hoofdrekenen (dus niet onder elkaar zetten om te cijferen):
 $0,25 \times 2,5 \times 48000 =$

Noteer je berekening en vertel vooral wat je erbij denkt als je (hoofd)rekent.
 Hoe kun je de uitkomst controleren? Zie verder nog eens de aanwijzingen op het voorblad.

(Faint handwritten notes: 120000 : 0,25 = 300000, 120000 : 4 = 30000)

* $48000 \times 2 = 96000$
 $0,5 \times 48000 = 24000$
 $96000 + 24000 = 120000$
 $120000 : 0,25 = 30000$

OF $48000 : 0,25 = 12000$
 $12000 \times 2 = 24000$
 $24000 \times 0,5 = 12000$

Ik kies voor het antw met het *

Ik vond opgave 3:
 (Plaats een kruisje in één van de 5 vakjes)

☒ zeer moeilijk ☐ ☐ ☐ ☐ zeer gemakkelijk

figuur 4

De eerste berekening leidt tot het goede antwoord, al maakt ze wel een notatiefout ($120000 : 0,25 = 30000$ in plaats van $120000 : 4 = 30000$). Het is de vraag of dat alleen maar een notatiefout is. Een veel voorkomend mis-

verstand is de gedachte dat $120000 : 0,25$ gelijkwaardig is aan $120000 : 4$. Soms is die misvatting ontstaan door een foutieve interpretatie van de regel: 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde'. Deze studente maakt in haar tweede oplossing een soortgelijke fout ($48000 : 0,25 = 12000$). Verder maakt ze in de tweede oplossing een fout door $12000 \times 2,5$ te berekenen als $12000 \times 2 + 24000 \times 0,5$ in plaats van $12000 \times 2 + 12000 \times 0,5$. Ze rekent na 12000×2 door met het antwoord daarvan (24000) in plaats van de oorspronkelijke 12000.

In feite heeft ze geen inzicht in de distributieve wet van de vermenigvuldiging en optelling die hier speelt, namelijk dat $12000 \times 2,5 = (12000 \times 2) + (12000 \times 0,5)$. In algemene vorm: $a(b + c) = ab + ac$.

Naar aanleiding van deze analyse noteren we de volgende, hiervoor nog niet genoemde indicatoren:

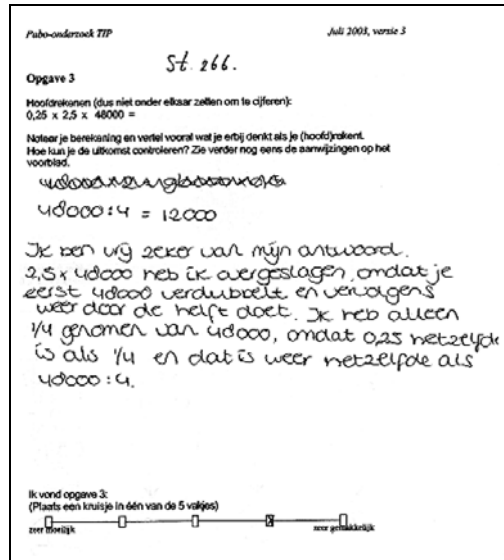
- de rekenhandelingen en keuzen daarbij kunnen verantwoorden in duidelijke (wiskunde)taal;
- inzicht hebben in de distributieve wet en die kunnen toepassen;
- inzicht hebben in de gelijkwaardigheid van bepaalde breuken en kommagetallen;
- inzicht hebben in de gelijkwaardigheid van wiskundige notaties (bijvoorbeeld $0,25 \times 48 = \frac{1}{4} \times 48 = 48 : 4 = \text{een kwart van } 48$).

analyse van studentenwerk (4)

Student 266 is een tweedejaarsstudent met vooropleiding 'vwo met wiskunde'. Deze student weet dat hij eerst de vermenigvuldiging $0,25 \times 48000 = 12000$ mag maken en kent ook de gelijkwaardigheid van $0,25 \times 48000$ en $\frac{1}{4}$ deel van 48000 (fig.5). Vervolgens maakt hij echter - vermoedelijk twee met elkaar samenhangende - denkfouten. In de eerste plaats ziet hij niet in dat 2,5 vermenigvuldigd moet worden met 12000 in plaats van met 48000. Ten tweede lijkt er de misvatting bij hem te bestaan dat de factor 2,5 niets oplevert: 'Je verdubbelt eerst en daarna neem je weer de helft!' De laatste is een gedachtecronkel die misschien ontstaat door de valse combinatie van noties dat $2,5 \times 48000 = 2 \times 0,5 \times 48000 = 1 \times 48000$. De laatste stap is uiteraard juist, maar de angel zit in de eerste stap, namelijk de veronderstelling dat de factor 2,5 gesplitst kan worden in twee factoren 2 en 0,5. Er is kennelijk verwarring met de optelling $2,5 = 2 + 0,5$.

Mogelijk is ook het feit dat er drie factoren in het geding zijn oorzaak van de verkeerde gedachtegang. Het is immers nauwelijks te geloven dat een student met deze vooropleiding die fout ook bij vermenigvuldiging van twee getallen ($2,5 \times 48000$) zou maken. Ook hier geldt weer dat zo'n fout vrijwel zeker vermeden kan worden, als de student voldoende inzicht heeft in de commutatieve-, de associatieve- en de distributieve wet. Verder mist deze

student kennelijk de houding om zichzelf kritisch te volgen, bijvoorbeeld door een alternatieve oplossing te zoeken of door te schatten.



figuur 5

Nog niet eerder genoemde indicatoren die we uit deze analyse kunnen afleiden zijn:

- inzicht in vermenigvuldigingen met meer dan twee getallen en het gebruik van de drie wetten bij het vermenigvuldigen;
- het overzichtelijk en correct weergeven van oplossingen in (wiskunde)taal;
- de wiskundige attitude om de eigen rekenhandelingen nauwkeurig te (kunnen) volgen, bijvoorbeeld door een alternatieve oplossing te zoeken of door een schatting te maken.

4 de ontwikkeling van gecijferdheid voor aanstaande leraren

Het voorgaande heeft duidelijk gemaakt dat de analyse van enkele schriftelijke uitwerkingen van een schijnbaar eenvoudige opgave een reeks van indicatoren van gecijferdheid kan opbrengen, in dit geval vooral indicatoren voor de domeinen hoofdrekenen en handig rekenen. Verder blijkt dat deze opgave, een vermenigvuldiging van drie getallen waarvan twee kommagetallen, veel studenten voor problemen plaatst. Dat geldt zelfs voor een

deel van de studenten met vooropleiding 'vwo met wiskunde'. Of de oorzaak van de misvattingen nu gezocht moet worden in 'achterstallig onderhoud' of dat die voortkomen uit gebrek aan inzicht, in ieder geval maakt deze activiteit duidelijk dat inzichtelijk (blijven) oefenen van dergelijke opgaven noodzakelijk is. Het mondeling en schriftelijk verwoorden van redeneringen en oplossingen in correcte (wiskunde)taal is daarbij van cruciaal belang. Kennis van indicatoren kan zowel studenten als opleiders helpen bij het verwerven en begeleiden van dergelijke activiteiten. De boodschap in dit concrete geval blijkt vooral te zijn, dat meer aandacht voor vermenigvuldigingen van dit type en het inzichtelijk gebruik daarbij van de commutatieve-, de associatieve- en de distributieve wet zeer gewenst is.

Wat betreft de ontwikkeling van gecijferdheid die pabo-studenten doormaken, onderscheiden Oonk, Van Zanten en Keijzer (2007) vier fasen, de zogenaamde 'vierslag'. Het is een geheel van elkaar overlappende, spiraalsgewijs verlopende stadia van ontwikkeling. Het volgende citaat geeft een samenvatting van die fasering.

Samengevat luidt de geschetste 'vierslag':

- Het verwerven van elementaire rekenvaardigheid, in het bijzonder het oplossen van opgaven uit reken-wiskundemethoden voor de basisschool.
- Het herkennen van wiskunde in de eigen omgeving en die van kinderen.
- Het gericht zijn op oplossingsprocessen bij het (laten) oplossen van reken-wiskundeproblemen, onder andere door te reflecteren op eigen en andermans oplossingen.
- Het inspelen op het wiskundig denken van leerlingen, onder andere door te anticiperen op hun denkprocessen en hen te stimuleren tot niveauverhoging. Bij deze laatste slag wordt het mathematiseren als het ware verstrengeld met het didactiseren.

Het lijkt erop dat het 'professionele' in professionele gecijferdheid juist en vooral zit in de didactische componenten van gecijferdheid, dat zijn in het bijzonder de componenten twee tot en met vier van deze vierslag. Je kunt de groei van de ontwikkeling in de gecijferdheid zien als een amalgaam van de vier componenten, een groei in kennis, vaardigheid en houding die zich spiraalsgewijs ontwikkelt. Aanvankelijk ligt het accent voor de (aanstaande) leraar op elementaire basisvaardigheden en schuilt er enige 'professie' in de vorm van praten over je oplossing met een medestudent of het 'ontwerpen' van een simpele uitleg voor een kind. Een eenvoudige reflectie - bijvoorbeeld in de vorm van een reflectieve oplossing bedenken - hoort hier ook bij. Gaandeweg krijgt de gecijferdheid een duidelijk professioneel karakter, zichtbaar in specifieke didactische kwaliteiten, die ten slotte - bij de ideale leraar - uitmondt in een mooi evenwicht. Alle componenten zijn

dus van meet af aan bij de ontwikkeling betrokken, zij het in verschillende mate. Bij de ervaren leraar zou je willen dat de componenten als 'viercomponentenlijm' geïntegreerd zijn. (Oonk, Van Zanten & Keijzer, 2007, pag.15).

De indicatoren die voortkomen uit de hiervoor beschreven activiteiten, passen in elk van de vier fasen en zijn enerzijds expliciet aantoonbaar in het oefenwerk van studenten, anderzijds zijn ze meer ingebed in het werken van studenten met de kinderen van hun stagegroep. De indicatoren die wijzen op reflectief gedrag of op een wiskundige attitude (zie 'voorbeelden bij de competenties 2 en 3', pag.47) zijn vervlochten met alle andere indicatoren. Zij vormen de 'smeerolie' voor de motor die leerlingen en studenten op weg helpt naar een hoger niveau van gecijferdheid.

noot

- 1 Zie desgewenst de hand-out voor aandachtspunten op www.fi.uu.nl/panama/conferentie/conferentiearchief.

literatuur

- Bokhove, J. (1995). Er zijn 51,5625 bussen nodig. Een beschouwing over gecijferdheid. *Willem Bartjens*, 14(3), 6-11.
- Faes, W.H.L., K. Olofsen & J.W.M. van den Bergh (red.) (1992). *Gecijferdheid. Docentenhandleiding & Studentenmateriaal. Verzameling toetsvragen*. Uitgave HBO-raad.
- Garssen, F. (2007). Gecijferdheid: vraag jezelf eens wat af! *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 26(1), 12-18.
- Goffree, F. & M. Dolk (red.) (1995). *Proeve van een nationaal programma voor rekenen-wiskunde & didactiek op de pabo*. Utrecht/Enschede: Freudenthal Instituut/SLO (31-35).
- Goffree, F. (1995). Gecijferdheid. In: L. Verschaffel & E. De Corte (red.) *Naar een nieuwe reken/wiskundendidactiek voor de basisschool en de basiseducatie. Deel 1*. Leuven: STOHO/ACCO (16-49).
- Goffree, F. & W. Oonk (2004). *Rekenvaardig. Op weg naar basale en professionele gecijferdheid*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Groenestijn, M.J.A. van (2002). *A Gateway to Numeracy. A Study of Numeracy in Adult Basic Education*. Utrecht: CD-β Press, Centrum voor Didactiek van Wiskunde, Universiteit Utrecht (proefschrift).
- Hoogland, K. & M. Meeder (2007). *Gecijferdheid in beeld*. Meppel: Boom.
- McIntosh, A., B.J. Reys & R.E. Reys (1992). A proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the learning of Mathematics*, 12 (3), (2-9).
- Oonk, W. (2003). *Pabo Onderzoek 'Theorie in Praktijk' (TIP). Handleiding voor opleiders*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Oonk, W. (2004). *Competenties van gecijferdheid en bijbehorende indicatoren. Overwegingen voor het bepalen van de mate van gecijferdheid van pabostudenten*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Oonk, W., M. van Zanten & R. Keijzer (2007). Gecijferdheid, vier eeuwen ontwikke-

- ling. Perspectieven voor de opleiding. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 26(3), 3-18.
- Paulos, J.A. (1989). *Ongecijferdheid*. Amsterdam: Bert Bakker.
- Treffers, A. (1990). *Het voorkomen van ongecijferdheid op de basisschool*, Utrecht: Universiteit Utrecht (oratie).
- Zanten, M. van & P. van den Brom-Snijders (2007). Beleidsagenda lerarenopleiding leidt tot niveauverlaging - Gehanteerde rekenvaardigheids- en gecijferdheidstoetsen. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk* 26(1), 19-23.
- Zanten, M van & A. van Gool (red.) (2007). *Opleiden in geuren en kleuren. Bakens voor rekenen-wiskunde & didactiek op de pabo*. Utrecht/Enschede: Panama/Flisme/SLO.

bijlage: Overzicht wiskundige attitudes

(Oonk & De Goeij, 2006)

Algemene houding ten aanzien van wiskunde	• zelfvertrouwen tonen tijdens het oplossen van (wiskundige) problemen, bijvoorbeeld durf en doorzettingsvermogen laten zien; • plezier in het maken van wiskundige opgaven; • zelfstandigheid en verantwoordelijkheidsgevoel; • brede belangstelling; • verwondering; • betrokkenheid.
Reflecterende houding	• het eigen denken en handelen in beschouwing nemen; • terugkijken en anticiperen op eigen en andermans (denk)activiteiten; • heuristisch denken, jezelf vragen stellen; • aandacht voor relativering; • kritisch zijn op het gebruik van wiskunde.
Onderzoekende houding	• de wil om diepgaander te begrijpen; • nieuwsgierigheid; • aandacht voor objectiviteit; • gericht zijn op alternatieve aanpakken; • alert zijn op doodlopende paden en die durven te verlaten; • aanpassingsvermogen; • gericht op raadplegen van informatiebronnen; • drang naar inzicht; • meerdere oplossingsvarianten bedenken en toepassen; • oplossingen cq redeneringen van anderen - medestudenten, leerlingen, experts - volgen of voortzetten; • wiskunde in situaties herkennen en toepassen; • wiskundetaal en wiskundige activiteiten* gebruiken; • creativiteit tonen bij het oplossen van wiskundige problemen;
Communicatieve houding	• wiskundetaal gebruiken in samenwerking met anderen; • actief luisteren; • gericht op informatie delen; • aanpassingsvermogen; • oplossingen cq redeneringen van anderen – medestudenten, leerlingen, experts – volgen of voortzetten.
Doelgerichte houding	• efficiëntie nastreven; • gericht op nauwkeurigheid, volledigheid, structurering, eenvoud; • beslistheid en consequentie; • mooie* getallen, handige strategieën of passende referentiematen gebruiken; • materialen, schema's of modellen inzetten bij het oplossen en uitleggen van de oplossingen; • wiskundetaal adequaat gebruiken.

*) Onder wiskundige activiteiten verstaan we bijvoorbeeld structureren, generaliseren, vergelijken, ordenen, concretiseren, visualiseren en systematisch werken.

Het in staat zijn tot het uitvoeren van genoemde wiskundige activiteiten (structureren, generaliseren, vergelijken, ordenen, concretiseren, visualiseren en systematisch werken), blijkt bijvoorbeeld uit het handig kunnen gebruiken van basiskennis, het gevoel hebben voor structuren- of de orde van grootte van getallen, het maken van effectieve schattingen, het herkennen van patronen, het zien van soortgelijke oplossingen, het zich kunnen voorstellen van getallen of bewerkingen met getallen en zo meer.

Als leren vermenigvuldigen moeizaam gaat

G. Schoeman, I. Verbruggen & N. Figueiredo
Kath. Pabo. Zwolle / FIsme, Universiteit Utrecht

1 inleiding

In iedere klas zit wel een leerling bij wie het automatiseren van de tafels moeizaam gaat. Wat doe je dan? Neem voor jezelf een moment om daar over na te denken voordat je verder leest.

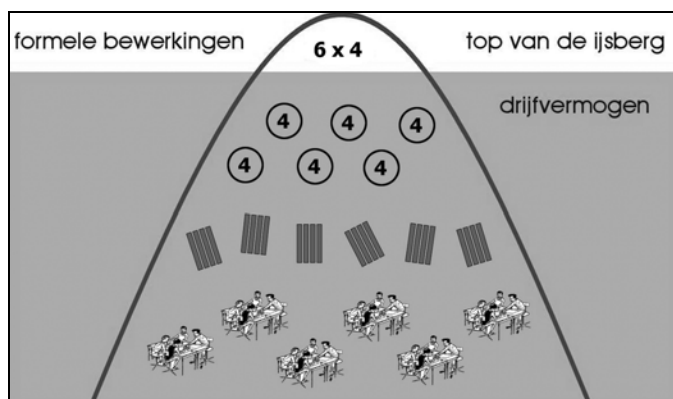
Veel gebruikte manieren zijn het inzetten van tafelkaarten of het blijven herhalen door middel van het opdreunen van de tafels, tot op de wc aan toe! Het is de vraag of dit de manier is om leerlingen te helpen. Voor sommige leerlingen kan het werken, maar voor de zwakke rekenaars in het speciaal (basis)onderwijs (s(b)o) is een andere benadering nodig. Het project 'Speciaal Rekenen' van het FIsme heeft een peiling ontwikkeld die als doel heeft vast te stellen wat de mogelijkheden van het kind zijn ten aanzien van het leren vermenigvuldigen en geeft op basis daarvan suggesties voor een vervolgtraject.

2 kader

Iedere leerling heeft recht op goed onderwijs. In het kader van het Invoeringsplan voor 'Passend Onderwijs' (OCW, 2007) wordt daarom gestreefd naar onderwijs dat zo veel mogelijk op de mogelijkheden van de leerling is afgestemd. Dat betekent dat er naast de lesstof in de reken-wiskundemethode moet worden gekeken naar passende alternatieven indien een leerling niet mee kan komen. Van de leerkracht wordt meer verwacht dan het doorlopen van de reken-wiskundemethode. Signaleren en kennis van de leerlijnen zijn belangrijke gereedschappen om passend onderwijs te bieden. De ontwikkeling van de peiling vermenigvuldigen door het project 'Speciaal Rekenen' past in dit kader omdat aan de hand van deze peiling een op de leerling aangepast traject voor het leren vermenigvuldigen gerealiseerd kan worden.

3 leren vermenigvuldigen

Boswinkel en Moerlands (2003) geven aan welk proces er achter de rug is als leerlingen een formele keersom als 6×4 kunnen oplossen. Ze gebruiken hiervoor de ijsbergmetafoor (fig.1). Het topje van de ijsberg komt overeen met het niveau van de formele (keer)som. Dit topje ontleent zijn zichtbaarheid alleen aan het enorme drijfvermogen dat onder de waterspiegel zit. Het drijfvermogen komt overeen met datgene wat vooraf gaat aan de formele keersom.

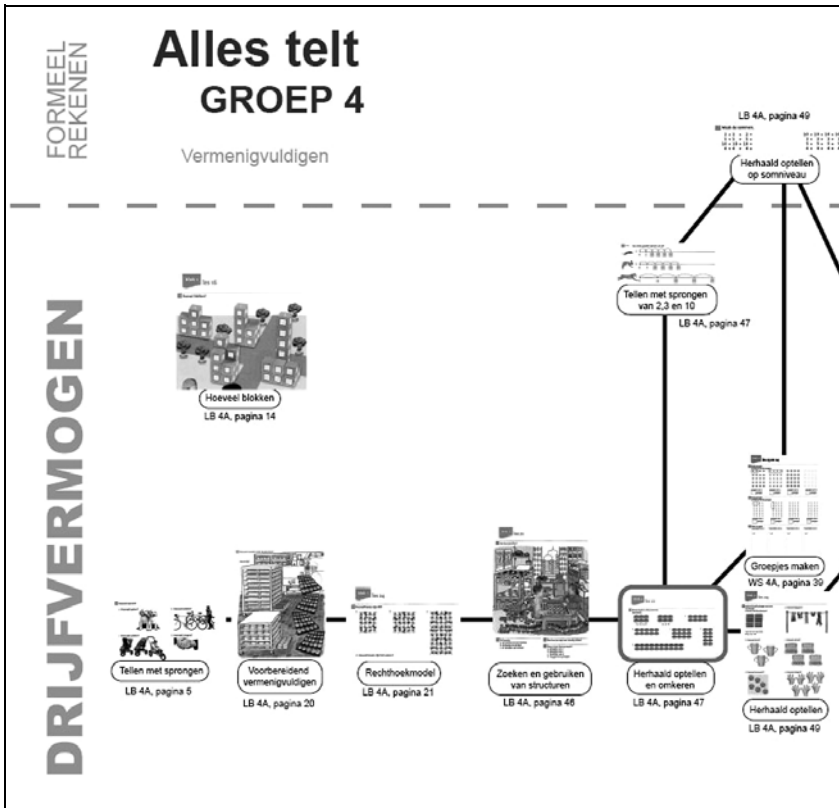


figuur 1

Voordat leerlingen leren vermenigvuldigen op formeel niveau moet er al een heel proces achter de rug zijn waarin leerlingen de inhoud en betekenis van vermenigvuldigen hebben verkend en tot begrip zijn gekomen wat een keersom in essentie inhoudt. Ze moeten ervaren dat een keersom een herhaalde optelling is en dat die op verschillende manieren kan worden vormgegeven. Op een basaal niveau als een optelling van groepjes van vier kinderen maar, op een wat abstracter niveau, ook als een optelling van groepjes van bijvoorbeeld 4 staafjes of als doosje met het cijfer 4 dat een hoeveelheid van 4 representeert. Bij het laatste voorbeeld kan de leerling niet meer één voor één tellen.

De reken-wiskundemethode leert kinderen vermenigvuldigen volgens een gestructureerd aanbod. De opdrachten komen echter verspreid over het jaar aan bod en maken vaak deel uit van een les waarin ook andere domeinen aan bod komen. Er is weinig aandacht voor begripsvorming van vermenigvuldigen. In de map 'Vermenigvuldigen' van het project 'Speciaal Rekenen' (2004) zijn de leerlijnen van vermenigvuldigen aan de hand van de bladspiegels van de betreffende methode in een schema uitgezet (fig.2).

Daaruit blijkt dat kinderen vrij vlot op formeel niveau moeten kunnen vermenigvuldigen. Voor zwakke rekenaars kan dit een struikelblok zijn.



figuur 2

4 begripsvorming

Hoe komen kinderen tot begripsvorming op het gebied van vermenigvuldigen? Terlouw en Schoeman (2006) geven een praktijkvoorbeeld over hoe kinderen in de supermarkt tot begripsvorming komen. De leerlingen gaan in groepjes met een digitale camera naar de supermarkt om daar keersommen te zoeken en te fotograferen. Bij dit bezoek wordt duidelijk dat er op het gebied van begripsvorming nog wel het een en ander mis kan gaan. Één leerling legt twee rijen van drie zakken pepernoten. Op de vraag welke som hier bij hoort antwoordt ze: ' 3×3 '. Ze legt uit dat ze een rij van drie

heeft en nog een rij van drie. 'Dus 3×3 ,' is haar conclusie. Dit probleem is kenmerkend voor meer leerlingen. Er worden twee getallen gezocht en daar wordt zonder meer een keerteken tussen geplaatst. Het is voor deze leerling nog niet duidelijk wat een keersom in essentie is.

Een ander groepje vond een pakje met zakdoekjes in een verpakking van 2×4 . De leerlingen tellen gezamenlijk en er wordt al geroepen dat het 2×4 moet zijn. Dan komen ze tot het antwoord 8. Bij het opschrijven van de som verandert dit in 2×8 . Drie van de vier leerlingen komen tot de conclusie dat het 2×8 moet zijn. Een leerling kijkt nog eens opnieuw en komt toch tot 2×4 . Hij legt aan het groepje uit waarom hij vindt dat het 2×4 moet zijn en weet ze te overtuigen. Hier zien we dat het antwoord interfereert met de notatie van de keersom. Ook hier kan de vraag gesteld worden of de leerlingen weten wat een keersom in essentie is. Bij één leerling blijkt dit wel het geval te zijn.

De meerwaarde van het supermarktbezoek is gelegen in het feit dat leerlingen met elkaar in een alledaagse omgeving tot interactie komen en dat conflictsituaties worden opgelost. Het drijfvermogen is die ochtend aanzienlijk toegenomen. De leerkracht kon nadien iedere keer weer terugvalLEN op wat de leerlingen in de supermarkt gedaan hadden.

5 als leren vermenigvuldigen moeizaam gaat

Veel leerlingen leren, al dan niet met moeite, vermenigvuldigen, maar er zijn ook leerlingen bij wie het moeizaam blijft gaan. Wat doe je dan? Blijven herhalen of opgeven en tafelkaarten en de rekenmachine inzetten? Vanuit het project Speciaal Rekenen is gezocht naar een oplossing waarbij de mogelijkheid van het kind centraal staat. Daartoe is er een 'peilinginstrument' ontwikkeld voor zwakke rekenaars in het s(b)o.

Het begrip 'peiling' heeft vele betekenissen. Met 'peiling' bedoelen we hier een observatie-instrument om meer zicht te krijgen in de vaardigheden van de leerling op het gebied van het (tellend) vermenigvuldigen. Het moet niet opgevat worden als een diagnostisch instrument waarmee een rekenstoornis kan worden opgespoord.

De 'Peiling Vermenigvuldigen' is bedoeld om leerkrachten te ondersteunen bij het maken van keuzes ten aanzien van het leerstofaanbod voor deze zwakke rekenaars op het gebied van vermenigvuldigen. Met zwakke rekenaars doelen we specifiek op kinderen van rond de tien jaar, die op ongeveer groep 4 niveau werken en moeite hebben met vermenigvuldigen. Ook hebben ze veelal de basisautomatismen voor optellen en aftrekken nog niet onder de knie. De 'Peiling Vermenigvuldigen' richt zich op de meest

basale vorm van vermenigvuldigen, het tellend vermenigvuldigen. Binnen het tellend vermenigvuldigen zijn de volgende vaardigheden van belang:

- Structuren zien en gebruiken:
 - ongestructureerde hoeveelheden;
 - (gedeeltelijk) gestructureerde hoeveelheden.
- Herhaalde optelling herkennen en gebruiken;
- Koppelen van herhaalde optellingen aan formele keersommen;
- Relaties zien en gebruiken:
 - Verkortingen in optelsommen;
 - dezelfde herhaalde optelling zien in verschillende contexten.

De 'Peiling Vermenigvuldigen' bestaat uit verschillende opdrachten die de leerkracht individueel aan de leerling voorlegt. Bij deze opdrachten heeft de leerling vaardigheden uit het drijfvermogen van vermenigvuldigen nodig. Bij elke opdracht zijn interventies beschreven die de leerkracht kan toepassen om duidelijk te krijgen wat de leerling kan op het gebied van vermenigvuldigen. De leerkracht observeert de reacties van de leerling en brengt aan de hand van een protocolformulier in kaart welke bovengenoemde vaardigheden de leerling beheerst. Deze mogelijkheden van het kind vormen vervolgens het uitgangspunt voor een vervolgtraject waarvoor in de 'Peiling Vermenigvuldigen' suggesties gedaan worden. De opdrachten zijn in verschillende versies aan een groot aantal zwakke rekenaars in het s(b)o voorgelegd. Deze ervaringen zijn bijzonder waardevol en noodzakelijk geweest voor de uiteindelijke versie van de peiling.

6 Peiling Vermenigvuldigen

De 'Peiling Vermenigvuldigen' illustreren we hierna aan de hand van enkele opdrachten over de vaardigheid van de leerling om structuren te zien en te gebruiken. Met twee van deze opdrachten wordt tegelijk ook informatie verzameld over de vaardigheid om herhaalde optelling te herkennen en te gebruiken. In het voorbeeld beschrijven we hoe leerling Lex de opdrachten doet.

Lex is tien jaar en werkt met de methode 'Pluspunt groep' 4. Hij maakt kennis met keersommen en tafels, maar heeft hier moeite mee. De leerkracht zegt over het vermenigvuldigen bij Lex dat hij 'alles lijkt te vergeten en elke dag weer opnieuw moet beginnen'. Lex zelf geeft aan 'helemaal geen keersommen te kunnen'. Hij weet alleen 'dat keersommen groepjes zijn, maar meer weet ik niet'. Verder vindt hij het ook jammer dat hij nog geen keersommen kan.

gestructureerde hoeveelheden

Het rechthoeksmodel is een van de basisstructuren bij het vermenigvuldigen. Kinderen moeten bijvoorbeeld vaststellen hoeveel tegels er op een tegelvloer liggen, hoeveel koekjes er op een plaat liggen, of hoeveel stickers er op een velletje zitten. Hierbij gaan we uit van de veronderstelling dat de leerling de gegeven structuur herkent en ook begrijpt waarom het handig is om deze structuur te gebruiken.

Voor zwakke rekenaars is dit echter niet vanzelfsprekend. Zij herkennen wellicht wel dat een opgave een zekere structuur heeft ('het zijn er 4 en 4 en 4 en 4'), maar gebruiken dit gegeven niet bij het oplossen van het probleem. Voor een deel kan dit liggen aan de optelvaardigheid.

Een andere basisstructuur die veelvuldig voorkomt, is het groepjesmodel, dat je onder andere terugziet in verpakkingen. Bij deze structuur is het essentieel dat de leerling doorziet dat het gaat om een herhaalde optelling.

opdracht 1

De leerling krijgt de volgende afbeelding van een stickervel te zien (fig.3). De vraag is: 'Hoeveel stickers zijn dit?'



figuur 3

Om ook zicht te krijgen op de manier waarop de leerling het aantal stickers heeft bepaald, kan een vervolgvraag zijn: 'Hoe heb je dat gezien?' De ver-

wachting is dat leerlingen gebruik zullen maken van de structuur van 4 (via de rijen en/of kolommen of via de dobbelsteenstructuur).

Lex begint met het tellen van met sprongen van 4. Na 4 – 8 gaat hij echter over tot het tellen met sprongen van 2. Hij telt de laatste rij twee keer, waardoor hij op twintig stickers uitkomt. Hij ziet zelf in dat hij een fout heeft gemaakt. Hij telt de stickers opnieuw, maar nu begint hij direct met sprongen van 2.

opdracht 2

De leerkracht geeft het kind een pak van dertig koeken verdeeld in 2×3 vakjes (fig.4). De vraag is: 'Hoeveel koekjes zitten er in dit pak?'



figuur 4

Verwacht wordt dat kinderen de stapeltjes van vijf koekjes of eventueel de vijf lagen van zes koekjes zullen gebruiken bij het bepalen van het totale aantal koekjes in de verpakking.

Lex lost deze opdracht vrij snel op. Hij stelt vast dat er vijf koekjes in een stapeltje zitten. Dan telt hij met sprongen van vijf soepel tot 30 (fig.5).



figuur 5

opdracht 3

De leerling krijgt een puzzel van twintig stukjes in de structuur 4×5 voor zich (fig.6). De vraag is: 'Hoeveel stukjes heeft deze puzzel?' De verwachting is dat de kinderen gebruik maken van de structuur van de puzzel: op elke rij zitten vijf puzzelstukjes aan elkaar vast.



figuur 6

Lex begint linksboven aan de puzzel te tellen. Hij telt eerst twee stukjes, vervolgens weer twee tot vier stukjes. Dan moet hij de bocht om naar de volgende rij en telt vijf (fig.7).



figuur 7

Op de volgende rij gaat hij verder met de stappen van twee: 7, 9, 10. Hij gebruikt niet de 5 om van daaruit verder te tellen. Hij komt op deze manier tot twintig stukjes.

'Kun je ze misschien ook nog op een andere manier tellen?'

Lex denkt hardop hoe hij op een andere manier tot twintig kan komen, zonder de puzzel daarbij te bekijken of in te betrekken. Hij zegt: 'Ik doe 10 erbij 10, dat is ook 20.'

'Waar zie je 10 dan in de puzzel?'

Lex gaat nu de puzzel weer bekijken. Het duurt even voordat hij de 10 in de puzzel heeft gevonden. Uiteindelijk wijst hij op de twee bovenste rijen en doet moeite om te verwoorden wat hij bedoelt. Hij telt dat er vijf stukjes op een rij zitten: 'Nou ... hier ... hier, volgens mij ... ja, want ik heb, kijk ... hier boven zitten er 5, en...daaronder moeten er net zoveel stukjes zitten zodat ze eraan vast kunnen. Dat is weer 5, en dat is dan 10.'

Wat in de opdrachten naar voren komt over Lex is dat hij de (vijf)structuur kan gebruiken, als hij deze herkent. Hij telt immers soepel van met sprongen van vijf het aantal koekjes in het pak. Hij ziet bij de puzzel de structuur echter niet meteen en gebruikt deze in eerste instantie ook niet. In dat geval verloopt het tellen lastiger. De structuren van de twee opdrachten zijn verschillend (de puzzel heeft een rechthoekstructuur, de koekjes zijn in groepjes geordend). Bij de stickers ziet Lex de structuur van vier wel, maar het is voor hem waarschijnlijk lastig om deze te gebruiken, omdat hij de optelvaardigheid mist. Het tellen met stappen van twee geeft hem meer zekerheid om tot het juiste antwoord te komen.

Lex zou meer oog moeten krijgen voor structuren met een verschillend uiterlijk, zodat hij ook in andere gevallen de structuur kan gebruiken.

7 vervolgtraject

Hoe nu verder te gaan met Lex en vergelijkbare leerlingen? In de 'Peiling Vermenigvuldigen' doet 'Speciaal Rekenen' suggesties voor vervolgtrajecten. Centraal hierin staat het aansluiten bij de mogelijkheden die het kind heeft. Het feit dat Lex vijfstructuren kan gebruiken om opdrachten rond vermenigvuldigsituaties - zij het in verpakte vorm - op te lossen, kan benut worden om aan de andere basisvaardigheden voor vermenigvuldigen te werken. Daarbij zou hij moeten werken aan het herkennen van structuren, ook bij grotere hoeveelheden.

In reken-wiskundemethoden staan met regelmaat opdrachten rond gestructureerde hoeveelheden. Vaak gaat het hier dan om het formuleren van de vermenigvuldigsom en om het bepalen van het totale aantal. Met een andere vraagstelling zou je aan de hand van deze opdrachten kunnen

werken aan het herkennen van structuren. Je zou bijvoorbeeld kunnen vragen hoe de stickers op een stickervel geordend zijn of bij welk vel stickers je het makkelijkste kunt zien hoeveel het er zijn. Op deze manier kunnen opdrachten in de methode ook bij het niveau van de zwakke leerling aansluiten.

Lex weet verder dat er bij vermenigvuldigen 'iets met groepjes' is. De link tussen 'groepjes' en vermenigvuldigsommen legt hij echter nog niet. Waarschijnlijk heeft hij op concreet niveau geoefend met groepjes maken en herhaald optellen en is in de methode vervolgens de overstap naar de formele sommen gemaakt. Dat is een grote stap die vaak te vlug wordt gezet. Zeker voor kinderen zoals Lex.

Onder andere de map 'Vermenigvuldigen' van 'Speciaal Rekenen' (2004) (katern 'Van lichaamstafels tot stickers') biedt activiteiten om te werken aan de vaardigheid 'koppelen van herhaalde optellingen aan formele keersommen'.

optelvaardigheden

Vaak vormen de beperkte optelvaardigheden van leerlingen een struikelblok bij het leren vermenigvuldigen. In de Peiling Vermenigvuldigen van Speciaal Rekenen doen we enkele suggesties om hier mee om te gaan. Zo kun je aan de hand van herhaalde optellingen die het kind wel kent, bijvoorbeeld tellen met sprongen van vijf, werken aan andere vaardigheden. Ook de rekenmachine kan een oplossing zijn om het kind de uitkomsten van een opdracht te laten uitrekenen, zodat zijn aandacht kan gaan naar het begrip van de vermenigvuldigsom of -situatie.

8 Conclusie

We hebben ervaren dat de 'Peiling Vermenigvuldigen' de leerkracht ondersteuning biedt bij het maken van een beslissing over het leerstofaanbod voor leerlingen voor wie het leren vermenigvuldigen erg moeizaam gaat. Dit is ook het doel van het instrument. Benadrukt moet worden dat de 'Peiling Vermenigvuldigen' niet als diagnostisch instrument is ontworpen.

De boodschap van het project 'Speciaal Rekenen' is dat het essentieel is om bij het leerstofaanbod voor deze kinderen aan te sluiten bij de mogelijkheden van het kind en er voor te waken niet te snel te formeel in te steken. Dat betekent dat soms de beslissing zal worden genomen om voorlopig niet te gaan automatiseren of daar voorlopig mee te stoppen indien het kind er al mee bezig is. Het betekent echter niet dat het vervolgetraject een vaststaand gegeven is. Het is belangrijk het kind te blijven volgen en in de

gaten te houden waar het kind behoefte aan heeft en waar het aan toe is. De 'Peiling Vermenigvuldigen' is ontworpen voor zwakke leerlingen in het s(b)o, maar de manier van werken kan, ons inziens, ook toegepast worden in het reguliere onderwijs of op andere rekendomeinen. De essentie is dat als een leerling afhaakt op rekengebied, de leerkracht onderzoekt wat de leerling nog wel kan en dit gebruikt bij het rekenprogramma voor dit kind. Aan de hand van de Peiling Vermenigvuldigen kan een beslissing over het leerstofaanbod in het gebied vermenigvuldigen vergemakkelijkt worden.

literatuur

- Boswinkel, N. & F. Moerlands (2003). *Het topje van de ijsberg*. Utrecht: Freudenthal Instituut. www.speciaalrekenen.nl
- Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap. (2007). *Invoeringsplan Passend Onderwijs*.
- Speciaal Rekenen (2004). *Vermenigvuldigen groep 4 en 5. Realistisch rekenen in het speciaal (basis) onderwijs*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Terlouw, B. & G. Schoeman (2006). Werken aan begripsvorming bij keersommen. *Volgens Bartjens...*, 25(5), 9-12.
- Treffers, A., M. van den Heuvel-Panhuizen & K. Buijs (red). (1999). *Jonge kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen*. Groningen: Wolters Noordhoff.

Verhoudingen: doorlopende leerlijn?!

M. Wijers
FIsme, Universiteit Utrecht

1 Inleiding

U bent bij de supermarkt op zoek naar pindakaas. U staat voor de keuze tussen een pot van 190 ml van merk *A* voor € 0,99 of 350 ml van merk *B* voor € 1,80. Welke pot kauft u aan?

Het is duidelijk dat bij een dergelijke keuze diverse overwegingen meespelen: is *A* lekkerder dan *B*? Eet u vaak pindakaas of niet? Hoeveel geld wilt u uitgeven? Heeft u voorkeur voor een grote of een kleine pot? Stel dat u toch ook even de prijs wilt vergelijken: is pindakaas van merk *A* goedkoper of duurder dan van merk *B*? Gelukkig hoeft u dit rekenwerk niet zelf te doen, maar helpen de meeste supermarkten u hierbij door ergens op het schap in kleine letters de prijs per eenheid te vermelden.

Een ander voorbeeld: bij de Olympische spelen 2008 zag u dat het wereldrecord op de 100 meter werd verbroken: Powell liep de 100 meter in 9,72 seconden. Dat is snel; maar waarmee is die snelheid te vergelijken? Fiets, auto, ... ?

Nog eentje: als verpleegkundige moet u een patiënt 6 gram toedienen van een medicijn dat beschikbaar is in een 3 procent oplossing. Hoeveel ml dient u deze patiënt toe?

Tenslotte: u wilt een illustratie vergroten van A5 naar A4. Bij het oude kopieerapparaat kunt u dat niet met één druk op een knop regelen maar dient u een (vergrotings)percentage in te stellen

In al deze gevallen heeft u te maken met een verhoudingsvraagstuk. Dergelijke vraagstukken komen veelvuldig voor in allerlei toepassingssituaties, ook binnen de wiskunde, en doen een beroep op behoorlijk wat rekenwiskundige kennis, begrip en vaardigheden. Het belang van verhoudingen voor de doorlopende leerlijnen rekenen-wiskunde zal duidelijk zijn.

Subdomein verhoudingen

In het rapport 'over de drempels met rekenen', uitgebracht door de 'Expert-groep Doorlopende leerlijnen taal en rekenen', is verhoudingen een van de vier subdomeinen waarvoor in termen van kennen en kunnen de gewenste opbrengsten van het onderwijs worden beschreven. Dit gebeurt op twee beheersingsniveaus: het fundamentele niveau (F) en het streefniveau (S) (fig1).

12 jaar	1 - fundamenteel	1 - streef
A Notatie, taal en betekenis	Paraat hebben	Paraat hebben
- Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties - Wiskundetaal gebruiken	- een vijfde deel van alle Nederlanders korter schrijven als $\frac{1}{5}$ 'deel van ...' - 3,5 is 3 en $\frac{5}{10}$ - '1 op de 4' is 25% of 'een kwart van' - geheel is 100%	- schrijfwijze $\frac{1}{4} \times 260$ of $\frac{260}{4}$ - formele schrijfwijze 1 : 100 ('staat tot') herkennen en gebruiken - verschillende schrijfwijzen (symbolen, woorden) met elkaar in verband brengen
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	- notatie van breuken (horizontale breukstreep), decimale getallen (kommagetal) en procenten (%) herkennen - taal van verhoudingen (per, op, van de) - verhoudingen herkennen in verschillende dagelijkse situaties (recepten, snelheid, vergroten/verkleinen, schaal enz.)	- schaal
	Weten waarom	Weten waarom
		- relatieve vergelijking (term niet)
12 jaar	1 - fundamenteel	1 - streef
B Met elkaar in verband brengen	Paraat hebben	Paraat hebben
- Verhouding, procent, breuk, decimaal getal, deling, 'deel van' met elkaar in verband brengen	- eenvoudige relaties herkennen, bijvoorbeeld dat 50% nemen hetzelfde is als 'de helft nemen' of hetzelfde als 'delen door 2'	- procenten als decimale getallen (honderdsten) - veel voorkomende omzettingen van percentages in breuken en omgekeerd
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	- beschrijven van een deel van een geheel met een breuk - breuken met noemer 2, 4, 10 omzetten in bijbehorende percentages - eenvoudige verhoudingen in procenten omzetten bijv. 40 op de 400	- breuken en procenten in elkaar omzetten - breuken benaderen als eindige decimale getallen - verhoudingen en breuken met een rekenmachine omzetten in een (afgerond) kommagetal
	Weten waarom	Weten waarom
		- relatie tussen breuken, verhoudingen en percentages - breuken omzetten in een kommagetal, eindig of oneindig aantal decimalen

figuur 1: uit het rapport over de drempels met rekenen

Het rapport beoogt voornamelijk inhoud te beschrijven ('het wat') en niet de didactiek ('het hoe').¹

Het domein van verhoudingen is gekozen om diverse redenen. Zoals ook de voorbeelden uit de inleiding van dit artikel laten zien is verhoudingen bij uitstek het gebied waarop veel toepassingproblemen betrekking hebben, waarvan het oplossen kennis, vaardigheden en inzicht op diverse terreinen van rekenen-wiskunde vraagt. Dit domein heeft in die zin een verbindend karakter. Het begrip verhouding is een kernconcept binnen het leergebied rekenen-wiskunde. Het laat zich misschien wel het best karakteriseren met deze uitspraak van Freudenthal (1984, pag.70):

Juist 'verhouding' is een prachtvoorbeeld om zich te realiseren hoe wij – van de wieg af aan- theoretische ervaringen opdoen en vaardigheden ontwikkelen, aanvankelijk onbewust en geleidelijk bewuster.

Omdat verhoudingen overal voorkomen met een veelheid aan verschijningsvormen, zowel binnen als buiten rekenen-wiskunde, lijken ze soms geen eigen plaats te hebben in het curriculum. Het subdomein verhoudingen omvat in het rapport van de 'Expertgroep' ook breuken, kommagetallen en procenten voor zover daarvan het verhoudingskarakter centraal staat. Het rapport sluit daarin aan bij de omschrijving van dit subdomein in het PPON-rapport van 2005 (Janssen, e.a., p.135).

Verhoudingen kunnen beschreven worden:²

- in verhoudingentaal, zoals bij 'één op de tien Nederlanders' of 'het aantal fietsers is twee keer zo groot als het aantal automobilisten';
- in breukentaal, bijvoorbeeld 'driekwart van de inwoners is ouder dan 25 jaar';
- met procenten, zoals 70 procent van de mensen is voor de aanleg van een randweg.

Begrip van verhoudingen houdt in dat de relatie tussen die verschillende beschrijvingen kan worden gelegd en dat leerlingen dit begrip kunnen inzetten bij het oplossen van verhoudingsvraagstukken.

Het TAL-team schrijft over de relatie tussen breuken, kommagetallen, procenten en verhoudingen het volgende (TAL-team, 2005, pag.43):

In zekere zin is 'verhouding' een algemener concept dat in breuken, procenten en kommagetallen op een specifieke manier terugkomt.

Men kan op verschillende manieren tegen verhoudingen aankijken. Zo kan het subdomein gezien worden als een toepassingsgebied van getallen en bewerkingen (Van der Craats, 2007). Het kan ook beschouwd worden als een wiskundig verschijnsel in brede zin en daarmee als een verbindend en overkoepelend begrip, of een 'spin' in het web. Tenslotte kan verhoudingen gezien worden als een op zichzelf staand subdomein, naast breuken, procenten en kommagetallen dat van vier tot veertien jaar uitgelijnd is. Deze manieren van kijken vullen elkaar aan en kunnen allemaal in het onderwijs geconcretiseerd worden.

2 doorlopende leerlijn?!

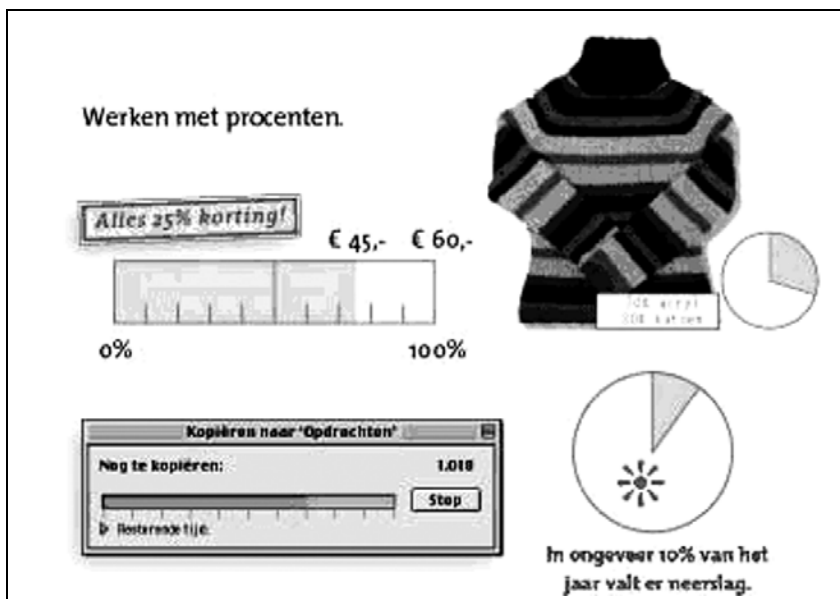
basisonderwijs

In de onderbouw van het basisonderwijs is de aanpak van verhoudingen veelal kwalitatief en worden verhoudingen meestal niet als zodanig be-

noemd. Het gaat vaak om situaties op het terrein van meten en meetkunde. Als het al om het kwantitatieve aspect van verhoudingen gaat, worden ze vaak met één getal beschreven: 'drie keer zo groot', 'een kwart van de bevolking', '50 km/u'.

In de bovenbouw komt de kwantitatieve kant in beeld en worden de relaties met onder andere breuken en procenten gelegd. Vaak echter blijven verhoudingen als zodanig verborgen of impliciet. Verhoudingsvraagstukken betreffen situaties die ook in het dagelijks leven voorkomen, zoals recepten omrekenen, prijzen vergelijken, een tekening vergroten. Ze zijn vaak in alledaagse taal beschreven.

Ter ondersteuning bij het structureren van het probleem en het rekenwerk dat er bij komt kijken wordt vaak gewerkt met een dubbele getallenlijn of dubbele strook als model (fig.2).



figuur 2: van de site van 'Alles telt'

Het bijbrengen van inzicht staat daarbij voorop. Omdat dezelfde modellen ook een rol spelen bij het werken met breuken, procenten en kommagetalen, wordt de samenhang visueel ondersteund en kan een gemeenschappelijke taal ontstaan voor het hele gebied van verhoudingen en 'rationale getallen'.

De fase van werken met 'benoemde verhoudingen' gaat vooraf aan die van werken met onbenoemde, 'pure', verhoudingen als 3 : 5 ('drie staat tot vijf'). Formele verhoudingsbeschrijvingen komen minder vaak voor in het

basisonderwijs. Een belangrijk deel van de leerstof gaat over redeneren en rekenen met evenredigheden. Bij het rekenen wordt als hulpmiddel vaak de verhoudingstabel gebruikt (fig.3).

kinderen naar n.s.o.	2						
alle kinderen	5					240	

figuur 3: verhoudingstabel

Deze helpt bij het structureren van het probleem en ondersteunt tevens het handig en inzichtelijk rekenen. Het beheersen van procedures in het subdomein verhoudingen is voor het basisonderwijs een differentieel doel.

3 onderbouw voortgezet onderwijs

Met de invoering van de basisvorming in het voortgezet onderwijs is rekenen als expliciet subdomein van wiskunde opgenomen in de kerndoelen en de examenprogramma's. Het was duidelijk dat het 'leren rekenen' in het basisonderwijs niet was afgerond en dat met name op het gebied van verhoudingen, kommagetallen, procenten en breuken de lijn moest doorlopen. De nadruk is daarbij voor verhoudingen sterk gelegd op de rekenkant. In rekenhoofdstukken van de wiskundemethoden werd de verhoudingstabel daarbij geïntroduceerd als hulpmiddel. Aanvankelijk werd dit vrij uitgebreid gedaan en werden alle manieren van rekenen die toegestaan zijn in een verhoudingstabel geïntroduceerd. Later bleven daarvan alleen het vermenigvuldigen en delen van een kolom over. Daarnaast is er veel aandacht voor de vermenigvuldigingsfactor tussen de rijen.

THEORIE

Je kunt op twee manieren rekenen in een verhoudingstabel. In de linker tabel hieronder zijn horizontale pijlen handig en in de rechter tabel zijn verticale pijlen handig.

		$\times 3$	$\times 5$	$: 2$	
aantal kinderen	32	96	480	240	
aantal brillen	6	18	90	45	
		$\times 3$	$\times 5$	$: 2$	

aantal spinnen	2	5	9	7	
aantal poten	12	30	54	42	$\times 6$

figuur 4: rekenen in verhoudingstabel uit 'Moderne Wiskunde',
havo vwo 1a, 9e editie

De verhoudingstabel wordt in het voortgezet onderwijs ook gebruikt voor

rekenen met procenten (fig.5). Hoewel er enerzijds sprake lijkt van een doorlopende lijn nu verhoudingen (en ook procenten, breuken en komma-getallen) ook in de wiskundemethoden van het voortgezet onderwijs aandacht krijgen, zijn er ook nog wel zwakke punten in die aansluiting.

Voorbeeld

Op een school zitten 950 leerlingen.
Er zijn 38 leerlingen ziek.
Hoeveel procent is dat?

①	aantal leerlingen	950	...	...
	percentage	100	...	...

		$\div 950$	$\times 38$
②	aantal leerlingen	950	1
③	percentage	100	0,105...

④ Dus 4% van de leerlingen is ziek.

figuur 5:procenten in verhoudingstabel uit 'Moderne Wiskunde',
havo vwo 1a, 9e editie

Zo wordt er in de onderbouw van het voortgezet onderwijs bij de introductie van verhoudingen niet of nauwelijks gewerkt met de uit het basisonderwijs bekende modellen zoals dubbele strook en dubbele getallenlijn. De nadruk ligt op het correct uitvoeren van bewerkingen en er is weinig aandacht voor de begripsmatige aspecten van verhoudingen. Dat maakt dat ook in het voortgezet onderwijs verhoudingen vaak impliciet blijven. Een bijkomend gevolg lijkt te zijn dat de verhoudingstabel niet ingezet wordt als handig hulpmiddel, maar een doel op zich lijkt te zijn geworden. Zo wordt de verhoudingstabel niet expliciet ingezet in andere hoofdstukken uit het wiskundeboek als het bijvoorbeeld gaat om vergroten en verkleinen bij meetkunde. Bij andere vakken is de verhoudingstabel meestal helemaal onbekend en worden andere manieren gebruikt om met verhoudingen te rekenen. Dat maakt het voor de leerlingen niet overzichtelijker.

4 bovenbouw havo en vwo

In de bovenbouw van havo en vwo heeft rekenen niet altijd een expliciete

plaats. Binnen het vak wiskunde A voor de havo wordt er nog aandacht aan besteed tot en met het eindexamen (fig.6). Sinds kort wordt, mede naar aanleiding van de discussie over de rekenvaardigheden van pabo-studenten, ook in het examenprogramma wiskunde A rekenvaardigheid weer apart benoemd.

■ Opgave 1 Hypotheken

Als je een huis koopt, moet je meer betalen dan alleen de koopsom. Je moet bijvoorbeeld belasting betalen en de kosten van de notaris. Deze bijkomende kosten zijn voor een nieuwbouwhuis ongeveer 6% van de koopsom en voor een bestaande woning ongeveer 12%.

Iemand heeft een bestaande woning gekocht. De koopsom en de bijkomende kosten hebben haar in totaal 300000 gulden gekost.

1 ☐ Bereken de koopsom.

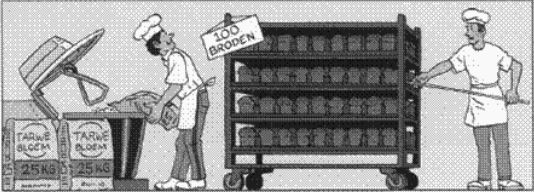
figuur 6: opgave uit 'CSE' wiskunde havo A, 1

Verhoudingen komen daarnaast in het wiskundecurriculum nog op diverse plaatsen voor, bijvoorbeeld bij evenredige verbanden, in de context van exponentiele groei (rente op rente) en bij de meetkundige verhoudingen (goniometrie). Ze worden dan echter vaak niet als zodanig benoemd.

5 bovenbouw vmbo en mbo

In de bovenbouw van het vmbo krijgen leerlingen die kiezen voor de basis- en kaderberoepsgerichte leerweg een aantal beroepsgerichte vakken. Daarbij krijgen zij in praktische situaties regelmatig te maken met verhoudingsvraagstukken. Ook op examens van de beroepsgerichte vakken zien we dergelijke vraagstukken (fig.7).

Tarwe, door de boer geteeld, wordt in de fabriek verwerkt tot bloem. De bakker verwerkt de bloem tot brood.



100 kg tarwe → 75 kg bloem → 100 broden

23 → Hoeveel kilogram bloem is nodig voor 60 broden? Schrijf de berekening op.

figuur 7: opgave uit 'CSE landbouw breed' vmbo BB 2004-1

Het vraagstuk uit figuur 7 zou uitstekend kunnen worden opgelost met een verhoudingstabel (fig.8).

<i>bloem</i> (kg)	75	7,5	15	45
<i>broden</i>	100	10	20	60

$\div 10 \quad \times 2 \quad \times 3$

figuur 8

De verhoudingstabel is echter buiten rekenen-wiskunde op school niet of nauwelijks bekend. Daar komt nog bij dat lang niet alle leerlingen in vmbo en mbo rekenen-wiskunde als vak hebben. In de sectoren Economie en Zorg en welzijn van het vmbo is wiskunde niet verplicht. De ondersteuning van het rekenen vanuit het vak (en de docent) wiskunde valt dan volledig weg. In het mbo is er in veel opleidingen ook geen expliciete aandacht voor rekenen wiskunde.³ Het is niet ondenkbaar dat er in die situatie geen expliciete aandacht is voor het vertalen van het probleem uit de beroepscontext naar rekenen-wiskunde. Deze stap is juist binnen vmbo en mbo waar de verhoudingen zich met name voordoen binnen de contexten van de beroepsopleiding van groot belang.

Zowel in vmbo als mbo zal het rekenen onderhouden moeten worden, aldus een van de aanbevelingen van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (p. 78). Dit geldt ook voor leerlingen die geen wiskunde (meer) hebben. Het onderhouden van de relevante rekenwiskundige vaardigheden zou dan heel goed kunnen door in ieder geval in de andere vakken expliciet aandacht aan het rekenen te besteden en dit ook op elkaar af te stemmen. Daarbij zouden verhoudingen zeker uitgebreid aandacht moeten krijgen, vanwege de al eerder genoemde veelheid aan situaties waarin ze een rol spelen en vanwege het verbindend karakter. De afstemming met het beroepsgericht rekenen is daarbij van groot belang.

6 slot

Het feit dat verhoudingen ook in het advies van de 'Expertgroep' als belangrijk domein gezien wordt, schept (opnieuw) de mogelijkheid die leerlijn ook daadwerkelijk te laten doorlopen. Een belangrijk punt van het rapport van de Expertgroep is dat de niveaubeschrijvingen over de 'drempels' heenlopen waardoor de beschrijvingen voor twaalf jaar (1F en 1S) en 16

jaar (2F en 2S) in vergelijkbare termen zijn geformuleerd en op elkaar aansluiten. Hiermee ligt er een kader om een doorgaande leerlijn verhoudingen te realiseren. De niveaubeschrijvingen samen met al bestaande beschrijvingen in kerndoelen, tussendoelen en leerlijnen in bijvoorbeeld de TAL-boeken en op de TULE-website, alsmede voorbeelden in schoolboeken, examens en andere bronnen vormen de nodige bouwstenen en verbindingsstukken. Om hiervan een didactisch verantwoord en bruikbaar geheel te maken moet nog wel wat werk worden verzet. Een aantal belangrijke punten daarbij is:

- aansluiten op eerder in het onderwijs gebruikte modellen;
- verhoudingen daar waar ze voorkomen ook expliciet benoemen;
- relaties verstevigen tussen verhoudingen en breuken, procenten en kommagetallen;
- naast rekenen met verhoudingen ook blijven werken aan het begrip van verhoudingen;
- in andere vakken verwijzen naar bekende modellen en methoden uit rekenen-wiskunde.

Het zou mooi zijn als iemand die de mbo opleiding tot verpleegkundige instormt de uitspraak: 'Hanteer de regel $1\% = 1 \text{ g}/100 \text{ ml} = 10 \text{ mg/ml}$ ', onmiddellijk in verband kan brengen met wat er in het voorgaande onderwijs op het gebied van procenten en verhoudingen aan de orde is geweest.

noten

- 1 Voor uitleg over en uitwerkingen van de deze referentieniveaus verwijzen we naar het rapport zelf.
- 2 Bron: PPON, pag.135, tekst enigszins aangepast en aangevuld met elementen uit (uitwerkingen van) kerndoelen, leerstofbeschrijvingen en examenprogramma's.
- 3 In deze situatie komt verandering doordat vanaf 2010 in de kwalificatiedossiers van alle opleidingen rekenen-wiskunde is opgenomen. Dat gebeurt op basis van het recent ontwikkelde raamwerk rekenen wiskunde mbo.

literatuur

- Cevo (2007). *Syllabus wiskunde A havo centraal examen 2009*. Utrecht: Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven vwo, havo, vmbo.
- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008b). *Over de drempels met rekenen. Consolideren, onderhouden, gebruiken en verdiepen*. Enschede: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen.
- Freudenthal, H. (1984). *Appels en peren/wiskunde en psychologie*. Apeldoorn: Van Walraven.
- Janssen, J., F. van der Schoot & B. Hemker (2004). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4. PPON-reeks nr.32*. Arnhem: Ci-

to.

SLO (2006). *Tussendoelen en leerlijnen*. Tule. <http://tule.slo.nl/> Enschede: SLO.

TAL-team (2006). *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen*. Groningen: Wolters Noordhoff.

Wijers, M., V. Jonker, J. Huisman e.a. (2007). *Raamwerk rekenen/wiskunde mbo*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Doorgaande ontwikkelingen

-verslag en nabeschouwing 26^{ste} Panama-conferentie -

R. Keijzer & J. ter Heege (red.)
Fisme/Panama, Universiteit Utrecht

1 inleiding

Eind januari vond de 26^{ste} Panama-conferentie plaats. Tijdens deze conferentie werd het rapport van de commissie Meijerink, 'Over de grenzen met taal en rekenen', aangeboden aan de bewindslieden van OC&W.

In dit verslag wordt gekeken naar wat de actualiteit van het reken-wiskundeonderwijs is, welke vragen de jongste ontwikkelingen oproepen en welke antwoorden we vonden in het aanbod tijdens de conferentie.

De Panama-conferentie van 2008 vond plaats van 23 tot en met 25 januari 2008 en had als titel 'Doorgaande ontwikkelingen'. Aan dit verslag leverde een aantal conferentiedeelnemers een bijdrage, te weten: H. Amse, M. Bidoggia, C. Borghouts, P. van Dijk, Y. van der Eerden, M. Franssen, J. Griffioen, J. Haarsma, T. van der Heiden, E. van Herpen, B. Krol, A. Lek, F. van Merwijk, F. van Nes, D. van der Straaten, J. van Stralen, F. Van Mulken en L. de Vet.

In dit conferentieverslag brengen wij ervaringen en impressies samen. We zochten ook de grote lijn. De zoektocht bracht ons bij de theorieontwikkeling van het realistisch reken-wiskundeonderwijs. De grote lijn komt naar voren in de gekozen hoofdstukindeling. Daarnaast ontstonden vragen en reflecties. In die reflecties geven we onder meer aan welke bijdrage de conferentie leverde aan theorieontwikkeling rond reken-wiskundeonderwijs.

2 stand van zaken

Tijdens de 26^{ste} Panama-conferentie kwam het rapport 'Over de drempels met taal en rekenen' van de 'Expertgroep doorlopende leerlijnen taal en rekenen' nadrukkelijk aan de orde. Dit rapport werd tijdens de conferentie aan de bewindslieden van OC&W aangeboden. Het gesprek naar aanleiding van dit rapport ging vooral over het rekenniveau en hoe dit bereikt kan worden. Dit vormde ook het onderwerp tijdens de presentatie van het re-

cente peilingsonderzoek in het speciaal basisonderwijs (sbo), dat onlangs door het Cito is uitgevoerd. Het rekenniveau was ook de kern van de opening van de conferentie.

de opening: het thema van de conferentie

De conferentie stond in het teken van 'Doorgaande ontwikkelingen'. Deze themakeuze hield onder meer verband met de werkzaamheden van de eerdergenoemde Expertgroep. De organisatie wilde met deze thematiek uitdragen dat het leren van rekenen-wiskunde volgens langlopende leerprocessen verloopt. Veelal vormt de in lagere leerjaren opgedane kennis een onmisbare basis voor leerprocessen in hogere leerjaren, in basis- of voortgezet onderwijs.

Het thema kan ook vanuit een geheel andere invalshoek worden ingevuld. Het reken-wiskundeonderwijs ontwikkelen kan ook als een 'doorgaande ontwikkeling' worden gezien. De Panama-conferentie levert hieraan een belangrijke bijdrage. In zijn conferentieopening besteedde M. van Zanten aandacht aan het tweede aspect, M. van den Heuvel-Panhuizen die de openingslezing verzorgde, gaf voorbeelden van het eerste aspect.



In haar lezing legt ze drie accenten: de wenselijkheid om kinderen in het reken-wiskundeonderwijs te leren problemen op te lossen, de rol van het oefenen en de vraag welke betekenis moet worden toegekend aan het algoritmiseren. Zij meent dat er in de afgelopen decennia een interessante omslag is gemaakt in het reken-wiskundeonderwijs. Er kan nu niet, zoals in de jaren zestig en zeventig, worden volstaan met een traditionele aanpak in de aanvangsjaren van de basisschool. Het accent van het reken-wiskundeonderwijs ligt tegenwoordig, ook internationaal gezien, niet meer op het louter aanleren van rekenprocedures, maar op *mathematical reasoning*.

Dit is in Nederland in de huidige situatie vooral naar de hoogste klassen van het basisonderwijs en naar het voortgezet onderwijs verschoven, wat volgens Van den Heuvel-Panhuizen ongewenst is. Zij pleit er daarom voor om in de onder- en middenbouw van het basisonderwijs meer aandacht te besteden aan problemen, die de beoogde wiskundige denkactiviteit mogelijk maken. Ze doet een pleidooi om meer puzzelachtige activiteiten, à la 'Het ei van Columbus', in methoden voor onder- en middenbouw op te nemen.

het rapport 'Over de drempels'

Doorgaande leerlijnen zijn nadrukkelijk in beeld in het rapport 'Over de drempels met taal en rekenen' (Meijerink, 2008), dat door de 'Expertgroep doorlopende leerlijnen' in opdracht van het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen is samengesteld. In het tijdschrift 'Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk' besteedden we al aandacht aan dit rapport (Keijzer & Ter Heege, 2008; Ter Heege, 2008). De voorzitter van de commissie, H. Meijerink, bood het rapport aan de bewindslieden, minister R. Plasterk en de staatssecretarissen M. van Bijsterveldt en S. Dijksema aan.

Meijerink meldt dat er piketpaaltjes zijn uitgezet voor leerlingen van twaalf, zestien en achttien jaar, die verwijzen naar momenten waarop doorgaande leerlijnen in het Nederlandse onderwijs worden onderbroken. In het rapport worden er voor het onderwijs dat leidt tot 'de onderbreking in de leerlijn' telkens twee niveaus aangegeven: een fundamenteel kwaliteitsniveau en een streefkwaliteit. De vaardigheden die in het fundamentele kwaliteitsniveau zijn beschreven, moeten als voorwaardelijk voor de volgende fase in het onderwijs worden beschouwd. Van het fundamentele kwaliteitsniveau in het onderwijs voor leerlingen van twaalf tot zestien jaar wil de commissie dat alle Nederlanders dit bereiken; het moet als algemeen maatschappelijk niveau worden beschouwd. Dit plan is ambitieus, zegt Meijerink, omdat het stelt dat het streven is dat de opbrengst van het onderwijs aanmerkelijk hoger moet zijn dan heden ten dage gerealiseerd wordt. Dit kan in zijn ogen plaatsvinden door meer te investeren in taal en rekenen en ook door meer aandacht te schenken aan het oefenen en bijhouden van eenmaal verworven vaardigheden. Die vaardigheden moeten, staat in het rapport, ook getoetst worden met verplichte eindtoetsen, voor het primair en het voortgezet onderwijs en voor het middelbaar beroepsonderwijs. Meijerink pleit ervoor leraren in functie faciliteiten te bieden, waardoor ze hun werk beter kunnen uitvoeren. Dit betekent een stevig pleidooi voor meer nascholingsfaciliteiten. Vervolgens reageert minister Plasterk. Hij voelt de conferentie goed aan: hij start zijn verhaal met een sommetje dat velen aanspreekt: $516 - 98 = ?$ Hoeveel procent van de kin-

deren in de hoogste leerjaren van de basisschool kan dit sommetje maken? Hij zegt: 'Pabo-studenten moeten dit zonder meer kunnen'. Hij beschouwt de voorstellen van de commissie als een omslagpunt; als een nieuwe norm voor het onderwijs. Het oogmerk van het rapport is immers het onderwijs een nieuwe impuls te geven en de resultaten van het onderwijs op een hoger plan te brengen. Staatssecretaris Van Bijsterveldt pleit ervoor taal - vooral taal - en rekenen, nog meer dan nu al het geval is, te zien als vakken die van cruciaal belang zijn met het oog op het latere functioneren van leerlingen in de maatschappij. Ook zij benadrukt de rol van de leraar in het onderwijs: 'Zonder goede leraren geen goed onderwijs', is haar slogan. Staatssecretaris Dijkzma wijst er ten slotte op dat het van belang is alle kinderen te bieden wat zij nodig hebben, ook leerlingen die niet in staat zijn het fundamentele niveau te halen.



Leerlingvolgsystemen moeten zwaarder wegen in het onderwijs, juist omdat hiermee snel probleemgevallen kunnen worden gesignaleerd. Nu wordt er weliswaar in het onderwijs veel getoetst, maar wat er met de resultaten gebeurt, is niet altijd effectief. Zij vraagt in dit kader extra aandacht voor het vroeg- en voorschoolse leren, waarin kinderen de kans wordt geboden om het oplopen van achterstanden te voorkomen. Ze ziet het rapport als een steun in de rug van de kwaliteitsagenda voor het primair onderwijs.

het advies van de Expertgroep: het proces

De Expertgroep die kort geleden, in mei 2007, werd geïnstalleerd, had de opdracht de regering te adviseren met betrekking tot een betere doorloop van primair naar hoger en wetenschappelijk onderwijs en een betere aansluiting op de arbeidsmarkt. Er sprak een zekere maatschappelijke zorg uit de opdracht ten aanzien van onder meer de uitbouw en het behoud van kwaliteit in het onderwijs, waaronder het relatief te zwak presteren van de

goede leerling. Het is volgens de inleider van deze bijeenkomst, J. Letschert, duidelijk dat de overheid meer invloed wenst op het curriculum van de verschillende schooltypen. Zo beschouwd, is het van belang om in de gaten te houden wat er met het advies van de Expertgroep gebeurt en welke conclusies het ministerie naar aanleiding van de aanbevelingen zal trekken. Belangrijk ijkpunt daarin zal de toenemende betekenis van taal en rekenen-wiskunde vormen, zoals tot uitdrukking komt in de wens om het verlies van in de basisschool aangeleerde kennis, vaardigheden en competenties in het voortgezet onderwijs en in het mbo zoveel mogelijk te beperken.

PPON-onderzoek

In 2005 hield het Cito een onderzoek onder sbo-scholen in het kader van PPON en doet daarover tijdens de conferentie verslag. Het was opvallend dat de werving van scholen zo moeizaam verliep. Kennelijk was de bereidheid van scholen om aan dit onderzoek deel te nemen niet groot. Dit is de eerste peiling op sbo-scholen. Daarvoor - in 1997 - ging het nog om een peiling in mlk- en lom-scholen. Het onderzoek betrof de rekenkennis en vaardigheden van leerlingen van twaalf jaar (en ouder) in het speciaal basisonderwijs. De meerderheid van hen blijkt wat betreft de basisbewerkingen en de automatismen op een niveau te presteren dat vergelijkbaar is met een niveau tussen de groepen 5 en 6 van het reguliere basisonderwijs. Er is door de onderzoekers ook gekeken naar de manier waarop leerlingen opgaven oplossen, aan de hand van aantekeningen die leerlingen maakten.

Er werden opvallende resultaten gerapporteerd, die veelal aanleiding gaven tot een discussie met de aanwezigen, zoals dat jongens in het sbo op een hoger niveau rekenen dan meisjes. Het blijkt ook dat leraren in het sbo het accent in hun onderwijs veelal op de basisvaardigheden en het leren cijferen leggen.

reflectie (1)

Er is een invloedrijke maatschappelijke beweging ontstaan die aandringt op een hoger niveau voor rekenen-wiskunde. Het toont het belang aan dat in onze maatschappij aan reken-wiskundeonderwijs wordt gehecht. Een dergelijk hoog niveau wordt alleen bereikt met een uitgebalanceerde didactische aanpak en die staat of valt met de kwaliteit van de leraar. Meijerink geeft daarover een belangrijk signaal af, zonder te komen tot een didactische invulling. Dit laatste viel namelijk buiten zijn opdracht. Dit is van belang voor veel deelnemers van de Panama-conferentie die beroepshalve bijdragen aan de ontwikkeling van leraren - in de school of in de initiële opleiding. We vragen ons echter af of de deelnemers in dit opzicht de juiste impulsen krijgen. Bij de vraag wat voor 'de buitenwacht' een aanvaardbaar

niveau is en hoe een daarbij passende didactiek er dan uitziet, moeten we ons nadrukkelijk de vragen stellen:

- of beschikbare materialen (zoals methoden) leraren voldoende ondersteunen bij het effectief maken van hun onderwijs;
- wat de karakteristiek is van effectieve professionalisering;
- of er gekeken moet worden naar specifieke groepen leerlingen of juist niet;
- welke inhouden en vaardigheden gekozen dienen te worden;
- of de vraag uit de maatschappij om een hogere opbrengst van ons reken-wiskundeonderwijs niet neerkomt op een vraag naar een ander paradigma dan wat onder het realistisch reken-wiskundeonderwijs wordt verstaan en, zo dit het geval is, of we dit wenselijk achten.

Dergelijke vragen raken aan theorievorming van het realistisch reken-wiskundeonderwijs. Zo vormt een belangrijke vraag hoe motivatie om de eigen wiskunde te construeren voor de zwakste rekenaars samenhangt met betekenissen die wiskundige concepten voor deze groep leerlingen hebben en hoe die motivatie kan worden gestimuleerd, zodat leerlingen zin in het leren van rekenen-wiskunde houden.

3 vragen die zich opdringen

Enkele bijdragen aan de conferentie brachten genoemde vragen naar voren en voorzagen deze van een prille uitwerking. Dat gebeurde bijvoorbeeld in de bijdrage van Kolovou en Van den Heuvel-Panhuizen, die nagingen of het analyseren en redeneren wel voldoende in reken-wiskundemethoden aan bod komt. Ook De Goeij, Menne, Veltman en Treffers stellen vragen in deze richting en gaan in op het leren oplossen van problemen.

Bij een van de zogenoemde rondetafelgesprekken richtte de discussie zich spontaan op wat de waarde van de realistische visie op reken-wiskundeonderwijs op dit moment nog is en in een plenaire bijeenkomst werden allerlei standpunten rond het cijferen in stelling gebracht. In de bijeenkomst van onderzoekers, in die van onderwijsadviseurs en de bijeenkomsten van Den Hertog, Schoeman en Terlouw en die van Bodrij, Jolink en Van Bueren ging het over het professionaliseren van de leerkracht, met name op die momenten dat het leerproces van kinderen om veel professionaliteit vraagt. Een geheel nieuwe en voor veel conferentiedeelnemers verrassende invalshoek was die van J. Jolles, neuropsycholoog, die betoogde dat de cognitieve en hersenwetenschappen de potentie hebben om bij te dragen aan de verbetering van het reken-wiskundeonderwijs. Voor het reken-wiskundeonderwijs betekent dit dat er meer interventies op school zouden

moeten zijn die vaardigheden als het visuele vermogen, mentale rotatie, het verbale vermogen, het spatiële vermogen en patroonherkenning behandelen, omdat dit soort ruimtelijke vaardigheden voorwaarde blijken te zijn voor allerlei reken-wiskundige vermogens, aldus Jolles. Zijn stelling is dat pas als er een dialoog ontstaat tussen wetenschappers uit verschillende disciplines, als de bestaande kennis aaneen gekoppeld kan worden, er een situatie ontstaat waarbij het onderwijs gebaat is.

We gaan op enkele van genoemde bijdragen dieper in.

hoeveel probleemoplossen zit er in onze methoden?

Huidige reken-wiskundemethoden zijn gedegen uitgelijnd, maar aandacht voor probleemoplossen ontbreekt vrijwel volledig, vooral in de onder- en middenbouw. Kolovou en Van den Heuvel-Panhuizen zijn hier weinig gelukkig mee. In hun ogen vormt het oplossen van problemen het hart van het hedendaagse reken-wiskundeonderwijs. Zij werken hiermee een onderdeel uit van de openingslezing van Van den Heuvel-Panhuizen. De vraag die men eerst beantwoordt, is welke kenmerken een probleem heeft dat aanzet tot probleemoplossen. Het gaat, zeggen de inleiders, om het vinden van een onderliggend patroon in samenhangende getallen, via analyseren, modelleren, strategisch denken en *high-order-thinking*. Om greep te krijgen op opgaven die aanzetten tot probleemoplossen, is het van groot belang om het oplossingsgedrag van kinderen te observeren en te inventariseren. Daardoor krijgen we op den duur meer greep op dit soort wiskundige activiteiten.

Omdat deze *problem solving*-achtige activiteiten nauwelijks voorkomen in Nederlandse reken-wiskundemethoden, is het POPO-project gestart. Het doel van dit project is die analyses te doen, met het streven Nederlandse reken-wiskundemethoden op den duur in deze richting aan te passen door er meer echte problemen in op te nemen.

Achillescanon

‘Er gaat een canon komen van klassieke rijke wiskundeproblemen. Voorlopig zijn het er tien, maar andere volgen. Als je erin slaagt deze problemen te vertalen naar het niveau van de basisschoolleerling, worden het problemen die de kinderen raken, het worden dan problemen die zij mee naar huis nemen. Het zal ze tot denken aanzetten.’ Aldus leiden Treffers, Menne, Veltman en De Goeij hun werkgroep in. Zij presenteren het voorbeeld, van ‘de verdwenen wijnflessen uit de kelder van Heer Bommel’:

De bediende van Heer Bommel, die slechts het ‘rekenen tot 10’ beheerst, controleert ’s avonds laat of alle flessen er nog zijn. Hij telt dan of in elk van de vier zijden steeds 10 flessen aanwezig zijn (fig.1a). Toen ’s nachts een inbreker uit de kelder een fles wijn meenam, maar ook de slimheid had

om de overgebleven flessen anders te rangschikken, bemerkte de bediende dan ook niet dat er een fles gestolen was (fig. 1b).

De vraag aan de leerlingen die dan volgt, is: 'Hoe lang kan de dief nog doorgaan met deze slimme list zonder dat de bediende het merkt?' Het antwoord luidt dat er maximaal zestien flessen kunnen worden weggehaald, zodat op elk hoekpunt vijf flessen liggen.

1	4	4	1
4			4
4			4
1	4	4	1

1	4	4	1
4			4
4			3
1	4	3	2

figuur 1a en 1b

Met deze werkgroep willen Treffers, Menne, Veltman en De Goeij een start maken met het samenstellen van een dvd met op lesniveau uitgevoerde, bekende wiskundeproblemen.

realistisch reken-wiskundeonderwijs ter discussie

Tijdens de conferentie werd aan ronde tafels gesproken over actuele onderwerpen. Aan een van de tafels ging het gesprek over wat de gesprekspartners anno 2008 nog realistisch reken-wiskundeonderwijs vinden. Het gesprek nam al snel een wat radicale wending en richtte zich op de vraag of we nog wel door moeten gaan met het realistisch rekenonderwijs, nu daarop in de media veel kritiek wordt geuit. Deze herschreven vraagstelling maakt dat de discussie snel op gang komt. Waarom dringt het realistisch rekenonderwijs zo moeilijk tot de onderwijspraktijk door? De ervaring leert dat er in de praktijk veel solitaire sommenmakerij voorkomt en dat er van interactie en verkenningen van de wiskunde - wat binnen het realistische reken-wiskundeonderwijs wordt beoogd - weinig terecht komt. En, zo wordt door deelnemers aan het gesprek ervaren, hoe meer men in het onderwijs aandacht wenst te besteden aan verschillen tussen kinderen, hoe minder het realistisch reken-wiskundeonderwijs uit de verf komt. Leraren proberen vaak voor ieder kind een eigen traject te maken en dit leidt ertoe dat kinderen vaak op zichzelf zijn aangewezen om sommen op te lossen. De instructietijd neemt af en zo ook de (wiskundige) interactie met kinderen en tussen kinderen onderling. Dit brengt het gesprek op de vraag: 'Hoe "realistisch" is de onderwijs-praktijk eigenlijk?'

Er wordt door enkele deelnemers aan het gesprek getwijfeld aan de haal-

baarheid van realistisch reken-wiskundeonderwijs. Ze kiezen daarbij het thema verschillen tussen kinderen om hun argumenten kracht bij te zetten. In de onderwijspraktijk regeert hier vooral de angst, bijvoorbeeld voor de toetsing, voor de inspecteur, om het niet goed te doen, kortom om te voldoen aan verwachtingen van anderen. De leraar zal zijn eigenheid terug moeten krijgen.

Tijdens de NVORWO-lezing noemt K. Hoogland het aan de haal gaan met onderwijsvisies, zoals dat nu regelmatig gebeurt rond het reken-wiskundeonderwijs, 'vervormingen'. In het ronde tafelgesprek komen ook dergelijke vervormingen naar voren.

Als leraren goed begeleid worden, levert dat vaak ook direct winst op. De drang naar een steeds meer zelfstandige verwerking van de leerstof is een van de 'vervormingen' van het realistisch reken-wiskundeonderwijs, zo komt in het gesprek naar voren. Het doel zou moeten zijn meer naar kinderen te kijken en aan te sluiten bij hun interpretatie en beleving van getallen en de getallenwereld. Dat bereik je niet door hen veel zelfstandig te laten werken.

'Hoe kunnen we interactie en de realiteit dan toch weer terug krijgen in het reken-wiskundeonderwijs?', is een volgende vraag. Er ligt hier een tweede 'vervorming' op de loer: we dienen te waken voor de opvatting dat zwakke rekenaars behoefte hebben aan structuur; een structuur die de leraar vervolgens min of meer dwingend oplegt. Zwakkere rekenaars, zo brengen enkele deelnemers aan het gesprek naar voren, hebben juist moeite om de structuur die de leraar hen biedt te volgen. Zij zouden er meer baat bij hebben hun eigen structuren en ideeën te ontwikkelen, door op onderzoek te gaan naar wiskundige essenties en hierover te praten met andere kinderen. Leraren zijn regelmatig te snel geneigd om over te stappen naar de verwerking (dat wil zeggen: sommen laten maken) en besteden te weinig aandacht aan de wiskundige (wereld)verkenning van kinderen. Het modelleren van de werkelijkheid vindt immers vanuit de wiskundige wereldverkenning van de kinderen plaats. Dit in tegenstelling tot het introduceren van opgelegde modellen, die niet aansluiten bij wat kinderen zelf hebben ontdekt. Het kost misschien meer tijd om kinderen op deze wijze de wiskundige wereld te laten verkennen, maar het is een zinvolle investering. Er is winst te boeken in het effectiever maken van de onderwijstijd, en niet in het verder individualiseren van het onderwijs.

In dit opzicht zou men kunnen zeggen dat de leraar door een dichtgespijkerde methode in zijn professionele onderwijsgedrag wordt belemmerd. Het is dan namelijk niet meer nodig dat hij over inhoud en didactiek nadenkt. Alles staat immers al in de methode. En daarom ervaren veel scholen het reken-wiskundeonderwijs vaak niet als een punt van zorg. Scholen

vragen, zo lijkt het, om die reden vaker om ondersteuning van het klassenmanagement en het zelfstandig werken. In de ogen van verschillende vakdidactici rekenen-wiskunde schort er echter vaak ook wat aan de didactische kennis van leraren.

Daarvan moeten we ze bewust maken, wat begint met het luisteren naar de problemen die ze tegenkomen en deze serieus nemen. Dat de maatschappij verandert betekent dat inhouden van het onderwijs en de vraag aan dat onderwijs kan veranderen, maar het realistische concept blijft daarbij wel bestaan, zo luidt de conclusie van dit rondetafelgesprek.

standaardprocedures in het reken-wiskunde-onderwijs

In een plenaire bijeenkomst wordt de mening van conferentiegangers gepeild over de betekenis van standaardprocedures in het reken-wiskunde-onderwijs in de basisschool. Dit, naar aanleiding van vier inleidingen van even zoveel deskundigen uit de onderwijspraktijk. Het is de bedoeling aan te sluiten bij de discussie die met het rapport 'Over de drempels bij taal en rekenen' op gang werd gebracht.

A. Treffers verzorgt de eerste inleiding, met de titel 'Het voorkomen van ongecijferdheid in letterlijke zin'. Hij baseert zich op het voorbeeld van Matilda uit het gelijknamige boek van R. Dahl uit 1988. Matilda rekent razendsnel uit haar hoofd, terwijl haar leerkracht juffrouw Engel op papier rekt. Voor Treffers is de vraag of de verbetering van het hoofdrekenen en schattend rekenen ten koste is gegaan van het cijferen. Veel kinderen maken opgaven uit het hoofd, blijkt uit mondelinge peilingen. Wanneer kinderen aangezet worden tot het werken op papier, stijgen de resultaten bij de toetsen (Treffers, 2007). Treffers adviseert om kinderen gegevens te laten noteren en voor de verbetering van het cijferen hooguit één leergang te nemen, bijvoorbeeld die van het type vermenigvuldiging 3×456 . Dergelijke opgaven kunnen leerlingen in tien lessen leren maken; dan heb je, volgens Treffers, meteen het basisprincipe door. De inleider schetst het kader voor de onderlinge verhouding tussen het hoofdrekenen en het cijferen in verschillende aanpakken en methodieken van vroeger en nu. Bij de peiling naar aanleiding van de stelling: 'Opgaven van het type 3×456 moeten kinderen op niveau 1, fundamentele kwaliteit, cijferend kunnen uitrekenen' is 86,3 procent van de aanwezigen het eens en slechts 13,7 procent niet. Wanneer Treffers daarna de stelling 'Opgaven van het type 34×56 moeten kinderen op niveau 1 fundamentele kwaliteit cijferend kunnen uitrekenen' aan de deelnemers voorlegt, is nog maar 65,9 procent het eens en 34,1 procent het oneens met de stelling.

De tweede inleiding wordt verzorgd door K. Buijs. Die neemt als voorbeeld voor zijn betoog het kladblaadje van José, een leerling uit (eind) groep 6.

In de E6-toets (eind groep 6) uit het Cito-Leerling Volg Systeem zitten gemengde opgaven waarbij kladblaadjes gebruikt mogen worden. Een deel van de sommen in deze toets doet José uit het hoofd. De opgave 8×79 maakte zij echter op papier. Buijs constateert dat José selectief uit het hoofd rekt en daarbij passende hulpmotaties maakt. Hij vraagt zich af of het wenselijk is dat leerlingen cijferprocedures beheersen voor vermenigvuldigingen van het type $ab \times cd$, want er is hier een veelheid aan strategieën mogelijk, zoals verdubbelen, herhaald optellen, groepjes maken, de splitsstrategie en compenseren (fig.2).

Buijs schetst een leerlijn waarbij het accent wordt gelegd op een veilige splitsstrategie en het ontwikkelen van adequaat notatiegedrag.

4. Vermenigvuldigen.
Gebruik het kladblaadje als je een som op papier uitrekent.

$6 \times 35 = 210$
 $8 \times 79 = 632$
 $15 \times 8 = 120$
 $4 \times 12 = 508$
 $20 \times 50 = 1000$

$7 \times 839 = 5873$
 $6 \times 300 = 1800$
 $12 \times 25 = 300$
 $14 \times 27 = 378$
 $600 \times 4 = 2400$

of fout

kladblaadje

$8 \times 70 = 560$
 $8 \times 9 = 72$

$$\begin{array}{r} 284 \\ 8 \\ \hline 632 \end{array}$$

$7 \times 8 = 5600$
 $7 \times 30 = 210$
 $7 \times 800 = 5600$
 $7 \times 9 = 63$

$$\begin{array}{r} 2400 \\ 1000 \\ \hline 3400 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5600 \\ 210 \\ 63 \\ \hline 5873 \end{array}$$

figuur 2: het kladblaadje van José

Niveauperhoging wordt verkregen doordat het inzicht in de werkwijze toeneemt. Het einddoel is de kolomsgewijze procedure. De maatschappelijke relevantie van het cijferen is volgens Buijs geslonken. Er zijn zo'n vijftien tot twintig lessen nodig om leerlingen gestileerd te leren hoofdrekken. Vervolgens kunnen nog eens vijftien lessen besteed worden aan de introductie van het cijferen. De stelling 'De verkenning van het meercijferig vermenigvuldigen kan een grote hoeveelheid rijke leerervaringen met zich meebrengen, en behoort daarom bij niveau 1 fundamentele kwaliteit' levert instemming van 86,7 procent van de aanwezigen op. 13,3 procent is het hiermee oneens. Het aantal 'eens'-stemmers is aanzienlijk hoger als de zaal de stelling wordt voorgelegd naar de verbinding tussen de basale ken-

nis van het hoofdrekenen en het schattend rekenen enerzijds en meercijferig vermenigvuldigen anderzijds: 91,3 procent eens, 8,7 procent oneens. Minder uitgesproken zijn de aanwezigen naar aanleiding van Buijs' inleiding over de stelling 'Cijferen is een basale vaardigheid. Het behoort daarom tot niveau 1 fundamentele kwaliteit': 64,8 procent eens en 35,2 procent oneens.

De derde inleider is S. Huitema, die vanuit zijn ervaringen in het vmbo spreekt. Hij ziet daar dat leerlingen de basale vaardigheden rekenen-wiskunde onvoldoende beheersen. Leerlingen in het vmbo hebben, volgens Huitema, behoefte aan vaste oplossingsmanieren. Zij hebben een afkeer van rekenen op papier en tonen daardoor wellicht meer dan anderen hun afhankelijkheid van de zakrekenmachine. Hij schetst een leerlijn:

- basale (hoofdreken-)vaardigheden;
- tafels tot 10;
- rekenen met nullen: 3×40 , 40×3 , 3×400 , 400×3 ;
- schatten dat 3×395 iets minder is dan 1200 (3×400);
- 6×36 , 6×96 splitsend uitrekenen;
- cijferen als logisch vervolg op splitsend rekenen;
- 6×56 en 6×256 door kolomsgewijs rekenen.

Huitema kiest voor een combinatie van hoofdrekenen in het begin, eindigend met kolomsgewijs rekenen en pleit voor een vaste werkwijze voor de hele leerlijn met langdurige inoefening. Het rekenen op papier, ook bij toetsen, moet hierbij worden toegestaan. Het is van belang dat kinderen op het vmbo minder afhankelijk worden van de zakrekenmachine dan nu het geval is. Cijferend delen kost veel onderwijstijd. Huitema kiest er daarom voor in te steken op de zakrekenmachine met aandacht voor de interpretatie van gegevens. Huitema poneert de stelling: 'Cijferen is een basale vaardigheid. Het behoort daarom tot niveau 1 fundamentele kwaliteit'. 64,8 procent van de aanwezigen is het daarmee eens en 35,2 procent niet. De zaal is nagenoeg gelijk verdeeld over de waarde van het delen met de zakrekenmachine op fundamenteel niveau, de verhouding eens/oneens is hierbij 51 procent tegenover 49 procent.

W. Uittenbogaard gooit, als vierde inleider, de knuppel in het hoenderhok. Hij roept op tot het stoppen met het aanleren van algoritmen en krijgt hiervoor slechts 4 procent van de aanwezigen mee. Hij start vervolgens zijn betoog met de presentatie van een leerlijn 'vrienden'.

Een tiental aanwezigen wordt tijdens zijn presentatie in een *T*-shirt gehesen waarmee Uittenbogaard een goedlopende leerlijn onderbouwt, nadat hij eerst verklaart dat 'vermenigvuldigingen vijanden zijn'. Hij gaat met de zaal op zoek naar de 'vrienden'. Hij noemt de vrienden van tien: $10 \times$, $100 \times$, $1000 \times$, de bijna-vrienden van tien, halveren en verdubbelen en kwadra-

ten als vrienden. Verder wordt in Uittenbogaards visie de rekenmachine 'vriend'. Na zijn T-shirtparade vraagt hij de aanwezigen te reageren op de stelling: 'Standaardprocedures of kolomsgewijs rekenen zijn niet nodig.' Hiermee is 26,5 procent het eens en 73,5 procent het oneens.



Cijferalgoritmen voor het meercijferig vermenigvuldigen verdienen een plaats op niveau 1 fundamentele kwaliteit in het reken-wiskundeonderwijs:

- 1 Ja, het brengt een grote hoeveelheid rijke ervaringen met zich mee - 16,8 procent.
 - 2 Ja, het komt tegemoet aan de behoefte aan vaste oplossingsmanieren van minder goede rekenaars - 31,7 procent.
 - 3 Nee, we kunnen onze energie en tijd beter besteden - 51,6 procent.
- Kinderen op niveau 1 fundamentele kwaliteit moeten oefenen met verkorte standaardprocedures tot ze foutloos worden uitgevoerd.
- 1 Nee, oefenen van procedures zonder inzicht is zinloos - 76,8 procent.
 - 2 Ja, zwakke rekenaars zijn daar zeker mee geholpen - 19,3 procent.
 - 3 Ja, inzicht ontstaat dan gaandeweg vanzelf wel bij de sterkere rekenaar - 5 procent.

Tot slot komt het type 3×456 op niveau 1 fundamentele kwaliteit cijferend berekenen nog een keer in stemming. Nog maar 66,2 procent is het met de stelling eens dat deze opgave tot het 1F-niveau behoort; dit was aan het begin van de bijeenkomst nog 86,3 procent.

De vier gekozen invalshoeken dragen ieder op eigen wijze bij aan de ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs in Nederland.

Treffers wijst ons op het belang van het noteren van gegevens door kinderen. Volgens hem wordt dit rekenen op papier momenteel ten onrechte ontmoedigd. Buijs pleit voor een geleidelijke weg van hoofdrekenen naar cijferen en legt de nadruk op de ontwikkeling van het inzicht.

Huitema bekijkt de te stellen doelen vanuit het vmbo en beschrijft in zijn inleiding de situatie dat daar het cijferen veel tijd kost en kiest voor gebruik van de zakrekenmachine met aandacht voor interpretatie van gegevens. Hierbij toont de stemmingsronde aan dat er onder de aanwezigen nog een grote verdeeldheid is aangaande de betekenis die aan het cijferen moet worden toegekend. Tot slot weet Uittenbogaard de zaal op scherp te zetten door te beginnen met een pleidooi om het aanleren van algoritmen te schrappen. Hij heeft een zaal tegenover zich die dit nagenoeg geheel afwijst, maar weet via de presentatie van zijn leerlijn 'vrienden' de zaal zodanig te beïnvloeden dat 26 procent van de aanwezigen het met hem eens is dat standaardprocedures of kolomsgewijs rekenen niet nodig zijn. Het lijkt er op dat de discussie over het cijferen nog lang niet is afgerond.

nascholing in het s(b)o

Binnen het project 'Speciaal Rekenen' is de zogenoemde ijsbergmetafoor een belangrijk uitgangspunt. Deze komt ook naar voren tijdens de werkgroep die door I. Verbruggen, N. Figueiredo, G. Schoeman en B. Terlouw werd verzorgd. Deze werkgroep richt zich op het vermenigvuldigen in het speciaal basisonderwijs. Wanneer leraren niet voldoende inzien welke leermomenten cruciaal zijn om draagvermogen te creëren, zetten zij de stap naar het formele rekenen te snel, want als het vermenigvuldigen moeizaam verloopt, blijkt het vaak aan het drijfvermogen te liggen. Dit bewust te maken is dan ook veelal de insteek voor onderzoek van de klas en hulp aan de leraar.

In de werkgroep komt naar voren wat het drijfvermogen is en hoe je hier in de klas aan kunt werken. Als hulpmiddel om inzicht in het drijfvermogen te krijgen, ontwikkelde het project 'Speciaal Rekenen' een 'Peiling vermenigvuldigen'. Deze peiling heeft niet de pretentie een diagnostisch instrument te zijn en test de leerbaarheid van de leerlingen evenmin, maar biedt wel zicht op dat wat het kind kan.

De gekozen ingang voor de hulp die wordt geboden, is de vorming van begrip die kinderen nodig hebben. De werkgroepleiders tonen hoe zij hiermee zelf aan de slag zijn gegaan. Zij werkten een hele ochtend met een groep leerlingen. Eerst gingen ze naar de supermarkt om 'keer-sommen' te zoeken, met de bedoeling de vorming van meer begrip bij de leerlingen voor de bewerking vermenigvuldigen te bewerkstelligen. Daarna lieten de ontwikkelaars hun leerlingen op school met modellen voor vermenigvuldigen stoeien. Tot slot gingen de leerlingen met sommen aan de slag. In het ver-

lengde hiervan kwam in de conferentiewerkgroep naar voren dat voor kinderen naast de ontwikkeling van meer drijfvermogen, ook het vertrouwen krijgen in hun kennis en vaardigheden belangrijk is.

De in de werkgroep geschetste werkwijze past binnen de kaders van het realistisch rekenen-wiskundeonderwijs en de traditie van het speciaal (basis)onderwijs. De gepresenteerde peiling kan er echter ook toe leiden dat fragmentarisch op deelvoorwaarden geoefend gaat worden, wat allerminst de bedoeling van de ontwikkelaars is. Bij het ontwikkelde materiaal zijn daarom scholingsbijeenkomsten ontwikkeld. Ze zijn bedoeld om de handreikingen volgens de bedoelingen toe te kunnen passen.

rekenlogboek

Van een geheel andere orde is de werkgroep waarin het rekenlogboek centraal staat. Deze werkgroep richt zich op ontwikkeling van het opleidingsonderwijs. Bij binnenkomst wordt de deelnemers gevraagd te noteren wat ze met betrekking tot het rekenlogboek verwachten te leren. Er komen vragen naar voren als:

- Is het logboek bruikbaar voor het vak rekenen?
- Hoe krijg je zicht op met name wat studenten niet opschrijven?
- Hoe begeleid je studenten waarvan het werk niet goed is?
- Welke kwaliteiten worden dank zij het rekenlogboek zichtbaar?
- Hoe staat het met de combinatie met andere vakken?

De inleiders van de werkgroep, werkzaam bij pabo Leiden, hebben zelf ook hun verwachtingen. Daarbij is een centraal thema dat studenten de relatie en de samenhang kunnen aangeven tussen het rekenlogboek en hun beoogde ontwikkeling op het gebied van rekenen-wiskunde en didactiek. Vervolgens geven zij aan hoe ze zelf met de studenten hebben gewerkt. Hun tweedejaarsstudenten zijn gedurende twintig weken een dag met taal en rekenen bezig. Voor elk van deze vakken wordt een dagdeel gereserveerd. 's Ochtends taal en 's middags rekenen of andersom.

Men begint met een interactief college, waarna studenten aan de slag gaan met een verwerkingsopdracht. De studenten houden dan een logboek bij waarin ze ervaringen en bedenkingen noteren met betrekking tot hun ontwikkeling. Een en ander moet uiteindelijk uitmonden in het beeld van 'een competente rekenleerkracht'. Het werk wordt in zes fasen ingedeeld:

- Fase 1: Voorafgaande aan het college vindt een voorgesprek plaats met de captains (één vertegenwoordiger uit elke klas).
- Fase 2: Er wordt een college gegeven.
- Fase 3: Studenten stellen vast waar ze aan willen werken en hoe ze dat willen gaan doen.

- Fase 4: Er vindt een gezamenlijke terugkoppeling plaats, waarbij ook presentaties van studenten worden gehouden en nabesproken.
- Fase 5: Er worden assessmentgroepjes van studenten geformeerd.
- Fase 6: Ten slotte is er een logboekgesprek. Daarvoor leveren studenten hun logboek in, dat vervolgens door de docenten wordt beoordeeld.

In de werkgroep komt de vraag aan de orde wat criteria zijn voor de kwaliteit van een rekenlogboek. Ook vraagt men zich af hoe de koppeling van de theorie aan de praktijk in het rekenlogboek aandacht krijgt. Dit speelt temeer omdat veel reflecties van studenten mager blijken te zijn. Een belangrijk aspect in de beoordeling van de opleidingsdocent is of studenten goed naar kinderen hebben gekeken. De opleiding investeert ook in theoretische kennis van studenten, bijvoorbeeld door de student te bevragen op wat hij gelezen heeft, wat hij daarvan heeft geleerd en hoe dit in de praktijk naar voren komt. Het gaat hierbij telkens om vragen waar in het logboek aandacht aan kan worden geschonken.

opleiders bijeen

In de categoriale bijeenkomst voor opleiders werd opnieuw de beoordeling van de rekenvaardigheid van instromende studenten van de lerarenopleiding besproken. Centraal daarin waren de initiatieven die er recent in de opleidingen van Arnhem en Nijmegen waren genomen. Daar werd instromende studenten in 2007, voorafgaand aan het eerste studiejaar, voor het eerst een 'zomercursus' aangeboden, die door studenten zeer positief werd ervaren. Het effect van deze voorziening is echter niet gemeten. De opleidingen bieden in het eerste studiejaar speciale ondersteuningslessen aan voor studenten die de toets niet gehaald hebben. In deze lessen wordt niet ingegaan op de vraag van studenten naar trucjes en regeltjes, maar wordt aangestuurd op het bedenken en beredeneren van eigen oplossingen. Aan de orde komt hoe er in deze opleidingen wordt gereageerd op het veelal lage niveau van rekenvaardigheid van mbo-studenten. In Nijmegen is voor deze groep een speciaal (reparerend) programma gemaakt, met het doel om weggezakte kennis op te halen en de rekenvaardigheid op te bouwen. Dit lijkt een redelijk succesvolle aanpak te zijn.

onderzoekers bijeen

Tijdens de categoriale bijeenkomst voor onderzoekers stond de afgelopen jaren de presentatie van en de discussie rond één onderzoek centraal. Gezien het thema van deze conferentie, leek het gepast om de bijeenkomst dit jaar in het teken te stellen van het rapport 'Over de drempels met taal en rekenen' dat op de conferentie werd gepresenteerd. De uitkomsten van het

rapport hebben bij velen vragen opgeroepen die in een discussie tussen onderzoekers naar voren konden worden gebracht en eventueel tot onderzoeksvragen konden leiden. De deelnemers aan deze bijeenkomst werden aangespoord om de discussie niet alleen te baseren op brede en direct uit het rapport voortvloeiende onderzoekslijnen, maar ook op eerder bedachte plannen voor onderzoek waar nu meer prioriteit aan zou kunnen worden gegeven. Om deze onderzoeksmogelijkheden verder uit te werken, werd de discussie gericht op de verkenning van punten van zorg die speelden. Aangezien de discussie vanuit het perspectief van de onderzoekers werd gevoerd, moest uit de discussie duidelijk worden welke mogelijkheden deze punten van zorg bieden voor de onderzoeksagenda. De deelnemers aan de bijeenkomst hebben onderzoeksterreinen aangekaart die als volgt kunnen worden samengevat.

PPON

Er moet niet alleen naar de (tegenvallende) resultaten van de PPON 2004 worden gekeken, maar er moet ook praktijkonderzoek worden gedaan, om na te gaan hoe tegenvallende resultaten in de praktijk naar voren komen. De kerngedachte hierachter is dat reken-wiskundige kennis gedurende het hele leertraject geconsolideerd en onderhouden zal moeten worden.

doorlopende leerlijnen

Over en weer moet er meer bekend worden over wat er in het primair en voortgezet onderwijs aan strategieën en aan inhoud wordt onderwezen, met het oog op een beter op elkaar aansluiten van deze schooltypen. Dit is belangrijk om succesvolle interventies te ontwikkelen die meer kinderen tot een hoger eindniveau kunnen brengen. Betere uitwisseling en samenwerking kan leiden tot een vroegtijdige signalering van problemen en tot vermindering van de schooluitval.

zorgleerlingen

De aandacht voor zorgleerlingen sluit aan op het vorige punt, maar zorgde op de conferentie voor enige verdeeldheid bij deelnemers die enerzijds de opvatting huldigden dat de grootste winst te behalen valt bij onderzoek dat specifiek gericht is op de ondersteuning van zorgleerlingen, en anderzijds meer zagen in het belang van de ondersteuning van alle leerlingen, omdat ook havo/vwo-leerlingen tegen rekenproblemen aanlopen als ze bijvoorbeeld doorstromen naar de pabo. Men was het er over eens dat de preventie van problemen meer aandacht moet krijgen.

analyse methodegebruik

Het idee werd geopperd om een methodeanalyse op te zetten, om zo meer

leraren te bereiken dan gebeurt in een relatief kleinschalige pilotstudie over de effectiviteit van het onderwijs en de aansluiting van po en vo. Uit de discussie werd duidelijk dat een methodeanalyse toch te beperkt zou zijn, omdat ideeën in de boeken vaak niet aansluiten op wat er in de praktijk plaats vindt. Vandaar dat een dergelijke analyse zou moeten worden verbreed naar een zogenaamde *opportunity to learn*, waarbij ook naar het leren van de kinderen, naar het gedrag van leraren, van opleiders en naar de praktijk moet worden gekeken.

professionalisering en 'leerkracht!'

Om de overgang van primair naar voortgezet onderwijs beter te laten verlopen, zouden leraren zelf ook meer zicht moeten krijgen op doorlopende leerlijnen. Dit inzicht zouden ze vervolgens moeten richten op de feitelijke praktijk om daar hun eigen vaardigheden op aan te passen. Naast methodegebruik zou de problematiek van de doorlopende leerlijnen ook op de pabo moeten worden gesteld, zodat de leerlijnen al in de opleiding voldoende aandacht krijgen.

sterke rekenaars

Er werd met zorg gesproken over te sterk gedifferentieerd onderwijs, dat ertoe bijdraagt dat er een kloof tussen primair en voortgezet onderwijs ontstaat. Dit leidt tot het behandelen van onderwerpen uit het voortgezet onderwijs in het primair onderwijs, op een manier die vaak anders is dan in het voortgezet onderwijs zelf. In het basisonderwijs zou meer de diepte in moeten worden gegaan, zodat leerlingen niet met leerstof van het voortgezet onderwijs hoeven te worden geconfronteerd. Ontwikkelingsonderzoek zou aan de gewenste diepgang een bijdrage kunnen leveren.

interventies in het primair onderwijs

Welke interventies zijn succesvol om een grotere groep kinderen naar een hoger eindniveau te brengen, zoals de commissie Meijerink wenst? Hoe kunnen leraren meer overzicht krijgen over leerlijnen, zodat ze de lesstof en manier van aanbieden beter door kunnen laten lopen en leerlingen beter kunnen begeleiden in de overgang van primair naar voortgezet onderwijs?

Ter afsluiting werd een aantal elementen samengevat, passend in een overkoepelend onderzoeksvoorstel. Hierbij gaat het om methodeanalyse, om zorgleerlingen die ook profijt moeten hebben van onderwijs dat volledig rekening houdt met doorlopende leerlijnen, om de affectieve kant van het onderwijs, om het specificeren van onderwijs, niet alleen voor twaalfjarigen, maar ook voor oudere en jongere leerlingen, en om een meer zinvolle interpretatie van de PPON-resultaten.

adviseurs van het onderwijs bijeen

In de bijeenkomst van onderwijsadviseurs worden vier thema's besproken: zorgleerlingen bij rekenen en aangepaste leerlijnen, passend onderwijs, de plusklas en de overgang van primair naar voortgezet onderwijs. Veel leerlingen komen in het primaire onderwijs niet veel verder dan het niveau van groep 5 en 6. Maar in het vervolgonderwijs wordt niettemin aangenomen dat zij de leerstof van de groepen 7 en 8 hebben gehad en begrepen. Zo is in het vmbo vooral het meten van belang, maar die leerstof vinden we vooral in het onderwijs aan de groepen 7 en 8 terug. Wat kunnen we aan dit probleem doen? Er wordt voorgesteld een conferentie te organiseren, waarin leraren uit het primair en voortgezet onderwijs deze problematiek kunnen bespreken. Deze uitwisseling is wellicht slechts een eerste stap. Misschien moet worden gedacht aan een doorlopende methode voor het basisonderwijs en het vmbo.

reflectie (2)

Vragen kun je je over het algemeen het beste stellen als je ergens veel kennis van hebt. Dit geldt ook als het gaat om de relaties tussen de vormgeving van het reken-wiskundeonderwijs, de mogelijkheden voor leraren om met de gekozen vormgeving aan de slag te gaan en de onderwijsopbrengst. De conferentie riep verschillende nieuwe of aangescherpte vragen op.

In de eerste plaats gaf de actuele situatie aanleiding tot verschillende vragen. Maatschappelijke onrust leidde in 2007 immers tot het instellen van de commissie Meijerink. Levert ons huidige onderwijs voldoende op? Een vraag die wordt toegespitst op de twee kernvakken in het curriculum: rekenen-wiskunde en taal. Uiteraard verdwijnt deze onrust niet plots bij het presenteren van het rapport van de commissie, zeker niet omdat in het werk van de commissie elementen van die maatschappelijke onrust doorklinken. Veel berichten in de media versmallen rekenen-wiskunde tot het cijferen. De vraag om niveauverhoging die ook doorklinkt, is feitelijk een vraag om meer aandacht te geven aan het cijferen. Die staat op gespannen voet met de ontwikkeling binnen het reken-wiskundeonderwijs, waarin decennia lang een accentverschuiving heeft plaatsgevonden; nu maakt het hoofdrekenen en het ontwikkelen van eigen strategieën de kern van het curriculum uit en vormt het cijferen slechts een sluitstuk. Die accentverschuiving ondervindt echter kritiek.

De keuze voor het verleggen van het accent in het reken-wiskundeonderwijs komt onder meer voort uit het theoretisch fundament van de reconstructiedidactiek dat vanaf de jaren zeventig van de vorige eeuw ontwikkeld is. In deze theorie wordt het leren van wiskunde gezien als kennisconstructie, die voortkomt uit het mathematiseren van de wereld. Dan ligt het voor de hand om goed gekozen contexten en informele aanpakken een pro-

minente plek te geven in het onderwijs; als aangrijpingspunten voor het verder mathematiseren van de wereld. Dat blijkt echter minder makkelijk dan gezegd, ook al is dit principe op een of andere manier geconcretiseerd in reken-wiskundemethoden die op de markt zijn. Leerkrachten worstelen niet zelden met het uitdagen van kinderen tot werkelijke wiskundige activiteit en de buitenwacht, zo toonde Hoogland in de NVORWO-lezing aan, ziet van de oorspronkelijke ideeën achter de beoogde onderwijstheorie niet meer dan de schil, een 'vervorming' van de werkelijkheid: 'ze' willen het onderwijs leuk maken met leuke voorbeelden en maken de kinderen vervolgens gek met allerlei trucjes om sommen uit te rekenen.

De vraag die de maatschappij aan het realistisch reken-wiskundeonderwijs stelt, stond aan de wieg van de vraag - die spontaan naar voren kwam in een van de ronde tafelgesprekken - of de tijd is aangebroken om het realistisch reken-wiskundeonderwijs te vervangen door een ander paradigma. Anders gezegd: gaat het hier om het verfijnen en verbeteren van de didactiek of staan we voor een ingrijpende ommezwaai in de didactiek van het reken-wiskundeonderwijs?

Natuurlijk is het zinvol om bij het zoeken naar antwoorden op impulsen uit de maatschappelijke werkelijkheid te proberen over de eigen horizon te kijken, maar de vraag is of het dan ook zinnig is te discussiëren over de keuze voor of tegen realistisch reken-wiskundeonderwijs. Het lijkt veel zinniger om na te gaan welke kennis en vaardigheden we van kinderen moeten en kunnen vragen. Daarom is het goed dat tijdens deze conferentie vragen zijn opgeroepen over de rol die het cijferen in het reken-wiskundeonderwijs heeft.

Door verschillende inleiders werd deze problematiek naar voren gebracht, waarbij men de deelnemers van de conferentie bij een mogelijke standpuntbepaling betrok. Zo zette men de discussie op scherp, een discussie die overigens in verschillende andere bijeenkomsten, zoals die van de onderzoekers en van de onderwijsadviseurs werd voortgezet.

Vragen naar de waarde van het realistisch reken-wiskundeonderwijs in het huidige tijdsgewricht houdt tevens een vraag naar keuzen van onderwijsinhouden in. En juist die problematiek, naar wat de inhoud van het reken-wiskundeonderwijs, stond feitelijk centraal tijdens vele bijeenkomsten, lezingen en werkgroepen; bijvoorbeeld over een groter accent op het leren op het leren probleemoplossen en meer aandacht voor het meetonderwijs.

4 inspirerende initiatieven

Tijdens de conferentie werden niet louter vragen opgeroepen in verband met de actuele stand van zaken. Er werden ook antwoorden gegeven, met name tijdens werkgroepen. Er kon kennis worden gemaakt met inspirerende voorbeelden, die bijdragen aan de vernieuwing en verbetering van het reken-wiskundeonderwijs. Zo vroeg G. van Dijk in haar bijdrage aandacht voor het leren van kleuters met een ontwikkelingsvoorsprong. Zij ontwikkelde voor hen het pakketje 'Cijferrijk' (onderdeel van 'Klein maar fijn'), met thematisch geordende reken-wiskundige activiteiten. In haar werkgroep konden de deelnemers met activiteiten uit dit pakketje aan de slag gaan. H. Logtenberg gaat in op de betekenis van interviews met kinderen in de remediërende sfeer. Wie kinderen interviewt, zou meer aandacht moeten besteden aan de specifieke interesses van het kind. Dan blijkt bijvoorbeeld dat problemen die kinderen met reken-wiskundeonderwijs hebben niet alleen verstandelijk, maar ook gevoelsmatig zijn, zo beoogt hij. W. Koersen zocht mogelijkheden om kinderen en leraren te activeren met rijke problemen binnen een stimulerende leeromgeving. 'Hoe gaan kinderen en volwassenen om met de kwantitatieve aspecten van de wereld om ons heen?', is de vraag die in een parallellezing van Moerlands en Hoogland aan de orde was. Deze inleiders leggen uit dat gecijferdheid veelal neerkomt op 'betekenis geven', 'structureren' en 'interpreteren'. Sikkes en Van der Leeuw leggen aan de deelnemers van hun werkgroep uit hoe zij kinderen uit het sbo de gelegenheid bieden om achterstanden in basisvaardigheden in te lopen en de werkgroep van het HAVER-project, van M. Dolk, N. Figueiredo, F. Garssen, I. Meijers en A. te Selle, toont het werken met pabo-studenten en basisscholen aan de verbetering van het handig rekenen, het oplossen van problemen en het gebruik van de zakrekenmachine. Moerlands en De Wert participeren in het PARWO-project en doen tijdens de conferentie verslag van hun ervaringen. PARWO staat voor passend reken-wiskundeonderwijs. Binnen het project wil men een didactiek ontwikkelen om leerkrachten te enthousiasmeren voor een ontwikkelingsgerichte aanpak. Op dergelijke momenten staat de ontwikkeling van leerlingen centraal en niet de methode of het vakgebied. Moerlands en De Wert verwachten dat leraren door de activiteiten van het PARWO-project anders tegen reken-wiskundeonderwijs aan gaan kijken. Een voorbeeld van andere orde komt van B. Joosten en A. Oving. Zij gaan aan de slag met de meetkunde van vlakvullingen, om met de deelnemers uiteindelijk een eigen 'Escher' te maken. Zij presenteren een aantal lessen over vlakvullingen, waarbij symmetrie, verschuivingen, spiegelingen en rotaties (draaiingen) een rol spelen, om leerlingen te stimuleren tot een onderzoekende houding. Ze laten zien dat kinderen hebben nagedacht en geredeneerd rond symmetrie en creatief bezig zijn geweest met meetkundige problemen. Overigens roept dit de vraag op naar een doorlopende leerlijn waarin der-

gelijke activiteiten passen, maar deze vraag wordt in de werkgroep van Joosten en Oving niet beantwoord.

Verhoudingen komen, veelal in relatie met breuken en procenten, in de sfeer van toepassingen voor, zowel in het alledaagse leven als in het beroepsgerichte functioneren van volwassenen. In de werkgroep van M. Wijers wordt nagegaan welke problemen er zijn in een longitudinale leerlijn 'verhoudingen'. In Drenthe zijn zogenoemde rekenclubs opgericht, waarin studenten van de opleiding, leraren van de basisschool en uit het voortgezet onderwijs, en een opleidingsdocent participeren. In een werkgroep, onder leiding van J. Nicolai, worden mogelijkheden van deze rekenclubs in relatie tot het opleidingscurriculum besproken. Gemotiveerde leerlingen uit de groepen 6, 7 en 8 krijgen ondersteuning van een leraar uit het basisonderwijs, een docent uit het voortgezet onderwijs en een pabo-docent met enkele studenten. Twee maal per maand wordt buiten schooltijd aan een project van de rekenclub gewerkt. Samen wordt een onderwerp gekozen dat naast rekenwerk ook enige handenarbeid vraagt. De gekozen werkwijze leidt tot vergroting van de rekenvaardigheid van leerlingen en pabo-studenten.

Evenzo toont de werkgroep rond de 'Grote Rekendag', van L. Prinsen en V. Jonker, aan hoe deze dag tot nieuwe uitdagingen voor opleidingsonderwijs kan leiden. Lerarenopleidingen blijken op verschillende manieren aandacht aan de 'Grote Rekendag' te besteden. Voorbeelden hiervan zijn:

- studenten promoten de 'Grote Rekendag' in een teamvergadering op hun stageschool en schrijven een stukje in de nieuwsbrief van de school voor ouders;
- studenten onderzoeken tijdens werkcolleges activiteiten die in het aanbod van de 'Grote Rekendag' beschreven staan, zodat ze goed voorbereid met kinderen aan de slag kunnen gaan;
- studenten krijgen de opdracht om in hun stageklas met het materiaal van de 'Grote Rekendag'-activiteiten uit te voeren. Ze schrijven hier een verslag over, dat geraadpleegd kan worden tijdens de periodetoets;
- een van de docenten van een opleiding heeft ruimte gekregen om de 'Grote Rekendag' binnen de opleiding te coördineren en deze dag onder de aandacht van scholen onder te brengen.

voorbeelden van inspirerend reken-wiskundeonderwijs

In zijn werkgroep daagt W. Koersen deelnemers uit om met een houten blok en een aantal spijkers een drietal opdrachten uit te voeren. De deelnemers hanteren daarbij verschillende aanpakken. Terwijl de ene groep meteen begint te experimenteren, wordt er in een andere groep nog volop gediscussieerd en waagt men zich aan voorspellingen. Het materiaal blijft daar in eerste instantie liggen. In de nabespreking wordt op de verschillen

in aanpak ingegaan. Er zijn verschillende onderzoekshoudingen te onderscheiden die zich ook in een groep kinderen of studenten zullen voordoen. De een wil zelf ontdekken en niet voorgezegd worden, de ander wil de oplossing weten als het niet lukt om het zelf op te lossen. Een derde haakt af, omdat men het niet meer interessant vindt. Sommige docenten en leraren trappen in de valkuil om in de les de oplossing te willen geven. In de werkgroep komt de vraag naar voren welke factoren het onderwijs zo inspirerend maken. Dat blijken er verschillende te zijn. De deelnemers brengen factoren als plezier, creativiteit, veiligheid, structuur ervaren, voorspellen en samenwerken naar voren. Zowel het gevoel competent te zijn, als het ontplooiën van wiskundige activiteiten in samenwerking met anderen, maken blijkbaar deel uit van een inspirerende reken-wiskundige activiteit.

gecijferdheid voor alle leeftijden

Moerlands en Hoogland tonen in hun parallellezing hun gedeelde passie: hoe het denken in gecijferdheid kan bijdragen tot het verrijken van de realistische reken-wiskundededidactiek. 'Gecijferdheid' wordt daarbij opgevat als de combinatie van kennis, vaardigheden en persoonlijke kwaliteiten die kinderen en volwassenen nodig hebben om adequaat en autonoom om te gaan met de kwantitatieve kanten van de wereld om ons heen. Moerlands en Hoogland tonen hier voorbeelden van, zowel uit het primair als het voortgezet onderwijs, maar ook uit het middelbaar beroepsonderwijs. Kinderen leren buiten school immers rekenen door op onderzoek uit te gaan en antwoorden te vinden op vragen die zij zich stellen, is de opvatting van de twee inleiders. Moerlands en Hoogland laten bijvoorbeeld zien hoe kinderen in Indonesië echte, voorstelbare vragen stelden bij het rekendomein vermenigvuldigen. Gedurende dat proces wordt de werkelijkheid tegen een wiskundig licht bezien en krijgen de kinderen meer greep op de getalsmatige kant van de wereld om hen heen. Het gaat dan niet alleen om kennis en vaardigheden, maar ook om persoonlijke kwaliteiten als motivatie en instelling, zo benadrukten de inleiders.

De kwestie van 'gecijferdheid' staat, na het rapport van de commissie Meijerink, volop in de belangstelling. In de jaren vijftig was er sprake van een smalle benadering van het begrip: door de basisbewerkingen in het rekenen te leren, werd verondersteld dat men voldoende greep kreeg op de ons omringende wereld. Later, in de jaren zestig en zeventig, werd het begrip meer wiskundig benaderd. Het ging dan om de wiskunde in contexten uit het dagelijkse leven. Moerlands en Hoogland pleiten voor een brede benadering van 'gecijferdheid'. De wereld om ons heen is immers in al zijn facetten doordrenkt van getallen en contexten spelen bij het leren van rekenen-wiskunde een essentiële rol.

met kleine stappen sprongen vooruit

Sikkens en Van der Leeuw tonen in hun werkgroep hoe zij iedere rekenles (in het sbo) beginnen met een korte training. Door deze aanpak, zo wordt duidelijk, groeit het zelfvertrouwen bij de kinderen en daardoor hun vaardigheid. De inleiders stellen dat er voor sbo-kinderen in het reguliere onderwijs te weinig aandacht aan het inoefenen wordt besteed. Zij pleiten voor reken-wiskundeonderwijs waarin de nadruk meer op het oefenen ligt. Zij vinden het bovendien gewenst kinderen niet meer dan één strategie voor het oplossen van rekenopgaven aan te leren. Zo wordt ingezet op het vergroten van het zelfvertrouwen van de kinderen, omdat zij op die wijze vaak succes ervaren. De inleiders zijn van mening dat aandacht in het onderwijs voor meer strategieën kinderen veelal in verwarring brengt.

handig, verstandig en effectief rekenen

Het hoofddoel van het Haver-project is leraren handreikingen te geven om hun lessen te variëren. Dit gebeurt door vervangend en aanvullend materiaal bij realistische reken-wiskundemethoden te ontwikkelen. Vooral de betere leerlingen zijn dan in beeld. Het aanpassen van de eigen methode is voor leraren echter niet eenvoudig. Het vereist inzicht, overzicht en creativiteit en hulp van buitenaf is veelal onontbeerlijk.

Een voorbeeld zien de deelnemers als ze procentensommen in volgorde van moeilijkheidsgraad moeten plaatsen. 'Zet de leerling aan 't denken en het uitbouwen van z'n rekennetwerk', vormt hier de ondertoon. Voor de leerkracht betekent dit dat zij op ideeën worden gebracht hoe kinderen aan het denken kunnen worden gezet, waarbij het procedureel rekenen op het tweede plan komt.

verhoudingen

Het onderwerp 'verhoudingen' komt in het reken-wiskundeonderwijs in alle groepen van het basisonderwijs voor, bijna altijd in toepassingssituaties. Van een leerlijn 'verhoudingen' lijkt echter (nog) geen sprake te zijn. We zouden kunnen zeggen dat er in verhoudingsopgaven altijd twee componenten zijn die de moeilijkheidsgraad van een opgave bepalen: enerzijds de taal- en anderzijds de rekenvaardigheden. Wijers presenteert in de werkgroep de volgende opgave, bestemd voor verpleegkundigen in opleiding:

Een kind van 30 kg met een hartinsufficiëntie krijgt 50 mcg Acetyldigitoxine per kg lichaamsgewicht, verdeeld over 6 doses per 24 uur.

In voorraad zijn deelbare tabletten van 0,2 mg Acetyldigitoxine. Hoeveel tabletten krijgt het kind per keer?

De oplossing zou, wat betreft het rekengedeelte, er als volgt uit kunnen zien (fig.3).

1 kg	30
50 mcg	1500 mcg = 1,5 mg

figuur 3

$1,5 \text{ mg} : 6 = 0,25 \text{ mg}$ per dosis.

Er zijn tabletten van 0,2 mg, dus $1\frac{1}{4}$ tablet per dosis.

Qua rekenen zijn er niet echt moeilijke bewerkingen te ontdekken:

- $30 \times 50 = 1500$;
- omzetten: van 1 miljoenste naar 1 duizendste gram;
- dus 1500 gedeeld door 1000: 1,5 mg;
- $1,5 : 6 = 0,25$;
- $0,25 : 0,2 = 1,25 (1\frac{1}{4})$.

Het taalgebruik en de gehanteerde maten vergroten de moeilijkheidsgraad van de opgave aanmerkelijk. Pas na enige discussie werd vastgesteld dat 1 mcg een miljoenste gram is. Vooral de woordenschat van de leerling bepaalt, met andere woorden, of de opgave voor de leerling (te) moeilijk is.

Er is geen leerlijn verhoudingen. Wanneer je zou willen spreken van een leerlijn, zou je er de volgende onderdelen in kunnen herkennen:

- Getalrelaties: verhoudingsopgaven oplossen zonder kennis van de elementaire vermenigvuldigingen is een moeizaam proces. Leerlingen die flexibel kunnen omgaan met getallen en bewerkingen, zijn eerder in staat verhoudingsvraagstukken adequaat op te lossen.
- Maatkennis speelt een belangrijke rol bij verhoudingsproblemen. Zonder kennis van het metrieke stelsel kunnen veel verhoudingsopgaven niet worden opgelost.
- Opereren met streken en de (dubbele) getallenlijn als voorbereiding op een adequaat gebruik van de verhoudingstabel.

reflectie (3)

‘Wat maakt deze initiatieven inspirerend?’, zo kan men zich afvragen na de voorgaande opsomming van conferentiebijdragen. Dit is een terechte vraag, want zo introduceerden we de verschillende bijdragen immers. Maar deze vraag is moeilijk te beantwoorden. Waardoor iemand zich laat

inspireren, is veelal een kwestie van persoonlijke smaak en daarom hoeft wat voor de een inspirerend is, voor een ander niet zo te zijn. Dat neemt niet weg dat we de beschreven voorbeelden toch graag aanduiden als inspirerend.

Een argument om een activiteit als inspirerend aan te duiden is bijvoorbeeld dat ze precies biedt wat kinderen nodig hebben; met name kinderen die zwak zijn in het rekenen. We laten ons evenwel ook prikkelen door bijdragen die ons aan het denken zetten over het theoretisch fundament achter het realistisch reken-wiskundeonderwijs. Daarnaast worden wij geïnspireerd door ideeën waarvan we inschatten dat die ook de leraar aanspreken. Die moet gestimuleerd worden zijn vaardigheden te vergroten; of het nu gaat om een leraar in de initiële opleiding of om leraren met vele jaren ervaring.

Het vergroten van de professionaliteit is een van de vragen die het rapport Meijerink oproept. Veel van de aangehaalde activiteiten bieden daarvoor mogelijkheden, zoals:

- ideeën om het vak rekenen-wiskunde op een specifieke manier te overdenken;
- ideeën om met leraren aan de slag te gaan;
- concrete ideeën om in de eigen klas aan de slag te gaan.

De opdracht die de conferentie aan de deelnemer laat, is hierin een eigen weg te vinden. Dat geldt overigens ook voor het verder doordenken van de theorie van het realistisch reken-wiskundeonderwijs. Met de breedte in het aanbod moet dat evenwel geen probleem vormen.

5 schrappen voor zwakke rekenaars

In haar werkgroep, met de titel 'Minder maar beter', wil A. Noteboom samen met de deelnemers een brug slaan tussen de door de commissie Meijerink gedefinieerde referentieniveaus en de praktijk van het onderwijs. Ze wil dit tot stand brengen door het reken-wiskundeprogramma voor zwakke rekenaars te beperken. Zo wil ze bereiken dat hetgeen in het onderwijs aangeboden wordt, door deze leerlingen ook beheerst wordt. Het betreft een groep leerlingen die een te grote achterstand ten opzichte van de klas heeft om het reguliere onderwijs effectief te kunnen volgen. Het zijn veelal leerlingen met een beperkt zelfvertrouwen en mede daarom weinig motivatie voor het vak rekenen-wiskunde. Ze hebben een *E*- of lage *D*-score op de toetsen rekenen-wiskunde van het leerlingvolgsysteem en zullen na de basisschool gewoonlijk doorstromen naar het praktijkonderwijs of de basis-

beroeps- of kadergerichte leerweg van het vmbo. Op basis van analyse van de resultaten op PPON-toetsen (medio groep 7) blijkt dat leerlingen met een p25-score opgaven uit de reken-wiskundemethode niet kunnen maken, maar dit eigenlijk wel zouden moeten kunnen. Noteboom adviseert voor deze groep leerlingen minimumdoelen te formuleren, waaruit zou kunnen worden afgeleid wat leerlingen niet hoeven te kunnen. Juist door opgaven waarvan je mag aannemen dat die leerlingen ze niet kunnen maken, te schrappen, houd je tijd over om aandacht te besteden aan wat nu vastgelegd is in het fundamentele niveau. Ze stelt voor het rekenaanbod tot en met groep 5 te laten zoals het nu is, maar vanaf groep 5 per leerjaar onderwerpen te schrappen, die voor de betreffende leerling niet haalbaar zijn. Het gaat dan om het volgende:

Groep 6

- (cijferend) rekenen met grote en moeilijke getallen
- vergaand gedetailleerd handig en schattend rekenen

Groep 7 bijna alles schrappen, behalve:

- elementaire activiteiten rond procenten
- elementaire activiteiten rond relatie tussen basisbreuken, verhoudingen en procenten
- activiteiten rond elementair kommagetalbegrip
- meten: eenvoudige toepassingen en basismaten

De deelnemers aan de werkgroep vinden dit ver gaan. Vragen als ‘er zijn na groep 5 nog drie leerjaren te gaan, hoe vullen we dat op?’, ‘Veel scholen willen de methode niet loslaten. Hoe pakken we dat aan?’, ‘Moeten we nu routeboekjes maken, zoals bij *compacting*?’, zijn hiervan het bewijs. Er is, menen sommigen, al heel wat op de markt waar leraren gebruik van kunnen maken om de zwakkere rekenaar tot en met groep 8 te begeleiden, zoals Maatwerk, het aangepast leertraject van het SLO en de producten van het project ‘Speciaal Rekenen’ van het FIsme. Noteboom ziet als voordeel dat leraren meer in leerlijnen gaan denken. Het nadeel is echter dat leerlingen achterblijven bij de groep, wat veel van hen als onprettig ervaren. Ze is geen voorstander van een routeboekje zoals bij *compacting* is verschenen, maar zou wel handreikingen op basis van leerlijnen willen geven. De discussie eindigt met de stelling dat de tijd rijp lijkt voor een speciale methode voor deze leerlingen. Of deze er ooit zal komen, zullen we moeten afwachten.

6 tussenstand

De Panama-conferentie 2008 ging over doorlopende ontwikkelingen. Daar-

bij was er onder meer aandacht voor het rapport 'Over de drempels met taal en rekenen'. Wat, zo bleek een kernvraag te zijn, heeft dit rapport in petto voor onderzoekers, ontwikkelaars, schoolbegeleiders en lerarenopleiders voor het vak rekenen-wiskunde? In de loop van de conferentie werd deze vraag gedeeltelijk beantwoord, of beter, ze werd geherformuleerd. Hiervan afgeleide vragen kwamen naar voren met betrekking tot de professionalisering van leraren (in de initiële opleiding en van zittende leraren), de rol van methoden en van toetsen en hoe adequaat tegemoet kan worden gekomen aan de problemen van zwakke rekenaars.

Bij de start van de conferentie gaf Van den Heuvel-Panhuizen een richting aan die daarna in andere bijdragen doorklonk. Het is van belang in te zetten op het probleemoplossen en redeneren van kinderen. Daarin loopt Nederland uit de pas met andere landen, waar deze wiskundige activiteit een meer prominente plaats in het curriculum voor de basisschool heeft gekregen. Door het probleem-oplossen en redeneren een van de kernaspecten van het hedendaagse reken-wiskundeonderwijs te maken, is het mogelijk het onderwijs nog nadrukkelijker te laten aansluiten aan de eisen die de moderne tijd aan onze kinderen stelt.

Een rondgang langs verschillende werkgroepen leerde dat deze mededeling inmiddels door verschillende ontwikkelaars is opgepakt. We zagen ook aanzetten van hoe leraren kunnen worden uitgedaagd om het probleem oplossen en redeneren in hun klas handen en voeten te geven. We ervoeren daarnaast dat het leren redeneren, dat zo voor de hand lijkt te liggen in het realistische reken-wiskundeonderwijs, nog onvoldoende verankerd is in de onderliggende theorie om voor methodeschrijvers en - in hun kielzog - leraren vanzelfsprekend te zijn. Overigens krijgt het redeneren in 'Over de drempels' niet de aandacht die het verdient. Dat heeft te maken met de opdracht die de commissie kreeg en haar uitwerking daarvan in referentieniveaus. Deze referentieniveaus zijn weer gekoppeld aan schoolse opgaven, waarvan Van den Heuvel-Panhuizen toonde dat ze weinig met probleemoplossen en redeneren te maken hebben.

In 'Over de drempels met taal en rekenen' is aangegeven dat kinderen op het fundamentele niveau enkele standaardprocedures beschikbaar moeten hebben. In een forumdiscussie en een aanpalende stemming onder de aanwezigen, peilde de conferentieorganisatie of men de standaardprocedures in enige vorm in ere wil houden. Dat bleek het geval te zijn. Uittenbogaard heeft wellicht gelijk als hij zegt dat standaardprocedures niet erg zinvol meer zijn, maar hij kreeg daarvoor geen onvoorwaardelijke steun van de conferentiedeelnemers.

De vorige, 25^{ste} Panama-conferentie liet de nasmaak na dat het realistisch reken-wiskundeonderwijs misschien zijn beste tijd wel had gehad (Keijzer,

2007). De 26^{ste} conferentie toont echter aan dat de onderwijstheorie die de afgelopen dertig jaar is ontwikkeld, krachtig en vitaal genoeg is om ruimte te laten aan kritische noten die vooral voortkomen uit maatschappelijke vragen rond het onderwijsniveau.

We gaan op naar de 27^{ste} Panama-conferentie. De ontwikkelingen gaan voort - zoals ook de titel van de 26^{ste} conferentie ons leert. Die voortgang in de ontwikkeling van het vak zou goed tot haar recht komen als op de komende Panama-conferentie antwoorden geformuleerd worden op vragen die afgelopen januari naar voren kwamen en tonen hoe deze antwoorden de realistische onderwijstheorie verder versterken.

literatuur

- Heege, J. ter (2008). Over de drempels met rekenen; aanbevelingen van de Expertgroep doorlopende leerlijnen. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 27(1), 10-13.
- Keijzer, R. (2007). De toekomst van het reken-wiskundeonderwijs - verslag van de 25^e Panama-conferentie. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 26(2), 3-12.
- Keijzer, R. & J. ter Heege (2008). Doorlopende leerlijnen en verwante kwesties; een interview met H. Meijerink. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 27(1), 14-18.
- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008). *Over de drempels met taal en rekenen* (drie rapporten). Enschede: Expertgroep Doorlopende leerlijnen taal en rekenen.
- Treffers, A. (2007). De kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs; een virtueel vraaggesprek. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 26(4), 11-16.