

Een internationaal perspectief op reken- en wiskundeonderwijs Nr. 7.

In de internationale literatuur op het gebied van het reken- en wiskundeonderwijs staat het specifieke karakter van rekenen en wiskunde centraal. Deze literatuur laat zien dat dit vak heel specifieke eisen stelt aan het onderwijs. In deze reeks wil de werkgroep Wiskunde voor Morgen dit internationale perspectief voor het voetlicht brengen aan de hand van toonaangevende internationale artikelen.

In deze bijdrage betreft dit Kuster et al. (2019).

## **Kuster et al. (2019) Kenmerken van Inquiry-Oriented Instruction**

Koeno Gravemeijer, Werkgroep Wiskunde voor Morgen

Binnen bachelorsopleidingen wiskunde wordt op verschillende universiteiten in de VS gekozen voor *'inquiry oriented instruction'* (IOI). Het ligt voor de hand om bij *'inquiry oriented instruction'* te denken aan wat in het Nederlands 'onderzoekend leren' wordt genoemd. Die Nederlandse term wordt echter, terecht of onterecht, geassocieerd wordt met een grote mate van vrijblijvendheid en dat is bij IOI absoluut niet het geval. IOI is juist heel gestuurd, al gaat het hier wel om indirecte sturing. De sturing vindt plaats door het werken met reeksen van goed doordachte, beproefde, opdrachten, door de leraar georkestreerde klassendiscussies en het stellen van verdiepende vragen. De auteurs wijzen erop dat de inquiry, het onderzoeken, zowel het gedrag van de leerlingen als het gedrag van de leraren betreft. De studenten onderzoeken wiskunde, de docenten onderzoeken het wiskundig denken van leerlingen.

In een artikel uit 2019 beschrijven Kuster et al. het ontwikkelen van een meetinstrument waarmee je kunt vaststellen in hoeverre er in een bepaalde situatie daadwerkelijk sprake is van *'inquiry oriented instruction'* (IOI). Het artikel is interessant omdat in het proces van het maken van zo'n meetinstrument geoperationaliseerd wordt wat in *Inquiry oriented Instruction* van docenten wordt verwacht.

### **Ontwikkelen van een meetinstrument**

De auteurs merken op dat enkele zeer prominente studies de voordelen van actief leren aantonen (bijv. Freeman et al. 2014; Laursen et al. 2014), waardoor er een groeiende consensus is ontstaan dat actief leren 'werkt'. Maar, zeggen zij, er is verder onderzoek nodig om na te gaan welke vormen van op actief leren gericht onderwijs het beste werken voor verschillende groepen studenten. Om zulk onderzoek te faciliteren ontwikkelen de onderzoekers een meetinstrument dat ze de *'Inquiry Oriented Instructional Measure'* (IOIM) noemen.

Om een meetinstrument te maken moet je een goed beeld hebben van hoe inquiry oriented instruction eruit zou moeten zien. De auteurs construeren daartoe een typering van wat de leraar moet doen om van inquiry-oriented instruction in de praktijk te realiseren. In deze bijdrage richten we ons op deze typering en laten het deel van het artikel dat handelt over het valideren van het meetinstrument hier buiten beschouwing. Hoewel de auteurs zich richten op het wiskundeonderwijs op bachelors niveau, denken we dat de typering die ze geven ook relevant zijn voor het basis- en middelbaar onderwijs.

Het meetinstrument is het resultaat van een uitgebreid, iteratief proces waarin onderzoeksliteratuur over wiskundeonderwijs aan vier- tot 16-jarigen werd bestudeerd, video's van klassikaal onderwijs werden geanalyseerd en pilot-testen werden uitgevoerd. Dit proces

resulteerde in het identificeren van onderwijspraktijken die inquiry oriented instruction op bachelorsniveau karakteriseren. Deze praktijken, die de kern van het meetinstrument vormen, bieden een empirisch gefundeerde beschrijving van IOI.

Om deze beschrijving te ontwikkelen, bestudeerden Kuster et al. (2019) drie wiskunde-leergangen op bachelors niveau:

- Inquiry-Oriented Abstract Algebra (Larsen et al. 2013),
- Inquiry-Oriented Differential Equations (Rasmussen et al. 2017) en
- Inquiry-Oriented Linear Algebra (Wawro et al. 2017).

Bij alle drie de curricula werd de realistische onderwijstheorie (RME) als ontwerptheorie gebruikt om lokale onderwijstheorieën<sup>1</sup> te ontwikkelen. Daarnaast baseerden de ontwikkelaars zich op de uitgangspunten van Cobb en Yackel (1996) met betrekking tot de klassencultuur. (Zie internationaal vakdidactisch perspectief nr.6.) Deze gemeenschappelijke theoretische basis zorgde ervoor dat de materialen op hetzelfde type onderwijsdoelen en implementatie waren gericht. Deze combinatie van theorieën, onderwijsdoelen en beoogde implementatie vormen de kern van IOI.

In een toelichting op het gebruik van RME verwijzen de auteurs naar het idee van wiskunde als een menselijke activiteit (Freudenthal, 1973) en het principe van het uitlijnen van een route waarlangs studenten formele wiskunde opnieuw kunnen uitvinden. Deze worden in de IOI-curriculummaterialen uitgewerkt in opdrachtenreeksen, die zijn ontworpen om de informele en intuïtieve manieren van redeneren van studenten te gebruiken als aangrijpingspunten voor het opbouwen van meer geavanceerde en formele wiskundige inzichten.

De in de studie gebruikte de IOI-leergangen worden niet alleen gelegitimeerd door de theoretische basis die RME levert, maar ook door empirisch onderzoek. De hierboven genoemde leergangen zijn ontwikkeld, getest en verfijnd in ontwerponderzoek. Binnen dit onderzoek zijn op uitgebreide schaal video's, studentenwerk en interviews met studenten verzameld. Deze data zijn geanalyseerd om het redeneren van de studenten te vast te leggen. De auteurs benadrukken het feit dat de IOI-leergangen zijn gebaseerd op onderzoek. In de uitvoering van deze leergangen zullen verfijningen worden aangebracht op basis van hoe de studenten daadwerkelijk redeneren, om er zo voor te zorgen dat zij op zinvolle wijze kunnen participeren in het heruitvinden van wiskundige ideeën. De activiteiten worden meestal uitgevoerd in kleine groepen, waarbij de resultaten in klassendiscussies gezamenlijk worden besproken.

## IOI en Inquiry-Based Learning

Om hun inzicht in kenmerken van IOI verder te aan te scherpen vergelijken ze Inquiry-Oriented Instruction met Inquiry-Based Learning, IBL (Laursen and Rasmussen, 2019). Het blijkt dat de aard van wat studenten doen in IOI- en IBL-klassen heel vergelijkbaar is, maar dat de rol van een IOI-docent veel specifiekere wordt gekarakteriseerd. IBL-docenten zijn verantwoordelijk voor het begeleiden, beheren, coachen en monitoren van het onderzoek van studenten. IOI vereist niet alleen dat de studenten onderzoekend bezig zijn, maar ook dat docenten het denken van studenten over de wiskunde onderzoeken. Door het denkwerk van de studenten te onderzoeken kunnen ze bepalen hoe ze de bijdragen van de studenten kunnen gebruiken om de klas als geheel te helpen de wiskunde-doelen te bereiken. De basis ligt in opdrachten waarvan

---

<sup>1</sup> De auteurs gebruiken de term 'learning trajectories', maar binnen deze tekst past het beter om te spreken van lokale onderwijstheorieën om ze te onderscheiden van de hypothetical learning trajectories van Simon (1995), die zich richten op een kortere tijdsperiode en concreter zijn uitgewerkt.

is aangetoond dat ze wiskundig denken en redeneren kunnen bevorderen. Daarmee ontlocken IOI-docenten de studenten zelf-gegenereerde bijdragen. De docenten interpreteren en analyseren deze bijdragen, beslissen welke nuttig zijn. Ze bepalen vervolgens hoe deze bijdragen kunnen worden gebruikt voor het bevorderen van de wiskundige ontwikkeling van de hele klas. Binnen IOI is het onderzoeken van het denken van de studenten is een belangrijke activiteit van de docent. Daarmee onderscheidt IOI zich van andere vormen van onderzoekend onderwijs. Bovendien is het RME-concept van het heruitvinden – waarbij het informele redeneren van studenten wordt benut om de formele wiskunde te ontwikkelen – een bepalend kenmerk van IOI dat niet noodzakelijkerwijs aanwezig hoeft te zijn in IBL.

Door uit te gaan van de drie eerdergenoemde IOI-curricula, konden de onderzoekers de ontwikkeling van het meetinstrument baseren op RME-literatuur en onderzoek naar de implementatie van de IOI-materiaal. Verder maakte het analyseren van de overeenkomsten tussen IOI en andere onderwijsbenaderingen (zoals IBL) het mogelijk om na te denken over welke aspecten van IOI van cruciaal belang zijn. Maar volgens de onderzoekers, was het beeld dat deze activiteiten opleverde nog te globaal. Pas aan het eind van het project waren ze in staat om IOI karakteriseren als een set van vier onderwijsprincipes, die worden ondersteund door zeven onderwijspraktijken.

## Vier onderwijsprincipes

De vier onderwijsprincipes betreffen, het genereren van manieren van redeneren door studenten, voortbouwen op bijdragen van studenten, het ontwikkelen van een gedeeld begrip en het verbinden met standaard wiskundige taal en notatie:

- *Het genereren van manieren van redeneren door studenten* omvat het betrekken van studenten bij wiskundige opdrachten, zodat hun denken wordt onderzocht en hun ideeën openbaar worden gemaakt.
- *Voortbouwen op bijdragen van studenten* bestaat uit het betrekken van studenten bij elkaars ideeën en het gebruiken ervan (op mogelijk onvoorziene manieren) om de klas naar een wiskundig doel te leiden.
- *Het ontwikkelen van een gedeeld begrip* benadrukt het belang van het ondersteunen van elk individu bij het ontwikkelen van overeenkomstige manieren van denken, redeneren en het noteren van specifieke ideeën.
- *Verbinding maken met standaard wiskundige taal en notatie* houdt in dat studenten overstappen van de idiosyncratische wiskundige notatie en termen die in in eerste instantie worden gebruikt naar standaarddefinities en notatie.

## Zeven onderwijspraktijken

De vier instructieprincipes worden gekoppeld aan zeven onderwijspraktijken. Deze onderwijspraktijken beschrijven meer in detail, hoe leraren het denken en redeneren van studenten kunnen uitlokken, onderzoeken en benutten om de wiskundedoelen te bereiken. Daarmee karakteriseren deze zeven onderwijspraktijken die samen IOI in het wiskundeonderwijs.

1. *De leraren zorgen ervoor dat de leerlingen actief deelnemen aan zinvolle opdrachten en activiteiten, die betrekking hebben op een belangrijke wiskundig inhoud.*

Ze doen dit door specifiek daarvoor ontwikkelde opdrachten aan te beiden, die ervoor kunnen zorgen dat de leerlingen wiskundige kernideeën ontwikkelen. De kwaliteit van de wiskundige activiteiten vinden de auteurs daarbij (nog) belangrijker dan de wiskundige inhoud. De

auteurs doelen daarmee met name op, ‘complex thinking and reasoning strategies that would be typical of ‘doing mathematics’’ (2019, p. 187). Het participeren in authentieke wiskundige activiteiten vormt de kern van de inquiry-benadering. Met behulp van goed gekozen opdrachten en de wiskundige activiteiten die daarbij horen, kunnen de leraren ervoor zorgen dat de leerlingen betekenisvolle wiskunde ontwikkelen. Bij de opdrachten dient dan sprake te zijn van ‘high cognitive demand’ (Smidt & Stein, 2011).

*2. De leraren stimuleren de inbreng en het redeneren van de leerlingen.*

Om voort te kunnen bouwen op het denken van de leerlingen, moeten de leerlingen dit denken expliciet maken. De leraren moeten proberen de wiskunde achter de antwoorden boven tafel te krijgen. Dat wil zeggen, dat ze de leerlingen stimuleren om hun redeneringen toe te lichten. Om er vervolgens voor te zorgen dat deze redeneringen onderwerp van een klassengesprek worden.

*3. De leraren onderzoeken actief hoe de leerlingen denken.*

De leraren bevragen de leerlingen over hoe ze denken om daar een goed beeld van te krijgen. De bedoeling is niet om erachter te komen of het denken en leren van de leerlingen correct is, maar om erachter te komen *hoe* ze denken. De manier waarop de leraren met de leerlingen in gesprek gaan, maakt de leerlingen er ook van bewust dat de leraren oprecht geïnteresseerd zijn in hoe ze denken. Dit zorgt er ook voor dat dit denken wordt aangemoedigd.

*4. De leraren reageren op wat de leerlingen inbrengen en gebruiken die inbreng bij het vormgeven van de les.*

Wanneer de leraren een beeld hebben van wat voor ideeën de leerlingen hebben, moeten ze bedenken welke ideeën ze kunnen gebruiken en hoe ze die kunnen gebruiken. De auteurs spreken hier van een ‘instructional space of tasks’, waarbij de leraren zich oriënteren op de ideeën en redeneringen van de leerlingen en de bijdragen van de leerlingen gebruiken om het vervolg van het onderwijsleerproces te plannen.

*5. De leraren zorgen ervoor dat leerlingen met elkaar in gesprek gaan over elkaars redeneringen.*

Bijvoorbeeld door ze in eigen woorden te laten navertellen wat er is gezegd, of door te vragen de redenering van iemand anders te verhelderen, of door te vragen hoe je het idee dat door iemand is geopperd kunt gebruiken. Het nadenken over de redenering van een ander kan de leerlingen stimuleren om kritisch naar de eigen oplossing te kijken. De gesprekken tussen de leerlingen kunnen bovendien worden gebruikt om ervoor te zorgen dat gedeelde kennis en inzichten ontstaan.

*6. De leraren geven richting aan het onderwijsleerproces op basis van een wiskundige agenda.*

Hoewel er allerlei leergangen voor beschikbaar zijn, zullen de leerwegen per klas verschillen. Er zullen immers steeds verschillen zijn in de manier van denken en in het verloop van de klassengesprekken. Dit betekent dat de leraren de opdrachten en klassengesprekken zo moeten inrichten dat het leerproces zich in de richting van de geplande doelen ontwikkelt.

*7. De leraren bevorderen het formaliseren van de ideeën en bijdragen van leerlingen en introduceren waar nodig formeel taalgebruik en notaties.*

Uiteindelijk is het de bedoeling dat de leerlingen zich de gangbare notaties, representaties, definities en procedures eigen maken. Zo zullen leraren erop aansturen dat de informele, idiosyncratische wiskunde van de leerlingen ontwikkelt in de richting van de gangbare wiskunde. Bijvoorbeeld door oplossingen van leerlingen te beschrijven in gangbare

wiskundetaal en met gangbare symbolen. Ook kunnen leraren op een gegeven moment standaardvormen van wiskunde presenteren en de leerlingen vragen om deze te interpreteren en beoordelen op basis van de kennis en inzichten waar ze inmiddels over beschikken.

## Praktisch nut

De bovenstaande karakterisering van IOI is door de onderzoekers ontwikkeld als basis voor een observatieschema waarmee kan worden onderzocht, in hoeverre het uitgevoerde onderwijs overeenstemt met het beoogde IOI-onderwijs. Hoewel we dit observatieschema hier niet verder bespreken is het wel van belang om op te merken dat het artikel ook het onderzoek beschrijft, waarin dit instrument is gevalideerd. Eén van de criteria is dat de variatie in uitvoering in kaart kan worden gebracht. In verband hiermee wordt opgemerkt dat de docenten in de praktijk navigeren binnen het continuüm van volledig uitleggen door de docent tot volledig onderzoeken door de studenten.

Het belang van het besproken artikel ligt volgens ons in de direct op de praktijkgerichte beschrijving van inquiry oriented instruction. Het biedt heldere aanwijzingen voor wat de docent moet doen om dergelijk onderwijs in de klas te realiseren. Hoewel het onderzoek van Kuster et al. (2019) zich richtte op wiskundeonderwijs op bachelorsniveau zijn de aanwijzingen naar ons idee ook toepasbaar bij het reken- en wiskundeonderwijs op andere niveaus. Dat geldt dan met name voor onderwijs waarin de leerlingen worden gestimuleerd en worden ondersteund in het zelf construeren van wiskundige kennis en -inzichten.

## Literatuur

- Kuster, G., Johnson, E., Rupnow, R., & Wilhelm, A. G. (2019). The Inquiry-Oriented Instructional Measure. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 5, 183-204.
- Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational psychologist*, 31(3-4), 175-190.
- Freeman, S., Eddy, S. L., McDonough, M., Smith, M. K., Okoroafor, N., Jordt, H., & Wenderoth, M. P. (2014). Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(23), 8410–8415.
- Freudenthal H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel, Dordrecht.
- Larsen, S., Johnson, E., & Weber, K. (Eds.). (2013). The teaching abstract algebra for understanding project: Designing and scaling up a curriculum innovation. *Special Issue of the Journal of Mathematical Behavior*, 32(4), 691–790.
- Laursen, S. L., Hassi, M. L., Kogan, M., & Weston, T. J. (2014). Benefits for women and men of inquirybased learning in college mathematics: A multi-institution study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(4), 406–418.
- Laursen, S.L. & Rasmussen, C. (2019). More than Meets the I: Inquiry Approaches in Undergraduate Mathematics. *Proceedings of the Twenty-second Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*. Oklahoma City, OK.
- Rasmussen, Keene, Dunmyre & Fortune (2017) *Inquiry-oriented Differential Equations*. <https://iode.wordpress.ncsu.edu/>. Accessed 04 Arp 2019.
- Wawro, M., Zandieh, M., Rasmussen, C., & Andrews-Larson, C. (2017). *The inquiry-oriented linear algebra project*. <http://iola.math.vt.edu>. Accessed 04 Arp 2019.