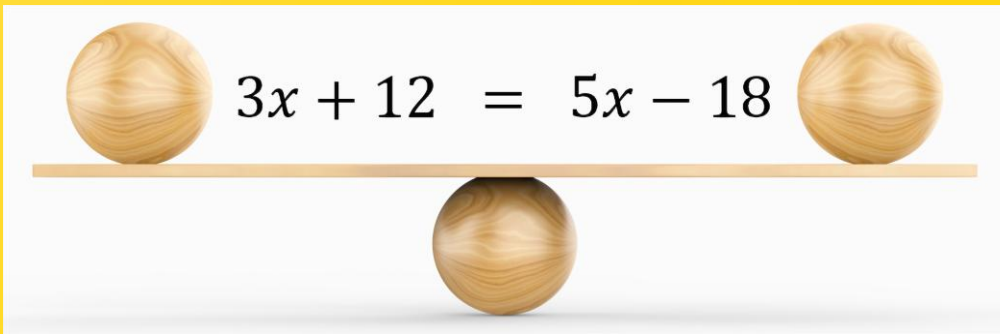




Utrecht University



Freudenthal Institute



Tien handvatten voor evenwichtig wiskundeonderwijs

Afscheidscollege Paul Drijvers

Utrecht, 23 juni 2025



Utrecht University



Freudenthal Institute

- **Opening door Bert Klein-Gebbink,
vice-decaan Faculteit Bètawetenschappen**
- **Woordje door Ralph Meulenbroeks,
hoofd Freudenthal Instituut**
- **Afscheidscollege van Paul Drijvers**
- **Aanbieding boek door Wim Caspers
namens Epsilon Uitgevers**
- **Afsluiting door Paul Drijvers**
- **Receptie**



Utrecht University



Freudenthal Institute

- **Opening door Bert Klein-Gebbink,
vice-decaan Faculteit Bètawetenschappen**

- **Woordje door Ralph Meulenbroeks,
hoofd Freudenthal Instituut**

- **Afscheidscollege van Paul Drijvers**

- **Aanbieding boek door Wim Caspers
namens Epsilon Uitgevers**

- **Afsluiting door Paul Drijvers**

- **Receptie**



Utrecht University



Freudenthal Institute

- **Opening door Bert Klein-Gebbink,
vice-decaan Faculteit Bètawetenschappen**

- **Woordje door Ralph Meulenbroeks,
hoofd Freudenthal Instituut**

- **Afscheidscollege van Paul Drijvers**

- **Aanbieding boek door Wim Caspers
namens Epsilon Uitgevers**

- **Afsluiting door Paul Drijvers**

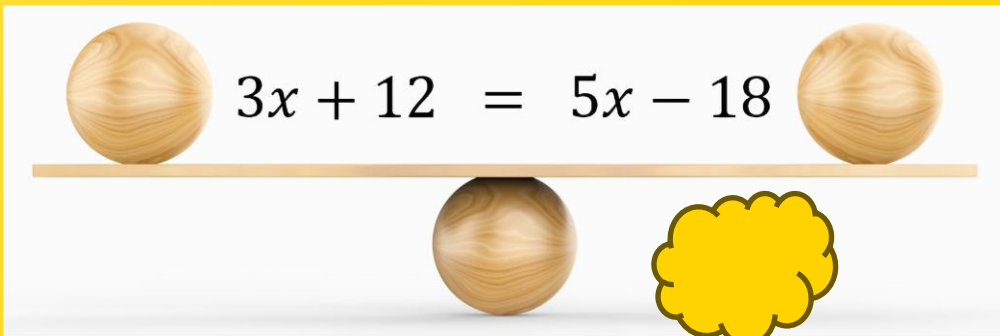
- **Receptie**



Utrecht University



Freudenthal Institute



Tien handvatten voor evenwichtig wiskundeonderwijs

Afscheidscollege Paul Drijvers

Utrecht, 23 juni 2025

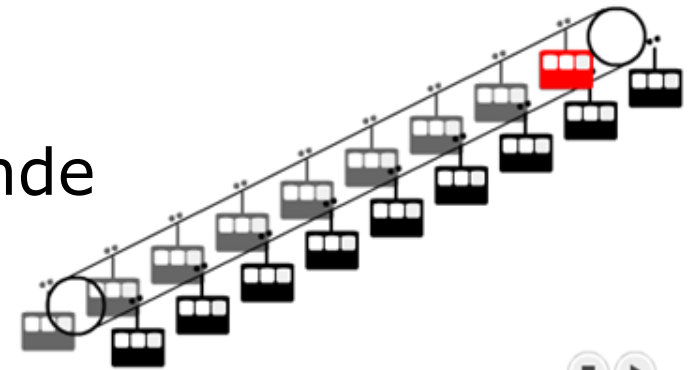
Deel 1: Fundamenten van wiskundendidactiek7		Fundamenten
1	Wiskunde: Wat en waarom?9	
2	Een theoretische basis van wiskundendidactiek..... 27	
Deel 2: Thema's in wiskundendidactiek 53		Thema's
3	Realistisch wiskundeonderwijs 55	
4	Basisvaardighe Deel 3: Domeinspecifieke didactieken 191	
5	Wiskundige dei 9 Variabelen 193	
6	Modelleren en 10 Vergelijkingen..... 213	
7	Wiskunde met 11 Formules 231	
8	Toetsen van wis 12 Functies 255	
	13 Afgeleide functies..... 275	
	14 Statistische geletterdheid..... 297	
	15 Kansrekening 321	
	16 Klassieke meetkunde..... 341	
	17 Analytische meetkunde 365	

**Domeinspecifieke
didactieken**

Wiskunde wat en waarom?

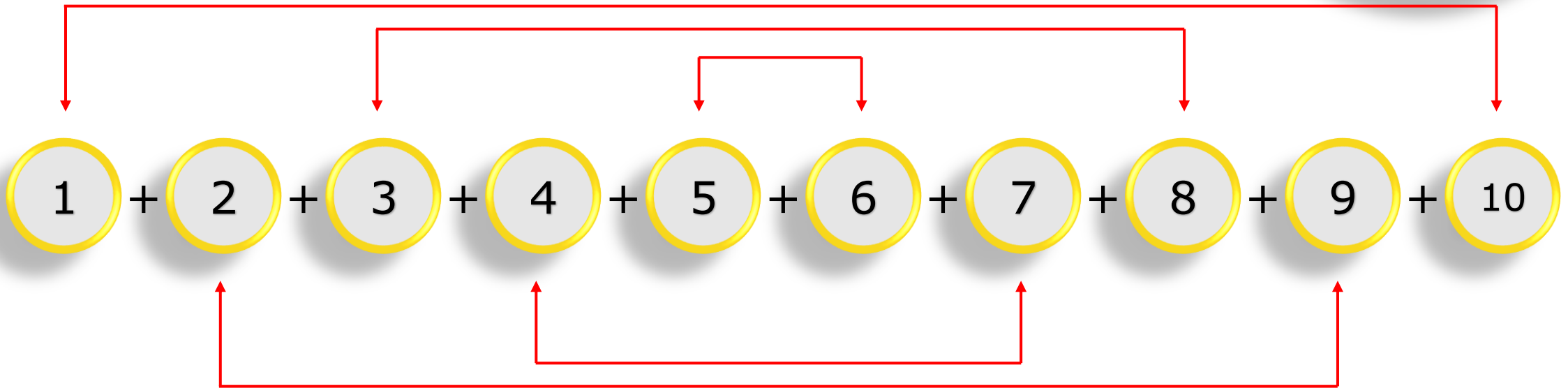
- Laat leerlingen ervaren dat wiskunde mooi, leuk, speels en bevredigend kan zijn
- Het is prettig om ergens grip op te krijgen, iets te begrijpen, te doorzien, zeker te weten
- Straal plezier en enthousiasme uit
- Verbeter het soms negatieve imago van wiskunde

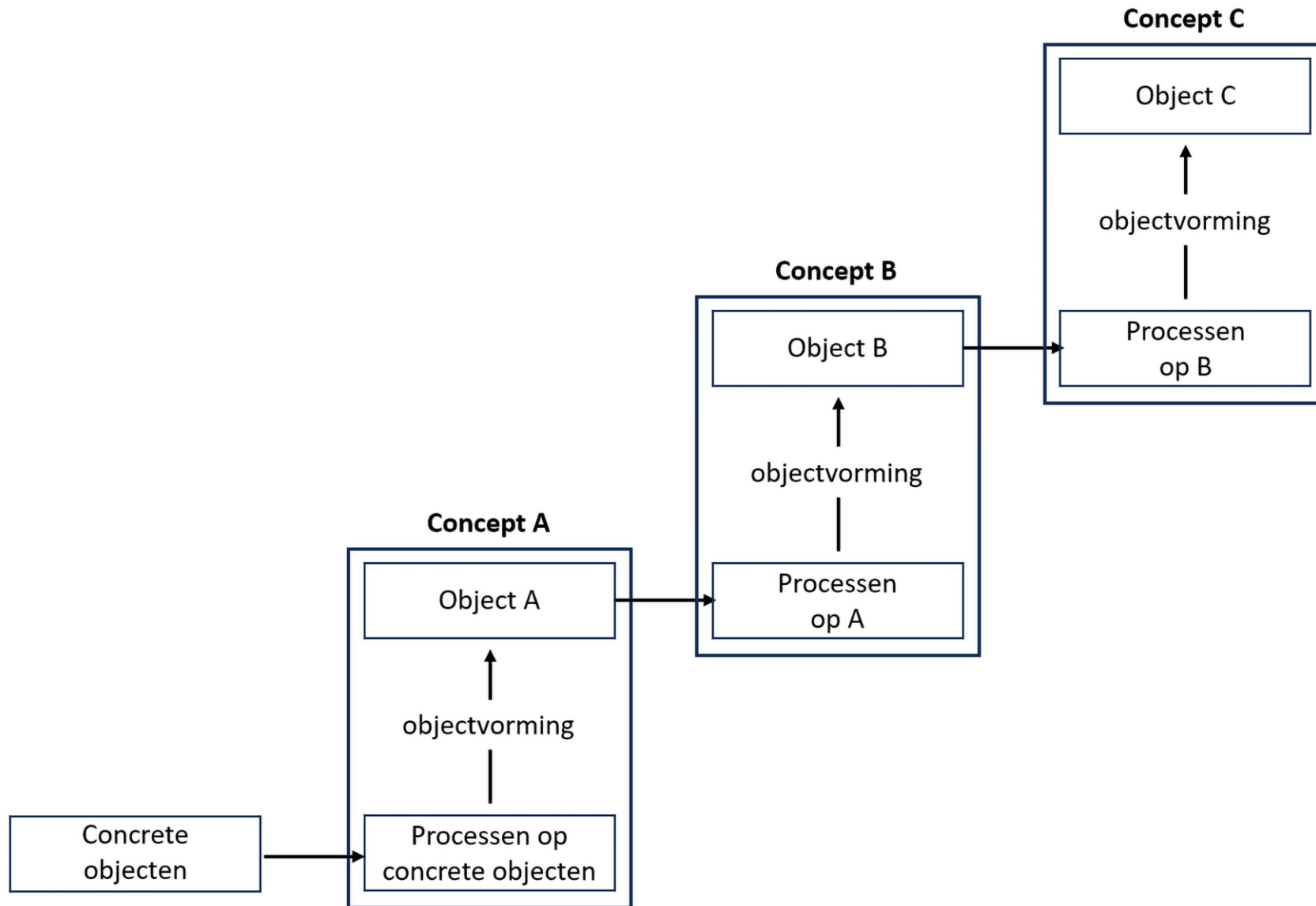
1



Wiskunde wat en waarom?

1





Werk aan een wiskundige attitude

- Werk aan de motivatie, aan de wiskundige houding van leerlingen
- Voorkom en bestrijd wiskundeangst



2

Werk aan een wiskundige attitude

Over rekenen-wiskunde

Kerdoel 16 De leerling ontwikkelt een wiskundige attitude.

16A De school stimuleert de ontwikkeling van een wiskundige attitude bij leerlingen.

Het gaat hierbij om:

- laten zien van het nut en de kracht van wiskunde in uiteenlopende toepassingen;
- stimuleren van een onderzoekende en kritische houding ten aanzien van getallen en andere wiskundige informatie;
- laten reflecteren op eigen en andermans rekenwijze en overig wiskundig handelen;
- inzicht bieden in hoe leerlingen wiskunde kunnen inzetten in de bovenbouw en het verdere leven.

Geef wiskunde betekenis

- Laat leerlingen ervaren dat wiskunde relevant is, iets betekent waarbij ze zich een beeld kunnen vormen
- Betekenisvol wiskundeonderwijs, dat is ook de kern van realistisch wiskundeonderwijs



3

Geef wiskunde betekenis

3

R

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers
Realistic Mathematics Education. In S. L.
Encyclopedia of Mathematics Education
Dordrecht, Heidelberg, New York, London

zich
REALiseren

Realistic Mathematics Education

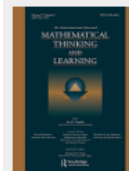
Marja Van den Heuvel-Panhuizen¹ and
Paul Drijvers²
¹Freudenthal Institute for Science and
Mathematics Education, Faculty of Science &
Faculty of Social and Behavioural Sciences,
Utrecht University, Utrecht, The Netherlands
²Freudenthal Institute, Utrecht University,
Utrecht, The Netherlands

Keywords

Domain-specific teaching theory; Realistic
contexts; Mathematics as a human activity;
Mathematization

Although “realistic” situations referring
of “real-world” situations are important in RME,
“realistic” has a broader interpretation here.
It means students are offered problem situations
which they can imagine. This interpretation of
“realistic” traces back to the Dutch expression
“zich REALiseren,” meaning “to imagine.”
It is this emphasis on making something real in
your mind that gave RME its name. Therefore, in
RME, problems presented to students can come
from the real world but also from the fantasy
world of fairy tales, or the formal world of
mathematics, as long as the problems are
experientially real in the student’s mind.

The Onset of RME



Mathematical Thinking and Learning >
Volume 1, 1999 - [Issue 2](#)

[Submit an article](#)

[Journal homepage](#)

Betekenis
opbouwen

Enter keywords, authors, DOI, etc

TITEL



[Realistic mathematics education](#)

M Van den Heuvel-Panhuizen, P Drijvers
Encyclopedia of mathematics education, 713-717

[The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in
classroom](#)

P Drijvers, M Doorman, P Boon, H Reed, K Gravemeijer
Educational Studies in mathematics 75, 213-234

1,729

Views

257

CrossRef
citations to date

1

Altmetric

Original Articles

How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics

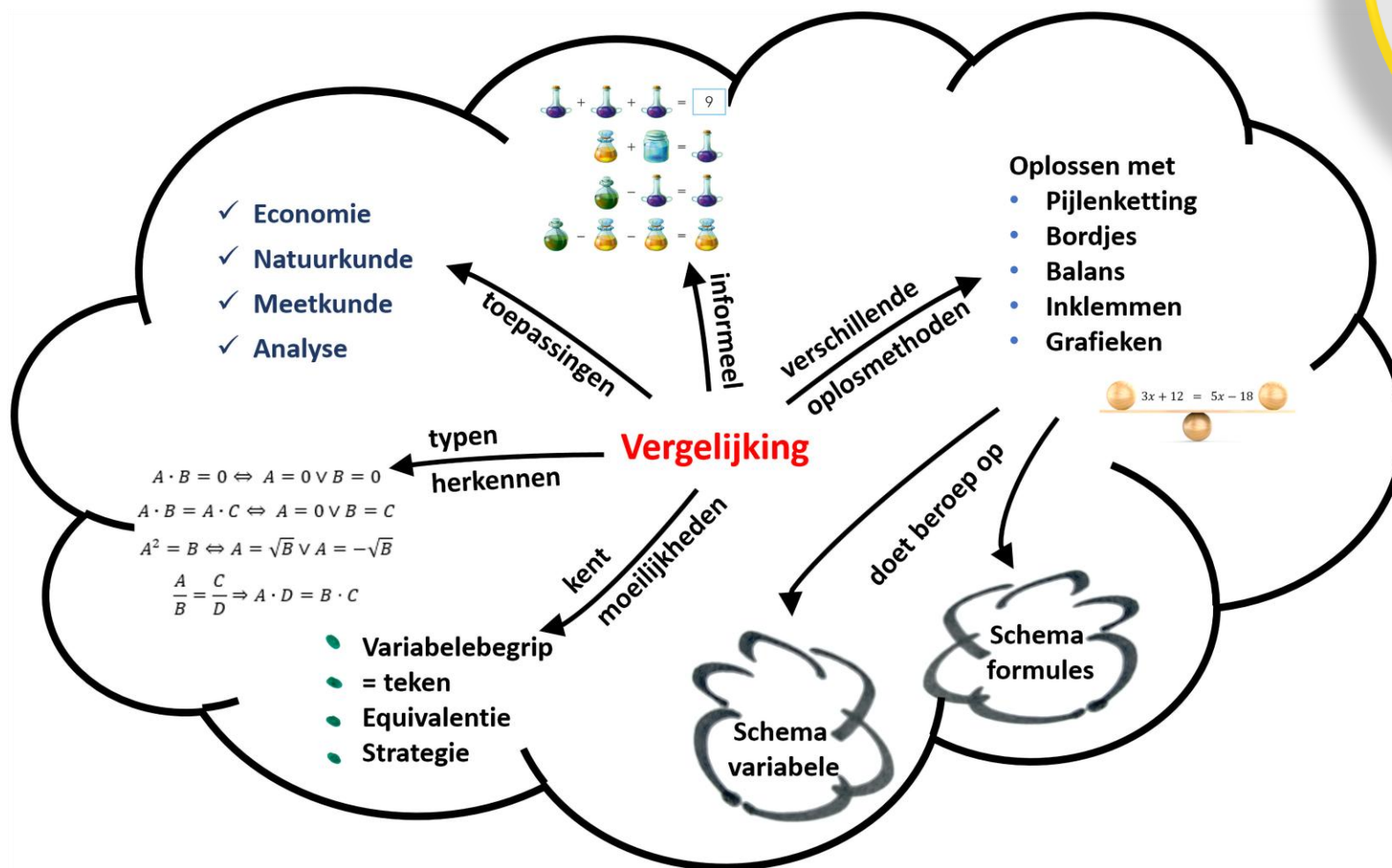
Koeno Gravemeijer

Pages 155-177 | Published online: 18 Nov 2009

[Cite this article](#) https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0102_4

Betekenis in samenhang

3





Wiskundendidactiek: Schema's

Wiskundekennis is voor leerlingen een samenhangend geheel van betekenisvolle beelden, grondvoorstellingen, technieken, toepassingen,...

Vergnaud (2009): "Een invariante organisatie van activiteit / gedrag in een bepaalde klasse van situaties"

Denk ook aan instrumentatieschema's, kennisgrafen, *body-artefact functional system* (Shvarts et al. 2021)

3

Vaardigheden veranderen

- Zorg ervoor dat vaardigheden het doel dienen
- Het doel is het functioneren in een veranderende wereld vol technologie, kwantitatieve en statistische informatie, ruimtelijke ervaringen
- Vaardigheden veranderen onder invloed van dit doel

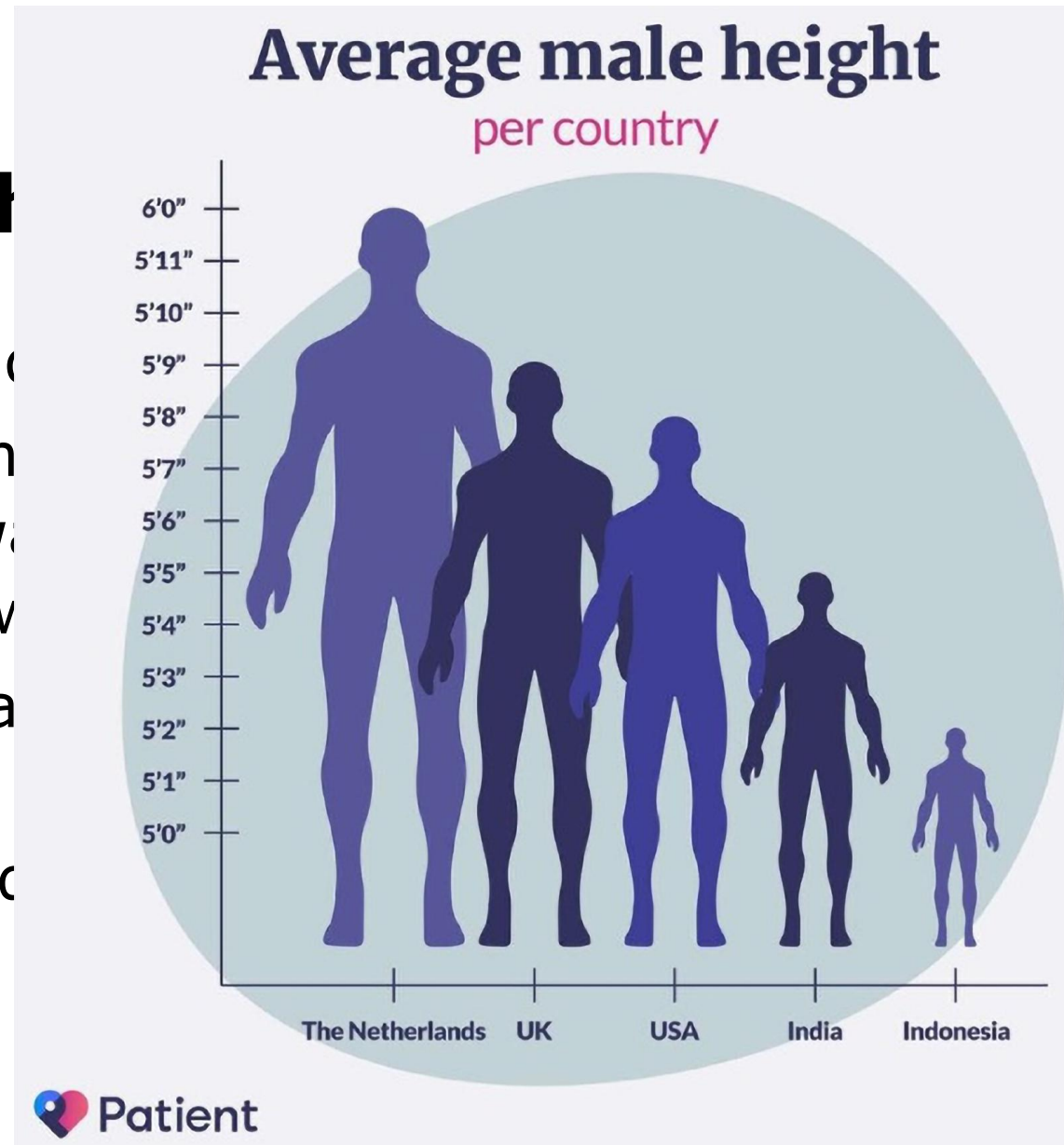


4

Vaardighe

Gecijferdheid

- Gaat erom van de kwaliteitsaspecten van
- Invulling a
- Loopt van vaardighe



4

mgaan
ie / ...

e
lenken)

Vaardigheden en wiskundige competentie

4

Procedurele vaardigheden

- Hoofdrekenen
- Cijferen met pen en papier
- Oefenen en automatiseren
- Memorizeren

Kilpatrick et al. (2001): procedurele vlotheid

Procedureel & Conceptueel

- Zijn verweven
- Versterken elkaar

Hiebert & Lefevre (1986)

Conceptuele kennis

- Procedures begrijpen en kunnen kiezen
- Kennis flexibel toepassen
- Probleemoplossen
- Modelleren en abstraheren

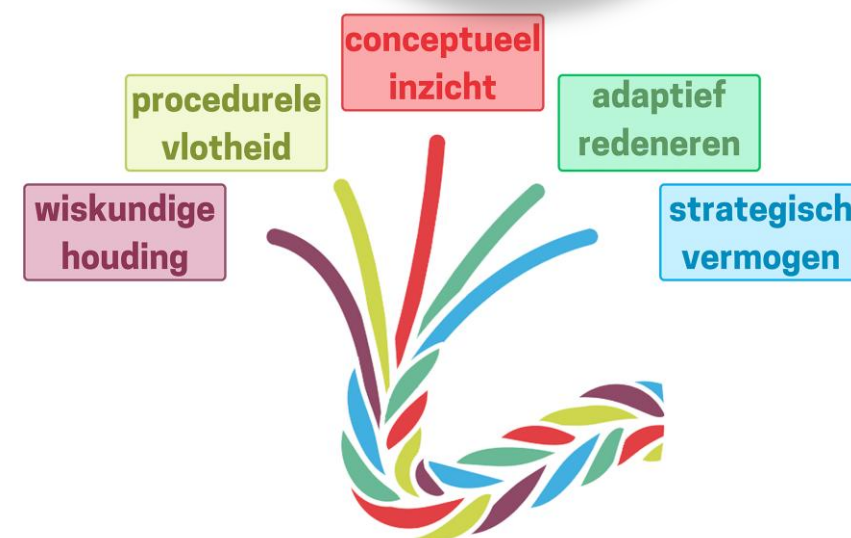
Kilpatrick et al. (2001): conceptueel inzicht

Gecijferdheid

- Kwantitatieve informatie begrijpen en beoordelen
- Grafieken en diagrammen lezen
- Redeneren

Geiger et al. (2015)

www.gecijferdheid.nl



(Drijvers & Heemskerk 2024)

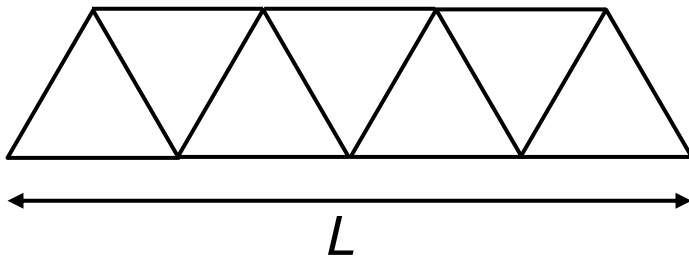
Vaardigheden oefenen

- Vaardigheden moet je oefenen
- Zorg voor speelsheid, variatie en productie
- Houd de doelen in het oog

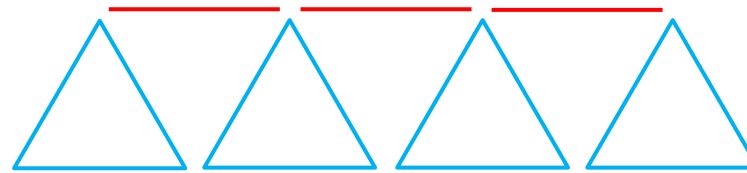


5

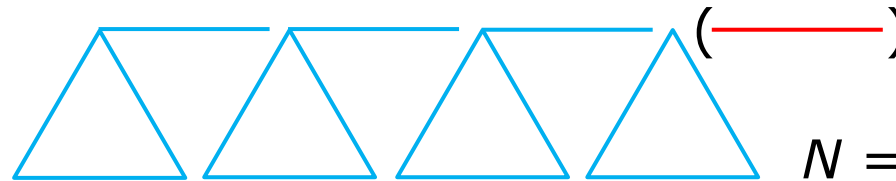
Vaardigheden oefenen



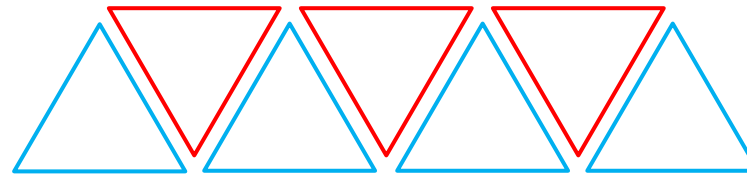
(Drijvers (Red.), 2006)



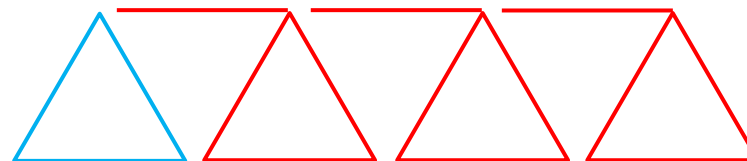
$$N = 3L + (L - 1)$$



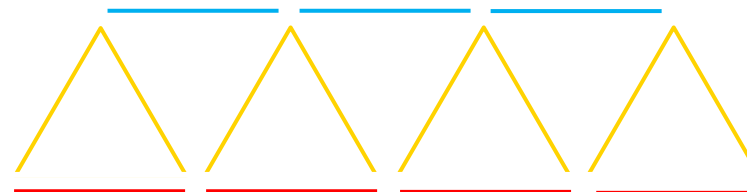
$$N = 4L - 1$$



$$N = (3L) + 3(L - 1) - 2(L - 1)$$



$$N = 3 + 4(L - 1)$$

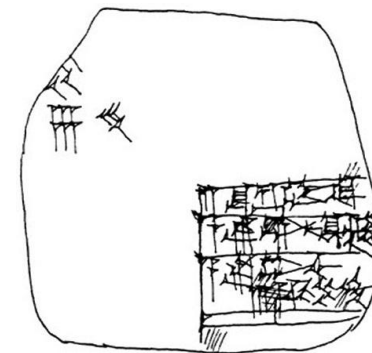


$$N = L + 2L + (L - 1)$$

5

Erken de rol van ICT

- Gereedschap is zo oud als de mensheid
- Inzet van ICT: een zich herhalende discussie
- Hillmayr et al. (2020): ICT-gebruik heeft een positieve effectgrootte van 0.65
- Maar verschillende factoren zijn daarop van invloed: schaalgrootte, kwaliteit, combinatie met andere methoden, ...



ICT: Opgave uit Getal en Ruimte

Differentieer de volgende functie.

a $f(x) = \frac{2x-1}{3x^2}$



Om de functie $f(x) = \frac{2x-1}{3x^2}$ te differentiëren, kunnen we de quotiëntregel gebruiken. De quotiëntregel zegt dat als $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, dan is de afgeleide gegeven door:

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Hier is $g(x) = 2x - 1$ en $h(x) = 3x^2$. Laten we de afgeleiden van g en h berekenen:

$$g'(x) = 2 \quad h'(x) = 6x$$

Vervang deze in de formule:

$$f'(x) = \frac{(2)(3x^2) - (2x-1)(6x)}{(3x^2)^2} = \frac{6x^2 - (12x^2 - 6x)}{9x^4} = \frac{6x^2 - 12x^2 + 6x}{9x^4} = \frac{-6x^2 + 6x}{9x^4}$$

Dit vereenvoudigt tot:

$$f'(x) = \frac{-6x(x-1)}{9x^4} = \frac{-2(x-1)}{3x^3} = \frac{-2(x-1)}{3x^3}$$

Dus, de afgeleide van de gegeven functie is $f'(x) = \frac{-2(x-1)}{3x^3}$.

6

ONDER DE LOEP

**Klaar voor de
GRexit?**

Gerd Hautekiet
Filip Moons
Luc Van den Broeck



ICT: Instrumentatietheorie

6

Formule invoeren met
formule-editor en : gebruiken
voor functiedefinitie

Weten dat snijpunt x -as
bepalen neerkomt op $f(x)=0$
oplossen.

Syntax van het Solve
commando kennen en inzien
dat je naar x en niet naar b
moet oplossen.

$$f(x) := x^4 - b x^2 + 1$$

$$\rightarrow f(x) := x^4 - b x^2 + 1$$

$$\text{Solve}(f(x) = 0, x)$$

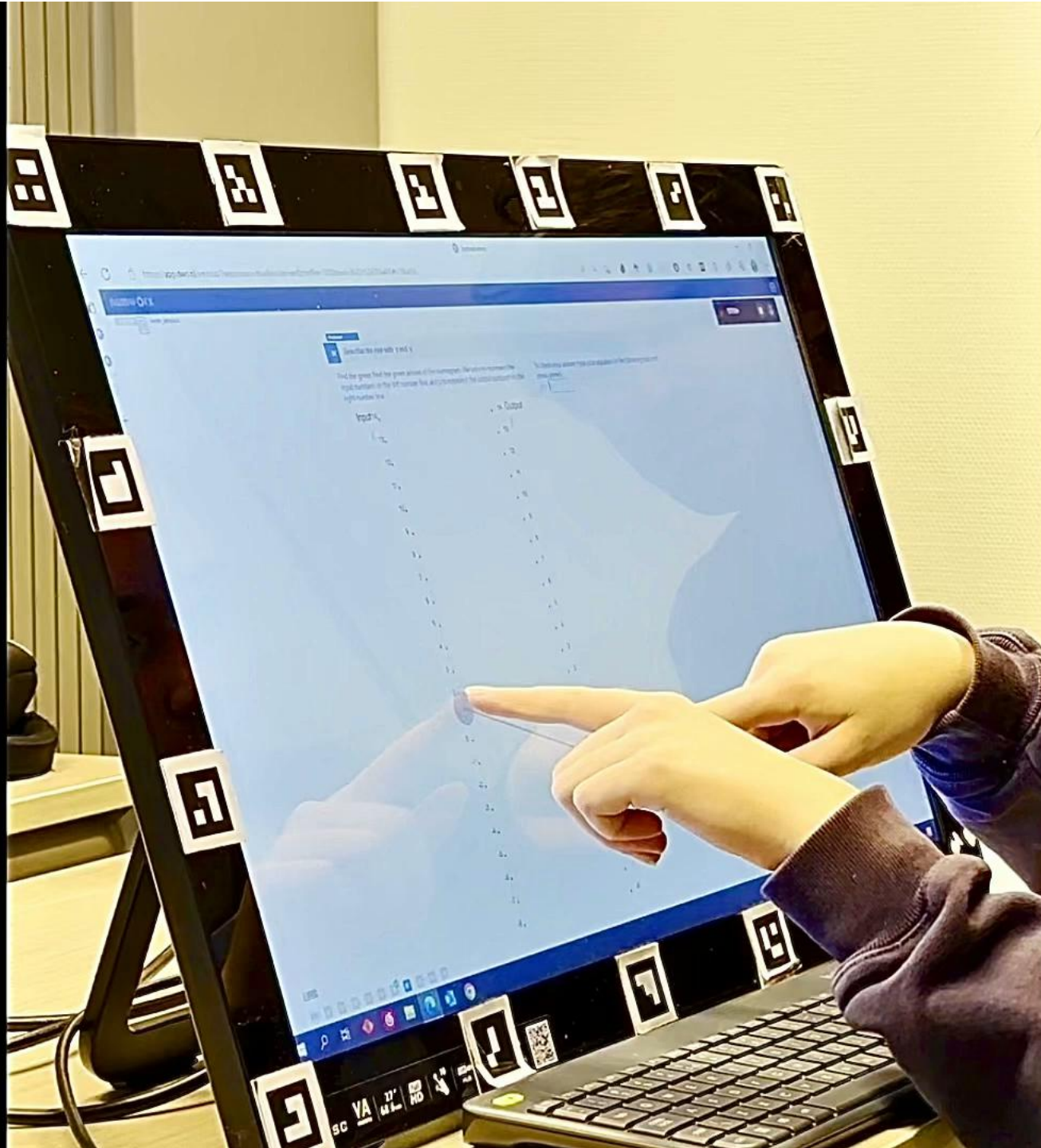
$$\rightarrow \left\{ x = \frac{-\sqrt{b+2} - \sqrt{b-2}}{2}, x = \frac{-\sqrt{b+2} + \sqrt{b-2}}{2}, x = \frac{\sqrt{b+2} - \sqrt{b-2}}{2}, x = \frac{\sqrt{b+2} + \sqrt{b-2}}{2} \right\}$$

Inzien dat je de oplossingen
geen getallen zijn maar
uitdrukkingen in b .

Inzien dat er niet altijd vier
verschillende oplossingen zijn,
maar soms ook twee, een of zelfs
geen, omdat de wortels niet voor
alle waarden van b bestaan .

Wisselwerking tussen
techniek en inzicht

(Drijvers, 2007, 2025)



6

ICT biedt ook nieuwe mogelijkheden

Wei, Bos & Drijvers, 2025

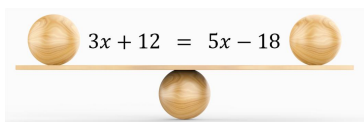
Leermiddelen en toetsen

- Wij zijn 'didactische ingenieurs' die onderwijs ontwerpen
- Laten we kritisch zijn op de kwaliteit van het ontwerp van methodes en toetsen
- Een toets is zo goed als de items zijn
- Centrale Examens: meer durven (stapelen, denkactiviteiten) en ICT gebruiken
- Schoolexamen is meer dan oefen-CE



7

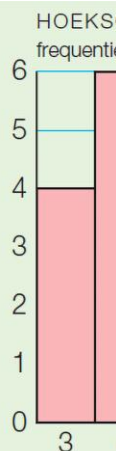
“Een variabele is een letter of woord waarvan de waarde kan veranderen”



Bij de frequentietabel is het staafdiagram hiernaast gemaakt. Midden onder elke staaf staat het aantal hoekschoepen. De frequenties staan langs de verticale as. Een staafdiagram bij een frequentietabel heet een **histogram**.

Een histogram is een staafdiagram bij een frequentietabel. De staven staan tegen elkaar aan.

Leerdoel Je kunt omgaan met frequentietabellen en histogrammen.



Afnamejaar	havo regulier	havo pilot	vwo regulier	vwo pilot
2011	16%	42%	—	—
2012	5%	26%	41%	60%
2013	5%	24%	33%	53%
2014	11%	32%	22%	50%
2015	21%	38%	35%	38%
2016	10%	22%	35%	38%
2017		22%	29%	27%
2018		33%		24%
2019		17%		27%
Gemiddeld	11%	31%	33%	44%

Tabel 3 Percentage van vragen die beroep doen op wiskundig denken in reguliere en pilotexamens havo en vwo.

(Drijvers & Kodde-Buitenhuis, 2019).

Vakdidactiek en lerarenopleiding

- Kwaliteit van de leraar cruciaal
- Borg die dus!
 - Vakdidactiek en –inhoud op de lerarenopleidingen
 - Mogelijkheden voor professionele ontwikkeling
 - Onderzoeksmogelijkheden voor d

win-winsituatie, toch?

VAKINHOUD WORDT GEMARGINALISEERD

Ook de eerstegraads masteropleidingen in het hbo
ontkomen niet aan de sloop van hun vakonderwijs ten

Onderwijsblad, februari 2025

Onderzoeksprogramma's > Promotiebeurs voor leraren

Promotiebeurs voor leraren

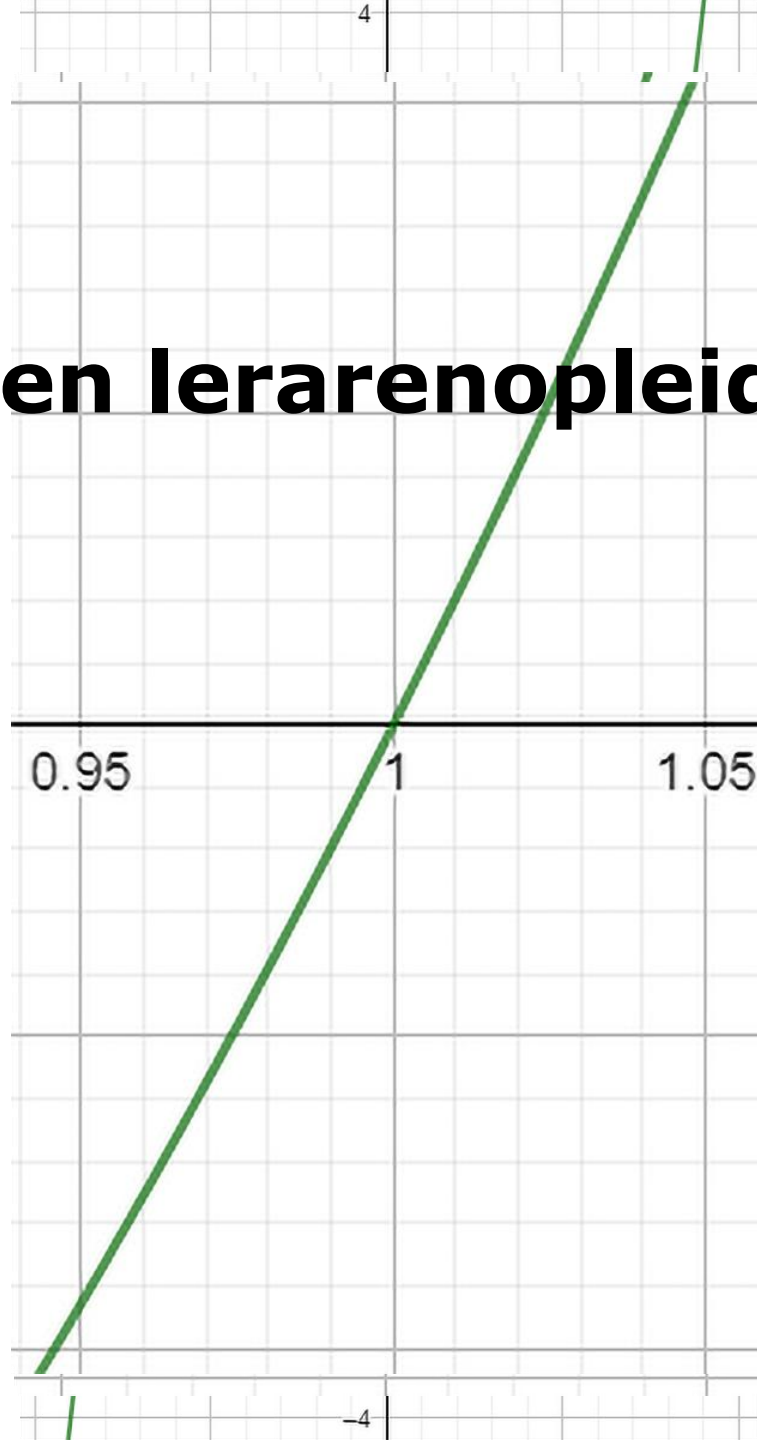
De Promotiebeurs voor leraren biedt docenten ondersteuning bij het schrijven van een proefschrift. Het doel van de beurs is docenten onderzoekservaring op te laten doen om de kwaliteit van het onderwijs te verbeteren en de aansluiting tussen universiteiten en scholen te versterken.

Let op: naar aanleiding van de bezuinigingen van dit kabinet wordt de Promotiebeurs voor leraren op termijn geschrapt.

→ [Meer informatie](#)



Vakdidactiek en lerarenopleiding



8

Erken verschillende vormen van evidentie

- Behoefte aan *evidence-informed* werken
- Maar wat is evidentie?
- Randomized Controlled Trials en effectgroottes: nuttig maar ook beperkt
- Er is meer dan RCT: Design Research, Lesson Study, ...
- Evidentie ligt ook in praktijkonderzoek en bewezen waarde in de praktijk

9





Feedback

Zeer groot effect tegen zeer lage kosten, op basis van sterk bewijs. [Toelichting](#)

Effect (in maanden)

+6

Bewijs



Kosten

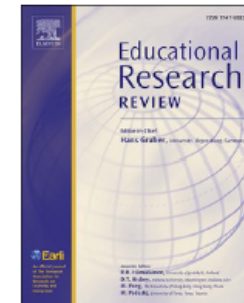


ELSEVIER

Contents lists available at [ScienceDirect](#)

Educational Research Review

journal homepage: www.elsevier.com/locate/edurev



Review

Response to De Jong et al.'s (2023) paper “Let’s talk evidence – The case for combining inquiry-based and direct instruction”

John Sweller^{a,*}, Lin Zhang^b, Greg Ashman^{c,d}, William Cobern^e, Paul A. Kirschner^{f,g}



Vermijd doemdenken

- Er is geen sprake van een onderwijsramp...

TIMSS en Peil 2023:

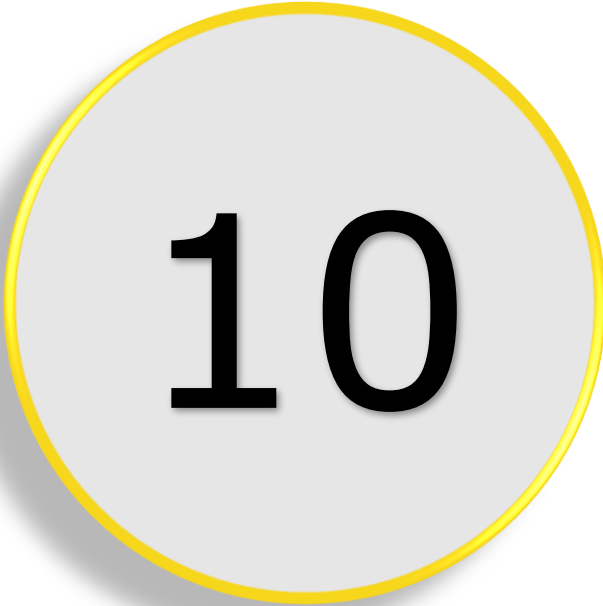
- TIMSS groep 6: NL 13de van de 58
- Peil groep 8: niveau gelijk aan dat van 20 jaar geleden

PISA 2022:

- Leerlingen van 15 jaar
- NL 10de van de 81
- Prestaties dalen wereldwijd

PIAAC 2023:

- Volwassenen
- NL 5de van de 31

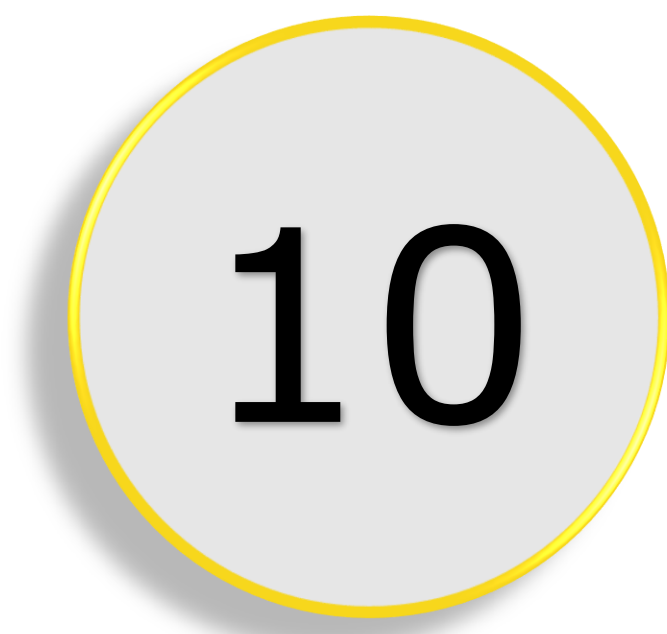


10

Vermijd doemdenken

Wel tal van urgente uitdagingen:

- Aandacht en attitude van leerlingen
- Aantallen bevoegde leraren
- Realisatie van nieuwe doelen
- Operationalisatie van gecijferdheid over de volle breedte
- Balans tussen werken met pen-en-papier en ICT
- Vakdidactische kwaliteit van lessen, methoden en toetsen



10

Vermijd doemdenken

10

Rekenonderwijs
kan nieuwe
oplossingen
gebruiken

De problemen in het reken- en wiskundeonderwijs kunnen we niet oplossen door terug te gaan naar simpelweg optellen en aftrekken, stelt *Paul Drijvers*.

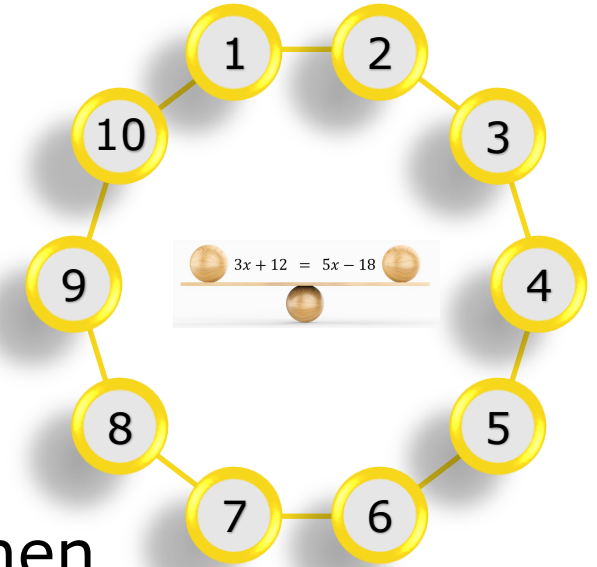


Werk aan de winkel dus. Eenvoudige oplossingen zijn er niet, dus laten we niet doen alsof een nostalgisch en simplistisch beeld van onderwijs van vroeger die wel biedt.



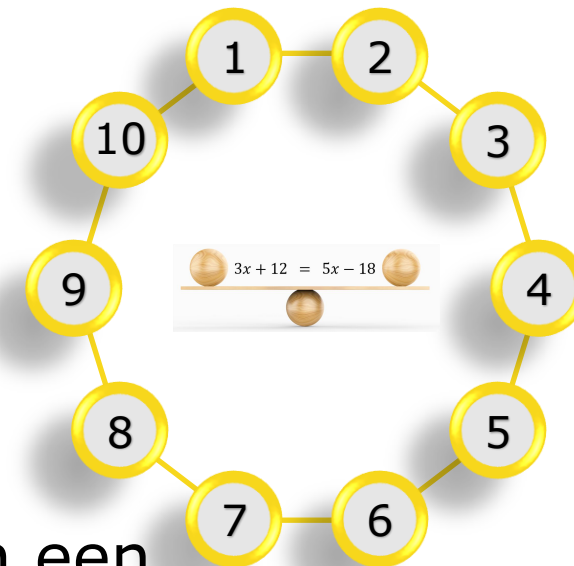
Moraal (1)

- Wiskunde is leuk en betekenisvol, daarmee kunnen we leerlingen motiveren
- Veel verandert: de samenleving, de onderwijsdoelen, de benodigde vaardigheden, de rol van ICT
- Het doel van (wiskunde)onderwijs is om leerlingen op toekomstig functioneren voor te bereiden



Moraal (2)

- Vaardigheden verschuiven dan in de richting van een combinatie van gecijferdheid, probleemoplossen en wiskundig denken
- Kies qua instructiemethode voor evenwicht en balans
- Samen de schouders eronder!

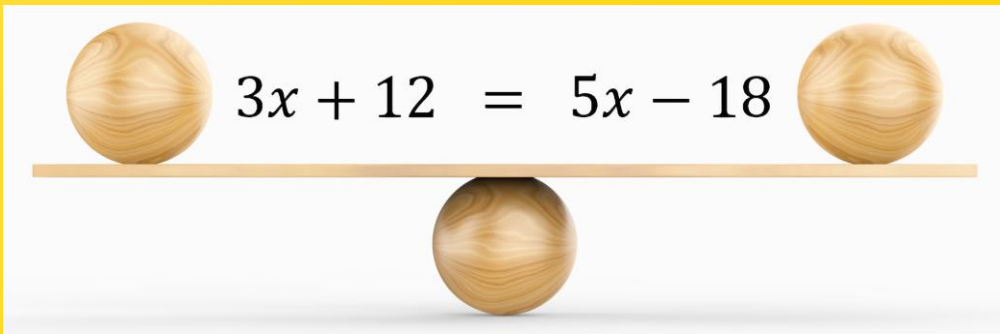




Utrecht University



Freudenthal Institute



Tien handvatten voor evenwichtig wiskundeonderwijs

Afscheidscollege Paul Drijvers

Utrecht, 23 juni 2025



Utrecht University



Freudenthal Institute



**Opening door Bert Klein-Gebbink,
vice-decaan Faculteit Bètawetenschappen**
**Woordje door Ralph Meulenbroeks,
hoofd Freudenthal Instituut**
Afscheidscollege van Paul Drijvers
**Aanbieding boek door Wim Caspers
namens Epsilon Uitgevers**
Afsluiting door Paul Drijvers
Receptie



Utrecht University

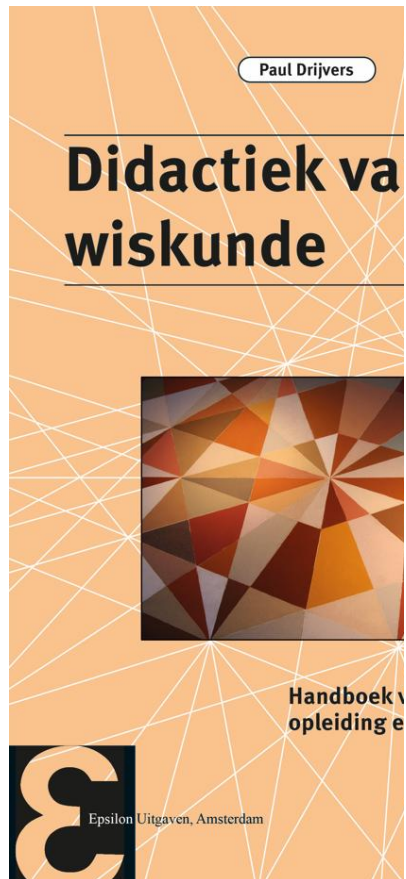


Freudenthal Institute



**Opening door Bert Klein-Gebbink,
vice-decaan Faculteit Bètawetenschappen**
**Woordje door Ralph Meulenbroeks,
hoofd Freudenthal Instituut**
Afscheidscollege van Paul Drijvers
**Aanbieding boek door Wim Caspers
namens Epsilon Uitgevers**
Afsluiting door Paul Drijvers
Receptie

Daarom ben ik zeer dankbaar dat een groot aantal collega's, waaronder de meeste coauteurs van het boek uit 2012, bereid is gevonden om kritisch mee te lezen met de hoofdstukken-in-woording en daarop uitgebreid te reageren. Dit betreft lerarenopleiders, onderzoekers, ontwikkelaars, leraren en studenten, die samen de doelgroep en het veld goed overdekken. Hun input heeft een grote rol gespeeld in de kwaliteit van de tekst zoals die er nu ligt.



Mijn grote dank gaat dan ook uit naar Arthur Bakker, Theo van den Bogaart, Rogier Bos, Kevin de Bruijn en zijn collega's, Sharon Calor en haar studenten, Wim Caspers, Joke Daemen, Jeanine Daems, Michiel Doorman, Harrie Eijkelhof, Koenno Gravemeijer, Dédé de Haan, André Heck, Willem Hoekstra, Marloes van Hoeve, Egbert-Jan Jonker, Gert de Kleuver, Hanneke Kodde-Buitenhuis, Trudy van der Kolk, Peter Kop, Peter Lanser, Filip Moons, Sonia Palha, Gerrit Roorda, Kelly Schedin, Corwin van Schendel, Alexander Schüler-Meyer, Jeroen Spandaw, Marieke Spijkstra, Irene van Stiphout, Kees Temme, Mark Timmer, An Vanfroyenhoven en Bert Zwaneveld†. De uitgeverijen Boom, Malmberg, Noordhoff en de Wageningse Methode dank ik voor het leveren van de illustraties uit schoolboeken, net als Peter Boon voor de schermafdrucken van Numworx. Dank ook aan Epsilon Uitgaven en haar redactie voor de steun bij het tot stand komen en uitgeven van het boek. Nathalie Kuijpers was weer een grote steun bij het drukklaar maken van het manuscript en Tom Goris ontwierp het fraaie omslag.

Bovenal heel veel dank aan Else Simons, mijn kritische eerste meelezer. Haar commentaren, scherp en *to-the-point*, leidden niet alleen tot een beter boek maar ook tot interessante keukentafelgesprekken.



La retraite

SIGMUND **PETER DE WIT**



Vanaf dat moment
heeft u recht op een
middagdutje en mag
u de hele dag op
pantoffels lopen.





Utrecht University



Freudenthal Institute



**Opening door Bert Klein-Gebbink,
vice-decaan Faculteit Bètawetenschappen**

**Woordje door Ralph Meulenbroeks,
hoofd Freudenthal Instituut**

Afscheidscollege van Paul Drijvers

**Aanbieding boek door Wim Caspers
namens Epsilon Uitgevers**

Afsluiting door Paul Drijvers

Receptie